Notas de Elementos de Matemática 2

Murúa, Rodolfo
Notas de elementos de matemática 2 / Rodolfo Murúa y Juan Pablo Pinasco - 1a ed. 3a reimp. - Los Polvorines : Univ. Nacional de General Sarmiento, 2013.
249 p. ; 17x24 cm.

ISBN 978-987-630-021-6

1. Matemática. 2. Integrales. 3. Ecuaciones Diferenciales. I. Pinasco, Juan Pablo II. Título
CDD 510

J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7578
e-mail: publicaciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/publicaciones

ISBN: 978-987-630-021-6

Notas de Elementos de Matemática 2

Rodolfo Murúa
Juan Pablo Pinasco

Colección Textos Básicos

Universidad Nacional de General Sarmiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO

AUTORIDADES

Rector
Dr. Eduardo Rinesi

Vicerrector
Lic. Gustavo Kohan

Director del Instituto de Ciencias
Dr. Roberto Schmit

Directora del Instituto del Conurbano
Lic. Daniela Soldano

Director del Instituto de Industria
Lic. Claudio Fardelli Corropolese

Director del Instituto del Desarrollo Humano
Dr. Daniel Lvovich

Secretario de Investigación
Lic. Pablo Bonaldi

Secretaria Académica
Dra. Gabriela Diker

Secretario General
Prof. José Gustavo Ruggiero

Secretaria Administrativa
CP Daniela Guardado

Secretario Legal y Técnica
Dr. Jaime González

Índice general

Prólogo

Estas notas están basadas en el curso semestral de Elementos de Matemática II que hemos dictado junto a otros colegas en la Universidad Nacional de General Sarmiento en los años 2005, 2006, 2007 y 2008. Si bien no pretenden sustituir la bibliografía de la materia, dada la gran variedad de temas que incluye el programa, esperamos que sirvan de ayuda para centralizar el material necesario.

Los temas contenidos comprenden integración en una variable, polinomio de Taylor, algunos conceptos elementales de ecuaciones diferenciales ordinarias, los rudimentos de las operaciones con números complejos, y del cálculo diferencial en varias variables. Hemos tratado de brindar un enfoque basado fuertemente en las aplicaciones económicas, con menos énfasis en las demostraciones matemáticas y un mayor número de ejemplos.

Estas notas nacieron como un apunte que preparó Rodolfo Murúa, principalmente con ejemplos tanto de la parte estrictamente matemática como de las aplicaciones económicas, que circuló entre los alumnos en los años 2006 y 2007. Selva Figueroa participó de su corrección y tipeo en LaTeX de la primera edición mientras que Cristian Conde y Paula Trillini contribuyeron en la corrección de la segunda.

Incluímos también las guías de trabajos prácticos de la materia. Este material ha sido re-elaborado a lo largo de varios cuatrimestres por los distintos docentes de Elementos de Matemática II, y no nos corresponde adjudicarnos su autoría.

Finalmente, queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a los distintos docentes de la materia por su contribución directa o indirecta en estas notas y por su participación invaluable en la elaboración de las guías prácticas. En especial, queremos agradecerles a Gabriel Acosta, Cristian Conde, Patricia Palacios, Mariana Pérez y Paula Trillini.

Rodolfo Murúa y Juan Pablo Pinasco, Los Polvorines, Junio de 2009.

Capítulo 1

Introducción

En este libro desarrollaremos los temas correspondientes al programa de la materia Elementos de Matemática 2 de la Universidad de General Sarmiento. Un vistazo al índice nos convencerá de la dificultad de encontrar material bibliográfico adecuado para cubrirlos a todos, ya que contiene temas de análisis de una y varias variables, una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y números complejos; y además, están presentados con un enfoque aplicado a las ciencias económicas. La bibliografía que recomendamos incluye los libros [3, 5, 9, 11] para la parte estrictamente matemática, y [6, 7] para un desarrollo dirigido a las aplicaciones económicas; sin embargo, insistimos en que ninguno de ellos cubre por completo el programa.

En este capítulo repasaremos brevemente algunos conceptos matemáticos y económicos que se consideran conocidos y que pueden consultarse en [1, 7] y también [4]. Para un desarrollo más detallado de los temas matemáticos recomendamos [3, 8] y para los temas económicos, [10].

1. Cálculo diferencial

1.1. Derivadas

Dado un intervalo de la recta $[a,b]$ y una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, diremos que f es derivable en el punto $x_0\in(a,b)$ si existe el siguiente límite que denotaremos $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

En las aplicaciones, muchas veces la función dependerá de otra variable que llamaremos t, p, q,... según la interpretación que le demos (la variable puede representar el tiempo, precios, cantidades,...), y vamos a considerar funciones $g(t)$, $D(p)$, etcétera. Nos conviene en estos casos aclarar respecto de qué variable estamos derivando, para lo cual será útil considerar la notación de Leibniz:

$$f'(x)=\frac{df}{dx},\quad g'(t)=\frac{dg}{dt}$$

que leeremos como "derivada de f respecto de x" y "derivada de g respecto de t" respectivamente. Observemos que esta notación nos dice qué función estamos derivando, y respecto a qué variable la derivamos.

Desde ya, no es necesario calcular el límite cada vez que uno desea conocer la derivada de una función. Conociendo las derivadas de ciertas funciones básicas, podemos luego derivar funciones más complicadas utilizando las llamadas *reglas de derivación.* Recordaremos las derivadas más importantes y las reglas.

Lista de derivadas elementales:

- $(c)' = 0$, para todo $c \in \mathbb{R}$.
- $(x^a)' = ax^{a-1}$, (el dominio depende de a)
- $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $(e^x)' = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
- $\operatorname{tg}'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, para todo $x \in Dom(\operatorname{tg})$.
- $\operatorname{arc\,tg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

A continuación vamos a enunciar las reglas principales de derivación. Suponemos que las funciones $f(x)$, $g(x)$ son derivables y que las operaciones pueden efectuarse (por ejemplo, en el cociente no se anula $g(x)$, o en la composición, $g(x)$ pertenece al dominio de f).

Reglas de derivación:

1. Sea $y(x) = a \cdot f(x)$ donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces
$$y'(x) = a \cdot f'(x).$$
2. Sea $y(x) = f(x) \pm g(x)$, entonces $y'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
3. (Regla del producto) Sea $y(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces
$$y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
4. (Regla del cociente) Sea $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces
$$y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$
5. (Regla de la cadena) Sea $y(x) = (g \circ f)(x)$, es decir $y(x) = g(f(x))$, entonces
$$y'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Recta tangente

Otro concepto que utilizaremos es el de la recta tangente al gráfico de f en un punto x_0. Recordemos que esta recta pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente está dada por $f'(x_0)$. La ecuación de esta recta la escribiremos

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Podemos verificar que esta recta tiene la pendiente deseada, y que además pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0).$$

Ejemplo 1.1.1. Calculemos la derivada de $f(x) = 3xe^{4x^3}$. Aquí tenemos un producto, entonces

$$f'(x) = (3x)' \cdot e^{4x^3} + 3x \cdot (e^{4x^3})',$$

luego,

$$f'(x) = 3e^{4x^3} + 3xe^{4x^3} 12x^2.$$

Observemos que en la derivada de la segunda función hemos utilizado la regla de la cadena. Ahora, sacando factor común, podemos escribirla como

$$f'(x) = 3e^{4x^3}(1 + 12x^3).$$

Ejemplo 1.1.2. Derivemos $f(x) = \ln^3(7x + 9) = [\ln(7x + 9)]^3$.

Aquí tenemos que aplicar tres veces la regla de la cadena. La primera vez nos queda

$$f'(x) = 3[\ln(7x + 9)]^2 \cdot (\ln(7x + 9))'.$$

Derivamos ahora el logaritmo,

$$f'(x) = 3[\ln(7x + 9)]^2 \cdot \frac{1}{(7x + 9)} \cdot (7x + 9)'$$

y por último, su argumento:

$$f'(x) = 3[\ln(7x + 9)]^2 \cdot \frac{1}{(7x + 9)} \cdot 7.$$

Observación 1.1.3. *Aquí podemos ver que la regla de la cadena consiste en derivar de “afuera” hacia “adentro”.*

Veamos un último ejemplo que involucra la regla del cociente.

Ejemplo 1.1.4. Derivemos

$$f(x) = \frac{(4x^4 + 5)^3}{\operatorname{sen}(6x)}.$$

Aplicando la fórmula del cociente tenemos que:

$$f'(x) = \frac{[(4x^4+5)^3]' \cdot \operatorname{sen}(6x) - (4x^4+5)^3 \cdot [(\operatorname{sen}(6x)]'}{\operatorname{sen}^2(6x)},$$

y derivando nos queda

$$f'(x) = \frac{3(4x^4+5)^2 \cdot 16x^3 \cdot \operatorname{sen}(6x) - (4x^4+5)^3 \cdot \cos(6x) \cdot 6}{\operatorname{sen}^2(6x)}.$$

Agrupando los términos,

$$f'(x) = \frac{48(4x^4+5)^2 \cdot x^3 \cdot \operatorname{sen}(6x) - 6(4x^4+5)^3 \cdot \cos(6x)}{\operatorname{sen}^2(6x)}.$$

Ejercicio 1.1.5. *Utilizando las propiedades de las derivadas verificar que:*

a) *Si* $f(x) = (x^3 - 6x)\operatorname{sen}(x) + 3(x^2 - 2)\cos(x)$, *entonces* $f'(x) = x^3\cos(x)$

b) *Si* $x(y) = (y^2+1)e^y$, *entonces* $x'(y) = e^y(y+1)^2$

c) *Si* $f(\alpha) = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e^\alpha}{1-e^\alpha}}$, *entonces* $f'(\alpha) = \sqrt{\frac{e^\alpha}{1-e^\alpha}}$

d) *Si* $x(t) = \ln\ tg(\frac{t}{2})$, *entonces* $x'(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$

e) *Si* $f(x) = \ln^2(3x+9)$, *entonces* $f'(x) = \frac{6}{3x+9}\ln(3x+9)$

f) *Si* $g(\psi) = e^{\cos(\psi^2+2\psi)}$, *entonces* $g'(\psi) = -(2\psi+2)\operatorname{sen}(\psi^2+2\psi)e^{\cos(\psi^2+2\psi)}$

g) *Si* $h(\lambda) = \ln[(3\lambda+9x)^4]$, *entonces* $h'(\lambda) = \frac{12}{3\lambda+9x}$

h) *Si* $x(\theta) = 5t\ln(\theta^2+2t\theta)$, *entonces* $x'(\theta) = \frac{10t(\theta+t)}{\theta^2+2t\theta}$

2. Aplicaciones económicas

2.1. Algunas funciones importantes

Recordemos brevemente algunas funciones básicas que utilizaremos en las aplicaciones económicas. En esta sección, p representará el precio de un producto, y x una cantidad (más adelante, también utilizaremos la letra q para representar cantidades).

Función Demanda

La *Ley de la Demanda* en economía nos dice que a cada precio p, le corresponde una cantidad x de productos que se venden a ese precio. Expresaremos la relación entre el precio y la cantidad de artículos demandada como una función, la función *Demanda*:

$$x = D(p),$$

también llamada la *curva de Demanda*.

Esta función está definida para $p \geq 0$ (precios negativos no tienen sentido) y su imagen debe ser también $x \geq 0$ (la cantidad de artículos demandada también debe ser positiva o nula).

Función Precio

Por lo general, cuando el precio aumenta cae la demanda. Esto nos dice que la función demanda es estrictamente decreciente, y nos permite definir su inversa, la función *precio*

$$p = P(x).$$

Aquí también el precio y la cantidad demandada de un producto debe ser positivo.

Funciones Ingreso, Costo Total y Beneficio

Estas funciones responden tres preguntas básicas: si fabrico x artículos,

1. ¿cúanto dinero voy a recibir al venderlos?
2. ¿cuánto me costará producirlos?
3. ¿cuál será mi ganancia o pérdida?

La función *Ingreso Total*, $IT(x)$ nos dice cuánto dinero ingresa al vender x artículos:

$$IT(x) = x.P(x)$$

Así, el ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos x, por el precio de cada uno $P(x)$.

La función *Costo Total*, $CT(x)$, nos dice cuánto cuesta fabricar x artículos.

Por último, la función *Beneficio*, $B(x)$, nos dice cuál será nuestra ganancia o pérdida:

$$B(x) = IT(x) - CT(x),$$

el beneficio al vender x artículos será la diferencia entre el dinero que ingresó, $IT(x)$, y el costo de fabricarlos, $CT(x)$.

Ingreso marginal, Costo marginal, y Beneficio marginal

El *Ingreso marginal* $Img(x)$ es la variación del ingreso al producir una unidad de producto más:

$$Img(x) = IT(x+1) - IT(x).$$

Esta fórmula no se utiliza, y se la reemplaza por la derivada del ingreso total:

$$Img(x) = IT'(x),$$

y se tiene aproximadamente

$$Img(x) = IT'(x) \simeq IT(x+1) - IT(x).$$

Se define el *Costo marginal* $Cmg(x)$ como la derivada del Costo Total,

$$Cmg(x) = CT'(x),$$

y se puede interpretar como el costo adicional aproximado de fabricar otra unidad de nuestro producto:

$$Cmg(x) = CT'(x) \simeq CT(x+1) - CT(x).$$

Se define el *Beneficio marginal* $Bmg(x)$ como la derivada del Beneficio:

$$Bmg(x) = B'(x)$$

que nos sirve para aproximar cómo cambia el beneficio al fabricar otra unidad:

$$BM(x) = B'(x) \simeq B(x+1) - B(x)$$

Ejercicio 2.1.1. *Halle la función de costo marginal de cierto bien cuya función de costo es:* $c(q) = 300 + 15\ln(1+5q)$ *y calcule el costo marginal para una producción de* 40 *unidades.*

2.2. Elasticidad

Recordaremos aquí la *Elasticidad de la demanda*, si bien puede definirse la elasticidad para otras funciones.

Para un artículo dado se tiene que p es el precio por unidad y x el número de unidades que se adquieren al precio p, es decir, $x = D(p)$.

Definición 2.2.1. *Definimos la* **elasticidad de la demanda**, $E_D(p)$, *como la variación porcentual de la cantidad demandada, dividida la variación porcentual del precio.*

Observación 2.2.2. *La elasticidad de la demanda "mide" en qué porcentaje varía la demanda cuando aumenta el precio en un 1 por ciento. Para variaciones pequeñas del precio, se utiliza la derivada para calcular la elasticidad (con lo cual uno evita calcular porcentajes):*

$$E_D(p) = \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}.$$

Esta es la formula que utilizaremos para calcular la elasticidad de la demanda.

Su deducción no es difícil: Supongamos que el precio cambia en una pequeña cantidad, h. La variación porcentual de la demanda es

$$\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}.$$

La variación porcentual del precio viene dada por

$$\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}.$$

Ahora, el cociente de ambas variaciones es:

$$\frac{\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}}{\frac{h}{p}} = \frac{p}{D(p)} \cdot \frac{D(p+h) - D(p)}{h}.$$

Vemos que la segunda fracción es el cociente incremental de $D(p)$, y podemos aproximarlo por $D'(p)$.

De la misma manera, podemos definir la elasticidad para una función $f(x)$ respecto de x como

$$\frac{Ef}{Ex} = \frac{df}{dx}\frac{x}{f(x)} = f'(x)\frac{x}{f(x)}.$$

Ejemplo 2.2.3. Determinar la elasticidad del ingreso respecto del precio, siendo la ley de demanda

$$I(p) = 200e^{-0,4p}.$$

Como nos piden la elasticidad del ingreso respecto del precio tenemos que:

$$\frac{EI}{EP} = \frac{dI}{dP}\,\frac{p}{I} = I'(p)\,\frac{p}{I} \tag{2.1}$$

Necesitamos la función ingreso, y tenemos como dato la demanda. Pero sabemos que $I = p \cdot x$ (es decir, el ingreso es igual al precio por la cantidad vendida), con lo cual

$$\begin{aligned} I(p) &= p \cdot [200e^{-0,4p}] \\ &= 200 \cdot p \cdot e^{-0,4p}, \\ \frac{dI}{dp} &= I'(p) \\ &= 200(e^{-0,4p} - 0,4pe^{-0,4p}) \\ &= 200e^{-0,4p}(1 - 0,4p). \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.1) tenemos que:

$$\frac{EI}{Ep} = 200e^{-0,4p}(1-0,4p)\frac{p}{200pe^{-0,4p}} = 1 - 0,4p.$$

Ejercicio 2.2.4. *Determinar la elasticidad de la demanda respecto del precio, siendo la ley de demanda $x = 200e^{-0,4p}$.*

Capítulo 2

Integral Indefinida

1. Integrales indefinidas inmediatas

1.1. Primitivas

En el repaso hemos visto como obtener $f'(x)$ dada la función $f(x)$. En el presente capítulo haremos justamente lo opuesto; dada una función $f(x)$, determinaremos otra función $F(x)$ de modo tal que su derivada sea $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. A la función $F(x)$ la denominaremos una primitiva de $f(x)$.

Definición 1.1.1. *Llamamos a F una primitiva de f en el intervalo $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Ejemplo 1.1.2. Hallar **una** primitiva de $f(x) = \cos(x)$.
Una primitiva es $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ ya que $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

Observación 1.1.3. *En el ejemplo hemos remarcado que se pide* **una** *primitiva. Esto puede hacernos sospechar que no es la única, y efectivamente así es:* $\operatorname{sen}(x)$ *no es la única primitiva de* $\cos(x)$. *Por ejemplo* $F(x) = \operatorname{sen}(x) + 100$ *también es una primitiva.*

Recordemos que al derivar una constante nos da cero, con lo cual cualquier función de la forma $F(x) = \operatorname{sen}(x) + k$, con k una constante, es también una primitiva de $f(x) = \cos(x)$.

Definición 1.1.4. *Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, al conjunto de todas las primitivas de f lo denominamos la integral indefinida de f y escribimos*

$$\int f(x)dx = \{F : (a, b) \to \mathbb{R},\ \textit{tal que } F'(x) = f(x)\}.$$

Un resultado importante es que dos primitivas diferentes de una misma función f sólo difieren en una constante. Demostraremos este sencillo teorema a continuación.

Teorema 1.1.5. *Sean F y G dos primitivas de una misma función f en el intervalo (a, b), entonces $F(x) - G(x) = k$, con k una constante, para todo $x \in (a, b)$.*

Demostración. Consideremos la función $H(x) = F(x) - G(x)$. Sabemos que $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, por lo tanto $F'(x) = f(x)$. Análogamente $G'(x) = f(x)$. Luego, derivando $H(x)$ obtenemos $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Dados dos puntos x_1, x_2 cualesquiera, por el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial tenemos

$$H(x_1) - H(x_2) = H'(c)(x_1 - x_2) = 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0,$$

con lo cual $H(x_1) = H(x_2)$, y la función es constante en todo el intervalo. Luego, de $H(x) = k$ obtenemos $F(x) - G(x) = k$, es decir, $F(x) = G(x) + k$. □

Observación 1.1.6. *Podemos enunciar este teorema diciendo que* **dos primitivas de una misma función difieren en una constante**, *lo cual se puede interpretar diciendo que las infinitas primitivas de una función f constituyen una familia infinita de curvas desplazadas verticalmente.*

En vista de estos resultados, para representar el conjunto de todas las primitivas escribiremos para abreviar

$$\int f(x)dx = F(x) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.1.7. Verificar que

$$F(x) = \frac{1}{7}\ln(7x+3)$$

es una primitiva de

$$f(x) = \frac{1}{7x+3}.$$

Para verificarlo basta ver que $F'(x) = f(x)$. Calculamos:

$$F'(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7x+3} \cdot 7 = f(x).$$

1.2. Integrales inmediatas y propiedades

Observemos que hasta ahora tenemos cómo comprobar si una función es una primitiva de otra, pero no hemos visto cómo calcularlas. Antes de entrar en ese problema, debemos acostumbrarnos a reconocer ciertas integrales inmediatas.

Tabla de integrales indefinidas inmediatas

En todos los casos, k es una constante.

1. $\int 0dx = k$
2. $\int 1dx = x + k$

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ si $\alpha \neq -1$

4. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k$ si $x \neq 0$

5. $\int e^x dx = e^x + k$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + k$ si $a > 0$

7. $\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + k$

8. $\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + k$

9. $\int sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + k$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen}(x) + k$

11. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,cos}(x) + k$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg}(x) + k$

1.3. Linealidad de la integral

Las siguientes propiedades nos permitirán integrar un gran número de funciones, combinando sumas y restas de las funciones de la tabla anterior.

Proposición 1.3.1. *Sean F y G dos primitivas de f y g respectivamente; y sea c una constante real arbitraria. Entonces, se verifican:*

a) $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx = c \cdot F(x) + k$

b) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + k$

c) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx = F(x) - G(x) + k$

Observación 1.3.2. *Observemos que hemos escrito*

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + k.$$

Si pensamos en la definición que dimos de integral indefinida, a cada primitiva le correspondería una constante, y deberíamos escribir

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + k_1 + G(x) + k_2,$$

pero esto es innecesario, ya que podemos juntar las constantes de integración k_1 y k_2 en una única constante k.

De la misma manera, en el punto a), podríamos escribir

$$c \cdot \int f(x)dx = c \cdot (F(x) + k_1),$$

y tras distribuir, a la constante ck_1 la podemos llamar k.

Ejemplo 1.3.3. Calculemos las primitivas de las siguientes funciones:

a) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3}{x^6}dx$

c) $\displaystyle\int \left[7\cos(x) + \frac{9}{x}\right] dx$ d) $\displaystyle\int \left[\frac{5x^5 - \sqrt{x} + 1}{x^4}\right] dx$

Antes de comenzar a resolver este ejercicio, indiquemos una estrategia general para enfrentarlo. En primer lugar, observemos si podemos separar el integrando en sumas y restas, y a continuación, si podemos quitar constantes fuera del signo de integral. Si la función que nos queda es una de las inmediatas, basta con saber el resultado de la tabla para integrarla. Muchas veces, la función no se reconocerá como una integral inmediata, pero en algunos casos, unos pasos algebraicos la llevarán a una de éstas.

a) En el primer caso, no hay sumas ni constantes multiplicando, pero observemos que la raíz y la potencia se pueden escribir de otra manera:

$$\int \sqrt[5]{x^3}dx = \int x^{3/5}dx$$

y ésta es una integral inmediata, con lo cual nos queda

$$\int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + k = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + k = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + k.$$

b) En este caso podemos sacar la constante (3) fuera del signo de integral, y aplicamos también las leyes de potencias:

$$\int \frac{3}{x^6}dx = 3\int \frac{1}{x^6}dx = 3\int x^{-6}dx = 3\frac{x^{-6+1}}{-6+1} + k = 3\frac{x^{-5}}{-5} + k = -\frac{3}{5}\frac{1}{x^5} + k$$

c) Aquí tenemos una suma de funciones y éstas están multiplicadas por constantes. Luego,

$$\int \left[7\cos(x) + \frac{9}{x}\right] dx = 7\int \cos(x)dx + 9\int \frac{1}{x}dx$$

Ahora, las integrales que nos quedan son inmediatas, y obtenemos

$$7\int \cos(x)dx + 9\int \frac{1}{x}dx = 7\,\mathrm{sen}(x) + 9\ln|x| + k$$

d) El último parece complicado, porque hay una división, y no tenemos propiedades para integrar un cociente. Sin embargo, separando la fracción en tres términos nos queda

$$\int \left[\frac{5x^5 - \sqrt{x} + 1}{x^4}\right] dx = \int \left[\frac{5x^5}{x^4} - \frac{\sqrt{x}}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right] dx$$

Ahora, utilizamos las leyes de potencias y las propiedades de la integral, con lo cual la última integral nos queda

$$5\int xdx - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^4}dx + \int x^{-4}dx = 5\int xdx - \int x^{-\frac{7}{2}}dx + \int x^{-4}dx$$

Finalmente, llegamos a integrales inmediatas y obtenemos

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} + \frac{x^{-3}}{-3} + k = \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^{-3} + k$$

Ejercicio 1.3.4. *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

$$i)\ \int x^{25}dx \qquad ii)\ \int \sqrt{x}(2x + \sqrt{x})dx \qquad iii)\ \int (\pi + x^{11})dx$$

$$iv)\ \int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{x^2}{2}\right) \qquad v)\ \int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \cos(x) - 2\,\mathrm{sen}(x)\right) dx$$

$$vi)\ \int (x^{-3} + x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{2}{7}})dx \qquad vii)\ \int \frac{x^2+1}{x}dx$$

Observación 1.3.5. *El papel de la constante de integración se comprenderá mejor en la sección 3, cuando veamos las aplicaciones económicas (en donde nos darán un cierto dato inicial), y también más adelante cuando estudiemos ecuaciones diferenciales. Por lo pronto, nos da cierta libertad para elegir una primitiva especial.*

En particular, supongamos que nos dan una función f y nos piden una primitiva que en un punto x_0 tome un valor y_0. En tal caso, si F es una primitiva, planteamos

$$F(x_0) + k = y_0,$$

y despejamos el valor de la constante.

Ejemplo 1.3.6. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Hallar una primitiva F tal que $F(3) = 2$.

Buscamos todas las primitivas de f, y obtenemos

$$\int x^2 - 2x + 3dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + k.$$

Ahora, evaluando en $x = 3$ nos queda

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \cdot 3 + k = 9 + k,$$

e igualando a 2 nos queda

$$9 + k = 2$$

$$k = 2 - 9,$$

es decir, $k = -7$, y la primitiva buscada es

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 7.$$

Ejercicio 1.3.7. *Hallar una función $g(x)$ tal que:*

1. $g'(x) = \frac{1}{x}$, *y* $g(1) = 3$.
2. $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$, *y* $g(0) = 1$.

Observación 1.3.8. *Revisando las propiedades de la integral vemos que no hay ninguna regla para el producto o el cociente de dos funciones. Lamentablemente, no es cierto en general que la integral de un producto (o de un cociente) de dos funciones sea el producto (o el cociente) de las integrales de cada función.*

Cuando tenemos para integrar productos de funciones necesitaremos técnicas más complicadas que veremos en la próxima sección.

Ejemplo 1.3.9. ¿Será cierto que $\int x^2 dx = \int x \cdot x dx = \int x dx \cdot \int x dx$?

La respuesta es **no**, y para comprobarlo, integremos cada función:

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x dx \cdot \int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x^4$$

Ejercicio 1.3.10. *Demostrar que*

$$F(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{2}$$

no es una primitiva de $f(x) = x\cos(x)$.

Observación 1.3.11. *Otro detalle a tener en cuenta es que no toda función tiene una primitiva que pueda expresarse en términos de las funciones que aparecen en la tabla de primitivas inmediatas (polinomios, racionales, exponenciales y logarítmicas, trigonométricas). En estos casos, si bien la función tiene una primitiva, no podemos calcularla ni expresarla como sumas o productos de las funciones que conocemos.*

Un ejemplo importante es la siguiente integral:

$$\int e^{-x^2} dx,$$

que aparece con frecuencia en problemas de probabilidades y estadística.

2. Métodos de integración

En esta sección veremos tres métodos de integración. El objetivo común es transformar una integral desconocida en una inmediata.

2.1. Sustitución

La idea del método de sustitución se basa en la regla de la cadena para derivar.

Supongamos que sabemos calcular $\int f(t)dt$, y que una primitiva de f es F. Si tenemos que calcular ahora la integral

$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$

podemos reconocer que el integrando es la derivada de $F \circ g(x)$. Por la regla de la cadena,

$$F \circ g'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

donde en la última igualdad utilizamos que $F' = f$. Luego,

$$\int f(g(x))g'(x)dt = F \circ g(x).$$

A este método se lo conoce como *método de sustitución*, o también *cambio de variable*. El nombre se debe al procedimiento, que consiste en sustituir la función g por una nueva variable. Si queremos calcular

$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$

hacemos la sustitución o cambio de variable

$$t = g(x),$$

y derivando t respecto de x, tenemos

$$\frac{dt}{dx} = g'(x).$$

Formalmente, si bien para justificar el paso siguiente deberíamos estudiar el *diferencial* de una función en más detalle, podemos proponer

$$dt = g'(x)dx$$

Ahora, sustituimos

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & f(t) \\ g'(x)dx & = & dt \end{array}$$

y entonces reemplazamos en la integral:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Como F es una primitiva de f, nos queda

$$\int f(t)dt = F(t) + k,$$

y el último paso consiste en regresar a la variable original, cambiando t por $g(x)$:

$$F(t) + k = F(g(x)) + k = F \circ g(x) + k,$$

con lo cual hemos hallado la primitiva.

Observación 2.1.1. *Para entender cómo funciona el método conviene estudiar algunos ejemplos. A continuación resolveremos varios.*

Ejemplo 2.1.2. Calcular la integral

$$\int 4\,\mathrm{sen}(4x)dx$$

Sabemos que la primitiva de $\mathrm{sen}(u)$ es $-\cos(u)$, pero no podemos calcular directamente la primitiva de $\mathrm{sen}(4x)$. Proponemos la sustitución

$$t = 4x$$

$$dt = 4dx$$

Luego, sustituimos y resolvemos la integral:

$$\int \mathrm{sen}(t)dt = -\cos(t) + k$$

Finalmente, volvemos a la variable original:

$$\int 4\,\mathrm{sen}(4x)dx = -\cos(4x) + k.$$

Observación 2.1.3. *Cuando tengamos dudas de una integral, podemos derivar la función obtenida para comprobar el resultado. Aquí,*

$$(-\cos(4x) + k)' = \mathrm{sen}(4x) \cdot 4.$$

Ejemplo 2.1.4. Calcular la integral

$$\int \cos(2x+3)dx$$

Proponemos el cambio de variable

$$t = 2x + 3$$

$$dt = 2dx$$

Observemos que en la integral no está el factor 2; podemos hacerlo aparecer multiplicando y dividiendo el integrando por 2, y utilizamos las propiedades de la integral para sacar el 1/2:

$$\int \cos(2x+3)dx = \int \frac{2}{2}\cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x+3)dx$$

con lo cual ahora podemos cambiar la variable e integrar,

$$\frac{1}{2}\int \cos(t)dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + k.$$

Finalmente,

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+3) + k.$$

Verificación:

$$\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+3) + k\right]' = \frac{1}{2}\cos(2x+3)2 = \cos(2x+3).$$

Observación 2.1.5. *Notemos que en este ejercicio podíamos también despejar en el diferencial de la sustitución*

$$\frac{dt}{2} = dx,$$

y reemplazando directamente en la integral, nos queda

$$\int \cos(t)\frac{dt}{2},$$

la cual se resuelve como antes y llegamos al mismo resultado.

Cualquiera de las dos formas de proceder es correcta, sólo que hay que tener cuidado si en el diferencial está involucrada la variable x, ya que no podemos integrar si luego de la sustitución aparecen simultáneamente las variables x y t.

Ejemplo 2.1.6. Calcular la integral

$$\int \frac{4}{3x+10}dx$$

Proponemos el cambio de variable

$$t = 3x + 10$$

$$dt = 3dx$$

Igual que en el ejercicio anterior, no tenemos en la integral el término $3dx$. Podemos proceder como antes, o despejar dx:

$$dx = \frac{dt}{3}$$

Ahora reemplazamos, e integramos:

$$\int \frac{4}{t}\frac{dt}{3} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{4}{3}\ln(|t|) + k.$$

Volvemos a la variable original y queda:

$$\int \frac{4}{3x+10}dx = \frac{4}{3}\,ln(|3x+10|) + k$$

Verificación:

$$\left[\frac{4}{3}\ln(|3x+10|) + k\right]' = \frac{4}{3}\frac{1}{3x+10}3 = 4\frac{1}{3x+10} = \frac{4}{3x+10}$$

Ejemplo 2.1.7. Calcular la integral

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx$$

Hacemos $t = x^2 + 1$, con lo cual $dt = 2xdx$. En la integral aparece sólo xdx, así que despejamos

$$\frac{dt}{2} = xdx.$$

Reemplazando $x^2 + 1$ y xdx en la integral, queda:

$$\int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln(|t|) + k$$

Finalmente,

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$$

(observemos que el módulo no es necesario, ya que $x^2 + 1$ es positivo).
Verificación:

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k\right]' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x = \frac{x}{x^2+1}.$$

Ejemplo 2.1.8. Calcular la integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Hacemos $t = \ln(x)$, con lo cual $dt = \frac{1}{x}dx$.
Reemplazando nos queda

$$\int tdt = \frac{t^2}{2} + k$$

y volviendo a la variable original, tenemos

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + k$$

Verificación:

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(x) + k\right]' = \frac{1}{2}2\ln(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Ejemplo 2.1.9. Calcular la integral

$$\int x\sqrt{3+x^2}dx$$

Sea $t = 3 + x^2$, con lo cual $dt = 2xdx$. Despejando

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

Sustituimos y nos queda

$$\int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt,$$

donde en el último paso escribimos la raíz como una potencia. Ahora,

$$\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k,$$

y volviendo a la variable original obtenemos

$$\int x\sqrt{3+x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{2}{3}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{3}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + k$$

Verificación:

$$\left[\frac{1}{3}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + k\right]' = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(3+x^2)^{\frac{1}{2}}2x = x\sqrt{3+x^2}$$

Observación 2.1.10. *Es importante, cuando se cambia variable, realizar la sustitución en todas partes. No se puede aplicar el método si quedan funciones expresadas en x.*

Observación 2.1.11. *El siguiente ejemplo es especial. En primera instancia, parece que nos quedan las dos variables (x y t) pero sin embargo el método sirve igual.*

Ejemplo 2.1.12. Calcular

$$\int x\sqrt{x+1}dx$$

Si hacemos $t = x + 1$, el diferencial es $dt = dx$, pero al sustituir, nos queda

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int x\sqrt{t}dt.$$

No podemos integrar aquí porque se mezclan las variables x y t en la última integral. Cuando esto ocurre hay que ver si podemos despejar x del cambio de variable original, con la esperanza de reemplazarla.

Como $t = x + 1$, podemos hacer $x = t - 1$, lo cual nos permite sustituir

$$x + 1 = t$$

$$dx = dt$$

$$x = t - 1$$

y la integral nos queda

$$\int (t-1)\sqrt{t}dt = \int t\sqrt{t} - \sqrt{t}dt = \int tt^{\frac{1}{2}}dt - \int t^{\frac{1}{2}}dt,$$

y hemos utilizado las propiedades de las potencias y la linealidad de la integral.

Finalmente integramos,

$$\int t^{\frac{3}{2}}dt - \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + k$$

y volvemos a la variable original,

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + k.$$

Ejercicio 2.1.13. *Utilizando el método de sustitución, hallar $\int f(x)dx$ para cada una de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ *b)* $f(x) = \cos(3-5x)$ *c)* $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *e)* $f(x) = \operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{4x+3}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$ *h)* $f(x) = 3x\cos(x^2)$ *i)* $f(x) = \operatorname{sen}(x)\sqrt{2+3\cos(x)}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$ *k)* $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(5x)}$ *l)* $f(x) = (5x^4-2x)(x^5-x^2)^{\frac{7}{2}}$

m) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$ *o)* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$ *p)* $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x^3-2x^2+2x}$

Observación 2.1.14. *En muchos casos, el integrando se puede transformar para integrar utilizando la arcotangente. Recordemos que*

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg}(x),$$

y se la puede utilizar para integrar otras expresiones más complicadas.

Ejemplo 2.1.15. Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{1+3(x-1)^2}dx.$$

Observemos que no podemos hacer aquí la sustitución $t = 3(x-1)^2$, ya que luego no tendríamos el diferencial $dt = 6(x-1)dx$. Pero para llevarla la forma de la arcotangente, no necesitamos eliminar el cuadrado, queremos reemplazar $3(x-1)^2$ por t^2. Entonces, si queremos que nos quede

$$t^2 = 3(x-1)^2,$$

debemos proponer

$$t = \sqrt{3}(x-1)$$

Ahora, $dt = \sqrt{3}dx$, y si bien no está $\sqrt{3}$ en la integral, podemos despejar

$$\frac{dt}{\sqrt{3}} = dx,$$

con lo cual, reemplazando en la integral tenemos

$$\int \frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}(t) + k.$$

Volviendo a la variable original, la primitiva es

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}[\sqrt{3}(x-1)] + k.$$

Ejemplo 2.1.16. Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{4+(x-1)^2}dx.$$

Esta integral es levemente más complicada que la anterior, pero vamos a realizar primero algunos cálculos auxiliares:

$$\frac{1}{4+(x-1)^2} = \frac{1}{4\left[1+\frac{(x-1)^2}{4}\right]} = \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]}$$

Hemos escrito el integrando de otra forma,

$$\int \frac{1}{4+(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}dx,$$

y ahora lo llevamos con un cambio de variable a una integral inmediata. Proponemos

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$dt = \frac{dx}{2}$$

y despejamos $2dt = dx$. Entonces,

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t^2}2dt = \frac{2}{4}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(t) + k,$$

y volviendo a la variable original, nos queda

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+k.$$

Verificación:

$$\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}.$$

Ejercicio 2.1.17. *Usando que* $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg}(x)+k$*, calcular:*

$$i)\quad \int \frac{1}{1+9x^2}dx \qquad ii)\quad \int \frac{1}{4+(x-1)^2}dx$$

$$iii)\quad \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \qquad iv)\quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

2.2. Integración por partes

El método que veremos a continuación se basa en la regla de derivación para un producto. Supongamos que u y v son dos funciones derivables, entonces

$$\int (u\cdot v)'dx = u\cdot v,$$

ya que la derivada de $u\cdot v$ es $(u\cdot v)'$. Pero

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

con lo cual tenemos

$$\int (u\cdot v)'dx=\int (u'\cdot v+u\cdot v')dx=u\cdot v,$$

y utilizando las propiedades de la integral,

$$\int u'\cdot v dx+\int u\cdot v' dx=u\cdot v.$$

Si bien parece que no hemos ganado nada, podemos hacer pasaje de términos obteniendo la *fórmula de integración por partes*

$$\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v dx$$

Observación 2.2.1. *Para aplicar la fórmula de partes en una integral, llamaremos u a una de las funciones, y v' a la otra. El paso siguiente es derivar u y elegir una primitiva para v' (aquí no es necesario agregar la constante k, lo hacemos al final de todo).*

Luego, reemplazamos en el lado derecho de la fórmula. Si hemos hecho una buena elección, la integral que queda será más simple, y la integramos.

A continuación, vamos a ver algunos ejemplos. Conviene prestar atención a la elección de las funciones u y v', y es recomendable ver qué pasa si uno las elige al revés (queda como ejercicio verificar que en ese caso uno no llega a nada).

Ejemplo 2.2.2. Calcular la siguiente integral

$$\int xe^x dx$$

Hacemos la siguiente elección de u y v':

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

Entonces,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

y ahora integramos, obteniendo

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k.$$

Ejemplo 2.2.3. Calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx$$

Este ejercicio tiene una dificultad adicional. Cuando elegimos u y v', nos queda

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos(3x) & v = ? \end{array}$$

La primitiva de $\cos(3x)$ no es inmediata, y para calcularla hacemos la sustitución:

$$t = 3x$$

$$dt = 3dx$$

con lo cual,

$$\int \cos(3x)dx \quad \text{se transforma en} \quad \int \cos(t)\frac{dt}{3},$$

y la primitiva de esta integral es

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t), \quad \text{es decir,} \quad \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x).$$

Ahora, tenemos $v = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$, y podemos continuar con el ejemplo. Aplicando la fórmula de partes, tenemos

$$\int x\cos(3x)dx = x\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)dx$$

Para calcular esta última integral necesitamos nuevamente hacer una sustitución, y haciendo otra vez

$$t = 3x$$

$$dt = 3dx$$

se puede verificar que

$$\int \operatorname{sen}(3x)dx = \frac{1}{3}\cos(3x).$$

Luego, obtenemos

$$\int x\cos(3x)dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) + k = \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + k.$$

Observación 2.2.4. *En algunas ocasiones, tras aplicar el método de integración por partes hay que recurrir a una sustitución más complicada. En otras, para resolver la integral que queda hay que aplicar otra vez el método de integración por partes. A continuación vamos a ver un ejemplo donde haya que aplicar el método dos veces.*

Ejemplo 2.2.5. Calcular la integral

$$\int x^2 e^x dx.$$

Si hacemos

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

nos queda

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

Para resolver la integral $\int xe^x dx$ utilizamos el resultado del ejemplo (2.2.2), y obtenemos

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] + k.$$

Observación 2.2.6. *En estos ejemplos se comienza a observar un patrón que se repetirá: cuando se integran productos de potencias (o polinomios) con exponenciales o funciones trigonométricas, la elección de u y v' es siempre la misma:*

$$u = \text{ potencia o polinomio}$$

$$v' = \text{ exponencial o trigonométrica.}$$

El motivo es que al derivar u, el grado del polinomio disminuye, mientras que integrar una exponencial o una trigonométrica nos da una exponencial o una trigonométrica; y la integral que nos queda a resolver es similar pero el polinomio es de grado menor. Aplicando una y otra vez el método de integración por partes, el polinomio finalmente se transformará en una constante, y ya no tendremos un producto.

Un caso molesto es cuando uno tiene el producto de una exponencial con una trigonométrica. Aquí no hay posibilidades de que una desaparezca derivándola, y para resolverla hay que recurrir a un truco muy ingenioso. A estas integrales se las denomina *cíclicas*, porque si uno aplica dos veces el método de integración por partes recupera la integral original. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.7. Calcular la integral

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx.$$

Hacemos

$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(x) & u' = \cos(x) \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

y reemplazando en la fórmula de integración por partes nos queda

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx.$$

Evidentemente, esta integral que quedó no es inmediata, y vamos a aplicar partes nuevamente:

$$\begin{array}{ll} u = \cos(x) & u' = -\operatorname{sen}(x) \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}$$

(es muy importante elegir u y v' de la misma forma; es decir, si se eligió como u la trigonométrica y v' como la exponencial, nuevamente hay que tomar como u la trigonométrica, y como v' la exponencial.)

Ahora,

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \left[\cos(x)e^x + \int \operatorname{sen}(x)e^x dx\right],$$

y nos queda entonces

$$\underline{\int \operatorname{sen}(x)e^x dx} = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \underline{\int \operatorname{sen}(x)e^x dx}$$

Aquí hacemos pasaje de términos, y obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx + \int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x$$

$$2\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x,$$

y finalmente,

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \frac{\operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x}{2} + k.$$

Observación 2.2.8. *Hay un caso especial, que veremos a continuación. La idea para resolver esta integral es similar, si bien alcanza con integrar una sola vez por partes.*

Ejemplo 2.2.9. Calcular la integral
$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx.$$

Si escribimos $\operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)$, el integrando es un producto y aplicamos partes:
$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(x) & u' = \cos(x) \\ v' = \operatorname{sen}(x) & v = -\cos(x) \end{array}$$
con lo cual,
$$\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \left[\int -\cos(x)\cos(x)dx\right]$$
$$= -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx$$
Para esta última integral, utilizamos la identidad trigonométrica
$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$
y despejando reemplazamos $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$. Luego,
$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int 1 - \operatorname{sen}^2(x)dx$$
$$= -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int dx - \int \operatorname{sen}^2(x)dx,$$
y repetimos la idea del ejemplo anterior,
$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx + \int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int dx$$
$$2\int \operatorname{sen}^2(x)dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x$$
$$\int \operatorname{sen}^2(x)dx = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x}{2} + k.$$

Ejercicio 2.2.10. *Utilizando el método de integración por partes, calcular las siguientes integrales indefinidas:*

$$\begin{array}{llllll} a) & \int x\cos(x)dx & b) & \int x^2\operatorname{sen}(x)dx & c) & \int xe^{5x}dx \\ d) & \int e^x\operatorname{sen}(x)dx & e) & \int \cos^2(x)dx & f) & \int \frac{(x-1)^2}{x^{\frac{1}{4}}}dx \\ g) & \int x^2(x+9)^{-\frac{1}{2}}dx & h) & \int (x+3)^2x^{\frac{3}{4}}dx & i) & \int \frac{x}{e^x}dx \end{array}$$

Observación 2.2.11. *Observemos que hasta ahora no sabemos quién es una primitiva del logaritmo natural* $\ln(x)$*. Este es un ejemplo que se resuelve rápidamente por partes, pero requiere un paso difícil de adivinar: considerar* $\ln(x)$ *como un producto, el producto* $1 \cdot \ln(x)$*. Veamos a continuación cómo se calcula esta primitiva.*

Ejemplo 2.2.12. Calcular la integral

$$\int \ln(x)dx.$$

Escribiéndola como un producto, es $\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$. Hacemos

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}$$

y reemplazando en la fórmula calculamos la integral:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + k$$

Observación 2.2.13. *Veamos otro ejemplo con potencias y logaritmos. Si comparamos con los ejemplos anterios que involucraban exponenciales y trigonométricas, vemos que ahora se invierte nuestra elección de* u *y* v'*: el polinomio será* v'*, y el logaritmo será* u*.*

Ejemplo 2.2.14. Calcular la integral

$$\int (x^2 + 2x - 1)\ln(x)dx.$$

Hacemos

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 + 2x - 1 & v = \frac{x^3}{3} + x^2 - x \end{array}$$

y reemplazando en la fórmula nos queda

$$\int (x^2 + 2x - 1)\ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]\ln(x) - \int \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]\frac{1}{x}dx.$$

Simplificando, la integral buscada queda

$$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]\ln(x) - \int \frac{x^2}{3} + x - 1dx$$

y ahora integramos el polinomio término a término, con lo cual la integral es

$$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]\ln(x) - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + x + k.$$

Ejercicio 2.2.15. *Calcular las integrales*

$$i) \quad \int x\ln(x)dx \qquad ii) \quad \int x^{1/2}\ln(x)dx \qquad iii) \quad \int x^3\ln(x)dx$$

Ejercicio 2.2.16. *Escribir* $\operatorname{arc\,tg}(x) = 1 \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)$ *y calcular* $\int \operatorname{arc\,tg}(x)dx$*.*

2.3. Fracciones simples

Este método sirve para calcular integrales que son cocientes de polinomios, es decir, de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

donde P y Q son polinomios.

Si bien en el método pedimos que el grado del numerador sea menor al del denominador, $gr\, P(x) < gr\, Q(x)$, también puede aplicarse cuando $gr\, P(x) \geq gr\, Q(x)$ (aunque en ese caso primero hay que dividir los polinomios y luego si es necesario aplicar fracciones simples).

El procedimiento consiste en escribir la división de polinomios como una suma de fracciones simples, cada una de fácil integración.

Antes de comenzar, hay que factorizar el polinomio $Q(x)$. En la factorización de $Q(x)$ pueden ocurrir tres cosas

1. Q tiene sólo raíces reales simples,
2. Q tiene alguna raíz múltiple, y
3. Q tiene sólo raíces complejas conjugadas.

También puede ocurrir que aparezcan casos combinados, pero se resuelven sin mayor dificultad una vez que se entendió cada uno de estos tres por separado.

Para hallar las raíces nos será de gran ayuda el siguiente método de Gauss:

Lema 2.3.1 (Gauss). *Sea $Q(x) = a_n x^n + a_{n-a} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros (es decir, $a_k \in \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq k \leq n$). Entonces, si tiene una raíz racional $a/b \in \mathbb{Q}$, b divide a a_n, y a divide a a_0.*

Veremos en primer lugar cómo funciona la descomposición en raíces simples, y luego cómo se integra.

$Q(x)$ admite sólo raíces reales simples

La descomposición en fracciones simples en este caso es escribir el cociente de polinomios de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

donde x_1, x_2, ..., x_n son las raíces de $Q(x)$, y A_1, A_2, ..., A_n son constantes a determinar.

Observemos que se tiene

$$\int \frac{A}{x-x_0}dx = A \ln|x-x_0| + k,$$

para verificarlo es suficiente hacer la sustitución $t = x - x_0$, $dt = dx$, y nos queda

$$A \int \frac{1}{t} dt = A \ln |t| + k.$$

Ejemplo 2.3.2. Descomponer en fracciones simples

$$\frac{x-1}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

El primer problema es factorizar el denominador. Utilizando el método de Gauss, cualquier fracción a/b que sea raíz de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ debe cumplir que:

- a divide a 6: por lo tanto puede ser ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
- b divide a 1: por lo tanto puede ser ± 1.

Luego hay varias raíces posibles: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Evaluando $Q(x)$ en estos ocho valores, encontramos que las raíces son -1, 2, y -3. Luego,

$$Q(x) = (x+1)(x-2)(x+3).$$

Ahora, proponemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

El problema se reduce a encontrar las constantes A, B y C. Si sumamos las fracciones del lado derecho nos queda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)},$$

y como los denominadores son iguales, los numeradores tienen que ser iguales. Luego,

$$x - 1 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)$$

Esta expresión está definida para todo x (la anterior no, había que omitir los valores que anulaban el denominador), podemos darle a x los valores de las raíces de $Q(x)$, y nos queda

- Si $x = -1$, $-2 = A(-3)(2)$, con lo cual $A = \frac{1}{3}$.
- Si $x = 2$, $1 = B(3)(5)$, y tenemos $B = \frac{1}{15}$.
- Si $x = -3$, $-4 = C(-2)(-5)$, y es $C = -\frac{2}{5}$.

Entonces,

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{1/15}{x-2} - \frac{2/5}{x+3}.$$

Terminada la descomposición, estamos en condiciones de calcular la integral. Observemos que integrando ambos miembros tenemos:

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx = \int (\frac{1/3}{x+1} + \frac{1/15}{x-2} - \frac{2/5}{x+3})dx,$$

y utilizando las propiedades de la integral, esto es

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{15}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{2}{5}\int \frac{1}{x+3}dx.$$

Las tres integrales son casi inmediatas, y se pueden resolver fácilmente por sustitución. Nos queda

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{15}\ln|x-2| - \frac{2}{5}\ln|x+3| + k.$$

$Q(x)$ admite raíces reales múltiples

Cuando en el denominador aparece una expresión de la forma $(x-x_0)^n$ quiere decir que $Q(x)$ tiene a x_0 como raíz de multiplicidad n, y la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_0)^n}.$$

En este caso, la primera integral se calcula como en el caso anterior, utilizando el logaritmo natural. Para las siguientes tenemos

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}dx = \frac{A}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}.$$

Observemos que para verificarlo podemos hacer la sustitución $t = x - x_0$, $dt = dx$, y utilizando las propiedades de las potencias nos queda

$$\int \frac{A}{t^k}dt = A\int t^{-k}dt = \frac{A}{-k+1}t^{-k+1}.$$

Ejemplo 2.3.3. Calcular la integral

$$\int \frac{x}{(x-1)^3}.$$

De acuerdo a lo anterior, proponemos

$$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}.$$

Busquemos las constantes A, B, y C. Como antes, sumando las fracciones de la derecha nos queda

$$\frac{x}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3},$$

y cancelando los denominadores,

$$x = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Como en el ejemplo anterior, daremos valores a x, pero en este tenemos una única raíz.

Tomando $x = 1$ (el valor de la raíz de $Q(x)$), obtenemos el valor de C:

$$x = 1, \qquad 1 = C.$$

Para hallar los otros valores, y como $Q(x)$ no tiene más raíces, le damos valores arbitrarios:

$$x = 0, \qquad 0 = A - B + C,$$

y como $C = 1$, queda $0 = A - B + 1$ y despejamos B en función de A:

$$B = A + 1.$$

Ahora,

$$x = -1, \qquad -1 = 4A - 2B + C$$

reemplazando B y C,

$$-1 = 4A - 2(A+1) + 1,$$

con lo cual

$$-1 = 4A - 2A - 2 + 1,$$

es decir, $0 = 2A$, y por lo tanto, $A = 0$. Reemplazando en $B = A + 1$, obtenemos $B = 1$.

Finalmente, integrando ambos miembros tenemos:

$$\int \frac{x}{(x-1)^3} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^3} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^3} dx = \frac{-1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + k.$$

$Q(x)$ tiene raíces complejas conjugadas

Un caso importante es el de raíces complejas. Recordemos que si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja, también es raíz su conjugada. Así, las raíces se agrupan de a pares que son raíces de polinomios $Q_i(x)$ de grado dos con coeficientes reales.

Ahora, la descomposición será de la forma

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)Q_2(x)\dots Q_n(x)} = \frac{A_1 x}{Q_1(x)} + \frac{B_1}{Q_1(x)} + \frac{A_2 x}{Q_2(x)} + \frac{B_2}{Q_2(x)} + \dots + \frac{A_n x}{Q_n(x)} + \frac{B_n}{Q_n(x)}$$

y habrá que determinar los coeficientes A_k, B_k.

Para integrar las fracciones de la forma

$$\frac{Ax}{Q(x)}$$

habrá que hacer sustitución; mientras que las fracciones de la forma

$$\frac{B}{Q(x)}$$

se integran utilizando la arcotangente.

Veamos un ejemplo sencillo a continuación, y luego otro más complicado.

Ejemplo 2.3.4. Calcular la integral

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$$

Aquí, los polinomios x^2+4 y x^2+1 no tienen raíces reales, así que planteamos la descomposición

$$\frac{x-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = \frac{Ax}{x^2+4} + \frac{B}{x^2+4} + \frac{Cx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

y para encontrar los coeficientes hacemos como antes, lo cual nos da:

$$x-1 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4)$$

(verifíquelo!).

Sin embargo, darle valores a x no ayuda mucho en este caso, ya que no logramos que se anule nada. Utilizaremos otra idea (que también funcionaba en los problemas anteriores), que consiste en desarrollar el polinomio de la derecha e igualar coeficientes con la izquierda.

Tenemos

$$\begin{aligned}
&(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4) \\
&\qquad = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 4Cx + Dx^2 + 4D \\
&\qquad = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+4C)x + B + 4D
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, como el polinomio de la izquierda no tiene términos de tercer y segundo grado, obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= A+C \\
0 &= B+D \\
1 &= A+4C \\
-1 &= B+4D
\end{aligned}$$

En la primera, $C = -A$, y en la segunda, $D = -B$. Reemplazando en las siguientes,

$$1 = A - 4A, \qquad -1 = B - 4B$$

es decir,

$$1 = -3A, \qquad -1 = -3B,$$

de donde obtenemos

$$A = \frac{-1}{3}, \qquad B = \frac{-1}{3}$$

con lo cual conseguimos también C y D:

$$C = \frac{1}{3}, \qquad D = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, hemos conseguido la descomposición en fracciones simples buscada:

$$\frac{x-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{3}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}.$$

Ahora, para integrar, debemos resolver cuatro integrales, ya que

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = \int \left(-\frac{1}{3}\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{3}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+4}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+4}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

Veamos cada una por separado.

$$a) \qquad \int \frac{x}{x^2+4}dx$$

Hacemos la sustitución $t = x^2 + 4$, con lo cual $dt = 2xdx$. Entonces,

$$\int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\ln|t|,$$

que volviendo a la variable original queda

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4).$$

$$b) \qquad \int \frac{1}{x^2+4}dx$$

La primitiva de esta integral se calcula con la arcotangente, y hacemos

$$\int \frac{1}{4(x^2/4)+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}dx.$$

Hacemos la sustitución $t = x/2$, con lo cual $dt = dx/2$. Entonces,

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(t)\right),$$

que volviendo a la variable original queda

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}(x/2).$$

$$c) \qquad \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

Esta es similar a la primera, queda

$$\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

$$d) \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

Esta se integra directamente, y es la arcotangente:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Luego, la integral buscada nos queda

$$\int \frac{x-1}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}(x/2)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right) + \frac{1}{3}\int \operatorname{arc\,tg}(x) + k,$$

es decir,

$$-\frac{1}{6}\ln(x^2+4) - \frac{1}{24}\operatorname{arc\,tg}(x/2) + \frac{1}{6}\ln(x^2+4) + \frac{1}{3}\int \operatorname{arc\,tg}(x) + k.$$

Observación 2.3.5. *El siguiente ejemplo es un caso especial, donde debemos completar cuadrados para hallar la primitiva. Se puede omitir en una primera lectura, hasta manejar mejor los conceptos básicos.*

Ejemplo 2.3.6. Calcular la integral

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}dx.$$

Podemos verificar sin dificultad que el denominador no tiene raíces reales. Ahora, observemos que en este caso ya tenemos hecha la separación en fracciones simples, pues

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x}{x^2+x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Aquí, la verdadera dificultad está en integrar las expresiones que quedan.

Si queremos resolver la integral

$$\int \frac{2x}{x^2+x+1}dx,$$

podemos intentar la sustitución $t = x^2 + x + 1$, y tenemos $dt = (2x + 1)dx$. Hacemos entonces un pequeño cambio en la integral,

$$\int \frac{2x}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} dx$$

y separamos esta integral en dos,

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Luego, la integral original nos queda

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx,$$

es decir,

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

La primera se puede resolver con la sustitución propuesta:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t|$$

que volviendo a la variable original es $\ln(x^2 + x + 1)$.

Para la segunda, tenemos que completar cuadrados:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ahora, esta se resolverá con la arcotangente, y hacemos

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right],$$

que también podemos escribir como

$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

La integral a calcular nos queda

$$-2 \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = -2 \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} dx = -\frac{8}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

y haciendo la sustitución

$$t = \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}, \qquad dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx,$$

integramos

$$-\frac{8}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{t^2+1}dt = -\frac{8}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}(t),$$

y en la variable original nos da

$$-2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = -\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

La integral buscada es la suma de las dos:

$$\ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

El siguiente ejemplo incluye raíces complejas y una raíz simple.

Ejemplo 2.3.7. Calcular la integral

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

Aquí vemos que $Q(x)$ tiene a 1 como raíz real y dos raíces complejas. En este ejemplo, como tenemos además una raíz simple real, la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}.$$

Para hallar los valores de A, B y C sumamos y nos queda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

y por lo tanto,

$$x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

Aquí nos conviene resolverlo dándole valores a x. Utilizamos una raíz de $Q(x)$ y luego dos valores arbitrarios:

$$x=-1, \qquad -2=2A, \qquad A=-1$$

$$x=0, \qquad -1=A+C, \qquad -1=-1+C \Rightarrow C=0$$

$$x=1, \qquad 0=2A+(B+C)(2), \qquad 0=-2+2B \Rightarrow B=1.$$

Tenemos

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$$

(la última se omite porque $C=0$).

Integrando, nos queda

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx,$$

que se resuelven en forma similar a las que ya hemos visto, y obtenemos

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k.$$

2.4. Cociente de polinomios

Si bien hemos visto el caso de un cociente de polinomios mediante una integración aplicando fracciones simples, en todos los casos el grado del numerador P era menor al grado del denominador Q. Cuando el grado de P es mayor o igual al grado de Q, primero hay que dividir los polinomios, y luego se aplican distintos métodos según el resultado que quede (sustitución, fracciones simples). En esta sección repasaremos el algoritmo de la división y veremos algunos ejemplos.

División de polinomios

Cuando se quiere calcular una integral de la siguiente forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

donde P y Q son polinomios tales que $gr\,P \geq gr\,Q$, hay que dividir los polinomios. Esto nos permite descomponer una división de polinomios en una suma de dos términos.

Proposición 2.4.1 (Algoritmo de la división)**.** *Sean P y Q dos polinomios, $Q \neq 0$. Entonces, existen dos únicos polinomios C y R tales que*

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x),$$

donde $R = 0$ ó $0 \leq gr\,R < gr\,Q$. A los polinomios C y R se los denomina cociente y resto respectivamente de dividir P por Q.

Esto nos permite reducir la integral de P/Q a dos que ya sabemos resolver:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Si realizamos la división de P por Q, por la proposición anterior existen dos polinomios C y R tales que

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x).$$

Luego,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = \frac{C(x)Q(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Integrando ambos miembros,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int [C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}]dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.4.2. Calcular la integral

$$\int \frac{3x+9}{2x+1}dx$$

Realizando la división se obtiene que $C(x) = \frac{3}{2}$ y $R(x) = \frac{15}{2}$. Entonces,

$$\int \frac{3x+9}{2x+1} = \int \frac{3}{2}dx + \int \frac{15}{2}\frac{1}{2x+1}dx = \frac{3}{2}\int dx + \frac{15}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx$$
$$= \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}\frac{1}{2}\ln|2x+1| + k.$$

Observación 2.4.3. *La integral del segundo miembro se resuelve con la sustitución $t = 2x+1$. Dejamos los detalles de la verificación a cargo del lector.*

Ejemplo 2.4.4. Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x - 4}dx.$$

Como el grado del polinomio del numerador es mayor al grado del polinomio del denominador vamos a dividirlos.

Al realizar la división el cociente es $C(x) = 2x + \frac{5}{2}$ y el resto es $R(x) = 12x + 11$. Luego por la Proposicion 2.4.1 tenemos que:

$$\int \frac{4x^3 + x^2 - x + 1}{2x^2 - 2x - 4}dx = \int \left(2x + \frac{5}{2}\right)dx + \int \frac{12x+11}{2x^2-2x-4}dx.$$

La primera integral del segundo miembro se obtiene sin problemas, pero la segunda no es inmediata. Entonces, tenemos que aplicar alguno de los métodos vistos anteriormente. Como el grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador podemos aplicar fracciones simples. Necesitamos entonces la factorización de $Q(x) = 2x^2 - 2x - 4$, que es $Q(x) = 2(x+1)(x-2)$.

Una observación que podemos hacer es que el polinomio Q tiene un 2 como coeficiente principal, pero no es un problema ya que por la linealidad de la integral lo podemos sacar fuera de la misma. Es decir:

$$\int \frac{12x+11}{2x^2-2x-4}dx = \int \frac{12x+11}{2(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{12x+11}{(x+1)(x-2)}dx.$$

Vamos a resolver como un cálculo auxiliar la integral

$$\int \frac{12x+11}{(x+1)(x-2)}dx,$$

recordando el caso de fracciones simples donde las raíces de Q son simples y distintas. Tenemos

$$\frac{12x+11}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Igualando los numeradores tenemos que

$$12x + 11 = A(x-2) + B(x+1).$$

Dándole a x los valores de las raíces de Q tenemos que:

- $x = 2,\ 12 \cdot 2 + 11 = A(2-2) + B(2+1)$, con lo cual $B = \frac{35}{3}$
- $x = -1,\ 12 \cdot (-1) + 11 = A(-1-2) + B(-1+1)$, luego $A = \frac{1}{3}$

Reemplazando los valores de A y B e integrando, nos queda

$$\int \frac{12x+11}{(x+1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{35}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

Las integrales a resolver son casi inmediatas, se pueden resolver con una simple sustitución, quedando:

$$\int \frac{12x+11}{(x+1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{35}{3}\ln|x-2|.$$

Recordando que teníamos que resolver:

$$\int \frac{4x^3+x^2-x+1}{2x^2-2x-4}dx = \int \left(2x+\frac{5}{2}\right)dx + \int \frac{12x+11}{2x^2-2x-4}dx$$

$$\int \frac{4x^3+x^2-x+1}{2x^2-2x-4}dx = \frac{2x^2}{2} + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{35}{3}\ln|x-2|\right) + k.$$

Simplificando y realizando la distributiva tenemos que:

$$\int \frac{4x^3+x^2-x+1}{2x^2-2x-4}dx = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{35}{6}\ln|x-2| + k.$$

Ejercicio 2.4.5. *Aplicando el método de fracciones simples, calcular:*

a) $\displaystyle\int \frac{6x+10}{x^2+4x+3}dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^2-12x-8}{x^3-3x^2-4x}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-21}{x^2-x-6}dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+4x+4)(x-3)}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-6}{x^3+3x^2}dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x^4+x+2}{2x^3+x^4}$

Observación 2.4.6. *Desde ya, a la hora de calcular una integral, puede ser necesario combinar más de un método para hacerlo. A veces, tras aplicar partes, la integral que queda sale haciendo una sustitución, o viceversa. En el siguiente ejemplo veremos que es necesario hacer primero una sustitución, y luego aplicar partes.*

Ejemplo 2.4.7. Calcular la integral

$$\int 6x^5 e^{x^3}\,dx.$$

Primero aplicamos la sustitución:

$$t = x^3$$

$$dt = 3x^2 dx.$$

Observemos que podemos escribir el integrando de la siguiente forma:

$$6x^5 e^{x^3} = 2 \cdot 3x^2 x^3 e^{x^3},$$

con lo cual, aplicando la sustitución obtenemos

$$\int 2te^t dt,$$

que no es una integral inmediata. Ahora aplicamos partes:

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^t & v = e^t \end{array}$$

y nos queda

$$2 \int te^t dt = 2 \left(te^t - \int e^t dt \right) = 2(te^t - e^t).$$

Reemplazando la variable t,

$$\int 6x^5 e^{x^3} dx = 2(x^3 e^{x^3} - e^{x^3}) + k.$$

Observación 2.4.8. *Un comentario final: no es sencillo distinguir a primera vista por qué método se resuelve una integral, si sale por sustitución, fracciones simples, o partes. Tampoco lo es descubrir la sustitución correcta cuando se resuelve de ese modo. Esto se logra con mucha práctica, y resolviendo distintos ejercicios.*

En los siguientes ejercicios no se aclara qué método hay que aplicar, conviene resolverlos después de haber hecho los ejercicios para cada método.

Ejercicio 2.4.9. *Calcular las siguientes utilizando el método de integración que sea conveniente.*

$$\begin{array}{llllll} a) & \displaystyle\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx & b) & \displaystyle\int \frac{3u + 1}{u^2 + 1} du & c) & \displaystyle\int \frac{\ln(x) \operatorname{sen}(\ln(x))}{x} dx \\ d) & \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx & e) & \displaystyle\int x \ln(\sqrt{x} + 1) dx & f) & \displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(\ln(y))}{y} dy \end{array}$$

3. Aplicaciones económicas

En esta sección veremos algunas aplicaciones sencillas del concepto de integral indefinida en problemas relacionados con la economía. Dada una función económica marginal, obtendremos la función económica de la cual proviene, que será una primitiva, y con alguna condición determinaremos el valor de k (la constante de integración).

3.1. Ejemplos

Ejemplo 3.1.1. En una cierta empresa se sabe que la función de costo marginal está dada por: $Cmg(x) = 200 + 3x + 4x^2$ y los costos fijos ascienden a \$30000. Determinar la función costo total y la de costo por unidad.

Sabemos que

$$Cmg(x) = 200 + 3x + 4x^2, \text{ es decir, } C'(x) = 200 + 3x + 4x^2.$$

Integrando tenemos que:

$$C(x) = \int 200 + 3x + 4x^2 = 200x + 3\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + k,$$

es decir,

$$C(x) = 200x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + k.$$

Aquí tenemos infinitas funciones de costo posibles. El dato del costo fijo se utiliza para hallar el valor de la constante de integración k. Como el costo fijo es de \$30000, eso equivale a $C(0) = 30000$, o sea el costo aunque no se produzca nada es de \$30000. Reemplazando:

$$30000 = 200 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 + k,$$

y despejamos

$$k = 30000,$$

con lo cual

$$C(x) = 200x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 30000$$

La función costo por unidad $\bar{C}(x)$ se obtiene dividiendo el costo entre las x unidades producidas,

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x},$$

entonces:

$$\bar{C}(x) = \frac{200x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 30000}{x} = 200 + \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{30000}{x}.$$

Ejemplo 3.1.2. Dada la función ingreso marginal $Img(x) = xe^{2x}$, hallar la función ingreso total y la función de demanda (considerar nulo el ingreso si no hay producción).

Tenemos

$$Img(x) = I'(x) = xe^{2x}dx,$$

con lo cual,

$$I(x) = \int xe^{2x}dx.$$

Vamos a aplicar partes para calcularla:

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

Luego,

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x} + k = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + k,$$

y obtenemos entonces

$$I(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + k.$$

Sabiendo que $I(0) = 0$, nos queda

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 0e^{2,0} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 0} + k = -\frac{1}{4} + k,$$

con lo cual $k = \frac{1}{4}$. Luego, $I(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}$.

Ahora, como $I(x) = D(x)x$,

$$D(x) = \frac{I(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}}{x} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}\frac{e^{2x}}{x} + \frac{1}{4x},$$

y hemos conseguido la función de demanda $D(x)$.

Ejercicio 3.1.3. *Aplicaciones económicas.*

1. *Un fabricante descubrió que el costo marginal cuando se producen q unidades es $Cmg(q) = 3q^2 - 60q + 400$ dólares por unidad. Si el costo total de producción de dos unidades es 900 dólares, ¿cuál es el costo total de producción de las 5 primeras unidades?*

2. *La función de ingreso marginal en pesos, si se fabrican y venden x pares de cierto modelo de zapatillas, es $Img(x) = 50 + 9x - 0,15x^2$. ¿Cuál es la función ingreso total si el ingreso cuando se fabrican y se venden 10 pares de zapatillas es de \$900?*

3. *Si la función de ingreso marginal está dada por $Img(x) = 100 - 8x^2 + x^3$, determinar la función de ingreso total. (Considerar nulo el ingreso cuando $x = 0$).*

4. *Se sabe que la función costo marginal verifica $Cmg(x) = xe^{-5x+1}$. Sabiendo que el costo de producir $\frac{1}{5}$ unidades es de \$4, hallar el costo total.*

5. *Sabiendo que el costo marginal y el ingreso marginal de cierto producto están dados por:*

$$Cmg(x) = e^{3x}\operatorname{sen}(2x), \qquad Img(x) = \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}},$$

Calcular el beneficio total sabiendo que

$$C(0) = \frac{37}{13} \quad e \quad I(0) = \frac{7}{2}.$$

6. *Si el costo marginal está dado por $Cmg(x) = e^{3x}x^2$, hallar la función costo total sabiendo que el costo de no producir nada es de \$$\frac{29}{27}$, es decir,*

$$C(0) = \frac{29}{27}.$$

Capítulo 3

Integral definida

1. Integral indefinida

Una de las grandes aplicaciones de la integral es el cálculo de áreas. De hecho, la integral surge como una herramienta para resolver el problema de calcular áreas de regiones arbitrarias. Si bien para círculos, cuadrados, triángulos, etc., existen fórmulas cerradas que nos dan su área, no las hay para regiones más generales. Por ejemplo, ¿cuál es el área sobre el eje x y debajo de una parábola, entre dos valores a y b? ¿Y el área limitada por el gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ y el eje x entre 0 y π?

No vamos a hacer un análisis detallado del proceso de integración que justifique los resultados de este capítulo, el lector interesado puede consultarlo en el capítulo 8 de [1]. A continuación veremos brevemente las ideas principales, y enunciaremos los teoremas principales.

1.1. Integral de Riemann

La definición de Riemann de la integral resulta bastante intuitiva, aunque los detalles técnicos son engorrosos. Consideremos el problema de calcular el área por encima del eje x y por debajo del gráfico de una función continua f definida en un intervalo $[a, b]$.

Comenzamos tomando una *partición* ρ de $[a, b]$, es decir, ρ es un conjunto de puntos

$$\rho = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}.$$

Esto nos permite dividir el intervalo $[a, b]$ en intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ más pequeños.

Ahora, en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ nos quedamos con el valor mínimo m_i y el valor máximo M_i que toma la función. Esto nos permite aproximar el área calculando el área de los rectángulos de base $t_i - t_{i-1}$ y altura m_i (por debajo), y de base $t_i - t_{i-1}$ y altura M_i (por encima). Si sumamos todas las áreas, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq Area \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

A estas sumas se las llama *sumas inferiores* y *sumas superiores*. En las figuras 3.1 y 3.2 mostramos el caso $n = 3$.

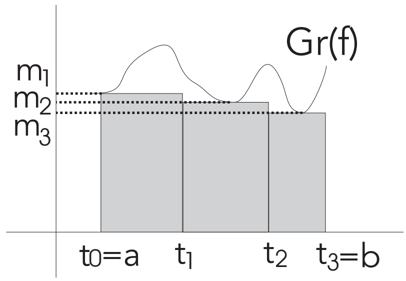


Figura 3.1: Suma inferior para $n = 3$.

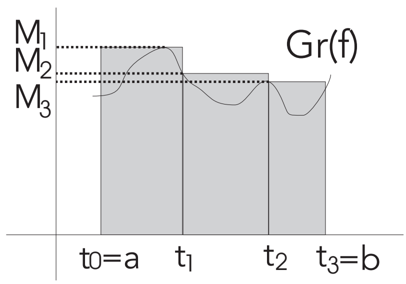


Figura 3.2: Suma superior para $n = 3$.

Resulta intuitivamente claro (si bien es una afirmación que deberíamos demostrar) que cuando agregamos más subdivisiones al intervalo y las longitudes de las bases $[t_{i-1}, t_i]$ tienden a cero, los valores m_i y M_i de la función son cada vez más parecidos, y por lo tanto, las áreas calculadas con las sumas inferiores y las sumas superiores se parecen cada vez más.

Con esta idea en mente, definiremos la *integral definida*, ahora sin hacer referencia al área, de la siguiente manera:

Definición 1.1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si las las sumas inferiores y las sumas superiores*

$$S_\rho = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \qquad S^\rho = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

(donde m_i y M_i son los valores mínimos y máximos de f en $[t_{i-1}, t_i]$) convergen a un mismo número cuando aumentamos el número de puntos en una partición ρ y las diferencias $t_i - t_{i-1}$ tienden a cero, decimos que f es integrable. A este número lo llamamos la integral definida de f en $[a, b]$, que escribimos

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A los valores a y b se los denomina los extremos de integración, a es el extremo inferior, y b es el extremo superior.

Observación 1.1.2. *Si bien hemos hablado de "áreas" al describir el procedimiento, el argumento de Riemann de dividir un intervalo, tomar los valores máximos y mínimos de la función f en cada intervalo, y multiplicarlos por la longitud de estos intervalos, no dependen del signo de la función. Por ese motivo, en la definición hemos omitido toda referencia al área. Si la función es negativa en un intervalo, tanto el máximo como el mínimo lo serán, y el resultado bien puede ser un número negativo.*

El punto más importante aquí es que no debe confundirse la **integral definida** *con el* **área***; aunque coinciden cuando la función f es positiva en el intervalo $[a, b]$.*

1.2. Propiedades de la integral definida

Proposición 1.2.1. *A continuación enunciaremos algunas propiedades de la integral definida que nos serán de gran utilidad para el cálculo de áreas:*

1. *Sean a, b, c $\in \Re$ tales que $a < c < b$, y f una función integrable sobre $[a, b]$ entonces:*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. *Sea f una función integrable sobre $[a, b]$ y $c \in \Re$, entonces:*
$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Sean f y g funciones integrables sobre $[a, b]$, entonces:*
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Una pregunta que podemos hacernos es qué funciones son integrables. No vamos a profundizar en este tema, pero enunciaremos a continuación -sin demostración- un teorema que justificará muchos cálculos.

Teorema 1.2.2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.*

1.3. Regla de Barrow

La definición anterior no da un procedimiento útil para calcular integrales definidas. El proceso de límite con las particiones se vuelve lento y difícil de manejar, pero la Regla de Barrow nos da un método de cálculo sencillo. Brevemente, ésta dice que si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por lo tanto, calcular una integral definida se reduce a obtener una primitiva F de f, luego se la evalúa en los extremos del intervalo, y finalmente se efectúa la resta $F(b) - F(a)$.

Ejemplo 1.3.1. Calcular la integral

$$\int_0^1 2x^2 - 6x + 1dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (2x^2 - 6x + 1)dx &= \left.\frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + x\right|_0^1 \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{6}{2} \cdot 1^2 + 1\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 0^3 - \frac{6}{2} \cdot 0^2 + 0\right) \\
&= \frac{2}{3} - 3 + 1 \\
&= -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.2. Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx.$$

Tenemos

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)|_0^{2\pi} = \operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(0) = 0 - 0 = 0.$$

Observación 1.3.3. *Estos dos ejemplos nos deben recordar que la integral no es el área. En el primero, obtuvimos un resultado negativo, mientras que en el último fue nulo; un área, por el contrario, es siempre positiva.*

En algunas ocasiones, para obtener la primitiva será necesario integrar por sustitución, partes, o fracciones simples. Conviene hacer esto como un paso auxiliar, calculando aparte la integral indefinida, y luego utilizar la primitiva en la variable original para evaluar en los extremos del intervalo.

Ejemplo 1.3.4. Calcular la integral

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2 + 9}dx.$$

Como no podemos hallar una primitiva de forma inmediata, hacemos la sustitución

$$x^2 + 9 = u$$

$$2x = du$$

y la integral queda

$$\int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}},$$

y volviendo a la variable original, la integral es

$$\begin{aligned}\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}dx &= \frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}(4^2+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(25)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}125 - \frac{2}{3}27 = \frac{2}{3}98.\end{aligned}$$

Observación 1.3.5. *Para utilizar la Regla de Barrow elegimos cualquier primitiva, y no nos preocupamos por la constante de integración. Esto se debe a que si F es una primitiva de f, y k es una constante arbitraria,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)+k|_a^b = F(a)+k-F(b)-k = F(a)-F(b) = F(x)|_a^b.$$

Ejercicio 1.3.6. *Calcular las siguientes integrales definidas:*

i) $\displaystyle\int_{-1}^0 3x^5-3x^2+2x-1dx$ *ii)* $\displaystyle\int_1^9 \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$

iii) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+t)\sqrt{t^4+2t^2+1}dt$ *iv)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$

v) $\displaystyle\int_{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}^{\ln(2)} (e^t-e^{-t})dt$ *vi)* $\displaystyle\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx$ *vii)* $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

2. Cálculo de áreas

En esta sección mostraremos distintos ejemplos de cálculo de áreas. La mayor dificultad que presentan es encontrar la región de integración, entre qué valores de x hay que integrar, y en qué orden deben figurar en la integral las funciones que aparecen cuando hay más de una.

2.1. Area entre una curva y el eje x

Observación 2.1.1. *Cuando f es positiva en el intervalo $[a,b]$, la integral definida nos da el área entre el eje x y el gráfico de f entre los valores a y b. Esto se desprende de la propia definición de Riemann.*

Ejemplo 2.1.2. Expresar como una integral y calcular el área de la región acotada por

$$\begin{cases} y &= x^2+x+1 \\ y &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= 1 \end{cases}$$

También se puede describir esta región diciendo que x está entre 0 y 1, por encima del eje x, y debajo de la parábola $y = x^2 + x + 1$.

Cuando se pueda, nos conviene graficarla, en este caso podemos hacerlo (¡hágalo!) y vemos que es positiva en $[0, 1]$. Entonces, el área buscada es

$$\int_0^1 (x^2+x+1)dx.$$

Para calcularla, buscamos una primitiva y aplicamos la regla de Barrow:

$$F(x) = \int (x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x,$$

$$\int_0^1 (x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - 0 = \frac{11}{6}.$$

Ejemplo 2.1.3. Hallar el área de la región limitada por la recta $y = 2x$, el eje x y la recta vertical $x = 2$.

Observemos que en este caso nos dan un único extremo de integración, $x = 2$. Pero la recta $y = 2x$ corta al eje x en $x = 0$. Luego, calculamos el área del triángulo que queda formado entre el eje x, la recta, y $x = 2$ con la siguiente integral:

$$A = \int_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 4 - 0 = 4.$$

Ejemplo 2.1.4. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x - x^2$ y el eje x.

En este caso, debemos hallar ambos extremos de integración, que serán las intersecciones de la curva y con el eje x, es decir, las raíces de $x - x^2$. Como estas raíces son 0 y 1, el área buscada es

$$\int_0^1 x - x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Observación 2.1.5. *En ocasiones, la función cambia de signo. Si nos interesa el área entre el gráfico de una función f y el eje x, no es posible integrarla directamente como en el ejemplo anterior. Aquí, se buscan los ceros de la función y se integra f en los intervalos donde es positiva, y $-f$ en aquellos donde es negativa.*

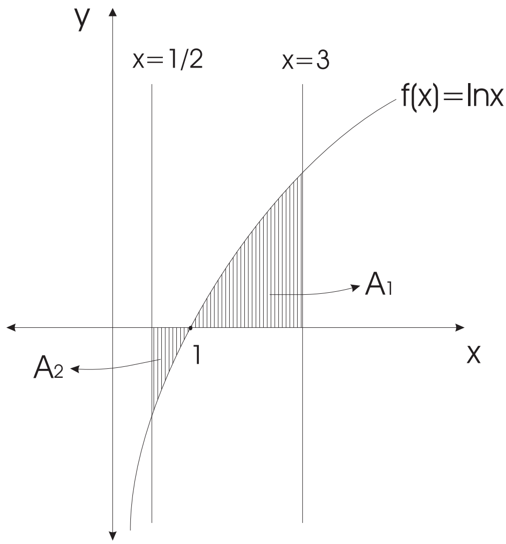


Figura 3.3: Gráfico del ejemplo 2.1.6

Ejemplo 2.1.6. Calcular el área de la región encerrada entre:

$$\begin{cases} y &= \ln(x) \\ y &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \\ x &= 3 \end{cases}$$

Una vez realizado el gráfico (ver figura 3.3), nos damos cuenta que hay que partir en dos la región ya que la función cambia de signo. Entonces, tenemos

$$A_1 = \int_1^3 \ln(x)dx, \quad \text{y} \quad A_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 -\ln(x)dx.$$

Para hallar el área necesitamos una primitiva del logaritmo, que ya la calculamos en el ejercicio 2.2.12, y tomamos $x\ln(x) - x$.

Entonces,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^3 \ln(x)dx \\ &= x\ln(x) - x\big|_1^3 \\ &= 3\ln(3) - 3 - (1\ln(1) - 1) \\ &= 3\ln(3) - 3 + 1 \\ &= 3\ln(3) - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\ln(x)dx \\
&= (x\ln(x) - x)|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= x - x\ln(x)|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= 1 - 1\ln(1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$A = A_1 + A_2 = 3\ln(3) - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,45.$$

Ejemplo 2.1.7. Calcular el área entre el eje x y la parábola $y = x^2 - 1$ entre -2 y 2.

Aquí el área no es $\int_{-2}^{2} x^2 - 1dx$, ya que la función se hace negativa. Calculamos los ceros y encontramos que son ± 1; la parábola es positiva en $[-2,-1]$ y $[1,2]$, y negativa en $[-1,1]$ (¡dibújela!).

Luego, el área es

$$\int_{-2}^{-1} x^2 - 1dx + \int_{-1}^{1} -x^2 + 1dx + \int_{1}^{2} x^2 - 1dx,$$

e integrando cada una por separado, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^3}{3} - x\Big|_{-2}^{-1}\right) &= \frac{(-1)^3}{3} - (-1) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)\right) \\
&= -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{4}{3} \\
\left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) &= 1 - \frac{1^3}{3} - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\
\left(\frac{x^3}{3} - x\Big|_{1}^{2}\right) &= \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) \\
&= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ahora, obtenemos el área buscada sumando estos valores, y es

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

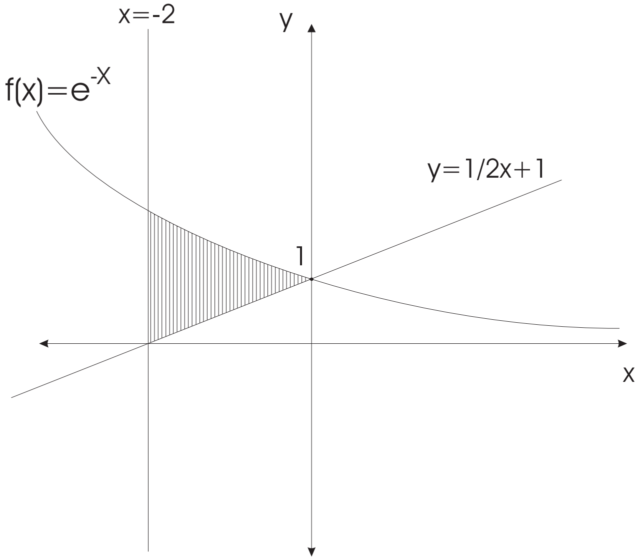


Figura 3.4: Gráfico del ejemplo 2.2.2

Ejercicio 2.1.8. *Hallar el área de la región limitada por la curva* $y = \sqrt{x}$*, las rectas* $x = 4$*,* $x = 9$ *y el eje* x*.*

Ejercicio 2.1.9. *Hallar el área de la región limitada por la curva* $y = x^2 - 4x$ *y el eje* x*.*

2.2. Area entre curvas

Observación 2.2.1. *Si se tienen dos funciones* f *y* g *definidas en* $[a, b]$*, tales que* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$*, el área entre ambas funciones se calcula como*

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Coloquialmente, nos referiremos a f *como el "techo" de la región y a* g *como el "piso", para indicar que una está por arriba de la otra.*

Ejemplo 2.2.2. Calcular el área de la región encerrada entre:

$$\begin{cases} y &= e^{-x} \\ y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ x &= -2 \end{cases}$$

Observemos que sólo dan uno de los extremos de integración, el otro saldrá del punto donde se crucen ambas curvas. Nos conviene graficar las funciones, y una vez realizado el gráfico (ver figura 3.4), calculamos el área como:

$$A = \int_{-2}^{0} e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx.$$

El extremo superior de integración, $x = 0$, lo descubrimos a partir del gráfico. Podemos plantear, para hallarlo, la ecuación

$$e^{-x} = \frac{1}{2}x + 1,$$

pero es prácticamente imposible despejar el punto donde se cruzan las curvas a partir de esa ecuación. Aunque podemos verificar que $x = 0$ es solución de la misma, ya que

$$e^{0} = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$$

En casos más simples (cuadráticas, rectas), podremos hallar los extremos de integración buscando analíticamente los puntos de intersección, pero con exponenciales o trigonométricas resulta muy difícil.

Antes de calcular la integral, busquemos una primitiva de $\int e^{-x} dx$. Haciendo la sustitución

$$\begin{array}{rcl} u & = & -x \\ du & = & -dx \end{array}$$

despejamos $dx = -du$ y cambiamos de variable:

$$\int e^{u}(-du) = -\int e^{u} du = -e^{u} + c$$

y volviendo a la variable original tenemos

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c.$$

Luego, el área buscada es

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-2}^{0} e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx & = & \displaystyle\int_{-2}^{0} e^{-x} - \frac{1}{2}x - 1\, dx \\ & = & \displaystyle -e^{-x} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - x \Big|_{-2}^{0} \\ & = & \displaystyle -e^{0} - \frac{1}{2}\frac{0^2}{2} - 0 - \left(-e^{-(-2)} - \frac{1}{2}\frac{(-2)^2}{2} - (-2)\right) \\ & = & -1 - (-e^2 - 1 + 2) \\ & = & -1 + e^2 + 1 - 2 \\ & = & e^2 - 2. \end{array}$$

Ejemplo 2.2.3. Hallar el área encerrada por las curvas $y_1 = x^2 - 1$ e $y_2 = x + 1$.

En este caso, si bien podemos graficar ambas funciones, vamos a resolverlo analíticamente. Planteamos

$$x^2 - 1 = x + 1,$$

y nos queda

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $x = -1$ y $x = 2$, que serán los extremos de integración. Nos falta saber en qué orden tenemos que escribir las funciones, y para esto evaluamos en punto del intervalo $(-1, 2)$, por ejemplo en $x = 0$. Tenemos

$$y_1(0) = 0^2 - 1 = -1, \qquad y_2(0) = 0 + 1 = 1,$$

con lo cual $y_2 \geq y_1$ en $(-1, 2)$ (en realidad, aquí estamos utilizando el Teorema de Bolzano: la función $y_2 - y_1$ es continua y no tiene ceros en $(-1, 2)$, por lo tanto es positiva en todo el intervalo).

El área buscada es

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} x + 1 - (x^2 - 1)dx &= \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2dx \\
&= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} \\
&= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 \cdot 2 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) \\
&= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Observación 2.2.4. *En ocasiones, dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b]$, éstas se cruzan en varios puntos, y cambia cuál es mayor que la otra según el intervalo considerado.*

Ejemplo 2.2.5. Calcular el área encerrada por las curvas $y_1 = x^3 + x$ e $y_2 = 5x$.

Como en el ejercicio anterior, buscamos la intersección de y_1 e y_2:

$$x^3 + x = 5x,$$

y obtenemos

$$0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

Entonces, tenemos dos intervalos para integrar, $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. En el primero, $y_1 > y_2$, pues evaluando en $x = -1$ tenemos

$$(-1)^3 + (-1) = -2 > 5 \cdot (-1) = -5.$$

En cambio, en $(0,2)$ es $y_2 > y_1$, pues evaluando en $x = 1$,

$$5 \cdot 1 = 5 > 1^3 + 1 = 2.$$

Luego, el área buscada es $A_1 + A_2$ donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{0} x^3 + x - 5x dx \\
&= \int_{-2}^{0} x^3 - 4x = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{-2}^{0} \\
&= \frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right) \\
&= -4 + 8 = 4, \\
A_2 &= \int_0^2 5x - (x^3 + x) dx \\
&= \int_{-2}^{0} 4x - x^3 = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_{0}^{2} \\
&= 2(2)^2 - \tfrac{2^4}{4} - \left(2 \cdot 0^2 - \tfrac{0^4}{4} \right) \\
&= 8 - 4 = 4,
\end{aligned}$$

y entonces

$$A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8.$$

Ejercicio 2.2.6. *Hallar el área de la región limitada por las curvas* $y = x^2 - 2x$ *e* $y = -x^2 + 4$.

Ejercicio 2.2.7. *Hallar el área de la región limitada por la curva*

$$y = \frac{1}{x^2}$$

y las rectas $y = x$, *e* $y = x/8$.

Ejercicio 2.2.8. *Calcular el área de la región encerrada entre*

$$\begin{cases} y &= \ln(x) \\ y &= 1 \\ x &= 1 \\ x &= 6 \end{cases}$$

Ejercicio 2.2.9. *Hallar el valor de* $m > 0$ *de manera que la región limitada por la recta* $y = mx$ *y la curva* $y = 4x^3$ *sea igual a* 18.

3. Aplicaciones económicas

En lo que sigue, vamos a considerar dos funciones, una de demanda ($p = D(q)$) y otra de oferta ($p = O(q)$), de un mismo artículo. La variable q denota la cantidad del artículo que puede venderse u ofertarse a un precio p por unidad. Suponemos que el bien es típico, con lo cual la función de demanda es decreciente y la de oferta creciente. La intersección de ellas representa el punto de equilibrio,

$$P_e = (q_e, p_e),$$

es decir, a ese precio p_e los consumidores estarán dispuestos a comprar (y los productores a vender) una cantidad q_e de unidades del artículo.

Bajo la hipótesis de un mercado de libre competencia existirán consumidores que estarán dispuestos a comprar el artículo a un precio mayor que el precio de equilibrio p_e, y por lo tanto se benefician con este precio. La suma en que se benefician se denomina el **excedente del consumidor**, EC, y es igual al área que se encuentra entre la curva de demanda, el eje de ordenadas, y la recta $p = p_e$, suma que se puede calcular mediante la integral:

$$EC = \int_0^{q_e} (D(q) - p_e)dq.$$

En forma similar consideraremos el **excedente del productor**, es decir, existirán productores dispuestos a vender el artículo a un precio menor que el precio de equilibrio p_e, y por lo tanto se benefician con este precio. La suma en que se benefician se denomina excedente del productor, y se puede calcular con la integral

$$EP = \int_0^{q_e} (p_e - O(q))dq.$$

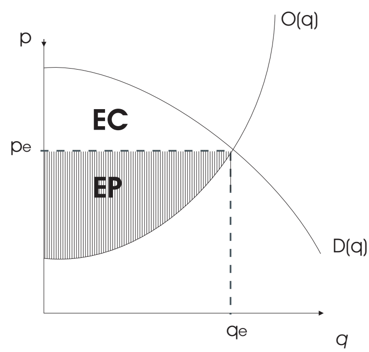


Figura 3.5: Gráfico de los excedentes

3.1. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1.1. Las funciones de demanda y de oferta de un artículo son

$$D(q) = -q^2 + 6, \quad \text{y} \quad O(q) = 2q + 3$$

respectivamente, hallar el excedente del consumidor y del productor.

Para resolver el ejercicio primero necesitamos hallar el punto de equilibrio, o sea, la intersección entre la demanda y la oferta. Para ello, igualamos las funciones:

$$D(q) = O(q) \quad \Rightarrow \quad -q^2 + 6 = 2q + 3$$

y debemos hallar las raíces de la cuadrática

$$-q^2 - 2q + 3 = 0.$$

Estas son $q = -3$ y $q = 1$, pero como q representa cantidades, descartamos la primera y nos quedamos con $q_e = 1$.

Para hallar el precio de equilibrio basta evaluar las funciones en este valor, y haciendo $O(1)$ o $D(1)$, obtenemos $p_e = 5$.

Reemplazando en las integrales, calculamos los excedentes

$$\begin{aligned}
EC &= \int_0^1 D(q) - 5dq \\
&= \int_0^1 -q^2 + 6 - 5dq \\
&= \int_0^1 -q^2 + 1dq \\
&= -\frac{q^3}{3} + q\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
EP &= \int_0^1 5 - O(q)dq \\
&= \int_0^1 5 - (2q+3)dq \\
&= \int_0^1 -2q + 2dq \\
&= -q^2 + 2q \mid_0^1 \\
&= -1 + 2 = 1.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.2. Se desea que el excedente del productor sea de \$64, y la función de oferta es $O(q) = a^2\,q^2$, donde a es el precio unitario ($a > 0$). Sabiendo que el precio de equilibrio es $p_e = 4$, ¿a cuánto se tiene que vender cada artículo para obtener dicho superavit?

Aquí la verdadera incógnita es a (precio unitario), y nos dan como datos el excedente del productor y el precio de equilibrio. Para hallar la cantidad de equilibrio usamos el dato p_e, y entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
4 &= a^2 q_e^2 \\
q_e^2 &= \frac{4}{a^2} \\
q_e &= \frac{2}{a}
\end{aligned}
$$

ya que $q_e > 0$ y $a > 0$.

Sabemos que el excedente del productor es

$$EP = \int_0^{q_e} p_e - O(q)dq,$$

y reemplazando los datos tenemos

$$
\begin{aligned}
64 &= \int_0^{\frac{2}{a}} 4 - a^2 q^2 dq \\
&= 4q - \frac{a^2}{3} q^3 \mid_0^{\frac{2}{a}} \\
&= \frac{8}{a} - \frac{8}{3a} \\
&= \frac{16}{3a},
\end{aligned}
$$

de donde despejamos a, y obtenemos

$$a = \frac{1}{12}.$$

Ejercicio 3.1.3. *Dadas las siguientes funciones para un determinado producto:*

$$f(x) = 45 + 2x, \;\; y \; g(x) = 144 - x^2,$$

hallar los excedentes del productor y del consumidor. Realizar un gráfico aproximado. (Sugerencia: determinar primero cuál función es la de demanda y cuál es la de oferta).

Ejercicio 3.1.4. *Las funciones de demanda y oferta para cierto bien es*

$$D(q) = \frac{18}{q+3}, \;\; y \; O(q) = \frac{1}{6}\, q + 1.$$

Hallar el excedente del consumidor.

Ejercicio 3.1.5. *La función de oferta de un artículo es* $O(q) = \sqrt{10q + 100}$ *y la de su demanda es* $D(q) = -\frac{1}{2}\, q + 35$. *Hallar el excedente del productor.*

Ejercicio 3.1.6. *Sea* $D(q) = (q+32)e^{-4q+8}$ *la función de demanda de cierto producto. Hallar el excedente del consumidor cuando el equilibrio se alcanza para una demanda de* 2 *unidades.*

Hay otros problemas económicos donde se utiliza la integral definida. Los siguientes ejercicios se resuelven de manera diferente, y no involucran excedentes.

Ejercicio 3.1.7. *En cierta fábrica, el costo marginal es* $3(q-4)^2$ *dólares por unidad cuando el nivel de producción es* q *unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?*

Ejercicio 3.1.8. *Una compañía determina que el ingreso marginal de la producción de* x *unidades es* $I'(x) = 7 - 3x - 4x^2$ *cientos de dólares por unidad y el correspondiente costo marginal es* $C'(x) = 5 + 2x$ *cientos de dólares por unidad. ¿Cuánto cambia la utilidad cuando el nivel de producción aumenta de 5 a 9 unidades?*

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias. Las ecuaciones diferenciales son una clase de ecuaciones donde la incógnita es una función, y conocemos ciertas relaciones entre esta función desconocida y sus derivadas.

Cuando la función desconocida depende de una única variable, tenemos una ecuación diferencial *ordinaria*, y si la función desconocida depende de varias variables, tenemos una ecuación en *derivadas parciales*.

El área de ecuaciones diferenciales es una de las más amplias de la matemática, ya que se aplican a distintos problemas prácticos de la física, la química, la ingeniería y también de la economía. Por esta razón, y dado que éste es un curso introductorio al tema, veremos algunos métodos sencillos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Vamos a considerar también problemas de segundo orden a coeficientes constantes, y para un desarrollo más completo del tema recomendamos [2], y en especial el excelente libro de Simons [11], si bien puede ser necesario un conocimiento de matemáticas mayor para estudiar este último libro en detalle.

1. Ecuaciones de primer orden

En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego de las definiciones básicas, veremos algunos ejemplos sencillos para familiarizarnos con las ecuaciones diferenciales.

1.1. Nociones generales

Definición 1.1.1. *Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación que involucra la función incógnita y su primera derivada. La función incógnita depende de una sola variable independiente.*

Ejemplo 1.1.2. La ecuación diferencial ordinaria $f'(x) + 3xf(x) = 2x$ es de primer orden, la incógnita es la función $f(x)$.

Observación 1.1.3. *El orden de una ecuación diferencial es igual al de la mayor derivada de la función incógnita.*

Ejemplo 1.1.4. La ecuación diferencial ordinaria $f''(x)+3xf(x) = 2x$ es de segundo orden, la incógnita es la función $f(x)$.

Nos convendrá introducir cierta notación para las funciones incógnitas, vamos a representarlas con la letra y:

$$f(x) = y,$$
$$f'(x) = y',$$
$$f''(x) = y''$$

También escribiremos la derivada utilizando la notación de Leibniz,

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Los ejemplos anteriores con la nueva notación se escribirán

$$y' + 3xy = 2x, \qquad y'' + 3xy = 2x.$$

Definición 1.1.5. *La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial.*

Definición 1.1.6. *Una solución particular es aquella función que además de ser una solución cumple con alguna condición adicional, por lo general, la de pasar por un punto (x_0, y_0) determinado.*

A la condición $y(x_0) = y_0$ se la llama la condición inicial.

Observación 1.1.7. *Resolver una ecuación diferencial consiste en hallar la solución general de la ecuación. Si se dispone de un dato inicial, se debe hallar la solución particular.*

Veamos unos ejemplos donde aplicamos directamente estas definiciones para familiarizarnos con ellas.

Ejemplo 1.1.8. Decidir si $y = x^2 + x$ es una solución de la ecuación

$$y' = y + 1.$$

Para ver si es una solución, calculamos $y' = 2x + 1$, y reemplazamos y, y' en la ecuación. Si lo es, debe cumplirse que

$$2x + 1 = x^2 + x + 1$$

para todo valor de x. Pero cancelando vemos que no, ya que

$$x \neq x^2.$$

Observación 1.1.9. *En este ejemplo, cuando $x = 0$ ó $x = 1$ se cumple $x = x^2$. Sin embargo, para ser solución debe darse la igualdad para todo valor de x.*

Ejemplo 1.1.10. Verificar que la función $y = x^2 + x$ es una solución particular de la ecuación

$$xy' = y + x^2$$

que satisface $y(0) = 0$.

Observemos que para verificar que es una solución particular hay que comprobar dos cosas:

- que y es solución de la ecuación, y además
- que $y(0) = 0$.

Esto último es más sencillo de comprobar, ya que basta reemplazar y hacer la cuenta. En efecto, $y(0) = 0^2 + 0 = 0$. Para verificar que es solución de la ecuación, necesitamos calcular su derivada. Como $y = x^2 + x$, tenemos $y' = 2x + 1$, y ahora hay que ver si se cumple que

$$xy' = y + x^2.$$

Reemplazamos en la ecuación y nos queda

$$x(2x + 1) = x^2 + x + x^2,$$

ahora, distribuyendo en el primer miembro y agrupando en el segundo,

$$2x^2 + x = 2x^2 + x,$$

con lo cual y es solución.

Veamos un último ejemplo antes de estudiar los métodos para hallar las soluciones de una ecuación ordinaria de primer orden.

Ejemplo 1.1.11. Hallar el valor de c tal que la función $y = e^x + x^2 + cx$ sea una solución particular de la ecuación

$$y' = y - x^2 + 2, \qquad y(0) = 1.$$

Derivando tenemos que $y' = e^x + 2x + c$, y reemplazando,

$$e^x + 2x + c = e^x + x^2 + cx - x^2 + 2,$$

y tras simplificar y hacer pasaje de términos nos queda

$$2x - 2 = cx - c,$$

con lo cual $c = 2$.

Finalmente, observemos además que $y(0) = e^0 + 0^2 + 2 \cdot 0 = 1$, así que satisface la condición inicial.

Ejercicio 1.1.12. *Demostrar que $y = e^{2t}$ no es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.*

Ejercicio 1.1.13. *Demostrar que para cualquier constante k, la función $y = ke^x$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$.*

Ejercicio 1.1.14. *Hallar los valores de C y k tales que la función $y = Ce^{kx}$ satisface el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

2. Métodos de resolución

En esta sección veremos dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Ambos corresponden a dos casos particulares de ecuaciones de primer orden, pero quedan muchos más que no trataremos aquí.

2.1. Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definición 2.1.1. *Dada una ecuación diferencial*

$$y' = f(x, y),$$

se denomina de variables separables cuando la función $f(x, y)$ se puede escribir como un producto de dos funciones, una de la variable x, la otra de la variable y, es decir, existen funciones P, Q tales que

$$f(x, y) = P(x)Q(y).$$

Esta clase de ecuaciones diferenciales se resuelve con facilidad. Vamos a proceder formalmente para entender cómo funciona el método.

Si tenemos $y' = P(x)Q(y)$, escribimos

$$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y),$$

y "despejando" e integrando,

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx.$$

Calculamos ahora las primitivas, y tenemos una ecuación implícita para y. Observemos que no siempre podremos despejarla explícitamente como función de x.

El método, planteado así, nos puede provocar varias dudas (¿se despeja dx?, ¿podemos dividir por $Q(y)$ siempre?), pero tras resolver distintos ejemplos nos convenceremos de que funciona. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.2. Hallar todas las funciones cuyas derivadas son iguales a x.

El ejemplo nos pide resolver una ecuación diferencial, si bien primero debemos plantearla. Una función genérica que estamos buscando es y, sobre la cual el dato que tenemos es que su derivada es x, esto es

$$y' = x.$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$\int dy = \int x dx.$$

Integrando ambos miembros nos queda

$$y = \frac{x^2}{2} + k,$$

que es la solución general de la ecuación anterior.

Ejemplo 2.1.3. Hallar la solución de $y' = x$ que pasa por el punto $(2, 1)$.

Aquí nos piden una solución particular, y podemos utilizar la solución general que calculamos en el ejemplo anterior, $y = x^2/2 + k$. Para hallar la solución particular, tendríamos que determinar k. Entonces, como $y = 1$ cuando $x = 2$, tenemos

$$1 = \frac{2^2}{2} + k,$$

de donde obtenemos

$$k = -1.$$

Luego, la única función que satisface la ecuación y que pasa por el punto $(2, 1)$ es

$$y = \frac{x^2}{2} - 1.$$

Observación 2.1.4. *En este ejemplo se ve que la solución general no es una única función, sino que son infinitas (salvo que nos den una condición para hallar k).*

A continuación veremos un ejemplo más complicado.

Ejemplo 2.1.5. Resolver la ecuación diferencial

$$y' + e^{2x}y^2 = 0.$$

Reescribimos la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = -e^{2x}y^2,$$

y vemos que es de variables separables ya que la expresión de la derecha es el producto de $-e^{2x}$ e y^2. Luego, separando variables e integrando, nos queda

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -e^{2x} dx.$$

Para la integral del lado izquierdo hacemos

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy = \frac{y^{-1}}{-1} = -y^{-1}.$$

Del lado derecho,

$$\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + k,$$

con lo cual podemos despejar y en función de x:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^{2x} + k,$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{2x} - k,$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{2x} - k}.$$

Ejemplo 2.1.6. Resolver la ecuación diferencial

$$yy' \cos(x) - y^3 \operatorname{tg}(x) = 0.$$

Separando las variables, tenemos

$$y\frac{dy}{dx}\cos(x) = y^3 \operatorname{tg}(x)$$

$$\frac{y}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)}.$$

Como $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x)$, integramos

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx.$$

La integral del lado izquierdo es la misma del ejemplo anterior, y una primitiva es $-y^{-1}$. Vamos a calcular la integral del lado derecho por sustitución, hacemos

$$t = \cos(x)$$

$$dt = -\operatorname{sen}(x)dx,$$

y reemplazando tenemos:

$$\int -\frac{1}{t^2}dt = -\int t^{-2}dt = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t}.$$

Volviendo a la variable original, es

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-y^{-1} &= \frac{1}{\cos(x)} + k \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{\cos(x)} + k \\
\frac{1}{y} &= -\left(\frac{1}{\cos(x)} + k\right) \\
\left(\frac{1}{y}\right)^{-1} &= -\left(\frac{1}{\cos(x)} + k\right)^{-1} \\
y &= -\frac{1}{\frac{1}{\cos(x)} + k}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.7. *Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales*

a) $y' = 8y$ *b)* $y' = 3(y-4)$ *c)* $y' = y^2$

d) $y' = xe^y$ *e)* $x(x+1)y' = y^2$ *f)* $(x+2)y' = yx$

g) $y' + e^{2x}y^2 = 0$ *h)* $(1-\cos(x))y' = y\,\mathrm{sen}(x)$

i) $y' = \dfrac{5y}{x}$ *j)* $x\ln(x)y' = y$ *k)* $y' = \dfrac{2\sqrt{y-1}}{x}$

Ejercicio 2.1.8. *Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:*

a) $y' = \dfrac{1+y}{1-x}$, $y(0) = 3$ *b)* $y' = \dfrac{-y}{x^2}$, $y(1) = e$

c) $y' = \dfrac{-y\,\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$, $y(0) = -2$ *d)* $y' = \dfrac{\cos(x)}{e^y}$, $y(0) = 1$

e) $y' = (y+1)(x+1)$, $y(0) = 0$ *f)* $y' = xy^2$, $y(1) = 1$

g) $y' = \dfrac{y}{x^5}$, $y(1) = 1$ *h)* $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}e^y$, $y(0) = 0$

i) $y' = \dfrac{-y\ln(y)}{x}$, $y(1) = e$ *j)* $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 2$

k) $y' = \dfrac{2x(1+e^y)}{e^y(1+x^2)}$, $y(0) = 0$ *l)* $y' = \dfrac{1+y^2}{x}$, $y(1) = 0$

m) $y' = 2x(\pi + y)$, $y(0) = 0$

2.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Definición 2.2.1. *Una ecuación diferencial se dice lineal de primer orden si tiene la siguiente forma:*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

donde $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ son constantes o funciones que dependen de x pero no de y, con $a(x) \neq 0$.

Definición 2.2.2. *Una ecuación lineal de primer orden se dice homogénea cuando $f(x) = 0$, es decir, si es de la forma*

$$a(x)y' + b(x)y = 0.$$

A continuación veremos cómo resolver una ecuación lineal de primer orden homogénea, y luego el caso general.

Resolución de la ecuación lineal homogénea

Vamos a suponer que $y > 0$, para evitar tomar módulos.

Partimos de la ecuación

$$a(x)y' + b(x)y = 0,$$

que vemos que es de variables separables, con lo cual hacemos

$$a(x)\frac{dy}{dx} = -b(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx.$$

Integrando el lado izquierdo,

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln(y),$$

y despejando al lado derecho,

$$\ln(y) = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx + k,$$

$$y = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx},$$

donde $c = e^k$.

Observación 2.2.3. *Si no hubiésemos supuesto que $y > 0$, hubiésemos tomado* $\ln|y|$.

A esta solución de la ecuación homogénea la escribiremos y_h, tenemos entonces la fórmula:

$$y_h = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.2.4. Resolver la ecuación

$$xy' - 3y = 0.$$

Separando variables tenemos

$$x\frac{dy}{dx} = 3y$$

con lo cual

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{x}dx,$$

e integrando nos queda

$$\ln(y) = 3\ln(x) + k.$$

Despejando,

$$y = e^{3\ln(x)+k} = e^{3\ln(x)}e^k = e^k e^{\ln(x^3)} = cx^3,$$

donde hemos llamado $c = e^k$.

Luego, se tiene $y_h = cx^3$.

Observación 2.2.5. *En este ejemplo, cuando calculamos $\int \frac{1}{x}dx$ estamos considerando $x > 0$; de lo contrario deberíamos utilizar módulos.*

Resolución de la ecuación lineal no homogénea

La solución general de una ecuación lineal de primer orden no homogénea es $y = y_h + y_p$, donde y_h es la solución de la homogénea e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

A continuación veremos cómo obtener esta solución particular y_p.

Método de variación de los parámetros

Dada la ecuación diferencial

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

queremos encontrar una solución particular y_p. El método consiste en plantear.

$$y_p = c(x)y_{ph},$$

donde $c(x)$ es una función que tenemos que encontrar e y_{ph} es una solución particular de la homogénea (la obtenemos de y_h dándole el valor 1 a la constante).

Ahora, como y_{ph} es una solución de la homogénea, sabemos que es una solución de $a(x)y' + b(x)y = 0$, es decir,

$$a(x)y'_{ph} + b(x)y_{ph} = 0. \tag{2.3}$$

Como queremos una solución particular de la ecuación 2.2, tenemos que hallar $c(x)$ tal que

$$a(x)y'_p + b(x)y_p = f(x).$$

Luego, derivando $y_p = c(x)y_{ph}$ tenemos

$$y_p' = c'(x)y_{ph} + c(x)y_{ph}'$$

y reemplazando y_p e y_p' nos queda

$$a(x)[c'(x)y_{ph} + c(x)y_{ph}'] + b(x)c(x)y_{ph} = f(x).$$

Distribuyendo,

$$a(x)c'(x)y_{ph} + a(x)c(x)y_{ph}' + b(x)c(x)y_{ph} = f(x),$$

y agrupando ahora los términos con el factor $c(x)$ y utilizando la ecuación 2.3,

$$c(x)\underbrace{\left[a(x)y_{ph}' + b(x)y_{ph}\right]}_{0} + a(x)c'(x)y_{ph} = f(x),$$

por lo tanto debemos resolver

$$a(x)c'(x)y_{ph} = f(x).$$

Observemos que esta es una ecuación de variables separables, donde las funciones $a(x)$ y $f(x)$ son datos, y la función y_{ph} también la conocemos, porque se obtiene al resolver la homogénea. Tenemos entonces la siguiente ecuación a resolver:

$$c'(x) = \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}},$$

e integrándola,

$$c(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}}dx.$$

Una vez que conocemos $c(x)$, obtenemos y_p:

$$y_p = y_{ph}\int \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}}dx, \tag{2.4}$$

y entonces la solución general es

$$y = y_h + y_p.$$

Observación 2.2.6. *Podemos resolver una ecuación lineal de primer orden utilizando directamente las fórmulas (aunque no lo recomendamos) a las que hemos llegado, es decir, las ecuaciones 2.1 y 2.4:*

$$y_h = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

(la constante c aparece de la constante de integración al calcular

$$-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx,$$

ya que si $g(x)+k$ es una primitiva de $b(x)/a(x)$,

$$y_h = e^{-g(x)-k} = e^{-g(x)}e^{-k} = ce^{-g(x)},$$

con $c = e^{-k}$),

$$y_p = y_{ph}\int \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}}dx.$$

Como además y_{ph} se obtiene de y_h con $c=1$, tenemos

$$y_p = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx.$$

y la solución general de la ecuación es

$$y = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} + e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx,$$

donde c es la constante a determinar por las condiciones iniciales (si las hay).

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.7. Resolver la ecuación

$$xy' - 3y = x^5.$$

En primer lugar, buscamos la solución de la homogénea. Para calcular y_h tenemos que resolver

$$xy' - 3y = 0.$$

Por el ejemplo 2.2.4 anterior, tenemos que

$$y_h = cx^3.$$

Debemos calcular ahora y_p, es decir, tenemos que encontrar $c(x)$ tal que

$$y_p = c(x)y_{ph}$$

donde $y_{ph} = x^3$ (hacemos $c=1$ en y_h).

Luego,

$$y_p' = c'(x)x^3 + c(x)3x^2,$$

reemplazando y_p e y_p' en la ecuación original tenemos

$$x[c'(x)x^3 + c(x)3x^2] - 3c(x)x^3 = x^5,$$

$$xc'(x)x^3 + xc(x)3x^2 - 3c(x)x^3 = x^5.$$

Agrupando nos queda

$$x^4c'(x) + 3x^3c(x) - 3x^3c(x) = x^5.$$

Luego,

$$c'(x) = \frac{x^5}{x^4} = x,$$

e integrando obtenemos

$$c(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Entonces,

$$y_p = \frac{x^2}{2}x^3 = y_p = \frac{x^5}{2},$$

y la solución general es:

$$y = cx^3 + \frac{x^5}{2}.$$

Ejemplo 2.2.8. Resolver la ecuación

$$(x+1)y' + y = \frac{x+2}{x+1}$$

Al igual que en el ejemplo anterior buscamos la solución de la homogénea, es decir, hallamos la solución de la ecuación

$$(x+1)y' + y = 0$$

Como tenemos que separar variables planteamos

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = -y$$

Luego,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+1}$$

Integrando ambos miembros,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int (-\frac{1}{x+1})\,dx$$

La integral de la izquierda es inmediata y la de la derecha se resuelve con una simple sustitución, llamando $t = x+1$, luego se obtiene

$$\ln(y) = -\ln(x+1) + k$$

Aplicando e ambos lados y utilizando propiedades del logaritmo obtenemos

$$y = e^{\ln((x+1)^{-1})+k}$$

Aplicando propiedades de la potencia y componiendo la exponencial con el logaritmo tenemos

$$y = (x+1)^{-1}\,e^k$$

Llamando $c = e^k$ obtenemos y_h,

$$y_h = c\,\frac{1}{x+1}$$

Para hallar y_p tenemos que encontrar $c(x)$ tal que

$$y_p = c(x)y_{ph}$$

donde $y_{ph} = \frac{1}{x+1}$ (tomamos $c = 1$ en y_h).

Derivamos y_p utilizando la regla del producto,

$$y'p = c'(x)\,\frac{1}{x+1} + c(x)\frac{(-1)}{(x+1)^2}$$

Reemplazando y_p e y'_p en la ecuación original tenemos que,

$$(x+1)\left(c'(x)\,\frac{1}{x+1} - c(x)\frac{1}{(x+1)^2}\right) + c(x)\frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

Aplicando la propiedad distributiva,

$$(x+1)\,c'(x)\,\frac{1}{x+1} - (x+1)\,c(x)\frac{1}{(x+1)^2} + c(x)\frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

Simplicando términos obtenemos

$$c'(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

A diferencia del ejemplo anterior, para hallar $c(x)$ tenemos que resolver una integral que no es inmediata, sino que hay que dividir polinomios ya que el grado del numerador es igual al grado del denominador.

Realizando la división tenemos que

$$x+2 = (x+1)\cdot 1 + 1$$

Entonces

$$c'(x) = \frac{(x+1)\cdot 1 + 1}{x+1} \Rightarrow c'(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$$

Integrando obtenemos $c(x)$,

$$c(x) = x + \ln(x+1)$$

Luego

$$y_p = (x + \ln(x+1))\cdot\frac{1}{x+1}$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial es $y_h + y_p$, es decir

$$y = c\,\frac{1}{x+1} + (x + \ln(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1}$$

Vamos a resolver otro ejemplo usando directamente las fórmulas para que se entienda su funcionamiento.

Ejemplo 2.2.9. Resolver la ecuación

$$y' - 2xy = x.$$

Sabemos que

$$y_h = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx},$$

y en nuestro ejemplo es $a(x) = 1$, $b(x) = -2x$ y $f(x) = x$. Luego,

$$\int \frac{b(x)}{a(x)}dx = \int \frac{-2x}{1}dx = -2\int xdx = -2\frac{x^2}{2} + k = -x^2 + k.$$

Tenemos entonces

$$y_h = e^{-(-x^2+k)} = e^{x^2}e^{-k} = ce^{x^2}.$$

Ahora necesitamos y_p, donde $y_p = c(x)y_{ph}$, y tenemos

$$y_p = y_{ph}\int \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}}dx.$$

En nuestro ejemplo $y_{ph} = e^{x^2}$ (tomamos $c = 1$ en y_h). Tenemos que calcular

$$c(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)y_{ph}}dx,$$

que es

$$c(x) = \int \frac{x}{e^{x^2}}dx = \int xe^{-x^2}dx.$$

Vamos a resolver la integral que nos da $c(x)$ por sustitución:

$$t = -x^2$$

$$dt = -2xdx,$$

$$dx = \frac{dt}{-2x}.$$

Luego,

$$-\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t,$$

y volviendo a la variable original, queda

$$c(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Entonces,

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2},$$

y la solución general es

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2.2.10. *Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales linea- les:*

a) $y' + 2y = e^{2x}$

b) $xy' - 3y = x^5$

c) $y' + y\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

d) $xy' + y + x = e^x$

e) $x^2y' + 2xy - e^x = 0$

f) $y' \operatorname{tg}(x) = y - 1$

g) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

h) $y' - \dfrac{3}{x}y = \dfrac{x+1}{x}$

i) $y' + y\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

j) $y' - \dfrac{5}{x}y = e^x x^5$

k) $y' + \dfrac{7}{x}y = \dfrac{3}{x^7}$

l) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$

ll) $y' + 2xy = x$

m) $(3x^2+1)y' - 2xy = 6x$

Un problema aparte, una vez aprendido estos métodos, es reconocer cuál de los dos se debe aplicar a una ecuación diferencial. Esto sólo es cuestión de práctica, y resolver los siguientes ejercicios ayudará a afinar nuestra capacidad de reconocerlos.

Ejercicio 2.2.11. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método conveniente:*

a) $(x+1)y' + y = \dfrac{x+2}{x+1}$

b) $y' = \dfrac{1+y^2}{x}$

c) $xy' - y = \ln(x) + 1$

d) $y' = \dfrac{\sqrt{4-4y^2}(2x+1)}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$

e) $yy'\cos(x) - y^3\operatorname{tg}(x) = 0$

f) $(x^2+1)y' - (x^2-2x+1)y = xe^{-x}$

g) $y' = -\dfrac{1+2y}{4-x^2}$

h) $x\operatorname{sen}(x)y' + [\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)]y = xe^x$

3. Aplicaciones económicas

Veamos algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

3.1. Marginales y elasticidad

Las ecuaciones diferenciales sirven para resolver ecuaciones económicas cuando dentro de la misma aparecen funciones marginales o elasticidades. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1. Se sabe que la tasa de cambio del costo de producción de una empresa aumenta proporcionalmente a la cantidad producida. Determinar la función costo, sabiendo que el costo fijo es de \$1000.

Como la tasa de cambio del costo es su derivada, tenemos

$$C'(x) = a \cdot x,$$

donde a es una constante positiva.

Esta es una ecuación de variables separadas, y tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx} &= a \cdot x \\ \int dC &= \int ax dx \\ C &= \frac{ax^2}{2} + k \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la condición inicial $C(0) = 1000$ (costo fijo), tenemos

$$1000 = C(0) = \frac{a \cdot 0^2}{2} + k = k,$$

con lo cual el costo total es

$$C(x) = \frac{ax^2}{2} + 1000.$$

Ejemplo 3.1.2. Se sabe que la elasticidad del precio con respecto a las cantidades x está dada por

$$\frac{Ep}{Ex} = \frac{-2x}{10 - x}.$$

Hallar la ecuación del ingreso sabiendo que cuando $x = 2$, $p = 12$.

Para resolver el ejercicio tenemos que recordar la fórmula de la elasticidad:

$$\frac{Ef}{Ex} = \frac{df}{dx}\frac{x}{f}.$$

En nuestro caso,

$$\frac{Ep}{Ex} = \frac{dP}{dx}\frac{x}{p}.$$

Reemplazando, tenemos que:

$$\frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{-2x}{10-x},$$

con lo cual

$$\frac{dp}{dx}\frac{1}{p} = \frac{-2}{10-x}.$$

Aquí tenemos una ecuación diferencial de variables separables, y nos queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp}{p} &= \int \frac{-2}{10-x}dx \\
\int \frac{dp}{p} &= -2\int \frac{1}{10-x}dx \\
\ln(p) &= -2(-\ln(10-x)+k \\
\ln(p) &= 2\ln(10-x)+k \\
\ln(p) &= \ln(10-x)^2+k \\
p &= e^{ln(10-x)^2+k} \\
p &= e^{\ln(10-x)^2}e^k \\
p &= c(10-x)^2
\end{aligned}$$

Utilizando la condición que nos dieron determinamos el valor de la constante c:

$$12 = c(10-2)^2 \quad \text{entonces} \quad c = \frac{3}{16},$$

y tenemos finalmente:

$$p = \frac{3}{16}(10-x)^2,$$

y como $I(x) = p \cdot x$,

$$I(x) = \frac{3}{16}x(10-x)^2.$$

Ejemplo 3.1.3. Se sabe que las funciones de costo y costo marginal de cierto bien cumplen la siguiente ecuación:

$x\,Cmg(x) + aC(x) = bx^2$, donde x son las cantidades producidas del bien y a y b son constantes positivas. Sabiendo que el costo de producir una unidad es de \$1, hallar la función de costo.

Para resolver este ejemplo primero usamos la siguiente notación,

$$x\,C' + aC = bx^2$$

Claramente es una ecuación diferencial lineal, entonces primero resolvemos la ecuación homogenea, o sea, igualamos a cero:

$$xC' + aC = 0$$

Separamos las variables y luego integramos ambos miembros,

$$x\frac{dC}{dx} = -aC \Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{a}{x}\,dx \Rightarrow \int \frac{dC}{C} = \int (-\frac{a}{x})dx$$

Utilizando las propiedades de las integrales tenemos que:

$$\int \frac{dC}{C} = -a\int \frac{1}{x}dx$$

Como ambas primitivas son inmediatas obtenemos:

$$\ln(C) = -a\ln(x) + k$$

Utilizando la propiedad del logaritmo, nos queda

$$\ln(C) = \ln(x^{-a}) + k$$

Para despejar C aplicamos e ambos miembros:

$$e^{\ln(C)} = e^{\ln(x^{-a})+k}$$

Finalmente componiendo la exponencial con el logaritmo,

$$C = e^{\ln(x^{-a})}\,e^{k} \Rightarrow C = \beta\,x^{-a}$$

con $\beta = e^k$.

Entonces la solución de la homogenea es:

$$C_h = \beta\,x^{-a}$$

Luego para hallar la solución particular planteamos

$$C_p = x^{-a}g(x),$$

donde $g(x)$ es la función que queremos determinar.

Recordando que a es un constante, su derivada es,

$$C_p' = -ax^{-a-1}\,g(x) + x^{-a}\,g'(x)$$

Luego reemplazamos C_p y C_p' en la ecuación original, es decir:

$$x(-ax^{-a-1}\,g(x) + x^{-a}\,g'(x)) + a\,x^{-a}g(x) = bx^2$$

Haciendo la distributiva podemos sumar los exponentes ya que las bases son las mismas, es decir:

$$-ax^{-a}g(x) + x^{-a+1}g'(x) + ax^{-a}g(x) = bx^2$$

Simplificando y despejando $g'(x)$ obtenemos

$$g'(x) = b\frac{x^2}{x^{-a+1}}$$

Al ser la misma base podemos restar los exponentes,

$$g'(x) = bx^{a+1}$$

Luego la primitiva es

$$g(x) = \frac{b}{a+2}\, x^{a+2}$$

Entonces,

$$C_p = x^{-a}\, \frac{b}{a+2}\, x^{a+2} \Rightarrow C_p = \frac{b}{a+2}\, x^2$$

Luego la solución general de la ecuación es,

$$C = C_h + C_p = \beta\, x^{-a} + \frac{b}{a+2}\, x^2$$

Para hallar el valor de β utilizamos la condición inicial, es decir, $C(1) = 1$, reemplazando en la solución general queda,

$$1 = \beta + \frac{b}{a+2} \Rightarrow \beta = 1 - \frac{b}{a+2}$$

Para obtener la función de costo reemplazamos β,

$$C(x) = (1 - \frac{b}{a+2})\, x^{-a} + \frac{b}{a+2}\, x^2$$

3.2. Estabilidad de precios

Una aplicación interesante de las ecuaciones diferenciales consiste en analizar la estabilidad dinámica del equilibrio de precios. En general, en economía la variable independiente es el tiempo y la dependiente es el precio. Vamos a decir que un modelo es estable si el precio tiende a una constante cuando pasa el tiempo. En términos matemáticos,

$$\lim_{t\to\infty} p = p_0,$$

donde p_0 es una constante.

Ejemplo 3.2.1. Supongamos un modelo económico en el cual las funciones de oferta y demanda son lineales y además en el equilibrio la variación del precio es proporcional a la diferencia entre la demanda y la oferta. Resolver la ecuación diferencial para encontrar la evolución del precio al transcurrir el tiempo. Hallar las condiciones para que el modelo sea estable.

El modelo supone que tanto la oferta como la demanda son lineales, y planteamos

$$\begin{aligned} S(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 p_s \\ D(t) &= \beta_0 + \beta_1 p_d, \end{aligned}$$

y

$$\frac{dP}{dt} = \theta[D(t) - S(t)]$$

con $\theta > 0$.

En el equilibrio, $p_s = p_d = p_e$, entonces reemplazando S y D en la ecuación se tiene:

$$\frac{dP}{dt} = \theta[(\beta_0 + \beta_1 p_e) - (\alpha_0 + \alpha_1 p_e)],$$

es decir,

$$\frac{dP}{dt} = \theta(\beta_0 + \beta_1 p_e - \alpha_0 - \alpha_1 p_e).$$

Luego,

$$\frac{dP}{dt} = \theta\beta_0 + \theta\beta_1 p_e - \theta\alpha_0 - \theta\alpha_1 p_e,$$

o sea,

$$\frac{dP}{dt} - (\beta_1 - \alpha_1)\theta p_e = \theta(\beta_0 - \alpha_0),$$

En esta ecuación diferencial se pueden separar las variables pero también es una ecuación lineal de primer orden, con $a(t) = 1$, $b(t) = -(\beta_1 - \alpha_1)\theta$, y $f(t) = \theta(\beta_0 - \alpha_0)$.

La vamos a resolver utilizando las fórmulas conocidas de las lineales, dejamos a cargo del lector resolverla separando variables y verificar que la solución es la misma.

Entonces, sabemos que

$$P_h = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}.$$

En nuestro ejemplo,

$$P_h = e^{\int (\beta_1 - \alpha_1)\theta dt} = e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t + k} = e^k e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t} = c e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t},$$

y la solución particular se obtiene como

$$P_p = C(t) P_{ph},$$

donde

$$C(t) = \int \frac{f(t)}{a(t) P_{ph}} dt$$

y

$$P_{ph} = e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int \frac{\theta(\beta_0 - \alpha_0)}{e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t}} \\
&= \theta(\beta_0 - \alpha_0) \int e^{-(\beta_1 - \alpha_1)\theta t} \\
&= -\frac{\theta(\beta_0 - \alpha_0)}{(\beta_1 - \alpha_1)\theta} e^{-(\beta_1 - \alpha_1)\theta t} \\
&= -\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_1 - \alpha_1} e^{-(\beta_1 - \alpha_1)\theta t}.
\end{aligned}$$

La solución particular es

$$P_p = -\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_1 - \alpha_1} e^{-(\beta_1 - \alpha_1)\theta t} e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t}$$

y tras simplificar,

$$P_p = -\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

Luego,

$$P = ce^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t} - \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

Podemos llamar p_0 a la constante que aparece aquí,

$$p_0 = -\frac{\beta_0 - \alpha_0}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

Tomando limite cuando t tiende a infinito queremos que vaya a una constante,

$$\lim_{t\to\infty} P = \lim_{t\to\infty} \quad c \quad \underbrace{e^{(\beta_1 - \alpha_1)\theta t}}_{\text{debe tender a } 0} \quad + \quad p_0,$$

entonces para que el modelo sea estable debe ser

$$\beta_1 < \alpha_1,$$

es decir, la pendiente de la demanda tiene que ser menor que la de la oferta.

Ejercicio 3.2.2. *El cambio en el consumo C de una marca de zapatos a medida que cambia el ingreso I, está dado por $\frac{dC}{dI} = C + ke^I$, donde k es una constante. Hallar la función de consumo si $C(0) = 0$*

Ejercicio 3.2.3. *La elasticidad del precio p con respecto a la cantidad demandada x está dada por $-\frac{2x}{10-x}$. Sabiendo que para un precio de \$12 se demandan 2 unidades, hallar la función ingreso total.*

Ejercicio 3.2.4. *La elasticidad de la demanda respecto del precio es $\frac{(d-2)p}{p+5}$, hallar la función de demanda en función del precio.*

Ejercicio 3.2.5. *El cambio en las ganancias netas G a medida que cambia el gasto en propaganda x, está dado por $\frac{dG}{dx} = k - a(G + x)$ donde a y k son constantes. Hallar G como función de x, si $G = 0$ cuando $x = 0$.*

Ejercicio 3.2.6. *Una cierta empresa sabe que su costo marginal es igual a una constante multiplicada por su costo más otra constante. Hallar la función costo sabiendo que si no se produce nada el costo es cero.*

Ejercicio 3.2.7. *La tasa de incremento del costo total C, a medida que crece el número de unidades fabricadas x, es proporcional a la suma de las unidades fabricadas x más una constante, e inversamente proporcional al costo total. Encontrar la función costo total si $C(0) = C_0$.*

Capítulo 5

Polinomio de Taylor

1. Introducción

En este capítulo veremos la fórmula del polinomio de Taylor para aproximar una función conociendo en un punto su valor y el de sus derivadas. Durante años, éste fue uno de los mejores métodos para reemplazar funciones complicadas por otras más simples a la hora de calcularlas, o de integrarlas, si bien en el último tiempo su importancia se ha visto disminuida ante la aparición de paquetes informáticos de cálculo. Sin embargo, sigue siendo una herramienta de gran valor teórico.

1.1. Desarrollo de un polinomio

Taylor en primera instancia se propuso expresar un polinomio de grado n en potencias de $x - x_0$ siendo x_0 un número real cualquiera.

Supongamos que nos dan el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ y queremos escribirlo en potencias de $(x - x_0)$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$. Podemos proponer la forma que tendrá,

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n \qquad (1.1)$$

y queremos ahora obtener los coeficientes desconocidos A_j.

Observemos que, evaluando el polinomio en x_0, obtenemos

$$P(x_0) = A_0,$$

ya que en la expresión dada por la ecuación 1.1, se anulan todos los sumandos excepto el primero.

La idea para obtener los demás coeficientes será similar: hay que derivar el polinomio dado por la ecuación 1.1, y luego evaluar las derivadas de $P(x)$ en x_0.

Derivando reiteradamente hasta el orden n,

$$\begin{array}{rcl}
P'(x) & = & A_1 + 2\,A_2(x-x_0) + 3\,A_3(x-x_0)^2 + \cdots + n\,A_n(x-x_0)^{n-1} \\
P''(x) & = & 2\cdot 1\cdot A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3(x-x_0) + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot A_n(x-x_0)^{n-2} \\
P^{(3)}(x) & = & 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot A_4(x-x_0) + \ldots \\
& & \qquad \ldots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot A_n(x-x_0)^{n-3} \\
& \vdots & \\
P^{(n)}(x) & = & n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_n.
\end{array}$$

Recordemos brevemente que $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Ahora, si en todas las igualdades hacemos $x = x_0$ y utilizamos esta notación, resulta:

$$\begin{array}{rcl}
P'(x_0) & = & A_1 \\
P''(x_0) & = & 2!\cdot A_2 \\
P^{(3)}(x_0) & = & 3!\cdot A_3 \\
& \vdots & \\
P^{(n)}(x_0) & = & n!\cdot A_n.
\end{array}$$

Luego, para todo valor $k \in \mathbb{N}$, tal que $1 \le k \le n$, concluimos que

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0).$$

Reemplazando en la expresión (1.1) nos queda

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Para ver cómo funciona este procedimiento, lo mejor es analizar un ejemplo.

Ejemplo 1.1.1. Desarrollar $P(x) = x^3 + 3x^2 + 8x - 2$ en potencias de $(x+2)$,

Como nos piden en potencias de $(x+2)$, tomamos $x_0 = -2$.

Para obtener el polinomio de Taylor necesitamos calcular $P(-2)$, $P'(-2)$, $P''(-2)$, y $P^{(3)}(-2)$. Calculemos primero las derivadas correspondientes:

$$\begin{array}{rcl}
P(x) & = & x^3 + 3x^2 + 8x - 2 \\
P'(x) & = & 3x^2 + 6x + 8 \\
P''(x) & = & 6x + 6 \\
P^{(3)}(x) & = & 6.
\end{array}$$

Evaluando,

$$\begin{array}{rcl}
P(-2) & = & -8 + 12 - 16 - 2 = -14 \\
P'(-2) & = & 12 - 12 + 8 = 8 \\
P''(-2) & = & -12 + 6 = -6 \\
P^{(3)}(-2) & = & 6.
\end{array}$$

Reemplazando en la fórmula de Taylor (1.1) tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
P(x) & = & -14 + 8(x+2) - \dfrac{6}{2}(x+2)^2 + \dfrac{6}{6}(x+2)^3 \\[2ex]
& = & -14 + 8(x+2) - 3(x+2)^2 + (x+2)^3
\end{array}$$

2. Desarrollo de funciones

2.1. Fórmula de Taylor

La idea de Taylor fue generalizada rápidamente para funciones derivables. Enunciaremos aquí -sin demostración- el teorema que nos da la fórmula de Taylor para una función arbitraria:

Teorema 2.1.1. *[Fórmula de Taylor] Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable hasta el orden $(n+1)$ en (a, b), y supongamos que la derivada $f^{(n+1)}$ es continua en (a, b). Entonces, dado $x_0 \in (a, b)$, para todo $x \in (a, b)$ existe un número c entre x_0 y x (si $x_0 < x$, entonces $x_0 < c < x$; si $x < x_0$, entonces $x < c < x_0$) tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

El término $R_n(x)$ es la fórmula del error de Lagrange, y se lo suele llamar el *resto de Taylor*. Observemos que no podemos decir cuánto vale este error, ya que no conocemos en qué punto c debemos evaluar la derivada $f^{(n+1)}$, pero sí podremos estimar qué tan grande es para acotar la diferencia entre el valor verdadero de la función y su aproximación con el polinomio de Taylor.

Tenemos entonces el siguiente *desarrollo de Taylor*:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{polinomio de Taylor}} + \underbrace{R_n(x)}_{resto}$$

Llamaremos *orden del polinomio de Taylor* al orden de la mayor derivada utilizada para calcular la fórmula. Por lo general coincide con el grado del polinomio, excepto que esta derivada se anule. En general, escribiremos $P_n(x)$ para referirnos al polinomio de orden n.

Observación 2.1.2. *Si $x_0 = 0$, esta expresión se denomina fórmula de Mac Laurin, pero no haremos aquí esta distinción.*

Ejemplo 2.1.3. Hallar el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x) = \ln(x + 1)$.

Como $x_0 = 0$, necesitamos $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, y $f^{(3)}(0)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) \\ f'(x) &= (x+1)^{-1} \\ f''(x) &= -(x+1)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= 2(x+1)^{-3}. \end{aligned}$$

Evaluando,

$$\begin{aligned} f(0) &= ln(0+1) = 0 \\ f'(0) &= (0+1)^{-1} = 1 \\ f''(0) &= -(0+1)^{-2} = -1 \\ f^{(3)}(0) &= 2(0+1)^{-3} = 2. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)^2 + \frac{2}{6}(x-0)^3 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.4. Hallar el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 4 alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Como $x_0 = 0$, necesitamos $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, y $f^{(4)}(0)$..

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Evaluando,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 0 + 1(x-0) - \frac{0}{2}(x-0)^2 - \frac{1}{6}(x-0)^3 + \frac{0}{24}(x-0)^4 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.5. *Para las siguientes funciones, hallar los polinomios de Taylor de grado n que aproximen las funciones dadas para x cerca de 0.*

a) $f(x) = \cos(x)$ *para* $n = 2,\ 3,\ 4$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *para* $n = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *para* $n = 4$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ *para* $n = 3$

e) $f(x) = \ln(1+x)$ *para* $n = 5$

f) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ *para* $n = 3$

g) $f(x) = (1+x)^p$ *para* $n = 2,\ 3,\ 4$ *(p es una constante)*

Ejercicio 2.1.6.

1. *Hallar el polinomio de Taylor de segundo grado para* $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$ *alrededor de* $x_0 = 0$ *y* $x_0 = 1$*. ¿Qué se observa?*

2. *Hallar el polinomio de Taylor de tercer grado para* $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ *alrededor de* $x_0 = 0$*. ¿Qué se observa?*

3. *Basándose en las observaciones de los ítems anteriores haga una conjetura sobre las aproximaciones de Taylor de* f *cuando ya es un polinomio.*

La relación entre una función y su polinomio de Taylor se puede utilizar también para conocer las derivadas de la función dado el polinomio. Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.1.7. Sea $P_2(x) = 2 + 3x + 5x^2$ el polinomio de Taylor de f en $x_0 = 0$. Determinar $f(0)$, $f'(0)$, y $f''(0)$.

Por la fórmula de Taylor, tenemos

$$\begin{array}{rcccccc} P_2(x) & = & f(0) & + & f'(0) & + & \dfrac{f''(0)}{2}x^2 \\ & = & 2 & + & 3x & + & 5x^2, \end{array}$$

con lo cual

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & f(0) \\ 3 & = & f'(0) \\ 5 & = & \dfrac{f''(0)}{2} \end{array}$$

Las dos primeras nos dan directamente $f(0)$ y $f'(0)$, y para la restante despejamos en la tercera, y nos queda $f''(0) = 10$.

Ejercicio 2.1.8. *El polinomio de Taylor con* $x_0 = 0$ *de orden* 4 *de una función* f *es* $P_4(x) = 3 - x^2 + 5x^3$*. Hallar* $f(0)\,, f'(0)\,, f''(0)\,, f'''(0)$ *y* $f^4(0)$*.*

Ejercicio 2.1.9. *Hallar* a *y* b *de modo tal que el polinomio de Taylor en* $x_0 = 0$ *de orden* 2 *de* $f(x) = a\ln(1+bx)$ *sea* $P_2(x) = 2x - 2x^2$*.*

2.2. Aproximaciones

Una de las grandes ventajas del polinomio de Taylor es que nos permite calcular los valores de una función (aproximadamente) sin mucha dificultad. Por ejemplo, si deseamos calcular $\operatorname{sen}(0,2)$, y no disponemos de una calculadora, probablemente no sepamos siquiera por donde empezar. De la misma manera, es casi imposible calcular $e^{-0,3}$ sólo con papel y lápiz.

Sin embargo, evaluar un polinomio en $0,2$ o en $-0,3$ es relativamente sencillo: sólo se trata de calcular productos y sumas. De esta manera, si tenemos que evaluar una función trigonométrica (o un logaritmo, o una exponencial, o raíces...) y no disponemos de una calculadora, podemos aproximar la función con un polinomio de Taylor. Por lo general, cuanto mayor sea el grado del polinomio, mejor resultará la aproximación.

Ejemplo 2.2.1. Calcular $e^{0,1}$ utilizando el polinomio de Taylor $P_3(x)$ alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x) = e^x$.

Como $x_0 = 0$, necesitamos $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, y $f^{(3)}(0)$. Este caso es sencillo, ya que todas las derivadas de e^x nos dan e^x, y evaluándolas en cero obtenemos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$.

Reemplazando en la fórmula de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}x^2(x-0)^2 + \frac{1}{6}(x-0)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Para aproximar $e^{0,1}$, hacemos $P_3(0,1)$:

$$P_3(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{1}{2}0,1^2 + \frac{1}{6}0,1^3 = 1 + 0,1 + \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{6000} = 1,105166...$$

Ejercicio 2.2.2. *Calcular* $\ln(1,1)$ *utilizando el polinomio de Taylor* $P_3(x)$ *alrededor de* $x_0 = 0$ *de* $f(x) = \ln(x+1)$.

A la hora de calcular un valor dado, debemos construírnos una función que en un punto x nos de este valor, y luego aproximar la función por Taylor. Sin embargo, no siempre sabremos qué función tomar, ni dónde desarrollar el polinomio de Taylor (es decir, qué x_0 elegir). Si bien no hay una regla fija y absoluta al respecto, nuestra elección del x_0 debe tener en cuenta lo siguiente:

- Debemos ser capaces de evaluar la función y sus derivadas en el x_0 elegido. Por ejemplo, si queremos calcular $e^{0,1}$, no tiene sentido que desarrollemos e^x en el punto $x_0 = 0,2$, ya que evaluar la función en este punto es tan complicado como hacerlo directamente en $0,1$.

- El valor de x_0 debe estar cerca del punto x donde deseamos evaluar la función. Qué quiere decir "cerca" es más complicado de definir, ya que en ocasiones hay distintos puntos que podemos utilizar. Por ejemplo, si deseamos calcular $\sqrt{2,5}$, podemos desarrollar $\sqrt{x}$ en 1 o en 4.

- El valor de x_0 depende también de la función elegida. Por ejemplo, volviendo a $\sqrt{2,5}$, podemos desarrollar $\sqrt{x+1}$ en 0 ó en 3. Aquí el x es entonces $1,5$ y no $2,5$.

3. Fórmula del resto

Hemos visto en la sección anterior que el polinomio de Taylor puede utilizarse para obtener una aproximación del valor de una función en un punto. Sin embargo, el polinomio nunca nos dará el valor exacto, y podemos preguntarnos cuánto difiere el valor aproximado del valor real. Esta pregunta tampoco podemos contestarla exactamente, pero en el Teorema de Taylor 2.1.1 hemos visto una fórmula para el error cometido. Despejando en el teorema la fórmula del resto tenemos:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} = f(x) - P_n(x),$$

es decir, el resto es la diferencia entre el valor de la función y el valor de su polinomio de Taylor.

Desde ya, no podemos calcular exactamente el error, ya que no conocemos en qué punto c tendríamos que evaluar la derivada $n+1$ de f, pero podemos acotarlo para ver qué tan grande es. Para realizar dicha acotación vamos a tomar módulo ya que no interesa si el error es por defecto o por exceso. Veremos a continuación varios ejemplos.

3.1. Cotas del error

No hay un único procedimiento para acotar el error. En los ejemplos veremos algunos de los casos más comunes.

Ejemplo 3.1.1. Sea $f(x) = \cos(x)$. Obtener el polinomio de Taylor $P_4(x)$ de orden 4 en $x_0 = 0$, escribir la expresión del resto $R_4(\frac{1}{2})$, y dar una cota para el error.

Tenemos

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
f(x) & = & \cos(x) & f(0) & = & \cos(0) = 1 \\
f'(x) & = & -\operatorname{sen}(x) & f'(0) & = & -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
f''(x) & = & -\cos(x) & f''(0) & = & -\cos(0) = -1 \\
f'''(x) & = & \operatorname{sen}(x) & f'''(0) & = & \operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) & = & \cos(x) & f^{(4)}(0) & = & \cos(0) = 1
\end{array}$$

Necesitamos además la derivada $f^{(5)}(x)$ para la fórmula del resto:

$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen}(x),$$

aunque no la tenemos que evaluar en 0.

El polinomio es entonces

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4,$$

y la fórmula del resto es

$$R_4(x) = \frac{-\operatorname{sen}(c)x^5}{5!}$$

con $c \in (0, x)$. Evaluando en $x = 1/2$, tenemos

$$R_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\operatorname{sen}(c)}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Nuestro objetivo es ahora acotar el resto. Tenemos

$$\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{-\operatorname{sen}(c)}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right| = \frac{1}{120}\frac{1}{2^5}|\operatorname{sen}(c)| \leq \frac{1}{120 \times 2^5},$$

donde en el último paso hemos acotado

$$|\operatorname{sen}(c)| \leq 1.$$

Observación 3.1.2. *Las funciones seno y coseno son sencillas de acotar porque* $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ *y* $|\cos(x)| \leq 1$ *para todo* x.

Ejemplo 3.1.3. Aproximar $\sqrt[3]{e}$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 5, y acotar el error cometido.

Aquí nos piden calcular un cierto valor, pero no nos indican qué función utilizar ni en qué punto x_0 desarrollarla. Recordando que el valor de x_0 tiene que ser un número cercano al x donde debemos evaluar, y además, un valor donde conozcamos la función. Tomamos entonces

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$

Calculemos ahora $f(x_0)$ y las derivadas. Como $f(0) = 1$, y además

$$f^{(k)}(x) = e^x,$$

resulta

$$f^{(k)}(0) = 1.$$

Para la fórmula del resto,

$$f^{(6)}(x) = e^x, \qquad f^{(6)}(c) = e^c.$$

Luego, el polinomio de Taylor es:

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Como sabemos que $f(x) = P_5(x) + R_5(x)$,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = P_5\left(\frac{1}{3}\right) + R_5\left(\frac{1}{3}\right)$$

y si el error es chico tenemos

$$e^{\frac{1}{3}} = f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq P_5\left(\frac{1}{3}\right).$$

Entonces,

$$P_5\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{3})^4}{4!} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5!} = 1{,}39561042524.$$

Para saber si este valor es una buena aproximación, vamos a acotar el error, es decir, buscamos una cota de qué tan grande puede ser el resto de Taylor. Tenemos

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = \frac{e^c}{6!}x^6,$$

y evaluando en $x = 1/3$,

$$R_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^c}{6!}\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

donde $c \in (0, 1/3)$. Tomando módulo y acotando e^c por 3,

$$\left|R_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^c}{6!}\left(\frac{1}{3}\right)^6\right| = \frac{1}{6!3^6}e^c \leq \frac{1}{6!3^6}\cdot 3 = 0{,}00000571.$$

Observación 3.1.4. *Hemos acotado e^c por 3 haciendo el siguiente razonamiento: como $0 < c < 1/3$, tenemos que*

$$e^c < e^{\frac{1}{3}} < e^1 = e,$$

ya que la función exponencial es creciente. Ahora, $e \simeq 2,718288\ldots < 3$, y podemos afirmar que $e^c < 3$.

Esta cota es mayor que el error cometido, y podemos verificarlo utilizando una calculadora (el error es menor a $0,0000003$), pero recordemos que la utilidad del método de Taylor es que nos da muy buenas aproximaciones sin necesidad de utilizar una calculadora.

Veamos un nuevo ejemplo:

Ejemplo 3.1.5. Considerando la función $f(x) = x\ln(x)$, hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 1$. Estimar, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ utilizando $P(1,5)$.

Necesitamos las cuatro primeras derivadas para armar el polinomio y estimar el resto.

Tenemos

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & x\ln(x) & \qquad & f(1) & = & 1\cdot\ln(1) = 0 \\[2ex]
f'(x) & = & \ln(x) + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 & & f'(1) & = & \ln(1) + 1 = 1 \\[2ex]
f''(x) & = & \dfrac{1}{x} & & f''(1) & = & 1 \\[2ex]
f'''(x) & = & -\dfrac{1}{x^2} & & f'''(1) & = & -1 \\[2ex]
f^{(4)}(x) & = & \dfrac{2}{x^3} & & f^{(4)}(c) & = & \dfrac{2}{c^3}
\end{array}$$

Reemplazando en la fórmula de Taylor tenemos

$$P_3(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!},$$

y en la del resto,

$$R_3(x) = \frac{2}{c^3}\frac{(x-1)^4}{4!}.$$

Ahora, si queremos estimar el error cuando $x = 1,5$ hacemos

$$R_3(1,5) = \frac{2}{c^3}\frac{(0,5)^4}{4!} \qquad \text{con } c \in (1, 1{,}5).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|R_3(1,5)| &= \left|\frac{2}{c^3}\frac{(0,5)^4}{4!}\right| \\
&\leq 2\frac{(0,5)^4}{4!} \\
&= 0{,}005208333,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\frac{2}{c^3} \leq 2$$

para todo $c \in (1, 1{,}5)$, ya que la función $g(x) = \frac{2}{x^3}$ es monótona decreciente cuando $x > 0$, y alcanza su máximo en $[1, 1{,}5]$ cuando $x = 1$.

Veamos un ejemplo en donde no nos dan el x_0

Ejemplo 3.1.6. Usando el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = e^x + cos(x)$ aproximar el número $e + cos(1)$. Acotar el error cometido.

Como tenemos que aproximar $f(1)$, vamos a elegir $x_0 = 0$ ya que tanto $f(0)$ como las derivadas de f evaluadas en x_0 se pueden hallar sin calculadora. Luego,

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& e^x + \cos(x) & \qquad & f(0) &=& e^0 + \cos(0) = 2 \\
f'(x) &=& e^x - \operatorname{sen}(x) & & f'(0) &=& e^0 - \operatorname{sen}(0) = 1 \\
f''(x) &=& e^x - \cos(x) & & f''(0) &=& e^0 - \cos(0) = 0 \\
f'''(x) &=& e^x + \operatorname{sen}(x) & & f'''(0) &=& e^0 + \operatorname{sen}(0) = 1 \\
f^{(4)}(x) &=& e^x + \cos(x) & & f^{(4)}(0) &=& e^0 + \cos(0) = 2
\end{array}$$

Entonces

$$P_4(x) = 2 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2\,x^4}{4!}$$

Luego

$$f(1) = e + \cos(1) \simeq P_4(1) = 2 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{24} = 3,25$$

Ahora vamos a acotar el error,

$$|R_4(1)| = \left|\frac{f^{(5)}(c)1^5}{5!}\right| = \left|\frac{(e^c - \operatorname{sen}(c))}{120}\right| \leq \frac{|e^c| + |\operatorname{sen}(c)|}{120} \leq \frac{3+1}{120} = \frac{1}{30}$$

Observación 3.1.7. *Cuando tenemos que acotar una suma o resta de funciones es muy útil la desigualdad triangular, es decir,* $|a+b| \leq |a| + |b|$. *(Recordar que también vale:* $|a-b| \leq |a| + |b|$*)*

Ejercicio 3.1.8.

1. *Hallar el polinomio de Taylor de orden* 2 *alrededor de* $x_0 = 0$ *y la expresión del resto de la función* $f(x) = \sqrt{1+x}$

2. *Evaluar el error de la igualdad aproximada* $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ *cuando* $x = 0,2$

Ejercicio 3.1.9.

1. *Calcular el polinomio de Taylor de orden* 3 *alrededor de* $x_0 = 0$ *de la función* $f(x) = e^x$. *Calcular aproximadamente* $e^{-0,1}$. *Acotar el error cometido en la aproximación.*

2. *Calcular el polinomio de Taylor de orden* 4 *de* $f(x) = \ln(x)$ *alrededor de* $x_0 = 1$. *Usarlo para calcular aproximadamente* $ln(1,3)$. *Acotar el error cometido.*

3. *De una cota del error al usar la aproximación de primer grado en el punto* $x_0 = 0$ *de* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *en el intervalo* $[-1,1]$. *Repita el ejercicio para una aproximación de tercer grado.*

4. *Calcular el polinomio de Taylor de orden* 3 *alrededor de* $x_0 = 0$ *de* $f(x) = e^{-x^2}$. *Calcular aproximadamente* $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Ejercicio 3.1.10. *Dada la función* $f(x) = \sqrt{16+x}$

1. *Desarrolle el polinomio de Taylor de grado* 2 *de* $f(x)$ *alrededor de* $x_0 = 0$ *y utilice esa información para calcular aproximadamente* $\sqrt{16,5}$

2. *Pruebe (sin usar la calculadora) que la aproximación tiene al menos* 5 *decimales exactos a partir de la coma.*

Ejercicio 3.1.11. *Considere la función* $f(x) = x\ln(x)$.

1. *Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de* f *en* $x_0 = 1$. *Escriba la expresión del resto.*

2. *Acote el resto, cuando se quiere calcular* $f(1,5)$ *por medio de* $P(1,5)$.

El siguiente ejemplo es diferente a los anteriores. Aquí nos dan como dato la cota del error y tenemos que averiguar el orden del polinomio, con lo cual la incógnita es n, y lo hallaremos a partir de la expresión para el resto.

Ejemplo 3.1.12. Calcular $sen(0,2)$ con un error menor que $\frac{1}{10^4}$.

Para este problema, desarrollamos la función $f(x) = senx$ en $x_0 = 0$, y evaluaremos el polinomio en $x = 0,2$.

Para hallar el grado del polinomio, utilizamos la fórmula del error:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

y evaluando en $x = 0,2$ tenemos

$$R_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}.$$

Como queremos que el error sea menor a 10^{-4}, planteamos

$$\begin{aligned} |R_n(0,2)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}\right| \\ &= \frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)| \\ &\leq \frac{1}{10^4}. \end{aligned}$$

Observemos que $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$, ya que las derivadas son siempre las funciones seno o coseno, que en módulo son menores a 1. Entonces, tenemos que hallar n tal que

$$\frac{0,2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10^4},$$

o lo que es lo mismo,

$$10^4(0,2)^{n+1} < (n+1)!.$$

Como no podemos despejar la n, buscamos probando con la calculadora el primer valor de n que satisface la inecuación. Con $n = 2$ no se cumple, ya que

$$10^4 \cdot (0,2)^3 = 80 > 3! = 6.$$

Verificamos que con $n = 3$ se cumple:

$$10^4 \cdot (0,2)^4 < 4!, \text{ esto es, } 16 < 24.$$

Ahora tenemos que calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 0$.
Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) & f(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= \cos(0) = 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f''(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de Taylor tenemos

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Como $f(x) \simeq P_3(x)$,

$$sen(0,2) \simeq P_3(0,2) = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3!} = 0,198\hat{6}.$$

Ejercicio 3.1.13. *Calcular:*

1. *el número* e *con un error menor que* $\frac{1}{10^4}$
2. $\cos(0,2)$ *con un error menor que* $\frac{1}{10^4}$
3. $(1,3)^{\frac{2}{3}}$ *con un error menor que* $\frac{1}{100}$

Ejemplo 3.1.14. Sea $f(x) = e^{-ax} + kx^2 + 2x$.

1. Hallar los valores de a y k sabiendo que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ es
$$P_2(x) = 1 + x + 4x^2.$$
2. Para los valores de a y k hallados, dar una cota del error si se quiere aproximar $f(1)$ con $P_2(1)$

Este ejemplo es distinto a los anteriores porque tenemos que averiguar a y k para que el polinomio de Taylor de la función coincida con el polinomio dado. Entonces, lo que vamos a hacer es hallar $P_2(x)$ en $x_0 = 0$ para $f(x)$, el cual va a depender de a y k, y luego compararemos los coeficientes de ambos polinomios.

Tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^{-ax} + kx^2 + 2x \\ f'(x) & = & -ae^{-ax} + 2kx + 2 \\ f''(x) & = & a^2e^{-ax} + 2k \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & -a + 2 \\ f''(0) & = & a^2 + 2k. \end{array}$$

Entonces,

$$P_2(x) = 1 + (-a + 2)x + (a^2 + 2k)\frac{x^2}{2}.$$

Igualando el polinomio que nos dieron como dato al polinomio obtenido, tenemos

$$1 + x + 4x^2 = 1 + (-a + 2)x + (a^2 + 2x)\frac{x^2}{2}$$

con lo cual

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1 & = & -a + 2 \\ 4 & = & \dfrac{a^2 + 2k}{2} \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación obtenemos $a = 1$, y reemplazando en la tercera nos queda $1 + 2k = 8$, es decir,

$$k = \frac{7}{2}.$$

Para hacer la segunda parte, como nos piden una cota para el error, necesitamos $f'''(x)$, que es

$$f'''(x) = -a^3 e^{-ax}$$

y reemplazando $a = 1$, nos queda

$$f'''(x) = -e^{-x}, \qquad f'''(c) = -e^{-c}.$$

Acotamos el error:

$$\begin{aligned} |R_2(1)| &= \left| \frac{f'''(c)}{6}(1-0)^3 \right| \\ &= \left| \frac{-e^{-c}}{6} \right| \\ &= \frac{e^{-c}}{6} \\ &\leq \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

ya que podemos acotar e^{-c} por 1, pues

$$0 \leq c \leq 1,$$

y como e^x es creciente,

$$\begin{gathered} e^0 \leq e^c \leq e^1 \\ 1 \leq e^c \leq e, \end{gathered}$$

Invertimos, y se dan vuelta las desigualdades, con lo cual nos queda

$$1 \geq \frac{1}{e^c} \geq \frac{1}{e},$$

es decir,

$$\frac{1}{e} \leq e^{-c} \leq 1.$$

Ejercicio 3.1.15. *Sea* $f(x) = \cos(ax) + 2x$*.*

1. *Hallar el valor de a sabiendo que su polinomio de Taylor de orden* 2 *en* $x_0 = 0$ *es*

$$P_2(x) = 1 + 2x - 18x^2.$$

2. *Para el valor de a hallado, dar una cota del error si se quiere aproximar* $f(1)$ *con* $P_2(1)$

Capítulo 6

Números Complejos

1. Introducción

La historia de los números complejos es fascinante, y comienza hace unos quinientos años. En su libro *Ars Magna*, el matemático italiano Girolamo Cardano se planteó el siguiente problema:

Hallar dos números x e y cuya suma sea 10 *y su producto sea* 40.

Como $x + y = 10$, escribiendo

$$y = 10 - x,$$

reemplazamos en la segunda condición y tenemos

$$40 = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2.$$

Ahora, si buscamos las raíces de la cuadrática $x^2 - 10x + 40$, obtenemos

$$x = 5 + \sqrt{-15}, \qquad y = 5 - \sqrt{-15},$$

y si bien ningún número real puede ser la raíz cuadrada de un número negativo, vemos que estas expresiones (si las manejamos de la forma usual) satisfacen

$$\begin{aligned} x + y &= 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} \\ &= 10, \\ x \cdot y &= (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) \\ &= 5^2 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15}^2 \\ &= 25 + 15 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Cardano no estaba convencido de lo que había hecho, pero también en otros problemas le aparecían raíces cuadradas de cantidades negativas, y manipulándolas como si

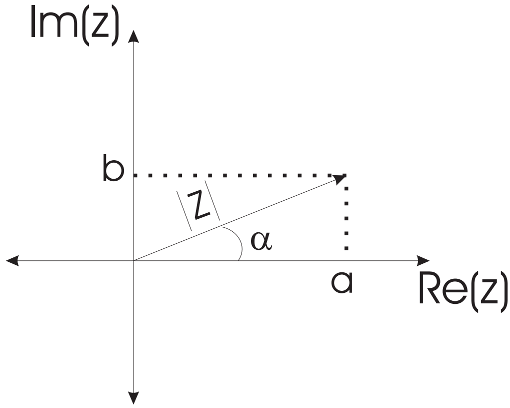


Figura 6.1: Representaciones binomial y polar

fuesen números llegaba siempre a resultados correctos. Otros matemáticos italianos de la misma época (Tartaglia, Scipione Del Ferro, Antonio María Fior) que estaban estudiando las raíces de una ecuación cúbica se encontraban con expresiones similares, y se acostumbraron a utilizarlas. Rafael Bombelli, un matemático admirador de Cardano, dio las reglas para manejar estas raíces de cantidades negativas en su libro *Algebra* de 1572. Estas reglas no difieren de las que veremos en la siguiente sección.

2. Forma binómica

Comencemos introduciendo la *unidad imaginaria* i, definida por la relación

$$i^2 = -1.$$

Un número complejo será una expresión de la forma $a+ib$ donde a y b son números reales. Definiremos el conjunto

$$\mathbb{C} = \left\{ a+bi \quad \text{tal que} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i^2=-1 \right\}.$$

Esta forma de representarlos se la llama *representación binomial*, y es conveniente para ciertas operaciones. Observemos que un número complejo tiene dos “coordenadas” a y b, y podemos interpretarlo como un vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, y para representarlo podemos indicar su longitud y el ángulo que hace con el eje x. A esta forma la llamaremos *representación polar*.

Cada forma de representar los números complejos tiene sus ventajas y sus desventajas. Las veremos a continuación en las próximas secciones.

2.1. Operaciones con números complejos

Definición 2.1.1. *Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $a + ib$ se denomina* **forma binómica** *de z.*

Definición 2.1.2. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, a es la parte real de z, y b es la parte imaginaria de z, vamos a escribir*

$$a = Re(z), \qquad b = Im(z).$$

En términos de las partes real e imaginaria de los números complejos, tenemos que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$z = w \Longleftrightarrow Re(z) = Re(w), \text{ e } Im(z) = Im(w).$$

Podemos definir ahora las operaciones con números complejos en forma binómica. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos, entonces:

- La suma es:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

- La resta es:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

- El producto es:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos numéricos.

Ejemplo 2.1.3. Sean $z = 3 + 4i$, $w = 1 - i$.
Entonces, la suma es

$$z + w = (3 + 4i) + (1 - i) = (3 + 1) + (4 - 1)i = 4 + 3i$$

y la resta

$$z - w = (3 + 4i) - (1 - i) = (3 - 1) + (4 + 1)i = 2 + 5i.$$

Ejemplo 2.1.4. Sean $z = 4 - 3i$ y $w = 1 + i$. Entonces,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (4 - 3i) \cdot (1 + i) \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot i - 3i \cdot 1 - 3i \cdot i \\ &= 4 + 4i - 3i + 3 \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

Para definir la división entre números complejos necesitamos introducir la noción de complejo conjugado.

Definición 2.1.5. *Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamaremos* **conjugado** *de z a $\overline{z} = a - bi$.*

Definición 2.1.6. *Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamaremos* **módulo** *de z al número real no negativo $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$. Utilizando Pitágoras se puede comprobar que el módulo de un complejo es la longitud del mismo pensado como vector. (Ver la figura 6.1)*

Observación 2.1.7. *Recordemos la propiedad $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ (diferencia de cuadrados). Será útil para calcular el producto de un número complejo y su conjugado:*

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2 = (|z|)^2$$

Observemos también que el resultado de hacer $z \cdot \overline{z}$ será siempre un número real.

Ahora si ya podemos definir la división entre dos complejos. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, calculamos $\frac{z}{w}$ del siguiente modo:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i$$

Ejemplo 2.1.8. Sea $z = 3 + 2i$ y $w = 2 - i$, calcular $\frac{z}{w}$

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{3+2i}{2-i} \\
&= \frac{3+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \\
&= \frac{6 + 3i + 4i + 2i^2}{2^2 - (i)^2} \\
&= \frac{6 + 7i + 2(-1)}{4 - i^2} \\
&= \frac{6 + 7i - 2}{4 - (-1)} \\
&= \frac{4 + 7i}{5} \\
&= \frac{4}{5} + \frac{7}{5} i.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.9. Sean $z = -1 + 2i$ y $w = 4 - 3i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{-1+2i}{4-3i} \\
&= \frac{-1+2i}{4-3i}\,\frac{4+3i}{4+3i} \\
&= \frac{(-1+2i)(4-3i)}{25} \\
&= \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.
\end{aligned}$$

2.2. Calcular potencias de i

Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, queremos calcular i^n. Como $i^2 = -1$, tenemos

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

Luego, si dividimos n por 4 será $n = 4q + r$ (por el algoritmo de la división), donde el resto puede ser $r = 0, 1, 2, 3$.

Entonces, reemplazando:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

Ejemplo 2.2.1. Calcular i^{1039}.

Primero tenemos que dividir 1039 por 4, como el cociente es 259 y el resto es 3 tenemos que $1039 = 259 \cdot 4 + 3$. Entonces:

$$i^{1039} = i^{259,4+3} = i^{259,4} i^3 = (i^4)^{259}\, i^3 = 1^{259}\, i^3 = i^3 = i^2\, i = (-1)i = -i$$

Para concluir con esta sección, vamos a ver un ejemplo donde apliquemos todo lo visto hasta ahora:

Ejemplo 2.2.2. Calcular

$$Im\left(\frac{\mid 3+4i \mid (-2-i)i^{58}}{1+2i}\right)$$

Vamos a hacer primero algunos cálculos auxiliares:

Dividiendo 58 por 4 se obtiene $58 = 14 \cdot 4 + 2$. Siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior,

$$i^{58} = i^2 = -1.$$

Por otro lado

$$\mid 3+4i \mid = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Ahora, reemplazando en el numerador:

$$\mid 3+4i \mid (-2-i)i^{58} = 5(-2-i)(-1) = 5(2+i) = 10 + 5i.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{10+5i}{1+2i} &= \frac{10+5i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}\\
&= \frac{10-20i+5i-10i^2}{1-4i^2}\\
&= \frac{10-15i+10}{1+4}\\
&= \frac{20-15i}{5}\\
&= \frac{20}{5}-\frac{15}{5}i\\
&= 4-3i
\end{aligned}$$

Reemplazando en el ejercicio original,

$$Im\left(\frac{|\,3+4i\,|\,(-2-i)i^{58}}{1+2i}\right)=Im(4-3i)=-3$$

ya que la parte imaginaria del complejo $z=4-3i$ es -3.

Ejercicio 2.2.3. *Reducir a la forma cartesiana $a+ib$*

a) $(3+6i)+(5-2i)+(4-5i)$

b) $(2-3i)-(5-4i)-(2-5i)$

c) $(3+5i)(-4-2i)(-1+4i)$

d) $\dfrac{4+2i}{1-2i}$

e) $\dfrac{1}{i}$

f) $\dfrac{3+4i}{1-2i}$

g) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}i}$

h) $i^{18}-3i^7+i^2(1-i^4)-(-i)^26$

i) $(1-i)^2(1+i)$

j) $\left(\dfrac{2i}{2+i}\right)^2$

k) $|(1+2i)^5(2-3i)|$

l) $\overline{(5-i)(4+3i)}$

m) $\dfrac{|(-1+i)(2+5i)|}{|(3-i)|}$

n) $|\overline{(3+4i)}(4-i)i^8|$

o) $Re[(3+2i)(1+5i)]$

p) $Im\left(\frac{(2+i)^2}{1-i}\right)$

q) $Re[(1+i)^2]$

r) $Im(|3-4i|i^3)$

Ejercicio 2.2.4. *Dado* $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, *calcular* $\dfrac{3}{z+1} - \dfrac{1}{z}$ *y* z^2.

Ejercicio 2.2.5. *Mostrar que si z y w son números complejos, entonces*

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$	*b*) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$	*c*) $z\overline{z} = \mid z \mid^2$
d) z *es real* $\iff z = \overline{z}$	*e*) $z + \overline{z} = 2Re(z)$	*f*) $\overline{\overline{z}} = z$
g) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$	*h*) $\mid z \mid = \mid \overline{z} \mid$	

3. Representación polar

En esta sección veremos la representación polar de un número complejo. Veremos también su utilidad para calcular productos, cocientes, potencias, y en especial raíces de números complejos.

3.1. Argumento de un número complejo

Definición 3.1.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $z \neq 0$, llamaremos argumento de z al único número real α que verifica simultáneamente*

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \qquad a = |z|\cos(\alpha) \qquad b = |z|\operatorname{sen}(\alpha).$$

Geométricamente, α es el ángulo que forma el vector (a, b) con el eje x.

Por la definición anterior, podemos reemplazar a y b en la forma binómica y obtenemos

$$z = |z|\cos(\alpha) + i|z|\operatorname{sen}(\alpha) = |z|(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$$

con $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$, y $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Definición 3.1.2. *Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = |z|(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ se denomina forma trigonométrica de z.*

Observación 3.1.3. *Para abreviar, escribiremos*

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha). \tag{3.1}$$

No vamos a entrar en detalles ahora respecto a esta fórmula, pero observemos que nos dice cómo elevar un número real a una potencia compleja. La relación de la exponencial con las funciones trigonométricas se verá brevemente al final del capítulo.

Multiplicando ambos miembros en (3.1) por $|z|$ llegamos a la siguiente definición:

Definición 3.1.4. *Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $z = |z|e^{i\alpha}$ se denomina forma polar o exponencial de z.*

Observación 3.1.5. *El argumento del número complejo lo medimos en radianes. Para pasar de grados a radianes utilizamos la regla de tres simple. Por ejemplo, si el ángulo es de* $30°$*, planteamos*

$$\begin{array}{rcl} 180° & \to & \pi \\ 30° & \to & x, \end{array}$$

y resolvemos

$$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{1}{6}\pi.$$

3.2. Pasajes de una forma a otra

Pasar un número complejo de la forma exponencial a binómica es muy sencillo, sólo hay que utilizar la forma trigonométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. Pasar el número complejo

$$z = 7e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

a la forma binómica.

Primero tenemos que pasar z a la forma trigonométrica,

$$\begin{array}{rcl} z & = & 7e^{\frac{4\pi}{3}i} \\ & = & 7\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right], \end{array}$$

y calculamos (recordando que los ángulos están en radianes, y no grados)

$$\begin{array}{rcl} 7\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] & = & 7\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\ & = & -\frac{7}{2} - \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)i. \end{array}$$

Ejemplo 3.2.2. Verificar que el número complejo $z = \sqrt{28}e^{\frac{\pi}{4}i}$ es

$$z = \sqrt{14} + \sqrt{14}i$$

escrito en la forma binómica.

Pasándolo a la forma trigonométrica,

$$\begin{array}{rcl} z & = & \sqrt{28}e^{\frac{\pi}{4}i} \\ & = & \sqrt{28}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ & = & \sqrt{28}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{array}$$

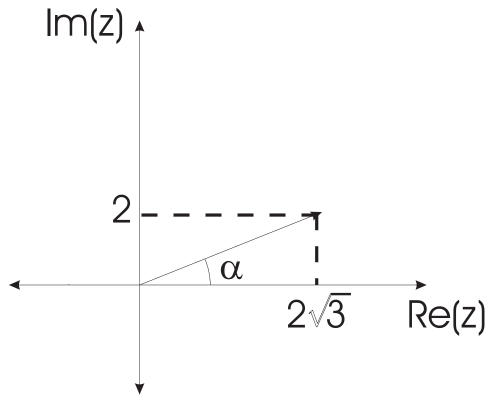


Figura 6.2: Ejemplo 3.2.4

Ahora, distribuyendo nos queda

$$\begin{aligned}\sqrt{28}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{28}\frac{\sqrt{2}}{2}i &= \frac{\sqrt{56}}{2}+\frac{\sqrt{56}}{2}i\\ &= \frac{2\sqrt{14}}{2}+\frac{2\sqrt{14}}{2}i\\ &= \sqrt{14}+\sqrt{14}i.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.2.3. *Expresar*

$$e^{-i\pi/2} \qquad 5e^{i\pi/3} \qquad 4e^{i\pi/6}$$

en forma binomial o cartesiana.

Veamos ahora como se pasa un número complejo de la forma binómica a la exponencial.

Ejemplo 3.2.4. Escribir $z=2\sqrt{3}+2i$ en la forma polar.

Para escribir z en la forma polar necesitamos conocer su módulo y su argumento. Calculamos el módulo haciendo

$$|z|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{4\cdot 3+4}=4.$$

Ahora, para el argumento (ver Figura 6.2), sabiendo que

$$\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}},$$

tenemos

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Entonces,

$$z=4e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

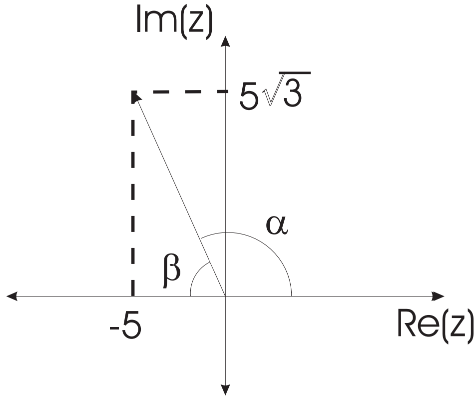


Figura 6.3: Ejemplo 3.2.5

Ejemplo 3.2.5. Escribir $w = -5 + 5\sqrt{3}i$ en forma exponencial.

Primero calculemos su módulo:

$$|w| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 25 \cdot 3} = \sqrt{100} = 10.$$

Como el número complejo está en el segundo cuadrante (ver Figura 6.3) vamos a calcular un ángulo auxiliar, llamémoslo β. Como estamos trabajando con triángulos, los valores de los catetos son positivos ya que son longitudes. Entonces tenemos

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5\sqrt{3}}{5}\right) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi.$$

Luego,

$$\alpha = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi,$$

y

$$w = 10e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Ejemplo 3.2.6. Escribir en forma polar

$$u = -\sqrt{7} - \sqrt{21}i.$$

Primero calculamos su módulo,

$$|u| = \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{21})^2} = \sqrt{7 + 21} = \sqrt{28}.$$

Ahora vemos que el número complejo está en el tercer cuadrante (ver Figura 6.4), y vamos a calcular el ángulo auxiliar β

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}\right) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi.$$

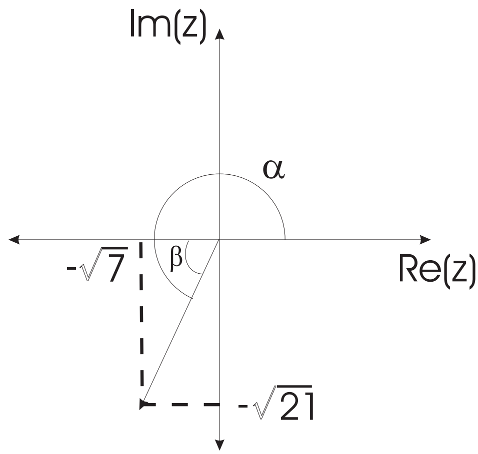


Figura 6.4: Ejemplo 3.2.6

Luego,

$$\alpha = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Entonces,

$$u = \sqrt{28}e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Ejemplo 3.2.7. Escribir en forma exponencial

$$v = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i.$$

Calculamos su módulo:

$$|v| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8,$$

y su argumento:

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Como el número complejo está en el cuarto cuadrante, (ver Figura 6.5)

$$\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Entonces,

$$v = 8e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Ejercicio 3.2.8. *Expresar los siguientes complejos en la forma polar* $z = |z|e^{i\theta}$

$$-2 + 2i \qquad 1 - i\sqrt{3} \qquad -3 \qquad 2i \qquad -\sqrt{7} + i\sqrt{21}$$

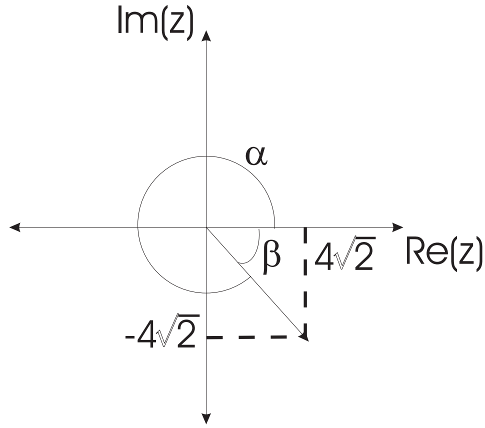


Figura 6.5: Ejemplo 3.2.7

3.3. Operaciones en forma polar

La representación polar nos permite calcular productos, cocientes, y potencias de manera muy simple. En lo que sigue, sean z y w dos números complejos, escritos como

$$z = |z|e^{i\alpha}, \qquad w = |w|e^{i\beta}.$$

Producto

El producto de z y w, escritos en forma polar, es

$$z \cdot w = |z|e^{i\alpha} \cdot |w|e^{i\beta} = |z| \cdot |w|e^{i\alpha+i\beta} = |z| \cdot |w|e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Es decir, se multiplican entre sí los módulos de z y w, y se suman los ángulos.

Observación 3.3.1. *La suma de los ángulos $\alpha + \beta$ puede ser mayor a 2π. En tal caso, se le restan múltiplos enteros de 2π hasta que pertenezca al intervalo $[0, 2\pi)$.*

Ejemplo 3.3.2. Sean $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, $w = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Entonces, el producto de z y w es:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 4e^{\frac{5\pi}{6}i} \\ &= 2 \cdot 4e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6})i} \\ &= 8e^{\frac{13\pi}{12}i}, \end{aligned}$$

y como $13\pi/12$ está en el intervalo $[0, 2\pi)$, no hace falta reducir el ángulo.

Cociente

El cociente de z y w con $w \neq 0$ es

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\alpha-\beta)}.$$

Esto es, se dividen los módulos de z y w, y se restan los ángulos.

Observación 3.3.3. *La resta de los ángulos $\alpha - \beta$ puede ser menor a 0. En tal caso, se le suman múltiplos enteros de 2π hasta que pertenezca al intervalo $[0, 2\pi)$.*

Ejemplo 3.3.4. Sean $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, $w = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Entonces, el cociente de z y w es:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2}{4}\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{5\pi}{6}i}} \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i-\frac{5\pi}{6}i} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}, \end{aligned}$$

y ahora sumamos 2π para llevar el ángulo al intervalo $[0, 2\pi)$. Nos queda

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{2}e^{\frac{17\pi}{12}i}.$$

Potencia

Sea $z = |z|e^{i\alpha}$, y $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$z^n = (|z|e^{i\alpha})^n = |z|^n(e^{i\alpha})^n = |z|^n e^{in\alpha}.$$

Es decir, se eleva a la n el módulo de z y se multiplica por n el ángulo.

Observación 3.3.5. *Recordemos que el argumento de un número complejo toma valores entre 0 y 2π. Al hacer esta operación, es posible que el argumento del resultado caiga fuera del intervalo $[0, 2\pi]$. En ese caso, se restan múltiplos enteros de 2π ("vueltas") hasta reducirlo.*

Ejemplo 3.3.6. Sea $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$. Calcular z^{10}.

Tenemos

$$z^{10} = \left(2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{10} = 2^{10}e^{\frac{10\pi}{4}i},$$

es decir, queda

$$z^{10} = 2^{10}e^{\frac{5\pi}{2}i},$$

y como $2\pi < 5\pi/2$, debemos reducir el ángulo. Restándole 2π nos queda $\pi/2$, y el resultado es

$$z^{10} = 2^{10}e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Ejemplo 3.3.7. Sea $z = 2e^{\frac{4\pi}{5}i}$. Calcular z^7.

Tenemos

$$\begin{aligned} z^7 &= (2e^{\frac{4\pi}{5}i})^7 \\ &= 2^7(e^{\frac{4\pi}{5}i})^7 \\ &= 128e^{7\cdot\frac{4\pi}{5}i} \\ &= 128e^{\frac{28\pi}{5}i}. \end{aligned}$$

Aquí, $28\pi/5 > 2\pi$, así que debemos reducirlo. Para saber cuántas vueltas hay que restar, dividimos 28 por 5:

$$\frac{28}{5}\pi = \left(5 + \frac{3}{5}\right)\pi = 2\pi + 2\pi + \pi + \frac{3\pi}{5},$$

y vemos que podemos restar dos vueltas, es decir, 4π. Nos queda entonces

$$\frac{28}{5}\pi - 4\pi = \left(1 + \frac{3}{5}\right)\pi = \frac{8}{5}\pi,$$

$$z^7 = 2^7 e^{\frac{8\pi}{5}i}.$$

Conjugación

Dado un número complejo $z = |z|e^{i\alpha}$, el complejo conjugado es

$$\overline{z} = |z|e^{(2\pi-\alpha)i}.$$

Observemos que si z forma un ángulo α con el eje x, el ángulo que forma el conjugado es $-\alpha$, y le sumamos 2π para reducirlo al intervalo $[0, 2\pi)$.

Ejemplo 3.3.8. Sea $z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, calculemos $\overline{z}$. Directamente,

$$\overline{z} = 2e^{\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)i} = 2e^{\frac{7\pi}{8}i}.$$

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos combinando las distintas operaciones.

Ejemplo 3.3.9. Sean $z = 2\sqrt{3} + 2i$, y $w = -5 + 5\sqrt{3}i$. Calcular $z^5 \cdot w^7$.

El primer paso es llevarlos a la forma polar, y ya lo hicimos en los ejemplos 3.2.4 y 3.2.5 respectivamente:

$$z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}, \qquad w = 10e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} z^5 &= 4^5(e^{\frac{\pi}{6}i})^5 = 4^5 e^{\frac{5\pi}{6}i}, \\ w^7 &= 10^7(e^{\frac{2\pi}{3}i})^7 = 10^7 e^{\frac{14\pi}{3}i} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} z^5 \cdot w^7 &= 4^5 e^{\frac{5\pi}{6}i} \cdot 10^7 e^{\frac{14\pi}{3}i} \\ &= 4^5 \cdot 10^7 e^{\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{14\pi}{3}\right)i} \\ &= 4^5 \cdot 10^7 e^{\frac{11\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

Como el argumento de $z^5 \cdot w^7$ no está entre 0 y 2π, tenemos que escribir el ángulo equivalente a $\frac{11\pi}{2}$ dentro de ese intervalo. Observemos que

$$\frac{11}{2}\pi = \left(5 + \frac{1}{2}\right)\pi = 2\pi + 2\pi + \pi + \frac{1}{2}\pi,$$

y podemos restar dos vueltas completas. Nos queda finalmente

$$z^5 \cdot w^7 = 4^5 \cdot 10^7 e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Ejemplo 3.3.10. Sean $u = -\sqrt{7} - \sqrt{21}i$ y $v = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$. Calcular

$$\frac{u^6}{(\overline{v})^3}.$$

El primer paso es pasarlos a la forma polar, que lo hicimos en los ejemplos 3.2.6 y 3.2.7 respectivamente:

$$u = \sqrt{28}e^{\frac{4\pi}{3}i}, \quad \text{y} \quad v = 8e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} u^6 &= (\sqrt{28}e^{\frac{4\pi}{3}i})^6 \\ &= (\sqrt{28})^6 e^{6\cdot\frac{4\pi}{3}i} \\ &= 28^3 e^{8\pi i} \\ \overline{v}^3 &= (8e^{(2\pi-\frac{7\pi}{4})i})^3 \\ &= 8^3(e^{\frac{\pi}{4}i})^3 \\ &= 8^3 e^{\frac{3\pi}{4}i}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{u^6}{(\overline{v})^3} &= \frac{28^3 e^{8\pi i}}{8^3 e^{\frac{3\pi}{4}i}} \\ &= \frac{28^3}{8^3} e^{(8\pi-\frac{3\pi}{4})i} \\ &= \left(\frac{28}{8}\right)^3 e^{\frac{29\pi}{4}i} \\ &= \left(\frac{7}{2}\right)^3 e^{\frac{29\pi}{4}i}. \end{aligned}$$

Finalmente, reducimos el ángulo, ya que

$$\frac{29}{4}\pi = 7\pi + \frac{1}{4}\pi = 6\pi + \pi + \frac{1}{4}\pi = 3 \cdot 2\pi + \pi + \frac{1}{4}\pi,$$

y podemos restarle tres vueltas completas. El resultado es

$$\frac{u^6}{(\overline{v})^3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Ejercicio 3.3.11.

1. *Expresar en forma polar* $z = |z|e^{i\theta}$ *los números complejos* $1+i$ *y* $1-i$. *Utilizarlas para efectuar los siguientes cálculos (dar las respuestas en forma cartesiana* $z = a + ib$*)*
$$(1+i)^{100} \qquad (1+i)^{33}(1-i)^{50} \qquad \frac{1+i}{1-i}$$

2. *Expresar la forma polar de* $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ *y* $w = \sqrt{3} - i$. *Utilizarlas para calcular*
$$z^3w^2, \qquad \overline{z}w^5, \qquad \frac{w^4}{z^5}.$$

4. Ecuaciones con números complejos

En esta sección veremos cómo calcular raíces $n-$ésimas de un número complejo y luego cómo resolver ecuaciones un poco más complicadas que involucran números complejos.

4.1. Cálculo de raíces

Dado un número complejo w y un número natural, queremos determinar todos los números complejos tales que
$$z^n = w.$$
Veamos cómo resolverlo, y luego analizaremos un ejemplo.

El primer paso consiste en escribir los números complejos en forma polar. Tenemos entonces $z = |z|e^{\alpha i}$ y $w = |w|e^{\beta i}$ (w es dato), y la potencia $n-$ésima de z será $z^n = |z|^n e^{n\alpha i}$.

Ahora, dos números complejos son iguales si y sólo si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en $2k\pi$, con k un número entero. Tenemos entonces
$$|z|^n = |w|, \quad \text{y} \quad n\alpha = \beta + 2k\pi,$$
y entonces
$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\beta + 2k\pi}{n}$$
donde $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Entonces, todos los z que estamos buscando se escriben de la siguiente forma:
$$z = \sqrt[n]{|w|}e^{\frac{\beta+2k\pi}{n}}, \quad \text{con } k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Observación 4.1.1. *Cuando* $k = n$ *vemos que*
$$\alpha = \frac{\beta + 2n\pi}{n} = \frac{\beta}{n} + 2\pi,$$
con lo cual α *no estaría entre* 0 *y* 2π.

Ejemplo 4.1.2. Calcular las raíces sextas de $2\sqrt{3} + 2i$.

En este ejemplo $n = 6$ y $w = 2\sqrt{3} + 2i$. El primer paso es llevar w a la forma polar, y lo hicimos en el ejemplo 3.2.4, obtuvimos

$$w = 4e^{\frac{\pi}{6}i},$$

y tenemos que hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = w$, es decir,

$$z^6 = 4e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Proponemos $z = |z|e^{\alpha i}$, y entonces $z^6 = |z|^6 e^{6\alpha i}$, con lo cual se debe cumplir

$$|z|^6 = 4, \quad \text{es decir} \quad |z| = \sqrt[6]{4},$$

y

$$6\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{es decir} \quad \alpha = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6} = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$$

Veamos que los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq \alpha < 2\pi$ son los que habíamos mencionado. Si

$$0 \leq \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} < 2\pi,$$

entonces, despejando k llegamos a

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \dfrac{1}{36} + \dfrac{k}{3} & < & 2 \\[2ex] -\frac{1}{36} & \leq & \dfrac{k}{3} & < & 2 - \dfrac{1}{36} \\[2ex] -\dfrac{1}{36} & \leq & \dfrac{k}{3} & < & \dfrac{71}{36} \\[2ex] -\dfrac{3}{36} & \leq & k & < & \dfrac{213}{36} \\[2ex] -\dfrac{1}{12} & \leq & k & < & \dfrac{71}{12}. \end{array}$$

Como k es un número entero, se tiene que $k = 0$, 1, 2, 3, 4, 5.

Finalmente, los z buscados se escriben como

$$z = \sqrt[6]{4}e^{\left(\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\right)i}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ejercicio 4.1.3. *Calcule las raíces cuartas de los complejos dados en el ejercicio 3.2.8.*

4.2. Ecuaciones con números complejos

Veremos con un ejemplo cómo resolver ciertas ecuaciones polinomiales con números complejos.

Ejemplo 4.2.1. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z^5 = 2iz^2$.

Como no conocemos z, planteamos $z = |z|e^{\alpha i}$. Como en el segundo miembro de la ecuación tenemos un número complejo en forma binómica, tenemos que pasarlo a la forma exponencial y luego multiplicarlo por z^2. Pasándolo a la forma exponencial queda $2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, y ahora reemplazamos todo en la ecuación:

$$\begin{aligned} |z|^5 e^{5\alpha i} &= 2e^{\frac{\pi}{2}i}|z|^2 e^{2\alpha i} \\ &= 2|z|^2 e^{\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)i}. \end{aligned}$$

Entonces, ambos lados son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en $2k\pi$, es decir,

$$|z|^5 = 2|z|^2 \quad \text{y} \quad 5\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\alpha + 2k\pi.$$

Para el módulo, tenemos dos posibilidades,

$$|z| = 0 \quad \text{ó} \quad |z|^3 = 2.$$

Para el primer caso, $z = 0$ es una solución, en el segundo, tenemos $|z| = \sqrt[3]{2}$.

Ahora comparemos los argumentos. Despejando nos queda

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Como α tiene que estar entre 0 y 2π, tenemos que hallar los valores posibles de k, entonces:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} & < & 2\pi \\[2ex] 0 & \leq & \dfrac{1}{6} + \dfrac{2k}{3} & < & 2 \\[2ex] -\dfrac{1}{6} & \leq & \dfrac{2k}{3} & < & 2 - \dfrac{1}{6} \\[2ex] -\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2} & \leq & k & < & \dfrac{11}{6}\cdot\dfrac{3}{2} \\[4ex] -\dfrac{1}{4} & \leq & k & < & \dfrac{11}{4}, \end{array}$$

y como $k \in \mathbb{Z}$, debe ser $k = 0,\ 1,\ 2$.

Entonces los complejos buscados son

$$z = 0 \quad \text{y} \quad z = \sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)i} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2.$$

Observación 4.2.2. *También la ecuación* $z^5 = 2iz^2$ *se puede resolver igualando a* 0 *y sacando factor común* z^2*, es decir*

$$z^5 - 2iz^2 = 0 \Rightarrow z^2(z^3 - 2i) = 0$$

Con lo cual $z^2 = 0$ *o* $z^3 = 2i$

Luego la segunda ecuación la podemos resolver hallando las raíces cúbicas de $2i$*.*

Ejercicio 4.2.3. *En cada caso encontrar todos los números complejos* z *que satisfacen las ecuaciones*

a) $z^2 = i$ *b)* $z^4 = 1$ *c)* $z^5 = -32$ *d)* $z^5 = 8z^2$ *e)* $z^3 = -\overline{z}$

Ejercicio 4.2.4.

1. *Dado* $w = \sqrt{3} - i$*, hallar* $u = z^3.w$
2. *Hallar los* $v \in \mathbb{C}$ *tal que* $v^2 = u$

(Sugerencia: trabajar con la forma exponencial.)

5. Apéndice

Podemos preguntarnos el origen de la fórmula (3.1),

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha),$$

y si bien no vamos a entrar en muchos detalles, observemos que el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función exponencial es

$$P_{2n+1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Por otra parte, el desarrollo del coseno de grado $2n$ es

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y el del seno de grado $2n+1$,

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si bien el polinomio de $\operatorname{sen}(x)$ tiene términos de grado impar, y el de $\cos(x)$ tiene términos de grado par, la suma de ambos no es el polinomio de la exponencial e^x. Hay una diferencia en los coeficientes, ya que se alternan los signos positivos y negativos.

Veamos qué pasa si evaluamos el polinomio de la exponencial en ix, es decir, en un valor imaginario puro. Nos queda:

$$P_{2n+1}(ix) = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \ldots + \frac{(xi)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(xi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$P_{2n+1}(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n i \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Observemos que $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, con lo cual vemos que la unidad imaginaria i desaparece de los términos pares, mientras que en los impares queda (hemos escrito también $i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n i$). Además, los signos de las potencias pares (y los de las impares) se van alternando, ya que las potencias de i se repiten periódicamente y nos dan

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \cdots$$

Si reescribimos el polinomio separando los términos que tienen a i como coeficiente de los otros, el polinomio $P_{2n+1}(ix)$ nos queda

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),$$

es decir, nos queda la suma del polinomio de Taylor para el coseno más el polinomio de Taylor para el seno multiplicado por i.

A partir de este cálculo formal, podemos sospechar entonces que para todo valor de x se tiene

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x),$$

si bien no tenemos herramientas necesarias para demostrarlo, ya que necesitaríamos introducir el concepto de serie de potencias, hacer tender en los polinomios $n \to \infty$ para introducir las series de Taylor, y mostrar que las funciones coinciden con estas series de Taylor.

Ahora, dado un número complejo $z = a + ib$, escribimos

$$\begin{aligned} e^z &= e^{a+ib} \\ &= e^a \cdot e^{ib} \\ &= e^a[cos(b) + isen(b)], \end{aligned}$$

y esto nos permite calcular la exponencial de un número complejo. Utilizaremos esto en el apéndice 2, donde resolveremos ciertas ecuaciones diferenciales.

Observación 5.0.5. *No podemos terminar este capítulo sin mencionar una de las fórmulas más conocidas de las matemáticas,*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Se la puede verificar a partir de las expresiones obtenidas.

Capítulo 7

Funciones de varias variables I

En este capítulo analizaremos funciones que dependen de más de una variable, es decir, trabajaremos con funciones $f(x, y)$, $g(x, y, z)$, $h(x_1, \cdots, x_n)$. Analizaremos brevemente cómo graficarlas, el concepto de curva y superficie de nivel, y el dominio de una función de varias variables.

Veremos también las ecuaciones de algunos objetos geométricos básicos en el plano y el espacio, tales como círculos, elipses, esferas y cilindros, y una breve introducción a la noción de distancia en el espacio euclideano.

Por simplicidad, trabajaremos mayormente con funciones de dos o tres variables, aunque los resultados en el caso general son similares.

Además, el contenido de este capítulo nos dará el lenguaje y los conceptos necesarios para definir límites, derivadas parciales, etc. Recordemos que en una variable, la distancia entre dos puntos x y x_0 era el módulo de su diferencia, $|x-x_0|$, pero con más variables este tipo de nociones es más complicada, y necesitaremos definir una noción de distancia. Por otra parte, muchos resultados utilizaban la noción de intervalo abierto, o de intervalo cerrado; y ahora tenemos que generalizar estos conceptos.

1. El plano euclídeo

En esta sección recordaremos brevemente la noción del plano euclídeo, que conocemos gracias a la geometría elemental. Introduciremos además el concepto de distancia entre sus puntos.

1.1. Vectores

Llamaremos $\mathbb{R}^2$ al *plano euclídeo* xy, es decir, al conjunto de puntos de coordenadas (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. De la misma forma, $\mathbb{R}^3$ es el *espacio euclídeo*, el conjunto de puntos de coordenadas (x, y, z). En general, escribiremos $\mathbb{R}^n$ para representar todos los puntos de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Podemos interpretar los puntos como vectores, y esto nos permite sumarlos y restarlos entre sí (coordenada a coordenada), o multiplicarlos por un escalar $a \in \mathbb{R}$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$
$$a \cdot (x, y) = (ax, ay)$$

Observación 1.1.1. *Valen expresiones análogas en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$,*

$$a \cdot (x_1, ..., x_n) \pm (y_1, ..., y_n) = (ax_1 \pm y_1, ..., ax_n \pm y_n).$$

Ejemplo 1.1.2. Tenemos en $\mathbb{R}^4$:

$$(1, 0, 3, -1) + 4 \cdot (-1, 2, 0, 1) = (1, 0, 3, -1) + (-4, 8, 0, 4) = (-3, 8, 3, 3).$$

Ejercicio 1.1.3. *Calcular* $2 \cdot (-2, -1, 3) - 3(1, -1, 2)$.

1.2. Distancia

En la recta real era sencillo determinar si dos puntos estaban cerca: el módulo de la resta era cercano a cero para puntos a poca distancia entre sí. Necesitamos ahora una noción de *distancia* en $\mathbb{R}^n$, y para eso introducimos la *norma euclídea* de un vector (su módulo, o su longitud):

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Ejemplo 1.2.1. Tenemos

$$\|(1, -3)\| = (1^2 + (-3)^2)^{1/2} = \sqrt{10}.$$
$$\|(2, -4, 4)\| = (2^2 + (-4)^2 + 4^2)^{1/2} = \sqrt{36} = 6.$$

Definición 1.2.2. *La distancia entre dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ es la norma de su diferencia, $\|x - y\|$.*

Ejemplo 1.2.3. La distancia entre $P = (3, 3)$ y $Q = (-1, 4)$ es

$$\|(3, 3) - (-1, 4)\| = \|(4, -1)\| = (4^2 + (-1)^2)^{1/2} = \sqrt{17}.$$

Con esta noción de distancia podemos definir un *disco abierto* de radio r centrado en (x_0, y_0) como los puntos del plano ubicados a distancia menor que r del punto (x_0, y_0):

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

De manera análoga, el *disco cerrado* será

$$D_r[x_0, y_0] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\}$$

es decir, el disco cerrado incluye la circunferencia de radio r centrada en el punto (x_0, y_0):

$$S_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r\}$$

Ejemplo 1.2.4. El disco abierto centrado en $(0,0)$ de radio 1 es

$$D_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{x^2+y^2} < 1\}.$$

Su circunferencia es

$$S_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{x^2+y^2} = 1\}.$$

Observación 1.2.5. *Estas definiciones se generalizan a $\mathbb{R}^n$. Podemos definir en $\mathbb{R}^3$ una esfera de radio r centrada en el punto (x_0, y_0, z_0); y en general, una bola abierta de radio r y centro $(x_1, \ldots, x_n)$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ a distancia menor que r del centro.*

1.3. Conjuntos abiertos y cerrados

Si bien no profundizaremos en estas nociones, es conveniente introducirlas ahora, pues son necesarias en las hipótesis de distintos teoremas.

Definición 1.3.1. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se dice abierto si para cada punto $(x_0, y_0) \in A$, existe un número real $r > 0$ tal que $D_r(x_0, y_0) \subset A$.*

El papel de los conjuntos abiertos es similar al de los intervalos abiertos. Más adelante veremos ejemplos al respecto.

Definición 1.3.2. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, su complemento A^c está formado por los puntos de $\mathbb{R}^2$ que no pertenecen al conjunto A.*

No vamos a utilizar en lo que sigue la noción del complemento de un conjunto, sólo lo haremos en la próxima definición:

Definición 1.3.3. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se dice cerrado si su complemento A^c es abierto.*

Ejemplo 1.3.4. Los siguientes son conjuntos abiertos:

1. Un disco abierto de radio $r > 0$, $D_r(x_0, y_0)$.
2. El plano $\mathbb{R}^2$.
3. El plano menos el origen, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
4. El plano $\mathbb{R}^2$ menos el semieje $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$.
5. El rectángulo $(a,b) \times (c,d)$.

Ejemplo 1.3.5. Los siguientes son conjuntos cerrados:

1. Un disco cerrado de radio $r > 0$
2. El plano $\mathbb{R}^2$ menos un disco abierto de radio $r > 0$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{D_r(x_0, y_0)\}$
3. El plano complejo menos el semieje $\mathbb{R}_{<0}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}_{<0}\}$
4. El rectángulo cerrado $[a,b] \times [c,d]$

2. Cónicas

Las siguientes curvas que presentaremos de $\mathbb{R}^2$ reciben el nombre de cónicas. El nombre se debe a que dichas curvas se obtienen al intersecar un cono con distintos planos.

Veremos que estas curvas aparecen en forma natural al calcular y graficar el dominio de funciones cuyo dominio está en el plano $\mathbb{R}^2$, y también al trazar curvas de nivel.

2.1. Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto dado. Es decir, es la curva formada por los puntos que están a igual distancia de un punto fijo. A dicho punto se lo denomina centro y la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y el centro es el radio, ver la figura 7.1.

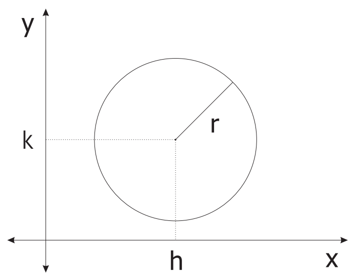


Figura 7.1: Gráfico de la circunferencia de radio r centrada en (h, k).

Se puede probar fácilmente utilizando la identidad de Pitágoras que si el centro es el origen $(0, 0)$ del plano, la ecuación de la circunferencia de radio r es

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

esto coincide con nuestra definición de distancia y de disco de radio r.

Ahora, si el centro es un punto cualquiera $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.1.1. Graficar la curva cuya ecuación es: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Por lo visto anteriormente, la curva es una circunferencia centrada en el $(-1, 2)$ y de radio 2 ya que la ecuación dada la podemos escribir como $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$, ver la figura 7.2.

Hay que tener cuidado con los signos del centro. En la fórmula, h está precedido por un signo $-$, y en la ecuación dada tiene un signo $+$, entonces la primer coordenada del centro tiene que ser negativa.

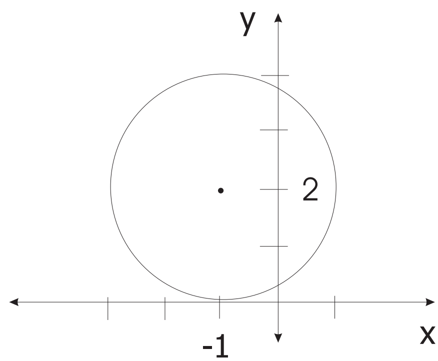


Figura 7.2: Gráfico de la circunferencia de radio 2 centrada en $(-1, 2)$.

2.2. Elipse

Dados dos puntos F_1 y F_2, y un número real $k > 0$, la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano P tales que $\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = k$. A F_1 y F_2 se los llama los focos de la elipse.

Como a nosotros unicamente nos interesará graficar las elipses, no le daremos importancia a los focos. Si el centro de la elipse es el $(0, 0)$, la definición anterior sirve para llegar a la siguiente fórmula:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b se denominan los semiejes de la elipse. El semieje mayor da la mayor distancia entre dos puntos diametralmente opuestos, mientras que el semieje menor corresponde a la menor distancia. Podemos pensar que un círculo es una elipse deformada donde todo par de puntos diametralmente opuestos están a la misma distancia, ver la figura 7.3.

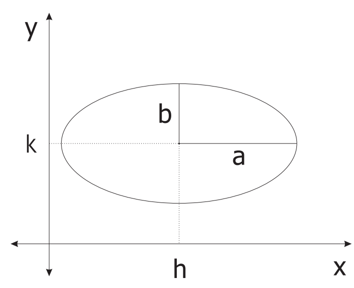


Figura 7.3: Elipse.

Si ahora el centro es el punto $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, utilizando traslaciones, llegamos a la siguiente expresión de la elipse:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 2.2.1. Graficar la curva cuya ecuación es

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

El gráfico es una elipse centrada en el punto $(1, -2)$ donde los semiejes son $a = 2$ y $b = 3$, ya que la expresión dada es equivalente a

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Una vez identificados el centro y los semiejes podemos graficar la elipse, ver figura 7.4.

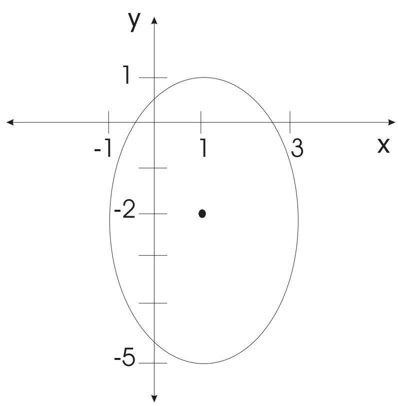


Figura 7.4: Ejemplo de elipse

2.3. Hipérbola

Dados dos puntos F_1 y F_2 y un número real $k > 0$, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano P tales que $|\,\|P - F_1\| - \|P - F_2\|\,| = k$. A F_1 y F_2 se los llama los focos de la hipérbola. Al igual que con la elipse, el tratamiento de los focos excede el propósito de este libro. Lo que nos va a interesar es la ecuación canónica de la hipérbola para poder gráficarla. Si la misma está centrada en el $(0, 0)$ su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

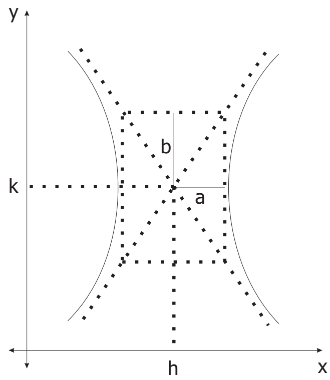


Figura 7.5: Hipérbola

donde a y b se denominan semiejes.

Si ahora el centro es el punto $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ utilizando traslaciones llegamos a la siguiente expresión de la hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

y su gráfico podemos verlo en la figura 7.5.

El siguiente ejemplo nos muestra cómo graficarla.

Ejemplo 2.3.1. Graficar la curva cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Por lo visto anteriormente tenemos una hipérbola centrada en el $(0, 0)$ con semiejes $a = 2$ y $b = 3$. Para graficarla primero tenemos que trazar un rectángulo centrado en el origen de coordenadas y la longitud de los lados se corresponde con los semiejes, como indica la figura. Las diagonales del mismo son las asíntotas de la hipérbola. Por último, la hipérbola tiene que pasar por los puntos $(0, -2)$ y $(0, 2)$, ver la figura 7.6. Tanto el rectángulo como las diagonales del mismo sirven de ayuda para realizar el gráfico, pero no forman parte de la hipérbola.

Muchas veces, cuando tengamos que obtener y graficar el dominio de una cierta función, llegaremos a una expresión que aparentemente no conocemos, pero tal vez realizando pasos algebraicos la podremos transformar en otra conocida. Veamos un ejemplo.

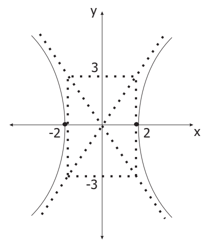


Figura 7.6: Ejemplo de hipérbola

Ejemplo 2.3.2. Graficar la curva cuya ecuación es: $9x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Aquí la expresión dada no se corresponde directamente con ninguna de las fórmulas conocidas. Como las dos variables están al cuadrado, en principio puede ser una circunferencia o una elipse (no es una hipérbola porque uno de los coeficientes debería ser negativo). Veremos que es una elipse realizando algunos pasos algebraicos.

Tenemos la expresión:

$$9x^2 + (y-1)^2 = 4,$$

y podemos dividir por 4 ambos miembros, quedando:

$$\frac{9x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Tenemos que tener cuidado porque hay un 9 multiplicando en el primer término, con lo cual todavía no podemos obtener el semieje a. Recordando las propiedades de las fracciones obtenemos:

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Ahora sí estamos en condiciones de obtener el centro y los semiejes. El centro es el punto $(0,1)$ y los semiejes son $a = \frac{2}{3}$, y $b = 2$ (recordemos que para obtener los semiejes hay que tomarle raíz cuadrada a los denominadores de ambos términos, ya que en la fórmula tanto a como b aparecen al cuadrado), ver la figura 7.7.

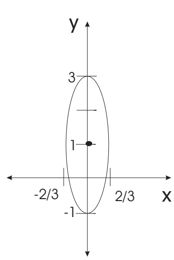


Figura 7.7: Ejemplo de elipse

3. Funciones de varias variables

Ya estamos en condiciones de comenzar a estudiar las funciones de $\mathbb{R}^2$ y, en general, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Recordemos que una función asigna a cada elemento de su dominio un único elemento en la imagen.

Cuando $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, muchas veces la indicaremos de la forma

$$z=f(x,y).$$

3.1. Algunas funciones sencillas

Las siguientes son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x+y \\ f(x,y) & = & xy \\ f(x,y) & = & x^y \\ f(x,y) & = & \operatorname{sen}(x+y) \\ f(x,y) & = & e^{2x-y} \\ f(x,y) & = & \dfrac{x-1}{y^2+1} \end{array}$$

En ocasiones, las funciones estarán definidas por distintas fórmulas según la región del plano:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} \ln(x-y) & \text{si} \quad x>y \\ \ln(y-x) & \text{si} \quad x<y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} \cos(xy) & \text{si} \quad y>x^2 \\ \operatorname{sen}(xy) & \text{si} \quad y\leq x^2 \end{cases}$$

Las siguientes son funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & x+y+z \\ f(x,y,z) & = & xyz \\ f(x,y,z) & = & x^2e^{zy} \\ f(x,y,z) & = & z\operatorname{sen}(x^3+y) \\ f(x,y,z) & = & e^{2x-yz} \\ f(x,y,z) & = & \dfrac{x-z}{x^2+z^2+y^2+1} \end{array}$$

Con estos ejemplos sólo queremos familiarizarnos con funciones de dos y tres variables. Si las observamos y tratamos de imaginar cómo serían sus gráficos, nos haremos una idea de las dificultades del cálculo diferencial de dos y más variables, donde no podremos confiar tanto en la geometría y tendremos que trabajar más analíticamente. En las siguientes subsecciones veremos cómo hacernos una idea de los gráficos de estas funciones, pero primero estudiaremos su dominio.

3.2. Dominio

El dominio de las funciones de varias variables se estudia de la misma manera que el de funciones de una sola variable.

Se deben evitar los problemas, tales como ceros del denominador, raíces pares de números negativos, o logaritmos de números menores o iguales a cero. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.1. Determinar el dominio de la función

$$f(x, y) = \sqrt{x - y}.$$

Esta función está definida sólo para los valores de x y de y tales que

$$x - y \geq 0,$$

de lo contrario tomaríamos raíz de un número negativo. Entonces, despejando,

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x \geq y\}.$$

El dominio puede verse en la figura 7.8.

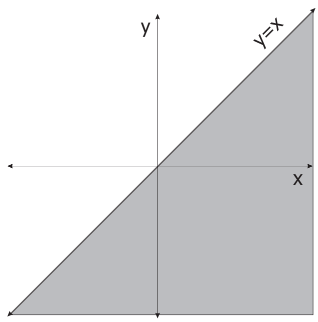


Figura 7.8: Ejemplo de dominio

Ejemplo 3.2.2. Determinar el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Esta función está definida para los valores de x y de y tales que el denominador sea distinto de cero, es decir

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0.$$

Para indicar el dominio, nos conviene escribirlo como

$$Dom(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \text{ tales que } x^2 + y^2 = 1\},$$

es decir, quitamos del plano aquellos puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$. Estos puntos corresponden a la circunferencia de radio $r = 1$ centrada en el origen.

Ejemplo 3.2.3. Determinar el dominio de la función

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

Esta función está definida sólo para los valores de x y de y tales que

$$x^2 + y^2 - 1 > 0,$$

de lo contrario tomaríamos logaritmo de un número negativo o de cero. Entonces, el dominio es la parte externa a la circunferencia de radio 1, y puede verse en la figura 7.9. Lo escribiremos como

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x^2 + y^2 > 1\}.$$

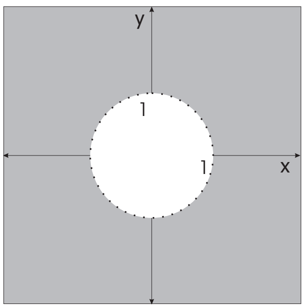


Figura 7.9: Ejemplo de dominio

Ejemplo 3.2.4. Hallar analítica y gráficamente el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{3}{ln(16 - x^2 - 4y^2)}.$$

En este ejemplo, a diferencia de los anteriores, tenemos que tener en cuenta que se presentan dos problemas de dominio.

- Sabiendo que el argumento de un logaritmo tiene que ser positivo, tenemos que graficar los puntos de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen:

  $$16 - x^2 - 4y^2 > 0.$$

  Recordando la sección de cónicas, podemos despejarlo como

  $$x^2 + 4y^2 < 16,$$

y finalmente
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}<1,$$
y tenemos una expresión más conocida. Si tuviesemos la ecuación
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,$$
el gráfico sería una elipse centrada en el origen con semiejes $a=4$ y $b=2$. Para darnos cuenta si el conjunto solución es el interior o el exterior de la elipse, una forma es elegir un punto cualquiera del plano y ver si cumple la inecuación. Por ejemplo, si elegimos el $(0,0)$,
$$\frac{0^2}{16}+\frac{0^2}{4}=0<1,$$
y entonces los puntos que verifican la inecuación son todos los puntos interiores de la elipse. Pasemos al segundo problema de dominio.

- Como tenemos una división tenemos que excluir del dominio los puntos que anulen el denominador, es decir:
$$ln(16-x^2-4y^2)\neq 0.$$
Componemos con la exponencial en ambos miembros, y tenemos que
$$e^{ln(16-x^2-4y^2)}\neq e^0,$$
sabiendo que una función compuesta con su inversa da el argumento y que $e^0=1$, resulta
$$16-x^2-4y^2\neq 1.$$
Haciendo pasajes de términos nos queda
$$x^2+4y^2\neq 15,$$
y dividiendo por 15 ambos miembros,
$$\frac{x^2}{15}+\frac{4y^2}{15}\neq 1.$$
La expresión anterior es equivalente a
$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{\frac{15}{4}}\neq 1,$$
y sabemos que los puntos que verifican la igualdad, es decir,
$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1,$$

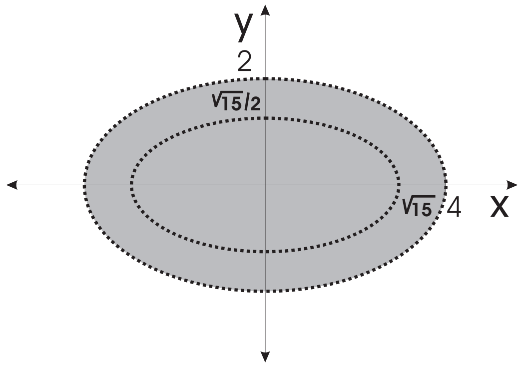


Figura 7.10: Ejemplo dominio

son los puntos de la elipse centrada en el origen y de semiejes

$$a = \sqrt{15}, \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Entonces, los puntos que cumplen la desigualdad son todos los puntos del plano, menos los de dicha elipse.

Luego, una forma de escribir análiticamente el dominio es la siguiente:

$$Dom(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} < 1, \text{ y } \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{\frac{15}{4}} \neq 1\right\}.$$

Representamos gráficamente los puntos del plano que cumplen simultáneamente la inecuación y la desigualdad en la figura 7.10

Ejercicio 3.2.5. *Determinar analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x,y) = 2x - y^2$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-3y}$ *c)* $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

d) $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$ *e)* $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ *g)* $f(x,y) = \dfrac{1}{ln(x^2+y^2-1)}$

f) $f(x,y) = \dfrac{ln(2x-y)}{x^2+y^2-4}$

4. Representación gráfica de funciones

Graficar funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es complicado, porque necesitamos una tercera dimensión para representar los valores que toma. Un gráfico de esta clase debe hacerse en perspectiva (sólo tenemos dos dimensiones en el papel para dibujar), y no suele ser sencillo.

Para hacernos una idea del gráfico de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ disponemos de dos métodos. El primero, consiste en graficar las curvas de intersección del gráfico de f con distintos planos; hacemos cortes de la imagen de la función que nos dan una idea de su gráfico. El segundo, es graficar en el plano aquellos conjuntos donde la función toma un mismo valor; estos conjuntos se llaman las *curvas de nivel* de f. Hay una relación entre ambos, ya que las curvas de nivel son las proyecciones sobre el plano xy de las intersecciones del gráfico con planos de la forma $z = c$.

4.1. Intersección con planos

Para estudiar el gráfico de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ necesitamos trabajar en $\mathbb{R}^3$. Llamamos a las coordenadas de un punto (x, y, z), y nos interesa graficar el valor de z que corresponde a cada par (x, y).

Podemos identificar los puntos en el eje x con aquellos puntos del espacio de coordenadas $(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$. De la misma forma, el eje y son aquellos puntos del espacio de coordenadas $(0, y, 0)$, y el eje z los puntos de coordenadas $(0, 0, z)$.

Los ejes coordenados definen tres planos:

- el plano xy, que corresponde a los puntos de la forma $(x, y, 0)$. Su ecuación es $z = 0$, y se obtienen planos paralelos para cada constante $k \in \mathbb{R}$ haciendo (x, y, k), es decir, el plano de ecuación $z = k$.

- el plano yz, que corresponde a los puntos de la forma $(0, y, z)$. Su ecuación es $x = 0$, y se obtienen planos paralelos para cada constante $k \in \mathbb{R}$ haciendo (k, y, z), es decir, el plano de ecuación $x = k$.

- el plano xz, que corresponde a los puntos de la forma $(x, 0, z)$. Su ecuación es $y = 0$, y se obtienen planos paralelos para cada constante $k \in \mathbb{R}$ haciendo (x, k, z), es decir, el plano de ecuación $y = k$.

4.2. Curvas de nivel

Definición 4.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$. Llamamos curva de nivel c al conjunto C_c de $\mathbb{R}^2$:*

$$C_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}.$$

Informalmente, las curvas de nivel se pueden representar con diferentes colores para dar una sensación de profundidad o de altura. Podemos mencionar dos ejemplos:

- Isotermas: en el pronóstico meteorológico se ven mapas con curvas que separan regiones de diferentes colores, estas curvas son las superficies de nivel de la temperatura y se las llama isotermas.

- Mapas orográficos (o físicos): la altura de un territorio se indica con distintos colores, y a regiones de igual color, les corresponde la misma altura.

Observación 4.2.2. *Para funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ podemos dar una definición similar, aunque ahora se llamarán superficies de nivel.*

Ejemplo 4.2.3. Determinar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = y - 2x^2$.

Para cada valor de c, buscamos el conjunto C_c de puntos (x, y) tales que $f(x, y) = c$. Desde ya, es imposible analizar todos y cada uno de los valores de c, pero podemos elegir algunos y analizar qué aspecto tiene C_c para esos valores.

- Si $c = 0$, hacemos $y - 2x^2 = 0$, y despejando nos queda $y = 2x^2$, una parábola.
- Si $c = 1$, hacemos $y - 2x^2 = 1$, y despejando nos queda $y = 2x^2 + 1$, la misma parábola corrida hacia arriba una unidad.
- Si $c = -1$, hacemos $y - 2x^2 = -1$, y despejando nos queda $y = 2x^2 - 1$, la misma parábola pero corrida hacia abajo una unidad.

Podemos ver que, en general, la curva de nivel C_c es una parábola de ecuación $y = 2x^2 + c$.

Ejemplo 4.2.4. Determinar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = xy$.

Igual que en el ejemplo anterior, damos valores a c y vemos qué puntos (x, y) cumplen $f(x, y) = c$.

- Si $c = 0$, tenemos $yx = 0$, y despejando nos queda $y = 0$, ó $x = 0$, los ejes coordenados.
- Si $c = 1$, tenemos $yx = 1$, y despejando nos queda $y = \frac{1}{x}$, la ecuación de una hipérbola.
- Si $c = 2$, tenemos $yx = 2$, y despejando nos queda $y = \frac{2}{x}$, la ecuación de una hipérbola (ubicada por encima de la anterior).
- Si $c = -1$, tenemos $yx = -1$, y despejando nos queda $y = -\frac{1}{x}$, también una hipérbola.

Podemos ver que, en general, la curva de nivel C_c es una hipérbola de ecuación $y = \frac{c}{x}$, con la excepción del valor $c = 0$, donde C_0 son los ejes coordenados. Conviene graficar algunas curvas, y ver qué ocurre para valores pequeños de c.

4.3. Ejemplos de gráficos

Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones y de superficies. Además de buscar la intersección del gráfico con planos, buscaremos la intersección del gráfico con los ejes (esto no nos da tanta información como la intersección con planos, pero puede ser de alguna utilidad).

Ejemplo 4.3.1. Graficar la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Busquemos las intersecciones con los ejes y con planos paralelos a los planos coordenados.

- Eje x. Para hallar la intersección del gráfico con el eje x, tenemos que igualar las otras variables a cero; reemplazando $y = z = 0$ en la ecuación obtenemos

  $$0 = x^2 + 0^2, \qquad \text{con lo cual} \qquad x^2 = 0,$$

  que se cumple sólo cuando $x = 0$.

- Eje y. Para hallar la intersección del gráfico con el eje y, tenemos que igualar las otras variables a cero; reemplazando $x = z = 0$ en la ecuación obtenemos

  $$0 = 0^2 + y^2, \qquad \text{con lo cual} \qquad y^2 = 0,$$

  que se cumple sólo cuando $y = 0$.

- Eje z. Para hallar la intersección del gráfico con el eje z, tenemos que igualar las otras variables a cero; reemplazando $x = y = 0$ en la ecuación obtenemos

  $$0^2 + 0^2 = z,$$

  con lo cual $z = 0$.

Entonces podemos ver que la superficie corta a los tres ejes en el origen de coordenadas. Vamos a trazar algunas curvas de nivel para obtener más información.

Comencemos intersecando a la superficie con planos horizontales, es decir, $z = k$:

- $z = 0$: $0 = x^2 + y^2$, y el único punto que verifica la ecuación es el origen $(0, 0)$.
- $z = 1$: $1 = x^2 + y^2$, esta ecuación representa una circunferencia centrada en el origen de radio 1.
- $z = 4$: $4 = x^2 + y^2$, ahora tenemos una circunferencia también centrada en el origen pero de radio 2.
- $z = -1$: $-1 = x^2 + y^2$, ningún punto de $\mathbb{R}^2$ verifica esta ecuación, el gráfico no corta al plano $z = -1$.

En general, dado $z = k$, tenemos la ecuación

$$k = x^2 + y^2.$$

Si $k > 0$ representa una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{k}$, y vemos que a medida que aumentamos el valor de k, el radio de la circunferencia va aumentando. Si $k = 0$ vimos que la única solución es el $(0, 0)$, y si $k < 0$ no hay solución.

Vamos a hallar las intersecciones de las mismas con planos paralelos al plano coordenado xz (de ecuación $y = k$) y al plano coordenado yz ($x = k$). Veamos algunos ejemplos y luego generalizaremos:

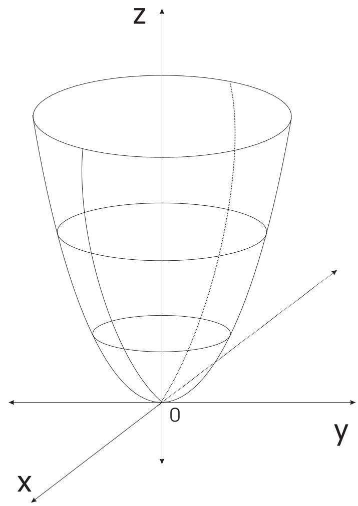


Figura 7.11: Ejemplo paraboloide

- $x = 0$: $z = 0^2 + y^2$, y la ecuación representa una parábola. Cuando tengamos que graficarla tenemos que tener en cuenta que la misma está situada en el plano yz.
- $x = 1$: $z = 1 + y^2$, esta ecuación también representa una parábola.
- $x = -1$: $z = 1 + y^2$, que también representa una parábola (simétrica a la obtenida para $x = 1$).

En general, cuando $x = k$, tenemos $z = k^2 + y^2$, que representa una parábola.

Análogamente, si ahora hallamos las intersecciones con planos paralelos al plano xz tenemos que, cuando $y = k$, $z = x^2 + k^2$, y también para cada valor de k obtenemos una parábola.

Con esto en mente, estamos en condiciones de graficar la superficie, ver la figura 7.11.

Observación 4.3.2. *En ocasiones, hay superficies en $\mathbb{R}^3$ que no son el gráfico de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El ejemplo más sencillo que nos viene a la mente es una esfera (en el plano, un círculo tampoco es el gráfico de ninguna función de una variable).*

Veamos tres ejemplos importantes, comenzando por la esfera, seguida de un elipsoide y luego un cilindro.

Ejemplo 4.3.3. Graficar la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Igual que en el ejemplo anterior comencemos por obtener las intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.

- Eje x. Igualamos las otras variables a cero; y reemplazando $y = z = 0$ en la ecuación obtenemos
$$x^2 + 0^2 + 0^2 = 4, \quad \text{con lo cual} \quad x^2 = 4,$$
y la superficie corta al eje x en los puntos $x = 2$ y $x = -2$.

- Eje y. Igualamos las otras variables a cero; y reemplazando $x = z = 0$ en la ecuación obtenemos
$$0^2 + y^2 + 0^2 = 4, \quad \text{con lo cual} \quad y^2 = 4,$$
y la superficie corta al eje y en los puntos $y = 2$ y $y = -2$.

- Eje z. Igualamos las otras variables a cero; y reemplazando $x = y = 0$ en la ecuación obtenemos
$$0^2 + 0^2 + z^2 = 4, \quad \text{con lo cual} \quad z^2 = 4,$$
y la superficie corta al eje z en los puntos $z = 2$ y $z = -2$.

Encontremos ahora algunas intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano coordenado xy, es decir, con $z = k$.

- $z = 0$: tenemos $x^2 + y^2 = 4$. La curva es una circunferencia centrada en el origen de radio 2.
- $z = 1$: tenemos $x^2 + y^2 = 3$. La curva es una circunferencia centrada en $(0, 0, 1)$ y de radio $\sqrt{3}$. Si $z = -1$, tenemos también $x^2 + y^2 = 3$ y es una circunferencia centrada en $(0, 0, -1)$ de radio $\sqrt{3}$.
- $z = 2$: tenemos $x^2 + y^2 = 0$. La curva es un único punto de coordenadas $(0, 0, 2)$. Si $z = -2$, es el punto $(0, 0, -2)$.
- $z = 3$: tenemos $x^2 + y^2 = -5$, ningún punto de $\mathbb{R}^2$ verifica esta ecuación, el gráfico no corta al plano $z = 3$.

En general, dado $z = k$, tenemos la ecuación
$$x^2 + y^2 = 4 - k^2.$$
La ecuación representa una circunferencia de centro $(0, 0, k)$ y de radio $\sqrt{4 - k^2}$. Luego, el radio está definido si:
$$4 - k^2 > 0, \quad \text{es decir,} \quad -2 < k < 2.$$
Una observación que podemos hacer es que si $k = -2$, o si $k = 2$, el radio es cero, y las intersecciones se reducen a puntos. Por último, la intersección entre la superficie y planos $z = k$ con $k < -2$ o $k > 2$ es vacía.

De la misma forma vamos a hallar las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano coordenado yz, es decir, planos de ecuación $x = k$.

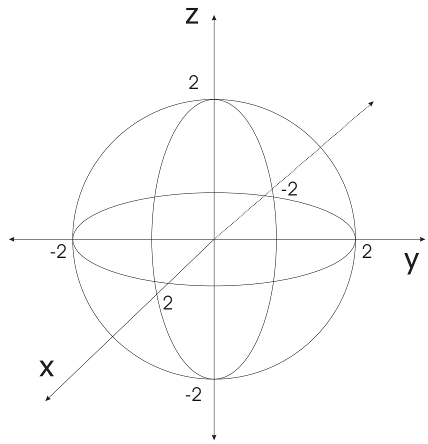


Figura 7.12: Ejemplo esfera

- $x = 0$: tenemos $y^2 + z^2 = 4$. La curva es una circunferencia centrada en el origen de radio 2.
- $x = 1$: tenemos $y^2 + z^2 = 3$. La curva es una circunferencia centrada en $(1, 0, 0)$ y de radio $\sqrt{3}$. Si $x = -1$, tenemos también $y^2 + z^2 = 3$ y es una circunferencia centrada en $(-1, 0, 0)$ de radio $\sqrt{3}$.
- $x = 2$: tenemos $y^2 + z^2 = 0$. La curva es un único punto de coordenadas $(2, 0, 0)$. Si $x = -2$, es el punto $(-2, 0, 0)$.

Entonces, si $-2 < k < 2$ las curvas de nivel son circunferencias de radio $\sqrt{4 - k^2}$. Si $k = -2$ o $k = 2$ las intersecciones son los puntos $(-2, 0, 0)$ y $(2, 0, 0)$ respectivamente. Al igual que las curvas anteriores, si $k < -2$ o $k > 2$ la intersección es vacía.

No vamos a repetir el razonamiento para los planos paralelos al plano xz, cuando $y = k$, pero también se obtienen circunferencias centradas de radio $\sqrt{4 - k^2}$.

Juntando toda la información obtenida, tenemos el gráfico de la figura 7.12.

Ejemplo 4.3.4. Graficar la superficie de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Igual que en el ejemplo anterior comencemos por obtener las intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.

- Eje x: reemplazando $y = z = 0$ en la ecuación obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{0^2}{25} + \frac{0^2}{4} = 1, \qquad \text{con lo cual} \qquad \frac{x^2}{9} = 1,$$

  y la superficie corta al eje x en los puntos $x = 3$ y $x = -3$.

- Eje y: reemplazando $x = z = 0$ en la ecuación obtenemos

$$\frac{0^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{0^2}{4} = 1, \qquad \text{con lo cual} \qquad \frac{y^2}{25} = 1,$$

  y la superficie corta al eje y en los puntos $y = 5$ y $y = -5$.

- Eje z: reemplazando $x = y = 0$ en la ecuación obtenemos

$$\frac{0^2}{9} + \frac{0^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1, \qquad \text{con lo cual} \qquad \frac{z^2}{4} = 1,$$

  y la superficie corta al eje z en los puntos $z = 2$ y $z = -2$.

Encontremos ahora algunas intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano coordenado xy, es decir, con $z = k$.

- $z = 0$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{0^2}{4} = 1$, y tenemos la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

  cuyos semiejes son $a = 3$ y $b = 5$.

- $z = 1$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{1^2}{4} = 1$, y despejando tenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

  Para transformarla en la ecuación de una elipse multiplicamos ambos miembros por $\frac{4}{3}$, y nos queda

$$\frac{4}{3}\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}.$$

  Distribuimos, y queda

$$\frac{4x^2}{27} + \frac{4y^2}{75} = 1,$$

  y para encontrar los semiejes reescribirmos la expresión como

$$\frac{x^2}{\frac{27}{4}} + \frac{y^2}{\frac{75}{4}} = 1.$$

  Ahora sí llegamos a la expresión de una elipse cuyos semiejes son:

$$a = \frac{\sqrt{27}}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{75}}{2},$$

  y racionalizando tenemos que:

$$a = \frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad b = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

  Es importante notar para realizar luego el gráfico que los semiejes son menores que los de la elipse anterior.

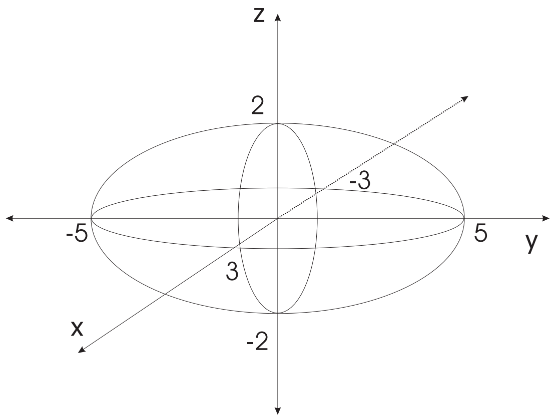


Figura 7.13: Ejemplo de elipsoide

- $z = 2$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{2^2}{4} = 1$, y despejando tenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 0,$$

cuya única solución es el $(0, 0)$. Esto quiere decir que la intersección de la superficie con el plano $z = 2$ es únicamente el punto $(0, 0, 2)$.

- $z = 3$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{3^2}{4} = 1$, y despejando tenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = -\frac{5}{4},$$

ningún punto de $\mathbb{R}^2$ verifica esta ecuación, con lo cual la intersección entre la superficie y el plano $z = 3$ es vacía.

(Verificar que si $z = -1$, $z = -2$, ó $z = -3$ se obtienen los mismos resultados).
En definitiva, para cualquier valor $z = k$ se tiene

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{k^2}{4} = 1,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 - \frac{k^2}{4},$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = \frac{4 - k^2}{4}.$$

Esta ecuación no tiene soluciones si $4 - k^2 < 0$, es decir, si $k^2 > 4$.

Si $k^2 < 4$, podemos llevar esta expresión a la fórmula de la elipse, y nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{4}{4-k^2}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\right) &= \frac{4-k^2}{4}\cdot\frac{4}{4-k^2} \\
\frac{4x^2}{9(4-k^2)}+\frac{4y^2}{25(4-k^2)} &= 1 \\
\frac{x^2}{\frac{9(4-k^2)}{4}}+\frac{y^2}{\frac{25(4-k^2)}{4}} &= 1.
\end{aligned}$$

Entonces, los semiejes son:

$$a = \frac{3}{2}\sqrt{4-k^2} \qquad b = \frac{5}{2}\sqrt{4-k^2}.$$

Si $k = -2$ o si $k = 2$ el argumento de la raíz se anula, y la intersección se reduce a un punto.

Siguiendo el mismo razonamiento, dejamos a cargo del lector la tarea de hallar las intersecciones de la superficie con planos de ecuaciones $x = k$ e $y = k$.

El gráfico que se obtiene puede verse en la figura 7.13.

Observación 4.3.5. *En el próximo ejemplo estudiaremos la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.*

En este ejemplo es importante darse cuenta que estamos trabajando en el espacio $\mathbb{R}^3$, ya que la misma ecuación en $\mathbb{R}^2$ representa una circunferencia. En el espacio, esta ecuación representa un cilindro.

Ejemplo 4.3.6. Graficar la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Como antes, hallemos las intersecciones de la superficie con los ejes coordenados.

- Eje x: reemplazando $y = 0$ en la ecuación queda $x^2 = 4$, con lo cual la superficie corta al eje x en los puntos $x = 2$ y $x = -2$.
- Eje y: reemplazando $x = 0$ en la ecuación queda $y^2 = 4$, con lo cual la superficie corta al eje y en los puntos $y = 2$ y $y = -2$.
- Eje z: reemplazando $x = y = 0$ en la ecuación obtenemos $0^2 + 0^2 = 4$, que es un absurdo. Esto significa que no interseca al eje z.

Estudiemos ahora las curvas de nivel $z = k$. Al reemplazar, como la ecuación no depende de z, tenemos

$$z = k, \qquad x^2 + y^2 = 4,$$

es decir, la intersección es siempre una circunferencia de radio 2. A diferencia de los ejemplos anteriores, no tenemos restricciones sobre k, y es siempre la misma curva.

Veamos los cortes con planos paralelos al plano yz. Estos tienen la ecuación $x = k$, y es importante recordar que no tenemos restricciones sobre la variable z.

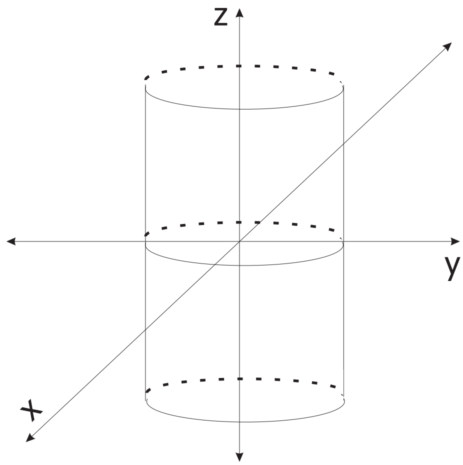


Figura 7.14: Ejemplo cilindro

- $x = 0$: tenemos $0^2 + y^2 = 4$, y queda $y^2 = 4$, los puntos del espacio que cumplen esta condición son $(0, 2, z)$ y $(0, -2, z)$, dos rectas verticales paralelas al eje z.
- $x = 1$: tenemos $1^2 + y^2 = 4$, y queda $y^2 = 3$, los puntos del espacio que cumplen esta condición son $(1, \sqrt{3}, z)$ y $(1, -\sqrt{3}, z)$, dos rectas verticales paralelas al eje z.
- $x = 2$: tenemos $2^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 0$, los puntos del espacio que cumplen esta condición son $(2, 0, z)$ y $(2, 0, z)$, dos rectas verticales paralelas al eje z.
- $x = 3$: tenemos $3^2 + y^2 = 4$, $y^2 = -5$, no hay puntos del espacio que cumplen esta condición.

En general,

$$x = k, \quad \text{queda} \quad k^2 + y^2 = 4,$$

y la condición $y^2 = 4 - k^2$ se cumple cuando $-2 \leq k \leq 2$. Para estos valores, se tienen las rectas paralelas al eje z

$$(k, \sqrt{4 - k^2}, z), \qquad (k, \sqrt{4 - k^2}, z).$$

De la misma manera se obtienen las intersecciones de la superficie con planos e ecuación $y = k$, y se tienen también rectas paralelas al eje z. Con toda esta información tenemos el gráfico de la figura 7.14.

Ejercicio 4.3.7. *Trazar algunas de las curvas de nivel y describir el gráfico de f para las siguientes funciones:*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$	*b)* $f(x,y) = x^2 + 4y^2$
c) $f(x,y) = 9x^2 + 16y^2$	*d)* $f(x,y) = 3x - 2y$
e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	*f)* $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$
g) $f(x,y) = xy$	*h)* $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Observación 4.3.8. *Si bien podemos graficar -con dificultad- funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, no lo haremos con funciones de más variables. Dada una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nos limitaremos a calcular sus superficies de nivel, igualando $f(x,y,z) = c$ para distintos valores de c.*

Ejercicio 4.3.9. *Describir las superficies de nivel de las siguientes funciones:*

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$	*b)* $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$	*d)* $f(x,y,z) = z$

5. Aplicaciones económicas

Veamos algunas aplicaciones económicas del concepto de dominio y de curva de nivel.

5.1. El dominio de las funciones económicas

Además de las restricciones matemáticas, las funciones económicas poseen restricciones de tipo económico que reducen su dominio. Claramente, las cantidades producidas, los precios, la demanda, y la producción tienen que ser no negativas (vamos a considerar que pueden tomar el valor 0).

Ejemplo 5.1.1. Hallar el dominio de la función de demanda $D_1(p_1, p_2) = 4 - p_1 - 2p_2$.

Si el ejercicio fuese exclusivamente matemático, la función no tendría problemas de dominio; pero como es económico tenemos que considerar $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, y además la cantidad demandada debe ser positiva, $D_1 \geq 0$. Entonces,

$$4 - p_1 - 2p_2 \geq 0 \quad \text{si} \quad 4 - p_1 \geq 2p_2,$$

es decir,

$$p_2 \leq 2 - \frac{1}{2}p_1.$$

Luego,

$$Dom(D) = \left\{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad p_2 \leq 2 - \frac{1}{2}p_1 \right\}.$$

El gráfico de este ejemplo es un triángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,2)$, como puede verse en la figura 7.15

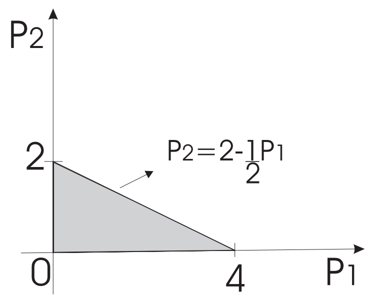


Figura 7.15: Ejemplo 5.1.1

Ejemplo 5.1.2. Dada la función de producción

$$P(x_1, x_2) = \frac{x_1\, x_2}{4 - x_1^2 - x_2^2},$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades de dos insumos X_1 y X_2 respectivamente, hallar el dominio de P.

Si fuese un problema matemático tendríamos que pedir

$$4 - {x_1}^2 - {x_2}^2 \neq 0,$$

pero como es económico tenemos además las siguientes restricciones:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{y} \quad P \geq 0.$$

Entonces, observemos que el numerador es positivo (ya que x_1 y x_2 lo son), y por lo tanto debe ser también

$$4 - {x_1}^2 - {x_2}^2 > 0.$$

Luego,

$$Dom(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_1^2 + x_2^2 < 4\},$$

y el gráfico está dado por la figura 7.16.

Ejercicio 5.1.3. *Dados dos bienes X_1 y X_2, hallar el dominio analítica y gráficamente de las siguientes funciones de demanda y costo*

1. $D_1(p_1, p_2) = 3p_1 - 2p_2$
2. $C(p_1, p_2) = \dfrac{\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 - 9}}{p_1 + 2p_2}$
3. $D_2(p_1, p_2) = 4p_1 + 3p_2$

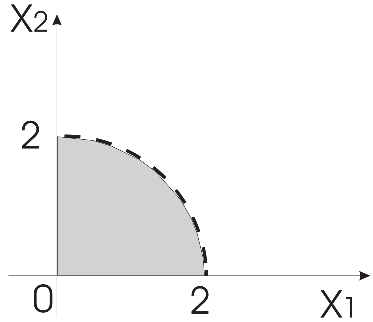


Figura 7.16: Ejemplo de dominio 5.1.2

5.2. Curvas de nivel

Las curvas de nivel aparecen en distintos problemas económicos. Veamos los principales tipos a continuación.

1. **Curvas de indiferencia**

   Las curvas de indiferencia son las curvas de nivel de la función utilidad. Es decir, son las intersecciones entre la función utilidad y planos $U = k$, donde U es la función de utilidad de un consumidor y k es una constante.

   Si llamamos X_1 y X_2 a dos bienes, y x_1 y x_2 a las cantidades consumidas respectivamente, sea $U = f(x_1, x_2)$ la función de utilidad de un consumidor. Si $U = k$, la curva de indiferencia es $k = f(x_1, x_2)$. Económicamente significa que cualquier combinación de x_1 y x_2 le representará al consumidor ese nivel de satisfacción k, o sea, en esa curva la utilidad se mantiene constante.

   Ejemplo 5.2.1. Sea $U = x_1 x_2$, trazar algunas curvas de nivel.

   Se puede ver el gráfico en la figura 7.17. Por ejemplo, si $U = 1$, la curva de indiferencia es $1 = x_1 x_2$, es decir, la hipérbola

   $$x_2 = \frac{1}{x_1}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0.$$

   Si $U = 2$, la curva de indiferencia es $2 = x_1 x_2$, es decir,

   $$x_2 = \frac{2}{x_1}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0.$$

   Si $U = k_i$ la curva de indiferencia es $k_i = x_1 x_2$,

   $$x_2 = \frac{k_i}{x_1}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq 0.$$

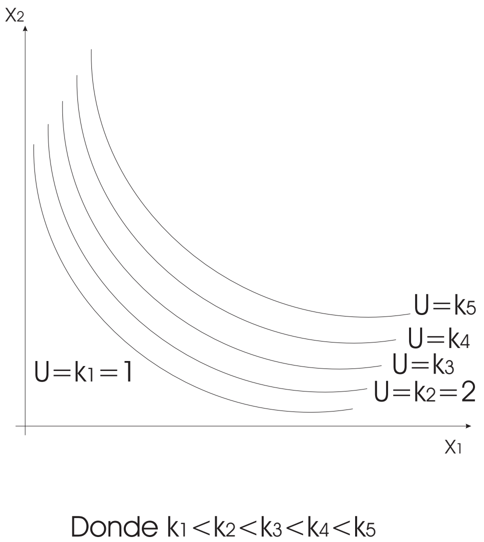


Figura 7.17: curvas de nivel de $U = x_1 x_2$

Una función de utilidad se dice una función de utilidad **normal** si cumple con las siguientes características:

a) Las curvas de indiferencia son decrecientes (derivada negativa). Económicamente significa que si aumento el consumo de un bien, tengo que disminuir el consumo del otro para mantener la utilidad constante.

b) El nivel de la función de utilidad aumenta en dirección noreste (de abajo hacia arriba, y de izquierda a derecha) ya que se obtiene una mayor utilidad cuando aumentan las cantidades consumidas de los bienes (suponiendo que no hay saciedad en el consumidor).

c) Las curvas de indiferencia no se intersecan. Si se cortaran existiría una combinación de cantidades de X_1 y X_2 que corresponderían a dos niveles de satisfacción y esto no puede ocurrir en la teoría del consumidor.

d) Las curvas de indiferencia son convexas respecto al origen de coordenadas.

2. **Curvas isocuantas**

   Se denomina isocuantas a las curvas de nivel de la función de producción, es decir que sobre una isocuanta se mantiene constante la producción total.

3. **Curvas de isocosto**

   Se denomina curvas de isocosto a las curvas de nivel de la función costo. Supongamos que un empresario distribuye sus compras entre dos bienes X_1 y X_2, donde los precios unitarios son constantes. Entonces su función costo será:

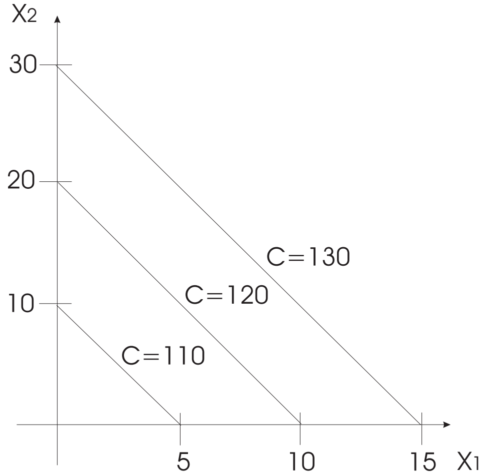


Figura 7.18: curvas de isocosto de $C = 2x_1 + x_2 + 100$

$CT = CV + CF$, con $CV = p_1x_1 + p_2x_2$, siendo x_1 y x_2 las cantidades de los bienes X_1 y X_2 respectivamente.

Los pares (x_1, x_2) que pertenezcan a la misma curva de isocosto representan las combinaciones en las cantidades de cada insumo entre las cuales el empresario puede optar. Bajo estas condiciones, se puede ver fácilmente que las curvas de isocosto son funciones lineales.

Ejemplo 5.2.2. Los precios unitarios de los bienes X_1 y X_2 son $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$ respectivamente, el costo fijo de la empresa es \$100, hallar y graficar algunas curvas de isocosto de la empresa.

Utilizando los datos dados se tiene que la función costo total es $C = 2x_1 + x_2 + 100$. Para hallar algunas curvas de isocosto hay que trazar las curvas de nivel de la función costo. Vamos a elegir $C = 110$, $C = 120$ y $C = 130$. Entonces,

$$110 = 2x_1 + x_2 + 100, \quad \text{queda} \quad x_2 = -2x_1 + 10.$$

$$120 = 2x_1 + x_2 + 100, \quad \text{queda} \quad x_2 = -2x_1 + 20.$$

$$130 = 2x_1 + x_2 + 100, \quad \text{queda} \quad x_2 = -2x_1 + 30.$$

En la figura 7.18 podemos ver que las curvas de isocosto son todas rectas paralelas y a medida que nos alejamos del origen, mayor es el costo que representan.

Observación 5.2.3. *Podemos ver que como es un problema económico las curvas de nivel se pueden tomar para $C > 100$, en caso contrario las rectas quedan fuera del primer cuadrante.*

4. **Curvas de isoingreso**

   Las curvas de isoingreso son las curvas de nivel de la función ingreso. Recordando la función de ingreso $I(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$ donde x_1 y x_2 son las cantidades vendidas de los bienes X_1 y X_2 respectivamente, también se puede ver fácilmente que las curvas de isoingreso son funciones lineales.

   Ejemplo 5.2.4. Una empresa fabrica dos tipos de bienes, y el ingreso que obtiene por vender x_1 unidades del primero y x_2 del segundo es

$$I(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_2}{4}.$$

   Determinar las curvas de nivel de I.

   En este ejemplo, si tomamos $c = 0$ tenemos

$$0 = x_1 + \frac{x_2}{4}$$

   y la curva de nivel 0 es vacía, ya que para que la suma nos de cero, una de las cantidades debería ser negativa.

   Si $c = 1$, tenemos

$$1 = x_1 + \frac{x_2}{4},$$

   y es el segmento de recta $x_2 = 4 - 4x_1$. Observemos que sólo los puntos del primer cuadrante tienen sentido, es decir, aquellos donde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

   De la misma forma se analizan otros valores. Para un c arbitrario, si es negativo la curva de nivel será vacía, y si es positivo será un segmento de recta en el primer cuadrante.

5.3. Recta presupuestaria

Un caso importante, por sus aplicaciones económicas, es la recta presupuestaria. En la vida cotidiana, los consumidores tienen restricciones, una de ellas es su ingreso. Supongamos que quiere consumir sólo dos bienes cuyos precios son p_1 y p_2 respectivamente. Entonces la ecuación de la recta presupuestaria es $I = p_1x_1 + p_2x_2$ donde el ingreso está fijo. Entonces para un ingreso k, la recta presupuestaria es $k = p_1x_1 + p_2x_2$

Observación 5.3.1. *Veamos una aplicación de las curvas de nivel y la recta presupuestaria. Resolveremos el siguiente problema utilizando herramientas de análisis de una variable, y en el capítulo 9 veremos un método más general, cuando estudiemos problemas económicos de optimización.*

Ejemplo 5.3.2. Sea $U = 3x_1x_2$ la función de utilidad de un consumidor, donde x_1 y x_2 son las cantidades consumidas de X_1 y X_2, con $p_1 = 5$ y $p_2 = 6$ respectivamente. Hallar la máxima utilidad si el consumidor tiene un ingreso de 600.

Como el ingreso es de 600, la recta presupuestaria es $600 = 5x_1 + 6x_2$. Luego, despejando x_2 se tiene

$$x_2 = 100 - \frac{5}{6}x_1.$$

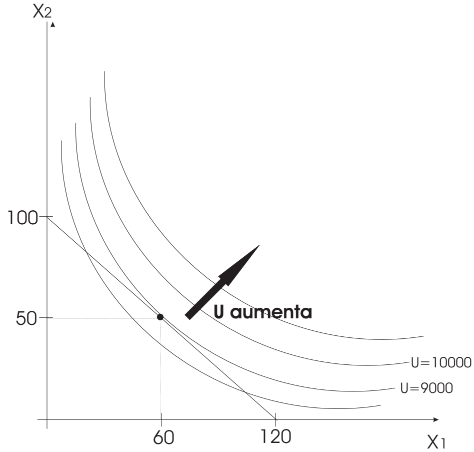


Figura 7.19: El punto crítico es máximo

Encontramos una relación entre x_2 y x_1, y podemos reemplazarla en la función de utilidad. Nos queda

$$U = 3x_1\left(100 - \frac{5}{6}x_1\right) = 300x_1 - \frac{5}{2}{x_1}^2,$$

con lo cual nos quedó un problema de maximización en una variable. Tenemos que derivar y luego igualar a cero para hallar el punto crítico.

$$U' = 300 - 5x_1 = 0, \quad \text{es decir,} \quad x_1 = 60.$$

Reemplazando en la recta presupuestaria se obtiene que $x_2 = 50$ y la máxima utilidad sería $U(60, 50) = 9000$. Observemos que hemos obtenido un punto crítico, pero no sabemos si realmente ahí la utilidad es máxima, así que para confirmar que hallamos la máxima utilidad sobre la recta presupuestaria, trazamos algunas curvas de nivel. Como las curvas de nivel aumentan en dirección noreste, el punto hallado brinda la máxima utilidad, ver la figura 7.19.

Capítulo 8

Funciones de varias variables II

En este capítulo vamos a introducir la noción de *derivada parcial* y la de *diferenciabilidad*, generalizaciones de la noción de derivada y de ser derivable. Para esto, primero estudiaremos las nociones de límite y continuidad.

El cálculo diferencial en varias variables es importante en las aplicaciones, ya que nos permitirá obtener modelos físicos o económicos más reales. Por ejemplo, en una economía suele haber varios productos, y podemos considerar el precio de cada uno de ellos como una variable para definir la demanda de los distintos productos; cualquier cambio en el precio de uno de los productos provocará cambios en las demandas de los otros (por lo general, si el precio de un bien sube, su demanda caerá, y los consumidores preferirán consumir un bien sustituto, lo cual aumentará la demanda del otro). Las aplicaciones de esta clase serán desarrolladas más adelante, cuando tengamos las herramientas necesarias para trabajar con funciones de varias variables.

1. Límite y continuidad

1.1. Límite

La noción de límite en funciones de dos variables es un poco más complicada que para las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

El primer problema es entender qué quiere decir que (x, y) *tiende a* (x_0, y_0) cuando (x, y) se acerca a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. En una variable, que x tendiera a x_0 quería decir que la distancia entre x y x_0 se acercaba a cero, en varias variables será lo mismo, diremos que (x, y) tiende a (x_0, y_0) si la distancia $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ se acerca a cero, pero hay que tener cuidado, porque hay muchos caminos posibles por donde acercarse a (x_0, y_0), a diferencia del caso de una variable donde x sólo podía acercarse por izquierda o por derecha.

Con esta advertencia en mente, pasemos a la definición de límite.

Definición 1.1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0) es L, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \textit{si} \quad 0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta.$$

Podemos interpretar geométricamente esta definición de la siguiente manera: una vez fijado un ε, existe un disco de radio δ centrado en (x_0,y_0) tal que la función toma valores en el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para todos los puntos (x,y) de este disco (excepto el centro, (x_0,y_0)). Ver figura 8.1

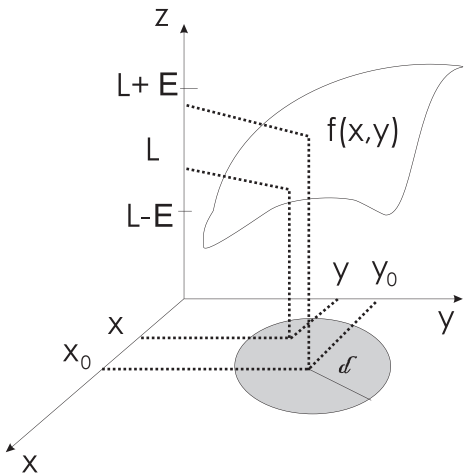


Figura 8.1: Interpretación geométrica del límite.

Ejemplo 1.1.2. Sea $f(x,y) = 2x + y$. Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = 1.$$

Para demostrarlo, fijado un ε, queremos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - 1| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < \|(x-1, y+1)\| < \delta.$$

Conviene operar primero con $|f(x,y) - 1|$ antes de introducir el ε, y hacer aparecer la expresión $\|(x-1,y+1)\|$, sin embargo para esto no hay recetas fijas para aplicar.

Planteamos

$$|f(x,y) - 1| = |2x + y - 1| = |2x - 2 + y + 1| \leq |2x - 2| + |y + 1|$$

donde en el último paso hemos utilizado la desigualdad triangular. Ahora, como

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|,$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|,$$

tenemos

$$|2x-2|+|y+1| = 2|x-1|+|y+1| \leq 2\|(x-1, y+1)\|+\|(x-1, y+1)\| = 3\|(x-1, y+1)\|$$

Ahora si, nos queda

$$|f(x, y) - 1| \leq 3\|(x - 1, y + 1)\| < \varepsilon,$$

y despejando,

$$\|(x - 1, y + 1)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

tomando $\delta = \varepsilon/3$, hemos demostrado que el límite de $f(x, y) = 1$, ya que si

$$\|(x - 1, y + 1)\| < \delta = \varepsilon/3,$$

resulta

$$|f(x, y) - 1| \leq 3\|(x - 1, y + 1)\| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Observación 1.1.3. *El cálculo de límites no es sencillo, si bien existen algunas propiedades que lo facilitan. No las vamos a demostrar aquí, pero las enunciamos porque se utilizarán en el resto del capítulo.*

Teorema 1.1.4. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y L_1, L_2 tales que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L_2,$$

entonces:

- *El límite de la suma es la suma de los límites:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) + g(x, y) = L_1 + L_2.$$

- *El límite de la resta es la resta de los límites:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) - g(x, y) = L_1 - L_2.$$

- *El límite de un producto es el producto de los límites:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = L_1 \cdot L_2.$$

- *El límite de un cociente es el cociente de los límites (si $L_2 \neq 0$):*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

El siguiente teorema será de gran utilidad, nos dice que una función no puede tener dos límites distintos en un mismo punto.

Teorema 1.1.5 (Unicidad del límite)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, tal que existe*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Entonces, el valor de este límite es único.

En otras palabras, no pueden existir L_1 y L_2 distintos tales que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_2.$$

La definición de límite es poco práctica, pero en general no tendremos otra opción para demostrar que cierto límite existe. Sin embargo, es más simple demostrar que algunos límites *no existen.* Observemos que los valores de $f(x, y)$ se deben acercar a los de $f(x_0, y_0)$ independiente de cómo se acerque (x, y) a (x_0, y_0), así que podemos mirar curvas especiales y ver qué ocurre:

- Si en alguna de estas curvas no existe el límite, entonces podemos asegurar que el límite no existe (la curva es una parte del conjunto donde debe cumplirse la condición).
- Si en dos curvas distintas el límite nos da diferente, tampoco existe el límite (porque el límite es único, debe dar lo mismo independiente de cómo nos acerquemos).

Supongamos que nos piden el límite en el punto $(x_0, y_0))$. Algunas curvas especiales sobre las cuales calcular el límite son las siguientes:

- Rectas paralelas al eje x: evaluamos la función en (x, y_0) y tomamos
$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0).$$
- Rectas paralelas al eje y: evaluamos la función en (x_0, y) y tomamos
$$\lim_{y\to y_0} f(x_0, y).$$
- Rectas que pasen por (x_0, y_0): estas rectas tienen la ecuación $y = m(x-x_0)+y_0$. Evaluamos la función en $(x, m(x - x_0) + y_0)$ y tomamos límite cuando $x \to x_0$,
$$\lim_{x\to x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0).$$
- Parábolas que pasen por (x_0, y_0) con vértice en dicho punto: estas parábolas tienen la ecuación $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. Evaluamos la función en $(x, a(x - x_0)^2 + y_0)$ y tomamos límite cuando $x \to x_0$,
$$\lim_{x\to x_0} f(x, a(x - x_0)^2 + y_0).$$

- Cúbicas, raíces, otras funciones...

Vamos a concentrarnos en un caso especial, cuando $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Los puntos anteriores se simplifican mucho, porque tenemos que considerar:

- El eje x: evaluamos la función en $(x, 0)$ y tomamos
$$\lim_{x\to 0} f(x, 0).$$
- El eje y: evaluamos la función en $(0, y)$ y tomamos
$$\lim_{y\to 0} f(0, y).$$
- Rectas que pasen por $(0, 0)$: estas rectas tienen la ecuación $y = mx$. Evaluamos la función en (x, mx) y tomamos límite cuando $x \to 0$,
$$\lim_{x\to 0} f(x, mx).$$
- Parábolas que pasen por $(0, 0)$ y tengan vértice en dicho punto: estas parábloas tienen la ecuación $y = ax^2$. Evaluamos la función en (x, ax^2) y tomamos límite cuando $x \to 0$,
$$\lim_{x\to 0} f(x, ax^2).$$
- Cúbicas, raíces, otras funciones: $y = x^3$, $y = \sqrt{y}$...

A estos límites los llamaremos L_1, L_2, L_r (por rectas, o radial), y L_p en el caso de parábolas.

Observación 1.1.6. *Al límite* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ *lo llamaremos el límite doble para diferenciarlo de los caminos que detallamos anteriormente.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1.7. Decidir si existe el límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{x^2}.$$

Si queremos calcular el límite sobre el eje x nos queda
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 0}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x},$$
y este límite da infinito, así que no existe el límite doble en este caso.

Ejemplo 1.1.8. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x+y}.$$

Si calculamos el límite sobre el eje x nos queda

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+0}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

y si calculamos el límite sobre el eje y nos queda

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0+y}{0+y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

Como ambos límites dan distinto, el límite doble no existe (recordemos que si el límite existe, es único, y debe dar lo mismo por cualquier camino que nos acerquemos).

Ejemplo 1.1.9. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Calculemos primero los límites sobre los ejes:

$$L_1) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$L_2) \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y\cdot 0}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

(al evaluar en $x=0$ en el primero, el numerador se anula, pero no el denominador ese cociente es siempre cero cuando $x\neq 0$ y, por lo tanto, el límite es cero; en el segundo ocurre algo similar).

Que ambos límites dieran igual, no quiere decir que exista el límite. Nos conviene probar por rectas para ver qué ocurre. Hacemos $y=mx$ con $m\in\mathbb{R}$, y calculamos L_r:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2},$$

ahora, sacando x^2 de factor común en el denominador, y cancelando, nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

y vemos que el límite depende de la recta considerada. Por ejemplo, si $m=1$, nos queda $1/2$; si $m=2$ nos queda $2/5$, etc. Luego, el límite doble no existe.

Ejemplo 1.1.10. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Calculemos primero los límites sobre los ejes:

$$L_1) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$L_2) \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y \cdot 0^2}{0^4 + y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Como dieron iguales, nos conviene probar por rectas. Hacemos $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$, y calculamos

$$L_r) \qquad \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}.$$

ahora, sacando x^2 de factor común en el denominador, y cancelando, nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(x^2 + m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0,$$

ya que el numerador tiende a cero y el denominador no, con lo cual no está indeterminado.

Probemos entonces por parábolas, reemplazando $y = ax^2$, y calculamos L_p.

$$\lim_{x\to 0} f(x,ax^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot ax^2}{x^4 + (ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4 + a^2x^4}.$$

ahora, sacando x^4 de factor común en el denominador, y cancelando, nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4 + a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4(1 + a^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1 + a^2} = \frac{a}{1 + a^2},$$

que da valores diferentes según el a elegido, por ejemplo, si $a = 1$, nos queda $1/2$; si $a = 2$ nos queda $2/5$, etc. Luego, el límite doble no existe.

Ejemplo 1.1.11. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{xy + 2}{(x-1)^2 + (y+2)^2}.$$

Observemos que esta expresión está indeterminada, ya que si evaluamos en $(1,-2)$ queda cero sobre cero.

Calculemos entonces los límites L_1 y L_2, que ahora no corresponden a límites sobre los ejes x e y, sino sobre rectas paralelas:

$$L_1) \qquad \lim_{x\to 1} f(x,-2) = \lim_{x\to 1} \frac{-2x + 2}{(x-1)^2 + 0^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x-1},$$

que no existe. Tampoco el otro,

$$L_2) \qquad \lim_{y\to -2} f(1,y) = \lim_{y\to -2} \frac{y + 2}{0^2 + (y+2)^2} = \lim_{y\to -2} \frac{y+2}{(y+2)^2} = \lim_{y\to -2} \frac{1}{y+2},$$

que tampoco existe.

Por lo tanto, no existe el límite de f en $(1,-2)$.

Ejemplo 1.1.12. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{(x+1)(y-3)}{(x+1)^2+(y-3)^2}.$$

Esta expresión está indeterminada, si evaluamos en $(-1,3)$ queda cero sobre cero.

Calculemos entonces los límites L_1 y L_2, que ahora no corresponden a límites sobre los ejes x e y, sino sobre rectas paralelas:

$$L_1) \qquad \lim_{x\to-1} f(x,3) = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(3-3)}{(x+1)^2+(3-3)^2} = \lim_{x\to-1} \frac{0}{(x+1)^2} = 0,$$

$$L_2) \qquad \lim_{y\to3} f(-1,y) = \lim_{y\to3} \frac{(-1+1)(y-3)}{(-1+1)^2+(y-3)^2} = \lim_{y\to3} \frac{0}{(y-3)^2} = 0,$$

pero sabemos que esto no es suficiente para garantizar que el límite exista.

Calculemos el límite por la recta

$$y = (x+1)+3.$$

$$L_r) \qquad \lim_{x\to-1} f(x,(x+1)+3) = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)((x+1)+3-3)}{(x+1)^2+((x+1)+3-3)^2}$$

ahora, esta expresión se puede simplificar, y nos queda

$$\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)^2+(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

con lo cual el límite nos da distinto de cero, que era lo que obtuvimos con L_1 y L_2, y por lo tanto no existe el límite de f en $(-1,3)$.

Puede ocurrir que cuando calculemos estos límites nos den todos el mismo valor. Lamentablemente, no podemos decir que el límite existe ni que ese sea el límite. En algunos casos particulares se puede proceder como en el Ejemplo 1.1.2. En otros se puede demostrar calcular el límite de otra manera, veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1.13. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

En este caso, si bien la expresión dentro del seno está indeterminada, podemos ver que $(x+y)^2$ tiende a cero y el seno está siempre acotado entre -1 y 1. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x+y)^2}_{tiende\,a\,cero} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)}_{acotado} = 0.$$

Ejercicio 1.1.14. *Comprobar que en el ejemplo anterior todos los límites L_1, L_2, L_r y L_p dan cero.*

Ejemplo 1.1.15. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Si calculamos el límite por los ejes, por rectas, parábolas, etc., siempre nos dará cero (¡verifíquelo!). Para ver que el límite es efectivamente cero, reescribimos la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = y\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Ahora, como $x^2 \leq x^2+y^2$, el cociente está acotado por 1, y la función y tiende a cero, así que tenemos otro caso de la forma cero por acotado:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Ejemplo 1.1.16. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y-y}{(x-1)(y^2-1)}.$$

Esta función no está definida en el punto $(1,0)$, y si evaluamos está indeterminada. Veamos que el límite es efectivamente cero, reescribiendo la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{x^2y-y}{(x-1)(y^2-1)} = \frac{(x^2-1)y}{(x-1)(y^2-1)} = \frac{(x-1)(x+1)y}{(x-1)(y^2-1)},$$

donde en el último paso hemos factorizado la diferencia de cuadrados.

Cuando $x \neq 1$, podemos simplificar la expresión y obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y-y}{(x-1)(y^2-1)} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+1)y}{y^2-1} = 0,$$

ya que esta última expresión no está indeterminada.

Ejemplo 1.1.17. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\,y}{(x-1)^4+y^2}.$$

Dejamos a cargo del lector verificar que $L_1 = L_2 = L_r = 0$ y vayamos directamente al límite parabólico.

$$L_p)\qquad \lim_{x\to1} f(x, a(x-1)^2) = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2\,a(x-1)^2}{(x-1)^4+\,a^2\,(x-1)^4}$$

Aplicando propiedades de potencias y sacando factor común, tenemos que

$$L_p = \lim_{x\to1} \frac{a(x-1)^4}{(x-1)^4(1+\,a^2)} = \lim_{x\to1} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

El límite parabólico depende de a, con lo cual no existe el límite doble.

Ejemplo 1.1.18. Decidir si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\, y^2}{y^8 + x^4}.$$

También dejamos a cargo del lector verificar que $L_1 = L_2 = L_r = L_p = 0$. En este ejemplo todos los caminos que solemos tomar no nos sirvieron. Por lo tanto vamos a elegir el camino $y = \sqrt{x}$, luego

$$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\,(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^8 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\, x}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto encontramos un camino en donde el límite no da cero, entonces no existe el límite doble.

Observación 1.1.19. *El ejemplo anterior nos sirve para tener en cuenta que por más que un límite de un mismo valor por varios caminos, no podemos afirmar la existencia del límite doble, ya que los caminos que podemos elegir son infinitos.*

Ejercicio 1.1.20. *Determinar si existen los siguientes límites dobles:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 4}{3 + xy}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(9x^2 - y^2)\,\mathrm{sen}(2y)}{y(3x - y)}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\mathrm{sen}(x + y)}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2xy + 5y^2}{3x^2 + 4y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y^2 - x^2)(x^2 - 3x + 2)}{(y - x)(2x - 2)}$

Ejercicio 1.1.21.

a) Dada la siguiente función: $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3y - 10}{xy + 3}$*, calcular* L_1*,* L_2 *y* L_r *en el punto* $P = (-1, 3)$*.*

b) Dada la siguiente función $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$*, calcular* L_1*,* L_2*,* L_r *y* L_p *en el punto* $P = (0, 0)$*.*

c) Dada la siguiente función $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^3}$*, calcular* L_1*,* L_2*,* L_r *y* L_p *en el punto* $P = (0, 0)$*. Probar también por el camino* $x = y^2$*.*

d) Para las funciones anteriores, ¿qué conclusión se puede obtener con respecto al límite doble en cada punto?

1.2. Continuidad

Una vez definido (y entendido) el límite de f en un punto, estudiar la continuidad es mucho más sencillo:

Definición 1.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en (x_0, y_0) si*

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Observemos que esta definición nos pide tres cosas:

- $(x_0, y_0) \in Dom(f)$.
- Existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.
- El límite anterior es igual al valor de la función en el punto.

En definitiva, verificar que una función sea continua en un punto consiste en evaluarla, tomar límite, y comparar los dos valores obtenidos.

Enunciemos también la definición de continuidad para un conjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en $D \subset \mathbb{R}^2$ si f es continua en cada punto $(x, y) \in D$.*

Observación 1.2.3. *El análisis de la continuidad es complicado, pero al igual que en límites tenemos algunas propiedades que lo facilitan. Las enunciaremos sin demostración.*

Teorema 1.2.4. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones continuas en (x_0, y_0). Entonces, las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ son continuas en (x_0, y_0). La función f/g es continua en (x_0, y_0) si $g(x_0, y_0) \neq 0$.*

Teorema 1.2.5. *Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en (x_0, y_0), y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $g(x_0, y_0)$. Entonces, la composición $f \circ g$ es continua en (x_0, y_0).*

Estas propiedades nos permiten demostrar la continuidad de muchas funciones, mencionemos algunas funciones que son continuas:

- Los polinomios en dos variables $P(x, y)$ (como $x^3y^2 + 4xy^3 - x^2 + -2$),
- La composición de senos, cosenos, raíces impares, y exponenciales con polinomios (tales como $\operatorname{sen}(x + y)$, e^{xy}),
- La composición de logaritmos y raíces pares con polinomios (donde la imagen del polinomio sea positiva).

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.2.6. Decidir si la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

es continua en $(1,2)$.

Esta función es un cociente de dos polinomios y el denominador no se anula en ese punto, luego, la función es continua en el punto $(1,2)$.

En los siguientes ejemplos analizaremos paso por paso las tres condiciones de continuidad.

Ejemplo 1.2.7. Decidir si la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

es continua en $(1,0)$.

Veamos si verifican las condiciones:

- El punto $(1,0)$ pertenece al dominio de f, así que se cumple el primer paso, y tenemos
$$f(1,0) = \frac{1^2 \cdot 0}{1^2 + 0^2} = 0.$$
- Existe el límite, y
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$
aunque no es necesario se puede reescribir la función como
$$f(x,y) = y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$
en donde podemos utilizar el criterio de cero por acotado.
- El límite coincide con el valor de la función en el punto.

Entonces, la función es continua en el punto $(1,0)$.

Ejemplo 1.2.8. Decidir si la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

es continua en $(0,0)$.

Esta función no es continua en $(0,0)$, ya que no cumple la primer condición: $(0,0)$ no pertenece al dominio de f.

Ejemplo 1.2.9. Decidir si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

Veamos si verifican las condiciones:

- El punto $(0,0)$ pertenece al dominio de f, así que se cumple el primer paso, y tenemos
$$f(0,0) = 1.$$
- Existe el límite (lo calculamos antes en el ejemplo 1.2.7) y
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$
- El límite no coincide con el valor de la función en el punto.

Como la tercera condición no se verifica, la función no es continua en $(0,0)$.

Observación 1.2.10. *Cuando la condición que falla es la tercera, siempre se puede redefinir la función en el punto para que sí sea continua. En el ejemplo anterior, redefiniéndola en* $(0,0)$ *para que* $f(0,0) = 0$*, sería continua.*

Ejemplo 1.2.11. Decidir si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

Veamos si se verifican las condiciones.

- El punto $(0,0)$ pertenece al dominio de f, así que se cumple el primer paso, y tenemos
$$f(0,0) = 0.$$
- No existe el límite (lo calculamos antes en el ejemplo 1.1.9).

Como no se cumple la segunda condición, la función no es continua en $(0,0)$.

Ejemplo 1.2.12. Decidir si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+(y-1)^2} & (x,y) \neq (-1,1) \\ \\ -6 & (x,y) = (-1,1) \end{cases}$$

es continua en (-1,1)

Veamos nuevamente si se verifican las condiciones.

- El punto $(-1,1)$ pertenece al dominio de f, así que se cumple el primer paso, y tenemos
$$f(-1,1) = -6.$$

- Para ver si existe el límite doble, calculamos primero L_1

$$L_1) \qquad \lim_{x\to -1} f(x,1) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(1-1)^2}{(x+1)^2+(1-1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{0}{(x+1)^2} = 0,$$

  Con lo cual, si existiese el límite doble sería 0, por lo tanto f no es continua porque $f(-1,1) = -6$. En este ejemplo pudimos determinar la discontinuidad de f y ¡ sin calcular el límite doble!

Ejercicio 1.2.13. *Analizar la continuidad de las siguientes funciones en el origen. En caso de no ser continua, si es posible redefinir f para que lo sea:*

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}(3x) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejercicio 1.2.14. *Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto* $(1,0)$*. En caso de no ser continua, si es posible redefinir f para que lo sea :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy-2y}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

2. Cálculo diferencial

A continuación veremos cómo extender las nociones de derivadas a funciones de dos o más variables. La mayor diferencia es que ahora no tendremos un único número, $f'(x_0)$ (o una única función, la derivada $f'(x)$) que nos diga cómo varía una función en el punto x_0. Por ejemplo, recordemos que una función con derivada positiva era creciente, o que la derivada se anulaba en los máximos o mínimos de una función. Con dos o más variables, no tendremos un único valor que nos de información similar.

2.1. Derivadas parciales

El primer concepto que vamos a introducir es el de derivada parcial:

Definición 2.1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se definen las* **derivadas parciales** *de f en (x_0, y_0) como el límite:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Observemos que esta definición es muy similar a la definición de derivada para funciones de una variable. En la definición de la derivada parcial con respecto a x se considera que y es la constante y_0, y sólo derivamos en la variable x. A la inversa, en la definición de la derivada parcial con respecto a y se considera que x es la constante x_0, y sólo derivamos en la variable y.

Observación 2.1.2. *Si las derivadas parciales existen para todo punto (x, y) de un conjunto $U \subset Dom(f)$, esto define dos nuevas funciones,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) : U \to \mathbb{R}.$$

Observación 2.1.3. *Por comodidad, muchas veces escribiremos f_x, f_y para las derivadas parciales:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y.$$

Para las derivadas parciales valen reglas similares a las que valen para las derivadas de funciones de una variable, las enunciamos aquí sin demostración porque nos facilitarán el cálculo de derivadas:

Proposición 2.1.4. *Sean $f(x, y), g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que existen las derivadas parciales f_x, f_y, g_x, g_y en el punto (x_0, y_0). Entonces, se tiene en (x_0, y_0):*

1. *Si $a \in \mathbb{R}$ es una constante, $(a \cdot f)_x = a \cdot f_x$, $(a \cdot f)_y = a \cdot f_y$.*

2. *Regla de la suma y de la resta:* $(f \pm g)_x = f_x \pm g_x$, $(f \pm g)_y = f_y \pm g_y$.

3. *Regla del producto:* $(f \cdot g)_x = f_x \cdot g + f \cdot g_x$, $(f \cdot g)_y = f_y \cdot g + f \cdot g_y$.

4. *Regla del cociente:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f_x \cdot g - f \cdot g_x}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{f_y \cdot g - f \cdot g_y}{g^2}.$$

5. *Regla de la cadena (composición con una función de una variable): Sea* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* $f(x_0, y_0)$,
$$(h \circ f)_x = h'(f) \cdot f_x, \qquad (h \circ f)_y = h'(f) \cdot f_y.$$

Ejemplo 2.1.5. Calcular las derivadas parciales de la función
$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1} - 2x.$$

Tenemos
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right)_x - (2x)_x \\ &= \frac{0 \cdot (x^2+y^2+1) - y \cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} - 2 \\ &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} - 2 \\ f_y(x,y) &= \left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right)_y - (2x)_y \\ &= \frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.6. Calcular las derivadas parciales de la función
$$f(x,y) = e^{x^2y+y} - 2xy^3.$$

Tenemos
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (e^{x^2y+y})_x - (2xy^3)_x \\ &= e^{x^2y+y} \cdot 2xy - 2y^3 \\ &= 2xye^{x^2y+y} - 2y^3 \\ f_y(x,y) &= (e^{x^2y+y})_y - (2xy^3)_y \\ &= e^{x^2y+y} \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 3y^2 \\ &= (x^2+1)e^{x^2y+y} - 6xy^2. \end{aligned}$$

Observación 2.1.7. *La definición de derivadas parciales para funciones* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *(o para funciones* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*) es completamente análoga.*

Ejemplo 2.1.8. Calcular las derivadas parciales de $f(x, y, z) = z\operatorname{sen}(x^3 + y)$.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= [z\operatorname{sen}(x^3+y)]_x \\
&= [z]_x \cdot \operatorname{sen}(x^3+y) + z \cdot [\operatorname{sen}(x^3+y)]_x \\
&= 0 + z\cos(x^3+y) \cdot 3x^2 \\
&= 3x^2 z\cos(x^3+y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y,z) &= [z\operatorname{sen}(x^3+y)]_y \\
&= [z]_y \cdot \operatorname{sen}(x^3+y) + z \cdot [\operatorname{sen}(x^3+y)]_y \\
&= 0 + z\cos(x^3+y) \cdot 1 \\
&= z\cos(x^3+y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_z(x,y,z) &= [z\operatorname{sen}(x^3+y)]_z \\
&= [z]_z \cdot \operatorname{sen}(x^3+y) + z \cdot [\operatorname{sen}(x^3+y)]_z \\
&= 1 \cdot \operatorname{sen}(x^3+y) + z \cdot 0 \\
&= \operatorname{sen}(x^3+y).
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.9. *Hallar f_x y f_y si:*

a) $f(x,y) = x^2y^3$ *b)* $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$
c) $f(x,y) = e^{xy}$ *d)* $f(x,y) = x\cos(x)\cos(y)$
e) $f(x,y) = x^y$ *f)* $f(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y)$
g) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\ln(\frac{y}{x})$ *h)* $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{2+\sqrt{x}}$

Ejercicio 2.1.10. *Calcular f_x, f_y y f_z en los puntos indicados.*

a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$, *en* $(1,1,1)$

b) $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^4} + yz$, *en* $(0,0,1)$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{xy} + \operatorname{tg}(z)$, *en* $(1,1,\frac{\pi}{4})$.

Observación 2.1.11. *Una vez calculadas las derivadas parciales, es posible que podamos calcularles a estas nuevas funcions sus derivadas parciales, que serán las derivadas parciales de segundo orden de f. Es decir, dada f_x, podemos ahora calcular*

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad y \quad \frac{\partial f_x}{\partial y},$$

(también podemos hacerlo para f_y). De este modo, tenemos una generalización de las derivadas segundas, sólo que ahora para cada derivada parcial, hay dos nuevas derivadas parciales. Las vamos a escribir

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}.$$

Desde ya, también podemos considerar funciones de tres o más variables, y podemos también calcular derivadas de tercer orden, cuarto, etcétera.

En la lista de derivadas segundas tenemos f_{xy} y f_{yx}, nos podemos preguntar si el orden en que derivamos influye, o estas dos derivadas coinciden. La respuesta es el siguiente teorema que nos va a ahorrar cuentas:

Teorema 2.1.12. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con f_x, f_y continuas. Entonces,*

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

En otras palabras, da lo mismo si derivamos respecto de x a f_y, que si derivamos respecto de y a f_x.

Ejemplo 2.1.13. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = e^{xy-x^2y^3}$.

Calculemos primero f_x y $_y$:

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & e^{xy-x^2y^3}(y - 2xy^3) \\ f_y(x,y) & = & e^{xy-x^2y^3}(x - 3x^2y^2). \end{array}$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de $f_x(x, y) = e^{xy-x^2y^3}(y - 2xy^3)$. Observemos que además de aplicar la regla de la cadena, tenemos que derivar un producto:

$$\begin{array}{rcl} [f_x(x,y)]_x & = & e^{xy-x^2y^3}(y - 2xy^3)^2 + e^{xy-x^2y^3}(-2y^3) \\ & = & e^{2xy-x^2y^3}[(y - 2xy^3)^2 - y^3]. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [f_x(x,y)]_y & = & e^{xy-x^2y^3}(y - 2xy^3)(x - 3x^2y^2) + e^{xy-x^2y^3}(1 - 6x\,y^2) \\ & = & e^{xy-x^2y^3}(xy + 3x^2y^3 - 2x^2y^3 + 6x^3y^5 + 1 - 6x\,y^2). \end{array}$$

Calculemos ahora la derivada f_{yy}, y dejamos como ejercicio verificar que si derivamos f_y respecto a x, obtenemos el mismo resultado que al derivar f_x respecto a y.

$$\begin{array}{rcl} [f_y(x,y)]_y & = & e^{xy-x^2y^3}(x - 3x^2y^2)^2 + e^{2xy-x^2y^3}(-6x^2y) \\ & = & e^{2xy-x^2y^3}[(x - 3x^2y^2)^2 - 6x^2y]. \end{array}$$

Ejercicio 2.1.14. *Calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} y f_{yx} para las siguientes funciones:*

a) $f(x, y) = xy^4 + 3x^2y - xy$ *b*) $f(x, y) = x^3e^{-2y} + y^{-1}\cos(x)$

c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x + y}$.

¿Qué sucede con f_{xy} y f_{yx}?

2.2. Diferenciabilidad

La existencia de derivadas parciales es un buen comienzo para estudiar una función de varias variables, pero no nos dice mucho acerca de la función. Sólo sabemos cómo crece en dos direcciones particulares. Una clase de funciones más importante es la de las *funciones diferenciables*:

Definición 2.2.1. *Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice* **diferenciable** *en (x_0, y_0) si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0.$$

Observemos que para que el límite de un cociente nos de cero, si el denominador tiende a cero, entonces el numerador tiene que tender también a cero (de lo contrario, si tendiese a una constante el numerador, el límite sería infinito). Entonces, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

para las funciones diferenciables. La expresión

$$f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es la ecuación de un plano, con lo cual estamos diciendo que la diferencia entre nuestra función f y la ecuación de este plano tiende a cero (y lo hace muy rápido, ya que dividido por algo que tiende a cero, sigue tendiendo a cero).

En otras palabras, una función diferenciable es aquella que se puede aproximar muy bien por un plano. Esto generaliza la idea de derivada, recordemos que las funciones derivables podían ser aproximadas por su recta tangente.

Definición 2.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0). Entonces,*

$$\pi(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es el plano tangente a f en (x_0, y_0).

Ejemplo 2.2.3. Decidir si f es diferenciable en $(0,0)$ y si lo es dar su plano tangente, siendo

$$f(x,y) = x^2y - y(x+1) + x(y-2) + 2y^3 + 1$$

Para saber si es diferenciable necesitamos primero calcular las derivadas parciales en $(0,0)$. Sabemos $f(0,0) = 1$, y tenemos

$$\begin{array}{lclcrcl} f_x & = & 2xy - y + y - 2, & \text{entonces} & f_x(0,0) & = & -2, \\ f_y & = & x^2 - (x+1) + x + 6y^2, & \text{entonces} & f_y(0,0) & = & -1, \end{array}$$

y ahora calculamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y(x+1) + x(y-2) + 2y^3 + 1 - 1 - (-2)x - (-1)y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

que tras distribuir y cancelar se transforma en

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + 2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Este límite da cero, y para demostrarlo sacamos y de factor común y utilizamos el criterio de cero por acotado. Observemos que $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, con lo cual

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+2y^2)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Por lo tanto, la función es diferenciable, y su plano tangente es

$$\pi(x,y) = -1+2x+y.$$

Observación 2.2.4. *Como hemos visto en este ejemplo, para verificar la diferenciabilidad se debe calcular un límite, y demostrar que es cero. Esto no suele ser sencillo, pero disponemos de un teorema que nos evitará calcular el límite en muchos casos.*

Teorema 2.2.5. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existen las derivadas parciales f_x y f_y en (x_0, y_0) y son continuas en ese punto. Entonces, la función f es diferenciable en (x_0, y_0).*

Ejercicio 2.2.6. *Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico en los puntos indicados:*
a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$, *en* $(0,0)$
b) $g(x,y) = x^2\cos(xy)$, *en* $(1,0)$
c) $h(x,y) = \sqrt{x^2+3y^4}$, *en* $(1,1)$

3. Gradiente y Derivadas direccionales

Definición 3.0.7. *Definimos el* **gradiente** *de f como el vector formado por sus derivadas parciales,*

$$\nabla f = (f_x, f_y).$$

Recordemos que un vector v se decía *unitario* si tenía módulo (o norma) igual a 1. Es decir, dado $v = (a,b)$, se dice unitario si

$$|v| = \sqrt{a^2+b^2} = 1.$$

Definición 3.0.8. *Dado un vector $v = (a,b)$ unitario, y una función $f : R^2 \to R$ diferenciable, se define la* **derivada direccional** *de f con respecto a v como*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v = af_x + bf_y.$$

Observación 3.0.9. *En realidad la definición de derivada direccional es la siguiente:*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(a,b)) - f(x,y)}{t}$$

Obviamente la definición es más general ya que se puede aplicar aún para funciones no diferenciables. Aunque en este curso no vamos a trabajar con tales funciones.

Un resultado importante es el siguiente: supongamos que estamos parados en una superficie que es el gráfico de una función diferenciable $f(x,y)$, y nos preguntamos en qué dirección se eleva más rápido la función; o que tenemos una función $T(x,y)$ que nos da la temperatura y queremos saber en qué dirección movernos para ir a un lugar con temperatura más elevada. La respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema 3.0.10. *Sea $f : R^2 \to R$ diferenciable. Entonces, el gradiente ∇f apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.*

Ejemplo 3.0.11. Sea $v = (-1,1)$. Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = y^2 \operatorname{sen}(x-2) + x - 2y$ en $(x_0, y_0) = (2,3)$ respecto a v, y hallar la dirección de máximo crecimiento de f en ese punto.

Para resolverlo, normalizamos el vector v:

$$|v| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Entonces,

$$\frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Calculemos ahora ∇f:

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (y^2 \cos(x-2) + 1, 2y \operatorname{sen}(x-2) - 2).$$

Luego,

$$\nabla f(2,3) = (f_x(2,3), f_y(2,3)) = (3^2 \cos(0) + 1, 2 \cdot 3 \operatorname{sen}(0) - 2) = (10, -2).$$

Por lo tanto, la dirección de máximo crecimiento es $(10,-2)$.

Para la derivada direccional, tenemos:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (10,-2) = -\frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 3.0.12. *Calcular la derivada de f en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en los puntos indicados:*

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, *en* $(1,2)$ *b)* $f(x,y) = e^{x+y}$, *en* $(0,0)$
c) $f(x,y) = \sqrt{1+xy}$, *en* $(1,0)$

Ejercicio 3.0.13. *Indicar cuáles son las direcciones de mayor y de menor crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:*

a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y^5)$, *en* $(0,0)$ *b)* $f(x,y) = xe^{xy}$, *en* $(1,0)$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{z+x^2y}$, *en* $(2,2,1)$.

Ejercicio 3.0.14. *Calcular la derivada direccional de la función* $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ *en el punto* $P = (4,-2)$ *en la dirección* $v = (1,3)$. *¿Cuál es la derivada direccional máxima y en qué dirección se alcanza?*

4. Aproximación de funciones

Como mencionamos antes, una función diferenciable puede aproximarse por su plano tangente. Cuando tiene derivadas de mayor orden, definiremos su polinomio de Taylor. La teoría y las aplicaciones son similares a las que vimos en el capítulo 5.

5. Polinomio de Taylor

Definición 5.0.15. *Se define el polinomio de Taylor de segundo orden (o grado) de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *como*

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right].$$

Observación 5.0.16. *Como podemos ver, el polinomio comienza con los términos del plano tangente, una situación similar a la que se produce en una variable, donde el término independiente y el de primer orden dan la recta tangente a la función en el punto donde se la desarrolla. Es decir, el polinomio de Taylor de primer grado es el plano tangente.*

Como se puede observar también, en los términos de segundo grado aparecen todas las derivadas segundas, y tenemos $2f_{xy}$ *porque* $f_{xy} = f_{yx}$.

Para obtener polinomios de Taylor de mayor grado necesitaremos todas las derivadas parciales hasta el grado que nos interese.

Ejemplo 5.0.17. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y) = e^{x+y} + 2x^3y$ en $(x_0,y_0) = (-1,1)$.

Calculemos las derivadas parciales que necesitamos:

$$\begin{array}{rcl} f_x & = & e^{x+y} + 6x^2y \\ f_y & = & e^{x+y} + 2x^3 \\ f_{xx} & = & e^{x+y} + 12xy \\ f_{yx} & = & e^{x+y} + 6x^2 \\ f_{yy} & = & e^{x+y} \end{array}$$

Calculemos ahora los coeficientes del polinomio

$$\begin{aligned}
f(-1,1) &= e^{-1+1} + 2(-1)^3 \cdot 1 = -1 \\
f_x(-1,1) &= e^{-1+1} + 6(-1)^2 \cdot 1 = 7 \\
f_y(-1,1) &= e^{-1+1} + 2(-1)^3 = -1 \\
f_{xx}(-1,1) &= e^{-1+1} + 12(-1) \cdot 1 = -11 \\
f_{yx}(-1,1) &= e^{-1+1} + 6(-1)^2 = 7 \\
f_{yy}(-1,1) &= e^{-1+1} = 1
\end{aligned}$$

El polinomio nos queda entonces

$$P_2 = -1 + 7(x+1) + (-1)(y-1) + \frac{1}{2}[-11(x+1)^2 + 2 \cdot 7(x+1)(y-1) + 1(y-1)^2]$$

Esto es,

$$P_2 = -1 + 7(x+1) - 1(y-1) + \frac{11}{2}(x+1)^2 + 7(x+1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2.$$

Si nos hubiesen pedido el plano tangente de esta función, la respuesta hubiese sido

$$\pi = -1 + 7(x+1) + (-1)(y-1).$$

Ejercicio 5.0.18. *Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 para:*

a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, *en* $(0,0)$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$, *en* $(0,0)$

c) $f(x,y) = e^{x-1}\cos(y)$, *en* $(1,0)$.

Ejercicio 5.0.19. *Determinar los polinomios de Taylor de primer y segundo orden de* $f(x,y) = \cos(xy)$ *en* $(1,0)$ *y utilizarlos para aproximar el valor de* $f(0{,}9; 0{,}2)$.

6. Aplicaciones económicas

En esta última sección veremos dos aplicaciones económicas de las derivadas parciales: la clasificación de bienes y el cálculo de elasticidades de precios cuando hay más de un producto.

6.1. Clasificación de bienes

La clasificación de bienes cambia según de qué variables depende la demanda. Puede ser solamente el precio del bien, el precio del bien y el ingreso de los consumidores, o de los precios de diferentes bienes.

1. Analicemos el caso en que la función de demanda de un bien depende de su propio precio y del precio de otros bienes, o sea,

$$D_1 = f(p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

a) Sea $\frac{\partial D_1}{\partial p_1} < 0$. Este caso se ve reflejado en la mayoría de los bienes, ante un leve aumento en el precio, disminuye la cantidad demandada del mismo (y viceversa). En este caso se dice que el bien es **típico**

b) $\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = 0$. Ante un aumento del precio del bien, la demanda se mantiene constante.

c) $\frac{\partial D_1}{\partial p_1} > 0$. Significa que la cantidad demanda del bien aumenta ante un aumento en su precio (y viceversa), lo cual es más dificil de encontrar en la realidad. Un ejemplo serían los bienes de lujo, que apuntan a ciertos sectores del mercado. También se encuentran en el otro extremo del consumo, con el caso del arroz en China. Un tercer ejemplo se ve en las corridas bursátiles y en el precio de monedas extranjeras: las acciones en la bolsa pierden su atractivo cuando el precio disminuye, y cuanto más cae su precio, hay menos interesados en comprarlas. Y al contrario ocurre con el dolar (u otra moneda percibida como fuerte, o con el oro): al aumentar su precio, aumenta su demanda, ya que se lo percibe más fuerte o más seguro. Estos bienes se denominan bienes **giffen**.

2. Vamos a considerar ahora dos bienes X_1 y X_2, cuyas funciones de demanda son $D_1 = f(p_1, p_2)$ y $D_2 = f(p_1, p_2)$ respectivamente, o sea, ambas dependen de su propio precio y del precio del otro bien. Para comparar los bienes necesitamos estudiar las demandas marginales cruzadas:

   a) $\frac{\partial D_1}{\partial p_2} > 0$ y $\frac{\partial D_2}{\partial p_1} > 0$. En este caso un aumento en el precio del bien genera un aumento en la demanda del otro bien. Estos bienes satisfacen la misma necesidad, por ejemplo: manteca y margarina; carnes rojas y carnes blancas, etc. Estos bienes se denominan **sustitutos**.

   b) $\frac{\partial D_1}{\partial p_2} < 0$ y $\frac{\partial D_2}{\partial p_1} < 0$. Este tipo de bienes se consumen conjuntamente, por ejemplo, café y azucar y se denominan bienes **complementarios**. En esta situación una suba en el precio de un bien genera una disminución en la cantidad demandada del otro bien.

   Observación 6.1.1. *Si los signos de las derivadas no son iguales, los bienes no son comparables.*

3. Estudiemos finalmente el caso en que la demanda de un bien depende de su propio precio y del ingreso del consumidor, o sea, $D = f(p, I)$. El concepto de derivada parcial respecto del ingreso, $\frac{\partial D}{\partial I}$ expresa el efecto de cambio en la cantidad demandada del bien si se efectúa un pequeño cambio en el ingreso. Analizaremos las tres posibilidades:

   a) $\frac{\partial D}{\partial I} > 0$. Significa que la cantidad demandada del bien aumenta (o disminuye) ante un aumento (o disminución) en el ingreso, o sea la cantidad demandada cambia en la misma dirección del ingreso, en este caso se dice que el bien es **normal**.

b) $\frac{\partial D}{\partial I} = 0$. La cantidad demandada permanece constante ante un cambio en el ingreso. El bien es independiente del ingreso.

c) $\frac{\partial D}{\partial I} < 0$. Aquí disminuye (o aumenta) la cantidad demandada al aumentar (o disminuir) el ingreso. Lo que ocurre en este caso es que al aumentar el ingreso del consumidor, este consume bienes de calidad superior. En este caso el bien se denomina **inferior**.

6.2. Elasticidad

Cuando la demanda de un bien X_1 depende de su precio y de los precios de otros bienes, podemos calcular las elasticidades parciales de la demanda respecto de los precios. Esto nos dará una idea de cómo varía la demanda del bien al modificar uno o varios de los precios.

Dado un cierto bien X_1 y su función de demanda $D_1(p_1, p_2)$, las elasticidades parciales de la demanda respecto de cada precio se definen como:

$$\frac{ED_1}{Ep_1} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1} \tag{6.1}$$

$$\frac{ED_1}{Ep_2} = \frac{\partial D_1}{\partial p_2} . \frac{p_2}{D_1} \tag{6.2}$$

Económicamente, la fórmula 6.1 mide el porcentaje de cambio de la cantidad demandada de X_1 ante un aumento de aproximadamente 1 % en el precio p_1 (dejando constante p_2). Análogamente, la fórmula 6.2 mide el porcentaje de cambio de la cantidad demandada de X_1 ante un aumento de aproximadamente 1 % en el precio p_2 (dejando constante p_1).

El **valor absoluto** de la elasticidad permite distinguir distintos tipos de demanda. Llamando η a dicho valor absoluto, la demanda se puede clasificar así:

1. Si $\eta > 1$ significa que un cambio en el precio en 1 % provoca un cambio proporcionalmente mayor en la cantidad demandada. Se dice entonces que la demanda es **elástica**.

2. Si $\eta = 1$ significa que un cambio en el precio en 1 % provoca un cambio proporcionalmente igual en la cantidad demandada. Se dice entonces que la demanda tiene elasticidad **unitaria**.

3. Si $0 < \eta < 1$ significa que un cambio en el precio en 1 % provoca un cambio proporcionalmente menor en la cantidad demandada. Se dice entonces que la demanda es **inelástica**.

4. Si $\eta = 0$ significa que variaciones porcentuales en el precio no provocan ningún cambio en la cantidad demandada del bien, aquí la demanda se dice **totalmente inelástica**

6.3. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de ambos conceptos.

Ejemplo 6.3.1. Un local de música vende discos compactos originales (Bien 1) y copiados (Bien 2). Las demandas de ambos bienes son: $D_1 = e^{3p_2-p_1}(5p_1+1)^2$ y $D_2 = (5p_2+4p_1^2)^3 3p_1$

a) Comparar ambos bienes entre ellos utilizando derivadas parciales.

b) Hallar las elasticidades parciales de D_1 cuando $p_1 = 30$ y $p_2 = 10$. Interpretar económicamente el resultado.

Para resolver el item a necesitamos las derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 3(5p_1+1)^2 e^{3p_2-p_1} > 0,$$

lo cual quiere decir que la demanda del bien 1 aumentaría ante un leve incremento del precio p_2 (dejando constante p_1).

$$\frac{\partial D_2}{\partial p_1} = 3(5p_2+4{p_1}^2)^2 8p_1 3p_1 + 3(5p_2+4{p_1}^2)^3 > 0,$$

lo cual quiere decir que la demanda del bien 2 aumentaría ante un leve incremento del precio p_1 (dejando constante p_2). Entonces, los bienes son sustitutos.

Vamos a calcular las elasticidades parciales para el item b:

$$\begin{aligned}
\frac{ED_1}{Ep_1} &= \frac{\partial D_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{D_1} \\
&= \frac{[e^{3p_2-p_1}(-1)(5p_1+1)^2 + 2e^{3p_2-p_1}(5p_1+1)5]p_1}{e^{3p_2-p_1}(5p_1+1)^2} \\
&= \frac{e^{3p_2-p_1}[-(5p_1+1)^2 + 10(5p_1+1)]p_1}{e^{3p_2-p_1}(5p_1+1)^2} \\
&= \frac{[-(5p_1+1)^2 + 10(5p_1+1)]p_1}{(5p_1+1)^2}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{ED_1}{Ep_1}_{(30,10)} = -28,013.$$

Es decir, si aumenta en 1 % el precio del bien 1 (dejando constante el precio del bien 2) la demanda de los discos originales cae en un 28 % aproximadamente.

$$
\begin{aligned}
\frac{ED_1}{Ep_2} &= \frac{\partial D_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{D_1} \\
&= \frac{3(5p_1+1)^2 e^{3p_2-p_1} p_2}{e^{3p_2-p_1}(5p_1+1)^2} \\
&= 3p_2.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\left.\frac{ED_1}{Ep_2}\right|_{(30,10)} = 30.
$$

Esto es, si aumenta en 1 % el precio del bien 2 (dejando constante el precio del bien 1) la demanda de los discos originales aumenta en un 30 %.

Ejemplo 6.3.2. Sean

$$
D_1(p_1,p_2) = \frac{a}{p_1+b} + cp_2, \qquad D_2(p_1,p_2) = \frac{d}{p_2+c} + fp_1
$$

las demandas de dos bienes, con $a > 0$ y $d < 0$.

a) Clasificar ambos bienes.

b) Estudiar en qué casos los bienes serán complementarios o sustitutos.

Como tenemos que clasificar los bienes necesitamos sus derivadas parciales,

$$
\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -\frac{a}{(p_1+b)^2} < 0,
$$

$$
\frac{\partial D_2}{\partial p_2} = -\frac{d}{(p_2+c)^2} > 0.
$$

Entonces, el bien 1 es un bien típico y el bien 2 es un bien giffen.

Para resolver el item b, necesitamos

$$
\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = c, \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} = f.
$$

Luego, para que los bienes sean sustitutos las condiciones son: $c > 0$ y $f > 0$. Los bienes serán complementarios cuando $c < 0$ y $f < 0$.

Ejercicio 6.3.3. *Dadas las funciones de demanda de dos artículos, clasificarlos entre sí:*

a) $D_1 = 20 - 2p_1 - p_2$ *y* $D_2 = 9 - p_1 - 2p_2$.

b) $D_1 = ae^{-p_1p_2}$ *y* $D_2 = be^{p_1-p_2}$.

c) $D_1 = \dfrac{4}{p_1^2 p_2}$ *y* $D_2 = \dfrac{16}{p_1 p_2^2}$.

En todos los casos se tiene $a > 0$ *y* $b > 0$.

Ejercicio 6.3.4. *Si la función de demanda de un artículo es* $D_1 = 5000 - 10p_1 + 20p_2 - p_2p_3$ *en función de su precio* p_1 *y de los precios* p_2 *y* p_3 *de otros dos bienes, calcular las demandas marginales y las elasticidades parciales respecto de* p_1, p_2 *y* p_3 *para* $p_1 = 8$, $p_2 = 12$ *y* $p_3 = 14$. *Dar el significado económico de los resultados obtenidos. Clasificar el bien.*

Ejercicio 6.3.5. *Sean* $D_1 = ke^{p_1 - p_2}$ *y* $D_2 = ke^{(\alpha-2)p_1 + p_2}$ *la demanda de dos bienes:*

a) *Hallar todos los valores de* k *y* α *para que los bienes sean complementarios.*

b) *Para los valores hallados, clasificar los bienes.*

c) *Hallar las cuatro elasticidades parciales, sabiendo que* $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 3$ *y* $\alpha = 3$, *clasificarlas en elásticas o inelásticas.*

Capítulo 9

Extremos

En este capítulo estudiaremos los máximos y mínimos de funciones de varias variables. La situación es más complicada que para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y veremos distintos métodos para hallarlos. En la primera sección daremos las definiciones necesarias, y un criterio para hallarlos; en la segunda sección analizaremos la existencia de extremos en conjuntos abiertos y veremos un criterio para clasificarlos. En la tercera sección analizaremos la existencia de extremos en conjuntos cerrados; y en la cuarta sección estudiaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, para la existencia de extremos con restricciones, y en la última veremos aplicaciones a problemas económicos.

1. Extremos y puntos críticos

1.1. Definiciones

Comencemos definiendo algunos términos que necesitaremos.

Definición 1.1.1. *Diremos que $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ es un mínimo local de f si existe $r > 0$ tal que*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para todo punto (x, y) en $D_r(x_0, y_0)$.

Si se cumple la desigualdad estricta

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

diremos que $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ es un mínimo local estricto de f.

Informalmente, $f(x_0, y_0)$ es menor que otros valores $f(x, y)$ para todo punto (x, y) que está suficientemente cerca de (x_0, y_0).

Ejemplo 1.1.2. El punto $(0, 0)$ es un mínimo local estricto de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Esto ya lo sabemos gráficamente, basta recordar el gráfico del paraboloide 7.11 del capítulo 7.

Para comprobarlo analíticamente, observemos que $f(0,0) = 0$, y para todo otro punto (x,y), se tiene $0 < x^2 + y^2$ (y son iguales sólo si $x = 0$ y simultáneamente $y = 0$).

Ejemplo 1.1.3. El punto $(0,0)$ es un mínimo local de $f(x,y) = (2x+y)^2$.

Para comprobarlo, observemos que $f(0,0) = 0$, y como $2x + y$ está elevado al cuadrado, no puede ser menor a cero para ningún otro punto (x,y). No es estricto porque en cualquier punto de la forma $(x,-2x)$, se tiene $f(x,-2x) = (2x-2x)^2 = 0$. Es decir, sobre la recta $y = -2x$ la función f se anula.

Tenemos, también, una definición similar para máximo:

Definición 1.1.4. *Diremos que $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ es un máximo local de f si existe $r > 0$ tal que*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$$

para todo punto (x,y) en $D_r(x_0,y_0)$.

Si se cumple la desigualdad estricta

$$f(x_0, y_0) > f(x,y),$$

diremos que $(x_0,y_0) \in Dom(f)$ es un máximo local estricto de f.

Finalmente, definimos máximos y mínimos globales:

Definición 1.1.5. *Diremos que $(x_0,y_0) \in Dom(f)$ es un:*

- *mínimo global de f si $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ para todo punto (x,y) en $Dom(f)$.*
- *máximo global estricto de f si $f(x_0,y_0) < f(x,y)$ para todo punto (x,y) en $Dom(f)$.*
- *máximo global de f si $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ para todo punto (x,y) en $Dom(f)$.*
- *máximo global estricto de f si $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ para todo punto (x,y) en $Dom(f)$.*

Ejemplo 1.1.6. El punto $(0,0)$ es un mínimo global estricto de $f(x,y) = x^2 + y^2$

Para comprobarlo, observemos que $f(0,0) = 0$, y para todo otro punto (x,y), se tiene $x^2 + y^2 > 0$, sería cero sólo si $x = 0$ y simultáneamente $y = 0$.

Observación 1.1.7. *Conviene recordar, al comparar otros textos de este tema, que hay autores que llaman máximo (o mínimo) al valor que toma la función en el punto (x_0,y_0) y no a este punto, como lo hemos hecho acá; no hay un criterio unificado al respecto.*

1.2. Puntos críticos

Nuestro próximo objetivo es hallar máximos y mínimos para $f : R^2 \to R$. Recordemos que en una variable, si la función era derivable su derivada se anulaba en los máximos y mínimos. Aquí tenemos un resultado similar.

Teorema 1.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existen sus derivadas parciales en (x_0, y_0). Entonces, si (x_0, y_0) es un máximo (o un mínimo) de f,*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Sabiendo que el gradiente se anula en los máximos y mínimos de una función, podemos introducir la noción de de punto crítico:

Definición 1.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que existen sus derivadas parciales en (x_0, y_0). Diremos que (x_0, y_0) es un punto crítico si*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Si existen las derivadas parciales de nuestra función, los máximos y mínimos estarán dentro del conjunto de puntos críticos. Sin embargo, puede haber puntos críticos que no sean máximos ni mínimos; a estos puntos los llamaremos *puntos silla*:

Definición 1.2.3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto crítico. Entonces, si no es un máximo ni un mínimo de f, es un punto silla.*

Veamos algunos ejemplos en donde calculamos los puntos críticos de ciertas funciones.

Ejemplo 1.2.4. Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = xy + 2x^2 - 3y$.
Calculamos el gradiente y lo igualamos a cero:

$$\nabla f = (y + 4x, x - 3),$$

$$y + 4x = 0$$

$$x - 3 = 0$$

Por la última ecuación, $x = 3$, y reemplazando en la primera queda

$$y + 4 \cdot 3 = 0$$

$$y = -12.$$

El único punto crítico es $(3, -12)$.

Ejemplo 1.2.5. Sea $f(x, y) = (x + y)^2 + x^2$. Hallar sus puntos críticos.
Tenemos

$$\nabla f = (2(x + y) + 2x, 2(x + y)) = (0, 0)$$

es decir,

$$2(x + y) + 2x = 0$$

$$2(x+y)=0$$

En esta última tenemos que $y=-x$, y reemplazando en la primera tenemos

$$2(x-x)+2x=2x=0,$$

y por lo tanto, $x=0$. Como $y=-x$, también $y=0$. El único punto crítico es $(0,0)$.

Ejemplo 1.2.6. Hallar los puntos críticos de

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+y^3-2y^2.$$

Calculamos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y)=(x^2-3x+2,3y^2-4y)$$

Luego, buscamos los valores de x e y tales que $\nabla f=0$:

$$x^2-3x+2=0$$

$$3y^2-4y=0$$

En la primera, se tiene $x=1$ ó $x=2$. En la segunda, $y=0$ ó $y=4/3$. Luego, los puntos críticos son

$$(1,0),\quad (1,4/3),\quad (2,0),\quad (1,4/3).$$

Para determinar los máximos y mínimos de $f:R^2\to R$ en todo el plano R^2 (o en un conjunto abierto), no sólo se deben determinar los puntos críticos de la función, sino también aquellos puntos donde no exista el gradiente.

Ejemplo 1.2.7. Hallar los candidatos a máximos y mínimos de $f(x,y)=|x|+y$.

Observemos que la función no tiene puntos críticos, ya que $f_y=1$ siempre. Por otro lado, la función no es diferenciable si $x=0$ (la función de una variable $|x|$ no era derivable en cero), con lo cual los puntos de la forma $(0,y)$ son todos candidatos a máximos o mínimos.

2. Clasificación de extremos

Nuestro próximo objetivo es determinar si un candidato a extremo es un máximo, un mínimo, o un punto silla. Cuando tenemos un punto crítico y podemos seguir derivando la función, disponemos del criterio del Hessiano para decidir qué es. Si en cambio el candidato a extremo es un punto en el que no existe ∇f, debe determinarse “ a mano” si es un máximo, un mínimo, o un punto silla.

Veremos primero el criterio del Hessiano, y luego estudiaremos ejemplos donde se determina “ a mano” la naturaleza del candidato a extremo.

2.1. Criterio del Hessiano

Para decidir si un punto crítico es máximo, mínimo, o silla disponemos de un criterio que se basa en las derivadas segundas de la función.

Definición 2.1.1. *Sea $f : R^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2. Definimos la matriz Hessiana de f en (x_0, y_0) como*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Llamaremos Hessiano de f al determinante de esta matriz,

$$det[H(x_0, y_0)] = det \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

El siguiente teorema nos da el criterio:

Teorema 2.1.2. *Sea $f : R^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3, (x_0, y_0) un punto crítico. Entonces,*

- *Si $det(H(x_0, y_0)) < 0$, es un punto silla.*
- *Si $det(H(x_0, y_0)) > 0$, hay dos casos:*
  - *Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, es un mínimo.*
  - *Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, es un máximo.*
- *Si $det(H(x_0, y_0)) = 0$, el criterio no decide.*

Observación 2.1.3. *Cuando $det(H(x_0, y_0)) = 0$ el criterio no decide, veremos más adelante algunas técnicas para decidir en estos casos si es un punto silla o un extremo.*

Ejemplo 2.1.4. Sea $f(x, y) = xy$. Clasificar sus puntos críticos.
Calculamos $\nabla f = (y, x)$ e igualando a cero, obtenemos

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Para clasificar este punto crítico calculamos las derivadas segundas. Observemos que

$$f_{xx} = 0 = f_{yy}, \quad f_{xy} = 1$$

con lo cual,

$$det(H) = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

Luego, como el Hessiano dio negativo, $(0, 0)$ es un punto silla.

Ejemplo 2.1.5. Sea $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Clasificar sus puntos críticos.
Calculamos el gradiente para hallar puntos críticos, y obtenemos:

$$f_x = -e^{-x^2-y^2} \cdot 2x = 0,$$

$$f_y = -e^{-x^2-y^2} \cdot 2y = 0,$$

con lo cual $x = y = 0$ es el único punto crítico, ya que la exponencial no se anula nunca. Calculamos las derivadas segundas, y tenemos:

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} \cdot 4x^2 - 2e^{-x^2-y^2},$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} \cdot 4y^2 - 2e^{-x^2-y^2},$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} \cdot 4yx.$$

Evaluando en $(0,0)$ nos queda

$$f_{xx} = -2 = f_{yy}, \quad f_{xy} = 0$$

Luego,

$$det(H) = det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0,$$

y como $f_{xx} = -2 < 0$, el punto $(0,0)$ es un máximo.

Veamos un ejemplo con más de un punto crítico:

Ejemplo 2.1.6. Sea $f(x,y) = (x^2-2x)(y^2-1)$. Hallar y clasificar sus puntos críticos.

Calculamos el gradiente y obtenemos

$$\nabla f = [(2x-2)(y^2-1), (x^2-2x)2y].$$

Para hallar los puntos críticos igualamos a cero y resolvemos:

$$(2x-2)(y^2-1) = 0$$

$$(x^2-2x)2y = 0$$

La primera se anula cuando $x = 1$, $y = 1$, ó $y = -1$. La segunda, cuando $x = 0$, $x = 2$, ó $y = 0$. Los puntos críticos son entonces aquellos puntos (x,y) que anulan ambas ecuaciones, con lo cual se tienen los siguientes puntos:

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (0,-1), \quad (2,1), \quad (2,-1).$$

Para clasificarlos, necesitamos las derivadas segundas:

$$f_{xx} = 2(y^2-1)$$

$$f_{yy} = 2(x^2-2x)$$

$$f_{xy} = (2x-2)2y$$

A continuación, calculemos el Hessiano para cada uno y decidamos si son máximos, mínimos, o puntos silla.

- $(1,0)$: $det(H) = det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$, y $f_{xx} < 0$, es un máximo.

- $(0,1)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16$, punto silla.
- $(0,-1)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -16$, punto silla.
- $(2,1)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -16$, punto silla.
- $(2,-1)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16$, punto silla.

2.2. Casos donde el criterio no decide

Cuando el Hessiano es cero, el criterio no decide si un punto crítico es un extremo o un punto silla. Por otra parte, cuando no existen las derivadas parciales segundas de la función en el punto que nos interesa, tampoco podemos aplicar el criterio.

Si queremos determinar si un punto crítico o un punto donde no existe el gradiente de una función es un extremo sin utilizar el criterio del Hessiano (o porque éste falló), debemos comparar el valor de la función en ese punto con los valores de la función en los puntos vecinos. En los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3 demostramos "a mano"que el origen era un mínimo, pero no hay una receta fija para hacer esto, sino que se aprende a hacerlo luego de realizar bastantes ejemplos.

Ejemplo 2.2.1. Mostrar que $(0,0)$ es un punto silla de

$$f(x,y) = xy.$$

Resolvimos este ejercicio antes, en el ejemplo 2.1.4. Calculamos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

Luego, verificamos que $(0,0)$ es un punto crítico,

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

Para ver que es un punto silla, debemos mostrar que no es un máximo ni un mínimo. Observemos que la función vale 0 en este punto, por lo tanto, si fuese un máximo debería ser negativa en todos los puntos de un disco centrado en el $(0,0)$, y si fuese un mínimo, debería ser positiva.

Pero $f(x,y) = xy$ es positiva en el primer y tercer cuadrante (donde $x > 0$, $y > 0$; y donde $x < 0$, $y < 0$); y es negativa en el segundo y cuarto cuadrante (donde $x < 0$, $y > 0$; y donde $x > 0$, $y < 0$).

Luego, no existe un disco centrado en el origen donde la función no cambie de signo, y por lo tanto, $(0,0)$ no es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo 2.2.2. Sea $f(x,y) = |x| + y$. Mostrar que $(0,1)$ es un punto silla.

Para demostrar lo que nos piden, mostremos valores muy cercanos al $(0,1)$ tales que en algunos casos la función vale más que $f(0,1)$, y en otros, menos. Por ejemplo, si tomamos los puntos $(0,1-t)$, donde t es un número positivo cualquiera, tenemos

$$f(0,1-t) = 0 + 1 - t < 1 = f(0,1).$$

Ahora, tomando $(0,1+t)$, donde t es un número positivo,

$$f(0,1-t) = 0 + 1 + t > 1 = f(0,1).$$

Luego, $(0,1)$ no puede ser un máximo ni un mínimo.

Ejemplo 2.2.3. Calcular los extremos relativos de

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^4 - y^3.$$

Calculamos el gradiente y obtenemos

$$\nabla f = (10x, 8y^3 - 3y^2).$$

Para hallar los puntos críticos igualamos a cero y resolvemos:

$$10x = 0$$

$$8y^3 - 3y^2 = 0$$

La primera se anula cuando $x = 0$. Para la segunda, factorizamos

$$8y^3 - 3y^2 = y^2(8y-3) = 0,$$

y se anula para $y = 0$ ó $y = \frac{3}{8}$. Los puntos críticos son entonces

$$(0,0), \qquad \left(0, \frac{3}{8}\right).$$

Para clasificarlos, necesitamos las derivadas segundas:

$$\begin{array}{rcl} f_{xx} & = & 10 \\ f_{yy} & = & 24y^2 - 6y \\ f_{xy} & = & 0. \end{array}$$

A continuación, calculemos el Hessiano en cada punto crítico:

- $(0,3/8)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 9/8 \end{pmatrix} = 45/4$, y $f_{xx} > 0$, es un mínimo.
- $(0,0)$: $det(H) = det\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, no decide.

El criterio no nos dice nada del punto $(0,0)$. Recordemos que una función tiene un máximo (respectivamente, un mínimo) relativo en (x_0, y_0) si $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ (respectivamente, $f(x,y) > f(x_0, y_0)$) para todo (x,y) en un disco centrado en (x_0, y_0).

Aquí, $f(0,0) = 0$, y vamos a demostrar que el punto $(0,0)$ es un punto silla viendo que la función cambia de signo tan cerca como queramos del punto crítico, con lo cual no puede ocurrir que en un disco centrado en el origen sea un máximo o un mínimo. Nos acercaremos al $(0,0)$ por dos caminos: el eje x y el eje y.

- Eje x: tenemos $f(x,0) = 5x^2 > 0 = f(0,0)$, luego, no puede ser un máximo.
- Eje y: $f(0,y) = 2y^4 - y^3 = y^3(2y-1)$.

  En este caso, podemos ver que $f(0,y)$ es negativa si por ejemplo $y > 0$ y $2y-1 < 0$, es decir, cuando $y < \frac{1}{2}$. Como todo disco centrado en cero, por muy chico que sea el radio, incluye puntos donde $y < \frac{1}{2}$, tenemos que $f(0,y) < 0 = f(0,0)$ y no puede ser un mínimo.

Ejemplo 2.2.4. Calcular los extremos relativos de $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^4$.

Calculamos el gradiente y obtenemos

$$\nabla f = (2x + 2y - 4x^3, 2x + 2y).$$

Para hallar los puntos críticos igualamos a cero y resolvemos:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x + 2y - 4x^3 & = & 0 & \quad & (1) \\ 2x + 2y & = & 0 & \quad & (2) \end{array} \right.$$

De (2) obtenemos $y = -x$, y reemplazando en (1)

$$2x - 2x - 4x^3 = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad -4x^3 = 0.$$

Luego, el único punto crítico es $(0,0)$.

Para clasificarlos, necesitamos las derivadas segundas:

$$\begin{array}{rcl} f_{xx} & = & 2 - 12x^2 \\ f_{yy} & = & 2 \\ f_{xy} & = & 2. \end{array}$$

Entonces, el Hessiano en cs

$$det(H(0,0)) = det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

y el criterio no decide.

Vamos a ver que es un punto silla, y como $f(0,0) = 0$, tomaremos dos caminos donde f cambie de signo. Para eso reescribirmos a f como

$$f(x,y) = (x+y)^2 - x^4.$$

Primero nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=-x$, nos queda

$$f(x,-x)=-x^4<0 \quad \text{para todo} \quad x\neq 0,$$

y luego tomamos la recta $y=3x$, con lo cual tenemos

$$f(x,3x)=(x+3x)^2-x^4=16x^2-x^4=x^2(16-x^2)>0.$$

Esta expresión es positiva para todo $x\in(-4,4)$, y entonces existen puntos muy cercanos al origen de la forma $(x,3x)$ donde $f(x,3x)>0$.

Como la función cambia de signo en cualquier disco centrado en el punto crítico y evaluada en el mismo vale cero, entonces es un punto silla.

Ejemplo 2.2.5. Calcular los extremos de $f(x,y)=x^2+3xy+\frac{9}{4}y^2$

Calculamos el gradiente y obtenemos

$$\nabla f=\left(2x+3y, 3x+\frac{9}{2}y\right).$$

Para hallar los puntos críticos igualamos a cero y resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 0 \\ 3x+\frac{9}{2}y & = & 0 \end{array}\right.$$

Este es un sistema lineal compatible indeterminado, que tiene infinitas soluciones. Luego, tenemos infinitos puntos críticos que se escriben de la forma

$$P_c=\left(x,-\frac{2}{3}x\right).$$

Para clasificarlos, calculamos las derivadas segundas:

$$\begin{array}{rcl} f_{xx} & = & 2 \\ f_{yy} & = & \frac{9}{2} \\ f_{xy} & = & 3. \end{array}$$

Entonces, el Hessiano en cs

$$det(H(P_c))=det\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & \frac{9}{2} \end{array}\right)=0,$$

y el criterio no decide.

Para analizar qué ocurre en los puntos críticos reescribimos a f como

$$f(x,y)=\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2.$$

Calculamos el valor en los puntos críticos, y tenemos

$$f(P_c)=f\left(x,-\frac{2}{3}x\right)=\left[x+\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}x\right)\right]^2=0.$$

Como $f(x,y)\geq 0$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, resulta $f(x,y)\geq f(P_c)$ y por lo tanto, todos los puntos críticos son mínimos.

Ejercicio 2.2.6. *Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:*

a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y + 5$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

d) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

f) $f(x,y) = e^x \cos(y)$

g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

h) $f(x,y) = x^5 y + xy^5 + xy$

i) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$

Ejercicio 2.2.7. *Analizar los puntos críticos de las siguientes funciones:*
a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ *b)* $f(x,y) = x^2 y + xy^2$

Observación 2.2.8. *En algunas ocasiones, no buscamos un extremo en todo el plano o en un conjunto abierto sino en un conjunto cerrado, un conjunto con borde. Este caso es similar a los problemas de máximos y mínimos en un intervalo cerrado* $[a,b]$*: recordemos que una función puede tener un máximo en a (o en b) sin que se anule allí su derivada. Por ejemplo, si* $f(x) = x$*, y buscamos sus máximos y mínimos en toda la recta, llegamos a la conclusión de que no los tiene; pero si los buscamos en* $[0,1]$*, el punto* $x = 0$ *resulta ser el mínimo, y* $x = 1$ *el máximo. La situación en dos o más variables se complica, porque el borde tiene infinitos puntos.*

Para resolver estos problemas se parametrizan las curvas que forman el borde, y se buscan máximos o mínimos sobre las mismas. En los siguientes ejemplos explicamos cómo se hace esto.

Ejemplo 2.2.9. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = x + (y-1)^2$ en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, y $(1,3)$.

En este ejemplo la función no tiene ceros dentro del triángulo ya que su gradiente no se anula. Entonces, como el conjunto es cerrado y acotado, la función alcanza sus extremos y tiene que hacerlo en el borde.

El borde del conjunto está formado por tres segmentos de recta, y miramos cómo se porta la función en cada uno de ellos. Vamos a parametrizar cada segmento de recta para transformar la función de dos variables en una función de una sola variable, y buscaremos máximos y mínimos como lo hacíamos para funciones de una variable.

- Segmento que une $(0,0)$ y $(1,0)$: se parametriza como $h(t) = (t,0)$ con $0 < t < 1$. Hacemos la composición $g(t) = f \circ h(t) = t + (0-1)^2 = t + 1$. Claramente, $g'(t) \neq 0$, y sus extremos se alcanzan en el borde del intervalo, es decir, cuando $t = 0$ ó $t = 1$. Observemos que esto corresponde a los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

- Segmento que une $(1,0)$ y $(1,3)$: se parametriza como $h(t) = (1,t)$ con $0 < t < 3$. Hacemos la composición $g(t) = f \circ h(t) = 1 + (t-1)^2$. Ahora, $g'(t) = 2(t-1)$, que se anula cuando $t = 1$, y además los puntos del borde del intervalo también son candidatos a extremos, es decir, cuando $t = 0$ ó $t = 3$. Los valores de t hallados corresponden a los puntos $(1,1)$, $(1,0)$, y $(1,3)$.

- Segmento que une $(0,0)$ y $(1,3)$: se parametriza como $h(t) = (t, 3t)$ con $0 < t < 1$. Hacemos la composición $g(t) = f \circ h(t) = t + (3t-1)^2$. Ahora, $g'(t) = 1 + 6(t-1)$, que se anula cuando $t = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, y además los puntos del borde del intervalo también son candidatos a extremos, es decir, cuando $t = 0$ ó $t = 1$. Los valores de t hallados corresponden a los puntos $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{2}\right)$, $(0,0)$, y $(1,3)$.

Para decidir cuál de todos estos puntos es el máximo absoluto y cuál es el mínimo absoluto, evaluamos la función en cada uno:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 + (0-1)^2 = 1 \\
f(1,0) &= 1 + (0-1)^2 = 2 \\
f(1,3) &= 1 + (3-1)^2 = 5 \\
f(1,1) &= 1 + (1-1)^2 = 1 \\
f\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{2}\right) &= \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 \\
&= \frac{5}{6} + \frac{9}{4} \\
&= \frac{37}{12},
\end{aligned}$$

y tenemos que el máximo absoluto se alcanza en $(1,3)$ y el mínimo absoluto se alcanza en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Ejemplo 2.2.10. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy$ restringida al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Observemos que $\nabla f = (y, x)$ sólo se anula en el origen, y éste era un punto silla, como vimos en el ejemplo 2.1.4 y nuevamente en el ejemplo 2.2.1. Luego, como el conjunto es cerrado y acotado, la función alcanza sus extremos y tiene que hacerlo en el borde.

Parametrizamos el borde del círculo como la curva $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, que recorre el círculo cuando $0 \leq t \leq 2\pi$. Reemplazando $x = \cos(t)$, $y = \operatorname{sen}(t)$ en la función, nos queda a maximizar una función de una única variable,

$$f(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \cos(t) \cdot \operatorname{sen}(t),$$

y vemos dónde se anula la derivada:

$$f'(t) = -\operatorname{sen}(t) \cdot \operatorname{sen}(t) + \cos(t) \cdot \cos(t) = 0$$

es decir, si

$$\operatorname{sen}(t) \cdot \operatorname{sen}(t) = \cos(t) \cdot \cos(t).$$

Entonces, los posibles puntos críticos son

$$\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{3\pi}{4}, \qquad \frac{5\pi}{4}, \qquad \frac{7\pi}{4},$$

y evaluando f en cada uno,

$$\begin{aligned}
f\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\\
f\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) &= -\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\
f\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right) &= \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\\
f\left(\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)\right) &= \cos\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{7\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

comprobamos que el máximo absoluto se alcanza en los puntos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$; y el mínimo absoluto se alcanza en los puntos $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ejercicio 2.2.11. *Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y)$ restringida al dominio D indicado:*

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$,	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -2 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 3\}$
b) $f(x,y) = \cos(y) + \operatorname{sen}(x)$,	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi\}$
c) $f(x,y) = 1 + x + 2y$,	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - 1$,	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 1\}$
e) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$,	D *es el cuadrado formado por los vértices* $(0,0), (3,0), (3,-3), (0,-3)$
f) $f(x,y) = 4x - 2x^2 + 3y - y^2$,	D *es la región triangular acotada por las rectas* $y = x, y = -x$ *e* $y = 2$
g) $f(x,y) = \ln(4x^2 + 4y^2 + 3) + x$,	$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 1\}$

3. Extremos condicionados

En esta sección buscaremos extremos de funciones pero no sobre todo el plano, sino imponiendo alguna condición extra en las variables.

Por ejemplo, nos interesará encontrar máximos y mínimos de una función f sobre una curva de nivel de otra función g. Este problema tiene una interpretación económica clara en términos de *restricciones presupuestarias*: si queremos maximizar nuestra función utilidad, estaremos limitados a buscar el máximo sobre la recta presupuestaria g (es decir, sobre aquellos puntos del plano en los cuales g es igual al presupuesto del que disponemos); o de *curvas de indiferencia* para la función de utilidad: se quiere minimizar los costos sobre regiones que nos dan la misma utilidad.

Para esto, introduciremos el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar puntos críticos sobre restricciones, y explicaremos cómo determinar si son máximos o mínimos.

3.1. Multiplicadores de Lagrange

El siguiente teorema es el fundamento teórico del método de multiplicadores de Lagrange. No lo vamos a demostrar, porque necesitaríamos conceptos que escapan de los tratados en este libro, pero se puede ver la demostración en el libro de Courant y John [5].

Definición 3.1.1. *Si C_c es una curva de nivel c de una función g, diremos que $(x_0, y_0) \in C_c$ es un mínimo (respectivamente, máximo) relativo de f restringida a C_c si existe $r > 0$ tal que*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (\textit{resp. } f(x_0, y_0) \geq f(x, y))$$

para todos los puntos $(x, y) \in C_c$ que estén en el disco de centro (x_0, y_0) y radio r.

En otras palabras, f tiene un mínimo (respectivamente, máximo) en un punto de C_c si el valor de la función en él es menor (respectivamente, mayor) que en los puntos cercanos que pertenecen a C_c, no lo comparamos con el valor de la función en puntos que no pertenezcan a C_c.

El siguiente teorema nos da una condición que se cumple en un máximo o un mínimo de una función restringida a una curva de nivel de otra.

Teorema 3.1.2. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, y sea $(x_0, y_0) \in C_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x, y) = c\}$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, y f tiene un extremo en (x_0, y_0) restringida a C_c, entonces existe λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

A λ se lo llama el multiplicador de Lagrange.

Definición 3.1.3. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, y sea $(x, y) \in C_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x, y) = c\}$. Se define el Lagrangiano $\mathcal{L}$ como*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda)) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c).$$

La introducción del Lagrangiano nos permite formular un método para hallar puntos críticos basado en el teorema anterior. Las condiciones

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \qquad \text{y} \qquad g(x_0, y_0) = c$$

se convierten en verificar que se anulan las derivadas parciales de $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= g(x, y) - c = 0.
\end{aligned}$$

Observación 3.1.4. *También es posible definir el lagrangiano como $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$, es decir, con un signo $+$ en el término de la restricción. En los ejemplos de tipo económico lo plantearemos de esta forma.*

Observación 3.1.5. *Para averiguar si los puntos hallados son máximos o mínimos existe un criterio, el del Hessiano orlado, pero también se puede proceder como en la sección anterior, comparando que ocurre en los puntos vecinos al punto crítico. La diferencia principal es que en este caso los caminos que tomemos para aproximarnos al punto crítico deben estar en la restricción. Otra opción que utilizaremos muchas veces es graficar las curvas de nivel de la función f, y ver cómo intersecan a la restricción.*

Tenemos, además, un criterio importante y mucho más sencillo cuando la restricción es un conjunto cerrado y acotado, basado en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.6. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado y acotado, y sea f una función continua. Entonces, f alcanza su máximo y su mínimo en K.*

Podemos utilizar esta proposición en algunos casos especiales: si hay solamente dos puntos críticos, y ∇g existe para todo punto de C_c y no se anula en ninguno, entonces uno los puntos críticos hallados es el mínimo y el otro es el máximo; para determinarlos es suficiente evaluar la función en ambos, y decidimos de esa forma. En algunos casos puede haber más de dos puntos críticos, pero si la función toma en ellos sólo dos valores, también es suficiente para determinar cuáles son máximos y cuáles son mínimos.

Proposición 3.1.7. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, y sea $(x_0, y_0) \in C_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x, y) = c\}$ un extremo de f restringida a C_c. Si f tiene derivadas segundas continuas, definimos el Hessiano orlado como*

$$Hor(x_0, y_0, \lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ \mathcal{L}_{xy}(x_0, y_0) & \mathcal{L}_{yy}(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix}$$

y entonces,

- *Si $det(Hor(x_0, y_0, \lambda)) > 0$, el punto (x_0, y_0) es un máximo.*
- *Si $det(Hor(x_0, y_0, \lambda)) < 0$, el punto (x_0, y_0) es un mínimo.*
- *Si $det(Hor(x_0, y_0, \lambda)) = 0$, el criterio no decide.*

3.2. Restricciones acotadas

En las restricciones acotadas muchas veces podemos aplicar la Proposición 3.1.6 sin recurrir al criterio del Hessiano orlado ni dibujar las curvas de nivel. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. Hallar máximos y mínimos de $f(x, y) = 2x + y - 1$ en la restricción

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\}.$$

Definimos el Lagrangiano $\mathcal{L} = f - \lambda g$ y buscamos $\nabla\mathcal{L} = 0$. Nos queda

$$\mathcal{L} = 2x + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

Si igualamos a cero las derivadas,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 - 2x\lambda \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - 2y\lambda \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 5 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora para hallar x, y, λ. De la ecuación $\mathcal{L}_x = 0$ obtenemos

$$2 = 2x\lambda, \quad \text{de donde} \quad \frac{2}{2\lambda} = x,$$

y por lo tanto,

$$x = \frac{1}{\lambda}. \tag{3.1}$$

De $\mathcal{L}_y = 0$ obtenemos

$$1 = 2y\lambda, \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{2\lambda} = y,$$

y por lo tanto,

$$y = \frac{1}{2\lambda}. \tag{3.2}$$

Reemplazando x e y en $\mathcal{L}_\lambda = 0$,

$$-\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 5 = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5,$$

sumando,

$$\frac{4+1}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2} = 5,$$

con lo cual,

$$\frac{5}{4} = 5\lambda^2, \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{4} = \lambda^2.$$

Tenemos entonces dos soluciones:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Reemplazándolas en las ecuaciones para x e y (3.1) y (3.2), cuando $\lambda = 1/2$ nos queda

$$x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = 1,$$

es decir, el punto $(x, y) = (2, 1)$; y cuando $\lambda = -1/2$ nos queda

$$x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{-2\frac{1}{2}} = -1,$$

es decir, el punto $(x, y) = (-2, -1)$.

Como estos son los únicos puntos críticos, averiguamos cuál es el máximo y cuál es el mínimo evaluando en la función:

$$f(2, 1) = 2 \cdot 2 + 1 - 1 = 4$$

$$f(-2, -1) = 2 \cdot (-2) + (-1) - 1 = -6,$$

y por lo tanto, $(2, 1)$ es el máximo y $(-2, -1)$ es el mínimo.

3.3. Restricciones no acotadas

Cuando la restricción no es acotada no podemos garantizar la existencia de máximos o mínimos, y si bien el método nos da posibles puntos críticos, su análisis se vuelve más complicado. Una forma de encarar estos problemas es graficando las curvas de nivel de f y g. Supongamos que nos interesan los valores de f sobre los puntos de la restricción $g = 0$, con lo cual los valores que toma f sobre la restricción se analizan viendo la intersección de las curvas de nivel de f con $g = 0$. Si una curva de nivel c de f no cruza la curva $g = 0$, eso significa que f no alcanza nunca el valor c sobre la restricción. Graficando distintas curvas de nivel y viendo cómo crecen, tenemos una idea de qué valores toma f sobre la restricción. Si podemos determinar gráficamente en qué punto en el cual la curva de nivel $f = m$ interseca a $g = 0$ para el menor valor posible m, habremos hallado el mínimo. De la misma manera, el mayor valor M que tome f en $g = 0$ nos dará el máximo como la intersección de la curva de nivel $f = M$ con $g = 0$. De todas maneras, hallar el máximo o el mínimo por este método es prácticamente imposible. El método será hallar los puntos críticos utilizando multiplicadores de Lagrange, y luego decidiremos si es un máximo o un mínimo utilizando curvas de nivel.

Observación 3.3.1. *En los siguientes ejemplos veremos que cuando la restricción no es acotada, no tiene por qué haber un máximo o un mínimo (podría haber cualquiera de los dos, incluso ninguno).*

Ejemplo 3.3.2 (Caso donde sólo hay un mínimo)**.** Hallar máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la restricción

$$g(x, y) = x + y - 4 = 0.$$

Para este ejemplo conviene dibujar la restricción $g = 0$ y las curvas de nivel de f. La restricción $g = 0$ es una recta, despejando obtenemos que su ecuación es $y = -x + 4$.

Por otra parte, podemos ver que las curvas de nivel de f son círculos centrados en el origen, y si el radio es chico, no tocan la recta $y = 4 - x$. A medida que el radio crece, las curvas se acercan a $g = 0$, y hay una curva de nivel que la toca en un único punto. Luego, para radios mayores, los círculos cortan siempre a la recta $g = 0$ en dos puntos.

Interpretemos esta situación: para valores chicos de f, no hay puntos en $g = 0$ que tomen esos valores. Luego, hay un valor crítico que se alcanza en un único punto de la restricción. Por último, f toma valores arbitrariamente grandes sobre la restricción. Es decir, f tendrá un mínimo sobre $g = 0$, pero no tendrá un máximo. Ver figura 9.1

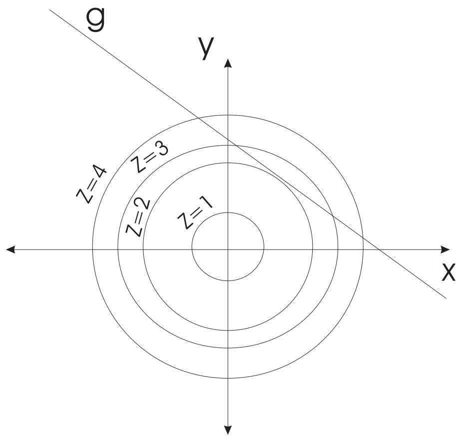


Figura 9.1: Restricción y curvas de nivel.

Resolvamos ahora el problema analíticamente. Definimos el Lagrangiano $\mathcal{L} = f - \lambda g$ y buscamos $\nabla \mathcal{L} = 0$. Nos queda

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 4).$$

Igualamos a cero ∇L,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & = & \mathcal{L}_x & = & 2x - \lambda \\ 0 & = & \mathcal{L}_y & = & 2y - \lambda \\ 0 & = & \mathcal{L}_\lambda & = & -x - y + 4. \end{array}$$

Resolvamos ahora para hallar x, y, λ. De $\mathcal{L}_x = 0$, $\mathcal{L}_y = 0$ tenemos

$$2x = \lambda, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{\lambda}{2},$$

y

$$2y = \lambda, \quad \text{de donde} \quad y = \frac{\lambda}{2}.$$

Reemplazando x e y en $\mathcal{L}_\lambda = 0$,

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 4 = 0,$$

es decir, $-\lambda + 4 = 0$, y por lo tanto, $\lambda = 4$, con lo cual

$$x = 2, \qquad y = 2.$$

Observemos que hay una única solución, $(2, 2)$. Nos falta determinar si es un máximo o un mínimo (aunque el razonamiento previo con las curvas de nivel nos mostró que es un mínimo). Para decidirlo, podemos evaluar f en el punto $(2, 2)$ y compararlo con el valor de f en otro punto de la restricción $g = 0$, por ejemplo el punto $(4, 0)$ (este punto verifica $x + y - 4 = 0$). Ahora,

$$f(2, 2) = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$f(4, 0) = 4^2 + 0^2 = 16,$$

con lo cual $f(2, 2) < f(4, 0)$, y debería ser un mínimo, pero esto no es suficiente, y no nos queda otra opción que aplicar el criterio del Hessiano orlado.

Tenemos $\mathcal{L}_{xx} = 2$, $\mathcal{L}_{yy} = 2$, $\mathcal{L}_{xy} = 0$, $g_x = 1$, $g_y = 1$.

$$Hor(2, 2, 4) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y su determinante, desarrollándolo por la primera fila, es

$$det(Hor) = (-1)^{1+1} 2 \cdot (0 - 1) + (-1)^{1+3} 1 \cdot (0 - 2) = -2 - 2 = -4 < 0.$$

Luego, el punto $(2, 2)$ es un mínimo.

Ejemplo 3.3.3 (Caso donde sólo hay un máximo)**.** Hallar máximos y mínimos de $f(x, y) = y - x^2 + 2x$ en la restricción

$$g(x, y) = y + x^2 - 1 = 0.$$

Planteamos el lagrangiano, $\mathcal{L} = y - x^2 + 2x - \lambda(y + x^2 - 1)$, y buscamos $\nabla\mathcal{L} = 0$. Nos queda

$$\begin{array}{ccccl} 0 & = & \mathcal{L}_x & = & -2x + 2 - 2\lambda x \\ 0 & = & \mathcal{L}_y & = & 1 - \lambda \\ 0 & = & \mathcal{L}_\lambda & = & -(y + x^2 - 1). \end{array}$$

De $\mathcal{L}_y = 0$ obtenemos $\lambda = 1$. Reemplazando en $\mathcal{L}_x = 0$, nos queda:

$$-2x + 2 - 2x = 0, \quad \text{es decir} \quad -4x + 2 = 0,$$

y, por lo tanto, $x = 1/2$. Por último, reemplazando $x = 1/2$ en la restricción,

$$y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0, \quad \text{esto es,} \quad y = \frac{3}{4}.$$

Obtuvimos un único punto crítico, $x = 1/2$, $y = 3/4$. Para decidir si es máximo o mínimo nos conviene dibujar la restricción y distintas curvas de nivel.

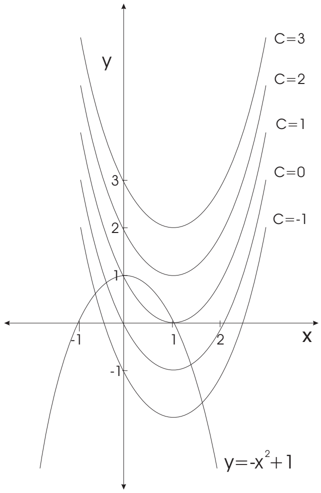


Figura 9.2: Restricción y curvas de nivel

Si consideramos las curvas de nivel para $c = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ 3$ y las graficamos, nos dicen en qué dirección crecen las curvas de nivel de f, y por lo tanto concluímos que el punto encontrado es un máximo. Ver figura 9.2.

Podemos también verificar este resultado con el criterio del Hessiano orlado, pues $\mathcal{L}_{xx} = -2 - 2\lambda$, $\mathcal{L}_{yy} = 0$, $\mathcal{L}_{xy} = 0$, $g_x = 2x$, $g_y = 1$.

$$Hor(2,2,1) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y su determinante, desarrollándolo por la segunda fila, es

$$det(Hor) = (-1)^{2+3} 1 \cdot (-4 - 0) = 4 > 0,$$

y es un máximo.

Ejemplo 3.3.4 (Caso donde no hay máximos ni mínimos)**.** Hallar máximos y mínimos de $f(x,y) = 2x + y - 1$ en la restricción

$$S = \{(x,y) : x + y = 5\}.$$

Definimos el Lagrangiano $\mathcal{L} = f - \lambda g = 2x + y - 1 - \lambda(x + y - 5)$ y buscamos $\nabla\mathcal{L} = 0$. Nos queda

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & \mathcal{L}_x & = & 2 - \lambda \\ 0 & = & \mathcal{L}_y & = & 1 - \lambda \\ 0 & = & \mathcal{L}_\lambda & = & -x - y + 5. \end{array}$$

Cuando queremos resolver para hallar x, y, λ, encontramos una contradicción:

- de $\mathcal{L}_x = 0$ tenemos $2 = \lambda$.

- de $\mathcal{L}_y = 0$ tenemos $1 = \lambda$.

Esto es una contradicción, ya que si $\lambda = 2$, entonces no puede ser $\lambda = 1$. El problema no tiene máximos ni mínimos en la restricción.

Ejercicio 3.3.5. *Dibuje las curvas de nivel de f y la restricción S para el ejemplo anterior. ¿Se nota por qué no hay máximos ni mínimos?*

El siguiente es un caso especial, donde la restricción está separada en dos partes. En este caso, aunque encontremos puntos críticos, no tenemos máximos ni mínimos globales, pero sí un máximo local y un mínimo local.

Ejemplo 3.3.6. Hallar máximos y mínimos de $f(x, y) = 2x + y$ en la restricción

$$S = \{(x, y) : xy = 32\}.$$

Como siempre, definimos $\mathcal{L} = 2x + y - \lambda(xy - 32)$. Ahora,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & = & \mathcal{L}_x & = & 2 - \lambda y \\ 0 & = & \mathcal{L}_y & = & 1 - \lambda x \\ 0 & = & \mathcal{L}_\lambda & = & -(xy - 32). \end{array}$$

De las dos primeras tenemos

$$y = \frac{2}{\lambda}, \qquad x = \frac{1}{\lambda}.$$

Reemplazando en la tercera,

$$\frac{2}{\lambda^2} = 32,$$

y despejando, vemos que hay dos soluciones: $\lambda = \pm 1/4$.

Luego, se tienen dos puntos críticos al reemplazar en x e y,

$$(4, 8) \qquad (-4, -8).$$

Si calculamos f en estos puntos, obtenemos:

$$f(4, 8) = 2 \cdot 4 + 8 = 16,$$

$$f(-4, -8) = -2 \cdot 4 - 8 = -16,$$

con lo cual podríamos pensar que $(4, 8)$ es un máximo, y $(-4, -8)$ un mínimo, pero no lo es. Para esto, veamos las curvas de nivel graficadas en la figura 9.3. La función crece de abajo hacia arriba, y de izquierda a derecha.

Se ve entonces, por la dirección en la que crecen las curvas de nivel, que $(4, 8)$ es un mínimo local, no es un máximo, y que $(-4, -8)$ es un máximo local, no un mínimo. El problema aquí es que la restricción está dividida en dos regiones separadas.

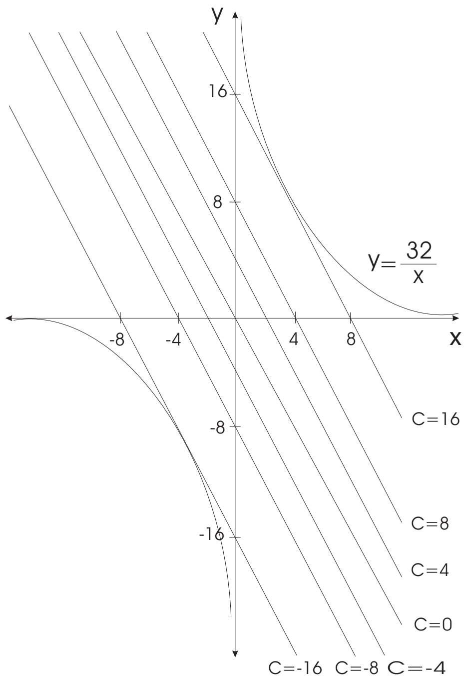


Figura 9.3: Curvas de nivel del ejemplo 3.3.6

Ejercicio 3.3.7. *Para las siguientes funciones $f(x, y)$ sujetas a la restricción $g(x, y)$:*

a) Graficar algunas curvas de nivel de f y la restricción.

b) Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f relativos a la restricción.

c) Interpretar los resultados geométricamente.

i) $f(x, y) = y - x^2 + 2x,$	$g(x, y) = y + x^2 - 1 \equiv 0$
ii) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1,$	$g(x, y) = xy - 1 \equiv 0$
iii) $f(x, y) = xy,$	$g(x, y) = x + y - 10 \equiv 0$
iv) $f(x, y) = x^2 + y^2,$	$g(x, y) = 2x - 4y + 5 \equiv 0$
v) $f(x, y) = x^2 - y^2,$	$g(x, y) = y - x^2 \equiv 0$
vi) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$	$g(x, y) = x + 2y - 10 \equiv 0$
vii) $f(x, y) = 2x + y,$	$g(x, y) = xy - 32 \equiv 0$

4. Aplicaciones económicas

En esta sección veremos tres aplicaciones económicas de los problemas de extremos: discriminación de precios, producción múltiple, y restricciones presupuestarias.

En esta última veremos además una interpretación económica del multiplicador de Lagrange λ.

4.1. Discriminación de precios

Vamos a considerar el caso en que un productor es monopolista en mercados diferentes, y puede fijar distintos precios de venta de su producto. Por una cuestión de simplicidad vamos a considerar solamente 2 mercados, mercado I y mercado II. Al productor le interesará averiguar: qué cantidad del producto colocará en cada mercado, a qué precio venderá su producto en cada uno de ellos y cuál será el beneficio máximo.

Ejemplo 4.1.1. Una empresa multinacional sacó un nuevo producto a la venta para venderlo en Argentina (mercado I) y Brasil (mercado II), y pretende venderlo a distintos precios. Las leyes de salida-precio son respectivamente: $p_1 = 20 - 4q_1$ y $p_2 = 30 - \frac{1}{2}q_2$. Además, su función costo es $C(q_1, q_2) = 9 + 4q_1 + 16q_2$.

1. ¿Qué producción debe destinar a cada mercado y a cuánto debe vender el producto en cada uno de ellos para obtener el máximo beneficio?
2. Hallar la elasticidad de cada demanda (q) con respecto al precio correspondiente a cada mercado. Evaluar la elasticidad en los precios que maximizan el beneficio.
3. Si el productor decide aumentar en 1 % alguno de los precios, ¿cómo cambia la demanda?

Para hallar el beneficio máximo debemos maximizar la función $B = I - C$, donde $I = p_1q_1 + p_2q_2$. En este ejemplo,

$$I = (20 - 4q_1)q_1 + (30 - \frac{1}{2}q_2)q_2 = 20q_1 - 4{q_1}^2 + 30q_2 - \frac{1}{2}{q_2}^2,$$

con lo cual

$$B = 20q_1 - 4{q_1}^2 + 30q_2 - \frac{1}{2}{q_2}^2 - 9 - 4q_1 - 16q_2$$

y nos queda

$$B = -4{q_1}^2 - \frac{1}{2}{q_2}^2 + 16q_1 + 14q_2 - 9.$$

Para hallar los puntos críticos necesitamos las derivadas parciales

$$\begin{array}{rcccl} B_{q_1} & = & -8q_1 + 16 & = & 0 \\ B_{q_2} & = & -q_2 + 14 & = & 0 \end{array}$$

y la solución de este sistema lineal es $(q_1, q_2) = (2, 14)$.

Para verificar que el punto crítico es un máximo calcularemos el determinante Hessiano, y para esto necesitamos las derivadas segundas:

$$B_{q_1\,q_1} = -8 \qquad B_{q_1\,q_2} = 0 \qquad B_{q_2\,q_2} = -1.$$

Entonces,

$$H = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

con lo cual $det(H) = 8 > 0$ y como $B_{q_1\,q_1} = -8 < 0$, el punto crítico es un máximo. Por lo tanto, las cantidades que hacen máximo al beneficio son $q_1 = 2$ y $q_2 = 14$.

Para hallar los precios y el beneficio máximo basta reemplazar en las ecuaciones correspondientes

$$p_1 = 12 \qquad p_2 = 23, \qquad B_{max} = 105.$$

Finalmente, para hallar las elasticidades necesitamos tener las demandas en función de los precios correspondientes, y si despejamos

$$4q_1 = 20 - p_1 \quad \text{queda} \quad q_1 = 5 - \frac{1}{4}p_1,$$

$$\frac{1}{2}q_2 = 30 - p_2 \quad \text{queda} \quad q_2 = 60 - 2p_2.$$

Ahora,

$$\frac{Eq_1}{Ep_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1} = -\frac{1}{4}\frac{p_1}{5 - \frac{1}{4}p_1}\bigg|_{12} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{Eq_2}{Ep_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_2} = -2\frac{p_2}{60 - 2p_2}\bigg|_{23} = -\frac{23}{7}.$$

La interpretación económica sería la siguiente: si el precio del artículo vendido en el mercado I aumenta en $1\,\%$, la demanda en ese mercado cae aproximadamente en un $1,5\,\%$. Si el precio del bien en el mercado II aumenta en $1\,\%$, la demanda en ese mercado cae en un $3,29\,\%$ aproximadamente.

4.2. Producción múltiple

Consideremos una empresa productora de dos bienes en competencia perfecta, donde p_1 y p_2 son los precios unitarios de cada uno. Nos interesa saber a qué precio debe venderlos para maximizar el beneficio. Vayamos directamente a un ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. Una empresa produce dos bienes: Bien 1 y Bien 2. Las leyes de demanda correspondientes son $q_1 = 300 - 3p_1 + 2p_2$ y $q_2 = 920 - 4p_2 + 2p_1$; y la función costo está dada por $C(q_1, q_2) = 80q_1 + 30q_2$. Determinar los precios de cada producto para obtener el máximo beneficio.

Sabemos que $B = I - C$, donde $I = p_1q_1 + p_2q_2$. Aquí tenemos un pequeño problema ya que las demandas están en función de los precios y el costo en función de las demandas, por lo tanto, dejaremos la función beneficio en función de los precios unitarios de cada bien. Entonces:

$$\begin{aligned} I &= (300 - 3p_1 + 2p_2)p_1 + (920 - 4p_2 + 2p_1)p_2 \\ &= 300p_1 - 3{p_1}^2 + 2p_1p_2 + 920p_2 - 4{p_2}^2 + 2p_1p_2, \end{aligned}$$

con lo cual

$$I = 300p_1 - 3{p_1}^2 + 4p_1p_2 + 920p_2 - 4{p_2}^2.$$

Ahora,

$$\begin{array}{rcl} C(p_1, p_2) & = & 80(300 - 3p_1 + 2p_2) + 30(920 - 4p_2 + 2p_1) \\ & = & 24000 - 240p_1 + 160p_2 + 27600 - 120p_2 + 60p_1 \\ & = & 51600 - 240p_1 + 160p_2 - 120p_2 + 60p_1 \end{array}$$

y la función beneficio que tenemos que maximizar es

$$\begin{array}{rcl} B(p_1, p_2) & = & 300p_1 - 3{p_1}^2 + 4p_1p_2 + 920p_2 - 4{p_2}^2 \\ & & -(51600 - 240p_1 + 160p_2 - 120p_2 + 60p_1), \\ & = & 480p_1 - 3{p_1}^2 + 4p_1\, p_2 + 880p_2 - 4{p_2}^2 - 51600. \end{array}$$

Calculamos las derivadas parciales, $B_{p_1} = 480 - 6p_1 + 4p_2$ y $B_{p_2} = 4p_1 + 880 - 8p_2$, y buscamos las soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 480 - 6p_1 + 4p_2 & = & 0 \\ 4p_1 + 880 - 8p_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema lineal, $(p_1, p_2) = (230, 225)$.

Para verificar que el punto crítico es un máximo calculamos las derivadas segundas y el Hessiano: $B_{p_1\, p_1} = -6$, $B_{p_1\, p_2} = 4$, $B_{p_2\, p_2} = -8$, y ahora

$$H = \left| \begin{array}{cc} -6 & 4 \\ 4 & -8 \end{array} \right|,$$

con lo cual $det(H) = 32 > 0$ y $B_{p_1\, p_1} = -6 < 0$, el punto crítico es máximo.

Entonces, los precios con los cuales se logra el máximo beneficio son \$230 para el bien 1, y \$225 para el bien 2. Para calcular la máxima ganancia basta reemplazar los precios mencionados en la función beneficio, y $B_{max} = 102600$.

Ejemplo 4.2.2. Una empresa produce dos bienes x_1 y x_2, y sus leyes de demanda son

$$D_1 = 100 - 3p_1 + p_2$$

$$D_2 = 200 + p_1 - p_2.$$

Se desea hallar el máximo beneficio sabiendo que el costo es $C = 20D_1 + 10D_2$.

El primer paso es obtener la función a maximizar, que es $B = I - C$, es decir,

$$B = p_1 \cdot D_1 + p_2 \cdot D_2 - 20D_1 - 10D_2,$$

y reemplazando las demandas,

$$B = p_1(100 - 3p_1 + p_2) + p_2(200 + p_1 - p_2) - 20(100 - 3p_1 + p_2) - 10(200 + p_1 - p_2).$$

Distribuyendo y agrupando nos queda:

$$B = 150p_1 + 190p_2 - 3p_1^2 - p_2^2 + 2p_1p_2 - 4000.$$

El próximo paso es buscar los puntos críticos. Para eso buscamos los ceros de las derivadas parciales,

$$B_{p_1} = 150 - 6p_1 + 2p_2 = 0$$

$$B_{p_2} = 190 - 2p_2 + 2p_1 = 0.$$

Si sumamos ambas derivadas, obtenemos

$$340 - 4p_1 = 0,$$

de donde despejamos $p_1 = 85$. Reemplazando en la primera ecuación,

$$150 - 6 \cdot 85 + 2p_2 = 0$$

$$-360 + 2p_2 = 0$$

y obtenemos $p_2 = 180$. El último paso es determinar si es un máximo, y para eso utilizamos el criterio del Hessiano. Tenemos:

$$B_{p_1p_1} = -6$$

$$B_{p_2p_2} = -2$$

$$B_{p_1p_2} = 2$$

Luego,

$$det(H(85, 180)) = det \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0.$$

Como el determinante es positivo, y el coeficiente $B_{p_1p_1}$ es negativo, el punto crítico es un máximo, luego se alcanza el máximo beneficio cuando $p_1 = 85$ y $p_2 = 180$. Para hallar dicho beneficio basta reemplazar los precios en la función.

Ejercicio 4.2.3. *Las demandas de dos bienes X_1 y X_2 son $D_1 = 24 - 2p_1$ y $D_2 = 20 - 4p_2$ y la función costo es $C(p_1, p_2) = p_1^2 + p_1\, p_2 + 2p_2^2$, hallar los precios p_1 y p_2 y las cantidades D_1 y D_2 que maximizan el beneficio.*

Ejercicio 4.2.4. *Una empresa productora de dos bienes presenta las siguientes funciones de demanda:*
$q_1 = 40 - 2p_1 + p_2$
$q_2 = 15 + p_1 - p_2$
siendo p_1 y p_2 los precios de salida de ambos bienes. Si el costo total esta dado por $C = q_1^2 + q_1\, q_2 + q_2^2$, maximizar el beneficio total dando las cantidades y precios que lo determinan.

Ejercicio 4.2.5. *Una empresa sacó un nuevo producto a la venta para venderlo en Argentina (mercado I) y Brasil (mercado II), el producto pretende venderlo a distintos precios. Las leyes de salida-precio son respectivamente: $p_1 = 10 - 2q_1$ y $p_2 = 30 - q_2$. Además su función costo es $C(q_1, q_2) = 9 + 2q_1 + 2q_2$.*

a) *¿Qué producción debe destinarse a cada mercado y a cuánto debe venderse el producto en cada uno de ellos para obtener el máximo beneficio? (verificar que el punto crítico es máximo)*

b) *Hallar la elasticidad de cada demanda (q) con respecto al precio correspondiente a cada mercado. Evaluar la elasticidad en los precios que maximizan el beneficio e interpretar el resultado económicamente.*

4.3. Restricciones presupuestarias e interpretación de λ

Desde el punto de vista económico las aplicaciones de los extremos condicionados son más interesantes que las de extremos libres, ya que siempre existen restricciones presupuestarias, de insumos, de tiempo, etc.

Cuando resolvemos un problema de extremos utilizando multiplicadores de Lagrange, el módulo de λ representa aproximadamente en cuánto variaría la función objetivo (la función a maximizar o minimizar) si la restricción aumentara en una unidad. Por ejemplo, cuando tenemos que maximizar la utilidad de un consumidor sujeto a cierto ingreso, si el mismo aumentara en \$1, la utilidad aumentaría en $|\lambda|$.

Ejemplo 4.3.1. La utilidad del consumidor de 2 bienes X e Y está dada por $U(x, y) = 4x + 17y - x^2 - xy - 3y^2$. El precio del bien X es de \$1 y el precio del bien Y es de \$2. Encuentre las cantidades de ambos bienes que brindan al consumidor la máxima satisfacción si el gasto que el consumidor asigna para ambos productos es de \$7. ¿Cuál es la máxima utilidad? Si el consumidor decide destinar \$8, en cuánto aumentará aproximadamente la utilidad?

En este tipo de ejercicios tenemos primero que identificar la función objetivo y la restricción. Aquí la función a maximizar es la utilidad y la restricción es el gasto. Entonces, tenemos que maximizar $U(x, y)$ sujeto a $x + 2y = 7$.

Resolviendo por el método de Lagrange, tenemos

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda g(x, y) \quad \text{con} \quad g(x, y) = x + 2y - 7,$$

(hemos planteado el lagrangiano como $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$), esto es,

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4x + 17y - x^2 - xy - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 7),$$

e igualando $\nabla\mathcal{L} = 0$,

$$\begin{array}{rcccl} 0 &=& \mathcal{L}_x &=& 4 - 2x - y + \lambda \\ 0 &=& \mathcal{L}_y &=& 17 - x - 6y + 2\lambda \\ 0 &=& \mathcal{L}_\lambda &=& x + 2y - 7. \end{array}$$

Tenemos que determinar las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 4 - 2x - y + \lambda &=& 0 & \quad (1) \\ 17 - x - 6y + 2\lambda &=& 0 & \quad (2) \\ x + 2y - 7 &=& 0 & \quad (3) \end{array} \right.$$

De (1) tenemos $\lambda = 2x + y - 4$, y por (2),

$$\lambda = \frac{x}{2} + 3y - \frac{17}{2}$$

e igualando tenemos

$$2x + y - 4 = \frac{x}{2} + 3y - \frac{17}{2},$$

con lo cual

$$\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 2y, \qquad y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}.$$

Reemplazando y en (3),

$$x + 2\left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right) - 7 = 0,$$

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - 7 = 0,$$

con lo cual

$$\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x = 1.$$

Volviendo atrás, tenemos que $y = 3$ y $\lambda = 1$.

El punto crítico es $(1, 3)$, y para ver si es un extremo calculamos el Hessiano orlado. Las derivadas segundas son

$$\mathcal{L}_{xx} = -2 \quad \mathcal{L}_{xy} = -1 \quad \mathcal{L}_{yy} = -6 \quad g_x = 1 \quad g_y = 2,$$

de donde

$$Hor(1, 3, 1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

y tenemos $det(Hor) = 10 > 0$. El punto crítico es un máximo, y la utilidad es $U_{max} = U(1, 3) = 24$.

Utilicemos ahora el multiplicador. Si el gasto del consumidor fuese de \$8, la utilidad aumentaría aproximadamente en $|\lambda| = 1$.

Ejemplo 4.3.2. Dada la función de producción $P = 3x_1x_2$, obtener el costo mínimo y las cantidades de cada insumo necesarias para producir 15 unidades si el costo fijo es de 150 y los precios unitarios de cada insumo son $p_1 = 5$ y $p_2 = 9$.

Aquí tenemos que tener en claro que la función objetivo es el costo (queremos hallar el costo mínimo) y la restricción es la producción. Como $CT = CV + CF$, queremos minimizar $C(x_1, x_2) = 5x_1 + 9x_2 + 150$ sujeto a $15 = 3x_1x_2$, que podemos despejar como $5 = x_1x_2$, y tenemos la restricción $g(x_1, x_2) = x_1x_2 - 5$.

El lagrangiano (planteándolo como $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$), será

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 5x_1 + 9x_2 + 150 + \lambda(x_1x_2 - 5),$$

e igualando $\nabla\mathcal{L} = 0$,

$$\begin{array}{rcccl} 0 &=& \mathcal{L}_{x_1} &=& 5 + \lambda x_2 \\ 0 &=& \mathcal{L}_{x_2} &=& 9 + \lambda x_1 \\ 0 &=& \mathcal{L}_{\lambda} &=& x_1 x_2 - 5, \end{array}$$

con lo cual debemos resolver

$$\left\{ \begin{array}{rclr} 5 + \lambda x_2 &=& 0 & (1) \\ 9 + \lambda x_1 &=& 0 & (2) \\ x_1 x_2 - 5 &=& 0 & (3) \end{array} \right.$$

Despejando en (1) y (2) y considerando que $x_1, x_2 \neq 0$ porque sino no cumplirían (3), obtenemos

$$\lambda = -\frac{5}{x_2}, \qquad \lambda = -\frac{9}{x_1}.$$

Igualándolas, tenemos que

$$-\frac{5}{x_2} = -\frac{9}{x_1}, \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{9}{5} x_2.$$

Reemplazando en (3),

$$\frac{9}{5} x_2 x_2 - 5 = 0, \quad \text{con lo cual} \quad x_2 = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad x_1 = 3.$$

Entonces, el punto crítico es el $(x_1, x_2) = (3, \frac{5}{3})$, con $\lambda = -3$.

Para aplicar el criterio del Hessiano orlado calculamos

$$\mathcal{L}_{x_1 x_1} = 0 \quad \mathcal{L}_{x_1 x_2} = \lambda \quad \mathcal{L}_{x_2 x_2} = 0 \quad g_{x_1} = x_2 = \frac{5}{3} \quad g_{x_2} = x_1.$$

Entonces,

$$Hor\left(3, \frac{5}{3}, -3\right) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & -3 & \frac{5}{3} \\ -3 & 0 & 3 \\ \frac{5}{3} & 3 & 0 \end{array} \right|,$$

con lo cual tenemos $det(H) = -30 < 0$, y el punto crítico es un mínimo. Luego, el costo mínimo es $C_{min} = C(3, \frac{5}{3}) = 180$.

Observemos que si la producción fuese de 16 unidades, el costo aumentaría en $|\lambda| = 3$

Ejercicio 4.3.3. *Dada la función de utilidad de un consumidor $U = x_1\, x_2$, los precios de los bienes son $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, y el ingreso es $I = 15$, encontrar las cantidades x_1 y x_2 que hacen máxima la utilidad y a cuánto asciende ésta. Dar la interpretación económica de λ*

Ejercicio 4.3.4. *Una fábrica produce artículos X_1 y X_2. La función de costo es $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1$ y se quiere minimizar el costo. Determinar el costo mínimo y las cantidades a producir si el total de artículos debe ser 8*

Ejercicio 4.3.5. *La función de utilidad es* $U = 10x_1 + 20x_2 + 4x_1\,x_2$. *Si el ingreso es de* \$18, *y sean los precios* $p_1 = 2$ *y* $p_2 = 3$ *respectivamente, hallar las cantidades que maximizan la utilidad y a cuánto asciende ésta. Dar la interpretación económica de* λ.

Ejercicio 4.3.6. *La utilidad del consumidor de dos bienes está dada por* $U(x, y) = x^2y^3$. *Los precios de dichos bienes son* $P_x = 1$,$P_y = 4$ *respectivamente. El monto asignado para la compra de ambos bienes es de* \$10, *hallar la máxima utilidad. ¿Cúanto hay que consumir de ambos bienes para alcanzarla? ¿Cuál es el significado económico de* $|\lambda|$*?*

Ejercicio 4.3.7. *Dada la función de producción de un artículo* $P(x_1, x_2) = 3x_1\,x_2$ *, si* x_1 *y* x_2 *son las cantidades de* 2 *insumos* X_1 *y* X_2 *y* $p_1 = 4$, $p_2 = 5$ *son los precios de los mismos,* \$300 *es el costo fijo, hallar: a) el costo mínimo para* $P = 6000$, *b) el producto máximo para* $C = 500$. *En ambos casos determinar las cantidades* x_1 *y* x_2 *correspondientes. Dar la interpretación económica de* λ

Apéndice 1

Integrales impropias

1. Integrales impropias

Dado $a \in \mathbb{R}$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos considerar integrales de la forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

También, si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, y $b < a < c$, podemos considerar integrales de la forma

$$\int_a^c f(x)dx, \qquad \int_b^a f(x)dx, \qquad \int_b^c f(x)dx.$$

Un primer problema es cómo definirlas, ya que el dominio de integración no está acotado en las primeras, y en la segunda es la imagen la que no está acotada.

En estos casos, las integrales se definen como un límite:

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx, \\
\int_{-\infty}^a f(x)dx &= \lim_{S \to -\infty} \int_S^a f(x)dx, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{R \to +\infty} \lim_{S \to -\infty} \int_S^R f(x)dx, \\
\int_a^c f(x)dx &= \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x)dx, \\
\int_b^a f(x)dx &= \lim_{\alpha \to a^-} \int_b^\alpha f(x)dx, \\
\int_b^c f(x)dx &= \lim_{\alpha \to a^-} \int_b^\alpha f(x)dx + \lim_{\gamma \to a^+} \int_\gamma^c f(x)dx.
\end{aligned}$$

Si alguno de los límites no existen, diremos que la integral no existe, o que la función no es integrable.

También es posible que la función tenga más de un punto donde no está acotada, o que tenga puntos donde tienda a infinito y que el intervalo tampoco esté acotado. Las integrales se definen de manera análoga.

1.1. Ejemplos

Ejemplo 1.1.1. Calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

En este caso hacemos

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_1^R \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{-1}{R} + 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2. Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Recordemos que una primitiva es $arctg(x)$, con lo cual hacemos En este caso hacemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{R\to+\infty} \lim_{S\to-\infty} \int_S^R \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \lim_{S\to-\infty} arctg(x)|_S^R \\
&= \lim_{R\to+\infty} \lim_{S\to-\infty} (arctg(R) - arctg(S)) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.3. Decidir si existe la integral

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx.$$

Para hallar una primitiva de esta integral hacemos el cambio de variable

$$t = -x^2$$

$$dt = 2xdx$$

y nos queda

$$-\int \frac{1}{2}e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + k,$$

y volviendo a la variable original es

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k.$$

Ahora calculamos el límite:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{R\to\infty} \textstyle\int_0^R xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-R^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ya que $\lim_{R\to\infty} e^{-R^2} = 0$.

Ejemplo 1.1.4. Sea $f(x) = x$, Decidir si existe la integral de f en toda la recta.
Calculamos:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} xdx &= \lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to-\infty}\int_S^R xdx \\
&= \lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to-\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_S^R \\
&= \lim_{R\to+\infty}\lim_{S\to-\infty}\frac{R^2}{2} - \frac{S^2}{2}
\end{aligned}$$

y este límite no existe.

Observación 1.1.5. *Recordemos además que una función se dice par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La función anterior,*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

es par, ya que

$$f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

Esto muchas veces nos ahorra cálculos, ya que si f es par, por simetría tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Por otra parte, una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Un ejemplo de función impar es $f(x) = sen(x)$, otra es $f(x) = x^3$. En general, si f es impar y existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

por las propiedades de la integral tiene que ser igual a cero.

Ejercicio 1.1.6. *Dadas las integrales impropias*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx,$$

hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ para los cuales cada una de las integrales converge y los valores para los cuales divergen.

Ejercicio 1.1.7. *Decidir si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En el caso que converjan, calcular su valor.*

$$a)\ \int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)^2}dx \qquad b)\ \int_1^\infty \frac{x}{4+x^2}dx \qquad c)\ \int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$d)\ \int_0^\infty x\operatorname{sen}(x)dx \qquad e)\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad f)\ \int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx$$

$$g)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad h)\ \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx \qquad i)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Apéndice 2

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

1. Ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de segundo orden es aquella en la cual aparece involucrada la derivada segunda de la función incógnita. Aquí vamos a estudiar un caso muy particular, en el que la ecuación es lineal y los coeficientes son constantes. La forma general de estas ecuaciones es

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

con $a \neq 0$.

Si $f(x) = 0$ la denominamos ecuación homogénea.

1.1. Ecuaciones homogéneas

Vamos a estudiar aquí ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes homogéneas.

Definición 1.1.1. *Dos funciones y_1 e y_2 se dicen linealmente independientes si no existen constantes reales c_1 y c_2 distintas ambas de cero tal que*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.2. Las siguientes funciones son linealmente independientes:

- $y_1 = 1$, $y_2 = x$.
- $y_1 = x^2$, $y_2 = x^5$.
- $y_1 = \operatorname{sen}(x)$, $y_2 = \cos(x)$.
- $y_1 = e^x$, $y_2 = x$.

Una forma de verificarlo, es utilizando la derivada: si no son linealmente independientes, tendríamos

$$(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' = 0$$

con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$. Por ejemplo, en el primero, si tenemos

$$c_1 + c_2x = 0,$$

debe ser

$$(c_1 + c_2x)' = c_2 = 0.$$

Esto nos dice que $c_2 = 0$, pero entonces, como $c_1 + c_2x = c_1 = 0$, también $c_1 = 0$, lo cual contradice nuestra suposición.

Vamos a enunciar una serie de proposiciones sin demostración.

Proposición 1.1.3. *Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial:*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.1}$$

y

$$W(x) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Observación 1.1.4. *El determinante $W(x)$ se denomina wronskiano.*

Proposición 1.1.5. *Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$, entonces la solución general se escribe como*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Observación 1.1.6. *La solución general tiene ahora dos constantes desconocidas (las de primer orden, sólo tenían una). Para determinarlas, necesitaremos dos condiciones, y tenemos dos posibilidades:*

- *dar condiciones iniciales, de la forma $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ó*
- *dar condiciones en dos puntos, de la forma $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.*

El problema de resolver una ecuación lineal de segundo orden a coeficientes constantes se reduce entonces a encontrar dos solucioes y_1 e y_2 linealmente independientes.

Si proponemos como solución particular de la ecuación 1.1 a $y = e^{\lambda x}$, debemos determinar cuánto vale λ. Ahora, si $y = e^{\lambda x}$, entonces $y' = \lambda e^{\lambda x}$, e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Reemplazando,

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

Sacando $e^{\lambda x}$ de factor común,

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0,$$

y como la exponencial no se anula nunca, debe ser

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Este polinomio $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ recibe el nombre de polinomio característico. Entonces, los valores posibles de λ de una solución coinciden con las raíces del polinomio característico.

Hay tres casos, según cómo son las raíces:

a) Raíces reales y distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Sean λ_1 y λ_2 las dos raíces del polinomio característico. Entonces, las dos soluciones particulares de la ecuación 1.1 son $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Faltaría verificar que las soluciones son linealmente independientes, y para eso calculamos el wronskiano.

$$W(x) = det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} W(x) &= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1), \end{aligned}$$

y es distinto de cero (porque la exponencial nunca se anula, y porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$), con lo cual las soluciones son linealmente independientes.

Finalmente, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

b) Raíces iguales $\lambda_1 = \lambda_2$.

Veamos primero que pasa con el wronskiano:

$$W(x) = det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

Entonces, $W(x) = 0$, porque $\lambda_1 = \lambda_2$, y las soluciones y_1 e y_2 no son linealmente independientes.

Observemos que la función $y_x = xe^{\lambda_1 x}$ también es solución (lo verificaremos debajo), y ahora las soluciones $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e y_x sí son linealmente independientes, porque el wronskiano

$$W(x) = det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}$$

es distinto de cero:

$$W(x) = e^{2\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{2\lambda_1 x} - \lambda_1 x e^{2\lambda_1 x} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Falta demostrar que $y = xe^{\lambda_1 x}$ también es solución de $ay'' + by' + cy = 0$. Calculemos las derivadas, $y' = e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, $y'' = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$, y reemplazando en la ecuación tenemos

$$a(2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}) + b(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}) + cxe^{\lambda_1 x} =$$

$$e^{\lambda_1 x}(2a\lambda_1 + b) + xe^{\lambda_1 x}(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) = 0,$$

el segundo término se anula por ser raíz de la ecuación característica, y el primero porque es raíz doble y con lo cual también anula su derivada.

Luego, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución de la ecuación diferencial homogénea es

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

1. Raíces complejas λ_1 y $\overline{\lambda_1}$.

   Sean λ_1 y λ_2 las dos raíces del polinomio característico. Entonces, ambas raíces son números complejos conjugados,

   $$\lambda_1 = a + ib, \qquad \lambda_2 = a - ib.$$

   Proponemos las soluciones particulares

   $$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \qquad y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(bx),$$

   y para verificar que las soluciones son linealmente independientes, calculamos el wronskiano.

   $$W(x) = det\begin{pmatrix} e^{ax}\cos(bx) & e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \\ ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\operatorname{sen}(bx) & ae^{ax}\operatorname{sen}(bx) + be^{ax}\cos(bx) \end{pmatrix}$$

   Entonces,

   $$\begin{aligned} W(x) &= e^{ax}\cos(bx)[ae^{ax}\operatorname{sen}(bx) + be^{ax}\cos(bx)] \\ &\quad - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)[ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\operatorname{sen}(bx)] \\ &= e^{ax}\cos(bx)ae^{ax}\operatorname{sen}(bx) + e^{ax}\cos(bx)be^{ax}\cos(bx) \\ &\quad - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)ae^{ax}\cos(bx) + e^{ax}\operatorname{sen}(bx)be^{ax}\operatorname{sen}(bx) \\ &= ae^{2ax}\cos(bx)\operatorname{sen}(bx) + be^{2ax}\cos^2(bx) \\ &\quad - ae^{2ax}\operatorname{sen}(bx)\cos(bx) + be^{2ax}\operatorname{sen}^2(bx) \\ &= be^{2ax}\cos^2(bx) + be^{2ax}\operatorname{sen}^2(bx) = be^{2ax}[\cos^2(bx) + \operatorname{sen}^2(bx)] \\ &= be^{2ax}. \end{aligned}$$

   y es distinto de cero porque la exponencial nunca se anula, con lo cual las soluciones son linealmente independientes.

   Entonces la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

   $$y = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\operatorname{sen}(bx).$$

Ejemplo 1.1.7. Hallar la solución general de $y'' + 2y' - 3y = 0$.
El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Buscamos las raíces, que son

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3.$$

Como las raíces son distintas, la solución general es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Ejemplo 1.1.8. Hallar la solución general de $y'' - 4y' + 4y = 0$.
El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, cuya única raíz es $\lambda = 2$.
Como la raíz es doble, la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Resolvamos ahora un problema de valores iniciales.

Ejemplo 1.1.9. Hallar la solución de $y'' + 2y' - 3y = 0$ que satisface $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
Por el ejemplo (1.1.7) se tiene que la solución general es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^{-3\cdot 0} \\ 0 &= C_1 + C_2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $C_1 = -C_2$.
Para utilizar la segunda condición necesitamos la derivada de y,

$$y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x},$$

y tenemos

$$\begin{aligned} y'(0) &= C_1 - 3C_2 \\ 1 &= C_1 - 3C_2. \end{aligned}$$

Reemplazando aquí $C_1 = -C_2$ nos queda

$$1 = -C_2 - 3C_2 = -4C_2,$$

con lo cual $C_2 = -\frac{1}{4}$, y $C_1 = \frac{1}{4}$.
La solución buscada es

$$y = \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{-3x}.$$

1.2. Ecuaciones no homogéneas

Estudiaremos aquí las ecuaciones de la forma:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{1.2}$$

con $f(x) \neq 0$.

La solución general de la ecuación 1.2 es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y de cualquier solución particular de la ecuación no homogénea, la escribiremos

$$y = y_h + y_p.$$

Observemos que si y_p es una solución particular de la ecuación 1.2 se verificará

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = f(x).$$

Por otra parte, si y_h es una solución de la homogénea también se cumplirá

$$ay_h'' + by_h' + cy_h = 0.$$

Ahora veamos que $y = y_h + y_p$ es solución de la ecuación 1.2. Como $y = y_h + y_p$, entonces $y' = y_h' + y_p'$ e $y'' = y_h'' + y_p''$. Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} a(y_h'' + y_p'') + b(y_h' + y_p') + c(y_h + y_p) &= (ay_h'' + by_h' + cy_h) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Entonces, el problema de hallar una solución para la ecuación se reduce a determinar la solución de la homogenea y una solución particular. La de la homogénea ya sabemos cómo calcularla, veamos ahora como encontrar la particular.

Vamos a limitarnos aquí a una versión del método de los coeficientes indeterminados, que consiste en proponer como solución particular una función del mismo tipo que f (es decir, si f es un polinomio, exponencial, o trigonométrica, probaremos con polinomios, exponenciales, o trigonométricas). En los siguientes ejemplos veremos cómo funciona.

Ejemplo 1.2.1. Resolver la ecuación diferencial $2y'' - 4y' - 6y = 3x + 9$.

Primero hallamos la solución del homogéneo y_h resolviendo la ecuación $2y'' - 4y' - 6y = 0$. El polinomio característico es $P(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda - 6$, y las raíces son: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Como $f(x)$ es un polinomio de grado 1, planteamos como solución particular $y_p = Ax + B$. Ahora tenemos que encontrar A y B para que sea una solución particular de la ecuación no homogénea. Reemplazamos $y_p = Ax + B$, $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$ en la ecuación diferencial y obtenemos

$$2 \cdot 0 - 4A - 6(Ax + B) = 3x + 9,$$

con lo cual

$$-4A - 6Ax - 6B = 3x + 9, \quad \text{es decir} \quad -6Ax - 4A - 6B = 3x + 9.$$

Como dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -4A - 6B &= 9 \\ -6A &= 3 \end{cases}$$

de donde despejamos

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B = -\frac{7}{6}.$$

Luego,

$$y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{6},$$

y la solución general es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}.$$

Ejemplo 1.2.2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 5y' - 14y = 3e^{4x}$.

Resolvemos primero la homogénea $y'' + 5y' - 14y = 0$.

Como el polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda - 14$, las raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -7$. Entonces,

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-7x}.$$

Ahora, dado que $f(x)$ es una exponencial multiplicada por una constante, proponemos como solución particular $y_p = Ae^{4x}$ (el argumento de las exponenciales de $f(x)$ y de y_p tiene que ser el mismo). Entonces, $y_p = Ae^{4x}$, $y_p' = 4Ae^{4x}$, $y_p'' = 16Ae^{4x}$, y reemplazándolas en la ecuación no homogénea,

$$16Ae^{4x} + 5(4Ae^{4x}) - 14Ae^{4x} = 3e^{4x},$$

$$22Ae^{4x} = 3e^{4x}, \quad \text{es decir,} \quad 22A = 3, \qquad A = \frac{3}{22}.$$

Luego, la solución general es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-7x} + \frac{3}{22}e^{4x}.$$

Ejemplo 1.2.3. Hallar la solución general de $5y'' + 5y' - 10y = \cos(3x)$.

El polinomio característico es $P(\lambda) = 5\lambda^2 + 5\lambda - 10$, con lo cual las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Luego, $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Cuando $f(x)$ es una trigonométrica hay que plantear como y_p una suma entre el seno y el coseno, cada una multiplicadas por una constante (manteniendo el mismo argumento que el de $f(x)$). En este caso, proponemos $y_p = A\cos(3x) + B\,\mathrm{sen}(3x)$.

Entonces, $y_p' = -3A\,\mathrm{sen}(3x) + 3B\cos(3x)$, $y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\,\mathrm{sen}(3x)$. Reemplazando en la ecuación, tenemos que:

$$5[-9A\cos(3x) - 9B\,\mathrm{sen}(3x)] + 5[-3A\,\mathrm{sen}(3x) + 3B\cos(3x)]$$
$$-10[A\cos(3x) + B\,\mathrm{sen}(3x)] = \cos(3x),$$

y distribuyendo nos queda

$$-45A\cos(3x) - 45B\operatorname{sen}(3x) - 15A\operatorname{sen}(3x) + 15B\cos(3x)$$
$$-10A\cos(3x) - 10B\operatorname{sen}(3x) = \cos(3x),$$

con lo cual

$$(-55A + 15B)\cos(3x) + (-55B - 15A)\operatorname{sen}(3x) = \cos(3x).$$

Para que ambos miembros sean iguales tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} -55A + 15B & = & 1 \\ -55B - 15A & = & 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $A = -\frac{11}{650}$ y $B = \frac{3}{650}$, con lo cual la solución general es

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{11}{650}\cos(3x) + \frac{3}{650}\operatorname{sen}(3x).$$

El siguiente ejercicio se parece al ejercicio 1.2.1, si bien es muy diferente. Como veremos, parte de la función f del segundo miembro ya es solución de la ecuación homogénea, y por lo tanto, no podremos hallar una solución particular de la forma que lo hicimos antes. Esta clase de problemas se llaman *resonantes*. Para resolverlos habrá que multiplicar por x la solución particular propuesta.

Ejemplo 1.2.4. Hallar la solución general de $y'' + 2y' = 4x + 9$.

El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$, y las raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Entonces, $y_h = C_1 + C_2e^{-2x}$.

Como $f(x)$ es un polinomio de grado 1, en principio vamos a plantear $y_p = Ax + B$ igual que antes. Tenemos $y_p = Ax + B$, $y_p' = A$, $y_p'' = 0$ Reemplazando en la ecuación queda $2A = 4x + 9$, y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 0 & = & 4 \\ 2A & = & 9 \end{cases}$$

Podemos ver que este sistema no tiene solución, ya que $0 = 4$ nos lleva a un absurdo.

Vemos entonces que $y_p = Ax + B$ no sirve. Si multiplicamos B por x nos queda $y_p = Ax + Bx$, que tampoco sirve ya que sus términos no son linealmente independientes. Entonces planteamos $y_p = Ax^2 + Bx$. Calculamos sus derivadas $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$ y reemplazando en la ecuación tenemos $2A + 2(2Ax + B) = 4x + 9$, igualando coeficientes, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 4A & = & 4 \\ 2A + 2B & = & 9 \end{cases}$$

Aquí, $A = 1$ y $B = \frac{7}{2}$. Entonces, la solución general es

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + x^2 + \frac{7}{2}x.$$

Ejemplo 1.2.5. Resolver el siguiente problema de valores iniciales $y'' + 2y' = 4x + 9$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

Podemos ver que es la misma ecuación del ejemplo anterior pero con condiciones iniciales. Estas condiciones son utilizadas para obtener las constantes de la solución general C_1 y C_2. Obtuvimos

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^2 + \frac{7}{2}x,$$

con lo cual

$$y' = -2C_2 e^{-2x} + 2x + \frac{7}{2}.$$

Utilizando las condiciones dadas tenemos

$$y(0) = C_1 + C_2, \quad \text{es decir,} \quad 2 = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = -2C_2 + \frac{7}{2}, \quad \text{es decir,} \quad 1 = -2C_2 + \frac{7}{2}.$$

De esta última despejamos

$$C_2 = \frac{5}{4},$$

y entonces

$$2 = C_1 + \frac{5}{4}, \quad \text{con lo cual} \quad C_1 = \frac{3}{4}.$$

Reemplazando los valores de C_1 y C_2 se tiene la solución

$$y = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x} + x^2 + \frac{7}{2}x.$$

Ejemplo 1.2.6. Resolver la ecuación $y'' - y' = 3x^2 + x + 2e^x$.

El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, y sus raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Entonces, $y_h = C_1 + C_2 e^x$.

Aquí, $f(x)$ es una suma de un polinomio de grado 2 con una exponencial, entonces en principio plantearíamos $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x$, pero observemos que otra vez la solucíon particular incluye a las soluciones de la homogénea. Luego, multiplicando convenientemente por x planteamos

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dxe^x$$

y calculamos las derivadas $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C + De^x + Dxe^x$, $y_p'' = 6Ax + 2B + De^x + De^x + Dxe^x = 6Ax + 2B + 2De^x + Dxe^x$. Reemplazándolas en la ecuación obtenemos

$$6Ax + 2B + 2De^x + Dxe^x - (3Ax^2 + 2Bx + C + De^x + Dxe^x) = 3x^2 + x + 2e^x,$$

es decir,

$$6Ax + 2B + 2De^x + Dxe^x - 3Ax^2 - 2Bx - C - De^x - Dxe^x = 3x^2 + x + 2e^x.$$

Agrupando,

$$De^x - 3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = 3x^2 + x + 2e^x,$$

y resolvemos

$$\begin{cases} D & = & 2 \\ -3A & = & 3 \\ 6A - 2B & = & 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A = -1$, $B = -\frac{7}{2}$, y $C = -7$.

Luego, la solución general es

$$y = C_1 + C_2 e^x - x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 7x + 2xe^x.$$

Ejercicio 1.2.7. *Resolver las siguientes ecuaciones de segundo orden:*

a) $y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 8$

b) $3y'' - 3y' - 6y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 4$

c) $2y'' - 4y' - 6y = 3x + 9, \quad y(0) = \frac{5}{6}, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}$

d) $5y'' + 5y' - 10y = \cos(3x)$

e) $y'' + 5y' - 14y = 3e^{4x}, \quad y(0) = \frac{3}{22}, \quad y'(0) = \frac{17}{11}$

f) $y'' + 8y' + 15y = 2e^{3x} + 7x^2 + 9$

g) $y'' + 2y' = 4x + 9, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

h) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

i) $y'' - y' = 3x^2 + x + 2e^x$

j) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + x$

k) $y'' + 4y' - 5y = \cos(4x) + \operatorname{sen}(4x)$

Apéndice 3

Trabajos Prácticos

Práctica 0 - Repaso

1. Utilizando las propiedades de las derivadas verificar que:

   a) Si $f(x) = (x^3 - 6x)\operatorname{sen}(x) + 3(x^2 - 2)\cos(x)$, entonces $f'(x) = x^3\cos(x)$

   b) Si $x(y) = (y^2 + 1)e^y$, entonces $x'(y) = e^y(y + 1)^2$

   c) Si $f(\alpha) = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e^\alpha}{1-e^\alpha}}$, entonces $f'(\alpha) = \sqrt{\frac{e^\alpha}{1-e^\alpha}}$

   d) Si $x(t) = \ln tg(\frac{t}{2})$, entonces $x'(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}$ $(Sugerencia : \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\ \cos(x))$

   e) Si $f(x) = \ln^2(3x + 9)$, entonces $f'(x) = \frac{6}{3x+9}\ln(3x + 9)$

   f) Si $g(\psi) = e^{\cos(\psi^2+2\psi)}$, entonces $g'(\psi) = -(2\psi + 2)\operatorname{sen}(\psi^2 + 2\psi)e^{\cos(\psi^2+2\psi)}$

   g) Si $h(\lambda) = \ln[(3\lambda + 9x)^4]$, entonces $h'(\lambda) = \frac{12}{3\lambda+9x}$

   h) Si $x(\theta) = 5t\ln(\theta^2 + 2t\theta)$, entonces $x'(\theta) = \frac{10t(\theta+t)}{\theta^2+2t\theta}$

2. Halle la función de costo marginal de cierto bien cuya función de costo es: $c(q) = 300 + 15\ln(1 + 5q)$ y calcule el costo marginal para una producción de 40 unidades.

3. Determinar la elasticidad de la demanda respecto del precio, siendo la ley de demanda $x = 200e^{-0,4p}$.

4. Determinar la elasticidad del ingreso respecto del precio, siendo la ley de demanda
$$I(p) = 200e^{-0,4p}.$$

Práctica 1 – Integrales Indefinidas

1. Para cada una de las siguientes funciones, hallar todas las primitivas:

   i) 3 ii) $2x$ iii) $x^2 - 8x + 1$ iv) $\cos(x)$ v) e^x.

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$i)\ \int x^{25}dx \qquad ii)\ \int \sqrt{x}(2x+\sqrt{x})dx \qquad iii)\ \int (\pi + x^{11})dx$$

$$iv)\ \int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{x^2}{2}\right) \qquad v)\ \int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\right) dx$$

$$vi)\ \int (x^{-3} + x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{2}{7}})dx \qquad vii)\ \int \frac{x^2+1}{x}dx$$

3. Hallar una función $g(x)$ tal que:

   a) $g'(x) = \frac{1}{x}$, y $g(1) = 3$.

   b) $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$, y $g(0) = 1$.

4. Demostrar que
$$F(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{2}$$
   no es una primitiva de $f(x) = x\cos(x)$.

5. Utilizando el método de sustitución, hallar $\int f(x)dx$ para las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \operatorname{sen}(2x) \qquad b)\ f(x) = \cos(3-5x) \qquad c)\ f(x) = \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$$

$$d)\ f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad e)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \qquad f)\ f(x) = \operatorname{sen}(x)e^{\cos(x)}$$

$$g)\ f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x} \qquad h)\ f(x) = 3x\cos(x^2) \qquad i)\ f(x) = \operatorname{sen}(x)\sqrt{2+3\cos(x)}$$

$$j)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x}} \qquad k)\ f(x) = \frac{1}{\cos^2(5x)} \qquad l)\ f(x) = (5x^4-2x)(x^5-x^2)^{\frac{7}{2}}$$

$$m)\ f(x) = \frac{1}{4x+3} \qquad o)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} \qquad p)\ f(x) = \frac{3x^2-4x+2}{x^3-2x^2+2x}$$

6. Usando que $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg}(x) + k$, calcular:

$$i)\ \int \frac{1}{1+9x^2}dx \qquad ii)\ \int \frac{1}{4+(x-1)^2}dx$$

$$iii) \quad \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \qquad iv) \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

7. Utilizando el método de integración por partes, calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \quad \int x\cos(x)dx \qquad b) \quad \int x^2 \operatorname{sen}(x)dx \qquad c) \quad \int xe^{5x}dx$$

$$d) \quad \int e^x \operatorname{sen}(x)dx \qquad e) \quad \int \cos^2(x)dx \qquad f) \quad \int \frac{(x-1)^2}{x^{\frac{1}{4}}}dx$$

$$g) \quad \int x^2(x+9)^{-\frac{1}{2}}dx \qquad h) \quad \int (x+3)^2 x^{\frac{3}{4}}dx \qquad i) \quad \int \frac{x}{e^x}dx$$

8. Calcular las integrales

$$i) \quad \int x\ln(x)dx \qquad ii) \quad \int x^2\ln(x)dx \qquad iii) \quad \int x^3\ln(x)dx$$

9. Escribir $\operatorname{arc\,tg}(x) = 1 \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)$ y calcular $\int \operatorname{arc\,tg}(x)dx$.

10. Aplicando el método de fracciones simples, calcular:

$$a) \quad \int \frac{6x+10}{x^2+4x+3}dx \qquad b) \quad \int \frac{x^2-12x-8}{x^3-3x^2-4x}dx$$

$$c) \quad \int \frac{2x-21}{x^2-x-6}dx \qquad d) \quad \int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+4x+4)(x-3)}dx$$

$$e) \quad \int \frac{2x^2+x-6}{x^3+3x^2}dx \qquad f) \quad \int \frac{x^4+x+2}{2x^3+x^4}dx$$

11. Calcular las siguientes utilizando el método de integración que sea conveniente.

$$a) \quad \int \frac{e^x+3e^{2x}}{1-e^{2x}}dx \qquad b) \quad \int \frac{3u+1}{u^2+1}du \qquad c) \quad \int \frac{\ln(x)\ \operatorname{sen}(\ln(x))}{x}dx$$

$$d) \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad e) \quad \int x\ln(\sqrt{x}+1)dx \qquad f) \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg}(\ln(y))}{y}dy$$

Aplicaciones económicas

a) Un fabricante sabe que el costo marginal cuando se producen q unidades es $Cmg(q) = 3q^2 - 60q + 400$ dólares por unidad. Si el costo total de producción de dos unidades es 900 dólares, ¿cuál es el costo total de producción de las 5 primeras unidades?

b) La función de ingreso marginal en pesos, si se fabrican y venden x pares de cierto modelo de zapatillas, es $Img(x) = 50 + 9x - 0{,}15x^2$. ¿Cuál es la función ingreso total si el ingreso cuando se fabrican y se venden 10 pares de zapatillas es de \$900?

c) Si la función de ingreso marginal está dada por $Img(x) = 100 - 8x^2 + x^3$, determinar la función de ingreso total. (Considerar el ingreso nulo cuando $x = 0$).

d) Una empresa advierte que un incremento de 1 unidad de su producción provoca una suba de \$6 en el costo. Además se sabe que el costo de producir 10 unidades es de \$70. Hallar la función costo total de la empresa.

e) Se sabe que la función costo marginal verifica $Cmg(x) = xe^{-5x+1}$. Sabiendo que el costo de producir $\frac{1}{5}$ unidades es de \$4, hallar el costo total.

f) Sabiendo que el costo marginal y el ingreso marginal de cierto producto están dados por:

$$Cmg(x) = e^{3x}\,\mathrm{sen}(2x), \qquad Img(x) = \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}},$$

Calcular el beneficio total sabiendo que

$$C(0) = \frac{37}{13} \quad \text{e} \quad I(0) = \frac{7}{2}.$$

g) Si el costo marginal está dado por $Cmg(x) = e^{3x}x^2$, hallar la función costo total sabiendo que el costo fijo es de $\$\frac{29}{27}$, es decir, $C(0) = \frac{29}{27}$.

Práctica 2 – Integrales Definidas

1. Calcular las integrales definidas dadas:

$i)\quad \displaystyle\int_{-1}^{0} 3x^5 - 3x^2 + 2x - 1dx \qquad ii)\quad \int_{1}^{9} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

$iii)\quad \displaystyle\int_{0}^{1} (t^3 + t)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}dt \qquad iv)\quad \int_{1}^{2} \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2}dx$

$v)\quad \displaystyle\int_{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}^{\ln(2)} (e^t - e^{-t})dt \qquad vi)\quad \int_{2}^{e+1} \frac{x}{x-1}dx \qquad vii)\quad \int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

2. Hallar el área de la región limitada por la recta $y = 2x$, el eje x y la recta vertical $x = 2$.

3. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje x.

4. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, las rectas $x = 4$, $x = 9$ y el eje x.

5. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4$.

6. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ y las rectas $y = x$ e $y = \frac{x}{8}$.

7. Calcular el área de la región encerrada entre

$$\begin{cases} y &= \ln(x) \\ y &= 1 \\ x &= 1 \\ x &= 6 \end{cases}$$

8. Hallar el valor de $m > 0$ de manera que la región limitada por la recta $y = mx$ y la curva $y = 4x^3$ sea igual a 18.

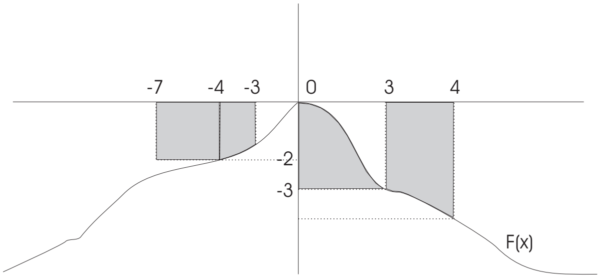
9. *a*) Decidir cuál o cuáles de las siguientes expresiones permite calcular el área sombreada. Justificá tu respuesta.

   1) $A = \int_{-7}^{-4}(-2)dx + \int_{-4}^{-3} f(x)dx + \int_{0}^{3}(f(x) - 3)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$

   2) $A = \int_{-7}^{-4}(2)dx + \int_{-4}^{-3}(-f(x))dx + \int_{0}^{3}(f(x) + 3)dx + \int_{3}^{4}(-f(x))dx$

   3) $A = \int_{-7}^{-3}(-f(x))dx + \int_{0}^{3}(f(x) - 3)dx + \int_{3}^{4}(-f(x))dx$

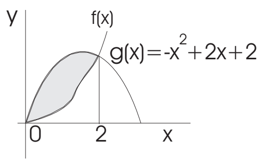
   4) $A = \int_{-7}^{-4}(2)dx + \int_{-4}^{-3}(-f(x))dx + \int_{0}^{3}(f(x) - 3)dx + \int_{3}^{4}(-f(x))dx$



b) ¿Por qué descartaste las otras opciones? Justificá tu respuesta

c) ¿Se puede afirmar que el área sombreada es mayor que 9? ¿Por qué?

10. Sabiendo que el área sombreada vale 3, hallar $\int_0^2 f(x)dx$.



Aplicaciones económicas

1. En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q-4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?

2. Una compañía determina que el ingreso marginal de la producción de x unidades es $I'(x) = 7 - 3x - 4x^2$ cientos de dólares por unidad y el correspondiente costo marginal es $C'(x) = 5 + 2x$ cientos de dólares por unidad. ¿Cuánto cambia la utilidad cuando el nivel de producción aumenta de 5 a 9 unidades?

3. Dadas las siguientes funciones para un determinado producto:

$$f(x) = 45 + 2x \quad \text{y} \quad g(x) = 144 - x^2$$

Hallar los excedentes del productor y del consumidor. Realizar un gráfico aproximado. (Sugerencia: determinar cuál función es la de demanda y cuál es la de oferta).

4. La función de demanda para cierto bien es $D(q) = \frac{18}{q+3}$ y la de oferta es $S(q) = \frac{1}{6}q + 1$. Hallar el excedente del consumidor.

5. La función de oferta de un artículo es $S(q) = \sqrt{10q + 100}$ y la de su demanda es $D(q) = -\frac{1}{2}q + 35$. Hallar el excedente del productor.

6. Sea $D(q) = (q + 32)e^{-4q+8}$ la función de demanda de cierto producto. Hallar el excedente del consumidor cuando el equilibrio se alcanza para una demanda de 2 unidades.

7. Se desea que el excedente del productor sea de \$64, y la función de oferta es $O(q) = a^2\, q^2$, donde a es el precio unitario ($a > 0$). Sabiendo que el precio de equilibrio es $p_e = 4$, ¿ A cuánto se tiene que vender cada artículo para obtener dicho superavit?

Práctica 3 – Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Demostrar que $y = e^{2t}$ no es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

2. Demostrar que para cualquier constante k, la función $y = ke^x$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y$.

3. Hallar los valores de C y k tales que la función $y = Ce^{kx}$ satisface el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

4. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $y' = 8y$ *b*) $y' = 3(y-4)$ *c*) $y' + e^{2x}y^2 = 0$

   d) $y' = xe^y$ *e*) $x(x+1)y' = y^2$ *f*) $y' = \dfrac{2\sqrt{y-1}}{x}$

   g) $y' = \dfrac{5y}{x}$ *h*) $x\ln(x)y' = y$ *i*) $(1-\cos(x))y' = y\operatorname{sen}(x)$

   j) $y' = y^2$ *k*) $(x+2)y' = yx$

5. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

   a) $y' = \dfrac{1+y}{1-x}, \quad y(0) = 3$ *b*) $y' = \dfrac{-y}{x^2}, \quad y(1) = e$

   c) $y' = \dfrac{-y\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad y(0) = -2$ *d*) $y' = \dfrac{\cos(x)}{e^y}, \quad y(0) = 1$

   e) $y' = (y+1)(x+1), \quad y(0) = 0$ *f*) $y' = xy^2, \quad y(1) = 1$

   g) $y' = \dfrac{y}{x^5}, \quad y(1) = 1$ *h*) $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}e^y, \quad y(0) = 0$

   i) $y' = \dfrac{-y\ln(y)}{x}, \quad y(1) = e$ *j*) $y' = \dfrac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 2$

   k) $y' = \dfrac{2x(1+e^y)}{e^y(1+x^2)}, \quad y(0) = 0$ *l*) $y' = \dfrac{1+y^2}{x}, \quad y(1) = 0$

   m) $y' = 2x(\pi + y), \quad y(0) = 0$

6. Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y' + 2y = e^{2x}$ *b*) $xy' - 3y = x^5$

c) $xy' + y + x = e^x$ *d*) $y' + y\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

e) $y' \operatorname{tg}(x) = y - 1$ *f*) $x^2y' + 2xy - e^x = 0$

g) $y' - \dfrac{3}{x}y = \dfrac{x+1}{x}$ *h*) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

i) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$ *j*) $y' - \dfrac{5}{x}y = e^x x^5$

k) $y' + \dfrac{7}{x}y = \dfrac{3}{x^7}$ *l*) $y' + y\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

ll) $y' + 2xy = x$ *m*) $(3x^2 + 1)y' - 2xy = 6x$

n) $y' + \frac{y}{3} = 0$ *o*) $xy' + (1 + x)y = 5$

p) $y' - 2y = \cos(x)$ *q*) $y' \cos(x) + y \operatorname{sen}(x) = 1$

r) $y' + \dfrac{7}{x}y = \dfrac{3}{x^7}$ *s*) $xy' + y = x$

t) $2y' + 3y = e^{-x}$

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método conveniente:

a) $(x + 1)y' + y = \dfrac{x+2}{x+1}$ *b*) $yy' \cos(x) - y^3 \operatorname{tg}(x) = 0$

c) $xy' - y = \ln(x) + 1$ *d*) $y' = \dfrac{\sqrt{4-4y^2}(2x+1)}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$

e) $y' = \dfrac{1+y^2}{x}$ *f*) $(x^2 + 1)y' - (x^2 - 2x + 1)y = xe^{-x}$

g) $y' = -\dfrac{1+2y}{4-x^2}$ *h*) $x\operatorname{sen}(x)y' + [\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)]y = xe^x$

Aplicaciones económicas

a) El cambio en el consumo C de una marca de zapatos a medida que cambia el ingreso I, está dado por $\frac{dC}{dI} = C + ke^I$, donde k es una constante. Hallar la función de consumo si $C(0) = 0$.

b) La elasticidad del precio p respecto de la cantidad demandada x está dada por $-\frac{2x}{10-x}$. Sabiendo que cuando el precio es de \$12 se demandan 2 unidades, hallar la función ingreso total.

c) La elasticidad de la demanda respecto del precio es $\frac{(d-2)p}{p+5}$, hallar la función de demanda en función del precio.

d) El cambio en las ganancias netas G a medida que cambia el gasto en propaganda x, está dado por $\frac{dG}{dx} = k - a(G + x)$ donde a y k son constantes. Hallar G como función de x, si $G = 0$ cuando $x = 0$.

e) Una cierta empresa sabe que su costo marginal es igual a una constante multiplicada por su costo más otra constante. Hallar la función costo sabiendo que el costo fijo es cero.

f) La tasa de incremento del costo total C, a medida que crece el número de unidades fabricadas x, es proporcional a la suma de las unidades fabricadas x más una constante, e inversamente proporcional al costo total. Encontrar la función costo total si $C(0) = C_0$.

g) En el modelo económico de EVANS se supone que las funciones de oferta y demanda en el equilibrio son lineales y que la variación del precio es proporcional a la diferencia entre la oferta y la demanda. Resolver la ecuación diferencial para encontrar la evolución del precio al transcurrir el tiempo. Hallar las condiciones para que el modelo sea estable.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

8. Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 8$

b) $3y'' - 3y' - 6y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 4$

c) $2y'' - 4y' - 6y = 3x + 9, \quad y(0) = \frac{5}{6}, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}$

d) $5y'' + 5y' - 10y = \cos(3x)$

e) $y'' + 5y' - 14y = 3e^{4x}, \quad y(0) = \frac{3}{22}, \quad y'(0) = \frac{17}{11}$

f) $y'' + 8y' + 15y = 2e^{3x} + 7x^2 + 9$

g) $y'' + 2y' = 4x + 9, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

h) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

i) $y'' - y' = 3x^2 + x + 2e^x$

j) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + x$

k) $y'' + 4y' - 5y = \cos(4x) + \operatorname{sen}(4x)$

Práctica 4 – Polinomio de Taylor

1. Para las siguientes funciones, hallar los polinomios de Taylor de grado n que aproximen las funciones dadas para x cerca de 0.

   a) $f(x) = \cos(x)$ para $n = 2, 3, 4$

   b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para $n = 3$

   c) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ para $n = 4$

   d) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ para $n = 3$

   e) $f(x) = \ln(1 + x)$ para $n = 5$

   f) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$ para $n = 3$

   g) $f(x) = (1 + x)^p$ para $n = 2, 3, 4$ (p es una constante)

2. Para las siguientes funciones, hallar los polinomios de Taylor de grado 4 que aproximen las funciones dadas para x cerca del punto dado x_0.

   a) $f(x) = e^x$ con $x_0 = 1$

   b) $f(x) = \cos(x)$ con $x_0 = \frac{\pi}{2}$

   c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ con $x_0 = \frac{\pi}{2}$

   d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ con $x_0 = 2$

   e) $f(x) = \ln(x)$ con $x_0 = 2$

3. *a*) Hallar el polinomio de Taylor de segundo grado para $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$ alrededor de $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$. ¿Qué se observa?

   b) Hallar el polinomio de Taylor de tercer grado para $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ alrededor de $x_0 = 0$. ¿Qué se observa?

   c) Basándose en las observaciones de los ítems anteriores haga una conjetura sobre las aproximaciones de Taylor de f cuando ya es un polinomio.

4. Dada la función $f(x) = \sqrt{x + 4}$, aproximar $\sqrt{3}$.

5. El polinomio de Taylor con $x_0 = 0$ de orden 4 de una función f es $P_4(x) = 3 - x^2 + 5x^3$. Hallar $f(0)\,, f'(0)\,, f''(0)\,, f'''(0)$ y $f^4(0)$.

6. Hallar a y b de modo tal que el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ de orden 2 de $f(x) = a\ln(1 + bx)$ sea $P_2(x) = 2x - 2x^2$.

7. *a*) Sea $f(x) = e^{-ax} + kx^2 + 2x$, hallar los valores de a y k sabiendo que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ es $P_2(x) = 1 + x + 4x^2$.

   b) Para los valores de a y k hallados, dar una cota del error si se quiere aproximar $f(1)$ a través de $P_2(1)$.

8. *a*) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x_0 = 0$ y la expresión del resto de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   b) Evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ cuando $x = 0,2$.

9. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x_0 = 0$ de la función $f(x) = e^x$. Calcular aproximadamente $e^{-0,1}$. Acotar el error cometido en la aproximación.

10. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \ln(x)$ alrededor de $x_0 = 1$. Usarlo para calcular aproximadamente $ln(1,3)$. Acotar el error cometido.

11. De una cota del error al usar la aproximación de primer grado en el punto $x_0 = 0$ de $f(x) = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[-1,1]$. Repita el ejercicio para una aproximación de tercer grado.

12. *a*) Dar una cota para el error máximo posible para el polinomio de Taylor de grado enésimo alrededor de $x = 0$ que aproxime a $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

    b) ¿Qué grado de polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ se necesita para calcular $\cos(0,1)$ a cuatro lugares decimales? (usen el ítem anterior para responder)

13. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x) = e^{-x^2}$. Calcular aproximadamente $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

14. Dada la función $f(x) = \sqrt{16+x}$

    a) Desarrolle el polinomio de Taylor de grado 2 de f en un x_0 conveniente si se quiere aproximar $\sqrt{16,5}$

    b) Pruebe (sin usar el valor exacto) que la aproximación tiene al menos 5 decimales exactos a partir de la coma.

15. Considere la función $f(x) = x\ln(x)$.

    a) Halle el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 1$. Escriba la expresión del resto.

    b) Acote el resto, cuando se quiere calcular $f(1,5)$ por medio de $P(1,5)$.

16. Considere la función $f(x) = \sqrt{x+1} + \cos(\frac{1}{2}x)$

    a) Aproximar el número $\sqrt{2} + \cos(\frac{1}{2})$ utilizando el polinomio de Taylor de f de grado 2 desarrollado en un x_0 conveniente.

    b) Acotar el error. ¿Por qué se obtuvo una cota tan grande? ¿Cuáles son las posibles razones?

17. Siendo $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + e^x$, acotar el error que se produce al aproximar $f(1)$ por $P(1)$ con $x_0 = 0$.

18. Calcular:

    a) el número e con un error menor que $\frac{1}{10^4}$

    b) $\operatorname{sen}(0,2)$ con un error menor que $\frac{1}{10^4}$

    c) $(1,3)^{\frac{2}{3}}$ con un error menor que $\frac{1}{100}$

Práctica 5 – Números complejos

1. Reducir a la forma cartesiana $a + ib$

   a) $(3+6i)+(5-2i)+(4-5i)$ *b)* $\dfrac{1}{i}$

   c) $(3+5i)(-4-2i)(-1+4i)$ *d)* $\dfrac{4+2i}{1-2i}$

   e) $(2-3i)-(5-4i)-(2-5i)$ *f)* $\dfrac{3+4i}{1-2i}$

   g) $i^{18}-3i^7+i^2(1-i^4)-(-i)^{26}$ *h)* $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}i}$

   i) $(1-i)^2(1+i)$ *j)* $\left(\dfrac{2i}{2+i}\right)^2$

   k) $|(1+2i)^5(2-3i)|$ *l)* $\overline{(5-i)(4+3i)}$

   m) $\dfrac{|(-1+i)(2+5i)|}{|(3-i)|}$ *n)* $|\overline{(3+4i)}(4-i)i^8|$

   o) $Re((3+2i)(1+5i))$ *p)* $Im\left(\dfrac{(2+i)^2}{1-i}\right)$

   q) $Re((1+i)^2)$ *r)* $Im(|3-4i|i^3)$

2. Siendo $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, calcular $\dfrac{3}{z+1} - \dfrac{1}{z}$ y z^2.

3. Mostrar que si z y w son números complejos, entonces

   a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ *b)* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ *c)* $z\overline{z} = \mid z \mid^2$

   d) z es real $\iff z = \overline{z}$ *e)* $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *f)* $\overline{\overline{z}} = z$

   g) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$ *h)* $\mid z \mid = \mid \overline{z} \mid$

4. Mostrar que la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$ tiene como soluciones a los números complejos $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

5. Escribir los siguientes números complejos en la forma polar $z = \mid z \mid e^{i\, arg(z)}$

$$-2+2i \qquad 1-i\sqrt{3} \qquad -3 \qquad 2i \qquad -\sqrt{7}+i\sqrt{21}$$

6. Calcular
$$e^{-i\pi/2} \qquad 5e^{i\pi/3} \qquad 4e^{i\pi/6}$$
en forma binomial o cartesiana.

7. *a*) Escribir en forma polar $z = re^{i\theta}$ los números complejos $1+i$ y $1-i$ y efectuar los siguientes cálculos (den las respuestas en forma cartesiana $z = a + ib$)
$$(1+i)^{100} \qquad (1+i)^{33}(1-i)^{50} \qquad \frac{1+i}{1-i}$$
   b) Escribir la forma polar de $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $w = \sqrt{3} - i$ y usarlas para calcular
$$z^3 w^2, \qquad \overline{z}w^5, \qquad \frac{w^4}{z^5}.$$

8. En cada caso encontrar todos los números complejos z que satisfacen las ecuaciones

   a) $z^2 = i$ *b*) $z^4 = 1$ *c*) $z^5 = -32$ *d*) $z^5 = 8z^2$ *e*) $z^3 = -\overline{z}$

9. Calcule las raíces cuartas de los complejos dados en el ejercicio 4.

10. *a*) Dado $w = \sqrt{3} - i$, hallar $u = z^3.w$

    b) Hallar los $v \in \mathbb{C}$ tal que $v^2 = u$

11. Hallar todos $z \in \mathbb{C}$ que verifican la siguiente ecuación:
$$2z^5 = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)z^2$$

12. Representar gráficamente todos los números complejos que satisfacen las siguientes condiciones:

    a) $\dfrac{\pi}{4} < arg(z) < \dfrac{3}{2}\pi$ y $Re(z) > 0.$

    b) $|w| < 1$ y $0 < Re(w) < \frac{1}{2}$

Práctica 6 – Límite y continuidad en varias variables

1. Identificar a qué objeto geométrico en $\mathbb{R}^2$ corresponden las siguientes ecuaciones. Graficar.

   a) $x^2 + y^2 = 9$, b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$, c) $9x^2 + 16y^2 = 1$

   d) $x^2 - y^2 = 0$, e) $(x+1)^2 + 25(y-1)^2 = 1$, f) $x^2 - y^2 = 1$

   g) $y - 3x^2 = 2$, h) $2x - 5y = 1$.

2. Trazando algunas curvas de nivel identificar a qué objeto geométrico en $\mathbb{R}^3$ corresponden las siguientes ecuaciones. Graficar.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$

   c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2 = 2$

   e) $2x + y + 3z = 1$, f) $x^2 + y^2 - z = 0$

   g) $z = x^2$, h) $4x^2 + 25y^2 + 16z^2 = 1$

   i) $x + 2z = 3$.

3. Determinar el dominio análiticamente y gráficamente de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = 2x - y^2$ b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-3y}$ c) $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$

   d) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ e) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ g) $f(x,y) = \dfrac{ln(2x-y)}{x^2 + y^2 - 4}$

   f) $f(x,y) = \dfrac{1}{ln(x^2 + y^2 - 1)}$

4. Dados dos bienes X_1 y X_2, hallar el dominio análiticamente y gráficamente de las siguientes funciones de demanda y costo

   a) $D_1(p_1,p_2) = 3p_1 - 2p_2$

   b) $C(p_1,p_2) = \dfrac{\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 - 9}}{p_1 + 2p_2}$

   c) $D_2(p_1,p_2) = 4p_1 + 3p_2$

5. Determinar analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones. Hallar, si es posible, las curvas de nivel cuando $z = -2, -1, 0, 1, 2$ y realizar un gráfico aproximado f.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *b)* $f(x,y) = x^2 + 4y^2$
   c) $f(x,y) = 9x^2 + 16y^2$ *d)* $f(x,y) = 3x - 2y$
   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *f)* $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$
   g) $f(x,y) = xy$ *h)* $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

6. Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = 3x_1\, x_2$:

   a) Trazar las curvas de indiferencia cuando $U = 6, 9, 15$. ¿Qué características podés observar de las mismas?

   b) Si los precios de los bienes son $p_1 = 5$ y $p_2 = 6$, hallar la ecuación de la recta presupuestaria para un ingreso de \$100

   c) ¿Que combinación de bienes conviene consumir con dicho ingreso? ¿Cuál es la máxima utilidad? (*Sugerencia: utilizar estudio de función en una variable*)

7. Ver si existen los siguientes límites dobles:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-4}{3+xy}$ *b*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(9x^2-y^2)\operatorname{sen}(2y)}{y(3x-y)}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\operatorname{sen}(x+y)}$ *d*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$ *f*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *h*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

   i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *j*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y^2-x^2)(x^2-3x+2)}{(y-x)(2x-2)}$

8. Analizar, en cada caso, la continuidad de la función f:

   a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$ b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$ c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

9. Dada la siguiente función: $f(x,y) = \frac{x^2+3y-10}{xy+3}$ Hallar L_1, L_2 y L_r en el punto $P = (-1, 3)$. ¿Qué conclusión se puede obtener con respecto al límite doble en ese punto?

10. Dada la siguiente función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, hallar L_1, L_2, L_r y L_p en el punto $P = (0, 0)$. ¿Qué conclusión se puede obtener con respecto al límite doble en ese punto?

11. Dada la siguiente función $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^3}$, hallar L_1, L_2, L_r y L_p en el punto $P = (0, 0)$. Luego probar por el camino $x = y^2$, ¿Qué conclusión se puede obtener con respecto al límite doble en ese punto?

12. Analizar la continuidad de la función f en el punto $(0, 0)$, si

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{ln(x^2+y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

13. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en el origen. En caso de no ser continua, si es posible redefinir f para que lo sea :

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\mathrm{sen}(3x) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14. Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto $(1,0)$. En caso de no ser continua, si es posible redefinir f para que lo sea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy-2y}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

15. Dada la siguiente función

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\,(y-1)^2}{(x+1)^2+(y-1)^2} & (x,y) \neq (-1,1) \\ \\ -6 & (x,y) = (-1,1) \end{cases}$$

a) Hallar L_1, L_2, L_r y L_p en el punto $(-1,1)$

b) ¿ Qué se puede afirmar sobre la continuidad de g en dicho punto?

Práctica 7 – Cálculo Diferencial en varias variables

1. Hallar f_x y f_y si:

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(x,y) = x^2y^3 & b) & f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \\
c) & f(x,y) = e^{xy} & d) & f(x,y) = x\cos(x)\cos(y) \\
e) & f(x,y) = x^y & f) & f(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y) \\
g) & f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\ln(\frac{y}{x}) & h) & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{2+\sqrt{x}}
\end{array}
$$

2. Calcular f_x, f_y y f_z en los puntos indicados.

   a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$, en $(1,1,1)$

   b) $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^4} + yz$, en $(0,0,1)$

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{xy} + \operatorname{tg}(z)$, en $(1,1,\frac{\pi}{4})$.

3. Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico en los puntos indicados:

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1),\ \text{en } (0,0) & b) & g(x,y) = x^2\cos(xy),\ \text{en } (1,0) \\
c) & h(x,y) = \sqrt{x^2+3y^4},\ \text{en } (1,1) & &
\end{array}
$$

4. Usar la información obtenida en el ejercicio anterior para aproximar $f(0{,}1;-0{,}2)$, $g(0{,}9;0{,}01)$ y $h(0{,}8;1{,}2)$.

5. Dadas las funciones:

$$
f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_2(x,y) = |x| + |y|
$$

$$
f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

   Ver que en $(0,0)$:

   a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.

   b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.

   c) f_3 es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

6. Sea $f(x,y) = \frac{\cos(x)+e^{xy}}{x^2+y^2}$. Mostrar que f es de clase C^1 en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

7. Calcular la derivada direccional de f:

   a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, en el punto $(1,2)$, en la dirección $v = (2,3)$

   b) $f(x,y) = e^{x+y}$, en el punto $(0,0)$, en la dirección $v = (4,1)$

   c) $f(x,y) = \sqrt{1+xy}$, en el punto $(1,0)$, en la dirección $v = (1,-1)$.

8. Analizar la continuidad y derivabilidad en el origen de
$$z = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. Calcular la derivada de f en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en los puntos indicados:

   a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, en $(1,2)$ *b*) $f(x,y) = e^{x+y}$, en $(0,0)$
   c) $f(x,y) = \sqrt{1+xy}$, en $(1,0)$

10. Indicar cuáles son las direcciones de mayor y de menor crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

    a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y^5)$, en $(0,0)$ *b*) $f(x,y) = xe^{xy}$, en $(1,0)$
    c) $f(x,y,z) = \sqrt{z+x^2y}$, en $(2,2,1)$.

11. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ en el punto $P = (4,-2)$ en la dirección $v = (1,3)$. ¿Cuál es la derivada direccional máxima y en qué dirección se alcanza?

12. Calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} y f_{yx} para las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = xy^4 + 3x^2y - xy$ *b*) $f(x,y) = x^3e^{-2y} + y^{-1}\cos(x)$
    c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$.

    ¿Qué sucede con f_{xy} y f_{yx}?

13. Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 para:

    a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, en $(0,0)$ *b*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$, en $(0,0)$
    c) $f(x,y) = e^{x-1}\cos(y)$, en $(1,0)$.

14. Determinar los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 de $f(x,y) = \cos(xy)$ en $(1,0)$ y utilizarlos para aproximar el valor de $f(0{,}9; 0{,}2)$.

Aplicaciones económicas

1. Dadas las funciones de demanda de dos artículos, clasificarlos entre sí:

   a) $D_1 = 20 - 2p_1 - p_2$ y $D_2 = 9 - p_1 - 2p_2$

   b) $D_1 = ae^{-p_1p_2}$ y $D_2 = be^{p_1-p_2}$

   c) $D_1 = \frac{4}{p_1^2p_2}$ y $D_2 = \frac{16}{p_1p_2^2}$ En todos los casos $a > 0, b > 0$

2. Si la función de demanda de un artículo es $D_1 = 5000 - 10p_1 + 20p_2 - p_2p_3$ en función de su precio p_1 y de los precios p_2 y p_3 de otros dos bienes, calcular las demandas marginales y las elasticidades parciales respecto de p_1, p_2 y p_3 para $p_1 = 8$, $p_2 = 12$ y $p_3 = 14$. Dar el significado económico de los resultados obtenidos. Clasificar el bien.

3. Un local de música vende Cds originales (Bien 1) y Cds copiados (Bien 2). Las demandas de ambos bienes son:
   $D_1 = e^{3p_2 - p_1}\,(5p_1 + 1)^2$ y $D_2 = (5p_2 + 4p_1^2)^3\,3p_1$

   a) Comparar ambos bienes entre ellos utilizando derivadas parciales. ¿Cómo son? Justificar.

   b) Hallar las elasticidades parciales de D_1 cuando $p_1 = 30$ y $p_2 = 10$. Interpretar económicamente el resultado. El dueño del local quiere aumentar en %1 alguno de los precios. ¿Cúal le conviene aumentar respecto a la demanda de los Cds originales?. Justificar.

4. Dados dos bienes con sus respectivas demandas: $D_1 = 3\,p_1\,e^{ap_1 + b\,p_2}$ y $D_2 = 4b\,e^{3p_2^2\,p_1}$ con $a > 0$ y $b < 0$:

   a) Comparar ambos bienes.

   b) Clasificar el bien 1.

   c) Hallar las dos elasticidades parciales de la demanda del bien 1.

5. Considerando las siguientes funciones de demanda de los bienes X_1, X_2:

$$D_1(p_1, p_2) = e^{\alpha + \beta p_1 p_2} \text{ y } D_2(p_1, p_2) = \frac{p_1 p_2}{1 - \alpha}$$

   a) Encontrar todos los $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que los bienes X_1 y X_2 resulten sustitutos.

   b) Teniendo en cuenta el dominio de D_2, para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ clasificar el bien x_2.

Práctica 8 - Extremos libres y condicionados

Extremos Libres

1. Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y + 5$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y$
   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ *d)* $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$
   e) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ *f)* $f(x,y) = e^x \cos(y)$
   g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ *h)* $f(x,y) = x^5 y + x y^5 + xy$
   i) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$

2. Analizar los puntos críticos de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ b) $f(x,y) = x^2 y + x y^2$

3. Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)$ restringida al dominio D indicado:

   a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 4,\ -1 \leq y \leq 3\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y) + \operatorname{sen}(x)$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$
   c) $f(x,y) = 1 + x + 2y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - 1$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   e) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$, D es el cuadrado formado por los vértices $(0,0), (3,0), (3,-3), (0,-3)$
   f) $f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$, D es la región triangular acotada por las rectas $y = x, y = -x$ e $y = 2$
   g) $f(x,y) = \ln(4x^2 + 4y^2 + 3) + x$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Aplicaciones económicas

1. Las demandas de dos bienes X_1 y X_2 son $D_1 = 24 - 2p_1$ y $D_2 = 20 - 4p_2$ y la función costo es $C(p_1, p_2) = p_1^2 + p_1\, p_2 + 2p_2^2$, hallar los precios p_1 y p_2 y las cantidades D_1 y D_2 que maximizan el beneficio.

2. Una empresa productora de dos bienes presenta las siguientes funciones de demanda:
   $q_1 = 40 - 2p_1 + p_2$
   $q_2 = 15 + p_1 - p_2$
   siendo p_1 y p_2 los precios de salida de ambos bienes. Si el costo total esta dado por $C = q_1^2 + q_1\, q_2 + q_2^2$, maximizar el beneficio total dando las cantidades y precios que lo determinan.

3. Una empresa sacó un nuevo producto a la venta para venderlo en Argentina (mercado I) y Brasil (mercado II), el producto pretende venderlo a distintos precios. Las leyes de salida-precio son respectivamente: $p_1 = 10 - 2q_1$ y $p_2 = 30 - q_2$. Además su función costo es $C(q_1, q_2) = 9 + 2q_1 + 2q_2$.

   a) ¿Qué producción debe destinarse a cada mercado y a cuánto debe venderse el producto en cada uno de ellos para obtener el máximo beneficio? (verificar que el punto crítico es un máximo).

   b) Hallar la elasticidad de cada demanda (q) con respecto al precio correspondiente a cada mercado. Evaluar la elasticidad en los precios que maximizan el beneficio e interpretar el resultado económicamente.

   c) Si el productor decide aumentar en 1 % alguno de los precios donde se maximiza el beneficio, ¿ cuál le conviene aumentar?

Extremos condicionados

1. Para las siguientes funciones $f(x, y)$ sujetas a la restricción $\phi(x, y)$:

   a) Graficar algunas curvas de nivel de f y la restricción.

   b) Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f relativos a la restricción.

   c) Interpretar los resultados geométricamente.

$$\begin{array}{ll}
i)\quad f(x,y) = y - x^2 + 2x, & \phi(x,y) = y + x^2 - 1 \equiv 0 \\
ii)\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 1, & \phi(x,y) = xy - 1 \equiv 0 \\
iii)\quad f(x,y) = xy, & \phi(x,y) = x + y - 10 \equiv 0 \\
iv)\quad f(x,y) = x^2 + y^2, & \phi(x,y) = 2x - 4y + 5 \equiv 0 \\
v)\quad f(x,y) = x^2 - y^2, & \phi(x,y) = y - x^2 \equiv 0 \\
vi)\quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, & \phi(x,y) = x + 2y - 10 \equiv 0 \\
vii)\quad f(x,y) = 2x + y, & \phi(x,y) = xy - 32 \equiv 0
\end{array}$$

Aplicaciones económicas

1. Si se gastan x miles de dólares en mano de obra e y miles de dólares en equipo, la producción de cierta fábrica será $Q(x, y) = 60x^2y$ unidades. Si hay 12000 dólares disponibles, ¿cómo debe distribuirse el dinero, entre mano de obra y equipo, para generar la mayor producción posible?

2. Si una empresa invierte x miles de dólares en mano de obra e y miles de dólares en desarrollo de sus productos, la función de producción es $Q(x, y) = xy$ y el costo de producción es $C(x, y) = 20x + 10y$. Si se quieren producir 3200 unidades, ¿cómo debe distribuirse el dinero para que el costo sea mínimo?

3. Dada la función de utilidad de un consumidor $U = x_1 \, x_2$, los precios de los bienes son $p_1 = 1$,$p_2 = 3$, y el ingreso es $I = 15$, encontrar las cantidades x_1 y x_2 que hacen máxima la utilidad y a cuánto asciende ésta. Dar la interpretación económica de λ.

4. Una fábrica produce artículos X_1 y X_2. La función de costo es $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1$ y se quiere minimizar el costo. Determinar el costo mínimo y las cantidades a producir si el total de artículos debe ser 8.

5. La función de utilidad es $U = 10x_1 + 20x_2 + 4x_1 \, x_2$. Si el ingreso es de \$18, y sean los precios $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$ respectivamente, hallar las cantidades que maximizan la utilidad y a cuánto asciende ésta. Dar la interpretación económica de λ.

6. Dada la función de producción $P = 3x_1 \, x_2$, obtener el costo mínimo y las cantidades de cada insumo necesarias para producir 15 unidades si el costo fijo es \$150 y los precios unitarios de cada insumo son: $p_1 = 5 \,, p_2 = 9$.

7. La utilidad del consumidor de 2 bienes X e Y está dada por:
   $U(x, y) = 4x + 17y - x^2 - xy - 3y^2$. El precio del bien X es de \$1 y el precio del bien Y es de \$2. Encuentre las cantidades de ambos bienes que brindan al consumidor la máxima satisfacción si el gasto que el consumidor asigna para ambos productos es de \$7. Probar que el punto crítico es máximo. ¿Cúal es la máxima utilidad? Si el consumidor decide destinar \$8, ¿En cuánto aumentará aproximadamente la utilidad? Justificar.

8. La utilidad del consumidor de dos bienes está dada por $U(x, y) = x^2 y^3$. Los precios de dichos bienes son $P_x = 1$, $P_y = 4$ respectivamente. El monto asignado para la compra de ambos bienes es de \$10, hallar la máxima utilidad. ¿Cuánto hay que consumir de ambos bienes para alcanzarla? ¿Cuál es el significado económico de $|\lambda|$?

9. Dada la función de producción de un artículo $P(x_1, x_2) = 3x_1 \, x_2$, si x_1 y x_2 son las cantidades de 2 insumos X_1 y X_2 y $p_1 = 4$, $p_2 = 5$ son los precios de los mismos, \$300 es el costo fijo, hallar: a) el costo mínimo para $P = 6000$, b) el producto máximo para $C = 500$. En ambos casos determinar las cantidades x_1 y x_2 correspondientes. Dar la interpretación económica de λ.

Bibliografía

[1] A. Aragón, J. P. Pinasco, C. Schifini y A. Varela. *Introducción a Matemática para el Primer Ciclo Universitario*, Colección Textos Básicos, Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2005.

[2] G. Acosta, P. Palacios, y J. P. Pinasco. *Notas de Matemática IV*, Colección Textos Básicos, Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, 2008.

[3] T. Apostol. *Análisis matemático*, Editorial Reverté, Barcelona, 1996.

[4] M. J. Bianco, M. Carrizo, F. Matera, H. Micheloni, y S. Olivera. *Análisis Matemático con aplicaciones a las Ciencias Económicas*, Ediciones Macchi, Buenos Aires, 2001.

[5] R. Courant y F. John. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Editorial Limusa, México, 1994.

[6] H. Di Caro y L. Gallego. *Análisis Matemático II con aplicaciones a las Ciencias Económicas*, Editorial Macchi, Buenos Aires, 2000.

[7] A. García Venturini y A. Kicillof. *Análisis Matemático para estudiantes de Ciencias Económicas*, Ediciones Cooperativas, Buenos Aires, 2000

[8] R. J. Noriega. *Cálculo diferencial e integral*, Editorial Docencia, Buenos Aires, (1991).

[9] N. Piskunov. *Cálculo Diferencial e Integral*, Editorial Mir, Moscú, 1983.

[10] P. Samuelson y W. Nordhaus. *Economía*, 16ta edición, McGraw Hill, 1999.

[11] G. F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales Ordinarias*, Ed. McGraw-Hill, 1993.