ACERCA DE LA HABILIDAD DE INTERPRETAR UNA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

González Víctor Hugo[1][2] – Pared María Verónica[2]
vgonzale@ungs.edu.ar – mveronica.par@gmail.com

(1) *Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano. Gutiérrez y J. L. Suárez, Los Polvorines. Buenos Aires, Argentina*

(2) Universidad Nacional de Luján. Departamento de Ciencias Básicas. Ruta 5 y Avenida Constitución, Luján. Buenos Aires, Argentina

Comunicación presentada en la XXXVIII Reunión de Educación Matemática (REM), Universidad Nacional de Litoral. Septiembre de 2015.

Resumen

Consideramos que un estudiante logra autonomía en la lectura de una sección de un texto matemático si alcanza, por un lado, una *mirada global* de la sección permitiendo así una vinculación entre las distintas partes del texto, y por otro lado, una *mirada local* de las demostraciones. En cuanto a la interpretación de una demostración matemática asociamos esta autonomía a un desempeño que demandará, por parte del lector, la identificación del significado de las palabras y símbolos utilizados, la información inicial con la que se cuenta, el reconocimiento de los teoremas que se utilizan, las reglas de inferencia utilizadas, la conclusión a la que se arribó, entre otras acciones. Consideramos que este desempeño requerido por el lector, en calidad de interpretar una demostración, es en término de la posesión de una *habilidad matemática*.

En este trabajo presentamos el diseño de un instrumento para obtener información sobre el desempeño que los estudiantes tienen respecto de la *habilidad interpretar una demostración matemática*, en el contexto de la asignatura Elementos de Matemática correspondiente a la carrera Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Luján. Presentamos la validación del instrumento en cuanto a la extensión y modalidad solicitada de entrega, y el análisis de las producciones.

La demostración del teorema elegida para interpretar es realizada por el absurdo. Destacamos en el análisis la dificultad que evidencian los estudiantes en cuanto a la comprensión de este tipo de demostración.

Palabras claves: Habilidad matemática – Demostración matemática – Interpretación de textos matemáticos.

1.- Introducción

Con respecto a la formación académica de los estudiantes universitarios se pretende que desarrollen autonomía en la lectura de los textos. Cuestionamos, al igual que Carlino, (2003) *el supuesto que la lectura sea una habilidad básica y transferible, adquirida de una vez y para siempre, que sirve para entender cualquier texto*. Los textos de matemática, por ser científicos, tienen la particularidad de presentar definiciones, enunciados de teoremas, demostraciones, ejemplos, aplicaciones, motivaciones, etc.

Consideramos que un estudiante logra autonomía en la lectura de una sección de un texto matemático si alcanza, por un lado, una *mirada global* de la sección: reconoce en qué momentos está definiendo, en cuáles está presentando una demostración, en cuáles está introduciendo una noción, en cuáles está ejemplificando, en cuáles está motivando al lector, etc. Es decir puede vincular las distintas partes del texto. Por otro lado si lleva a cabo una *mirada local* de las demostraciones: expresar oralmente qué dice el resultado, qué intenta probar, reconocer cuáles son los datos con los que se cuenta y a dónde se debe llegar, poder realizar una mirada "macro" sobre la demostración tratando de identificar cómo encara el autor la misma, poder expresar cómo es el plan para demostrar y describirlo con sus palabras, etc.
Estamos interesados en identificar los niveles de control que poseen los estudiantes sobre la habilidad de *interpretar un texto matemático*, y en particular sobre la habilidad de *interpretar una demostración matemática*.
El trabajo de investigación reportado aquí surge a partir de nuestra temática de interés presentada en los párrafos anteriores, y del desempeño como docentes en la asignatura Elementos de Matemática correspondiente al programa académico de la carrera Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Luján (UNLu).
Nos proponemos presentar el diseño de una actividad que nos permita recolectar información acerca de la habilidad matemática de *interpretar el enunciado de un teorema y su demostración*, en estudiantes de una comisión de la asignatura ya citada. Además presentaremos el análisis de las producciones de los estudiantes identificando niveles alcanzados para la habilidad antes mencionada.
El trabajo se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se presenta una caracterización del material de estudio en relación con algunos de los objetivos de la asignatura, en la sección 3 se expone un estado del arte y marco teórico, en la sección 4 se presenta el diseño del instrumento para la recolección de datos, en la sección 5 se caracteriza y se valida la aplicación del mismo, en la sección 6 se realiza un análisis de las respuestas de los estudiantes.
Por último, cerramos con una sección de consideraciones finales y discusión.

2.- Caracterización del material de estudio de la asignatura Elementos de Matemática

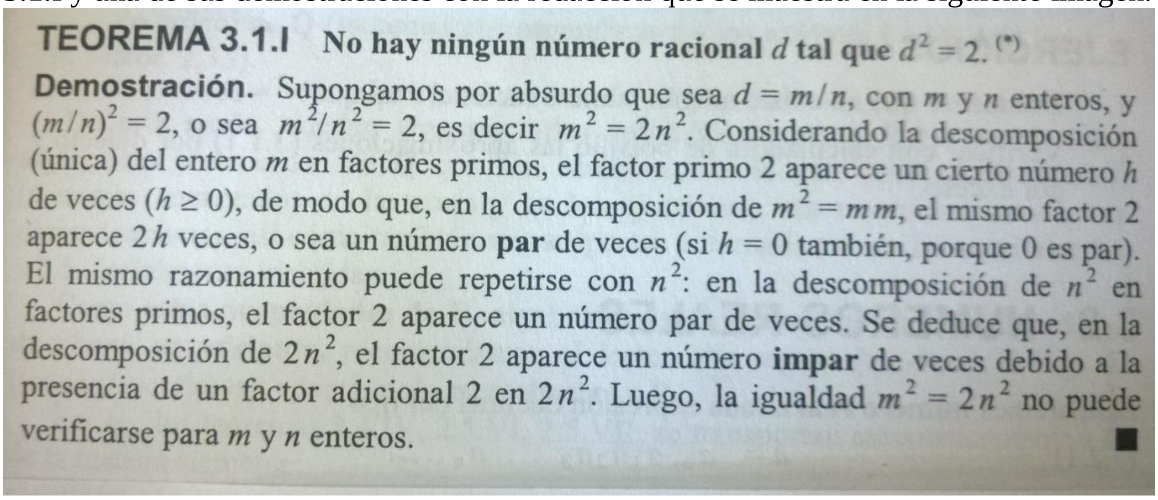
La Licenciatura en Administración de la UNLu posee en su currícula cinco asignaturas de matemática, siendo Elementos de Matemática la primera de ellas. Los estudiantes de esta última tienen como bibliografía obligatoria el libro *Elementos de matemática* cuyo autor es el doctor Alfredo Novelli.

Dicha bibliografía es la herramienta con la que cuentan los estudiantes para llevar a cabo la cursada. Algunos contenidos incluidos en el texto forman parte de la currícula de la escuela secundaria. Se propone ahora revisar los mismos desde una mirada más estructural. Esta formalización requiere del enunciado de: axiomas, definiciones, proposiciones, teoremas, demostraciones, ejemplos y aplicaciones.
El libro presenta, como uno de sus objetivos, que *el alumno desarrolle la capacidad de leer un texto y entenderlo.* En relación al contenido abordado se espera que el "*estudiante comience a responder a los ¿por qué? respecto de los procedimientos y reglas referidos a los conocimientos matemáticos estudiados."* Para responder al *¿por qué*? los estudiantes deben comenzar a revisar sus conocimientos previos dando lugar a la relectura, a la re-comprensión, al establecimiento de analogías, a la búsqueda de ejemplos y contraejemplos. Este abanico de acciones tiene como finalidad dar lugar a la necesidad de llevar a cabo una justificación matemática.

Para acercar al lector al tipo de abordaje realizado en el texto, así como al lenguaje utilizado en el mismo, presentamos a continuación una breve descripción de uno de los contenidos del libro denominado *Transporte a los racionales, de las propiedades algebraicas y de orden de los enteros.*

> En el capítulo I se estudian las propiedades algebraicas y de orden de los enteros poniendo en evidencia que se obtienen todas de unas pocas propiedades básicas que pueden tomarse como axiomas (se presenta el sistema de axiomas y se deducen teoremas). Se presentan como ejercicios la demostración de otras propiedades algebraicas. En el capítulo II se definen los números racionales y se destaca un aspecto esencial del pensamiento matemático al mostrar la posibilidad de transportar automáticamente todas las propiedades algebraicas y de orden de los números enteros a los números racionales, que son consecuencia de las propiedades básicas, sin necesidad de nuevas demostraciones. (Extraído del prefacio del libro

Nosotros tomamos para el desarrollo de este trabajo la primera sección del Capítulo III del libro. En ésta el autor comienza retomando el resultado con el que concluyó en el capítulo anterior, a saber: “que el conjunto Q de los números racionales puede identificarse con la totalidad de los decimales periódicos”; plantea y exhibe que, por otro lado, es posible construir expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas, obteniéndose así números que no son racionales. Motiva al lector con la cuestión acerca de si hay alguna razón para ampliar nuevamente el concepto de número. Luego señala que el conjunto Q nació de la necesidad de medir, y presenta una forma de representar un número racional en una recta, estableciendo que los racionales pueden ser visualizados como puntos sobre una recta a una distancia *m/n* veces la longitud del segmento unidad a la derecha del cero (si acaso *m/n* es un racional positivo) o a una distancia *–m/n* veces la longitud del segmento unidad a la izquierda del cero (si acaso *m/n* es negativo). Motiva al lector con la siguiente pregunta, luego de hacer una construcción geométrica: ¿qué número representaría la medida *d* de la diagonal de un cuadrado con lado igual a la unidad? Aplicando el Teorema de Pitágoras concluye que el cuadrado de esa medida *d* es igual a 2. Presenta el teorema 3.1.I y una de sus demostraciones con la redacción que se muestra en la siguiente imagen:



TEOREMA 3.1.I **No hay ningún número racional d tal que $d^2 = 2$.** (*)

Demostración. Supongamos por absurdo que sea $d = m/n$, con m y n enteros, y $(m/n)^2 = 2$, o sea $m^2/n^2 = 2$, es decir $m^2 = 2n^2$. Considerando la descomposición (única) del entero m en factores primos, el factor primo 2 aparece un cierto número h de veces ($h \geq 0$), de modo que, en la descomposición de $m^2 = mm$, el mismo factor 2 aparece $2h$ veces, o sea un número **par** de veces (si $h = 0$ también, porque 0 es par). El mismo razonamiento puede repetirse con n^2: en la descomposición de n^2 en factores primos, el factor 2 aparece un número par de veces. Se deduce que, en la descomposición de $2n^2$, el factor 2 aparece un número **impar** de veces debido a la presencia de un factor adicional 2 en $2n^2$. Luego, la igualdad $m^2 = 2n^2$ no puede verificarse para m y n enteros. ■

Luego de esto sintetiza que al ser *d* un número que no es racional, no será posible marcar numéricamente dicha medida con el procedimiento de comparación con la unidad establecido con anterioridad, sino que será a través de aproximaciones por defecto y por exceso de números racionales. Presenta dos ejercicios para ser resueltos por los estudiantes: uno de ellos es *demostrar que no existe ningún número racional r tal que* $r^2=3$, y el otro es *verificar con la calculadora de bolsillo las aproximaciones presentadas por exceso y por defecto del número tal que al cuadrado da 2.*

3.- Breve descripción del estado del arte y marco teórico

Desde la Educación Matemática así como desde la Matemática hay coincidencias en que la resolución de problemas tiene un rol central en la producción de conocimiento matemático y que por ello debería tenerlo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta ciencia (pueden verse, entre otros tantos, textos y producciones del NCTM[1], Santaló, Polya).

La noción de *problema* en la Escuela Anglosajona, línea de pensamiento también conocida como Resolución de Problemas (Polya, 1965; Schoenfeld, 1992), es una noción discutida y con múltiples definiciones que incluyen o excluyen diferentes matices que hacen que una actividad responda o no a ellas.

Con respecto a la construcción de una demostración matemática consideramos que la misma es una actividad matemática compleja y acordamos con Weber (2005) en que constituye un *problema* y que puede ser entonces analizada en términos de la perspectiva de Resolución de Problemas. Con respecto a la *interpretación de una demostración matemática* entendemos también a la misma como un problema, pues requerirá comprensión por parte del estudiante, que indudablemente lo llevará a identificar el significado de las palabras y/o símbolos utilizados, la información inicial con la que se cuenta, el reconocimiento de los teoremas que se utilizan en el desarrollo de la demostración, las reglas de inferencia utilizadas, la conclusión a la que se arribó, entre otras acciones. Consideramos que este desempeño requerido por el lector, en calidad de interpretar una demostración, es en términos de ser poseedor de una *habilidad matemática*.

Rodríguez (2012) define habilidad como "a un desempeño deliberado, no casual, que resulta adecuado y permite resolver correctamente una cierta problemática". Si la problemática es de índole matemática, entonces se pondrá en juego una habilidad matemática. De la definición se desprende que aquel que posee una cierta habilidad matemática se desenvuelve adecuadamente y consecuentemente con las situaciones planteadas, que requieren de su uso, obteniendo un resultado favorable. Rodríguez (2013) establece que el estudiante que desarrolla este desempeño tiene un primer nivel de control, pues previo a actuar debe tomar conciencia y decidir cuál será su desempeño.

En el mismo artículo, Rodríguez propone una clasificación o graduación de habilidades matemáticas basada en cuán generales o cuán específicas son en torno a un contenido o contenidos. En este sentido, se propone el término de *habilidades matemáticas generales* para aquellas que son puestas en juego en relación con una variedad de contenidos (o independiente de ellos); y el término *habilidades matemáticas sujetas a un contenido*, para aquellas habilidades matemáticas generales particularizadas a un contenido específico.

Para nuestro trabajo de investigación hemos decidido relevar información sobre el estado de los estudiantes en cuanto a la habilidad de *Interpretar el enunciado y demostración del teorema: "no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2"*.

Con respecto a la de habilidad interpretar un texto matemático (que sería la habilidad matemática general que nosotros estamos tomando y que particularizamos), Rodríguez (2013) establece que el estudiante poseedor de esta habilidad manifestará en su desempeño un segundo nivel de control al poder interpretar un texto matemático sujeto a distintos contenidos. Amplía estableciendo tres condiciones necesarias para alcanzar este segundo nivel de control de esta habilidad para cada contenido que el estudiante trabaje:

a) *Reconocer la estructura discursiva de cada sección del texto que trabajará (si se presenta una definición, luego ejemplifica y muestra aplicaciones, por ejemplo, o si discute sobre una noción, ahonda en precisiones y finalmente presenta una definición, etc.)*

[1] Nacional Council of Teaching Mathematics

b) *Identificar las distintas finalidades de las secciones del texto a interpretar: si demuestra un resultado, si comunica sólo el enunciado de una proposición, si explica un procedimiento o esboza la idea de una demostración, si muestra una aplicación, si exhibe un procedimiento, si define un concepto nuevo, si ejemplifica un concepto o propiedad, si plantea analizar de la validez de alguna proposición, etc.*
c) *Según la finalidad identificada, particulariza cómo encarar la interpretación*

En cuanto a la interpretación de una demostración, Rodríguez (2012) propone distintas capacidades que permitan al estudiante poner atención en el control de su actividad metacognitiva. Dichas capacidades las denomina *mirada global* y *mirada local:*

- *Mirada global: el sujeto debe ser capaz de identificar cómo el autor del texto encara la demostración, es decir detectar si lo hace por el absurdo, si aplica algún resultado, si necesita probar resultados intermedios, si aplica algún resultado ya demostrado.*
- *Mirada local: Reconocer que en algunos pasos faltan explicaciones, que debe entender cada paso explicado y que deberá completar las explicaciones que faltan.*

4.- Diseño del instrumento

En vistas de diseñar una actividad que tenga como objetivo que el estudiante logre explorar la demostración desde una mirada local y global, que logre vincular el resultado presentado en el teorema con lo expuesto antes y después del mismo (procurando evidenciar si el estudiante logra identificar la finalidad del autor en cada una de las partes de la sección abordada), se nos presentaron las siguientes cuestiones a indagar:

Con respecto al estudiante:

- *¿cómo describiría con sus palabras lo que expresa el teorema 3.1.I?,*
- *¿qué vínculos podría encontrar con lo que viene contando antes en el texto?,*
- *¿podría escribir el teorema en términos de una implicación?,*
- *¿identifica qué es lo que va a demostrar y qué tipo de demostración desarrolla?,*
- *¿podría describir cómo se organiza la demostración?,*
- *¿podría completar la demostración con explicaciones que aclaren y/o amplíen, pensando en que lo va a leer un compañero?*

A partir de estas cuestiones originales decidimos formular una actividad, que para nosotros será el instrumento para recabar información, estructurada en tres partes (ver anexo I).
En cuanto a la primera y tercera parte: la tarea está organizada en base a preguntas que tienen como objetivo evidenciar relaciones, que puede establecer el estudiante, entre la *motivación* que se presenta antes del teorema y su demostración, así como la relación entre esto último y lo redactado a posteriori de la demostración, junto con uno de los dos ejercicios propuestos en la sección.

Primera parte: *En la página 103 se presenta el enunciado del Teorema 3.1.I*

a) *¿Qué vínculo puede establecer entre este teorema y la información que se expone en los párrafos anteriores?*
b) *¿Qué vínculo puede establecer entre la respuesta anterior y la información que se expone en el párrafo siguiente a la demostración?*

Tercera parte: *En la página 104 se propone el ejercicio 1 ¿qué vínculo puede establecer entre la demostración del Teorema 3.1.I y la resolución esperada para dicho ejercicio?*

En cuanto a la segunda parte: El tipo de tarea que se presenta es la elección de la/s opción/es correctas. El objetivo de esta tarea es poder identificar si los estudiantes interpretan, desde las dos miradas, global y local, la demostración del teorema. Los ítems que apuntan a la mirada global son: 1) y 2), mientras que los que apuntan a la mirada local son: 3), 4), 5) y 6).
En cuanto a las opciones involucradas en cada ítem las clasificamos en dos tipos:
Del tipo 1: Tienen que ver con opciones de poca o nula reformulación pues se espera que el estudiante lea cada opción y comparare con lo expresado ya sea en el enunciado o demostración. Los ítems 1 y 4 poseen esta característica. A modo de ilustrar presentamos, a continuación, uno de estos ítems.

Ítem 1*: El enunciado del teorema establece que:*

a) *hay un número racional d que cumple que* $d^2=2$.
b) *no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2.*
c) *cualquier número real cumple que su cuadrado es 2*

Del tipo 2: Tienen que ver con opciones que demandan reformulación pues se espera que el estudiante lea cada opción y a partir de la interpretación del enunciado y demostración pueda responder. Los ítems 2, 3, 5 y 6 poseen esta característica. A modo de ilustrar presentamos uno de ellos que, además, tiene dos opciones correctas (*a* y *c*).

Ítem 5*: El Teorema 1.7.I (Teorema fundamental de la aritmética pág 64)*

a) *se usa de manera implícita en la conexión entre lo que viene desarrollando y el último renglón de la demostración.*
b) *no se usa en la demostración.*
c) *permite garantizar que no existe un número entero con dos descomposiciones distintas en factores primos.*

Consideramos que el ítem 3 está en el límite entre las dos clasificaciones antes mencionadas. Sin embargo lo ubicamos en la del tipo 2 porque los estudiantes deben identificar que en el inicio de la demostración se establece que la realizará por el absurdo y que eso se corresponde con la opción: *la demostración la desarrolla mostrando que la negación de la tesis lleva a una contradicción con un teorema establecido anteriormente.*

5. Aplicación del instrumento y validación

Hemos realizado una validación del instrumento en cuanto a la extensión y modalidad solicitada de entrega. Primeramente entregamos las tres partes del instrumento (así como figura en el anexo I) a todos los estudiantes para su resolución de manera individual y domiciliaria (contando con 3 días para la realización), y en modalidad de entrega optativa.
De un total de 50 estudiantes, solamente 14 optaron por entregar la actividad, constituyéndose en una muestra.
Luego del análisis de esta primera entrega uno de los docentes a cargo de la asignatura dio la clase durante 2 horas, cuyo único tópico fue la primera sección del capítulo III del libro. Se abordó la clase explicitando la motivación del tema que da el autor, la mirada global del enunciado del teorema 3.1.I así como de su demostración, se hicieron anotaciones y observaciones a tener en consideración para comprender la demostración desde una mirada local de la misma.
Ante la necesidad de ampliar la muestra, decidimos incorporar la segunda parte del instrumento como un ejercicio más de un trabajo práctico[2] que los estudiantes debían entregar, cuya resolución es individual y domiciliaria. De un total de 54 estudiantes que

[2] Este trabajo práctico es tenido en cuenta para el redondeo de la calificación obtenida en el último parcial y en la condición final del estudiante.

rindieron el último parcial 50 estudiantes entregaron la actividad. A continuación se describen los hallazgos de la primera entrega que nos llevaron a tomar la decisión antes mencionada.

<u>En la resolución de la segunda parte del instrumento</u>, notamos coincidencias entre los porcentajes de aciertos y los tipos de ítems mencionados al final de la sección anterior. Decidimos realizar un ranking según el nivel de recepción del ítem en los estudiantes. Quedó conformado de la siguiente manera**:**

- *El enunciado del teorema establece que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2 (ítem 1)*
- *En un fragmento de la demostración usa el resultado "considerando la descomposición (única) del entero m en factores primos" para establecer que el número primo 2 aparecerá una cantidad par de veces en la factorización de* m^2 *(ítem 4)*
- *El Teorema 1.7.I (Teorema Fundamental de la Aritmética pág. 64) se usa de manera implícita en la conexión entre lo que viene desarrollando y el último renglón de la demostración; y además permite garantizar que no existe un número entero con dos descomposiciones distintas en factores primos (ítem 5).*
- *La igualdad planteada al final de la primera oración* $m^2 = 2.\ n^2$ *es retomada en el último renglón de la demostración para establecer una contradicción (ítem 6).*
- *El enunciado del teorema no tiene la forma de una implicación* $H \Rightarrow T$ *y/o puede ponerse en la forma* $H \Rightarrow T$ *en donde los axiomas y todos los resultados conocidos con anterioridad pueden ser tomados como hipótesis (ítem 2).*
- *La demostración la desarrolla mostrando que la negación de la tesis lleva a una contradicción con un teorema establecido anteriormente (ítem 3).*

Esperábamos que los dos primeros estén en el lugar que ocupan por ser del tipo 1 (el primero que apunta a una mirada global y el segundo a una mirada local), sin embargo con respecto al último lugar (el ítem 3) señalamos que la demostración comienza con la frase *"Supongamos por el absurdo…"*, y explicita en el desarrollo que supone que existen enteros *m* y *n* tal que *d=m/n* y *"muestra que la negación de la tesis llega a una contradicción con un teorema establecido anteriormente"*. Como mencionamos anteriormente, creíamos que esta opción estaba en el borde en nuestra clasificación en cuanto al tipo de opciones (del tipo 1 y 2), con lo cual nos puso en consideración de qué la demostración por el absurdo imprime una complejidad mayor que otras.
A consecuencia, nos parece que la información recolectada de esta segunda parte del instrumento es valiosa ya que, al ampliar nuestra muestra, permite observar si el ranking propuesto se conserva, además de dimensionar el impacto del ítem 3, luego haberse llevado a cabo la demostración del teorema por parte de los docentes.

<u>En la resolución de la primera y tercera parte del instrumento</u>, surgieron cuestiones muy interesantes para indagar que nos muestran la necesidad de entrevistar a estos estudiantes para ahondar en la forma en la que están interpretando, así como qué tipo de uso hicieron del libro para la resolución de cada una de las partes de la actividad. No hemos desarrollado aún la instancia de diseño de entrevista e implementación de las mismas.
Destacamos que la mitad de los estudiantes que entregaron la resolución, en modalidad optativa, no contestaron a esta parte o su producción fue insuficiente, de este modo consideramos seguir nuestra indagación con entrevistas a estos estudiantes que manifestaron lo que antes destacamos, y no disponer para la totalidad de los estudiantes la resolución de estas partes del instrumento.

A continuación presentamos los criterios para la asignación de puntajes de la segunda parte con las que tomamos las decisiones antes mencionadas así como el análisis de las entregas de la segunda instancia.

6. Criterio de corrección y análisis

En la segunda parte del instrumento decidimos otorgar puntaje a cada uno de los ítems que forman parte de la misma siguiendo el siguiente criterio:

- Se puntuará con un -1: *Si al contestar se contradice dentro del mismo ítem.*
- Se puntuará con un 0: *Si no acierta al contestar, pero sin embargo no muestra contradicción, ó si acaso no marcó una opción.*
- Se puntuará con un 1: *Si acierta al contestar*.
- Se puntuará con un 0,75: *Si el ítem presenta dos respuestas correctas y el estudiante marca la más relevante.*
- Se puntuará con un 0,5: *Si el ítem presenta dos respuestas correctas y el estudiante marca la menos relevante*.

El puntaje obtenido por cada estudiante en cada ítem es el que figura en la tabla dispuesta en el anexo II. Una mirada por columna de dicha tabla, nos permite identificar el tipo de recepción que los estudiantes hicieron de cada ítem, en relación a los *aciertos y desaciertos de la opción/es correctas, a la no elección de alguna de las opciones, a la explicitación de contradicciones, a la identificación de la opción más relevante ó de la menos relevante*. Destacamos que se conserva el mismo ranking armado para la muestra en donde se presenta que el ítem 1) e ítem 4) evidencia los mejores desempeños en el grupo de los 50 estudiantes; recordamos que la característica de estos ítems es que para la elección de la opción correcta se demanda poca o nula reformulación de lo escrito ya sea en el enunciado del teorema (para el ítem 1) y en la demostración (para el ítem 4).
Con respecto al ítem 3) nuevamente evidenció el más bajo desempeño de los estudiantes en general: 27 estudiantes aciertan con la opción correcta, 9 se contradicen en su respuesta para este ítem, 13 no marcan la opción correcta y 1 estudiante no marca ninguna opción.
Con respecto a la suma total de puntos obtenida por cada estudiante, decidimos formar grupos de alumnos (ver en el anexo II el puntaje y clasificación en grupos) que tuvieron un nivel similar de porcentaje de respuestas correctas. Estos grupos son:
Grupo A: Estudiantes que obtuvieron un porcentaje mayor o igual a 90. En este caso suponemos que muestran *un muy buen nivel de interpretación de la demostración matemática* en el contexto de lo esperado. Este grupo está conformado por 17 estudiantes:
Grupo B: Estudiantes que obtuvieron un porcentaje mayor o igual a 70 y menor que 90. Suponemos que tienen *un buen nivel de interpretación de la demostración matemática*. Está formado por 10 estudiantes.
Grupo C: Estudiantes que obtuvieron un porcentaje mayor o igual a 30 y menor que 70. En este caso, consideramos que tienen *un nivel regular en cuanto a la interpretación de la demostración matemática*. Está formado por 14 estudiantes. Además 4 de estos estudiantes muestran contradicción en la respuesta dada para los ítems que refieren a una mirada global de la demostración, evidenciando estos *un bajo nivel en cuanto a la interpretación global de la demostración*.
Grupo D: Estudiantes que obtuvieron un porcentaje menor a 30. Este grupo muestra *un nivel bajo en cuanto a la interpretación de la demostración matemática desde una mirada global así como local*. Está formado por 9 estudiantes, 4 de estos estudiantes muestran contradicción en la respuesta dada a los ítems (se contradicen más de una vez en su resolución) y los otros 5 estudiantes muestran no acertar en más de dos ítems.

Destacamos a consecuencia, de los grupos formados, que 27 estudiantes poseen un buen nivel de interpretación de la demostración matemática, y que los restantes 23 estudiantes no poseen este nivel y muestran contradecirse en los ítems de opción múltiple que refieren a una mirada global de la demostración.

7.- Algunas consideraciones finales y discusión

En esta sección nos interesa destacar varias cuestiones relacionadas con distintos aspectos de este trabajo. En primer lugar, creemos valioso el diseño del instrumento, no solo para recabar la información que reportamos aquí sino como una actividad útil en la enseñanza de la habilidad interpretar un texto matemático sujeto a un contenido específico. Señalamos además que el instrumento completo permitió recabar más información de la que se analizó en este trabajo, que nos da pistas acerca de qué uso real están haciendo de la bibliografía obligatoria de la asignatura. En segundo lugar, en cuanto a los resultados, no esperábamos que, luego de haber dado una clase íntegramente dedicada a la interpretación de la demostración del teorema 3.1.I, resultara que 23 estudiantes mostraran contradecirse en los ítems de opción múltiple que refieren a una mirada global de la demostración. En esta dirección no esperábamos que les resultara tan complejo identificar que la *demostración la desarrolla mostrando que la negación de la tesis lleva a una contradicción con un teorema establecido anteriormente.* Nos preguntamos entonces, ¿qué tipo de preguntas llevarían al estudiante a identificar la estructura del desarrollo de una demostración por el absurdo? ¿será que la estructura lógica del enunciado del teorema y su demostración es muy compleja para un estudiante que cursa su primera asignatura en la UNLu? ¿qué tipo de actividad estarían desarrollando estos estudiantes cuando se les pide que construyan una demostración por el absurdo? Por otro lado ¿será que al presentarse el enunciado del teorema con la estructura de hipótesis tácita complejizó aún más la interpretación? ¿será que una demostración desarrollada por el contrarrecíproco hubiese tenido mejor recepción entre los estudiantes?

Bibliografía

Carlino, P. (2003). Leer textos científicos y académicos en la educación superior: obstáculos y bienvenidas a una cultura nueva. *Actas del 6º Congreso Internacional de Promoción de la Lectura y el Libro*. Buenos Aires: 29ª Feria del Libro.

Novelli, A. (2006) Elementos de Matemática. Editado en la UNLu. Cuarta Edición.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en 1945]

Rodríguez, M. Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. Enviado a *Mathema*, enero de 2012.

Rodríguez, M. (2013). La complejidad de interpretar demostraciones matemáticas a partir de textos. En Garcia Pupo (Ed.), *Actas del III Simposio de Matemáticas y Educación Matemática*, Bogotá: UAN.

Santaló, L. (1990), "*Matemática para no matemáticos*". Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España. En Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Parra y Saiz (comps.). Edit. Paidós. 1994.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, New York, MacMillan.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, *24,* 351–360.

Anexo I – Instrumento

Universidad Nacional de Luján
Elementos de Matemática (cod. 10300) Comisión 42.
Apellido y Nombre:…………………………. Fecha de entrega: 27/04/2015

Actividad de comprensión lectora del texto matemático: Introducción a los números reales – sección 3.1 del libro Elementos de Matemática de Alfredo Novelli.

Primera parte: *En la página 103 se presenta el enunciado del Teorema 3.1.I*

a) ¿Qué vínculo puede establecer entre este teorema y la información que se expone en los párrafos anteriores?

b) ¿Qué vínculo puede establecer entre la respuesta anterior y la información que se expone en el párrafo siguiente a la demostración?

Segunda parte: *A partir de la lectura del enunciado y demostración del teorema, marque con una cruz la/s opción/es correcta en cada caso:*

1- *El enunciado del teorema establece que*
   a. *hay un número racional d que cumple que $d^2=2$.*
   b. *no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2.*
   c. *cualquier número real cumple que su cuadrado es 2*

2- *El enunciado del teorema*
   a. *tiene la forma de una implicación $H \Rightarrow T$.*
   b. *no tiene la forma de una implicación $H \Rightarrow T$.*
   c. *puede ponerse en la forma $H \Rightarrow T$ en donde los axiomas y todos los resultados conocidos con anterioridad pueden ser tomados como hipótesis.*

3- *La demostración la desarrolla*
   a. *dando un ejemplo numérico.*
   b. *tomando una parte de la tesis y buscando el modo de aprovechar la hipótesis de modo de obtener la tesis completa.*
   c. *demostrando la contrarrecíproca.*
   d. *mostrando que la negación de la tesis lleva a una contradicción con un teorema establecido anteriormente.*

4- *En un fragmento de la demostración usa el resultado "considerando la descomposición (única) del entero m en factores primos" para*
   a. *verificar que el m es un número entero.*
   b. *establecer que el número primo 2 aparecerá una cantidad par de veces en la factorización de m^2*

5- *El Teorema 1.7.I (Teorema fundamental de la aritmética Pág. 64)*
   a. *se usa de manera implícita en la conexión entre lo que viene desarrollando y el último renglón de la demostración.*
   b. *no se usa en la demostración.*
   c. *permite garantizar que no existe un número entero con dos descomposiciones distintas en factores primos.*

6- *La igualdad planteada al final de la primera oración $m^2 = 2. n^2$ es retomada en el último renglón de la demostración para*
   a. *evidenciar que se hizo una cadena de igualdades para demostrar el resultado.*
   b. *establecer una contradicción.*

Tercera parte: *En la página 104 se propone el ejercicio 1 ¿qué vínculo puede establecer entre la demostración del Teorema 3.1.I y la resolución esperada para dicho ejercicio?*

Anexo II – Puntajes obtenidos junto con el recuento y clasificación

Puntajes por cada estudiante en cada ítem							Recuento		Clasificación
Estudiante	*Ítem 1*	*Ítem 2*	*Ítem 3*	*Ítem 4*	*Ítem 5*	*Ítem 6*	**Suma**	**%**	**Grupo**
1	0	0	1	1	0,75	1	3,75	62,5	C
2	1	1	-1	0	0	-1	0	0	D
3	1	0,5	1	1	0	1	4,5	75	B
4	1	0	0	1	0,75	1	3,75	62,5	C
5	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
6	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
7	1	0	0	1	0,75	1	3,75	62,5	C
8	1	0,5	0	1	0,75	1	4,25	70,83	B
9	1	0	1	1	0,5	1	4,5	75	B
10	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
11	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
12	0	0	0	1	0,75	0	1,75	29,17	D
13	0	0,75	0	0	0	0	0,75	12,5	D
14	1	0,75	-1	0	0,75	0	1,5	25	D
15	1	-1	-1	1	0,75	1	1,75	29,17	D
16	1	-1	-1	1	0,75	1	1,75	29,17	D
17	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
18	1	-1	1	1	0,75	1	3,75	62,5	C
19	1	0,75	0	1	0,75	0	3,5	58,33	C
20	1	0,75	0	1	0	1	3,75	62,5	C
21	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
22	1	0,75	0	1	0,75	0	3,5	58,33	C
23	1	0,75	1	1	1	1	5,75	95,83	A
24	1	0,5	1	1	0,5	1	5	83,33	B
25	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
26	1	-1	1	1	0,75	1	3,75	62,5	C
27	1	0,75	-1	1	0,75	1	3,5	58,33	C
28	1	1	1	1	1	1	6	100	A
29	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
30	-1	0,75	1	1	0,5	1	3,25	54,17	C
31	1	0,5	0	0	0	0	1,5	25	D
32	1	0,5	1	1	0,75	1	5,25	87,5	B
33	1	-1	-1	1	1	1	2	33,33	C
34	1	0	0	1	0,75	1	3,75	62,5	C
35	1	0,75	0	1	1	1	4,75	79,17	B
36	1	0,5	0	1	1	1	4,5	75	B
37	1	0,5	-1	1	0,75	-1	1,25	20,83	D
38	1	0	-1	1	0,75	-1	0,75	12,5	D
39	1	0,5	1	1	1	1	5,5	91,67	A
40	1	1	1	1	1	1	6	100	A
41	1	1	1	1	1	1	6	100	A
42	1	0,75	0	1	1	1	4,75	79,17	B
43	1	0,75	1	1	1	1	5,75	95,83	A
44	1	1	0	0	0,5	1	3,5	58,33	C
45	1	1	1	1	1	1	6	100	A
46	1	0	-1	1	1	1	3	50	C
47	1	0	1	1	1	1	5	83,33	B
48	1	0,75	1	1	1	1	5,75	95,83	A
49	1	0,5	1	1	0,75	1	5,25	87,5	B
50	1	0,75	1	1	0,75	1	5,5	91,67	A
Suma	45	21,25	18	45	36,25	38			
Porcentaje	90	42,5	36	90	72,5	76			