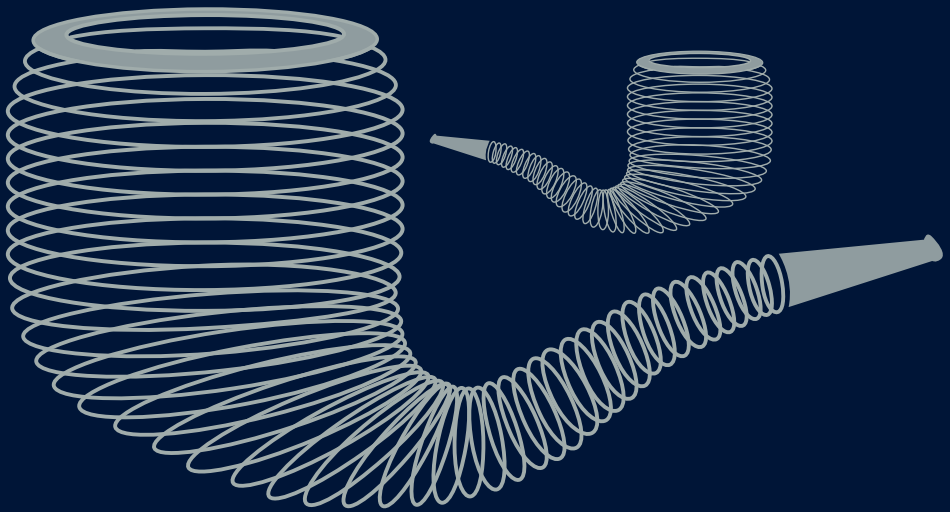


Notas de mecánica elemental Parte II

Alejandro José Fendrik



David Hipólito Margarit
Marcela Verónica Reale
Ariel Fabricio Scagliotti
Compiladores

TEXTOS BÁSICOS
CIENCIAS EXACTAS

EDICIONES **UNGS**



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

NOTAS DE MECÁNICA ELEMENTAL
PARTE II

Fendrik, Alejandro José

Notas de mecánica elemental : parte 2 / Alejandro José Fendrik ; compilación de David Hipólito Margarit ; Marcela Verónica Reale ; Ariel Fabricio Scagliotti. - 1a ed - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2022.

Libro digital, PDF - (Textos básicos / 32)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-630-627-0

1. Mecánica. 2. Física. 3. Cinemática. I. Margarit, David Hipólito, comp. II. Reale, Marcela Verónica, comp. III. Scagliotti, Ariel Fabricio, comp. IV. Título.

CDD 531.01

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2022

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)

Prov. de Buenos Aires, Argentina

Tel.: (54 11) 4469-7507

ediciones@campus.ungs.edu.ar

ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de interior y tapas: Daniel Vidable

Diagramación: Marcela Verónica Reale

Corrección: Gustavo Castaño



Licencia Creative Commons 4.0

Atribución – No Comercial – Sin Obra Derivada (by-nc-nd)



Libro
Universitario
Argentino

TEXTOS BÁSICOS

CIENCIAS EXACTAS

Notas de mecánica elemental

Parte II

ALEJANDRO JOSÉ FENDRIK

DAVID HIPÓLITO MARGARIT, MARCELA VERONICA REALE,

Y ARIEL FABRICIO SCAGLIOTTI

(COMPILADORES)

EDICIONES **UNGS**



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Índice

II	13
5 Oscilaciones	15
5.1 Oscilador armónico	16
5.1.1 Resortes en serie y en paralelo	29
5.2 Péndulo ideal	33
5.2.1 Período exacto de un péndulo (optativo)	38
5.2.2 Problema de dos cuerpos	41
5.2.3 Energía potencial interna	44
5.3 Oscilador armónico amortiguado	48
5.3.1 Resonancia	64
5.4 Ejercicios resueltos del capítulo	71
6 Momento angular y fuerzas centrales	83
6.1 Momento angular	84
6.2 Fuerzas centrales	96
6.2.1 Ecuación para la trayectoria (u órbita)	104
6.2.2 El problema de Kepler	108
6.3 Oscilador armónico isótropo	118
6.4 Momento angular para cuerpos en interacción	123
6.5 El problema de las fuerzas centrales con dos cuerpos	140

6.6	Ejercicio resuelto del capítulo	145
7	Sistemas no inerciales	151
7.1	Sistemas de referencia acelerados	152
7.2	Sistemas de referencia rotantes	159
7.3	Ejercicio resuelto del capítulo	171
8	Cuerpo rígido (CR)	175
8.1	Definición	176
8.2	Campo de velocidades del CR	179
8.3	Momento angular del CR	183
8.4	Cálculo de algunos momentos principales de inercia	189
8.5	Ejemplos de movimientos de CR	196
8.6	Movimiento de CR vinculados	204
8.7	Rodadura	209
8.8	Energía del CR	217
8.8.1	Teorema de las fuerzas vivas para el CR	219
8.8.2	Ejemplos de fuerzas conservativas	221
8.8.3	Ejemplos de fuerzas no conservativas	222
8.8.4	Análisis de ejemplos varios	223
8.9	Ejercicios resueltos del capítulo	228
A	Resumen de números complejos	245
A.1	Unidad imaginaria	245
A.2	Definición	245
A.2.1	Representación gráfica	246
A.2.2	Operaciones	247
A.2.3	Número complejo conjugado	247
A.2.4	Módulo del número complejo	248

A.3	Forma trigonométrica de un número complejo	250
A.3.1	Operaciones	251
A.4	Forma exponencial de un número complejo	251
A.4.1	Operaciones	251
A.4.2	Forma exponencial compleja de seno y coseno	251
Índice alfabético		253
Bibliografía		255

Prólogo

Comienzo a escribir este prólogo sabiendo que las palabras serán insuficientes y, posiblemente, torpes para expresar todo lo que quisiera. Comienzo pensando que esto me pondrá triste, y sin embargo...

Porque claro, hablar de Alejandro Fendrik es también evocarlo, hacerlo presente. Y su presencia siempre estuvo asociada para mí a buenos momentos. Entonces, teniéndolo aquí, opto por hablarle, directamente, sin más vueltas:

Querido Ale:

No debiste irte. Todavía nos hacen falta tus sabias conversaciones, tu sonrisa pícaro mientras ensayabas esos floridos razonamientos. Y también tu seriedad cuando el tema se profundizaba. Nos hacés falta en síntesis. Me imagino volver a encontrarte cada vez que llego a la universidad, y te imagino con tu pipa (juiciosamente vacía y apagada) saludando con tu típico “¡Salve, Doctor!”.

No puedo evitarlo y está bien. Porque todos los que te conocemos (notarás que uso el tiempo presente, como corresponde), necesitamos que nos sigas acompañando. Aunque sea a predicar en el desierto.

Y aquí está una obra, un libro que son dos, y que es mucho más que dos libros: es un legado cariñoso y entrañable como solamente vos podías haber construido. Mientras todos renegábamos por la pandemia y las clases virtuales, vos hacías algo más: ibas preparando amorosamente un manuscrito con tus clases, haciendo tus gráficos, dándole forma a estas notas. Porque querías que los estudiantes lo tuvieran disponible; y por supuesto que fuera lo más perfecto posible.

Y te cuento (porque tal vez no lo sabés todavía) que el trabajo de “tus muchachxs”, David, Marcela y Ariel, tipeando todo para su edición formal, lo están haciendo posible. Y también el amor de Lili, que es tan generosa que me pide este prólogo. Y acá estamos. Porque no importa cuantas broncas te hayas aga-

rrado cuando la “burrocracia” trababa el fluir de las cosas, o cuántas ironías no te hayan entendido (tus dardos igual daban en el blanco de una u otra forma); no importa que la muerte enamorada (a quien no perdonaremos nosotros tampoco) te haya llamado antes de tiempo, porque aquí están las notas, para que otros aprendan, para que sigamos amando el sueño de educar, enseñar, estimular las inteligencias.

Y para que te sigamos teniendo un poco con nosotros, siempre.

Fernando R. Momo

Mayo de 2022

Parte II

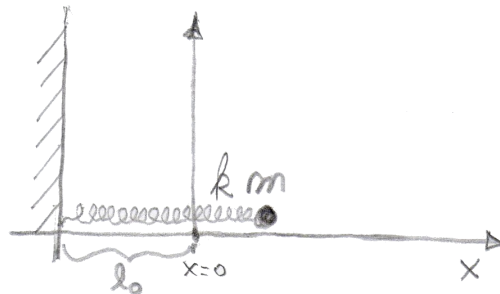
Capítulo 5

Oscilaciones

5.1. Oscilador armónico

Consideremos un cuerpo de masa m sometido a una interacción elástica con una pared. $F_e = -kx$ donde x es la posición del cuerpo medida desde la longitud natural del resorte l_o (es decir, cuando el resorte no está ni comprimido ni estirado mide l_o).

Figura 5.1:



El cuerpo desliza sobre la superficie *sin rozamiento*. La segunda ley de Newton es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (\text{ecuación del movimiento del oscilador armónico}) \quad (5.1)$$

Nuestro objetivo es establecer $x = x(t)$ a partir del conocimiento de las condiciones iniciales: $x(t = 0) = x_o$ y $v(t = 0) = v_o$. Ya sabemos que la energía mecánica de este sistema se conserva ya que la única fuerza que realiza trabajo es $F_e = -kx$. Entonces,

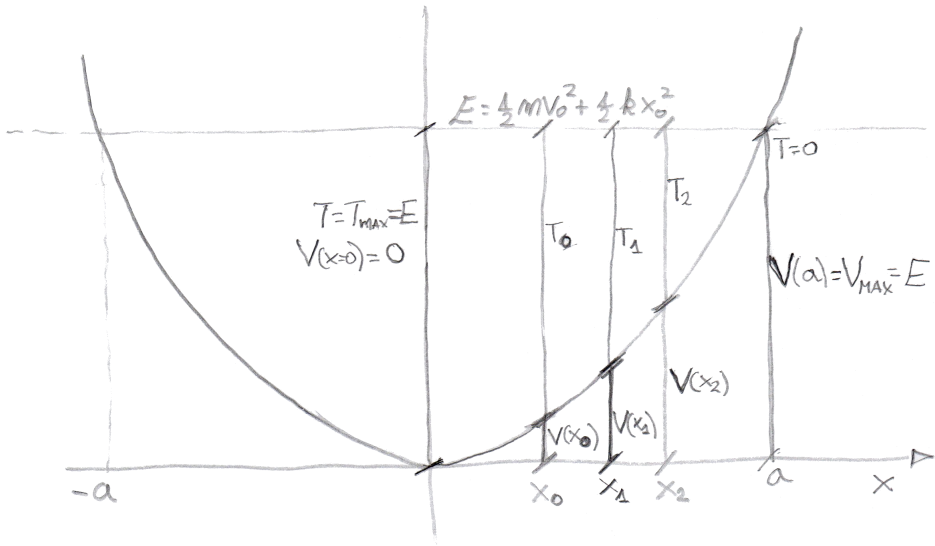
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.2)$$

es una constante de movimiento que conocemos, dado que

$$E = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}kx_o^2$$

Recordemos, que como hemos mencionado previamente, el término $\frac{1}{2}kx^2$ es la energía potencial elástica. Ya hemos señalado que la importancia de este sistema radica en que el movimiento de *cualquier sistema conservativo*, cerca de un punto de equilibrio estable se puede considerar como un oscilador armónico. Además, es de los pocos que pueden resolverse solo con papel y lápiz (no necesitamos computadora). Antes de resolver la Ec. (5.1), con todo rigor tratemos de ver qué información podemos obtener a partir de la conservación de la energía mecánica (Ec. 5.2)). Veremos que casi todas las características de la solución exacta de la (5.1), pueden deducirse de la conservación de E .

Figura 5.2:



Esta es la situación desde el punto de vista energético. Supongamos que las condiciones iniciales son $x = x_0$ y $v = v_0 > 0$. Esto es, la partícula en $x = x_0$ se mueve hacia la derecha con velocidad v_0 . Cuando el cuerpo está en x_1 vemos que $V(x_1) > V(x_0)$ y, por lo tanto,

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 < \frac{1}{2}mv_0^2 = T_0$$

dado que, al ser la energía constante, si v aumenta, T debe disminuir. Esto nos dice que a medida que x crece, v disminuye. Esto continúa hasta que para $x = a$, $v = 0$ (la partícula se detiene). En ese punto vemos que

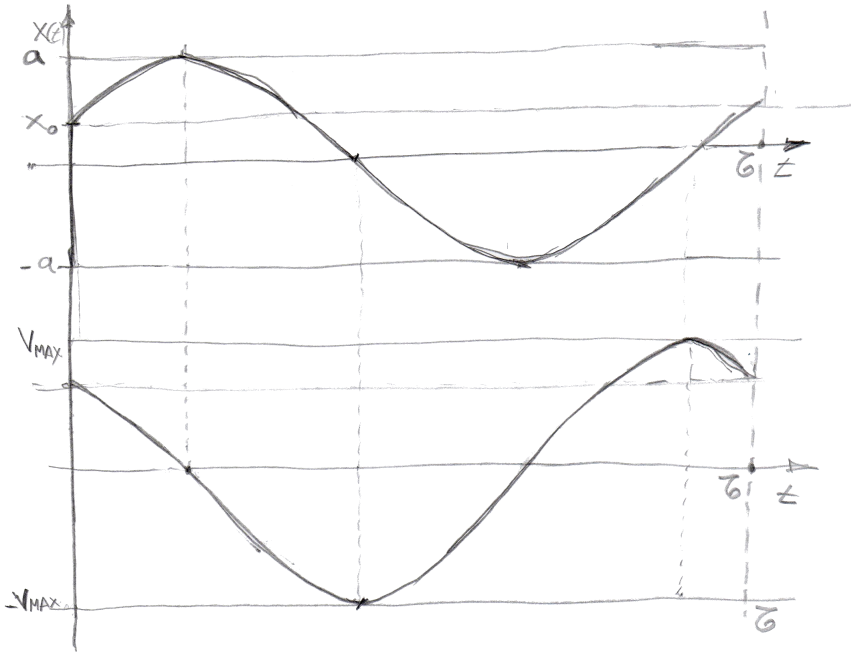
$$-\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=a} = F_e(a) < 0 \quad (\text{ya que } \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=a} > 0 \text{ porque } V(x) \text{ es creciente}).$$

Entonces, ni bien se detiene, la partícula comienza a volver con un módulo de velocidad cada vez mayor. Notemos que cuando la partícula vuelve, los módulos de su velocidad se repiten cuando pasan por cada posición. Ello se debe a la conservación de E . Por ejemplo, si cuando $x = x_1$, $v = v_1 > 0$ a la ida, cuando a la vuelta vuelve a ser $x = x_1$, tendremos $v = -v_1 < 0$, dado que en ese punto

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (\text{tanto a la ida como a la vuelta}).$$

Cuando la partícula llega a x_o de nuevo, tiene una velocidad $-v_o$ (opuesta a la inicial). Durante el “viaje de vuelta” v disminuye y T aumenta. Esto sigue así hasta que la partícula llega a $x = 0$. Allí V es la mínima posible ($V = \frac{1}{2}kx^2$). Por lo tanto, $T = T_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ nos dice que allí la velocidad es máxima (en módulo). A partir de allí ($x = 0$), como $v = -v_{max}$ (se está moviendo hacia la izquierda), el cuerpo comienza a alejarse hacia $x = -a$ pero cada vez más despacio, hasta que se detiene en $x = -a$ con una fuerza que la hace volver. Ya podemos esbozar cómo es $x = x(t)$ y $v = v(t)$.

Figura 5.3:



No queda otra que sea así. Podríamos preguntarnos en la curva el caso de $x = x(t)$, ¿por qué la concavidad entre $x = x_0$ y $x = a$ es la del dibujo y no al revés? La respuesta es que en ese tramo, la velocidad $v = \frac{dx}{dt} > 0$ (x es creciente) pero cada vez menor ($\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} < 0$): x debe ser cóncava hacia abajo. Todo lo que expresan estos dos gráficos se desprende tan solo de la conservación de la energía mecánica. También, a partir de él, podemos hallar a y v_{max} en función de las condiciones iniciales. En efecto,

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{m}{k}\right)v_0^2} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)x_0^2 + v_0^2} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Tanto $x = x(t)$ como $v = v(t)$ son funciones periódicas en el tiempo relacionadas por $\frac{dx}{dt} = v$. Recordemos que una función es periódica se repite luego de

un intervalo de valores. Es decir, si $x = x(t)$ y $v = v(t)$, entre $t = 0$ y $t = \tau$, conocemos $x = x(t)$ y $v = v(t)$ para todo t (el gráfico se repite). Podemos utilizar la conservación de la energía para determinar más cosas aún, como

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \Rightarrow \frac{m}{2E}v^2 + \frac{k}{2E}x^2 = 1$$

Esto satisface para

$$\frac{k}{2E}x^2(t) = \cos^2(\varphi(t)) \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos(\varphi(t)) \quad (5.3)$$

$$\frac{m}{2E}v^2(t) = \sen^2(\varphi(t)) \Rightarrow v(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \sen(\varphi(t)) \quad (5.4)$$

Como $x(t + \tau) = x(t)$ y $v(t + \tau) = v(t)$ para todo t , $\varphi(t)$ debe ser una función creciente de t tal que $\varphi(t + \tau) - \varphi(t) = 2\pi$ para todo t . Esto quiere decir que $\varphi(t)$ debe ser lineal con el tiempo:

$$\varphi(t) = \omega_o t + \varphi_o$$

donde ω_o y φ_o son constantes, tal que

$$\varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \omega_o(t + \tau) + \varphi_o - \omega_o t - \varphi_o = \omega_o \tau = 2\pi$$

O sea,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

Podemos ahora determinar cuánto debe valer ω_o a partir de las Ec. (5.3) y (5.4). Debemos primero elegir los signos para estas expresiones. Como $\frac{dx}{dt} = v$, si elegimos signo (+) para la Ec. (5.3), para Ec. (5.4) debemos elegir el (-).

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{k}} \frac{d \cos(\varphi(t))}{dt} = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \sen(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt} = v(t)$$

pero como $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ (φ debe ser creciente), resulta entonces, tomando $\varphi(t) = \omega_o t + \varphi_o$ que

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2E}{k}}\omega_o \text{sen}(\omega_o t + \varphi_o) = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\text{sen}(\omega_o t + \varphi_o)$$

o sea, debe ser

$$\sqrt{\frac{2E}{k}}\omega_o = -\sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow \omega_o = \frac{k}{m}$$

Notemos entonces que $\tau = \frac{2\pi}{\omega_o}$ depende del resorte y de la masa del cuerpo. Esto significa que, independientemente de las condiciones iniciales (x_o, v_o y por lo tanto E y la amplitud de la oscilación, la velocidad máxima, etcétera), el tiempo que dura una oscilación completa vale lo mismo. Esta propiedad es una característica del oscilador armónico ($V = \frac{1}{2}kx^2$). Si $V = \frac{1}{2}kx^4$, también tendríamos oscilaciones, pero su período dependería de la energía; este es un oscilador anarmónico. La solución del problema será entonces

$$x(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$v(t) = -a\omega_o \text{sen}(\omega_o t + \varphi_o)$$

donde $a = \frac{2E}{k} = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)^2}$ y $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Para determinar φ_o , basta notar que si $t = 0$ debe ser

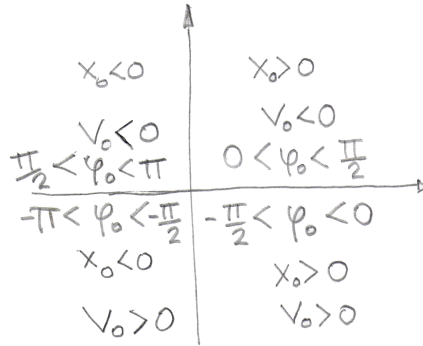
$$x(t = 0) = a \cos(\varphi_o) = x_o$$

$$v(t = 0) = -a\omega_o \text{sen}(\varphi_o) = v_o$$

Entonces, $\frac{-\text{sen}(\varphi_o)}{\cos(\varphi_o)} = \frac{\left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)}{x_o}$, es decir $\varphi_o = \arctan\left(-\frac{\left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)}{x_o}\right)$.

Este φ_o (llamado fase inicial) depende solo de las condiciones iniciales y se lo toma como $-\pi \leq \varphi_o \leq \pi$.

Figura 5.4:



Vamos ahora a obtener los mismos resultados, pero por medio de resolver la ecuación diferencial de la Ec. (5.1). Va a ser como “entrar a la misma casa, pero por otra puerta”. Escribamos la Ec. (5.1) de otra manera:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5.5)$$

Esta ecuación diferencial (relación entre una función y sus derivadas) forma parte de una “familia” llamada “ecuaciones diferenciales lineales de orden N con coeficientes constantes homogéneas”. Genéricamente, son de la forma

$$a_0x + a_1\frac{dx}{dt} + a_2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots + a_N\frac{d^Nx}{dt^N} = 0 \quad (5.6)$$

donde a_0, a_1, \dots, a_N son constantes reales. Son homogéneas porque no tienen término independiente (si en lugar del 0, en el miembro derecho hubiera “algo” como una función de t o incluso una constante serían no homogéneas). Son lineales porque si conocemos dos soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, cualquier combinación lineal de ellas: $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ (con C_1 y C_2 constantes complejas) también serán solución (verifíquelo). La relación de la Ec. (5.6) es una combinación lineal entre una función y sus derivadas. Para que esto se cumpla es necesario que la función y sus derivadas sean esencialmente lo mismo, si no es así, una

combinación lineal de ellas jamás podría anularse. Supongamos que probamos

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_N t^N$$

Es claro que la solución jamás podría ser así: el primer término (donde figura x) contendrá un sumando $a_0 b_N t^N$ que no se podrá anular con nada. Lo mismo vale para $x(t) \sim t^r$ con r real.

Conocemos una función que, derivada, da esencialmente lo mismo:

$$x(t) \sim e^{\lambda t},$$

donde λ es una constante. En efecto,

$$\frac{d^k e^{\lambda t}}{dt^k} = \lambda^k e^{\lambda t}$$

Si reemplazamos esto en la Ec. (5.6), obtenemos

$$e^{\lambda t} (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_N \lambda^N) = 0$$

y como $e^{\lambda t} \neq 0$, obtenemos un polinomio de coeficientes reales en λ de grado N cuyas raíces nos servirán para encontrar la solución. El grado del polinomio N está determinado por el orden de la ecuación diferencial (5.6), es decir, la derivada de mayor orden que allí aparece. Un polinomio de coeficientes reales de grado N tiene, a lo sumo, N raíces (puede tener menos dada la posible multiplicidad de raíces dobles, triples, etcétera). Supongamos que tiene N raíces distintas (más adelante veremos qué pasa si alguna se repite): $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$. Entonces la solución general de la Ec. (5.6) es:

$$x_g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + C_N e^{\lambda_N t} \quad (5.7)$$

donde c_i son constantes complejas arbitrarias. La solución general del problema matemático planteado por la Ec. (5.6) es la Ec. (5.7) con $2N$ constantes reales indeterminadas (las partes real e imaginaria de cada C_i).

Resolvamos ahora la Ec. (5.5) aplicando lo que acabamos de estudiar. La Ec. (5.5) es lineal de orden 2 con coeficientes reales, homogénea; luego $x(t) \sim e^{\lambda t}$ tal que

$$e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + \frac{k}{m} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = i \frac{k}{m} = i\omega_o \\ \lambda_2 = -i \frac{k}{m} = -i\omega_o \end{cases}$$

donde $i^2 = -1$, o sea, i es la unidad imaginaria (notemos que $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es lo que nos había aparecido cuando entramos “por la otra puerta”). La solución de nuestro problema matemático será entonces

$$x_g(t) = A_+ e^{i\omega_o t} + A_- e^{-i\omega_o t} \quad (5.8)$$

donde A_+ y A_- son constantes complejas arbitrarias (cuatro constantes reales). Nuestro problema físico general tiene dos constantes reales arbitrarias (x_o y v_o), así que la Ec. (5.8) no es la solución general del problema físico. El problema físico impone que $x = x(t)$ sea una función real. Como $x_g(t) = \mathbb{R}(x_g(t)) + \mathbb{I}(x_g(t))$, la solución que buscamos será

$$x(t) = \mathbb{R}(x_g(t))$$

(podríamos tomar también $x(t) = \mathbb{I}(x_g(t))$, ambas son soluciones reales de la Ec. (5.5), ¿por qué?). Veremos que esta solución está completamente determinada si damos x_o y v_o :

$$x(t) = \mathbb{R}(x_g(t)) = \frac{x_g(t) + x_g^*(t)}{2}$$

donde x_g^* es el complejo conjugado de $x_g(t)$. Recordar: si

$$z = (a + ib), z^* = (a - ib), \quad \text{o bien}$$

$$z = |z|e^{i\varphi}, z^* = |z|e^{-i\varphi}, \text{ con } |z|^2 = z.z^* = a^2 + b^2 \text{ y } \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_g + x_g^*) &= (A_+e^{i\omega_0 t} + A_-e^{-i\omega_0 t} + A_+^*e^{-i\omega_0 t} + A_-^*e^{i\omega_0 t}) \\ &= ((A_+ + A_-^*)e^{i\omega_0 t} + (A_+^* + A_-)e^{-i\omega_0 t}) \end{aligned}$$

Pero $(A_+ + A_-^*)$ es un número complejo que podemos escribir como $(A_+ + A_-^*) = A = ae^{i\varphi_0}$; entonces, como $((A_+ + A_-^*) = (A_+^* + A_-)$, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(x_g) &= \frac{1}{2}(x_g + x_g^*) = \frac{1}{2}(ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + ae^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}) \\ &= \mathbb{R}[ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}] = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Recordar que $e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha))$, $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$, $\text{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = -a\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

con $\sqrt{\frac{k}{m}}$, a y φ_0 constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales, x_0 y v_0 .

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \cos(\varphi_0) \\ v_0 &= -a\omega_0 \text{sen}(\varphi_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \varphi_0 &= \arctan\left(-\frac{(v_0/\omega_0)}{x_0}\right) \end{aligned}$$

Esta solución es idéntica a la que habíamos obtenido solamente por consideraciones energéticas. La solución que hemos encontrado para el oscilador armónico puede tener otras formas (absolutamente equivalentes) que provienen de

tomar la parte imaginaria de la solución general compleja $x_g(t)$, o bien de tomar una combinación distinta de signos en la solución que obtuvimos por consideraciones energéticas. Por ejemplo,

$$x(t) = a \operatorname{sen}(\omega_o t + \varphi'_o)$$

$$v(t) = a\omega_o \operatorname{cos}(\omega_o t + \varphi'_o)$$

donde $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $a = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)^2}$ en todas ellas ω_o determina el período, a es la amplitud del movimiento y no pueden depender de cómo “elijamos” las cosas. φ'_o , en cambio será diferente de φ_o . Se puede obtener fácilmente la relación entre ellas a partir de relaciones trigonométricas, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{cos}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \text{ y/o } \operatorname{cos}(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \text{ etcétera.}$$

Otra forma que puede adoptar la solución proviene de desarrollar las funciones trigonométricas. Tomemos la solución

$$x(t) = a \operatorname{cos}(\omega_o t + \varphi_o) \quad (\text{con } \frac{x_o}{a} = \operatorname{cos}(\varphi_o))$$

$$v(t) = -a\omega_o \operatorname{sen}(\omega_o t + \varphi_o) \quad (\text{con } \frac{-v_o}{\omega_o a} = \operatorname{sen}(\varphi_o))$$

Entonces, desarrollando el $\operatorname{cos}(\omega_o t + \varphi_o)$, queda

$$x(t) = a (\operatorname{cos}(\omega_o t) \operatorname{cos}(\varphi_o) - \operatorname{sen}(\omega_o t) \operatorname{sen}(\varphi_o))$$

$$= \operatorname{cos}(\omega_o t) \underbrace{a \operatorname{cos}(\varphi_o)}_{x_o} + \operatorname{sen}(\omega_o t) \underbrace{(-a \operatorname{sen}(\varphi_o))}_{\left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)}$$

O sea

$$x(t) = x_o \cos(\omega_o t) + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right) \text{sen}(\omega_o t)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_o \omega_o \text{sen}(\omega_o t) + v_o \cos(\omega_o t)$$

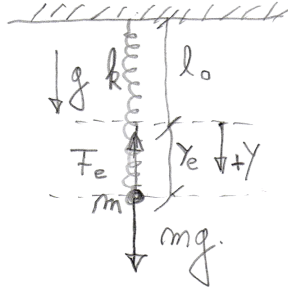
Es fácil comprobar en estas expresiones que $x(t = 0) = x_o$ y $v(t = 0) = v_o$ como debe ser. Antes de pasar a estudiar otros sistemas que se pueden reducir al que acabamos de estudiar digamos algo mas sobre $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ya sabíamos que $\omega_o = \frac{2\pi}{\tau}$ es independiente de las condiciones iniciales. Un oscilador armónico tendrá siempre el mismo período, independientemente de cómo lo pongamos en marcha. ω_o recibe el nombre de frecuencia angular y mide lo que avanza la fase $\varphi = \omega_o t + \varphi_o$ por unidad de tiempo. Si dividimos este avance por 2π tendremos el número de oscilaciones por unidad de tiempo (la fase, en una oscilación completa, avanza en 2π). El número de oscilaciones por unidad de tiempo es lo que se conoce como “frecuencia” ν (*nu*). O sea,

$$\nu = \frac{\omega_o}{2\pi} \text{ y como } \omega_o = \frac{2\pi}{\tau}, \text{ resulta que } \nu = \frac{1}{\tau}.$$

Como $\omega_o = 2\pi\nu$, en un abuso de lenguaje, a ω_o también se le dice “frecuencia” aunque lo correcto es llamar a ω_o “frecuencia angular” (o también “pulsación”) y a ν frecuencia.

Veamos ahora qué pasa si tenemos a nuestro resorte “colgando”. Esto es el mismo sistema que ya estudiamos pero en presencia de la gravedad.

Figura 5.5:



Determinemos primero cuál será la posición de equilibrio. Si medimos la posición y a partir de la longitud natural del resorte l_0 , la posición de equilibrio resultará tal que

$$mg - ky_e = 0$$

ya que en ese punto, la fuerza elástica será igual y contraria al peso. Por lo tanto,

$$y_e = \frac{mg}{k}$$

Para cualquier otro $y \neq y_e$ tendremos una aceleración. Es decir,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - ky \quad \text{o sea} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = mg$$

Esta ecuación se parece mucho a la que ya sabemos resolver. La única diferencia es que en lugar de estar igualada a 0 está igualada a una constante mg (es una ecuación diferencial no homogénea). Sin embargo, gracias a que la no homogeneidad consiste en una constante, podemos fácilmente resolverla con lo que ya sabemos. En efecto, la ecuación diferencial la podemos escribir como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \underbrace{\left(y - \frac{mg}{k} \right)}_{y - y_e} = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} (y - y_e) = 0$$

Si ahora definimos una nueva función,

$$u(t) = (y(t) - y_e)$$

como $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}$ (porque $y_e = \frac{mg}{k} = cte$) y $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$, obtenemos

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = 0$$

¡Esta es la ecuación que sabemos resolver! Es decir la solución para $u(t)$ será

$$u(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o) = (y(t) - y_e)$$

con $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y con $a = \sqrt{(y_o - y_e)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)^2}$. Dado que

$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = v_o$, $(y_o - y_e)^2 = u_o^2$ y $\varphi_o = \arctan\left(\frac{-\frac{v_o}{\omega_o}}{y_o - y_e}\right)$. O sea,

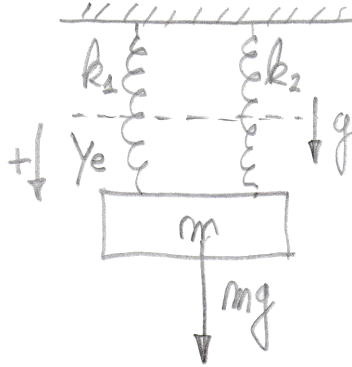
$$y(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o) + y_e$$

Esta solución nos indica que el movimiento será similar al que habíamos estudiado cuando el resorte estaba horizontal. Lo único que cambia es el punto alrededor del cual oscila la solución. En el caso del resorte horizontal, la oscilación es alrededor de $x = 0$ (posición en la cual el resorte no está ni comprimido ni estirado), mientras que en el caso del resorte vertical es alrededor de y_e , o sea, alrededor de la posición que corresponde al estiramiento del resorte en el caso estático (en equilibrio).

5.1.1. Resortes en serie y en paralelo

El sistema de la figura consiste en dos resortes de igual longitud l_o y constantes k_1 y k_2 que sostienen en equilibrio a un cuerpo de masa m .

Figura 5.6:



Esta disposición de los resortes se conoce como “resortes en paralelo”. Entonces, en el equilibrio

$$mg - k_1 y_e - k_2 y_e = mg - (k_1 + k_2) y_e = 0$$

Esto indica que el efecto de los dos resortes puede reemplazarse por un solo resorte con igual longitud l_o pero de constante elástica $k_{eq} = k_1 + k_2$. Esto se generaliza sin dificultad para n resortes puestos en paralelo. En ese caso, los n resortes son equivalentes a uno solo de constante elástica,

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i$$

Consideremos ahora el sistema siguiente. El resorte de k_1 y l_1 está fijo al techo y unido a una pequeña masa δm . El resorte de k_2 y l_2 está con δm y m en sus extremos.

Figura 5.7:

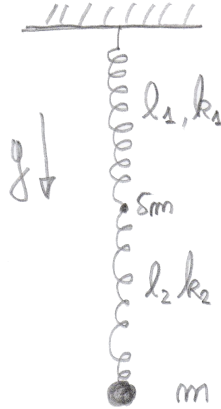
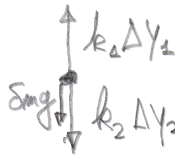


Figura 5.8:

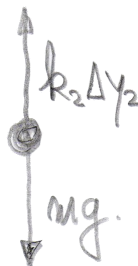


Entonces, en el equilibrio tendremos

$$-k_1 \Delta y_1 + \delta m g + k_2 \Delta y_2 = 0 \tag{5.9}$$

y además

Figura 5.9:



$$mg - k_2 \Delta y_2 = 0 \quad (5.10)$$

Entonces, de la Ec. (5.10) $k_2 \Delta y_2 = mg$ y de la Ec. (5.9) si hacemos $\delta m \rightarrow 0$, $k_2 \Delta y_2 = k_1 \Delta y_1$. O sea, también $k_1 \Delta y_1 = mg$. Esto nos dice que el estiramiento total de ambos resortes será:

$$\Delta y = \Delta y_2 + \Delta y_1 = \frac{mg}{k_2} + \frac{mg}{k_1} = mg \underbrace{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}_{\frac{1}{k_{eq}}}$$

Esto quiere decir que podemos reemplazar ambos resortes por uno solo, tal que

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Esta configuración de resortes se llama “resortes en serie” y se generaliza para n resortes:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

Cuando los resortes son iguales, las expresiones para obtener k_{eq} se reducen a

$$k_{eq} = nk \quad (\text{en paralelo})$$

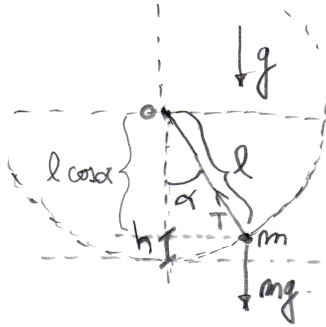
$$k_{eq} = \frac{k}{n} \quad (\text{en serie})$$

Aquí se ve que a partir de n resortes de constante k , se puede obtener un resorte más “rígido” si se los dispone en paralelo, y se puede obtener un resorte más “blando” si se los dispone en serie.

5.2. Péndulo ideal

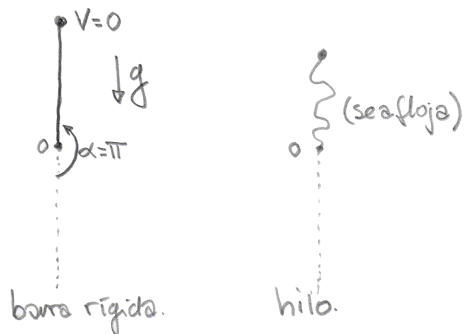
Consideremos el sistema de la Fig. (5.10), consistente en un cuerpo puntual de masa m sujeto a un hilo inextensible de longitud l (o una barra rígida de masa despreciable) moviéndose en un plano vertical.

Figura 5.10:



Ya hemos estudiado, en parte, este sistema. Recordemos que la gran diferencia entre tener un hilo o tener una barra rígida es que en este último caso podemos tener la situación del cuerpo en reposo para $\alpha = \pi$, mientras que con un hilo es imposible. Es decir:

Figura 5.11:



Los problemas para $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ son idénticos, en cambio para $\alpha > \frac{\pi}{2}$ es nece-

sario que el cuerpo tenga alguna velocidad porque, si no, el hilo se afloja. Esto ya lo discutimos en detalle. Supongamos que tenemos una barra rígida; la única fuerza que realiza trabajo es el peso que sabemos que es conservativo. La energía potencial gravitatoria es $V = mgh$, donde h es la altura medida desde el punto más bajo de la trayectoria ($\alpha = 0$). La velocidad solo tiene componente en la dirección $\hat{\alpha}$ (no hay velocidad radial, dado que $r = l \Rightarrow \dot{r} = 0$), o sea,

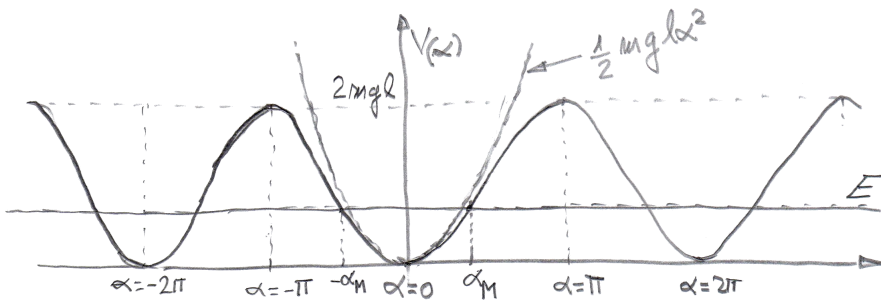
$$\bar{v} = l\dot{\alpha}\hat{\alpha} \Rightarrow v^2 = l^2\dot{\alpha}^2$$

Luego,

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgh = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mg \overbrace{(1 - \cos(\alpha))}^h$$

es una constante de movimiento. Si graficamos $V(\alpha) = mgl(1 - \cos(\alpha))$ vs. α , tendremos

Figura 5.12:



Si la energía total es la indicada en el gráfico e inicialmente la partícula estaba en una posición tal que $-\alpha_M \leq \alpha(t = 0) = \alpha_o \leq \alpha_M$, ya hemos discutido que la partícula quedará confinada en esa región. Tendremos que el movimiento ocurrirá en las proximidades de la posición $\alpha = 0$, punto de equilibrio estable. Como ya discutimos, podemos aproximar la energía potencial a $V(\alpha) = mgl(1 - \cos(\alpha))$

por una parábola haciendo el desarrollo en serie alrededor de $\alpha = 0$ a segundo orden. Para ello, sabemos que $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces,

$$V(\alpha) \approx \frac{1}{2}mgl\alpha^2$$

La energía mecánica total la podemos aproximar como:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mgl\alpha^2$$

Si comparamos esta energía con la de un oscilador armónico:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Vemos que son de la misma forma:

$$E = \frac{1}{2}A \left(\frac{d(\text{coordenada})}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}B(\text{coordenada})^2 \quad (5.11)$$

En el caso del oscilador armónico, la coordenada es x ; en el caso del péndulo, es α . Para el caso del oscilador vimos que,

$$x(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$a = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o} \right)^2}$$

$$\tan(\varphi_o) = \left(\frac{-\left(\frac{v_o}{\omega_o} \right)}{x_o} \right)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sabiendo esto, ya podemos decir cómo va a ser $\alpha = \alpha(t)$, aproximadamente

(recordemos que $V(\alpha)$, no es una parábola pero cerca de $\alpha = 0$ se parece mucho):

$$\alpha(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$a = \sqrt{\alpha_o^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}_o}{\omega_o}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi_o) = \left(\frac{-\left(\frac{\dot{\alpha}_o}{\omega_o}\right)}{\alpha_o}\right)$$

donde ahora

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mg l}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Cada vez que nos encontremos con una energía mecánica total de la forma de la Ec. (5.11), tendremos un movimiento oscilatorio cuyo ω_o será

$$\omega_o = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Podemos hallar $\alpha = \alpha(t)$ por “otra puerta”, esto es, utilizando la segunda ley de Newton en coordenadas polares:

$$\hat{\alpha}) ml\ddot{\alpha} = -mg \text{sen}(\alpha) \quad \hat{r}) - ml\dot{\alpha}^2 = -T + mg \text{cos}(\alpha)$$

La ecuación en la dirección angular nos permite, en principio, hallar $\alpha = \alpha(t)$. La reescribimos como:

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l}\right) \text{sen}(\alpha) = 0 \tag{5.12}$$

Con lo que estudiamos hasta ahora, esta situación no la sabemos resolver. La que sí sabemos resolver es:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) x = 0 \tag{5.13}$$

O sea que, en la Ec. (5.12), si en lugar de $\text{sen}(\alpha)$ apareciese α , el mundo sería nuestro. Sabemos por otro lado que $\text{sen}(\alpha) \approx \alpha$ si α es cercano a $\alpha = 0$

$$\left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1\right).$$

Eso es precisamente lo que sucede si la energía mecánica total es como la que se muestra en el gráfico de $V(\alpha)$ vs. α que ya vimos. O sea, podemos decir que si las condiciones iniciales α_o y $\dot{\alpha}_o$ son tales que $\alpha_M \ll 1$ (1 significa 1 radian), la Ec. (5.12) resultará, con muy buena aproximación

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l}\right) \alpha = 0$$

que es idéntica a la del oscilador armónico, como ya mencionamos,

$$\alpha(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$a = \sqrt{\alpha_o^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}_o}{\omega_o}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi_o) = \left(\frac{-\left(\frac{\dot{\alpha}_o}{\omega_o}\right)}{\alpha_o}\right)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Esto quiere decir que el movimiento del péndulo para pequeñas amplitudes (u oscilaciones) se comporta como un oscilador armónico: el período de las oscilaciones resulta independiente de la amplitud del movimiento (α_M) si esta amplitud es pequeña. Remarquemos aquí que este período en el péndulo y en un resorte, depende de propiedades diferentes. En el resorte, depende de k (rigidez del resorte) y de m (masa del cuerpo oscilante). En el péndulo simple, depende de g (aceleración de la gravedad) y de l (longitud del hilo o de la barra). El período de un oscilador de resorte vale lo mismo aquí que en la Luna, en cambio, un oscilador de péndulo oscilará en la Luna más lentamente que en la Tierra.

Para movimientos de amplitud, los cuales $\alpha_M \gg 1$, la aproximación armónica será mala (será peor cuanto más grande sea α_M). En esos casos hay que hacer

el cálculo exacto. En particular, no es difícil obtener cuál es la dependencia del período del péndulo τ con la amplitud del movimiento α_M . Incluiremos aquí como cultura general para el lector, esa derivación. Quien no tenga la curiosidad de leerla, no es necesario que lo haga.

5.2.1. Período exacto de un péndulo (optativo)

La energía mecánica del péndulo la podemos escribir como:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl(1 - \cos(\alpha)) = mgl(1 - \cos(\alpha_M))$$

donde hemos utilizado que para $\alpha = \alpha_M$, la energía es solo potencial. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 &= mgl(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_M)) \Rightarrow \\ \dot{\alpha}^2 &= 2\frac{g}{l}(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_M)) \Rightarrow \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(\alpha_M)} \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(\alpha_M)}} &= dt \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha_M} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\cos(\alpha') - \cos(\alpha_M)}} &= \int_{t=0}^{t=\frac{\tau}{4}} dt' = \frac{\tau}{4} \end{aligned}$$

pero $\cos(\alpha') = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{4} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha_M} \frac{d\alpha'}{\sqrt{2}\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)}} \Rightarrow \\ \frac{\tau}{4} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha_M} \frac{d\alpha'}{\sqrt{2}\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)}} \end{aligned}$$

Ahora, hacemos la sustitución $\text{sen}\left(\frac{\alpha'}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) \text{sen}(\varphi')$, es decir $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha'}{2}\right) d\alpha' = \text{sen}\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) \cos(\varphi') d\varphi'$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{\text{sen}\left(\frac{\alpha_M}{2}\right)} \cos(\varphi') d\varphi'}{\cancel{\text{sen}\left(\frac{\alpha_M}{2}\right)} \underbrace{\sqrt{1-\text{sen}^2(\varphi')}}_{\cos(\varphi')} \underbrace{\cos\left(\frac{\alpha'}{2}\right)}_{\sqrt{1-\text{sen}^2\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) \text{sen}^2(\varphi')}}} \Rightarrow \\ \frac{\tau}{2} &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\text{sen}^2\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) \text{sen}^2(\varphi')}} \end{aligned}$$

Finalmente, la integral para el período exacto de un péndulo nos queda:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\text{sen}^2\left(\frac{\alpha_M}{2}\right) \text{sen}^2(\varphi')}}$$

La integral que figura aquí es una función muy conocida y estudiada desde hace mucho tiempo. En efecto,

$$K(k) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\varphi')}} \quad (\text{es una función de } k: -1 \leq k \leq 1)$$

recibe el nombre de integral elíptica completa de primera especie. Hay tablas con sus valores, calculadoras que las evalúan, etcétera. Podemos ver además que:

$$K(k=0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi' = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{k \rightarrow 1} K(k) = \infty$$

O sea,

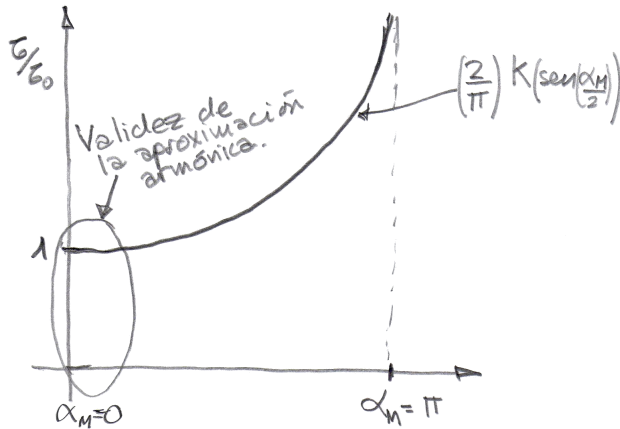
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\text{sen}\left(\frac{\alpha_M}{2}\right)\right) \right)$$

o también:

$$\tau = \tau_o \left(\frac{2}{\pi} K \left(\text{sen} \left(\frac{\alpha_M}{2} \right) \right) \right)$$

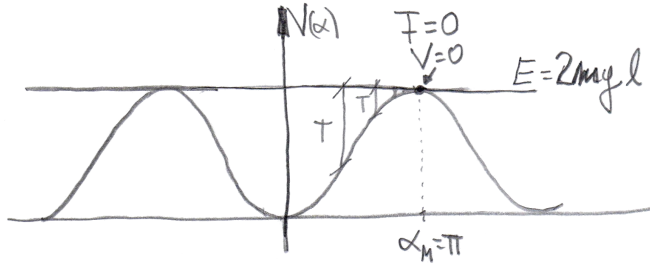
donde $\tau_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ es el período de la aproximación armónica. Es decir, el período exacto es el período armónico por un factor $\left(\frac{2}{\pi} K \left(\text{sen} \left(\frac{\alpha_M}{2} \right) \right) \right)$ que depende de la amplitud α_M . Si graficamos $\frac{\tau}{\tau_o}$ vs. α_M , obtendremos algo así:

Figura 5.13:



O sea, el período crece con la amplitud. Notemos que para $\alpha_M \rightarrow \pi$, vemos que $\tau \rightarrow \infty$. Esto corresponde al caso en que la energía mecánica total es justo $E = 2mgl$ y, si tenemos una barra rígida (no un hilo), el cuerpo se acerca al máximo de energía potencial cada vez más despacio hasta que llega allí, con velocidad cero. Pero cuando llega al máximo, allí la fuerza es cero: no vuelve nunca, se queda allí. Por eso, $\tau \rightarrow \infty$. Esto está ilustrado en el siguiente gráfico:

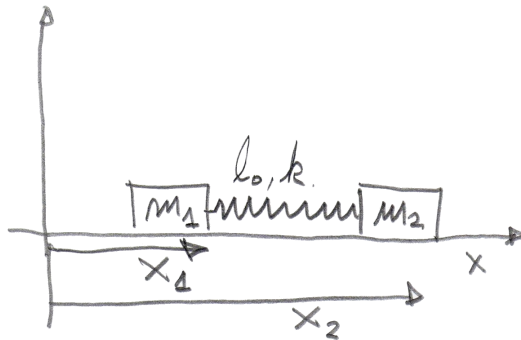
Figura 5.14:



5.2.2. Problema de dos cuerpos

Consideremos dos cuerpos interactuando a través de un resorte de longitud libre l_0 y constante k .

Figura 5.15:



La segunda ley de Newton para cada cuerpo resulta

Para el cuerpo 2

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$$

Para el cuerpo 1

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)$$

Sabemos que se conserva la cantidad de movimiento (no hay fuerzas externas). Si nos avivamos, la suma miembro a miembro de las dos ecuaciones ante-

riores nos lo recordaría:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = \frac{dP_T}{dt} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)V_{CM} = cte$$

es decir $X_{CM}(t) = V_{CM}t + X_{CM}^o$

$$\text{donde } V_{CM} = \frac{m_1v_{o1} + m_2v_{o2}}{(m_1 + m_2)} \quad , \quad V_{CM}^o = \frac{m_1x_{o1} + m_2x_{o2}}{(m_1 + m_2)}$$

Por otro lado, si hacemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - l_o) \\ \ddot{x}_1 &= \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - l_o) \end{aligned}$$

y restamos, obtendremos:

$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) (x_2 - x_1 - l_o)$$

Si llamamos $x_r = (x_2 - x_1)$ (posición relativa), queda:

$$\ddot{x}_r + \frac{k}{\mu}(x_r - l_o) = 0 \tag{5.14}$$

donde $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ es la masa reducida (ya había aparecido cuando estudiamos energía cinética del movimiento relativo). Tan solo de lo que sabemos, y de observar a la Ec. (5.14), concluimos que:

$$x_r(t) = a \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$a = \sqrt{x_{or}^2 + \left(\frac{v_{or}}{\omega_o}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi_o) = \left(\frac{-\left(\frac{v_{or}}{\omega_o}\right)}{x_{or}}\right)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

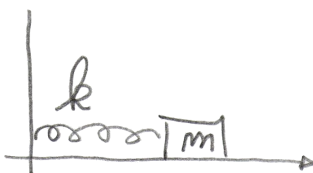
Aquí, $x_{or} = x_{o2} - x_{o1}$ y $v_{or} = v_{o2} - v_{o1}$ es la posición relativa inicial y la velocidad relativa inicial, respectivamente. Obtenemos entonces que el movimiento de los cuerpos es la superposición de una traslación uniforme de su centro de masa y una oscilación armónica de su posición relativa. Si recordamos que debe ser:

$$x_2(t) = X_{CM}(t) + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}x_r(t) = X_{CM}(t) + \frac{\mu}{m_2}x_r(t)$$

$$x_1(t) = X_{CM}(t) - \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}x_r(t) = X_{CM}(t) - \frac{\mu}{m_1}x_r(t)$$

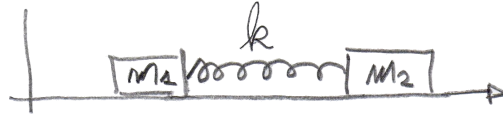
como ya obtuvimos $X_{CM}(t)$ y $x_r(t)$, ya podemos saber cómo serán $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$. Remarquemos que *si tengo un cuerpo*:

Figura 5.16:



y si tengo dos cuerpos:

Figura 5.17:



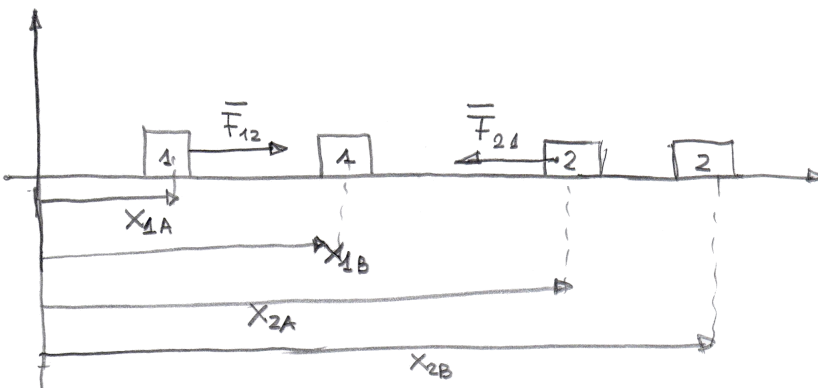
5.2.3. Energía potencial interna

Hasta ahora prestamos atención las fuerzas conservativas externas. En problemas de una dimensión vimos que la condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea conservativa es que la fuerza solo dependiese de la posición. Entonces, para un desplazamiento entre dos posiciones (x_A y x_B):

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) \cdot dx = -(V(x_B) - V(x_A)) = -\Delta V \Big|_A^B \quad \text{con} \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

Veremos ahora qué deben cumplir las fuerzas conservativas si son internas. Consideremos dos cuerpos en interacción cuyas fuerzas son F_{12} y F_{21} (por supuesto $F_{12} = -F_{21}$).

Figura 5.18:



Calculemos el trabajo que realizan las fuerzas cuando el sistema se desplaza de la configuración A a la B (es decir $x_{1A} \rightarrow x_{1B}$ y $x_{2A} \rightarrow x_{2B}$)

$$W_{AB} = \int_{x_{1A}}^{x_{1B}} F_{12} \cdot dx_1 + \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} F_{21} \cdot dx_2 = \int_{(x_{2A}-x_{1A})}^{(x_{2B}-x_{1B})} F_{21} \cdot d(x_2 - x_1) = \int_{x_{relA}}^{x_{relB}} F_{21} \cdot dx_{rel}$$

ya que $(x_2 - x_1) = x_{rel}$ (posición relativa). Para poder hacer esta integral sin necesidad de especificar el camino, es condición necesaria y suficiente que $F_{21} = F_{21}(x_{rel}) = F_{21}(x_2 - x_1)$. En ese caso:

$$W_{AB} = \int_{x_{relA}}^{x_{relB}} F(x_{rel}) \cdot dx_{rel} = -(V_{int}(x_{relB}) - V_{int}(x_{relA})) = -\Delta V_{int} \Big|_A^B$$

Si las únicas fuerzas que realizan trabajo son esta, tendremos:

$$\Delta T \Big|_A^B = W_{AB} = -\Delta V_{int} \Big|_A^B \Rightarrow \Delta(T + V_{int}) = 0 \quad \text{y} \quad E = cte$$

En un sistema de dos cuerpos, tendremos en general fuerzas externas e internas. La condición para que se conserve la energía mecánica total será que las fuerzas externas que realizan trabajo dependan solo de la posición de los cuerpos donde están aplicadas y que las fuerzas de interacción entre dos cuerpos que realizan trabajo dependan solo de la posición relativa entre esos dos cuerpos. Podemos entonces escribir:

$$\Delta T = W_{AB} = -\Delta V_1 \Big|_A^B - \Delta V_2 \Big|_A^B - \Delta V_{int} \Big|_A^B \Rightarrow$$

$$\Delta(T + V_1 + V_2 + V_{int}) = 0 \Rightarrow E = cte$$

de aquí

$$F_1^{(ext)} = -\frac{dV_1}{dx_1}, \quad F_2^{(ext)} = -\frac{dV_2}{dx_2}, \quad F_{21}^{(int)} = -\frac{dV_{int}}{dx_{rel}} = -\frac{dV_{int}}{dx_2} = -\frac{dV_{int}}{dx_1}$$

En las últimas igualdades utilizamos que:

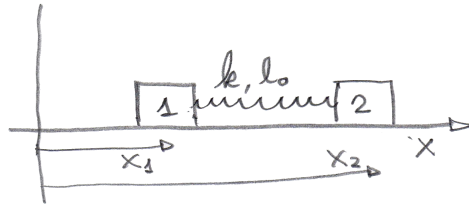
$$\frac{dV_{int}}{dx_2} = \frac{dV_{int}}{dx_{rel}} \underbrace{\frac{dx_{rel}}{dx_2}}_1 \quad \text{y} \quad \frac{dV_{int}}{dx_1} = \frac{dV_{int}}{dx_{rel}} \underbrace{\frac{dx_{rel}}{dx_1}}_{-1}$$

es decir,

$$F_{21}^{(int)} = -\frac{dV_{int}}{dx_2} \quad \text{y} \quad F_{12}^{(int)} = -\frac{dV_{int}}{dx_1}$$

La interacción elástica es un ejemplo de fuerza conservativa. En efecto, dado el siguiente sistema:

Figura 5.19:



$$F_{21}^{(int)} = -k(x_2 - x_1 - l_0) = -k(x_{rel} - l_0)$$

$$F_{12}^{(int)} = k(x_2 - x_1 - l_0) = k(x_{rel} - l_0)$$

Vemos aquí que $F_{21}^{(int)} = -F_{12}^{(int)}(x_{rel})$. Esto quiere decir que $F_{21}^{(int)} = -\frac{dV_{int}}{dx_{rel}}$.

Es fácil ver que:

$$V_{int}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

Entonces,

$$E = T_1 + T_2 + V_{int} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

o también,

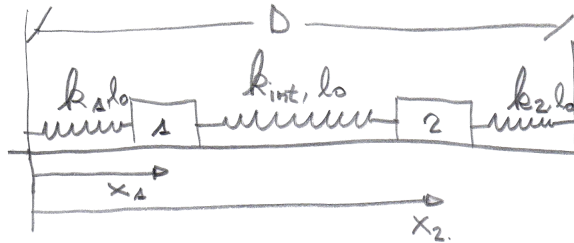
$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}k(x_{rel})^2$$

será una constante de movimiento. Observemos que, en este caso, además, al no haber fuerzas externas (sistema $m_1 - m_2$), se conserva la cantidad de movimiento P_T , y por lo tanto V_{CM} será constante. O sea, la energía cinética del centro de masa ($\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2$) se conservará. Entonces, llamando $E_{int} = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}k(x_{rel})^2$ (energía mecánica interna o relativa), vemos que:

$$E = T_{CM} + E_{int}$$

y como E y T_{CM} son constantes de movimiento, también lo será E_{int} . Si ahora incluimos las fuerzas externas, como muestra el diagrama siguiente:

Figura 5.20:



$$F_1^{(ext)} = -k_1(x_1 - l_0), \quad F_2^{(ext)} = -k_2(D - x_2 - l_0)$$

$$F_{21}^{(int)} = -k_{int}(x_2 - x_1 - l_0)$$

$$V_1^{(ext)} = \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_0)^2, \quad V_2^{(ext)} = \frac{1}{2}k_2(D - x_2 - l_0)^2 \quad \text{y} \quad V^{int} = \frac{1}{2}k_{int}(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

entonces $E = T + V_1 + V_2 + V^{int}$ será una constante de movimiento. Podemos escribir:

$$E = T_{CM} + V_1 + V_2 + T_{rel} + V^{int} = T_{CM} + V^{(ext)} + E_{int}$$

pero ahora ni T_{CM} , ni $(T_{CM} + V^{(ext)})$ ni E_{int} serán constantes.

5.3. Oscilador armónico amortiguado

Todos sabemos, porque lo hemos notado, que los cuerpos puestos a oscilar por medio de resortes o puestos a pendular, lejos de oscilar indefinidamente, van reduciendo su amplitud de oscilación hasta que se detienen en su posición de equilibrio. Ocurre que las oscilaciones “eternas” son una consecuencia de la conservación de la energía mecánica, y en los osciladores que observamos detenerse, la energía no se conserva. En efecto, estos osciladores se encuentran inmersos en un medio (aire, por ejemplo) y el cuerpo que oscila interactúa con él. Como consecuencia de esta interacción, el oscilador va perdiendo energía que se transfiere al medio por las colisiones del oscilador con las partículas que lo constituyen (recordar que el aire es una mezcla de gases, y los gases están constituidos por partículas) hasta que la energía se agota. De ese modo, las amplitudes de las oscilaciones van disminuyendo hasta que “mueren”. Nos proponemos estudiar entonces este tipo de osciladores, llamados generalmente “osciladores amortiguados”. Lo primero que haremos será pensar cómo es la interacción con el medio. Es claro que debemos renunciar a este estudio pensando en la interacción de nuestro cuerpo de masa m con cada partícula que forma el medio.

Por cierto, si nos interesara deberíamos “cambiar” nuestro punto de vista: el número de las partículas que forman el medio sería del orden del número de Avogadro ($N_a = 6.02 \times 10^{23}$), y no nos alcanzaría la vida para siquiera escribir sus condiciones iniciales. Lo que permite estudiar con cierto éxito este tipo de sistemas son la “termodinámica” y la “mecánica estadística”, que espero muchos de ustedes tengan la oportunidad y el placer de estudiar.

Pensando en cómo debería ser la fuerza que aparece sobre nuestro cuerpo de masa m como consecuencia de la interacción con el medio (como un todo), sabemos que esa fuerza no debería depender de la posición del cuerpo (el medio es homogéneo, esto es, en cada punto tiene las mismas propiedades) y, en principio, debería depender de la velocidad de m (sabemos que si el cuerpo está detenido, la fuerza es nula). Llamemos a esa fuerza F_R . Si admitimos que debe ser:

$$F_R = F_R(v) \quad \text{con} \quad F_R(v = 0) = 0$$

y la expansión en serie de Taylor para F_R es

$$F_R(v) = \left. \frac{dF_R}{dv} \right|_{v=0} v + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 F_R}{dv^2} \right|_{v=0} v^2 + \dots$$

vamos a retener solo el primer orden, lo cual nos limitará un poco los resultados (a que las velocidades no sean muy grandes). Entonces,

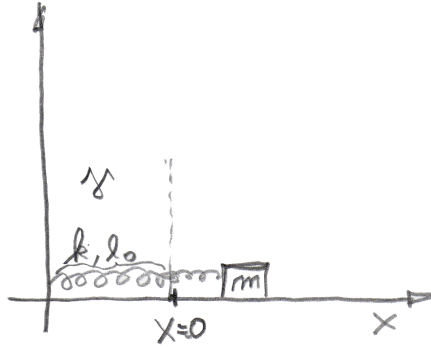
$$F_R(v) = \left. \frac{dF_R}{dv} \right|_{v=0} v$$

$\left. \frac{dF_R}{dv} \right|_{v=0}$ es una constante. Sabemos que debe ser negativa dado que la fuerza F_R disminuye la energía mecánica de nuestro sistema; su trabajo debe ser negativo y, por lo tanto, debe oponerse al desplazamiento (y por lo tanto a la velocidad). Llamando $\left. \frac{dF_R}{dv} \right|_{v=0} = -\gamma$, ($\gamma > 0$), tendremos

$$F_R(v) = -\gamma v$$

Este tipo de fuerza ya había aparecido en algunos de los sistemas que estudiamos (el paracaídas por ejemplo) en la *Parte I* de este libro. La constante γ (que llamaremos “coeficiente de resistencia”) va a depender de las propiedades del medio y de la geometría (o forma) del cuerpo del oscilador. Vamos a estudiar la solución de:

Figura 5.21:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

Esto es el oscilador armónico con el agregado de $F_R(v) = -\gamma v$. Para resolver el problema debemos conocer las condiciones iniciales $x(t=0) = x_0, v(t=0) = v_0$. La ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5.15)$$

es de la familia que sabemos resolver (ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes). Es decir, sabemos que $x(t) = e^{\lambda t}$, entonces, reemplazando en la Ec. (5.15), tenemos:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

Entonces la solución general del problema matemático será

$$x_g(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$$

Asumiendo $\lambda_+ \neq \lambda_-$, veremos más adelante qué ocurre para $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$. Analicemos detenidamente los valores que pueden tomar λ_+ y λ_- . λ_{\pm} tendrán

siempre una contribución a su parte real, $-\frac{\gamma}{2m}$ (si $\gamma \neq 0$). Como $-\frac{\gamma}{2m}$ tiene unidades de $[tiempo]^{-1}$, definimos:

$$\frac{\gamma}{2m} \equiv \frac{1}{T}$$

donde T es un tiempo característico, como veremos más adelante. La otra contribución ($\pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$) podrá ser imaginaria, real o nula en el caso donde $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$. Supongamos primero que la contribución es imaginaria. Esto va a suceder siempre que $\gamma^2 < 4mk$, es decir para constantes de amortiguamiento bajas (cuando $\gamma = 0$ recuperamos el resultado $\lambda_{\pm} = \pm i \frac{k}{m} = i\omega_o$ correspondiente al oscilador sin amortiguamiento). Admitiendo $\gamma^2 < 4mk$, resulta:

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} &= \pm i \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 m}{4m^2 k}} \\ &= \pm i \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{T^2 \frac{k}{m}}} = \pm i \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}} \end{aligned}$$

Entonces, $\lambda_{\pm} = -\frac{1}{T} \pm i\omega_o$, donde $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}}$, para $\gamma^2 < 4mk$, o, lo que es lo mismo, para $T\omega_o > 1$.

Luego de tomar la parte real de $x_g(t)$ y repetir las cuentas que hicimos para el caso de $\gamma = 0$, obtenemos que:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} (A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)), \quad A \text{ y } B \text{ reales.}$$

$$\text{con } \omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}} \text{ y } T = \frac{2m}{\gamma}. \text{ O sea,}$$

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} (A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)) + e^{-\frac{t}{T}} (-A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) \\ &= e^{-\frac{t}{T}} \left(\left(B\omega - \frac{A}{T} \right) \cos(\omega t) - \left(A\omega + \frac{B}{T} \right) \operatorname{sen}(\omega t) \right). \text{ Entonces,} \end{aligned}$$

$$x(t=0) = A = x_o \text{ y } v(t=0) = B\omega - \frac{A}{T} \Rightarrow B = \frac{v_o}{\omega} + \frac{x_o}{T\omega}. \text{ Entonces,}$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} \left(x_o \cos(\omega t) + \left(\frac{v_o}{\omega} + \frac{x_o}{T\omega} \right) \text{sen}(\omega t) \right) \quad (5.16)$$

que también puede ponerse como:

$$x(t) = a e^{-\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \varphi)$$

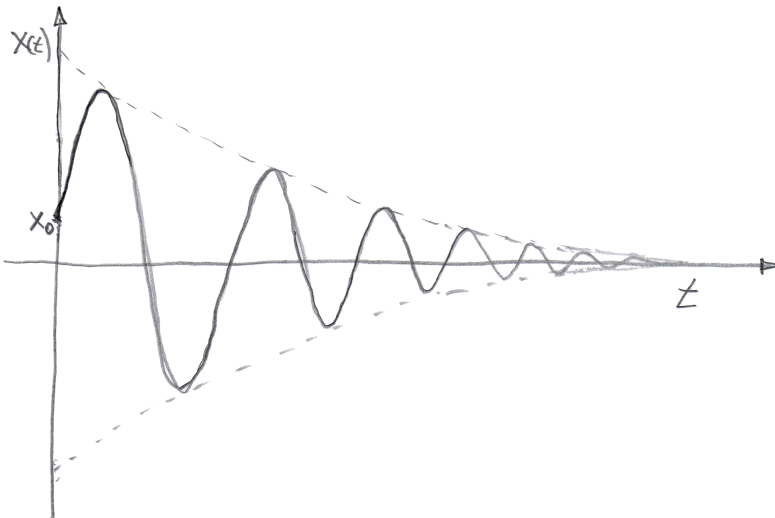
donde

$$a = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega} + \frac{x_o}{T\omega} \right)^2} \quad (5.17)$$

$$\tan(\varphi) = \left(\frac{-\left(\frac{v_o}{\omega} + \frac{x_o}{T\omega} \right)}{x_o} \right) \text{ y } \omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}}$$

Notemos que si $\gamma \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \omega_o$), recuperamos la solución del oscilador armónico sin amortiguamiento que habíamos obtenido antes. Veamos cómo es la solución para $\gamma \neq 0$:

Figura 5.22:



$x = x(t)$ es una función oscilatoria simple, de período $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Recordar que $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}}$, donde $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$, cuya amplitud está modulada por una

función exponencial decreciente $e^{-\frac{t}{T}}$. Esto significa que el movimiento será oscilatorio, pero su amplitud decrecerá en el tiempo hasta desaparecer. El tiempo $T = \frac{2m}{\gamma}$ es una medida del tiempo que duran estas oscilaciones. De hecho, se lo llama “vida media del oscilador” y corresponde al tiempo en el cual la amplitud disminuye un factor $\frac{1}{e} \sim \frac{1}{3}$ respecto del inicial. Este tipo de oscilador amortiguado se conoce como oscilador subamortiguado (u oscilante). Es decir, si $\gamma^2 > 4mk$ el oscilador es subamortiguado.

Por otra parte, si $\gamma^2 > 4mk$ (o sea, $T\omega_o < 1$, para amortiguamientos suficientemente grandes), $\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$ es real, por lo que:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{T} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{1}{T} \left(1 \pm \sqrt{1 - (\omega_o T)^2} \right)$$

O sea,

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} \left(A e^{-\frac{1}{T} \sqrt{1 - (\omega_o T)^2} t} + B e^{\frac{1}{T} \sqrt{1 - (\omega_o T)^2} t} \right) \quad (5.18)$$

con A y B reales y $T = \frac{2m}{\gamma}$. A y B quedan determinados por las condiciones iniciales x_o y v_o (esto queda como ejercicio). Nosotros obtendremos la solución a partir de la solución de la Ec. (5.16). Para ello, notemos que en esa solución, si $(\omega T) < 1$, $\omega = i\omega_o \sqrt{\frac{1}{(T\omega_o)^2} - 1} = i\mu$ (donde hemos definido $\mu = \sqrt{\frac{1}{(T\omega_o)^2} - 1}$). Si reemplazamos ahora $\omega = i\mu$ en (5.16), obtendremos.

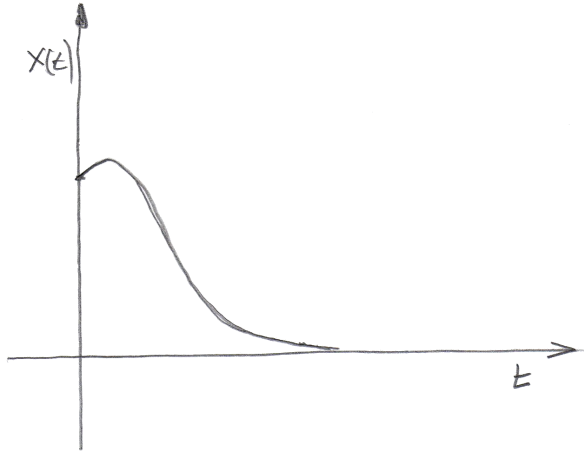
$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} \left(x_o \cos(i\mu t) + \left(\frac{v_o}{i\mu} + \frac{x_o}{T i\mu} \right) \text{sen}(i\mu t) \right)$$

Pero sabemos que $\cos(i\mu t) = \cosh(\mu t) = \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2}$ y $\text{sen}(i\mu t) = i \sinh(\mu t) = \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2} i$ (cosh y sinh, coseno hiperbólico y seno hiperbólico respectivamente), entonces,

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} \left(x_o \cosh(\mu t) + \left(\frac{v_o}{\mu} + \frac{x_o}{T \mu} \right) \sinh(\mu t) \right) \quad (5.19)$$

con $\mu = \sqrt{\frac{1}{(T\omega_0)^2} - 1}$ y $T = \frac{2m}{\gamma}$. Para generalizar este tipo de solución, notemos que la forma de la Ec. (5.18), es una combinación lineal de exponenciales reales decrecientes (de la forma $e^{-\lambda t}$ con $\lambda > 0$). Esto quiere decir que $x(t)$ no es oscilante, sino que decae rápidamente hasta llegar a $x = 0$. La solución es algo como lo que muestra el gráfico siguiente:

Figura 5.23:



¡Este tipo de oscilador amortiguado no llega a oscilar! Se lo llama oscilador sobreamortiguado (o no oscilante). Entonces, si $\gamma^2 > 4mk$, el oscilador es *sobreamortiguado*.

Entre ambos casos de amortiguamiento se ubica lo que se conoce como “*amortiguamiento crítico*”, donde $\gamma_C = 4mk$ (u $\omega_0 T = 1$). Para tal sistema, el discriminante de la expresión que determinaba λ_{\pm} se anula ($\gamma^2 - 4mk = 0$), y entonces $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda = -\frac{1}{T}$. En este caso, el polinomio que determina los valores de λ para las soluciones de nuestra ecuación diferencial tiene una raíz doble. Esta situación la hemos evitado hasta ahora. Ha llegado el momento de hablar del tema. Habíamos dicho que una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden n tiene n soluciones independientes de la forma $x \sim e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

donde λ_i son las n raíces distintas de un polinomio de coeficientes reales de grado n . Si hay una raíz doble se nos “pierde” una solución, si es triple se nos “pierden” dos, etcétera.

Ahora aprenderemos a “encontrarlas”. Para ello consideraremos el caso en que tenemos n raíces diferentes $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ pero dos de ellas muy próximas, λ y $(\lambda + \delta\lambda)$. Esto quiere decir que $x_1(t) = e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = e^{(\lambda + \delta\lambda)t}$ son soluciones de la ecuación diferencial. Si ahora hacemos una combinación lineal de estas dos soluciones, también será solución (recordar que la ecuación diferencial es lineal). Esto es,

$$x(t) = \frac{1}{\delta\lambda} e^{(\lambda + \delta\lambda)t} - \frac{1}{\delta\lambda} e^{\lambda t} = \frac{e^{(\lambda + \delta\lambda)t} - e^{\lambda t}}{\delta\lambda}$$

y es solución. Si ahora tomamos el límite para $\delta\lambda \rightarrow 0$, λ pasa a ser raíz doble, y

$$\lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{(\lambda + \delta\lambda)t} - e^{\lambda t}}{\delta\lambda}$$

sigue siendo solución. Pero

$$\lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{(\lambda + \delta\lambda)t} - e^{\lambda t}}{\delta\lambda} = \frac{de^{\lambda t}}{d\lambda} = te^{\lambda t}$$

Es decir, hemos demostrado que si hay una raíz doble λ , resulta que $e^{\lambda t}$ y $te^{\lambda t}$ son soluciones de la ecuación diferencial (no es difícil demostrar que si λ tiene multiplicidad k , $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, \dots , $t^{k-1}e^{\lambda t}$ serán solución).

Volviendo al amortiguamiento crítico, dijimos que $\lambda = -\frac{1}{T}$ era raíz doble. Esto quiere decir que $x_1(t) = e^{-\frac{t}{T}}$ y $te^{-\frac{t}{T}}$ serán solución. Entonces,

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}(1 + Bt)$$

será la solución en este caso (como ejercicio determinar A y B en términos de x_0 y v_0).

El amortiguamiento crítico corresponde al caso en el cual el sistema va al equilibrio ($x = 0$) en el menor tiempo posible. Ciertos dispositivos, como los amortiguadores de los automóviles y los frenos de las puertas automáticas, utilizan osciladores amortiguados y están, en general, diseñados para estar cerca del amortiguamiento crítico.

Un parámetro que suele utilizarse para caracterizar a un oscilador amortiguado es el llamado “factor de calidad” del oscilador, Q

$$Q = \frac{T\omega_o}{2} = \pi \frac{T}{\tau_o}$$

Para el caso subamortiguado, si $T \gg \tau_o$, resulta $\omega \approx \omega_o$ (recordar que $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}}$). Esto quiere decir que el período de las oscilaciones subamortiguadas es, prácticamente, $\tau_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ (el período sin amortiguar). En ese caso $\frac{T}{\tau_o}$ es el mínimo de oscilaciones que ocurren antes de decaer al equilibrio n_o (dado que T indica el tiempo de duración de las oscilaciones). Para este tipo de osciladores (subamortiguados), resulta,

$$Q \approx \pi n_o$$

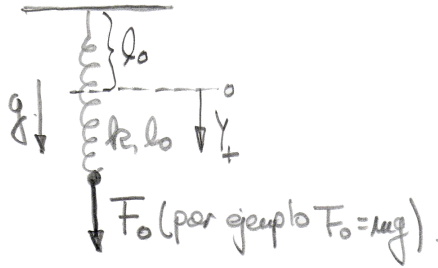
Resumiendo, en términos de Q :

- $Q > \frac{1}{2}$ oscilador subamortiguado.
- $Q = \frac{1}{2}$ oscilador con amortiguación crítica.
- $Q < \frac{1}{2}$ oscilador sobreamortiguado.

Como vimos, en presencia de amortiguamiento, un oscilador (puede o no ser armónico: un péndulo, por ejemplo) en movimiento va perdiendo su energía mecánica hasta que se detiene. Si queremos que el movimiento persista, es necesario entregarle energía mecánica por medio de alguna fuerza externa no conser-

vativa (¿por qué debe ser no conservativa?). Ya sabemos lo que ocurre cuando consideramos al oscilador amortiguado oscilando verticalmente (bajo la acción del peso, que es una fuerza conservativa constante). La segunda ley de Newton se escribe como:

Figura 5.24:



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \underbrace{ky - F_0}_{k(y - \frac{F_0}{k})} = 0$$

Es decir, teniendo en cuenta que $y_e = \frac{F_0}{k}$ es el punto de equilibrio estático, si llamamos $u = y - y_e$, tendremos

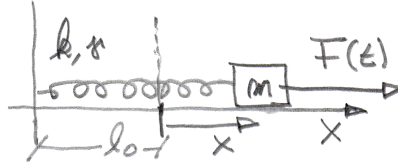
$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = 0$$

Aquí se ve que $u = u(t)$ se comporta como el $x = x(t)$ que habíamos determinado para el oscilador amortiguado para oscilaciones horizontales, o sea,

$$y(t) = u(t) + y_e$$

y lo que tendremos son oscilaciones amortiguadas alrededor de y_e . Conclusión: la aplicación de una fuerza estática corre el punto alrededor del cual oscila el sistema que finalmente se detendrá en $y = y_e$. Si queremos que el movimiento persista, debe ser entonces $F = F(t)$. Estudiaremos entonces el sistema

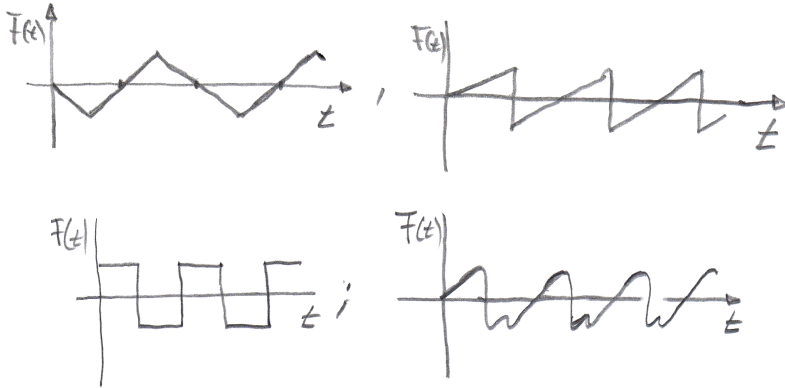
Figura 5.25:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (5.20)$$

En principio, el problema así planteado parece muy vago. $F(t)$ es alguna función del tiempo (de las infinitas que nos podemos imaginar), ¿con qué criterio vamos a elegir esta función para hacer nuestro estudio? Podemos descartar algunas “familias” de $F(t)$ con cierto criterio. Por ejemplo, $F(t)$ no puede ser un polinomio en t dado que esto implica $F \rightarrow \pm\infty$ para t suficientemente grande, y sabemos que las fuerzas “infinitas” no existen. Queremos estudiar un proceso que impida que nuestro sistema se detenga, luego $F(t)$ misma debe persistir, ya que $F(t) \rightarrow 0$ y allí queda; sabemos que nuestro sistema se detendrá. Esto limita bastante las “familias” de $F(t)$ “interesantes”. Las $F(t)$ periódicas son buenas candidatas: permanecen acotadas entre dos valores, y si no son nulas en todo el período, seguro que persisten. Así y todo, el problema sigue siendo bastante vago: ¡podemos elegir infinitas funciones periódicas!. Por ejemplo:

Figura 5.26:



Son periódicas y podríamos seguir imaginando. Pero... es aquí cuando recordamos el teorema de Fourier. Este teorema nos dice que dada una función periódica $F = F(t)$, cuyo período es τ , o sea, $F = F(t) = F(t + \tau)$, entonces,

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (5.21)$$

con $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, $|a_n| \rightarrow 0$, $|b_n| \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$. En suma, cualquier función periódica se puede descomponer como una combinación lineal de senos y cosenos. Esto nos dice que si estudiamos la respuesta de nuestro oscilador ante una fuerza $F = F_o \cos(\omega t)$ (o indistintamente $F = F_o \text{sen}(\omega t)$ ya que $\cos(\alpha) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$), gracias a que cualquier función periódica es de la forma de la Ec. (5.21) y la Ec. (5.20) es lineal, podremos conocer la respuesta a cualquier fuerza periódica. Vale la pena estudiar entonces la ecuación

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos(\omega t) \quad (5.22)$$

Esta es conocida como la ecuación del *oscilador armónico amortiguado forzado*. Recalquemos aquí que la fuerza externa $F(t) = F_o \cos(\omega t)$, tiene un período propio $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, donde ω es la frecuencia angular de la fuerza y puede valer cual-

quier cosa. Este ω no debe ser confundido con $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$, frecuencia “natural” del oscilador (que no vale cualquier cosa sino $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$, insisto) ni tampoco con $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_o T)^2}}$, frecuencia de las oscilaciones amortiguadas (que no vale cualquier cosa: depende de ω_o , de m y de γ).

Desde el punto de vista matemático, la ecuación diferencial (5.22), es lineal pero ya no es homogénea. La solución general para estas ecuaciones se construye como sigue:

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea, o sea, igualada a 0 (y no a $F(t)$), y $x_p(t)$ es la función que puesta en la ecuación, la cumple (una solución particular de, (5.22)). La solución $x_h(t)$ ya la conocemos: es una oscilación amortiguada, y en todos los casos ($\gamma \neq 0$) sabemos que $x_h(t) \rightarrow 0$ para t suficientemente grande (por el factor $e^{-\frac{t}{T}}$). Esta parte de la solución dura un tiempo y luego desaparece. Por eso se la llama “el transitorio”. La parte $x_p(t)$ es la que persiste, y por eso se la conoce como la solución “en régimen” o la “solución estacionaria”. Notemos entonces que

$$x_g(t) \approx x_h(t)$$

a partir de cierto tiempo. Es esta la solución que nos va a interesar. Es importante remarcar que esta solución (la estacionaria) es independiente de las condiciones iniciales, ya que la dependencia en ellas está en las constantes indeterminadas que aparecen en $x_h(t)$ y que se ajustan precisamente a que $x(t=0) = x_o$ y $v(t=0) = v_o$. Nuestra labor ahora será hallar $x_p(t)$. Observando la forma de la Ec. (5.22), esperamos que $x_p(t)$ resulte una combinación lineal de senos y cosenos.

Esta combinación, en su forma más general, se puede escribir como:

$$x_p(t) = x_o \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{con } x_o \text{ y } \varphi \text{ indeterminados})$$

Recordar: como $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\varphi)$, si llamamos a $A = x_o \cos(\varphi)$, $B = -x_o \text{sen}(\varphi)$, $x_p(t) = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)$. Para determinar x_o y φ , reemplazamos $x_p(t)$ en la Ec. (5.22) y obtenemos:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x_o \cos(\omega t + \varphi) - \gamma\omega x_o \text{sen}(\omega t + \varphi) + kx_o \cos(\omega t + \varphi) &= F_o \cos(\omega t) \\ \Rightarrow (-m\omega^2 x_o \cos(\varphi) - \gamma\omega x_o \text{sen}(\varphi) + kx_o \cos(\varphi)) \cos(\omega t) + \\ (m\omega^2 x_o \text{sen}(\varphi) - \gamma\omega x_o \cos(\varphi) - kx_o \text{sen}(\varphi)) \text{sen}(\omega t) &= F_o \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Esto debe cumplirse para todo t y dada la independenciam funcional de $\text{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, debe ser:

$$(m\omega^2 - k)x_o \text{sen}(\varphi) - \gamma\omega x_o \cos(\varphi) = 0 \quad (5.23)$$

$$(k - m\omega^2)x_o \cos(\varphi) - \gamma\omega x_o \text{sen}(\varphi) = F_o \quad (5.24)$$

A partir de la Ec. (5.23) obtenemos:

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-\gamma\omega}{k \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)} \Rightarrow \varphi = \arctan \left[\frac{-\frac{\gamma\omega}{k}}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)} \right]$$

$$\text{O sea, } \text{sen}(\varphi) = \left[\frac{-\frac{\gamma\omega}{k}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} \right]$$

$$y \quad \cos(\varphi) = \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} \right]$$

Reemplazando estos valores en la Ec. (5.24):

$$kx_o \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} + \frac{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} \right] = F_o$$

Entonces,

$$x_o = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}}$$

Lo que nos lleva a:

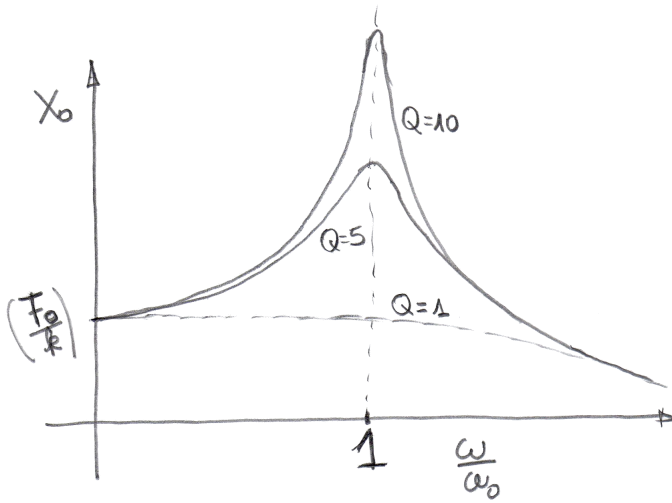
$$x_p(t) = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma\omega}{k}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

El movimiento del sistema es oscilatorio en la misma frecuencia (o período) que la fuerza. Esto no es sorprendente: la fuerza lo “obliga” a ir y venir cualquiera sea la frecuencia natural ω_o con la que el sistema oscilaría libremente. Lo llamativo de la respuesta del oscilador (así se puede llamar a $x_p(t)$) es que la amplitud de oscilación depende fuertemente de la relación entre la frecuencia de la fuerza ω y la frecuencia natural ω_o . Si recordamos el factor de calidad $Q = \frac{m\omega_o}{\gamma}$, introduciéndolo en la expresión de x_o , tendremos:

$$x_o = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}}$$

Entonces,

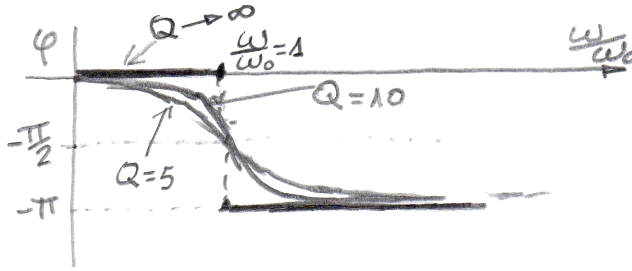
Figura 5.27:



Para $Q > 1$, $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = 1$ la amplitud de la respuesta es la máxima de las posibles. Esta máxima respuesta, además, depende del factor de calidad Q . Vemos que cuando $\gamma \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ y también la respuesta (siempre para $\frac{\omega}{\omega_o} = 1$). Este fenómeno está relacionado con lo que se conoce como “resonancia”.

La respuesta en amplitud ante la fuerza parte del “estiramiento estático” $\frac{F_o}{k}$, correspondiente a una fuerza constante (recordar: $F = F_o \cos(\omega t)$ y si $\omega = 0$, $F = F_o$) crece (para $Q > 1$) hasta que $x_o = \frac{F_o}{k} Q$ (correspondiente a $\frac{\omega}{\omega_o} = 1$) y luego disminuye. La respuesta del desfase φ se puede ver en el siguiente gráfico para tres valores de Q :

Figura 5.28:



Se observa aquí que la máxima amplitud se alcanza en un tiempo diferente al correspondiente a la máxima fuerza. En efecto para la fuerza, como $F = F_o \cos(\omega t)$, los tiempos para máxima fuerza serán

$$\omega t_{MF} = -\varphi, 2\pi - \varphi, 4\pi - \varphi, \text{ etcétera.}$$

Como $\varphi < 0$ (ver la definición de φ), resulta que la amplitud alcanzó su máximo.

5.3.1. Resonancia

Como ya dijimos, nuestra solución consta de dos partes

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

La parte $x_h(t)$ es transitoria ya que (salvo que $\gamma = 0$) para algún tiempo $t > T = \frac{2m}{\gamma}$, $x_h \rightarrow \infty$. Cuando esto ocurre, se dice que el oscilador “entró en régimen”, y $x(t) = x_p(t)$. Esta solución es la llamada “solución estacionaria”. Como vimos, tendremos entonces que, en régimen,

$$x(t) = x_p(t) = x_o \cos(\omega t + \varphi)$$

Este movimiento oscilatorio es de amplitud constante. Si calculamos la energía mecánica en los puntos de máxima amplitud (allí, $v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_o\omega \text{sen}(\omega t + \varphi) = 0$), $E = \frac{1}{2}kx_o^2$. Esto, por supuesto, no quiere decir que se conserve la energía. De hecho, sabemos que no es así, dado que hay amortiguamiento y la fuerza $F_v = -\gamma v$ realiza un trabajo que extrae energía del oscilador. Entonces, ¿por qué se “conserva” la amplitud del movimiento? Porque toda la energía que se disipa debido al trabajo de $F_v = -\gamma v$ en una oscilación, es la energía que entrega la fuerza $F(t) = F_o \cos(\omega t)$ durante esa misma oscilación. Esto es lo que caracteriza y conduce a una amplitud constante. Podemos calcular fácilmente cuál es el trabajo en un ciclo ($\tau = \frac{2\pi}{\omega}$), que realiza la fuerza $F(t)$ como sigue:

El trabajo en un desplazamiento dx es $\delta W = F(t) \cdot dx$ por lo tanto la potencia

$$P(t) = \frac{\delta W}{\delta t} = F(t) \frac{dx}{dt} = F(t)v = -F_o x_o \omega \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Esta potencia es una función periódica del tiempo (a menudo llamada “potencia instantánea”). No nos dice gran cosa, dado que a veces es positiva y a veces negativa. Lo que nos interesa es lo que pasa en un ciclo (una oscilación de nuestro sistema). Para eso calculamos la potencia media por ciclo:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(t) \cdot dt$$

Para calcular esta integral, tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t)(\text{sen}(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \text{sen}(\varphi)) \\ &= \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t) \cos(\varphi) + \cos^2(\omega t) \text{sen}(\varphi) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t) \cos(\varphi) + \cos^2(\omega t) \text{sen}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t) \cos(\varphi) + \frac{1}{2}(\cos(2\omega t) + 1) \end{aligned}$$

donde utilizamos para el último paso que $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(\cos(2\omega t) + 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(t) \cdot dt \\
 &= -F_o x_o \omega \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi) \int_0^\tau \cancel{\text{sen}(2\omega t)} dt + \frac{1}{2} \text{sen}(\varphi) \int_0^\tau \cancel{\cos(2\omega t)} dt + \frac{1}{2} \text{sen}(\varphi) \int_0^\tau dt \right] \\
 &= -F_o x_o \omega \frac{\text{sen}(\alpha)}{2\tau} \int_0^\tau dt = -F_o x_o \omega \frac{\text{sen}(\alpha)}{2\tau} \tau = -\frac{F_o x_o \omega}{2} \text{sen}(\alpha)
 \end{aligned}$$

Pero vemos que,

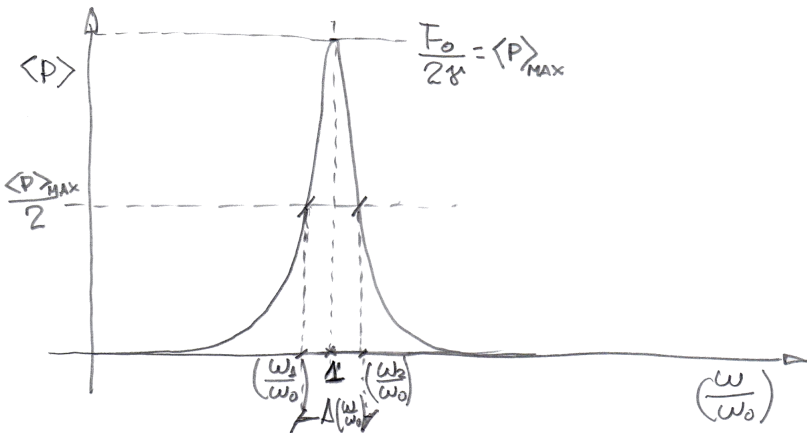
$$x_o = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\varphi) = \frac{-\frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2}}$$

Entonces,

$$\langle P \rangle = \frac{\frac{F_o^2 \omega}{K Q} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)}{2 \left[\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 \right]} = \frac{F_o^2}{2\gamma} \frac{\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left[\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 \right]}$$

Si graficamos $\langle P \rangle$ vs. $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2$ obtenemos el siguiente gráfico:

Figura 5.29:



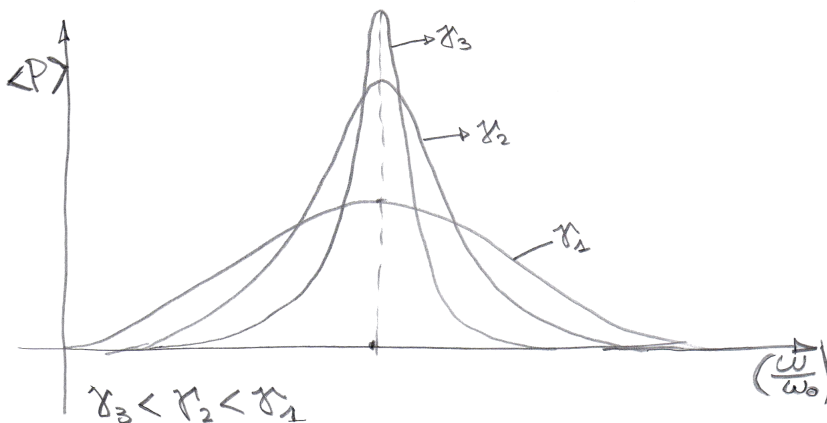
Para $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = 1$ la curva tiene un máximo $\langle P_{max} \rangle$ que indica cuando la frecuencia de la fuerza $F(t)$ coincide con la frecuencia propia (o natural) del oscilador $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En ese caso se obtiene la máxima transferencia de energía posible hacia el oscilador (y, por ende, la máxima respuesta de este con el fin de disiparla). Para frecuencias de la fuerza alejadas de ω_o , la respuesta del oscilador resulta muy pequeña (de hecho, tiende a cero para $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \rightarrow 0$ y para $\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \rightarrow \infty$). El intervalo de frecuencias para las cuales la respuesta del sistema es significativa está determinado por:

$$\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_o} - \frac{\omega_1}{\omega_o}\right)$$

donde ω_2 y ω_1 son las frecuencias correspondientes a un valor de la potencia igual a la mitad del máximo. Este intervalo se suele conocer con el nombre de “ancho de la resonancia” o “ancho de banda”. Este ancho resulta directamente proporcional a γ , es decir, $\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \sim \gamma$.

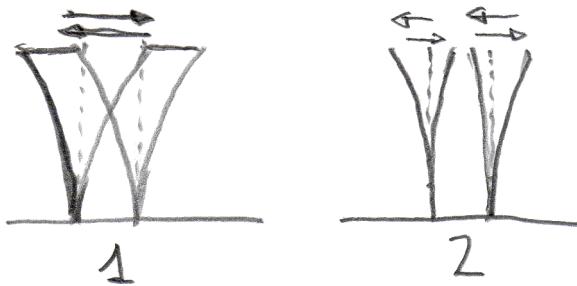
De ese modo, como $\langle P_{max} \rangle \sim \frac{1}{\gamma}$ y $\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \sim \gamma$ las curvas de resonancia se angostan y crecen a medida que γ disminuye:

Figura 5.30:



Existen numerosos fenómenos físicos (mecánicos y no mecánicos) que están relacionados con el efecto de la resonancia. Dentro de los mecánicos podemos mencionar, por ejemplo, la selectividad destructiva de los terremotos a la hora de derrumbar edificios o casas. Cuando ocurre un terremoto, no todos los edificios responden del mismo modo. Simplificando un poco las cosas podríamos decir que las columnas de los edificios tienen dos clases de movimientos:

Figura 5.31:



En los movimientos “tipo 1”, las columnas se mueven juntas de un lado al otro conservando la distancia entre ellas. En los movimientos “tipo 2”, las columnas tienden a moverse cada una por su lado, separándose y acercándose. Estos movimientos que suceden en cualquier edificio resultan normalmente imperceptibles, dado que son de muy pequeña amplitud. Cada uno de estos movimientos oscilatorios tiene una frecuencia propia (o característica). Cuando sucede un terremoto, este produce un temblor de tierra con cierta frecuencia. Los edificios más afectados serán aquellos que tengan sus frecuencias propias más cercanas a la frecuencia del terremoto. En particular, si alguna frecuencia propia correspondiente al tipo de movimiento 2 de algún edificio está cercana a la frecuencia del terremoto, ese edificio es un fuerte candidato a la destrucción. Esto es porque al aumentar la amplitud de las oscilaciones de las columnas, estas podrán separarse lo suficiente como, que la loza más alta (la del último piso) se desprenden-

da y caiga sobre la de abajo, y esta a su vez caiga sobre la que sigue, etcétera. La construcción “antisísmica” consiste en un encadenado superior entre las columnas, de modo de alejar, aumentándola mucho, la frecuencia de este tipo de movimiento de las típicas frecuencias de los terremotos.

Otro ejemplo de resonancia mecánica es la exhibición que suelen realizar los cantantes líricos haciendo quebrar copas con la voz. Cualquiera que tome una copa y frote el borde recorriéndola con el dedo notará que luego de un corto tiempo la copa comienza a emitir un sonido. También podemos escuchar ese sonido si la golpeamos suavemente. Ese sonido, es propio de cada copa y corresponde a las vibraciones del cristal con el que está hecha. Resulta que si el cantante lírico canta próxima a la copa una nota cuya frecuencia es muy cercana a la frecuencia propia de la copa, esta entrará en resonancia oscilando con una amplitud tal que llegará a estallar. Contrariamente a lo que podría pensarse, la muestra de nuestro cantante lírico no es una muestra de potencia de voz, sino más bien de “habilidad” para sintonizar la frecuencia de la copa (esta “habilidad” no es fácil de conseguir).

Como ejemplo de resonancia no mecánica, mencionaremos los circuitos sintonizadores (es una resonancia eléctrica). Las ondas de radiodifusión llenan todo el espacio. Son ondas electromagnéticas con una frecuencia propia de la emisora que las produce. Sin embargo, cuando encendemos una radio somos capaces de escuchar por medio de ella la emisora que deseamos “sintonizándola”. Ello sucede gracias a que el dial modifica un circuito (circuito LCR) cuya corriente es oscilante, de modo que su frecuencia coincida con la de la emisora que deseamos escuchar. De este modo, de esa “sopa” de frecuencias excitatorias que llegan a la antena de la radio, el circuito resonante (el LCR) selecciona solo las frecuencias cercanas a la propia. El sintonizador filtra las otras frecuencias, dado que

caen fuera del ancho de banda alrededor de la frecuencia propia. Si el sintonizador es malo o hay varias frecuencias que caen dentro de su ancho de banda, escucharemos más de una estación de radio.

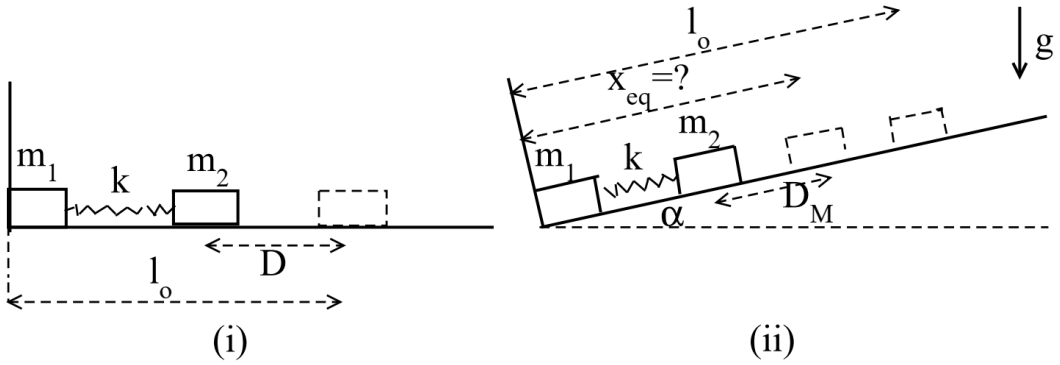
5.4. Ejercicios resueltos del capítulo

PROBLEMA 1: Dos cuerpos de masas $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$, respectivamente, se encuentran unidos por un resorte de constante k y longitud libre l_o . El cuerpo 1 se encuentra apoyado sobre una pared. Inicialmente se comprime el resorte y acerca el cuerpo 2 hacia la pared una distancia D medida desde la longitud libre l_o . Los cuerpos se desplazan sobre la horizontal, libres de rozamiento (ver Fig. (5.32 (i))).

- ¿Cuánto tiempo tardará el cuerpo 1 en despegarse de la pared?
- Hallar las velocidades de ambos cuerpos luego de 10 oscilaciones relativas completas a partir de la separación del cuerpo 1 de la pared.
- Hallar la posición en función del tiempo para ambos cuerpos $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ a partir de que el cuerpo 1 abandona la pared.
- Supongamos ahora que el sistema en lugar de moverse sobre la horizontal lo hace sobre un plano inclinado de ángulo α como muestra la Fig. (5.32 (ii)). Determinar la posición de equilibrio para el cuerpo 2, x_{eq} . ¿Cuál es la máxima compresión que se le puede dar al resorte D_M (desde la posición de equilibrio) de modo que el cuerpo 2 oscile sin que el cuerpo 1 abandone la pared? ¿Cuál será la frecuencia de esas oscilaciones?

Datos: m, k, α, l_o, D y g .

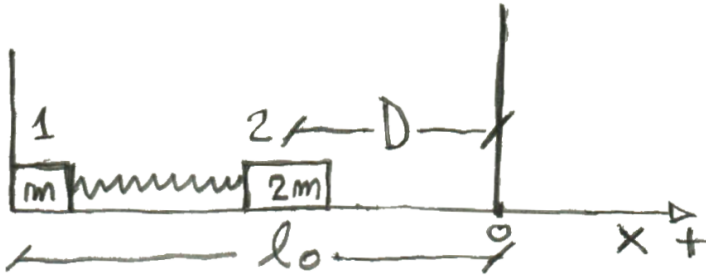
Figura 5.32: Problema 1



RESOLUCIÓN:

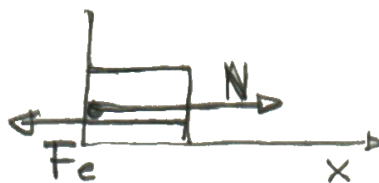
Ponemos el origen en el punto que corresponde a la longitud natural del resorte (l_0).

Figura 5.33:



- a) El cuerpo 1 se despegará cuando el cuerpo 2 pase por el origen. Esto se debe a que mientras el cuerpo 1 está en contacto con la pared, debe cumplirse que

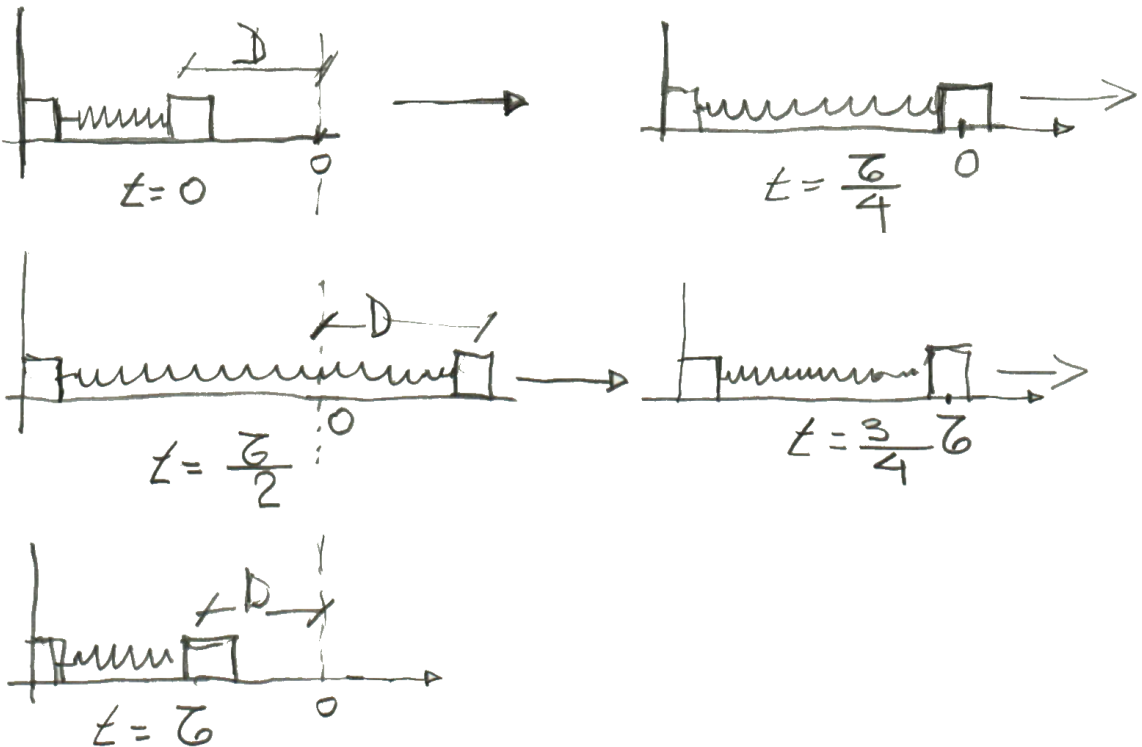
Figura 5.34:



$$N - F_e = 0 \Rightarrow N = F_e$$

donde F_e es la fuerza elástica ($F_e = -kx_2$). Mientras $x_2 < 0$ (resorte estirado, para que el cuerpo 1 siga en reposo debería ser $N < 0$ (cosa que no puede ser). Luego, para $x_2 = 0$, el cuerpo 1 se despega. Pero el tiempo que tarda el cuerpo 2 para ir de $x_2 = -D$ a $x_2 = 0$ es $\frac{\tau}{4}$ (donde $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$, con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$), ya que el movimiento, mientras el cuerpo 1 está fijo en la pared, es indistinguible del oscilador armónico para el cuerpo 2. O sea, si fuera un oscilador armónico todo el tiempo, tendríamos:

Figura 5.35:



Entre $t = 0$ y $t = \frac{\tau}{4}$, el movimiento es el mismo, tanto si el cuerpo 1 está simplemente apoyado en la pared como “pegado con cola” a ella. Para $t > \frac{\tau}{4}$, si el cuerpo 1 estaba apoyado a la pared (es decir, *NO* pegado con cola), se despegará de ella. Si en cambio hubiera estado “pegado con cola”, el cuerpo 2 completaría la oscilación.

- b) Cuando el cuerpo 1 se despega, lo que tendremos es la traslación uniforme del centro de masa del sistema superpuesta a una oscilación relativa armónica:

$$v_2 = V_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r = V_{CM} + \frac{1}{3} v_r$$

$$v_1 = V_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r = V_{CM} - \frac{2}{3} v_r$$

V_{CM} es constante y luego de cualquier número de oscilaciones relativas completas, v_r es la misma que al principio. Esto quiere decir que v_1 y v_2 serán las mismas que cuando el cuerpo 1 se despega.

La velocidad del cuerpo 2 cuando el cuerpo 1 se despega la podemos obtener de la conservación de la energía mecánica. Inicialmente, cuando se suelta el sistema desde $x_2 = -D$, la energía es toda potencial elástica, $E = \frac{1}{2}kD^2$.

Cuando el cuerpo 2 pasa por $x = 0$, es toda cinética $E = \frac{1}{2}m_2v_2^2(x_2 = 0)$ (ya que en ese momento el cuerpo se despega de la pared con $v_1 = 0$). O sea

$$\frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2(x_2 = 0) = mv_2^2(x_2 = 0) \Rightarrow$$

$$v_2(x_2 = 0) = \sqrt{\frac{k}{2m}}D$$

y tendremos, luego de 10 oscilaciones completas, luego que el cuerpo 1 se despegue:

$$v_2(x_2 = 0) = \sqrt{\frac{k}{2m}} D$$

$$v_1 = 0$$

c) Como ya sabemos:

$$x_2(t) = X_{CM}(t) + \frac{1}{3}x_r(t)$$

$$x_1(t) = X_{CM}(t) - \frac{2}{3}x_r(t)$$

$$\text{donde } \begin{cases} X_{CM} = V_{CM}t + X_{CM}^{(o)} \\ X_r = A \cos(\omega_o^{(r)}t + \varphi) + l_o \end{cases}$$

Con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m}{3}$, $\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$, V_{CM} es la velocidad del CM que permanece constante. Entonces la calculamos inicialmente:

$$V_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m \sqrt{\frac{k}{2m}} D}{3m} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k}{2m}} D$$

La posición inicial del CM es:

$$X_{CM}^{(o)} = \frac{-m_1 l_o}{m_1 + m_2} = -\frac{l_o}{3}$$

Por otra parte, como $(x_r(t=0) - l_o) = 0$ y $v_r(t=0) = v_2(x_2=0) = \sqrt{\frac{k}{2m}} D$ resulta,

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sqrt{\frac{k}{2m}} \frac{D}{\sqrt{\frac{3k}{2m}}} \cos\left(\omega_o^{(r)} t - \frac{\pi}{2}\right) + l_o \\
 &= \frac{D}{\sqrt{3}} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t - \frac{\pi}{2}\right) + l_o
 \end{aligned}$$

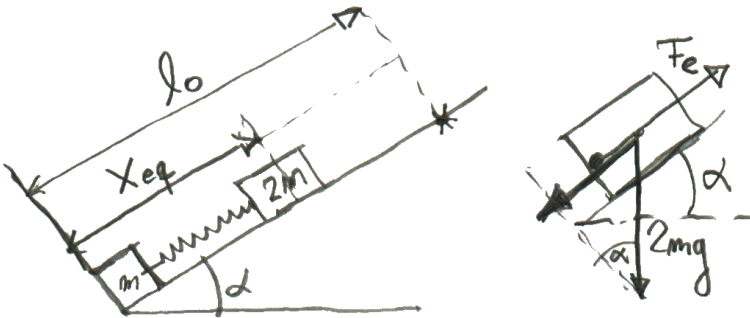
Lo que nos da finalmente:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k}{2m}} Dt - \frac{1}{3} l_o + \frac{1}{3} \left(\frac{D}{\sqrt{3}} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t - \frac{\pi}{2}\right) + l_o \right) \\
 x_2(t) &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k}{2m}} Dt - \frac{1}{3} l_o - \frac{2}{3} \left(\frac{D}{\sqrt{3}} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t - \frac{\pi}{2}\right) + l_o \right)
 \end{aligned}$$

d) Para que el cuerpo 2 esté en equilibrio debe suceder que:

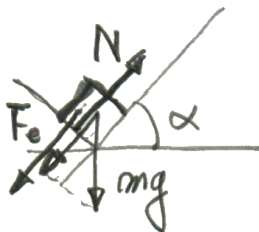
$$-2mg \operatorname{sen}(\alpha) + k(l_o - x_{eq}) = 0 \Rightarrow x_{eq} = l_o - \frac{2mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha)$$

Figura 5.36:



Sabemos que mientras el cuerpo 1 no despega, el cuerpo 2 oscilará alrededor de su posición de equilibrio x_{eq} antes calculada. Para el cuerpo 1 debe cumplirse que:

Figura 5.37:



$$-mg \operatorname{sen}(\alpha) + N - k(l_o - x_2) = 0$$

$$\text{o sea, } N = k(l_o - x_2) = 0 + mg \operatorname{sen}(\alpha) \geq 0$$

Entonces, para que el cuerpo 1 no se despegue debe cumplirse que

$$x_2 \leq \left(l_o + \frac{mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha) \right)$$

x_2 está medido desde la base del plano inclinado. Para obtener el valor medido desde la posición de equilibrio, hacemos:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_{eq}) &\leq \left(l_o + \frac{mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha) \right) - \left(l_o - \frac{2mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha) \right) \\ (x_2 - x_{eq}) &\leq \frac{3mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

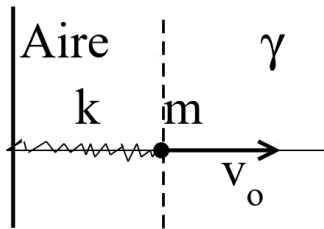
Esto quiere decir que la amplitud del movimiento oscilatorio de x_2 alrededor del punto de equilibrio no debe superar $\frac{3mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha)$ (de otro modo el cuerpo 1 se despegue). Entonces,

$$D_M = 3 \frac{3mg}{k} \operatorname{sen}(\alpha)$$

PROBLEMA 2: Un cuerpo de masa m se encuentra unido a un resorte horizontal de constante elástica k cuyo otro extremo está fijo. La posición de equilibrio del sistema es tal que se encuentra justo en la superficie de separación entre el aire ($\gamma_{\text{aire}} \approx 0$) y un medio cuyo coeficiente de resistencia es γ (ver Fig. (5.38)). El sistema se pone en movimiento a partir de la posición de equilibrio con una velocidad horizontal hacia la derecha v_o . Hallar la posición en función del tiempo en los casos:

- a) $\frac{\gamma}{2m} > \omega_o$.
- b) $\frac{\gamma}{2m} < \omega_o$. Tener en cuenta en este último caso qué sucede si $\frac{\gamma}{2m} \gg 1$. ¿Cuántas oscilaciones completas realizará el sistema para que la amplitud del movimiento decaiga un factor e^{-1} ?

Figura 5.38: Problema 2



RESOLUCIÓN:

- a) Pondremos el “cero” en la línea que divide los dos medios (recordemos que coincide con el l_o del resorte). Si $\frac{\gamma}{2m} > \omega_o$, el movimiento cuando la partícula está en el medio de la derecha es sobreamortiguado. O sea, desde $t = 0$, mientras $x \geq 0$, tendremos:

$$x(t) = \frac{v_o}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_o^2}} e^{-\frac{t}{T}} \sinh \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_o^2} t \right); \quad T = \frac{2m}{\gamma}$$

pero como el seno hiperbólico no cambia de signo, siempre es $x \geq 0$, o sea, esta expresión vale para todo t . La partícula se aleja inicialmente hacia la derecha hasta detenerse y luego retorna a la posición de equilibrio y nunca pasa la región $x < 0$.

- b) En este caso, el movimiento en el medio de la derecha será subamortiguado y la partícula oscilará alrededor de la posición de equilibrio pasando de un medio al otro hasta detenerse en la posición de equilibrio. Mientras $x \geq 0$, el movimiento será de oscilador subamortiguado, y cuando $x < 0$ el movimiento corresponderá al del oscilador libre (sin amortiguamiento). Esto significa que la función $x = x(t)$ estará “partida”. Veamos:

Al principio ($t \geq 0$), tendremos:

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega} e^{-\frac{t}{T}} \text{sen}(\omega t) \quad \text{y} \quad v(t) = v_o e^{-\frac{t}{T}} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega T} \text{sen}(\omega t) \right)$$

donde $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{(T\omega_o)^2}}$, y $T = \frac{2m}{\gamma}$. Esto va a ocurrir hasta que $t = \frac{\pi}{\omega}$. Allí, $x(t) = 0$, y para tiempos mayores $x(t) < 0$. O sea,

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega} e^{-\frac{t}{T}} \text{sen}(\omega t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$$

Para $\frac{\pi}{\omega} < t$, tendremos un oscilador libre con posición $x = 0$ y velocidad inicial dada por la velocidad final del movimiento anterior. O sea, $v(t)$ evaluada en $t = \frac{\pi}{\omega}$. Esto es, $v\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) = -v_o e^{-\frac{\pi}{\omega T}}$, entonces:

$$x(t) = -\frac{v_o}{\omega_o} e^{-\frac{t}{T}} \text{sen} \left(\omega_o \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right) \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{\omega} < t \leq \frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega}$$

Notar que $v \left(t = \frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega} \right) = v_o e^{-\frac{\pi}{\omega T}}$. Siguiendo con la misma idea, luego tendremos:

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega} e^{-\frac{t - \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega} \right)}{T}} e^{-\frac{\pi}{\omega T}} \text{sen} \left(t - \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega} \right) \right); \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega} \right) < t \leq \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

Notar que $v \left(t = \frac{\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right) = -v_o e^{-\frac{\pi}{\omega T}} e^{-\frac{\pi}{\omega T}}$. Entonces:

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega} e^{-\frac{t - \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right)}{T}} e^{-\frac{\pi}{\omega T}} \text{sen} \left(\omega_o \left(t - \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{\pi}{\omega} \right) \right) \right); \left(\frac{\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right) < t \leq \left(\frac{2\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

Notar que $v \left(t = \frac{2\pi}{\omega_o} + \frac{2\pi}{\omega} \right) = v_o e^{-\frac{\pi}{\omega T}} e^{-\frac{\pi}{\omega T}}$.

Entonces, podemos poner, en general, para la solución n -ésima ($n = 1, 2, \dots$):

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega} e^{-\frac{1 - \frac{(n-1)\pi}{\omega_o}}{T}} \text{sen} \left(\omega \left(t - \left(\frac{(n-1)\pi}{\omega_o} + \frac{(n-1)\pi}{\omega} \right) \right) \right)$$

para $\left[\frac{(n-1)\pi}{\omega_o} + \frac{(n-1)\pi}{\omega} \right] \leq t < \left[\frac{(n-1)\pi}{\omega_o} + \frac{n\pi}{\omega} \right]$

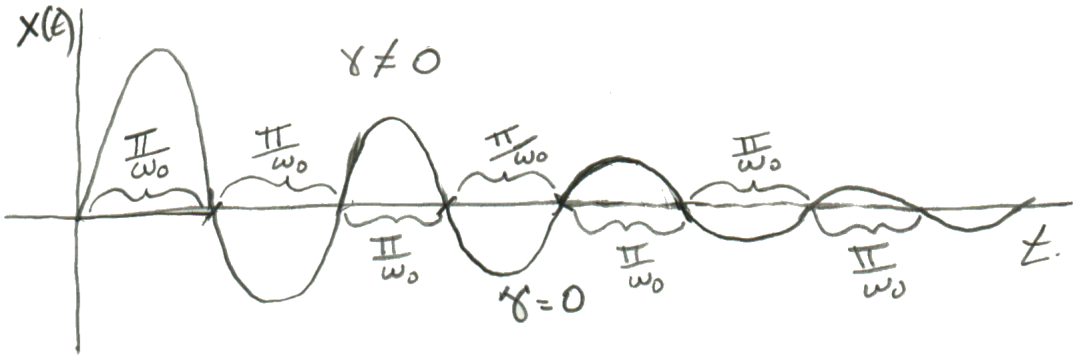
y por el otro lado:

$$x(t) = -\frac{v_o}{\omega_o} e^{\frac{n\pi}{\omega T}} \text{sen} \left(\omega_o \left(t - \left(\frac{(n-1)\pi}{\omega_o} + \frac{n\pi}{\omega} \right) \right) \right)$$

para $\left[\frac{(n-1)\pi}{\omega_o} + \frac{n\pi}{\omega} \right] \leq t < \left[\frac{n\pi}{\omega_o} + \frac{n\pi}{\omega} \right]$

Si $\omega_o \gg \frac{\gamma}{2m}$, $\omega \approx \omega_o$. En ese caso, el gráfico sería algo así:

Figura 5.39:



La amplitud se reducirá en un factor e^{-1} cuando

$$\frac{n\pi}{\omega T} \approx \frac{n\pi}{\omega_0 T} = 1, \quad \text{o sea} \quad n \approx \left[\frac{\omega_0 T}{\pi} \right]$$

donde “[]” significa la parte entera. Notar que este n es el doble del correspondiente al que obtendríamos si no hubiera dos medios (es decir, todo con el mismo $\gamma \neq 0$). Esto se debe a que durante media oscilación, si $\gamma = 0$ a la izquierda, no hay amortiguamiento.

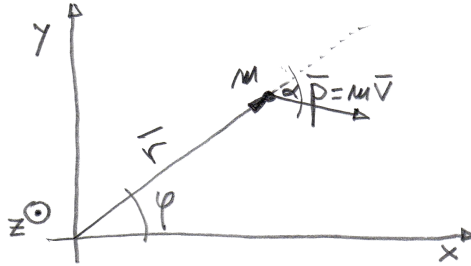
Capítulo 6

Momento angular y fuerzas centrales

6.1. Momento angular

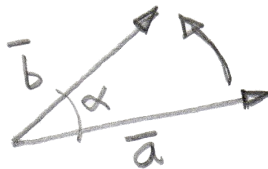
Consideremos un cuerpo de masa m que en un instante dado t , se encuentra en la posición \vec{r} y con velocidad \vec{v} (sea $\vec{p} = m\vec{v}$). Estos dos vectores determinan un plano. Si en ese instante t , hacemos un gráfico, tendremos:

Figura 6.1:



El vector $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ es una magnitud vectorial llamada “momento angular”. Recordemos aquí que el producto vectorial entre dos vectores $\vec{a} \times \vec{b}$, es otro vector \vec{c} tal que $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\alpha)$, donde α es el ángulo comprendido entre \vec{a} y \vec{b} , su recta de acción es la recta perpendicular al plano definido por \vec{a} y \vec{b} y su sentido viene dado por la regla del “tirabuzón”.

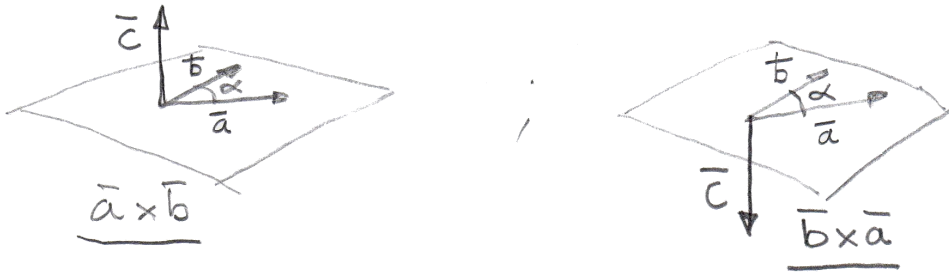
Figura 6.2:



Imaginemos un tirabuzón (o, sacacorchos) “pinchando” el plano. Si lo hacemos girar en el sentido en el que \vec{a} gira hacia \vec{b} , el tirabuzón evolucionará hacia afuera del plano si ese sentido es antihorario, y hacia adentro si su sentido es

horario: ese es el sentido de \vec{c} . En el gráfico, ese sentido es el de la flecha (antihorario), o sea, en ese caso \vec{c} está dirigido hacia “afuera” del plano. Si en lugar de tener $\vec{a} \times \vec{b}$, tuviéramos $\vec{b} \times \vec{a}$, al girar \vec{b} hacia \vec{a} , tendríamos una evolución “horaria” y el tirabuzón entraría: \vec{c} estaría apuntando hacia “adentro” del plano. O sea $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Figura 6.3:



A medida que el cuerpo evoluciona, r y p cambian en el tiempo, así que esperamos que, en general, como $\vec{l}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$, el \vec{l} también cambie en el tiempo (en módulo, dirección y sentido). Cabe preguntarse qué condición debe cumplir un sistema para que, si bien $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y $\vec{p} = \vec{p}(t)$, resulte \vec{l} constante. Para responder esta pregunta calculemos la variación de \vec{l} en el tiempo, o sea, $\frac{d\vec{l}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(la regla de derivación del producto es consistente con el producto vectorial). Pero $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, y como $\vec{p} = m\vec{v}$, el primer término de esta última expresión ($\vec{v} \times m\vec{v}$) se anula (el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es nulo ($\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$)). Además, como según la segunda ley de Newton $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$, queda:

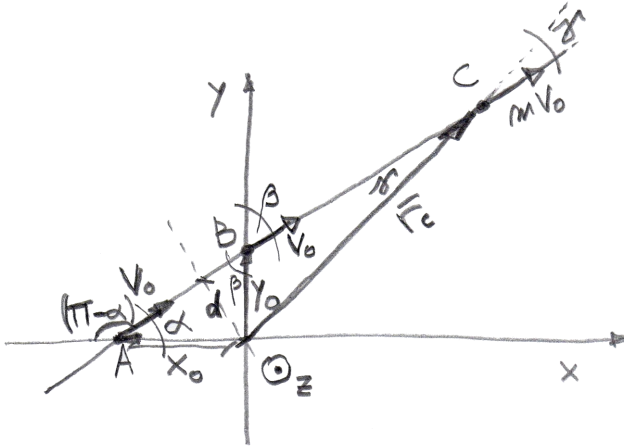
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (\vec{\tau} = \text{Torque})$$

O sea, la variación de \vec{l} en el tiempo se debe al torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ de la fuerza

aplicada sobre el cuerpo. Esto quiere decir que si \bar{l} no varía en el tiempo ($\frac{d\bar{l}}{dt} = 0$), el torque de la fuerza debe ser nulo durante todo el movimiento. Aparte del caso trivial de la partícula libre ($\vec{F} = 0$), esto se va a cumplir si $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Para ello, debe suceder que $\vec{F} = F\hat{r}$, o sea que la fuerza esté en la misma recta de acción que \hat{r} . Este tipo de fuerza ya había aparecido anteriormente en nuestros estudios: son las fuerzas conocidas como “fuerzas centrales”.

Antes de continuar con las fuerzas centrales, veamos un poco qué sucede con el \bar{l} de la partícula libre. Acabamos de ver que se conserva ya que si $\vec{F} = 0$, $\vec{\tau} = 0$. Calculemos \bar{l} en dos puntos de la trayectoria y verifiquemos que \bar{l} da lo mismo:

Figura 6.4:

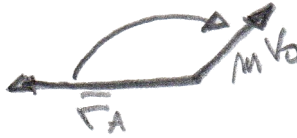


Calculemos \bar{l} en el punto A.

$$\bar{l}_A = \vec{r}_A \times m\vec{v}_0, \quad |\bar{l}_A| = mv_0x_0 \text{ sen}(\pi - \alpha) = mv_0x_0 \text{ sen}(\alpha) = mv_0d$$

y el sentido de tirabuzón es horario.

Figura 6.5:



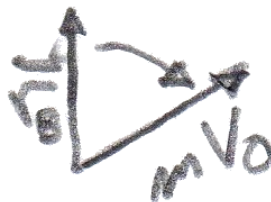
Si llamamos \hat{z} al versor que apunta hacia arriba (indicado en la Fig. (6.4) como $\odot z$), tendremos que $\bar{l}_A = -mv_0 d \hat{z}$.

Calculemos ahora \bar{l} en B

$$\bar{l}_B = \bar{r}_B \times m\bar{v}_0, \quad |\bar{l}_B| = mv_0 y_0 \text{ sen}(\beta) = mv_0 y_0 \text{ cos}(\alpha) = mv_0 d$$

donde hemos utilizado que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. El sentido del tirabuzón también es horario

Figura 6.6:



o sea $\bar{l}_B = -mv_0 d \hat{z}$.

Es fácil ver que si lo calculamos en cualquier otro punto C (ver figura), como $|\bar{r}_C| \text{ sen}(\gamma) = d$, obtendremos:

$$|\bar{l}_C| = mv_0 |\bar{r}_C| \text{ sen}(\gamma) = mv_0 d$$

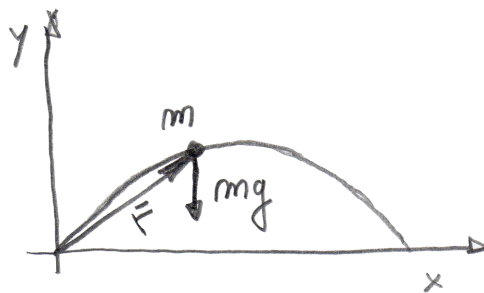
y el sentido del tirabuzón horario,

$$\bar{l}_A = \bar{l}_B = \bar{l}_C = \bar{l} = -mv_0 d \hat{z}$$

Volvamos a las fuerzas centrales y al problema de la conservación de \vec{l} . El momento angular de una partícula se conservará si y solo si $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, el torque de la fuerza sobre ella es nulo (la fuerza es central, $\vec{F} = F\hat{r}$, partícula libre incluida, ya que en ese caso la fuerza es central, con $F = 0$). Las consecuencias de la conservación de \vec{l} en el movimiento de una partícula son inmediatas y nos dedicaremos a estudiarlas.

Lo primero que podemos decir es que si una partícula conserva su momento angular \vec{l} , el movimiento resultará plano: esto es así porque al ser \vec{l} un vector constante, también lo serán su recta de acción y dirección perpendicular al plano definido por \vec{r} y \vec{p} . Como sabemos, en tres dimensiones, dada una dirección fija (la de \vec{l} , por ejemplo), solo existe un plano perpendicular posible, \vec{r} y \vec{p} deberán permanecer entonces en dicho plano. Observemos que la propiedad inversa no es cierta. *No es cierto* que todo movimiento plano implique la conservación de \vec{l} . En efecto, \vec{l} podría variar en módulo y no en dirección, en cuyo caso el movimiento sería plano pero $\vec{l} \neq \text{cte}$. Un ejemplo de esto es el movimiento de un proyectil bajo la aceleración de la gravedad terrestre g ;

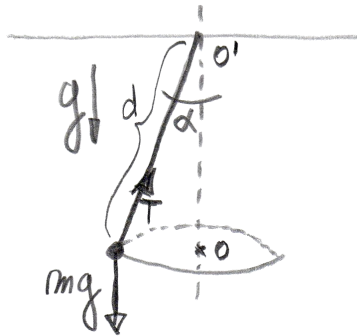
Figura 6.7:



Según sabemos, la trayectoria es una curva plana (una parábola). Sin embargo, \vec{l} no se conserva ($\vec{\tau} = \vec{r} \times (-mg\hat{y}) \neq 0$) debido a que $\vec{F} = -mg\hat{y}$ (*no central*). Sin embargo \vec{r} y \vec{p} permanecen en el plano $x-y$.

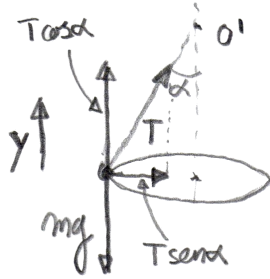
Otro ejemplo que estudiaremos a continuación es el péndulo cónico. Además de ser un ejemplo de movimiento plano sin que necesariamente \bar{l} se conserve, este es un ejemplo de cómo la definición de \bar{l} (y su eventual conservación) depende del origen. Que la definición de $\bar{l} = \bar{r} \times \bar{p}$ dependa del origen no es sorprendente: el vector posición \bar{r} depende del origen. Que la conservación de \bar{l} dependa del origen tampoco debería sorprendernos: el versor \hat{r} depende del origen, luego una fuerza central a un origen no lo será si cambiamos el origen: el \bar{l} se conservará para el sistema de coordenadas desde cuyo origen la fuerza resulta central. Si cambiamos el origen, el \bar{l} dejará de conservarse. El péndulo cónico consiste en un cuerpo que pende de un hilo de modo tal que la trayectoria es una circunferencia horizontal y el hilo genera un cono que forma cierto ángulo con la vertical.

Figura 6.8:



Primero nos preguntamos, ¿se conservará \bar{l} ? Por lo que acabamos de ver, esta pregunta es ambigua. Deberíamos preguntarnos si \bar{l} se conserva desde algún origen determinado. Por ejemplo, ¿se conservará \bar{l} desde el origen O' ? Para eso debemos examinar si la fuerza resulta central hacia O' . El diagrama de cuerpo libre es:

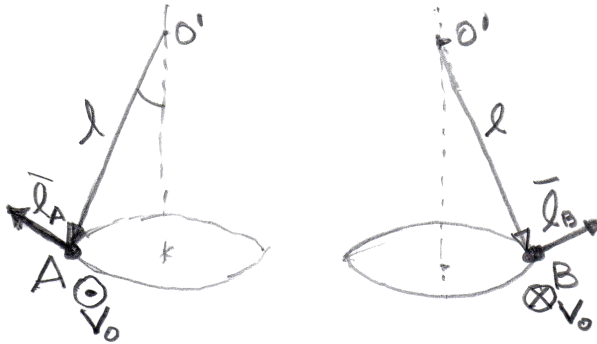
Figura 6.9:



En la dirección \hat{y} , como $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $T \cos(\alpha) - mg = 0$.

Queda entonces, como fuerza neta, la componente horizontal de la tensión $T \sin(\alpha)$ ($mg \tan(\alpha)$) que es *no central* desde O' . Existe un torque debido a esta fuerza luego, desde O' \vec{l} *no se conserva* (notemos que sin embargo el movimiento es plano). Veamos cómo varía \vec{l} . Para ello, calculemos \vec{l} en varios puntos:

Figura 6.10:



Para el cálculo cuando la partícula está en A, la velocidad de la partícula vale v_0 y sale de plano (esto se indica como $\odot v_0$).

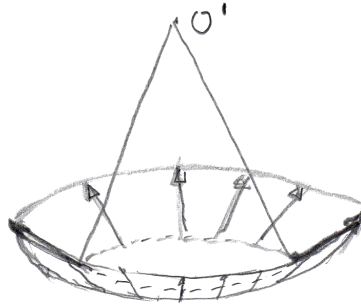
$|\vec{l}_A| = mv_0 l$ y el sentido y dirección está indicado en la figura.

$|\vec{l}_B| = mv_0 l$ y el sentido y dirección está indicado en la figura.

Es fácil observar que con el movimiento, el vector \vec{l} no cambia su módulo y si

unimos las puntas de los diferentes \vec{l} , tendremos un “plato de sopa”.

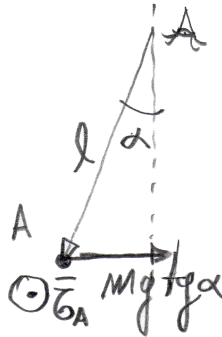
Figura 6.11:



La variación de \vec{l} consiste en una rotación. Es interesante calcular el torque que produce esta variación de \vec{l} : $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

El torque en A vale:

Figura 6.12:

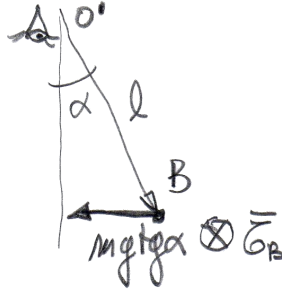


$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_A \Rightarrow |\vec{\tau}_A| = mgl \text{ sen}(\alpha)$$

y el sentido es hacia afuera de la hoja (esto está indicado como $\odot \vec{\tau}_A$).

El torque en B vale :

Figura 6.13:



$$\vec{\tau}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}_B \Rightarrow |\vec{\tau}_B| = mgl \operatorname{sen}(\alpha)$$

con sentido hacia adentro de la hoja ($\otimes \vec{\tau}_B$).

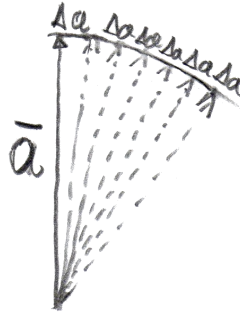
Fácilmente podemos graficar, visto desde O' (mirando el sistema desde arriba, donde está el “ojito”), cómo son los torques. Estos torques (de módulo constante $mgl \operatorname{sen}(\alpha)$) van “pateando” el \vec{l} en cada punto de modo de hacerlo rotar.

Figura 6.14:



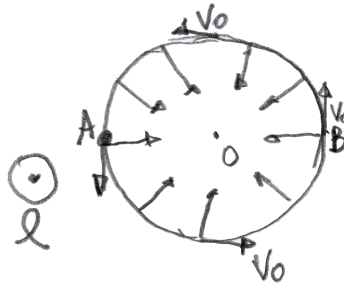
El vector \vec{l} rota porque su variación es perpendicular a él mismo. Este es el segundo ejemplo que vemos en el que sucede esto: el primero es el movimiento circular uniforme. En ese caso, la velocidad \vec{v} y su variación (la aceleración radial) son perpendiculares, entonces \vec{v} rota. En general, podemos decir que cuando un vector varía de manera continua de modo que su variación es perpendicular a él mismo, ese vector está rotando (como puede verse en la siguiente figura):

Figura 6.15:



Veamos qué sucede ahora con el \bar{l} calculado desde O (que es el centro de la circunferencia correspondiente a la trayectoria).

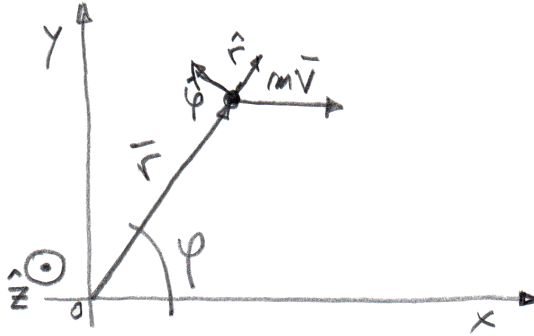
Figura 6.16:



En ese caso, la fuerza, de módulo $mg \operatorname{tg}(\alpha)$, es central. Entonces, el \bar{l} desde allí se conservará. Su valor será $|\bar{l}| = mv_0 l \operatorname{sen}(\alpha)$ y apuntará hacia (\odot) .

Ahora vamos a expresar el momento angular de una partícula en versores polares. Para eso expresamos al vector posición como $\bar{r} = r\hat{r}$ y $\bar{p} = m\bar{v} = m\dot{r}\hat{r} + mr\dot{\phi}\hat{\phi}$ (donde $\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ como ya vimos).

Figura 6.17:



Entonces,

$$\bar{l} = \bar{r} \times \bar{p} = r m \dot{r} (\hat{r} \times \hat{r}) + m r^2 \dot{\varphi} (\hat{r} \times \hat{\varphi})$$

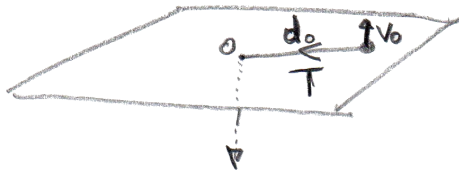
pero $\hat{r} \times \hat{r} = \hat{0}$ y $\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$, o sea,

$$\bar{l} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{z}$$

Si \bar{l} se conserva, el movimiento será en el plano $x-y$ (dado que \bar{l} siempre apuntará según \hat{z}) y $m r^2 \dot{\varphi} = l = cte$. Esto es, la cantidad $m r_0^2 \dot{\varphi}_0 = l_0$ evaluada inicialmente, siempre valdrá lo mismo. Físicamente quiere decir que si la partícula se acerca al origen, necesariamente $\dot{\varphi}$ aumenta (y a la inversa).

Por ejemplo: consideremos una partícula atada a un hilo de longitud d_0 moviéndose sobre un plano horizontal sin rozamiento. Sabemos que el movimiento será circular uniforme con $|\bar{v}| = v_0$ (o también $\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{d_0} = \omega_0$).

Figura 6.18:



Entonces, $l_i = m d_0^2 \frac{v_0}{d_0} = m d_0 v_0$

Si ahora tiramos del hilo (que pasa por un agujerito) de modo que finalmente $d = \frac{d_0}{2}$, tendremos que:

$$l_f = m \frac{d_0}{2} v$$

Pero T es central desde O , entonces l debe conservarse y obtenemos que $l_i = l_f$.

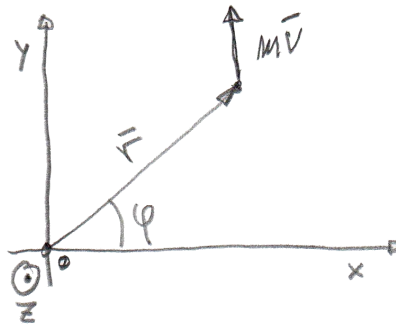
$$m d_0 v_0 = m \frac{d_0}{2} v \Rightarrow v = 2v_0$$

o también como

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = 2 \frac{v}{d_0} = 4 \frac{v_0}{d_0} = 4\omega_0$$

Como vimos, el momento angular para una partícula de masa m resulta, en coordenadas polares:

Figura 6.19:



$$\vec{l} = mr^2 \dot{\varphi} \hat{z} = l \hat{z}, \quad l = mr^2 \dot{\varphi}$$

A $I = mr^2$ se lo suele llamar *momento de inercia de la partícula*, y entonces $l = I \dot{\varphi}$.

6.2. Fuerzas centrales

La magnitud $l = mr^2\dot{\varphi}$ ya había aparecido cuando estudiamos la segunda ley de Newton descompuesta en coordenadas polares:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \quad (6.1)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \quad (6.2)$$

En aquella oportunidad, vimos que si $\vec{F} = F_r \hat{r}$, (es decir, \vec{F} es central), resulta que como $F_\varphi = 0$, si multiplicamos (6.2) por r tendremos:

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

pero

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = \frac{dl}{dt}$$

o sea, $\frac{dl}{dt} = 0$, entonces, $l = mr^2\dot{\varphi} = cte$. O sea que *ya* sabíamos que las fuerzas centrales conservan la cantidad l . Ahora sabemos además que esta cantidad está relacionada con un vector $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\dot{\varphi}\hat{z}$, donde la última igualdad está expresada en coordenadas polares medidas sobre el plano definido por \vec{r} y \vec{p} en ese instante. Si \vec{l} se conserva, ese plano es el mismo para todo el movimiento (ya vimos que $\vec{l} = cte$, entonces el movimiento es en el plano).

Supongamos ahora que, además de central, \vec{F} es conservativa. Esto quiere decir que $\vec{F} = F_r \hat{r}$, donde $F_r = F(r)$, de modo que:

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr = -(V(r_B) - V(r_A)); F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

A partir de aquí tenemos dos caminos: uno largo y otro corto. Tomaremos el largo, pero el que sabe lo que hace debería tomar el corto.

Camino largo: Las ecuaciones (6.1) y (6.2) quedan como:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \quad (6.3)$$

$$mr^2\dot{\varphi} = l \quad (6.4)$$

donde l es una constante $l = mr_0^2\dot{\varphi}_0$ que evaluamos con las condiciones iniciales. Notemos que (6.4) es una “versión” integrada de (6.2) ya que vimos que (6.2) quería decir, si $F_\varphi = 0$, que $\frac{dl}{dt} = 0$.

Podemos utilizar (6.4) para despejar $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

Si esta expresión la reemplazamos en (6.3), obtenemos;

$$m\ddot{r} - mr\frac{l^2}{m^2r^4} = F(r) \Rightarrow m\ddot{r} = F(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

Llegado este punto, procedemos como hacíamos para integrar (cuando estudiamos cinemática) cuando teníamos $a = a(x)$ (ó $\ddot{x} = \ddot{x}(x)$). Aquí tenemos $\ddot{r} = \ddot{r}(r)$. Escribimos entonces:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \dot{r} \Rightarrow m\dot{r}d\dot{r} = \left(F(r) + \frac{l^2}{mr^3} \right) dr$$

Esto es lo mismo que ya estudiamos cuando teníamos una fuerza conservativa $F(x)$ y a partir de $m\dot{x}d\dot{x} = F(x)dx$ obteníamos la conservación de la energía mecánica.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 &= \int_{r_0}^r \left[F(r)dr + \frac{l^2}{mr^3}dr \right] \Rightarrow \\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 &= - (V(r) - V(r_0)) - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{l^2}{2mr_0^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) &= \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + \frac{l^2}{2mr_0^2} + V(r_0) \end{aligned}$$

Si ahora llamamos $V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$ (*potencial efectivo*), tendremos:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + V_{ef}(r_0) = E = cte$$

Esto quiere decir que la cantidad $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{ef}(r)$ evaluada en cualquier momento vale lo mismo que inicialmente, o sea, es una constante de movimiento. Esto es idéntico a lo que habíamos obtenido para la conservación de la energía mecánica: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$.

Entonces,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = E, \quad V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Camino corto: tenemos que:

- \bar{F} es central entonces $mr^2\dot{\varphi} = l = cte$.
- \bar{F} es conservativa, $\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E$.
- $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, ya que $\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$.

Luego, y utilizando que $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Ya sea por el camino corto o por el largo obtuvimos:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{ef}(r)} = E$$

donde E (energía mecánica) y l (momento angular) son constantes de movimiento, esto es, constantes conocidas (y fijadas) por las condiciones iniciales $(r_0, \dot{r}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$.

Misma ecuación, dos lecturas.

La ecuación

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

es la expresión que indica que la energía mecánica total se conserva. Recordemos:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}}_T + V(r) = E$$

El sumando $\frac{l^2}{2mr^2}$, que viene de $\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2$, parte de la energía cinética que gracias a la conservación de l pudimos poner en función de r . Esta misma ecuación la podemos ver como:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{V_{ef}(r)} + V(r) = E$$

o

$$T' + V_{ef}(r) = 0$$

donde $T' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ es parte de la energía cinética (la que depende de la velocidad radial \dot{r}) y $V_{ef}(r)$ es una energía potencial efectiva de un problema unidimensional (de coordenada r y velocidad \dot{r}), pero que contiene, además de la energía potencial del problema $V(r)$, la otra parte de la energía cinética, que gracias a la conservación de l , depende solo de r .

Podemos estudiar el movimiento radial (cómo evoluciona la coordenada r) tal como estudiamos cualquier problema conservativo unidimensional

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

A continuación estudiaremos este punto de vista, especialmente para el potencial gravitatorio solar:

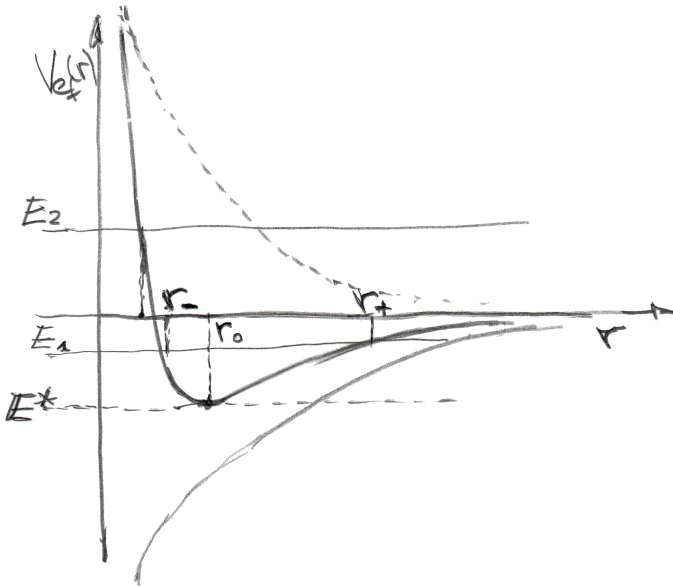
$$V(r) = -\frac{GM_s m}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

donde M_s y m son las masas del Sol y de un cuerpo en interacción gravitatoria con el Sol. Remarquemos que se puede hacer con cualquier fuerza central conservativa.

Tendremos entonces que la energía de nuestro problema será:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}}_{V_{ef}(r)} = E$$

Figura 6.20:



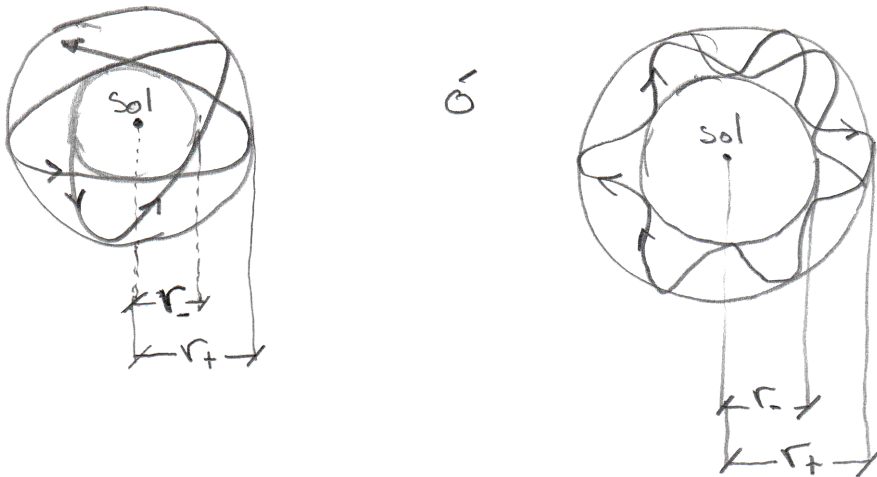
Interpretamos esto como una partícula de velocidad \dot{r} , moviéndose en un potencial $V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$.

Para $l > 0$ fijo, vemos que tendremos dos tipos de movimientos posibles. Hay un mínimo de energía para el cual el movimiento es posible: E^* .

- Para una energía $E < E^*$, el movimiento no es posible (ya que, para eso, debería ser $\dot{r}^2 < 0$).

- Si $E = E^*$, resulta que $\dot{r}^2 = 0$. Esto quiere decir que no hay movimiento radial: el radio permanece fijo (en r_0), mientras que el cuerpo se mueve alrededor del Sol. Esto corresponde a una trayectoria (u órbita) circular.
- Si $E^* < E < 0$ (como E_1 en el gráfico), el movimiento del cuerpo queda confinado entre un radio máximo r_+ y un radio mínimo r_- . El movimiento es ligado. La trayectoria podría ser:

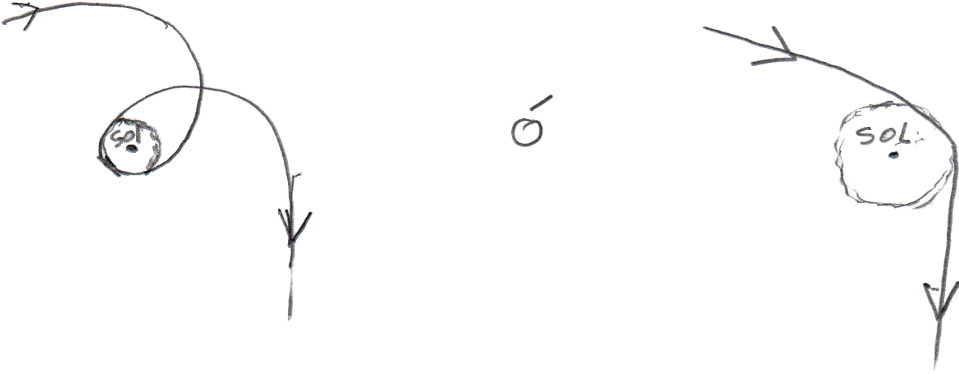
Figura 6.21:



o cualquier otra curva comprendida entre dos circunferencias de radios r_+ y r_- . Del estudio energético no podemos ser más específicos.

- Si $0 < E$ (como E_2 en el gráfico), el movimiento es no ligado. El cuerpo de masa m se acerca al Sol desde el infinito, llega a una distancia mínima y luego se aleja. La trayectoria podría ser:

Figura 6.22:



Destaquemos aquí que ambos tipos de movimiento se realizan en el sistema solar: los planetas y los cometas cíclicos (como el Halley) son ejemplos de movimiento ligado. Los cometas ocasionales corresponden al movimiento no ligado.

Los puntos de retorno radiales r_+ y r_- pueden determinarse fácilmente, ya que en ellos $\dot{r} = 0$ y entonces:

$$V_{ef}(r) = E \Rightarrow \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - E = 0$$

Para hallar estas raíces hacemos el cambio de variables $u = \frac{1}{r}$, con lo cual:

$$\frac{l^2}{2m}u^2 - \alpha u - E = 0$$

cuyas soluciones inmediatas son:

$$u_{\pm} = \frac{\alpha m}{l^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \right)$$

o sea,

$$r_+ = \frac{1}{u_-} = \frac{l^2}{\alpha m \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \right)}$$

$$r_- = \frac{1}{u_+} = \frac{l^2}{\alpha m \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \right)}$$

Estas expresiones nos sirven para determinar la energía mínima posible (E^*), correspondiente a la órbita circular, así como el radio r_0 de esta órbita.

Para el caso de órbita circular, $r_+ = r_- = r_0$. Eso corresponde a una raíz doble $u_+ = u_- = u_0$, o sea,

$$\sqrt{1 + \frac{2l^2 E^*}{m\alpha^2}} = 0 \Rightarrow E^* = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$$

y $u_0 = \frac{\alpha m}{l^2}$, entonces,

$$r_0 = \frac{l^2}{\alpha m} \Rightarrow E^* = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{r_0}$$

Si queremos más detalles de los que se pueden obtener a partir del estudio energético, debemos resolver el problema. Los pasos generales para hacerlo ya los conocemos. De hecho, los hemos empleado ya en las primeras clases de cinemática.

A partir de:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{ef}(r) = E$$

obtenemos:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_{ef}(r)) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{ef}(r))} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{ef}(r))}} = dt \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{ef}(r))}} = t$$

donde hemos supuesto $r > r_0$ (caso contrario va el menos delante de la raíz cuadrada). De este modo se obtiene $t = t(r)$. Si invertimos, tendremos $r = r(t)$. Una vez conocido $r = r(t)$ a partir de

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2(t)} \Rightarrow (\varphi - \varphi_0) = \int_{r_0}^r \frac{l}{mr^2(t)} dt$$

De este modo, terminaremos conociendo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ en coordenadas polares. Es decir, $r = r(t)$ y $\varphi = \varphi(t)$.

Conocidos $r = r(t)$ y $\varphi = \varphi(t)$ podemos hallar la ecuación de la trayectoria eliminando el t para obtener $r = r(\varphi)$ o $\varphi = \varphi(r)$ como lo hicimos para el caso del movimiento de un proyectil y obtuvimos $y = y(x)$ (la parábola) a partir del conocimiento de $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Podemos, sin embargo, obtener la ecuación de la órbita sin necesidad de conocer $r = r(t)$ y $\varphi = \varphi(t)$. Hay dos maneras de conseguirlo. La primera es a partir de las relaciones

$$\frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(r))}} = dt \text{ y } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

En efecto, como $\frac{mr^2}{l}d\varphi = dt$, entonces:

$$\frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{rel}(r'))}} = d\varphi \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{rel}(r'))}} = \varphi - \varphi_0$$

de donde obtenemos directamente $\varphi = \varphi(r)$.

La otra forma es a partir de obtener una ecuación diferencial para $r = r(\varphi)$ y resolverla. Veremos a continuación este camino.

6.2.1. Ecuación para la trayectoria (u órbita)

Partiendo de la segunda ley de Newton en la dirección radial \hat{r} y utilizando la constancia del momento angular, se puede obtener una ecuación diferencial para la curva $r = r(\varphi)$.

Si partimos de

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F(r) \\ mr^2\dot{\varphi} = l \end{cases}$$

entonces,

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = F(r) \tag{6.5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{l}d\varphi \tag{6.6}$$

Esto quiere decir que $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi}$, y entonces:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)$$

o sea,

$$\ddot{r} = \frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)$$

pero $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)$, entonces:

$$\ddot{r} = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Entonces, reemplazando en (6.5):

$$-\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = F(r)$$

o sea,

$$-\frac{l^2}{m} \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = F(r)$$

Si ahora definimos $u = \frac{1}{r}$ tendremos:

$$-\frac{l^2}{m} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = F \left(\frac{1}{u} \right)$$

que es la ecuación de la trayectoria, donde $u = \frac{1}{r}$.

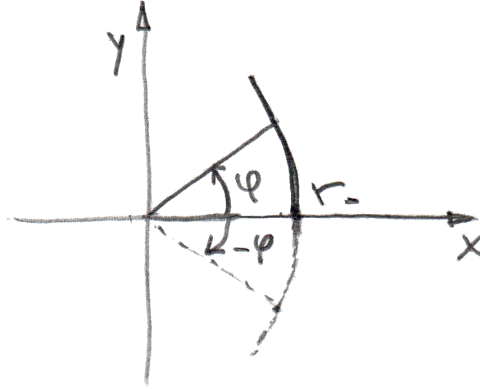
Es decir, si somos capaces de integrar esta ecuación, conoceremos $u = u(\varphi)$, o sea, $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}(\varphi)$ y, por lo tanto, $r = r(\varphi)$.

Antes de utilizar esta ecuación para estudiar el “problema de Kepler” veamos una propiedad de esta ecuación que resultará muy útil a la hora de encontrar la solución.

Supongamos que las condiciones iniciales son $u(\varphi = 0) = u_+ = \frac{1}{r_-}$ (recordemos que las órbitas ligadas están confinadas entre $r_-(u_+)$ y $r_+(u_-)$ y que las no

ligadas siempre tienen un $r_-(u_+)$. Al ser u_+ , un valor máximo de u , automáticamente tendremos $\frac{du}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0$.

Figura 6.23:



Por otra parte, notemos que si en la ecuación de la trayectoria hacemos el cambio de variable $\varphi \rightarrow -\varphi$, la ecuación no varía, ya que

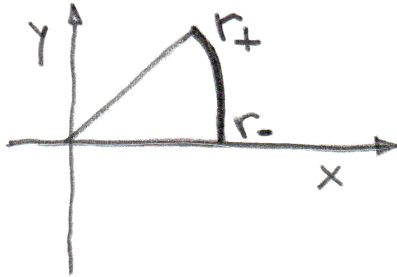
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{d}{-d\varphi} \left(\frac{du}{-d\varphi} \right)$$

Tampoco varían las condiciones iniciales ya que $\varphi_0 = 0 = -\varphi_0$ y además

$$\frac{du}{-d\varphi}\Big|_{-\varphi_0=0} = 0$$

Esto quiere decir que, si a partir de $\varphi = 0$, φ crece “hacia arriba” o φ va “para abajo”, la solución para u dará lo mismo. En otras palabras $u(\varphi) = u(-\varphi)$: ¡la solución es simétrica respecto del eje $\varphi = 0$ (eje x)! (ver Fig. (6.23)). Para las trayectorias ligadas podemos hacer el mismo razonamiento pero para la condición inicial $u(\varphi = 0) = u_- = \frac{1}{r_+}$ (u_- es un mínimo y entonces también $\frac{du}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0$). Esto tiene una importancia práctica muy importante. Supongamos que resolvimos la ecuación de la trayectoria entre los valores de u , u_+ y u_- . Tendremos entonces algo así:

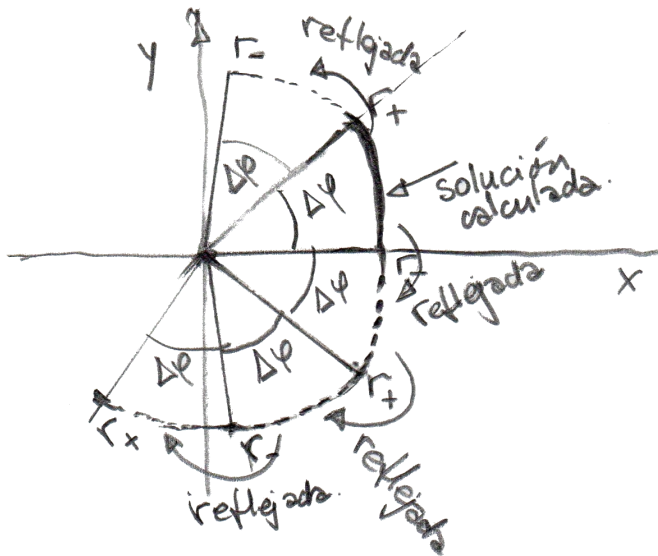
Figura 6.24:



¡Debido a la propiedad señalada ya tendremos la trayectoria completa!

En efecto, por reflexiones sucesivas podemos tener la trayectoria hasta donde queremos.

Figura 6.25:



Los puntos r_+ y r_- de la trayectoria son llamados “puntos absidales”. Podemos enunciar la propiedad que acabamos de estudiar como: “las órbitas de los problemas de fuerzas centrales resultan simétricas por reflexión respecto de los puntos absidales”.

Esto, además, nos muestra que la órbita no resultará necesariamente cerrada. Notemos que cada vez que r realiza una oscilación completa (r va de r_- a r_+ y vuelve), φ avanza en $2\Delta\varphi$ (ver dibujo). Para que la órbita resulte cerrada debe suceder que luego de n oscilaciones, φ haya dado exactamente m vueltas. O sea,

$$n2\Delta\varphi = m2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{\Delta\varphi} = \frac{m}{n}$$

Esto, en general, dependerá de las condiciones iniciales del problema (de E y de l). Recordemos que:

$$\Delta\varphi = \int_{r_-}^{r_+} \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(r))}}, \quad V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

entonces, no solo el integrando depende de E y l , sino también r_+ y r_- (que son raíces de $V_{ef}(r) - E = 0$) dependerán de E y de l .

Sin embargo, en el problema que estudiaremos a continuación, las órbitas de los movimientos ligados resultan siempre cerradas (para cualquier E y l). Este es un caso muy particular.

6.2.2. El problema de Kepler

Johannes Kepler (1571 – 1630) fue un astrónomo alemán que estableció, or medio de observaciones astronómicas, tres leyes que cumplen los planetas en su movimiento alrededor del Sol. Años más tarde, Newton (1643 – 1727) mostró que el movimiento planetario, suponiendo que la fuerza gravitatoria entre el Sol y los planetas era central y conservativa ($\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$, $\alpha = GM_S m_p$, $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$), cumplían dichas leyes. Esto constituyó una prueba fundamental para aceptar como válida la “Teoría de la gravitación universal”.

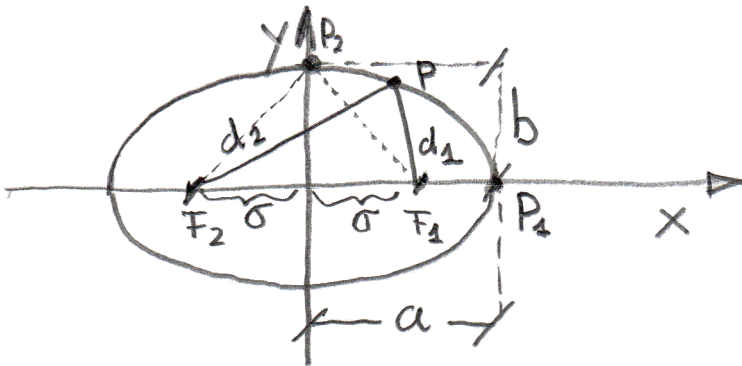
A continuación estudiaremos las leyes de Kepler y mostraremos que en efecto, si $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, estas se verifican.

1ra ley de Kepler

“Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas con el Sol situado en uno de los focos de la elipse”

Una elipse está formada por el conjunto de los puntos del plano, cuya suma de las distancias a dos puntos llamados focos permanece constante. Es muy conocida la forma canónica de la elipse en coordenadas cartesianas centrada en el origen:

Figura 6.26:



Los puntos $P_1 = (a, 0)$ y $P_2 = (0, b)$ pertenecen a la misma elipse, entonces, para el punto P_1 :

$$d_1 + d_2 = (a - \sigma) + (a + \sigma) = 2a$$

y para el punto P_2 :

$$d_1 + d_2 = \underbrace{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}_{\text{por Pitágoras}} + \sqrt{b^2 + \sigma^2} = 2\sqrt{b^2 + \sigma^2}$$

Entonces, debe ser,

$$a^2 = b^2 + \sigma^2 \Rightarrow b = a\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

donde a es el semieje mayor, b es el semieje menor, σ es la distancia focal y $\varepsilon = \frac{\sigma}{a}$ es la excentricidad.

Un punto genérico $P = (x, y)$ pertenecerá a la elipse si;

$$d_1 + d_2 = 2a$$

o sea,

$$\sqrt{(x - \sigma)^2 + y^2} + \sqrt{(x + \sigma)^2 + y^2} = 2a$$

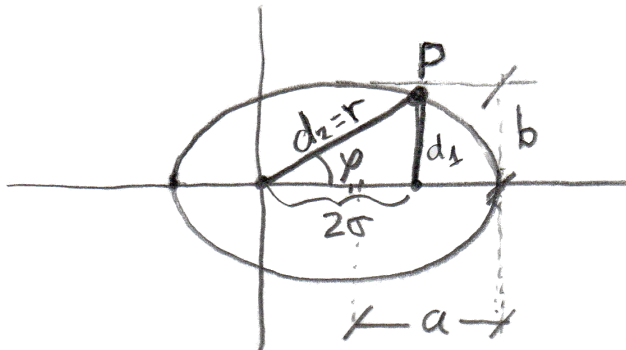
Utilizando las relaciones anteriores, esta última expresión conduce a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Forma canónica de la ecuación de la elipse centrada en el origen, en cartesianas

Sin embargo, nuestra elipse no está centrada en el origen. Ahora encontremos la ecuación de la elipse, en coordenadas polares, cuando el origen está en un foco.

Figura 6.27:



Cualquier punto P para pertenecer a la elipse debe cumplir

$$d_1 + d_2 = \underbrace{\sqrt{r^2 + 4\sigma^2 - 4\sigma r \cos(\varphi)}}_{\text{por teorema del coseno}} + r = 2a$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 r^2 + 4\sigma^2 - 4\sigma r \cos(\varphi) &= (2a - r)^2 \Rightarrow \\
 r^2 + 4\sigma^2 - 4\sigma r \cos(\varphi) &= 4a^2 + r^2 - 4ar \Rightarrow \\
 4\sigma^2 - 4\sigma r \cos(\varphi) &= 4a^2 - 4ar \Rightarrow \\
 \underbrace{\sigma^2}_{a^2 - b^2} - \sigma r \cos(\varphi) &= a^2 - ar \Rightarrow \\
 a^2 - b^2 - \sigma r \cos(\varphi) &= a^2 - ar \Rightarrow \\
 \frac{1}{r} &= \frac{a}{b^2} \left(1 - \frac{\sigma}{a} \cos(\varphi) \right)
 \end{aligned}$$

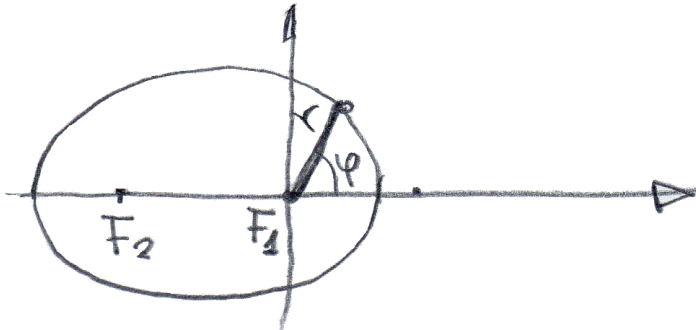
o sea,

$$u(\varphi) = \frac{1}{r}(\varphi) = \frac{a}{b^2} (1 - \varepsilon \cos(\varphi))$$

Esta es la ecuación de la elipse con el origen en un foco (F_2) en coordenadas polares. Notemos que si la centramos en el otro foco (F_1), obtendríamos:

$$u(\varphi) = \frac{a}{b^2} (1 + \varepsilon \cos(\varphi))$$

Figura 6.28:



Remarcamos aquí que la elipse es una curva plana (está contenida en un plano), por lo cual es perfectamente “admisible” como trayectoria, ya que sabemos que al conservarse el \bar{l} , el movimiento será plano.

Resolvamos ahora la ecuación de la trayectoria para $F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. Esta ecuación está planteada para $u = \frac{1}{r}$, entonces, $F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\alpha}{1/u^2} = -\alpha u^2$, o sea,

$$-\frac{l^2 u^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -\alpha u^2 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m\alpha}{l^2}$$

Esta ecuación es del tipo que sabemos resolver con solo verlas. Las condiciones iniciales serán:

$$\begin{cases} u(\varphi = 0) = u_- = \frac{m\alpha}{l^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \right) \\ \left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \end{cases}$$

(A u_+ y u_- ya los habíamos determinado en nuestro análisis energético).

Llamamos $z = u - \frac{m\alpha}{l^2}$, y como $\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$ y $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}$, tenemos que resolver:

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = 0$$

$$\begin{cases} z(\varphi = 0) = u_- - \frac{m\alpha}{l^2} = -\frac{m\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \\ \left. \frac{dz}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \end{cases}$$

Esta ecuación es idéntica a la del oscilador armónico (reemplazando t por φ , claro) de $\omega_0 = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} z(t) &= A \cos(\varphi + \varphi_0) \\ \frac{dz}{d\varphi} &= -A \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_0) \end{aligned}$$

con

$$A = \sqrt{(z(\varphi = 0))^2 + \left(\left. \frac{dz}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \right)^2} = \frac{m\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}}$$

y

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{-\left. \frac{dz}{d\varphi} \right|_{\varphi=0}}{z(\varphi = 0)} \right) \Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

O sea,

$$z(\varphi) = \frac{m\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \cos(\varphi + \pi) = -\frac{m\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \cos(\varphi)$$

y entonces,

$$u(\varphi) = \frac{m\alpha}{l^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} \cos(\varphi) \right) = \frac{1}{r}$$

Aquí vemos, claramente, que si $\frac{a}{b^2} = \frac{m\alpha}{l^2}$ y $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}}$ obtuvimos que la órbita es una elipse con el Sol en un foco. Es más, tenemos los parámetros de la elipse como función de las condiciones iniciales que tiene el sistema (E y l): de

$$\frac{a}{b^2} = \frac{m\alpha}{l^2} \quad \text{y} \quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = -a^2 \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}$$

obtenemos

$$a = -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{-2Em}}$$

¡El semieje mayor solo depende de E !

Recordemos que todas estas expresiones tienen sentido para el movimiento ligado para el que sabemos que $E < 0$.

Podemos obtener las mismas conclusiones de nuestro análisis energético (que hicimos en clases previas) a partir del análisis de la excentricidad de la órbita. Por geometría analítica elemental sabemos que:

1. $\varepsilon = 0 \Rightarrow \sigma = 0$, la curva es una circunferencia.
2. $0 < \varepsilon < 1$, la curva es una elipse.
3. $\varepsilon = 1$, la curva es una parábola.
4. $\varepsilon > 1$, la curva es una hipérbola.

Entonces,

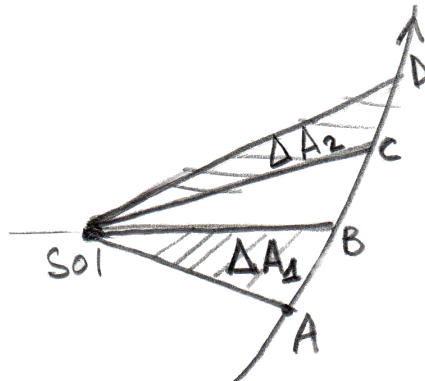
1. $\varepsilon = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} = 0 \Rightarrow E^* = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$, energía correspondiente a órbita circular (como ya sabíamos).
2. $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\alpha^2}} < 1 \Rightarrow E^* < E < 0$, energías para movimientos ligados.
3. $\varepsilon = 1, E = 0$, órbita abierta, movimiento no ligado.
4. $\varepsilon > 1, E > 0$, órbita abierta, movimiento no ligado.

2da ley de Kepler

“El movimiento de los planetas alrededor del Sol es tal que el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales, no importa dónde esté el planeta”.

Esto se entiende mejor en el siguiente diagrama

Figura 6.29:



Supongamos que el planeta está en A. En un Δt se traslada a B. El radio vector barre un área ΔA_1 . Cuando el planeta está en C y se traslada a D en el mismo tiempo Δt , el radio vector barre un área ΔA_2 . La segunda ley de Kepler dice que, entonces, $\Delta A_1 = \Delta A_2$.

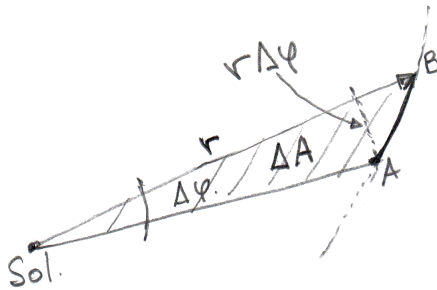
Si definimos la magnitud:

$$\frac{dA}{dt} = \mathcal{A} \quad \text{velocidad areal o areolar.}$$

Otra manera, más pedante, de enunciar la segunda ley de Kepler es decir: “El movimiento de los planetas alrededor del Sol es con velocidad areolar constante.”. Esta ley, como veremos, se cumple para toda fuerza central (no es necesario que la fuerza sea $F = -\frac{\alpha}{r^2}$), ya que solo tiene que ver con la conservación del momento angular (esta es una diferencia con la primera ley de Kepler, que es propia de la fuerza $-\frac{\alpha}{r^2}$).

El siguiente gráfico muestra el área barrida por el radio vector en un intervalo Δt :

Figura 6.30:



El cuerpo en ese Δt se traslada de A hacia B . El área barrida ΔA es la de un “delgado” triángulo de base r y altura $r\Delta\varphi$. Por lo tanto, la velocidad areolar será:

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{2m}$$

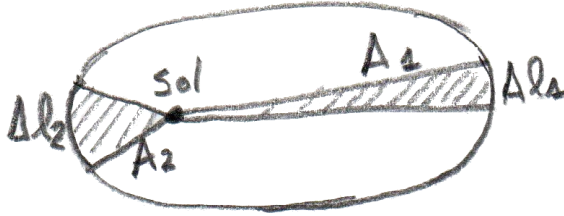
pero $l = mr^2\dot{\varphi}$, entonces,

$$\mathcal{A} = \frac{l}{2m}$$

Luego, si se conserva l , \mathcal{A} resulta constante. Notemos que no utilizamos para nada la manera en que depende la fuerza de r : si es central, l se conserva y

A resulta constante. Como consecuencia de esta ley, vemos claramente que la velocidad del planeta a lo largo de su órbita cambia de módulo.

Figura 6.31:



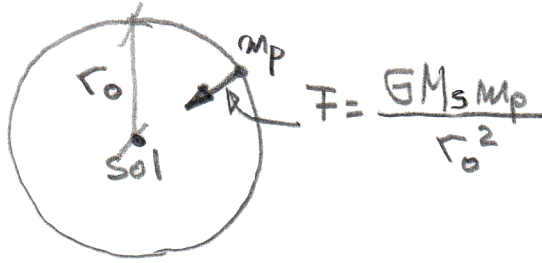
Como para un mismo tiempo transcurrido $A_1 = A_2$, vemos que la longitud de arco recorrido cuando el planeta está lejos (Δl_1), es menor que la longitud de arco cuando el planeta está cerca (Δl_2), es decir $\Delta l_1 < \Delta l_2$. O sea, cuando el planeta se aleja del Sol, su velocidad disminuye.

3ra ley de Kepler

“El cuadrado del período de los planetas correspondiente a su movimiento alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica y la constante de proporcionalidad es independiente de la masa del planeta”.

Mostrar que esta ley se cumple para el caso de órbitas circulares es particularmente simple. En ese caso, el semieje mayor a resulta al radio de la órbita circular r_0 . Es decir, $a = r_0$.

Figura 6.32:



En ese caso, el movimiento es circular uniforme, de modo que $\dot{\varphi} = \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ donde τ es el período. Entonces:

$$-m_p r_0 \omega_0^2 = -\frac{GM_S m_p}{r_0^2} \Rightarrow \frac{(2\pi)^2}{GM_S} r_0^3 = \tau^2$$

donde la constante de proporcionalidad es $\frac{(2\pi)^2}{GM_S}$ para todos los planetas.

Para mostrar que se cumple para las órbitas elípticas, utilizaremos que:

$$\frac{a}{b^2} = \frac{m\alpha}{l^2} \Rightarrow b = \frac{l}{\sqrt{m\alpha}} a^{1/2}$$

y además que:

$$\mathcal{A} = \frac{\pi ab}{\tau} = \frac{\text{Área de la elipse}}{\text{tiempo de recorrida de la órbita}} = \frac{1}{2} \frac{l}{m}$$

o sea,

$$\pi \frac{l}{\sqrt{m\alpha}} a^{3/2} = \frac{l}{2m} \tau$$

pero $\alpha = GM_S m$. O sea,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{GM_S}} a^{3/2} = \tau \Rightarrow \frac{(2\pi)^2}{GM_S} a^3 = \tau^2$$

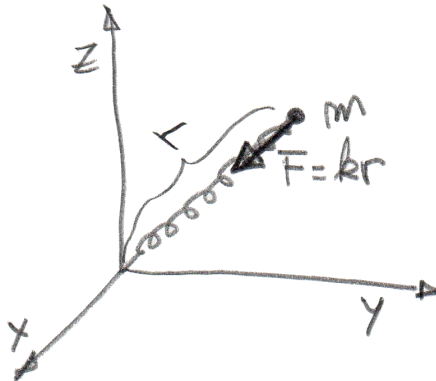
Las leyes de Kepler, que como ya dijimos fueron determinadas por observaciones astronómicas, en realidad se cumplen de manera aproximada. Esto es así debido a que en realidad un sistema Sol-Planeta es un sistema de dos cuerpos, y lo podemos considerar como problema de un cuerpo en la medida en que

$M_S \gg m_p$. Esta condición se cumple porque $M_S \approx 2 \times 10^{30} kg$ y la masa de la Tierra, $m_T \approx 6 \times 10^{24} kg$ (casi un millón de veces menor que la M_S), la masa de Júpiter (el planeta más masivo) es $m_J = 2 \times 10^{27} kg$ (mil veces menor que M_S), etcétera. Ya volveremos sobre este asunto.

6.3. Oscilador armónico isótropo

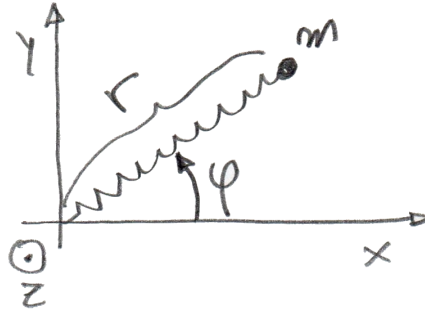
Otra fuerza central cuyo estudio también se puede hacer con papel y lápiz (sin necesidad de ningún instrumento de cálculo) es el oscilador armónico isótropo. Este sistema consiste en un cuerpo de masa m moviéndose en el espacio sometido a una fuerza $\vec{F} = -kr\hat{r}$ ($k > 0$).

Figura 6.33:



Al ser central la fuerza, el momento angular \vec{l} se conserva, por lo tanto, el movimiento es plano. Entonces, dados \vec{r}_0 y $m\vec{v}_0$, elegimos el plano $x - y$, de manera que contenga estos dos vectores y el movimiento tendrá lugar en ese plano.

Figura 6.34:



Además de central, la fuerza es conservativa

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

entonces,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}kr^2, \quad l = mr^2\dot{\varphi}$$

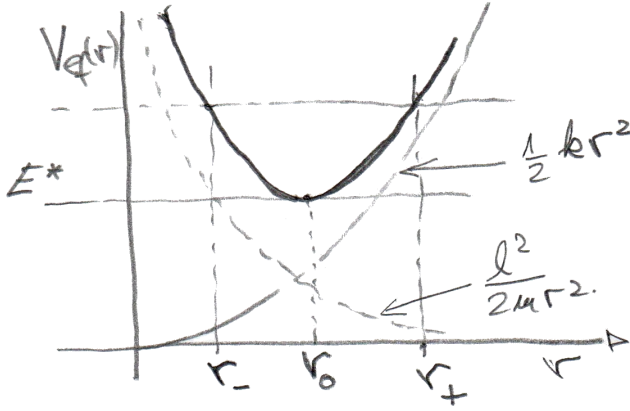
son constantes de movimiento.

Como siempre, en estos casos, $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$, y entonces,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2}_{V_{ef}(r)}$$

o sea, para el movimiento radial tendremos:

Figura 6.35:



Vemos aquí que hay un mínimo de energía para tener movimiento ($E = E^*$). Para ese caso, la órbita será circular de radio r_0 . Para $E > E^*$, el movimiento será siempre ligado ($r_- \leq r \leq r_+$). Para hallar r_+ y r_- debemos hallar las raíces de

$$\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 - E = 0$$

Definimos $u = \frac{1}{r^2}$, entonces,

$$\frac{l^2}{2m}u + \frac{1}{2}k - E = 0 \Rightarrow \frac{l^2}{2m}u^2 - Eu + \frac{1}{2}k = 0$$

entonces,

$$u_{\pm} = \frac{mE}{l^2} \pm \frac{mE}{l^2} \sqrt{1 - \frac{l^2 k}{mE^2}}$$

de donde, inmediatamente, concluimos que $E^* = \sqrt{\frac{k}{m}}l$ y $r_0^2 = \frac{l}{\sqrt{mk}}$.

Ahora, encontraremos la ecuación de la trayectoria a partir de la integral:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_{r_+}^r \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \right)}}$$

Para ello, expresamos $u_{\pm} = \bar{u} \pm \Delta u$, con $\bar{u} = \frac{mE}{l^2}$ y $\Delta = \bar{u} \sqrt{1 - \frac{l^2 k}{mE^2}}$, y en la integral de la derecha hacemos el cambio $u = \frac{1}{r^2}$ (recordar $u_+ = \frac{1}{r_-^2}$ y $u_- = \frac{1}{r_+^2}$),

y así tendremos:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_{u_-}^u \frac{l}{m} u \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{mu} \left(Eu - \frac{l^2 u^2}{2m} + \frac{1}{2}k \right)}}$$

La cuadrática del denominador la factorizamos según sus raíces:

$$\begin{aligned} Eu - \frac{l^2 u^2}{2m} + \frac{1}{2}k &= -\frac{l^2}{2m} (u - u_+) (u - u_-) \\ &= -\frac{l^2}{2m} (u - \bar{u} - \Delta u) (u - \bar{u} + \Delta u) \\ &= -\frac{l^2}{2m} ((u - \bar{u})^2 - (\Delta u)^2) \\ &= \frac{l^2}{2m} ((\Delta u)^2 - (u - \bar{u})^2) \end{aligned}$$

y como $du = -\frac{2}{r^3} dr = -2u^{3/2} dr$, ya que $\frac{1}{r^3} = u^{3/2}$, entonces $u^{3/2} dr = -\frac{1}{2} du$, obtenemos:

$$\int_0^\varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{u_-}^u \frac{l}{m} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{l^2}{2m} ((\Delta u)^2 - (u - \bar{u})^2)}} = -\frac{1}{2} \int_{u_-}^u \frac{du}{\Delta u \sqrt{1 - \left[\frac{u - \bar{u}}{\Delta u} \right]^2}}$$

Hacemos ahora $v = \frac{u - \bar{u}}{\Delta u}$ con $dv = \frac{du}{\Delta u}$, y obtenemos (dado que $v_- = \frac{u_- - \bar{u}}{\Delta u} = \frac{\bar{x} - \Delta u - \bar{x}}{\Delta u} = -1$):

$$2\varphi = - \int_{-1}^v \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \arccos(v) \Big|_{-1}^v = \arccos\left(\frac{u - \bar{u}}{\Delta u}\right) - \pi$$

Entonces,

$$\arccos\left(\frac{u - \bar{u}}{\Delta u}\right) = 2\varphi + \pi \Rightarrow \frac{u - \bar{u}}{\Delta u} = \cos(2\varphi + \pi) = -\cos(2\varphi)$$

por lo que

$$u = \bar{u} - \Delta u \cos(2\varphi).$$

Teniendo en cuenta que $\cos(2\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1$, entonces,

$$u = \bar{u} - 2\Delta u \cos^2(\varphi) + \Delta u$$

o sea,

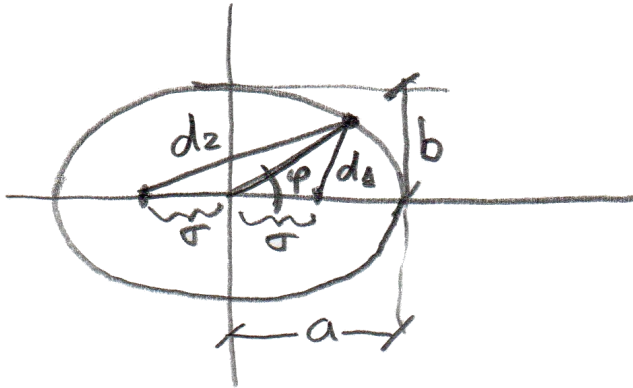
$$u = (\bar{u} + \Delta u) \left(1 - \frac{2\Delta u}{\bar{u} + \Delta u} \cos^2(\varphi) \right) = u_+ \left(1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+} \cos^2(\varphi) \right)$$

y como $u_+ = \frac{1}{r_-^2}$ y $u_- = \frac{1}{r_+^2}$, queda:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_-^2} \left(1 - \frac{r_+^2 - r_-^2}{r_+^2} \cos^2(\varphi) \right)$$

Esta es la ecuación de la órbita. Veremos, a continuación que corresponde a una elipse centrada en el origen, en coordenadas polares.

Figura 6.36:



$$d_1 + d_2 = 2a, \text{ pero utilizando el teorema del coseno, } d_1 = \sqrt{r^2 + \sigma^2 - 2r\sigma \cos(\varphi)}$$

y $d_2 = \sqrt{r^2 + \sigma^2 + 2r\sigma \cos(\varphi)}$, entonces:

$$\left(\sqrt{r^2 + \sigma^2 - 2r\sigma \cos(\varphi)} + \sqrt{r^2 + \sigma^2 + 2r\sigma \cos(\varphi)} \right)^2 = 4a^2 \Rightarrow$$

$$2r^2 + 2\sigma^2 + 2\sqrt{(r^2 + \sigma^2)^2 - (2r\sigma \cos(\varphi))^2} = 4a^2 \Rightarrow$$

$$(r^2 + \sigma^2)^2 - (2r\sigma \cos(\varphi))^2 = (2a^2 - r^2 - \sigma^2)^2$$

de donde:

$$\frac{1}{r^2} = \underbrace{\frac{1}{a^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \right)}}_{b^2} \left(1 - \underbrace{\frac{\sigma^2}{a^2}}_{\varepsilon^2} \cos^2(\varphi) \right)$$

entonces,

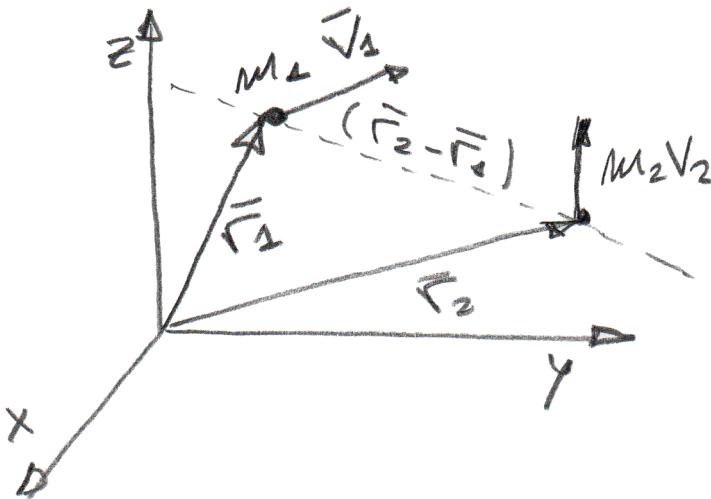
$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2(\varphi))$$

De aquí se ve que la órbita del oscilador armónico isótropo es una elipse centrada en el origen tal que su semieje menor es $b = r_-$ y su semieje mayor es $a = r_+$.

6.4. Momento angular para cuerpos en interacción

Como vimos, el momento angular de un cuerpo $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ se conserva si la fuerza sobre él es central. ¿Qué ocurre con el momento angular total si consideramos un sistema de más de un cuerpo?

Figura 6.37:



Consideremos dos cuerpos en interacción, sometidos además, a fuerzas externas. El momento angular total es:

$$\vec{l}_T = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

¿Bajo qué condiciones \vec{l}_T se conserva? Para averiguarlo, derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{l}_T}{dt} &= \frac{d\bar{l}_1}{dt} + \frac{d\bar{l}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} \times \bar{p}_1 + \bar{r}_1 \times \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{r}_2}{dt} \times \bar{p}_2 + \bar{r}_2 \times \frac{d\bar{p}_2}{dt} \\ &= \bar{r}_1 \times \left(\bar{F}_1^{(ext)} + \bar{F}_{12} \right) + \bar{r}_2 \times \left(\bar{F}_2^{(ext)} + \bar{F}_{21} \right) \end{aligned}$$

donde utilizamos que $\frac{d\bar{p}_1}{dt} = \bar{F}_1^{(ext)} + \bar{F}_{12}$, donde $\bar{F}_1^{(ext)}$ es la fuerza resultante de las fuerzas externas sobre el cuerpo 1 y \bar{F}_{12} es la fuerza sobre 1 debido a la interacción con 2. Lo mismo para $\frac{d\bar{p}_2}{dt} = \bar{F}_2^{(ext)} + \bar{F}_{21}$.

Entonces,

$$\frac{d\bar{l}_T}{dt} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^{(ext)} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^{(ext)} + (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}_{21}$$

aquí utilizamos que $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$.

O sea que, para que $\frac{d\bar{l}_T}{dt} = 0$, o sea, para que \bar{l}_T se conserve, las fuerzas externas deben ser centrales y la fuerza interna debe estar en la recta de acción $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ (para que $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}_{21} = 0$).

O sea, las fuerzas deben ser como indica la siguiente figura:

Figura 6.38:



En suma, las fuerzas internas deben estar en la dirección de la distancia relativa entre los dos cuerpos. Las fuerzas de interacción que, además de cumplir con el principio de acción y reacción (es decir, aparecen de a pares de igual módulo y sentido opuesto), cumplen con que su dirección es la de la posición relativa de los cuerpos, se dice que cumplen con el principio de acción y reacción fuerte.

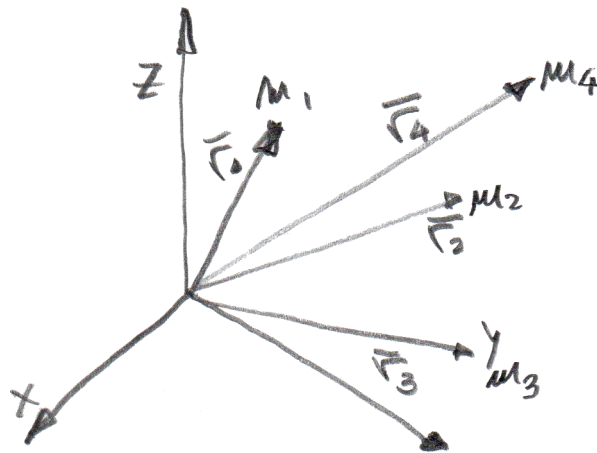
Esto se puede generalizar sin ninguna dificultad para sistemas con N cuerpos en interacción. Podemos decir entonces que: *el momento angular total de un sistema de partículas se conservará si las fuerzas externas son centrales y las fuerzas internas cumplen con el principio de acción y reacción fuerte.*

El momento angular total de un sistema de partículas es:

$$\vec{l}_T = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Vamos a presentar ahora una propiedad muy útil de \vec{l}_T .

Figura 6.39:



Sabemos que un sistema de N cuerpos tiene un centro de masa cuya posición está dada por:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} \quad \left(M = \sum_{i=1}^N m_i \right)$$

y su velocidad es:

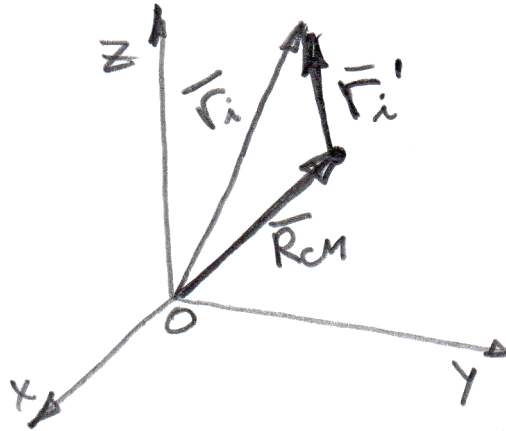
$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M}$$

La posición de cada cuerpos \bar{r}_i la podemos descomponer como sigue:

$$\bar{r}_i = \bar{R}_{CM} + \bar{r}'_i$$

como resulta evidente del gráfico.

Figura 6.40:



Derivando respecto del tiempo tendremos que:

$$\bar{v}_i = \bar{V}_{CM} + \bar{v}'_i$$

Recordamos aquí que \bar{r}'_i y \bar{v}'_i son la posición y la velocidad del cuerpo i -ésimo respecto del centro de masa.

De esta forma, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{l}_T &= \sum_{i=1}^N (\bar{R}_{CM} + \bar{r}'_i) \times m_i (\bar{V}_{CM} + \bar{v}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{R}_{CM} \times m_i \bar{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i + \sum_{i=1}^N \bar{R}_{CM} \times m_i \bar{v}'_i + \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times m_i \bar{V}_{CM} \end{aligned}$$

El primer término es

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_{CM} \times m_i \bar{V}_{CM} = \bar{R}_{CM} \times \sum_{i=1}^N m_i \bar{V}_{CM} = \bar{R}_{CM} \times M \bar{V}_T = \bar{R}_{CM} \times \bar{P}_T$$

corresponde al momento angular debido al movimiento del centro de masa. Lo llamaremos \bar{L}_o (la “o” es de “orbital”) y se denomina *momento angular orbital*.

$$\bar{L}_o = \bar{R}_{CM} \times M\bar{V}_{CM}$$

El segundo término es el momento angular medido desde el CM. Tiene que ver con el movimiento de los cuerpos vistos desde su CM. Es el momento angular “interno” y lo llamaremos *momento angular de “spin”* \bar{L}_s :

$$\bar{L}_s = \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i$$

El tercer término:

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_{CM} \times m_i \bar{v}'_i = \bar{R}_{CM} \times \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}'_i$$

resulta nulo, ya que notemos que $\frac{\sum m_i \bar{v}'_i}{\sum m_i}$ es la velocidad de CM. Luego,

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}'_i = 0$$

De modo parecido, el cuarto término:

$$\sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times m_i \bar{V}_{CM} = \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i m_i \times \bar{V}_{CM}$$

también se anula, ya que $\frac{\sum m_i \bar{r}'_i}{\sum m_i}$ es la posición del CM medida desde el CM. Luego,

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}'_i = 0$$

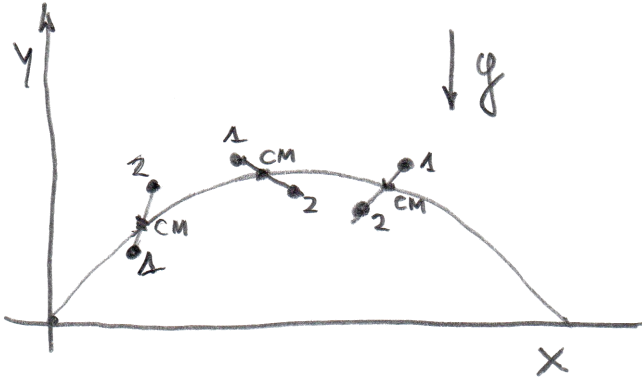
Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned} \bar{l}_T &= \bar{R}_{CM} \times M\bar{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i \\ &= \bar{L}_o + \bar{L}_s \end{aligned}$$

Esta descomposición es independiente de si el \bar{l}_T se conserva o no. Por otra parte, podría suceder que \bar{l}_T no se conserve, pero sí \bar{L}_s o \bar{L}_o .

Veamos un ejemplo: consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos por un hilo arrojados de modo que se muevan en un plano vertical.

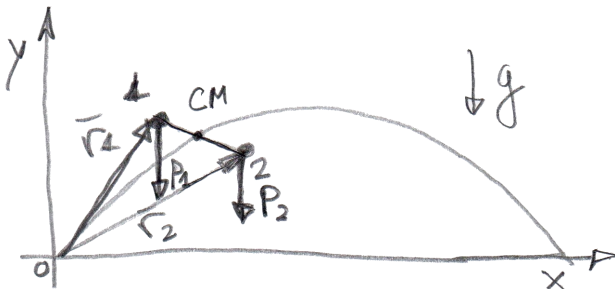
Figura 6.41:



Sabemos que el centro de masa describirá una parábola. Al mismo tiempo, los cuerpos rotarán alrededor del CM.

¿Se conserva el momento angular de este sistema? La respuesta es *no*. ¿Por qué? Porque las fuerzas externas \bar{P}_1 y \bar{P}_2 no son centrales.

Figura 6.42:



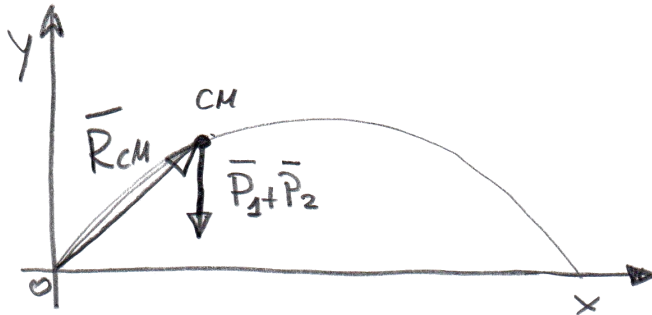
Es decir, $\bar{r}_1 \times \bar{P}_1 \neq 0$ y $\bar{r}_2 \times \bar{P}_2 \neq 0$.

¿Se conserva el momento angular orbital \bar{L}_o ?

$$\bar{L}_o = \bar{R}_{CM} \times M\bar{V}_{CM} \Rightarrow \frac{d\bar{L}_o}{dt} = \bar{R}_{CM} \times M \frac{d\bar{V}_{CM}}{dt} = \bar{R}_{CM} \times \bar{F}^{(ext)}$$

y claramente $\bar{R}_{CM} \times \bar{F}^{(ext)} \neq 0$. En conclusión, el momento angular orbital *no* se conserva.

Figura 6.43:

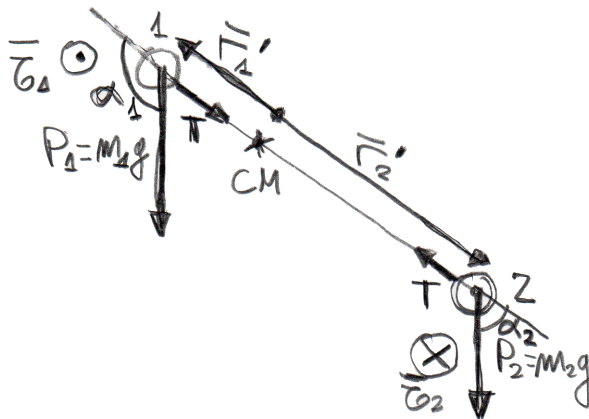


¿Y el momento angular de spin?

Veamos:
$$\frac{d\bar{L}_s}{dt} = \sum_{i=1}^N \bar{r}'_i \times \bar{F}_i$$

observemos el siguiente diagrama:

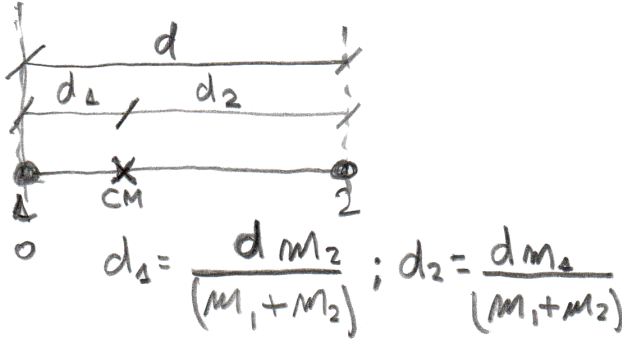
Figura 6.44:



Sobre el cuerpo 1 actúa la tensión cuyo torque es nulo (ya que T está en la recta \bar{r}'_1). También el torque de \bar{P}_1 : $\bar{\tau}_1 = \bar{r}'_1 \times \bar{P}_1$, $|\bar{\tau}_1| = |\bar{r}'_1| |\bar{P}_1| \text{sen}(\alpha_1)$.

Si la longitud del hilo es d :

Figura 6.45:



por lo que resulta $|\bar{r}'_1| = d_1 = \frac{dm_2}{m_1 + m_2}$, o sea,

$$|\bar{\tau}_1| = \frac{dm_2}{m_1 + m_2} m_1 g \text{sen}(\alpha_1)$$

con el sentido que indica la figura ($\odot \bar{\tau}_1$), o sea, hacia afuera del plano de la hoja.

Por otra parte, sobre el cuerpo 2 el torque de la tensión se anula (T está en la recta de \bar{r}'_2). El torque de \bar{P}_2 es:

$$|\bar{\tau}_2| = |\bar{r}'_2| |\bar{P}_2| \text{sen}(\alpha_2) \quad \text{con} \quad |\bar{r}'_2| = d_2 = \frac{dm_1}{m_1 + m_2}$$

o sea,

$$|\bar{\tau}_2| = \frac{dm_1 m_2}{m_1 + m_2} g \text{sen}(\alpha_2)$$

con sentido entrante a la hoja ($\otimes \bar{\tau}_2$). Pero además $\text{sen}(\alpha_1) = \text{sen}(\alpha_2)$ (ya que $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$), o sea,

$$\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = 0$$

y entonces,

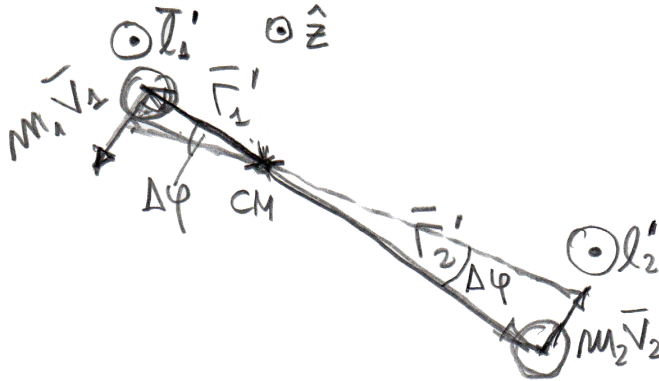
$$\frac{d\bar{L}_s}{dt} = 0$$

y \bar{L}_s se conserva.

Veamos cómo de la conservación de \bar{L}_s podemos describir cómo será el movimiento del sistema.

Calculemos cuánto vale \bar{L}_s :

Figura 6.46:



$$\bar{L}_s = \overbrace{\bar{r}'_1 \times m_1 \bar{v}'_1}^{\bar{l}_1} + \overbrace{\bar{r}'_2 \times m_2 \bar{v}'_2}^{\bar{l}_2}$$

$$|\bar{l}_1| = |\bar{r}'_1 \times m_1 \bar{v}'_1| = d_1 m_1 d_1 \dot{\varphi} = d_1^2 m_1 \dot{\varphi}$$

con sentido hacia afuera de la hoja;

$$|\bar{l}_2| = |\bar{r}'_2 \times m_2 \bar{v}'_2| = d_2^2 m_2 \dot{\varphi}$$

también con sentido hacia afuera de la hoja. Entonces,

$$\bar{L}_s = (d_1^2 m_1 + d_2^2 m_2) \dot{\varphi} \hat{z}$$

donde \hat{z} es el versor hacia afuera del plano de la hoja.

El factor $d_1^2 m_1 + d_2^2 m_2$ se conoce con el nombre de *momento de inercia del sistema respecto del CM*. Utilizando las expresiones para d_1 y d_2 , a ese factor se lo

puede reescribir como μd^2 donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$:

$$I_o = d_1^2 m_1 + d_2^2 m_2 = \mu d^2$$

o sea,

$$\bar{L}_s = I_o \dot{\varphi} \hat{z}$$

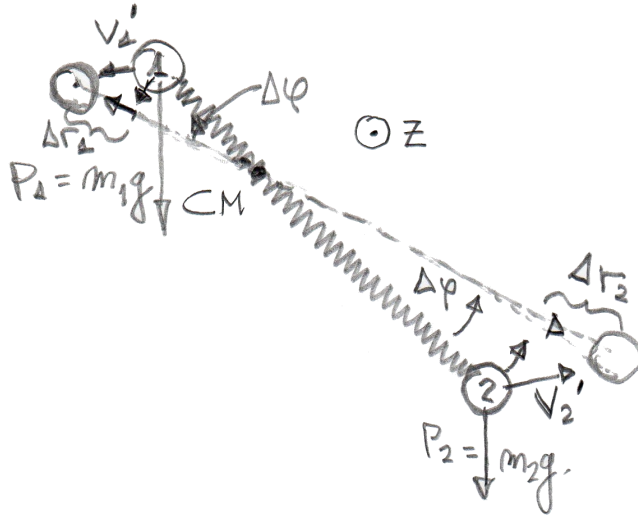
Observemos que al estar los cuerpos unidos por un hilo inextensible, d no variará en el tiempo de modo que I_o tampoco. Luego, como \bar{L}_s es constante, también lo será $\dot{\varphi}$. Dicho de otro modo, el movimiento será tal que mientras el CM de los cuerpos describe una parábola, estos rotarán alrededor del CM con una velocidad angular constante dada por:

$$\omega_o = \dot{\varphi} = \frac{L_s}{I_o}$$

Como \bar{L}_s es una constante de movimiento, si conocemos las condiciones iniciales, podremos calcular $|\bar{L}_s|$ y, por lo tanto, ω_o .

Veamos ahora qué sucede si en lugar de un hilo inextensible (o una barra rígida de masa despreciable) que provee una interacción de vínculo (asociada a que la distancia entre los cuerpos permanece constante), los cuerpos interactúan con cualquier interacción que cumpla con el principio de acción y reacción fuerte (un resorte, por ejemplo).

Figura 6.47:



El movimiento del CM será idéntico al caso del hilo: si las condiciones iniciales son las mismas, el CM describirá la misma parábola. Del mismo modo, el momento angular orbital $\bar{L}_o = \bar{R}_{CM} \times M\bar{V}_{CM}$ no se conservará, ya que $\bar{\tau} = \bar{R}_{CM} \times \bar{P} \neq 0$ ($\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$).

Mientras que \bar{L}_s será una constante de movimiento. El torque de la interacción elástica respecto del CM es nulo y además los torques de ambos pesos respecto del CM se anulan entre sí. ¿Cuánto vale \bar{L}_s ? En este caso,

$$\vec{v}'_1 = \dot{r}_1 \hat{r}_1 + r_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1 \quad \text{y} \quad \vec{v}'_2 = \dot{r}_2 \hat{r}_2 + r_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}_2$$

En este caso, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , además de componentes angulares, tienen componentes radiales, dado que ahora los cuerpos pueden acercarse o alejarse.

Entonces,

$$\bar{L}_s = \bar{l}'_1 + \bar{l}'_2 = r'_1 \hat{r}_1 \times m_1 \vec{v}'_1 + r'_2 \hat{r}_2 \times m_2 \vec{v}'_2 = (m_1 r'^2_1 + m_2 r'^2_2) \dot{\varphi} \hat{z}.$$

Pero $r'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ y $r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$ donde $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ es la distancia relativa entre los cuerpos.

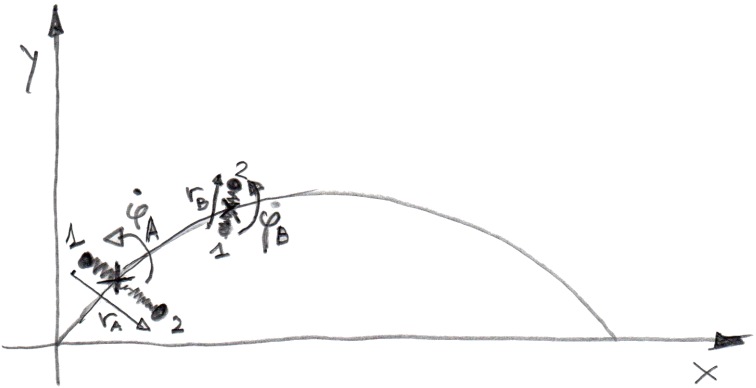
Antes (si hay un hilo o barra rígida) $r = d$, resultaba constante. Ahora, si hay un resorte $r = r(t)$, entonces:

$$\bar{L}_s = \mu r^2 \dot{\varphi} \hat{z}$$

La constancia de \bar{L}_s en el caso de $r = d = cte$ implicaba que los cuerpos estaban alrededor del CM con velocidad angular $\omega = \dot{\varphi}$ constante. Si en cambio $r = r(t)$ tendremos que cuando los cuerpos se alejan (r crece) $\dot{\varphi}$ disminuye, y cuando los cuerpos se acercan $\dot{\varphi}$ aumenta. O sea:

$$L_s - \mu r^2(t) \dot{\varphi}(t) = cte$$

Figura 6.48:



En el gráfico se ilustra lo que acabamos de decir. Comparemos el sistema en A y B . Si $r_A > r_B$, $\dot{\varphi}_A < \dot{\varphi}_B$.

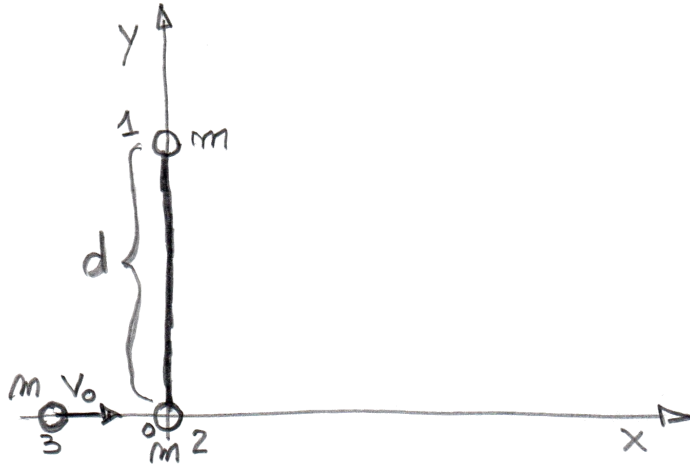
Más adelante, cuando estudiemos cuerpo rígido, veremos que la relación entre momento angular de spin y velocidad angular de rotación alrededor del CM que acabamos de encontrar para dos cuerpos, se puede generalizar.

Resolveremos ahora un problema utilizando los principios de conservación.

Se tienen dos cuerpos de igual masa m unidos por una barra rígida de masa despreciable y longitud d . Los cuerpos se hallan inicialmente en reposo. Un tercer

cuerpo, de igual masa m , incide sobre uno de los dos cuerpos con una velocidad $\bar{v} = v_0\hat{x}$ y queda adherido a él. Los cuerpos pueden deslizarse sobre el plano sin rozamiento. Describamos el movimiento del sistema y encontremos las velocidades de cada cuerpo cuando la barra dio $1/4$ de vuelta y cuando dio $1/2$ vuelta.

Figura 6.49:



Sobre el sistema de los tres cuerpos no hay fuerzas externas. Esto quiere decir que \bar{P}_T se conserva. Esto quiere decir que \bar{V}_{CM} antes de la colisión será igual a \bar{V}_{CM} después de ella:

$$\bar{V}_{CM}^{(antes)} = \frac{mv_0\hat{x}}{3m} = \frac{v_0}{3}\hat{x}$$

o sea,

$$\bar{V}_{CM}^{(despues)} = \frac{v_0}{3}\hat{x}$$

Por otra parte, las interacciones cumplen con el principio de acción y reacción fuerte y no hay fuerzas externas. Esto quiere decir que se conservará el momento angular total. El momento angular inicial respecto de O es:

$$\bar{l}_T = \bar{r}_3 m \bar{v} = 0$$

ya que \vec{r} sólo tiene componente x y $\vec{v} = v_0\hat{x}$.

O sea, el movimiento posterior a la colisión será:

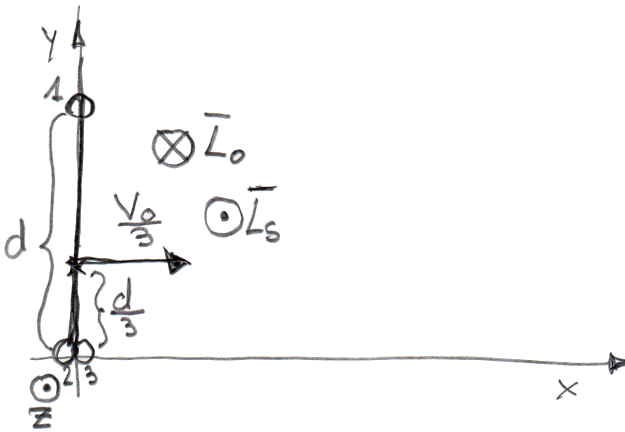
$$\bar{l}_T = 0$$

pero

$$\bar{l}_T = \bar{L}_o + \bar{L}_s \Rightarrow \bar{L}_s = -\bar{L}_o$$

Calculemos \bar{L}_o :

Figura 6.50:



$$\begin{aligned} \bar{L}_o &= \bar{R}_{CM} \times M\bar{V}_{CM} \\ &= \frac{d}{3}\hat{y} \times 3m\frac{v_0}{3}\hat{x} \\ &= -\frac{d}{3}mv_0\hat{z} \end{aligned}$$

ya que $\bar{R}_{CM} = \frac{md\hat{y}}{3m} = \frac{d}{3}\hat{y}$ y $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$.

Entonces,

$$\bar{L}_s = \frac{d}{3}mv_0\hat{z}$$

Pero ya vimos que para dos cuerpos (2 y 3 quedan pegados):

$$\bar{L}_s = \mu d^2 \dot{\varphi} \hat{z}$$

y como $\mu = \frac{2m \cancel{m}}{3\cancel{m}} = \frac{2}{3}m$,

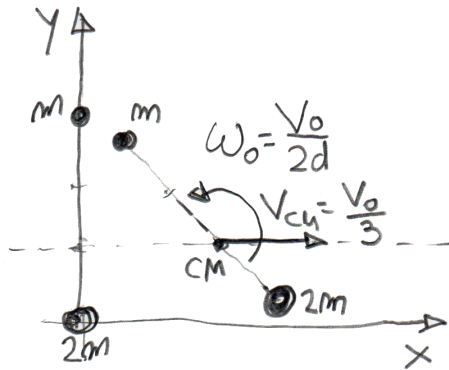
$$\bar{L}_s = \frac{2}{3} m d^2 \dot{\varphi} \hat{z}$$

o sea,

$$\frac{2}{3} m d^2 \dot{\varphi} = \frac{d}{3} m v_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0}{2d}$$

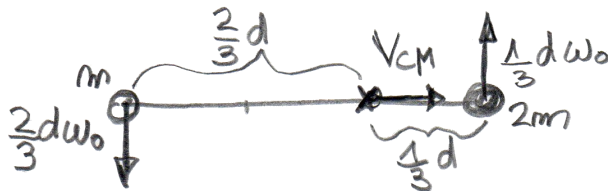
Esto quiere decir que, luego de la colisión el *CM* del sistema se traslada con una velocidad $\bar{V}_{CM} = \frac{v_0}{3} \hat{x}$ y al mismo tiempo los cuerpos rotan alrededor de su *CM* con una velocidad angular constante $\omega_o = \frac{v_0}{2d}$ en sentido antihorario.

Figura 6.51:



Cuando la barra dio $1/4$ de vuelta, la situación es la siguiente:

Figura 6.52:



O sea,

Cuerpo 1:

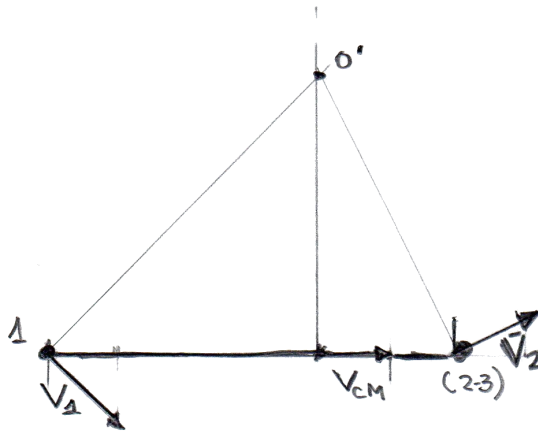
$$v_1 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{v_0}{3} \hat{x} - \frac{2}{3} \frac{dv_0}{2d} \hat{y} = \frac{v_0}{3} \hat{x} - \frac{v_0}{3} \hat{y}$$

Cuerpo 2-3:

$$v_2 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{v_0}{3} \hat{x} + \frac{1}{3} \frac{dv_0}{2d} \hat{y} = \frac{v_0}{3} \hat{x} + \frac{v_0}{6} \hat{y}$$

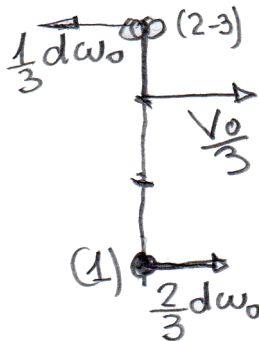
O sea,

Figura 6.53:



Para la media vuelta,

Figura 6.54:



Cuerpo 1:

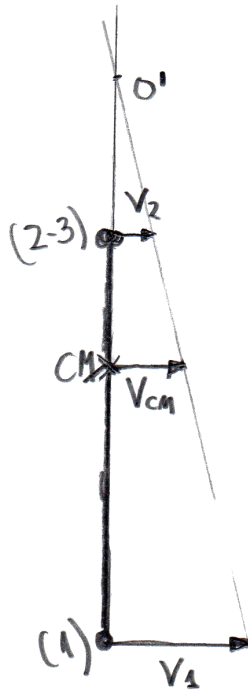
$$v_1(\varphi = \pi) = \left(\frac{v_0}{3} + \frac{v_0}{3}\right) \hat{x} = \frac{2}{3}v_0 \hat{x}$$

Cuerpo 2-3:

$$v_2(\varphi = \pi) = \left(\frac{v_0}{3} - \frac{v_0}{6}\right) \hat{x} = \frac{v_0}{6} \hat{x}$$

O sea,

Figura 6.55:



Los puntos señalados como O' en ambos gráficos son lo que se conoce como un eje instantáneo de rotación: si bien el movimiento es una composición de una traslación del CM , y una rotación alrededor de él, vemos que para cada instante existe un punto tal que el movimiento, visto desde allí, resulta una rotación pura alrededor de él. Dicho punto, en este caso, se encuentra a $\frac{2}{3}d$ en la dirección \hat{y} de la posición del CM .

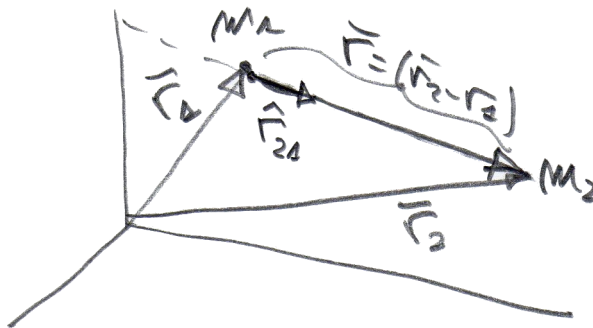
Ya volveremos, más adelante, a los ejes instantáneos de rotación.

6.5. El problema de las fuerzas centrales con dos cuerpos

Hemos estudiado el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza central conservativa. Esto lo aplicamos al movimiento planetario, suponiendo que el Sol permanecía fijo en el origen de coordenadas y los planetas orbitan alrededor de él. De este modo obtuvimos las leyes de Kepler. Sabemos que, en principio, esto lo podemos hacer gracias a que la masa solar M_S es mucho más grande que la planetaria. Si todas las masas planetarias fuesen del mismo orden de la solar estaríamos en problemas, ya que tendríamos un sistema de 9 cuerpos en interacción, inabordable con solo papel y lápiz.

Lo que sí es abordable con papel y lápiz es el problema de 2 cuerpos. Supongamos que nuestro sistema está constituido por dos cuerpos en interacción con dos masas comparables, m_1 y m_2 . Supongamos que la interacción entre ellos es $\vec{F}_{21} = F(r)\hat{r}_{21}$ y $\vec{F}_{12} = F(r)\hat{r}_{12}$, donde \vec{F}_{21} es la fuerza sobre 2 debido a 1, \vec{F}_{12} es la fuerza sobre 1 debido a 2 y \hat{r}_{21} es el versor en la dirección $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ (posición de 2 relativa a 1).

Figura 6.56:



Como vimos cuando estudiamos energía, existe una función $V(r)$ tal que $-\frac{dV}{dr} =$

$F(r)$, y entonces esta fuerza resulta conservativa.

También hemos estudiado que la energía cinética de dos cuerpos se puede poner como:

$$T = T_{CM} + T_{rel} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2$$

Entonces, la energía mecánica de nuestro sistema será:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 + V(r)$$

Como no hay fuerzas externas $V_{CM} = cte$ y entonces al ser $T_{CM} = cte$, resulta que

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 + V(r) = cte$$

Recordemos que $\bar{v}_{rel} = \frac{d(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, entonces, si escribimos

$$\bar{v}_{rel} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

sabiendo que $L_s = \mu r^2 \dot{\phi} = cte$, obtendremos:

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l_s^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

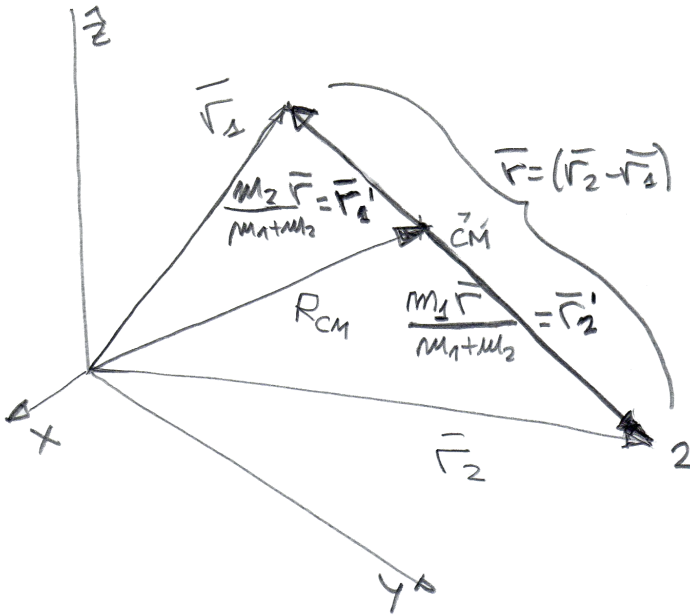
¡y todo lo que ya sabemos hacer para el problema de un cuerpo lo podemos volver a hacer!

Veamos qué consecuencias tiene esto en el caso del problema de Kepler:

$$\left(V(r) = -\frac{GM_S m_p}{r} = -\frac{\alpha}{r} \right)$$

Ahora \bar{r} no es el vector posición del Sol al planeta. \bar{r} es la posición relativa entre los dos cuerpos. Recordemos la relación entre (\bar{R}_{CM}, \bar{r}) y (\bar{r}_1, \bar{r}_2) .

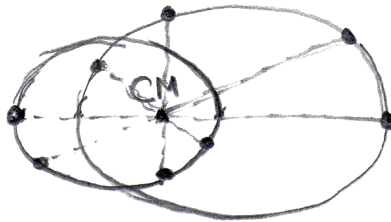
Figura 6.57:



Para la primera ley de Kepler tendríamos que decir: “la posición relativa de un cuerpo respecto del otro describe una elipse centrada en uno de sus focos”.

Como $\vec{r}'_2 = \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$ y $\vec{r}'_1 = -\frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}$, desde el CM :

Figura 6.58:



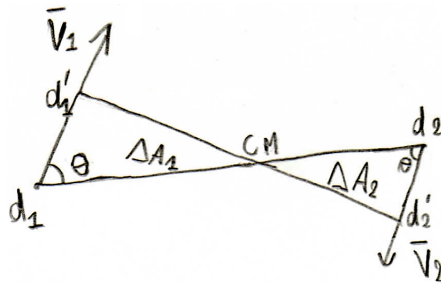
El resultado es que ambos cuerpos describen órbitas elípticas con el CM en uno de los focos. A este movimiento habría que agregarle la traslación uniforme del CM con \vec{V}_{CM} . La segunda ley de Kepler para la posición relativa se seguirá

cumpliendo en la forma:

$$A = \frac{l}{2\mu}$$

Queda hallar la relación que hay entre las velocidades areolares de m_1 y m_2 .

Figura 6.59:



Teniendo en cuenta que cualquiera de las dos áreas del gráfico describe un triángulo, el área de cada una de ellas será la multiplicación del segmento $\overline{d_i d'_i}$, por el segmento $\overline{d_i CM} \text{sen}(\theta)$, dividido 2 donde el subíndice i hace referencia a las posiciones (que caracterizan dichos segmentos) y a las velocidades de m_1 y m_2 . Entonces, como

$$\Delta A_1 = \frac{\overline{d_1 d'_1} \overline{d_1 CM} \text{sen}(\theta)}{2} \quad (\text{con } \overline{d_1 d'_1} = v_1 \Delta t)$$

$$\Delta A_2 = \frac{\overline{d_2 d'_2} \overline{d_2 CM} \text{sen}(\theta)}{2} \quad (\text{con } \overline{d_2 d'_2} = v_2 \Delta t)$$

y además, sabemos que por conservación del momento angular

$$l = m_1 v_1 = m_2 v_2 = \text{cte}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(m_1 \frac{\Delta A_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta A_2}{\Delta t} \right) &= m_1 \mathcal{A}_1 + m_2 \mathcal{A}_2 \\
 &= m_1 \frac{1}{2} \overline{d_1 CM} v_1 \text{sen}(\theta) + m_2 \frac{1}{2} \overline{d_2 CM} v_2 \text{sen}(\theta) \\
 &= \frac{m_1 v_1}{2} (\overline{d_1 CM} + \overline{d_2 CM}) \text{sen}(\theta) \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{m_1 v_1 \text{sen}(\theta) \overline{d_1 d_2}}_l = \frac{l}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de las velocidades areolares para m_1 y m_2 , es una constante tal que:

$$m_1 \mathcal{A}_1 + m_2 \mathcal{A}_2 = \frac{l}{2}$$

Por último, la tercera ley de Kepler deja de ser cierta, ya que obtenemos, en el caso de dos cuerpos:

$$\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu \alpha}} = \frac{\tau}{2\mu} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}$$

solo si $m_1 = M_S \gg m_2 = m_p$ o $m_2 = M_S \gg m_1 = m_p$, es decir, la proporcionalidad entre τ y $a^{3/2}$ depende sólo de la masa del cuerpo más masivo (el Sol).

Destacamos aquí que el problema de tres cuerpos de masa comparable, en su formalización más general, ya no es un problema soluble con papel y lápiz, debiéndose recurrir a algún dispositivo de cálculo numérico (léase computadora).

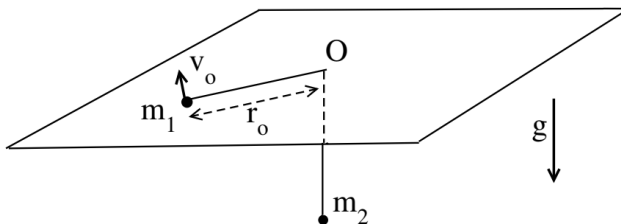
6.6. Ejercicio resuelto del capítulo

PROBLEMA: Dos cuerpos, 1 y 2, de masas $m_1 = m$ y $m_2 = m$ respectivamente, se encuentran unidos por un hilo inextensible de longitud l . El cuerpo 1 puede moverse sobre un plano horizontal sin rozamiento. El hilo pasa por un orificio (O) de manera que en su otro extremo cuelga el cuerpo 2 de modo que este puede subir o bajar sobre la vertical. El sistema se pone en movimiento de modo tal que la velocidad inicial del cuerpo 1 es \vec{v}_o en dirección perpendicular al hilo cuando la distancia entre el cuerpo 1 y el orificio es r_o , como muestra la Fig. (6.60).

- ¿Qué magnitudes se conservan?
- Mostrar que el movimiento circular uniforme es posible para valores determinados de v_o y r_o . ¿Qué condición deben satisfacer esos valores?
- Describir el movimiento de ambos cuerpos según las diferentes condiciones iniciales v_o y r_o .
- De haber un movimiento ligado para el cuerpo 1 (es decir la distancia del cuerpo 1 al orificio r permanece acotada entre dos valores) hallar el período de las oscilaciones radiales del cuerpo 1 (las oscilaciones de $r = r(t)$. Si obtiene una expresión integral para dicho período es suficiente).

Datos: m, l, v_o, r_o y g .

Figura 6.60: Problema 1

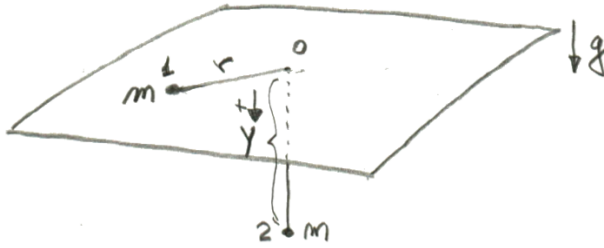


RESOLUCIÓN:

a) La única fuerza que realiza trabajo es el peso del cuerpo 2 que resulta conservativa. La tensión, que es no conservativa, en total no realiza trabajo: El trabajo de la tensión sobre el cuerpo 1 ante un pequeño desplazamiento radial es $\delta W_1 = T\delta r$, y el trabajo de la tensión ante un desplazamiento δy del cuerpo 2 es $\delta W_2 = T\delta y$, pero como $r + y = l$, resulta $\delta r = -\delta y$, por lo cual

$$\delta W_1 + \delta W_2 = T\delta r - T\delta r = 0$$

Figura 6.61:



Entonces su trabajo es nulo. *Esto quiere decir que la energía mecánica total se conserva.*

$$E = T_1 + T_2 + V_2(y) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 - mgy = cte$$

Por otra parte, desde O , se conserva el momento angular de cada cuerpo, ya que las fuerzas son centrales. Es decir,

$$\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = cte \text{ y } \vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times M\vec{v}_2 = cte$$

En particular, $\vec{r}_2 = y\hat{y}$, $\vec{v}_2 = \dot{y}\hat{y} \Rightarrow \vec{l}_2 = 0$, y entonces,

$$\bar{l}_T = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_1 = cte$$

O sea, $l_1 = r_o m v_o = cte$

b) La energía mecánica puede describirse como:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - mgy$$

y como $l_1 = mr^2\dot{\phi} = r_o m v_o \equiv l$ y además $y + r = l$ (es decir, $\dot{r} = -\dot{y}$), tenemos:

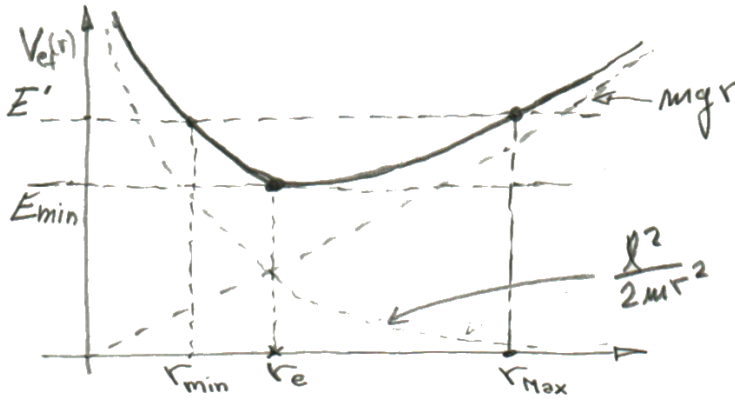
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + mgr - mgl$$

o también,

$$E' = E + mgl = \frac{1}{2}(2m)\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + mgr}_{V_{ef}(r)}$$

Esta energía corresponde a la energía mecánica total de un cuerpo de masa $2m$ que se mueve bajo un potencial $V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + mgr$. Entonces, si graficamos este potencial:

Figura 6.62:



Este problema unidimensional describe el movimiento radial de la partícula 1. Aquí se ve que existe una energía mínima para la cual el movimiento es posible ($E' = E'_{min}$). Para esa energía resultará $r = r_e$, y la partícula 1 se moverá de modo que su trayectoria será una circunferencia de radio $r = r_e$. Para una energía $E' > E'_{min}$, r permanecerá acotado entre dos valores: r_{min} y r_{max} , raíces de la ecuación:

$$\frac{l^2}{2mr^2} + mgr - E' = 0$$

Para determinar las condiciones iniciales que conducen a un movimiento circular del cuerpo 2, notemos que para que el movimiento de 2 sea uniforme debe ser $\dot{r} = 0$ e $\dot{y} = 0$, y como

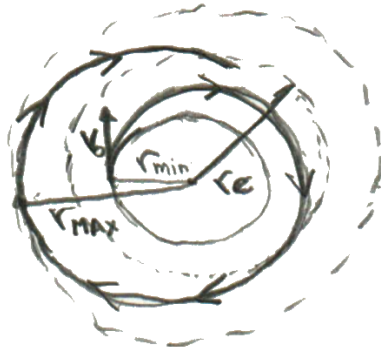
$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= -T \\ m\ddot{y} &= -T + mg \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cancel{m} r_o \dot{\phi}_o^2 = \cancel{m} g$$

pero $v_o = r_o \dot{\phi}_o \Rightarrow \frac{v_o^2}{r_o} = g$

c) Ya vimos que si $\frac{v_o^2}{r_o} = g$ la órbita de 2 será circular ($r_o = r_e$).

Supongamos $\frac{v_o^2}{r_o} > g$. En ese caso, la tensión inicialmente no alcanza para proveer la fuerza centrípeta suficiente para garantizar el movimiento circular, y entonces el cuerpo 2 se aleja de O (crece r).

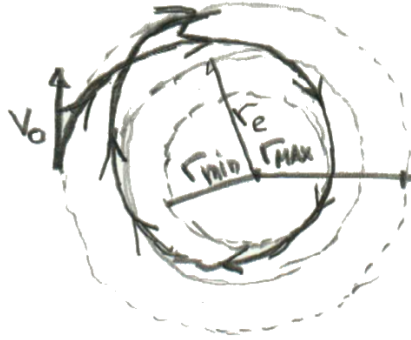
Figura 6.63:



En este caso, a partir de $r_o = r_{min}$, r crece, supera a r_e y llega a r_{max} . Luego comienza a decrecer hasta $r_o = r_{max}$ y así siguiendo. Al ser $r + y = l$, el cuerpo 2 sube cuando r crece y baja cuando r decrece.

Supongamos $\frac{v_o^2}{r_o} < g$. En este caso, inicialmente la tensión supera el valor necesario para mantener la órbita circular. Entonces, a partir de $r = r_{max}$, r decrece y la partícula 2 se acerca a O , pasa por $r = r_e$ y sigue hasta $r = r_{min}$.

Figura 6.64:



A partir de allí comienza a alejarse nuevamente, y así siguiendo.

d) Sabemos que:

$$E' = m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + mgr = m\dot{r}^2 + V_{ef}(r) \quad (6.7)$$

donde $E' = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgr_o$ y $l = mr_o v_o$ son constantes conocidas (ya que conocemos las condiciones iniciales v_o y r_o). Entonces, de la Ec. (6.7):

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{m}(E' - V_{ef}(r)) \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{1}{m}(E' - V_{ef}(r))} \Rightarrow \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{1}{m}(E' - V_{ef}(r))}} = dt$$

Sabemos que el período radial corresponde al doble del tiempo que corresponde a pasar de r_{min} a r_{max} . Entonces,

$$\int_0^{\frac{T}{2}} dt' = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{1}{m}(E' - V_{ef}(r'))}} \Rightarrow T = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{1}{m}(E' - V_{ef}(r'))}}$$

Notar que el signo de la raíz es + debido a que, como el cuerpo 2 va de r_{min} a r_{max} , $\dot{r} > 0$.

Capítulo 7

Sistemas no inerciales

7.1. Sistemas de referencia acelerados

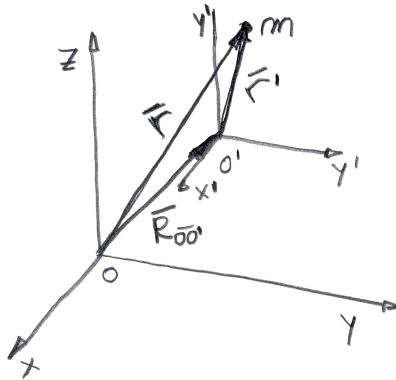
Todas las personas que hayan viajado alguna vez en tren, en barco o en avión saben perfectamente que, mientras la velocidad de estos medios permanezca constante, se puede tomar un cafecito en el viaje (y hacer todo lo que desee) tan plácidamente como en el comedor de su propia casa o en el salón de un bar, sobre tierra firme. Esta experiencia consiste en una vívida manifestación del *Principio de relatividad de Galileo*. Galileo se avivó de que *las leyes de la mecánica son las mismas para todos los observadores que se mueven uniformemente (esto es, con velocidad constante) entre sí*. Dicho de otra forma, si estamos sobre el tren, el avión o el barco (que viajan con velocidad constante respecto de la tierra) no existe ningún experimento (encerrados en el avión, tren o barco) que nos permita concluir que nos estamos moviendo. Por supuesto que si miramos por la ventanilla vemos que nos estamos moviendo, pero esto no es un experimento que involucre a las leyes de la mecánica.

La cosa cambia cuando el avión, el tren o el barco cambian su velocidad. Imaginemos que estamos sentados en un tren tomando nuestra bebida favorita colocada en una mesa. Es claro que el vaso está en reposo respecto de nosotros. Esto no nos llama la atención, dado que sabemos que lo que cambia la velocidad de los cuerpos es la interacción entre ellos (segunda ley de Newton), y si no hay interacción, los cuerpos o están en reposo o siguen con la velocidad que tienen (primera ley de Newton). De pronto, el tren comienza a detenerse. Si la detención es suficientemente brusca, veremos que el vaso (que estaba en reposo respecto de nosotros) adquiere una velocidad hacia adelante. En ese momento, para nosotros (pegados al asiento del tren) dejan de cumplirse las dos leyes de Newton antes mencionadas: el vaso, pese a no interactuar con ningún otro cuerpo, cambia su velocidad, esto es, se acelera respecto de nosotros. Concluimos entonces, que pa-

ra observadores acelerados (por ejemplo, nosotros sentados en el tren mientras este frena), dejan de cumplirse las leyes de Newton. Los sistemas (u observadores) para los cuales valen las leyes de Newton (es decir las leyes de la dinámica son las leyes de Newton) se conocen como *sistemas inerciales*. Por lo que ya dijimos, un sistema (u observador) que se mueve uniformemente respecto de un sistema inercial, también será inercial. Si, en cambio, el sistema (u observador) está acelerado respecto de un sistema inercial, será un *sistema no inercial*. Estudiaremos ahora cómo son las leyes de la mecánica para observadores no inerciales.

Consideremos dos observadores (o y o'). $\vec{R}_{oo'}$ es el vector posición de un cuerpo de masa m para un observador en o , y \vec{r}' es el vector posición del mismo cuerpo pero para un observador en o' .

Figura 7.1:



Del gráfico, es inmediato que:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_{oo'}$$

De aquí, obtenemos que:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\vec{R}_{oo'}}{dt} = \vec{v}' + \vec{V}_{oo'}$$

Aquí, \bar{v} es la velocidad que tiene el cuerpo para el observador o , y \bar{v}' es la velocidad que tiene el cuerpo para un observador en o' . $\bar{V}_{oo'}$ es la velocidad con que el observador en o' se mueve respecto del observador en o . Derivando una vez más:

$$\bar{a} = \bar{a}' + \frac{\bar{V}_{oo'}}{dt} = \bar{a}' + \bar{A}_{oo'}$$

Recalquemos que \bar{a} es la aceleración que tiene el cuerpo según o y que \bar{a}' es la aceleración del mismo cuerpo según o' . Supongamos que el observador o es inercial: para él, se cumplen las leyes de Newton, es decir:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

donde \bar{F} incluye a todas las fuerzas provenientes de las interacciones del cuerpo de aceleración \bar{a} con otros cuerpos. En particular, si no hay interacciones, $\bar{F} = 0$, y entonces $\bar{a} = 0 \Rightarrow v = cte$.

¿Cómo se traduce la segunda ley de Newton en términos de la aceleración que mide el observador o' ? Como $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{A}_{oo'}$, tendremos:

$$m(\bar{a}' + \bar{A}_{oo'}) = \bar{F} \Rightarrow m\bar{a}' = \bar{F} - m\bar{A}_{oo'}$$

Vemos aquí que esta ecuación se reduce a la segunda ley de Newton si $\bar{A}_{oo'} = 0$. O sea, si el observador en o' no está acelerado respecto de o (observador inercial). Si $\bar{A}_{oo'} \neq 0$, deja de ser cierto que la masa por la aceleración que mide el observador para un cuerpo es igual a las fuerzas de interacción con otros cuerpos. Aparece un término $-m\bar{A}_{oo'}$, cuyo origen no es una interacción. ¿Por qué decimos que no proviene de una interacción? Porque si $-m\bar{A}_{oo'}$ fuese una fuerza que proviene de una interacción, debería existir en otro cuerpo la otra componente de acción y reacción, y en este caso **NO EXISTE**. La segunda ley de Newton, que relaciona la aceleración \bar{a} de un cuerpo de masa m medida por un observa-

dor acelerado con aceleración \bar{A} respecto de un sistema inercial con las fuerzas, se puede escribir como:

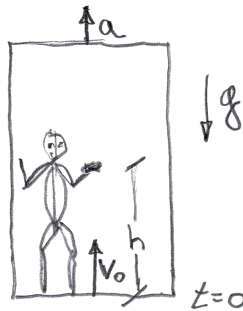
$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{F}^* , \quad \bar{F}^* = -m\bar{A}$$

donde \bar{F}^* es una fuerza ficticia (ya que no viene de ninguna interacción). A este tipo de fuerzas se las llama *fuerzas inerciales* (aunque aparecen en los sistemas NO INERCIALES). Es interesante observar cómo sería el principio de inercia para el observador acelerado con \bar{A} : todo cuerpo que no interactúa con ningún otro tiene una aceleración $-\bar{A}$.

Veamos un par de ejemplos.

Una persona deja caer dentro de un ascensor una moneda desde una altura h medida desde el piso del ascensor. En el momento, que suelta la moneda en el ascensor, que sube con aceleración constante a , tiene una velocidad v_0 .

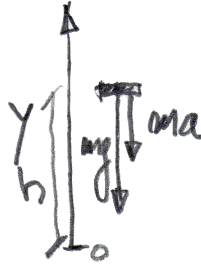
Figura 7.2:



¿Cuánto tarda la moneda en llegar al piso del ascensor? Resolveremos el problema desde dos sistemas de referencia diferentes.

a) Desde el ascensor (sistema no inercial)

Figura 7.3:



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - ma$$

donde mg es la fuerza peso por interacción con la Tierra y ma es la fuerza ficticia debido a que el sistema de referencia tiene una aceleración a hacia arriba. Luego, la aceleración de la moneda es:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -(g + a) \quad (\text{o sea, constante})$$

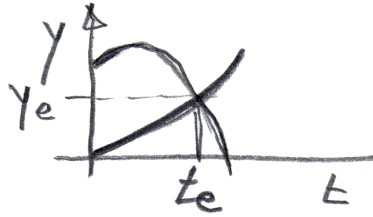
Entonces, $y(t) = h - \frac{1}{2}(g + a)t^2$ y el tiempo de caída va a corresponder a:

$$y(t_c) = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{(g + a)}}$$

b) *Desde la tierra (sistema inercial)*

Para un observador fuera del ascensor, en reposo, es un problema de encuentro entre un cuerpo (la moneda) que tiene inicialmente una velocidad v_o hacia arriba y una aceleración g hacia abajo, con otro móvil (el piso del ascensor) que inicialmente también tiene una velocidad v_o y una aceleración a hacia arriba.

Figura 7.4:



$$y_m(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{\text{piso}}(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

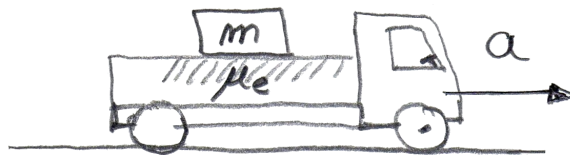
donde $y = 0$ es la posición inicial del ascensor. Entonces, el t_e satisface:

$$h + v_0 t_e - \frac{1}{2} g t_e^2 = v_0 t_e + \frac{1}{2} a t_e^2 \Rightarrow t_e = \sqrt{\frac{2h}{(g+a)}}$$

Como no puede ser de otra manera, el tiempo que tarda la moneda en tocar el piso del ascensor es el mismo para ambos observadores.

Otro ejemplo: una carga de masa m descansa sobre el piso de la caja de un camión. El coeficiente de rozamiento estático entre la carga y el piso es μ_e .

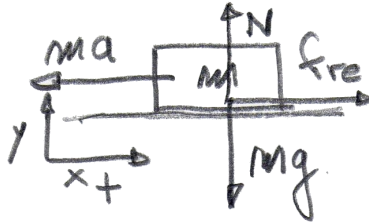
Figura 7.5:



¿Cuál será la máxima aceleración que podrá alcanzar el camión tal que la carga no deslice hacia atrás?

a) Desde el camión.

Figura 7.6:



Para un observador solidario al camión, si la carga no desliza:

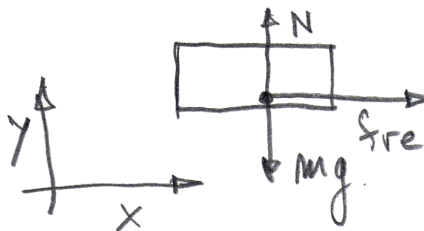
$$0 = f_{re} - ma \quad \text{y} \quad N - mg = 0$$

donde f_{re} es la interacción de rozamiento con el piso y ma es la fuerza ficticia, porque el observador tiene una aceleración a . Entonces:

$$f_{re} = ma \leq f_{re} = N\mu_e = mg\mu_e \Rightarrow a \leq g\mu_e \Rightarrow a_{max} = g\mu_e$$

b) Desde un sistema inercial (abajo del camión):

Figura 7.7:



Si la caja no desliza, tiene la misma aceleración que el camión. Luego:

$$ma = f_{r_e} \quad \text{y} \quad N - mg = 0$$

Pero debe ser:

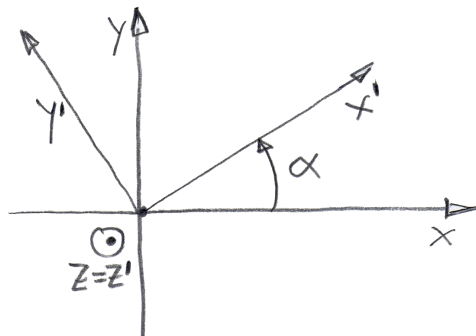
$$f_{r_e} = ma \leq N\mu_e = mg \Rightarrow a \leq g\mu_e$$

por lo que obtenemos $a_{max} = g\mu_e$

7.2. Sistemas de referencia rotantes

Otra clase de sistemas no inerciales son los sistemas de referencia rotantes. Un sistema rotante está caracterizado por un vector, llamado velocidad angular, cuya dirección (recta de acción) indica el eje de rotación, su sentido indica el sentido de la rotación y su módulo indica el ángulo rotado (medido en el plano perpendicular al eje de rotación) por unidad de tiempo. Por ejemplo, consideremos dos sistemas de ejes cartesianos, cuyo origen coincide, pero uno rota alrededor del eje z mientras el otro permanece fijo.

Figura 7.8:



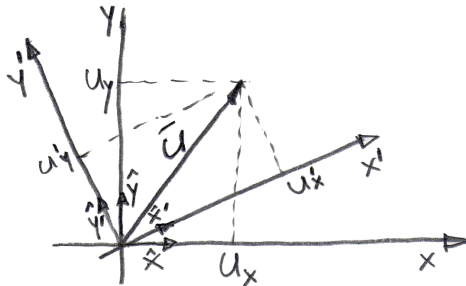
Entonces, el vector $\vec{\omega}$ está contenido en el eje z , su sentido está definido por la evolución del tirabuzón cuando gira como el sistema rotante (en el gráfico, un

tirabuzón girado en el sentido que α crece evoluciona hacia afuera, o sea $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$) y su módulo está definido por $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. O sea, $\bar{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} \hat{z}$ (notar que si $\frac{d\alpha}{dt} < 0$, esto quiere decir que α decrece, y entonces $\bar{\omega}$ tiene sentido inverso (hacia $-\hat{z}$)). Es evidente que las descripciones del movimiento de los cuerpos desde ambos sistemas de referencia resultará bien diferente. Por ejemplo, consideremos un vector cualquier \bar{u} que permanece solidario al observador rotante (esto es, que rota con la misma velocidad angular $\bar{\omega}$ que los ejes rotantes). Para el observador rotante, este vector permanece fijo (constante) mientras que el observador inercial (solidario a los ejes fijos) lo verá variar en el tiempo dado que está rotando. Del mismo modo, si el vector \bar{u} es un vector constante para el observador inercial, el observador rotante con $\bar{\omega}$ observará o que \bar{u} rota en sentido opuesto (o sea, con $-\bar{\omega}$). Es claro entonces que

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I \neq \left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot}$$

$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I$ es la derivada de \bar{u} para el observador inercial y $\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot}$ es la derivada de \bar{u} para el observador rotante. En lo que sigue, nos propondremos relacionar estas dos derivadas.

Figura 7.9:



Como puede verse en el gráfico, el vector \bar{u} se puede escribir como:

$$\bar{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} = u'_x \hat{x}' + u'_y \hat{y}'$$

Si \hat{x}' e \hat{y}' rotan, la gran diferencia entre el observador inercial y el observador rotante es que para este último \hat{x}' e \hat{y}' son direcciones fijas, dado que rotan igual que él, mientras que para el observador inercial serán versores dependientes del tiempo $\hat{x}'(t)$ e $\hat{y}'(t)$. Es decir:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot} = \frac{d(u'_x \hat{x}' + u'_y \hat{y}')}{dt} = \frac{du'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{du'_y}{dt} \hat{y}'$$

En cambio:

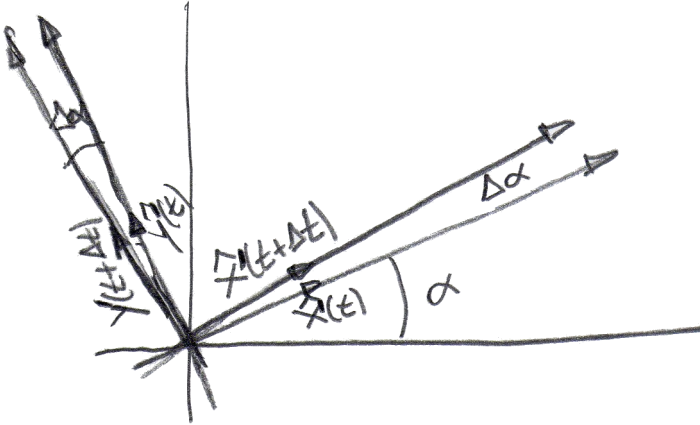
$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I = \frac{d(u'_x \hat{x}'(t) + u'_y \hat{y}'(t))}{dt} = \frac{du'_x}{dt} \hat{x}' + \frac{du'_y}{dt} \hat{y}' + u_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + u_y \frac{d\hat{y}'}{dt}$$

dado que, como acabamos de decir, para el observador inercial los versores rotantes cambian en el tiempo. O sea,

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot} + u'_x \frac{d\hat{x}'}{dt} + u'_y \frac{d\hat{y}'}{dt}$$

Vamos ahora a calcular las derivadas de los versores con ayuda del siguiente gráfico.

Figura 7.10:



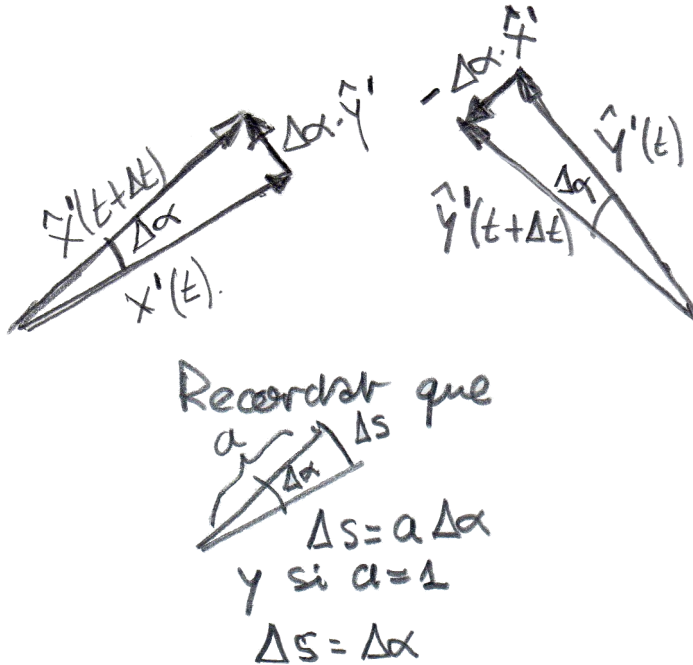
En Δt , los versores $\hat{x}'(t)$ e $\hat{y}'(t)$ pasan a ser $\hat{x}'(t + \Delta t)$ e $\hat{y}'(t + \Delta t)$. Lo que debemos calcular es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{x}'(t + \Delta t) - \hat{x}'(t)}{\Delta t} = \frac{d\hat{x}'}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{y}'(t + \Delta t) - \hat{y}'(t)}{\Delta t} = \frac{d\hat{y}'}{dt}$$

Gráficamente:

Figura 7.11:



Se ve claramente que:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \hat{y}' = \omega \hat{y}'$$

$$\frac{d\hat{y}'}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \hat{x}' = -\omega \hat{x}'$$

O sea,

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot} + u'_x \omega \hat{y}' - u'_y \omega \hat{x}'$$

Ahora bien, recordemos que $\bar{\omega} = \bar{\omega} \hat{z}$, entonces si hacemos

$$\bar{\omega} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ 0 & 0 & \omega \\ u'_x & u'_y & u'_z \end{vmatrix} = -\omega u'_y \hat{x}' + \omega u'_x \hat{y}'$$

O sea,

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{u}$$

Esta es la relación entre la derivada de un vector hecha por un observador inercial (I) y la derivada del mismo vector pero hecha por un observador rotante (Rot) con velocidad ω . Esa deducción la hemos hecho para el caso particular en que $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$, pero es fácilmente generalizable (aunque es mucho más tedioso) para el caso en que $\bar{\omega} = \omega \hat{n}$, donde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un vector arbitrario.

Volvamos a las leyes de la mecánica. Si para un observador (I), valen las leyes de Newton, en particular

$$m \left. \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \right|_I = \bar{F} \quad (\bar{F} = \text{fuerzas debidas a interacciones}),$$

no es de extrañar que para un observante rotante esto no sea cierto. Para ver cómo percibe la segunda ley de Newton debemos ponerla en términos de lo que significan las cosas para el observador rotante (Rot). Por lo que acabamos de ver:

$$\bar{V}_I = \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

\bar{V}_I es la velocidad de un móvil vista por el observador inercial y \bar{V}_{Rot} es la

velocidad del mismo móvil pero vista por el observador rotante (Rot). Entonces

$$\begin{aligned}\bar{a}_I &= \left. \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \right|_I = \left. \frac{d}{dt} (\bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{r}) \right|_I = \left. \frac{d}{dt} (\bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{r}) \right|_{Rot} + \bar{\omega} \times (\bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{r}) \\ &= \left. \frac{d\bar{V}_{Rot}}{dt} \right|_{Rot} + \left. \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right|_{Rot} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \underbrace{\left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_{Rot}}_{\bar{V}_{Rot}} + \bar{\omega} \times \bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\end{aligned}$$

\bar{a}_I es la aceleración para el observador inercial I .

$$\left. \frac{d\bar{V}_{Rot}}{dt} \right|_{Rot} = \left. \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \right|_{Rot} = \bar{a}_{Rot} \text{ es la aceleración para el observador rotante } Rot.$$

Entonces,

$$\bar{a}_I = \bar{a}_{Rot} + 2\bar{\omega} \times \bar{V}_{Rot} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$$

Si reemplazamos esto en la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\bar{F} = m\bar{a}_{Rot} + 2m\bar{\omega} \times \bar{V}_{Rot} + m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + m \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$$

O sea,

$$m\bar{a}_{Rot} = \bar{F} - 2m\bar{\omega} \times \bar{V}_{Rot} - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) - m \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$$

Esto quiere decir que el observador rotante dirá: “La masa por la aceleración de un cuerpo es igual a la suma de las fuerzas, debido a las interacciones del cuerpo con otros tres términos MÁS que no provienen de ninguna interacción (fuerzas ficticias)”. Si damos por sentado que esta ecuación es válida para un observador rotante con $\bar{\omega}$, eliminamos el “ Rot ” de las expresiones, y queda:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{F}_{cor} + \bar{F}_{cent} + \bar{F}_A$$

$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ (fuerza de Coriolis, ficticia, no proviene de interacción).

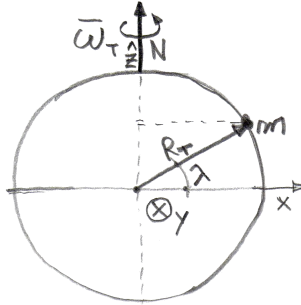
$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (fuerza centrífuga, ficticia, no proviene de interacción).

$\vec{F}_A = -m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ (fuerza de arrastre, ficticia, no proviene de interacción).

Veamos, ejemplos: sabemos que la Tierra tiene un movimiento de rotación tal que realiza una revolución cada $24h$. Luego, cualquier sistema de referencia solidario al movimiento de la Tierra (nosotros, por ejemplo) será un observador rotante. La velocidad angular de la Tierra es:

$$\vec{\omega}_T = \frac{2\pi}{24h} \hat{z}$$

Figura 7.12:



que es constante, entonces, la fuerza de arrastre será nula. Veamos qué consecuencias tiene la rotación terrestre para un cuerpo en reposo, sobre su superficie, para un observador rotante. El cuerpo está a una latitud λ en reposo respecto de la Tierra (y del observador rotante), entonces $\vec{v} = 0$, o sea, la fuerza de Coriolis es nula (la fuerza de Coriolis depende de la velocidad y será nula siempre que el cuerpo esté en reposo respecto del observador rotante). La única fuerza ficticia que aparece es:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \vec{r})$$

Vemos cuánto vale y hacia dónde está dirigida:

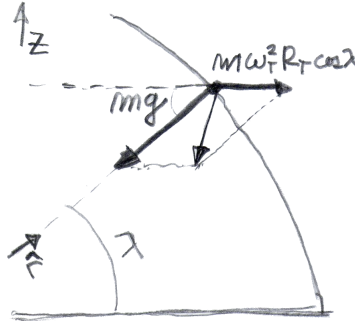
$$|(\vec{\omega}_T \times \vec{r})| = \omega_T R_T \text{sen}(\pi - \lambda) = \omega_T R_T \text{cos}(\lambda) \quad (\vec{r} = R_T \text{cos}(\lambda)\hat{x} + R_T \text{sen}(\lambda)\hat{y})$$

Para hallar la dirección y sentido rotamos un tirabuzón desde $\bar{\omega}_T$ a \bar{r}_T : sentido entrante de la hoja (\hat{y}). Ahora hacemos:

$$\begin{aligned} -m\bar{\omega}_T \times (\bar{\omega}_T \times \bar{r}) &= -m\omega_T \hat{z} \times \omega_T R_T \cos(\lambda) \hat{y} \\ &= m\omega_T^2 R_T \cos(\lambda) (-\hat{z} \times \hat{y}) \\ &= m\omega_T^2 R_T \cos(\lambda) \hat{x} \end{aligned}$$

O sea, $\bar{F}_{cent} = m\omega_T^2 R_T \cos(\lambda) \hat{x}$. Existe además sobre el cuerpo una fuerza de interacción: su peso, que apunta hacia el centro de la Tierra. Tendremos entonces:

Figura 7.13:



$$\bar{F} = -mg\hat{r} + m\omega_T^2 R_T \cos(\lambda) \hat{x}$$

pero $\hat{r} = (\cos(\lambda)\hat{x} + \text{sen}(\lambda)\hat{z})$, es decir:

$$\bar{F} = -m \cos(\lambda) (g - \omega_T^2) \hat{x} - mg \text{sen}(\lambda) \hat{z}$$

Esto muestra que el efecto de la centrífuga es desviar la “línea de plomada”. En efecto, si la Tierra no rotara, la fuerza sobre un cuerpo en la superficie terrestre

apuntaría hacia el centro de la Tierra (el peso). Como consecuencia de la rotación, esa fuerza, se desvía ligeramente (en la dirección indicada en la figura).

Para evaluar el desvío podemos calcular:

$$\omega_T R_T = \left(\frac{2\pi}{24.3600s} \right)^2 64 \times 10^5 m \approx 0.034 \frac{m}{s^2} \ll g$$

Otra observación interesante es que solo en los polos, una balanza indicará el peso verdadero (allí, $\cos(\lambda) = 0$ y la $\sum \bar{F}$ coincide con el peso). En el ecuador ($\cos(\lambda) = 1$, $\sin(\lambda) = 0$), la línea de la plomada coincide con la dirección del peso pero según la balanza “pesaríamos” $m(g - \omega_T^2 R_T)$ (y no mg). Vemos que la determinación “experimental” de la gravedad, dependerá de la latitud.

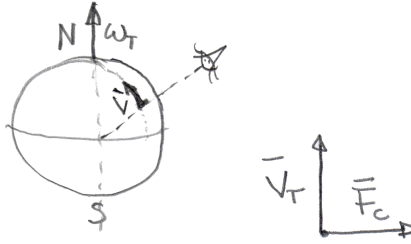
La fuerza de Coriolis depende de la velocidad del móvil medida desde la Tierra y es responsable de ciertos efectos meteorológicos. Por ejemplo, la del sentido del movimiento de los vientos alrededor de los centros *ciclónicos* y *anticiclónicos*. Los centros ciclónicos, son regiones de baja presión atmosférica, mientras que los anticiclónicos, son regiones de alta presión. Debido a la diferencia de presiones, cuando hay un centro ciclónico se producen vientos en principio radiales hacia el centro de baja presión. Lo contrario ocurre con los centros anticiclónicos: los vientos tienden a ir desde el centro hacia afuera.

Figura 7.14:



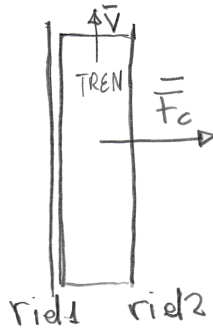
Como resultado de la fuerza de Coriolis, estas corrientes de aire no resultan radiales. El efecto funciona diferente según el hemisferio *sur* o *norte*. Si estamos

Figura 7.17:



Por efecto de la fuerza de Coriolis, el tren tiende a ser separado del riel que está más al oeste (riel 1), y a ser “apretado” sobre el otro (riel 2).

Figura 7.18:



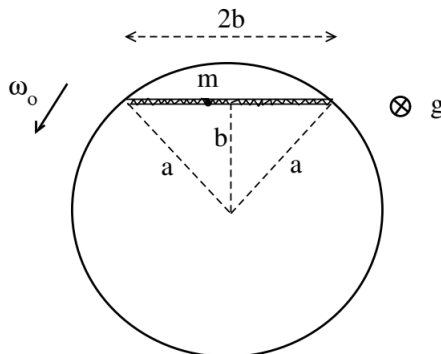
7.3. Ejercicio resuelto del capítulo

PROBLEMA: Una plataforma de radio a rota con velocidad angular ω_o constante alrededor de un eje que pasa por su centro. Solidario a la plataforma hay un caño hueco de longitud $2b$, colocado sobre una secante a la circunferencia de radio a (ver Fig. (7.19)). Dentro del caño, puede deslizarse un cuerpo de masa m que se encuentra unido a dos resortes idénticos de constante k y longitud natural $\frac{b}{2}$ que se hallan fijos, por su otro extremo, a los extremos del caño. Desde el punto de vista de un observador solidario a la plataforma:

- Hallar la posición de equilibrio y la máxima ω_o , (ω_{max}) para la cual dicho punto existe.
- Suponiendo $\omega_o < \omega_{max}$, hallar la frecuencia de oscilación del cuerpo alrededor de la posición de equilibrio.
- Hallar la fuerza de vínculo entre el caño y el cuerpo (es decir, la fuerza sobre el cuerpo debida al contacto con el caño) durante el movimiento oscilatorio.

Datos: m, a, b, ω_o, k y g .

Figura 7.19: Problema 1

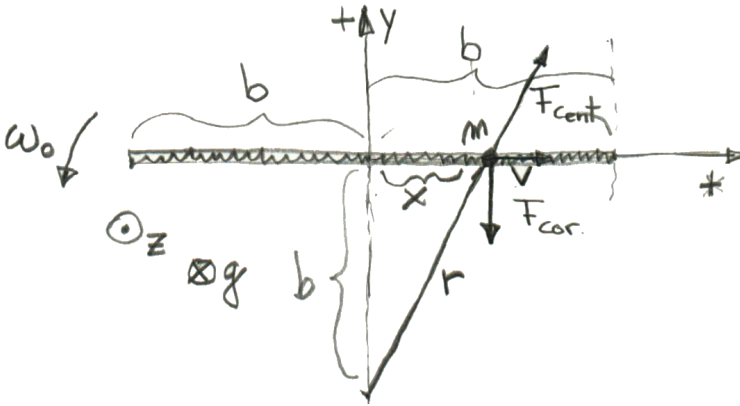


RESOLUCIÓN: el observador es no inercial (rota con velocidad angular $\omega = \omega_o \hat{z}$).
 Para que valgan las leyes de Newton, debe trabajar con fuerzas ficticias:

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

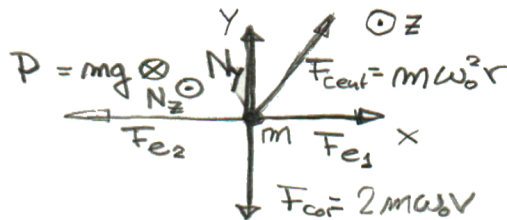
Es decir, $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{cent} + \vec{F}_{cor}$

Figura 7.20:



Aquí son las fuerzas originadas por las interacciones de m con otros cuerpos. En este caso, las fuerzas elásticas y las fuerzas de vínculo (contacto) con el caño. El diagrama de cuerpo libre es:

Figura 7.21:



Donde:

$$\vec{F}_{e1} = k \left((b - x) - \frac{b}{2} \right) x \hat{x}; \quad \vec{F}_{e2} = -k \left((b + x) - \frac{b}{2} \right) x \hat{x};$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{cent} &= m\omega_o^2 x \hat{x} + m\omega_o^2 b \hat{y}; \quad \bar{F}_{cor} = -2m\omega_o v \hat{y}; \\ \bar{P} &= -mg \hat{z} \quad \bar{N} = N_y \hat{y} + N_z \hat{z}\end{aligned}$$

Entonces, en la *dirección* \hat{x} :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= k \left((b-x) - \frac{b}{2} \right) x - k \left((b+x) - \frac{b}{2} \right) x + m\omega_o^2 x \\ &= -2kx + m\omega_o^2 x = - \left(\frac{2k}{m} - \omega_o^2 \right) mx\end{aligned}$$

O sea,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(\frac{2k}{m} - \omega_o^2 \right) x \quad (7.1)$$

En la *dirección* \hat{y} :

$$0 = m\omega_o^2 b - 2m\omega_o v + N_y \quad (7.2)$$

En la *dirección* \hat{z} :

$$0 = -mg + N_z \quad (7.3)$$

a) y b) De la Ec. (7.1) es evidente que $x = 0$ corresponde a una posición de equilibrio: allí las fuerzas (y por lo tanto la aceleración) se anulan. La Ec. (7.1) se puede escribir como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega x = 0 \quad (7.4)$$

donde $\omega^2 = \left(\frac{2k}{m} - \omega_o^2 \right)$.

Si $\omega^2 > 0$, la solución de la Ec. (7.4) es la que corresponde a un oscilador armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \omega_o^2}$.

Si $\omega^2 < 0$, la solución deja de ser oscilatoria y, si bien $x = 0$ sigue siendo un punto de equilibrio, pasa a ser inestable. Por lo tanto para que $x = 0$ sea estable, debe ser $\frac{2k}{m} > \omega_o^2$. Esto quiere decir que:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

c) De las Ec. (7.2) y (7.3), vemos que

$$N_y = 2m\omega_o v - m\omega_o^2 b \quad \text{y} \quad N_z = mg$$

Aquí, $v = v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \text{sen}(\omega t + \varphi)$, donde $x = x(t)$ es la solución de la Ec. (7.4) para alguna condición inicial.

Capítulo 8

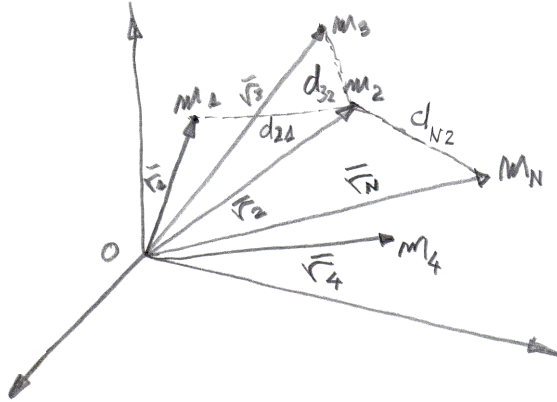
Cuerpo rígido (CR)

8.1. Definición

Vamos a estudiar ahora el movimiento de un sistema que está formado por muchas partículas, es decir, vamos a abandonar los sistemas puntuales. Supongamos un sistema formado por N cuerpos puntuales de masas m_1, m_2, \dots, m_N ($m_i, i = 1, \dots, N$), cuyos vectores posición son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ ($\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$).

Supongamos que estos cuerpos están vinculados por varas rígidas de masa despreciable.

Figura 8.1:



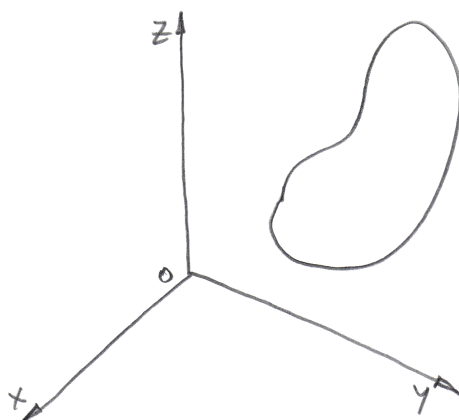
Esto quiere decir que el movimiento de ellos debe respetar las siguientes ecuaciones de vínculo:

$$d_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|,$$

donde d_{ij} es la longitud de la vara que vincula el cuerpo i -ésimo con el j -ésimo (en la figura están dibujadas algunas de estas varillas). Este sistema es un cuerpo rígido. Podemos definir, entonces, un *cuerpo rígido* como un conjunto de puntos cuya distancia entre sí permanece constante. Esta propiedad (definitoria del cuerpo rígido) hace que los posibles movimientos de los puntos que forman un sistema sean bastante limitados. Podemos considerar otra “representación” de

un cuerpo rígido: una distribución continua de masa que permanece indeformable en el tiempo. Por ejemplo, un dedo, una papa, una llave, etcétera). Si tiramos al aire cualquiera de estos sistemas, se moverá de forma tal que conservará su forma. Estas distribuciones continuas de masa pueden verse como un conjunto de puntos cuya distancia entre sí permanece inalterable. Este recurso nos resultará muy útil dado que ya sabemos calcular cosas para conjuntos de puntos. Supongamos que tenemos una distribución de masa indeformable (una papa, digamos) y la masa total del cuerpo es M .

Figura 8.2:

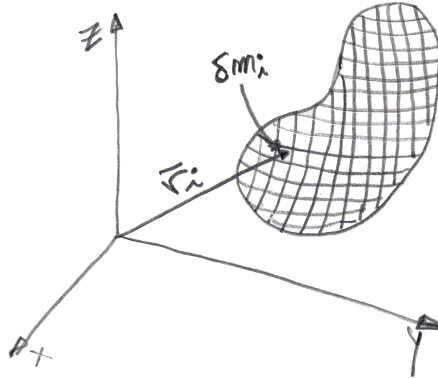


Lo primero que vamos a aprender es a encontrar el centro de masa del sistema. Sabemos calcularlo para N cuerpos:

$$\bar{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

Para poder utilizar nuestros conocimientos, intentemos pensar a nuestro conjunto de N puntos de masa δm_i ($i = 1, \dots, N$). Para eso, hacemos una partición de la papa.

Figura 8.3:



Cada cubito de papa tiene un volumen δV_i . La relación entre la masa de cada cubito y su volumen define la *densidad*:

$$\rho(\vec{r}_i) = \frac{\delta m_i}{\delta V_i}$$

Es decir, la masa por unidad de volumen de cada cubito. Esta densidad, con toda generalidad, no será constante (es decir, podrá haber cubitos mas densos que otros, pensemos en los “ojos” de las papas, los brotes, etcétera). Si fuese constante, tendríamos lo que se conoce como un cuerpo homogéneo. Ahora aplicamos nuestra receta para calcular el *CM* de los sistemas de partículas:

$$\vec{R}_{CM} \approx \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \delta m_i}{\sum_{i=1}^N \delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \delta V_i}{\sum_{i=1}^N \rho(\vec{r}_i) \delta V_i}$$

Esta aproximación a la posición del *CM* será cada vez mejor en la medida que el tamaño de cada cubito sea cada vez más chico. Chico significa mucho menor que el tamaño de la papa: si el volumen total de la masa es V , entonces, en la medida que $\delta V_i \ll V$, nuestra aproximación mejorará. Pero si achicamos el volumen de cada cubito, estamos agrandando N . Pensamos entonces en el límite

$\delta V_i \rightarrow 0$, y $N \rightarrow \infty$, tal que $\delta V_i N = V$. Entonces tendremos:

$$\bar{R}_{CM} = \lim_{\substack{\delta V_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N \delta V_i = V}} \frac{\sum_{i=1}^N \bar{r}_i \rho(\bar{r}_i) \delta V_i}{\sum_{i=1}^N \rho(\bar{r}_i) \delta V_i}$$

Pero esta es la definición de integral de volumen. Es decir:

$$\bar{R}_{CM} = \lim_{\substack{\delta V_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N \delta V_i = V}} \sum_{i=1}^N \rho(\bar{r}_i) \delta V_i = \int_V \rho(\bar{r}) dV = M$$

$$\bar{R}_{CM} = \lim_{\substack{\delta V_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N \delta V_i = V}} \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \rho(\bar{r}_i) \delta V_i = \int_V \bar{r} \rho(\bar{r}) dV$$

O sea, el centro de masa de un cuerpo rígido (CR) es

$$\bar{R}_{CM} = \frac{\int_V \bar{r} \rho(\bar{r}) dV}{M}$$

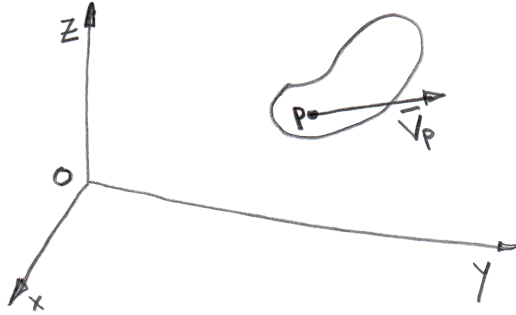
Esta expansión condensa a tres integrales triples:

$$X_{CM} = \frac{\int_V x \rho(\bar{r}) dV}{M}, \quad Y_{CM} = \frac{\int_V y \rho(\bar{r}) dV}{M}, \quad Z_{CM} = \frac{\int_V z \rho(\bar{r}) dV}{M}$$

8.2. Campo de velocidades del CR

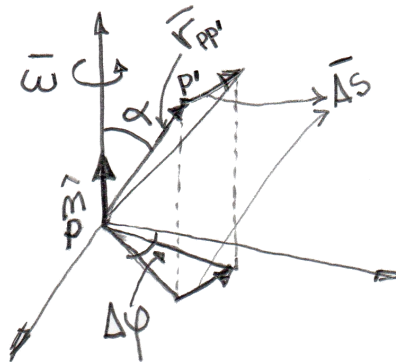
Como ya anticipamos, la condición de rigidez impone un tipo de movimiento bastante limitado para los puntos que componen el cuerpo rígido. Supongamos que conocemos la velocidad de algún punto P del cuerpo rígido (\bar{V}_p) respecto de algún sistema de referencia inercial.

Figura 8.4:



Imaginemos ahora un observador, parado en ese punto P , ¿cómo verá este observador que se mueven todos los otros puntos del rígido? Es evidente que los puntos no se alejarán ni acercarán entre sí (todo esto, debido a la condición de rigidez). El único tipo de movimiento posible, visto desde P es una rotación. Supongamos que el eje de rotación en ese instante apunta en la dirección \hat{n} . Entonces, un punto cualquiera del rígido P' , visto desde P , se puede mover en un Δt , como muestra la figura:

Figura 8.5:



Hallemos la velocidad P' visto desde P , $V_{pp'}$:

$$|\bar{V}_{pp'}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\bar{r}_{pp'}| \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right)$$

y la dirección será perpendicular a \hat{n} y a $\bar{r}_{pp'}$. Si tenemos en cuenta que:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \hat{n} = \omega \hat{n}$$

resulta que:

$$\bar{V}_{pp'} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{pp'}$$

Esto quiere decir que la velocidad de P' , respecto del origen inicial P , será:

$$\bar{V}_{p'} = \bar{V}_p + \bar{V}_{pp'}, \quad \text{o sea } \bar{V}_{p'} = \bar{V}_p + \bar{\omega} \times \bar{r}_{pp'}$$

Esta última expresión, conocida como campo de velocidades del cuerpo rígido, nos permite determinar la velocidad de cualquier punto del rígido si conocemos la velocidad de otro punto cualquiera y la velocidad angular de rotación $\bar{\omega}$. Una propiedad importante del cuerpo rígido, que se desprende del campo de velocidades, es que $\bar{\omega}$ es una propiedad de todo el rígido. En otras palabras, la velocidad angular de rotación de un rígido $\bar{\omega}$, es la misma para todos los puntos del rígido. Es decir, si para un tiempo t visto desde P , todos los otros puntos rotan con $\bar{\omega}$, desde cualquier otro punto Q del movimiento, también será una rotación con la misma $\bar{\omega}$. Más claramente, $\bar{\omega}$ es única, no depende del punto. Para demostrar esto, supongamos que escribimos la velocidad de P' desde dos puntos del rígido, P y Q , y que $\bar{\omega}$ depende del punto, o sea que:

$$\bar{V}_{p'} = \bar{V}_p + \bar{\omega}_p \times \bar{r}_{pp'} \quad \text{y} \quad \bar{V}_{p'} = \bar{V}_q + \bar{\omega}_q \times \bar{r}_{qp'}$$

Figura 8.6:



Podemos, además, poner:

$$\vec{V}_q = \vec{V}_p + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{pq}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \vec{V}_p + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{pp'} &= \vec{V}_p + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{pq} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_{qp'} \\ \Rightarrow \vec{\omega}_p \times (\vec{r}_{pp'} - \vec{r}_{pq}) - \vec{\omega}_q \times \vec{r}_{qp'} &= 0 \end{aligned}$$

pero resulta $(\vec{r}_{pp'} - \vec{r}_{pq}) = \vec{r}_{qp'}$, entonces,

$$(\vec{\omega}_p - \vec{\omega}_q) \times \vec{r}_{qp'} = 0$$

O sea, $(\vec{\omega}_p - \vec{\omega}_q)$ y $\vec{r}_{qp'}$ deben ser paralelos. Pero además, como la dirección de $\vec{r}_{qp'}$ puede ser cualquiera (esto vale para dos puntos arbitrarios del rígido), concluimos que debe ser $(\vec{\omega}_p - \vec{\omega}_q) = 0$ o sea, $\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_q = \vec{\omega}$.

Otra propiedad importante que se desprende del campo de velocidades es la siguiente: si multiplicamos escalarmente (producto escalar), ambos miembros del campo de velocidades por $\vec{\omega}$, resulta:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{V}_{p'} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_p$$

para cualquier par de puntos P y P' del rígido. Si en ese instante, resulta que hay algún punto del rígido cuya velocidad es perpendicular al eje de rotación (perpendiculares a $\vec{\omega}$), en ese instante, y para el observador inercial, el movimiento

será una rotación pura. Para ubicar el eje de esa rotación pura, llamado *eje instantáneo de rotación*, en ese instante, basta resolver la ecuación:

$$\vec{V}_p + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pe}$$

donde \vec{r}_{pe} es la posición del eje respecto del punto P . Es importante notar que el movimiento general del cuerpo rígido es una traslación compuesta con una rotación. De hecho, cualquier movimiento del cuerpo rígido se puede descomponer como una rotación instantánea pura más una traslación paralela al eje de rotación. Es decir, el movimiento del “tornillo”. Para ver esto, escribiremos:

$$\vec{V}_{p'} = \vec{V}_{p\perp} + \vec{V}_{p\parallel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pp'}$$

donde descompusimos $\vec{V}_p = \vec{V}_{p\perp} + \vec{V}_{p\parallel}$. Con respecto a $\vec{V}_{p\perp}$ y $\vec{V}_{p\parallel}$, estas son las componentes de la velocidad de P , perpendiculares a $\vec{\omega}$ y paralelas a $\vec{\omega}$, respectivamente. Es claro que existe aquí un eje instantáneo de rotación. En efecto, si queremos resolver

$$\vec{V}_{p\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pe} \vec{V}_{p\parallel} = 0$$

veremos que no tiene solución, todos los posibles \vec{r}_{pe} conducen a un vector ($\vec{\omega} \times \vec{r}_{pe}$) perpendicular a $\vec{\omega}$. Para algún \vec{r}_{pe} , podremos anular $\vec{V}_{p\perp}$ pero nunca $\vec{V}_{p\parallel}$. Si encontramos el \vec{r}_{pe} que anula a $\vec{V}_{p\perp}$, encontraremos un eje instantáneo de rotación que además se traslada con $\vec{V}_{p\parallel}$ sobre sí mismo.

8.3. Momento angular del CR

Ya vimos que el momento angular de un sistema de partículas podría escribirse como:

$$\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} + \sum_{i=1}^N \vec{v}'_i \times m_i \vec{V}'_i$$

donde \bar{L}_s es el momento angular de spin, o de rotación, alrededor del CM . Si se trata de un rígido, podemos poner el campo de velocidades tomando como punto P el centro de masa. Entonces,

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{CM} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_i$$

Notemos aquí, que sabemos las leyes que gobiernan el movimiento del CM .

$$M \frac{dV_{CM}}{dt} = \bar{F}^{(ext)}$$

Es decir, el centro de masa responde a la segunda ley de Newton para una masa puntal en \bar{R}_{CM} y a todas las fuerzas aplicadas allí (no importa dónde estén aplicadas en el cuerpo rígido).

Aquí, $(\bar{\omega} \times \bar{r}'_i)$ es la velocidad del punto i del rígido respecto de su CM . O sea

$$\bar{L}_s = \sum_{i=1}^N (\bar{r}'_i \times m_i \bar{\omega} \times \bar{r}'_i)$$

Vamos a deducir ahora la relación general entre \bar{L}_s y $\bar{\omega}$ para un cuerpo rígido, como cultura general, dado que en nuestro estudio del movimiento del CR , nos vamos a restringir a movimientos más simples. Comenzamos notando que, a partir de la identidad $\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b} (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} (\bar{a} \cdot \bar{b})$, podemos poner

$$m_i (\bar{r}'_i \times \bar{\omega} \times \bar{r}'_i) = m_i (\bar{\omega} (r_i'^2) - \bar{r}'_i (\bar{r}'_i \bar{\omega}))$$

Si $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ y $\bar{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$, la componente x del doble producto será

$$\begin{aligned} & m_i (\omega_x (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - x'_i (x'_i \omega_x + y'_i \omega_y + z'_i \omega_z)) \\ &= m_i [(y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - x'_i y'_i \omega_y - x'_i z'_i \omega_z] \end{aligned}$$

Entonces obtenemos:

$$L_x = \left(\sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \right) \omega_x - \left(\sum_{i=1}^N m_i x'_i y'_i \right) \omega_y - \left(\sum_{i=1}^N m_i x'_i z'_i \right) \omega_z$$

Análogamente:

$$L_y = \left(\sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) \right) \omega_y - \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' \right) \omega_x - \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \right) \omega_z$$

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \right) \omega_z - \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \right) \omega_x - \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \right) \omega_y$$

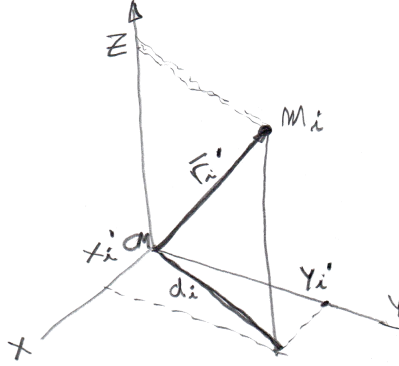
Es decir:

$$\begin{pmatrix} L_{sx} \\ L_{sy} \\ L_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{o también } \bar{L}_s = I \bar{\omega}$$

donde I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} son lo que se conoce como momentos de inercia respecto de los ejes x , y y z respectivamente. Los términos no diagonales de esa matriz (I_{xy} , I_{yz} , etcétera) se conocen como productos de inercia. A la matriz I se la conoce con el nombre de tensor de inercia, y para encarar el estudio del movimiento general del CR y sus propiedades (es lo que hace falta para estudiar, por ejemplo, el movimiento del giróscopo, del trompo, etcétera), notemos que el general \bar{L}_s y $\bar{\omega}$ no son paralelos. Nosotros siempre nos restringiremos al caso en que siempre, cualquiera sea el movimiento, permanecerán paralelos (mientras no se diga lo contrario). Para que eso ocurra, debe suceder que $\bar{\omega} = \omega \hat{n}$, donde \hat{n} es un vector fijo en el tiempo que coincide con algún eje (\hat{x} , \hat{y} o \hat{z}). Por ejemplo, $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$, en ese caso: $\bar{L} = L_z \hat{z}$, $\bar{\omega} = \omega_z \hat{z}$, entonces $L_z = I_{zz} \omega_z$, considerando además, que el problema es tal que $I_{zx} = I_{zy} = 0$.

Veamos quién es I_{zz} , al que llamaremos I_{CM} a secas.

Figura 8.7:



$$I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = I_{CM}$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i d_i^2$$

O sea, la suma de las masas por su distancia al cuadrado al eje z . En nuestra versión de distribución continua de masa:

$$I_{CM} = \int_V \rho(\vec{r}) d^2(\vec{r}) dV$$

Como ya hemos mencionado, el momento angular de spin de un CR está relacionado con la velocidad angular por medio de una ecuación lineal entre vectores de la forma

$$\vec{L}_s = I \vec{\omega}$$

donde I es lo que se conoce como tensor de inercia. Este tensor es una propiedad geométrica del cuerpo y de la distribución de masa (como está distribuida la masa a lo largo del CR). La representación de este tensor es una matriz de 3×3 simétrica ($I_{xy} = I_{yx}$, $I_{zx} = I_{xz}$ y $I_{zy} = I_{yz}$, se puede ver fácilmente por cómo están definidos). Es conocido que una matriz real simétrica de 3×3 es siempre diagonalizable, es decir, hay tres ejes ortogonales tales que si son tomados como x , y

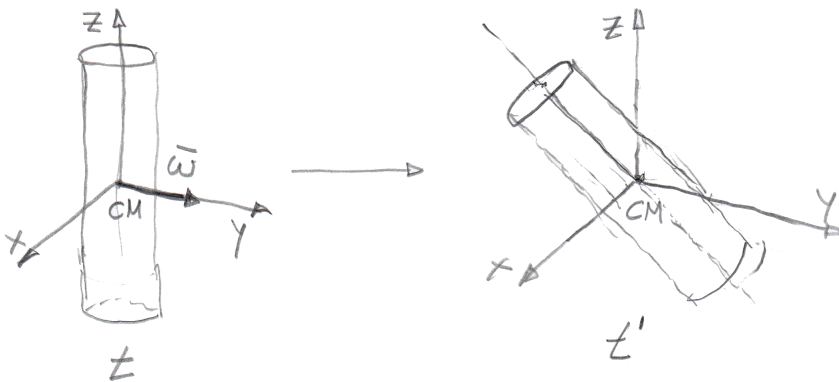
y z , la matriz resulta diagonal. En el caso particular del tensor de inercia, esas tres direcciones particulares son llamadas ejes principales de inercia. Entonces, el tensor de inercia usando estas tres direcciones nos queda

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x \\ L_y &= I_{yy}\omega_y \\ L_z &= I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

En esta representación, los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} son los *momentos principales de inercia*. Todo cuerpo rígido tiene tres momentos principales de inercia. Aquí vemos, que, en general, \bar{L} y $\bar{\omega}$ no son vectores paralelos. Dos vectores \bar{a} y \bar{b} son paralelos si $\bar{a} = \alpha\bar{b}$ y, en general, $I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz}$.

Remarquemos algo importante: supongamos que a un tiempo t calculamos el tensor de inercia del CR y resulta diagonal. En un tiempo t' , en general, ya no lo será, dado que el cuerpo está rotando con cierta velocidad angular. Veamos el siguiente ejemplo:

Figura 8.8:



En t , los ejes coinciden con los ejes principales de inercia, pero en t' no. O sea, la relación es

$$\bar{L}_s = \mathbf{I}(t)\bar{\omega}(t)$$

Esto es un problema, dado que por calcular $I(t)$, deberíamos saber cómo es el movimiento de relación alrededor del CM que es precisamente lo que queremos determinar. Sabemos que (por lo que estudiamos de momento angular):

$$\frac{d\bar{L}_s}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}(t)\bar{\omega}(t))}{dt} = \bar{\tau}$$

donde $\bar{\tau}$ es el torque de las fuerzas respecto del CM . Esta ecuación, así, no nos sirve (no sabemos calcular $I(t)$). Podríamos calcular todo desde un sistema de coordenadas que coincida con los ejes principales y rote con la misma velocidad del cuerpo. Esto tiene la ventaja, que, en ese caso, $I(t)$ sería siempre diagonal e independiente del tiempo (ya que los ejes rotan con el cuerpo). Si llamamos (x_1, x_2, x_3) a estos ejes rotantes, tendremos:

$$L_1 = I_{11}\omega_1$$

$$L_2 = I_{22}\omega_2$$

$$L_3 = I_{33}\omega_3$$

donde I_{11} , I_{22} y I_{33} son los momentos principales de inercia (independientes del tiempo). Si esto lo calculamos con lo que ya sabemos, tendremos que

$$\left. \frac{d\bar{L}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{L}}{dt} \right|_{Rot} + \bar{\omega} \times \bar{L} = \bar{\tau}$$

O sea,

$$\bar{\tau}_1 = I_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{L})_1 = I_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$$

$$\bar{\tau}_2 = I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{L})_2 = I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1$$

$$\bar{\tau}_3 = I_{33} \frac{d\omega_3}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{L})_3 = I_{33} \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2$$

Estas son las ecuaciones generales que permiten resolver el movimiento de rotación del CR alrededor de su CM (ecuaciones de Euler). Como ya dijimos,

nosotros no estudiaremos el caso general y nos restringiremos al caso en que \bar{L} y $\bar{\omega}$ son paralelos (o sea, $\bar{\omega} \times \bar{L} = 0$), y $\bar{\omega}$ apunta siempre en la dirección de algún eje principal de inercia. En ese caso:

$$\left. \frac{d\bar{L}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\bar{L}}{dt} \right|_{Rot} = \bar{\tau}$$

y además si tomamos $I_{33} = I_{zz}$, $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$, resulta $L_z = I_{zz}\omega_z$, o, directamente, $L_s = I_{CM}\omega$ y entonces

$$\frac{dL_s}{dt} = I_{CM} \frac{d\omega}{dt} = \tau$$

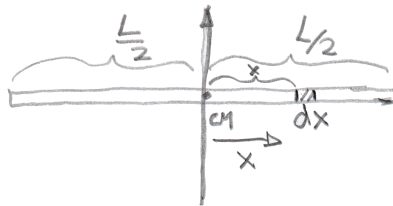
Aquí, I_{CM} es alguno de los momentos principales de inercia, recordemos que:

$$I_{CM} = \int_V \rho(\bar{r}) d^2(\bar{r}) dV$$

8.4. Cálculo de algunos momentos principales de inercia

1. Barra homogénea de largo L y masa M

Figura 8.9:



Definimos $\lambda = \frac{M}{L}$, densidad lineal de masa (suponemos que el largo de la barra es mucho más grande que su radio). La masa contenida en un pedacito de barra de tamaño dx , ubicada a una distancia x del eje, será:

$$\lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

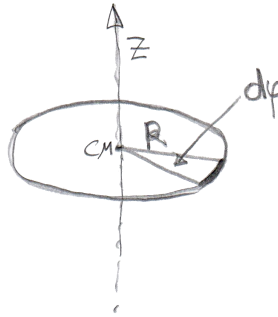
O sea,

$$I_{CM} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L} \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{ML^2}{12}$$

2. Aro homogéneo de radio R y masa M . Para este cuerpo vamos a estudiar los dos momentos principales de inercia.

a)

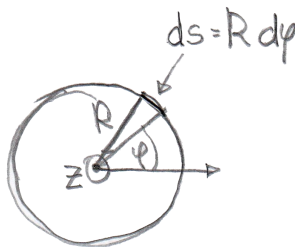
Figura 8.10:



$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$, densidad de masa. La masa de cada pedacito de aro de longitud $ds = R d\varphi$ será:

$$\frac{M}{2\pi R} ds = \frac{M}{2\pi} d\varphi$$

Figura 8.11:

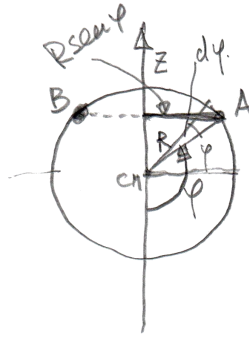


Todos los pedacitos de masa estarán a una distancia R del eje. O sea,

$$I_{CM} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{R^2 M}{2\pi} d\varphi = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = MR^2$$

- b) En este caso, la masa $\frac{M}{2\pi}d\varphi$, está a una distancia $R \text{ sen}(\varphi)$ del eje (en realidad son dos pedacitos que podemos juntar: el pedacito A y el pedacito B de la figura).

Figura 8.12:



Entonces,

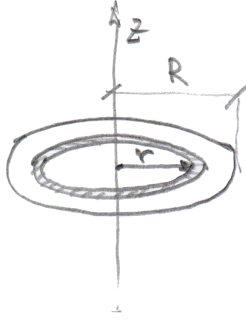
$$\begin{aligned} I_{CM} &= 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} R^2 \text{sen}^2(\varphi) \frac{M}{2\pi} d\varphi = \frac{2MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2R^2 M \pi}{2\pi \cdot 2} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

La otra dirección ortogonal a los ejes principales considerados tiene un I_{CM} igual, $\frac{MR^2}{2}$ (comprobar).

3. Disco homogéneo de radio R y masa M . Aquí, como en el caso anterior, tendremos dos valores para los momentos principales de inercia.

a)

Figura 8.13:



Aquí, si suponemos que el disco es la suma de anillos con radio variable, podemos poner:

$$I_{CM} = \int \delta I_a$$

donde $\delta I_a = \delta M r^2$. δM es la masa del anillo de r variable (el del dibujo, por ejemplo). Si la masa por unidad de superficie del disco, es:

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

la masa de cada anillo de radio r será:

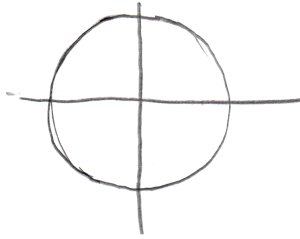
$$\delta M = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

donde $2\pi r dr$, es el área de anillo de radio r y ancho dr . Entonces,

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \int_{r=0}^{r=R} r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M}{R^2} \frac{1}{4} R^4 = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

b) Queda como ejercicio encontrar qué pasa con los otros dos ejes principales (aquí indicados). Los momentos de inercia valen lo mismo:

Figura 8.14:



$$I_{CM} = \frac{MR^2}{4}$$

Para no aburrirse integrando, en los libros están calculados los momentos de inercia de los cuerpos geométricos más conocidos: esfera, cubo, paralelepípedo, cono, cono truncado, tetraedro, etcétera.

En resumen, para estudiar la dinámica del CR , restringiéndonos al tipo de movimiento que estudiaremos, contamos con la segunda ley de Newton para analizar la traslación del CM :

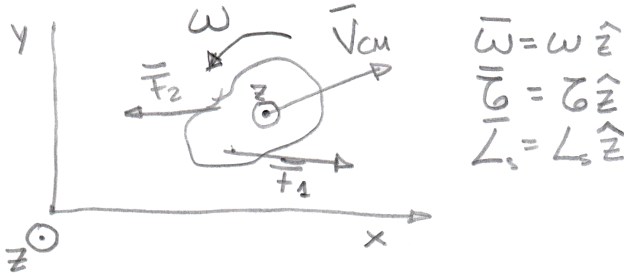
$$M\bar{A}_{CM} = \bar{F}$$

y para estudiar la rotación alrededor de este:

$$L_s = I_{CM}\omega, \quad \tau = I_{CM}\gamma, \quad \gamma = \frac{d\omega}{dt} : \text{aceleración angular.}$$

Insistimos: no es el problema general del movimiento de CR . A veces, al tipo de movimiento del CR que estudiaremos, se lo conoce como movimientos con “rotaciones planas”. El eje de rotación está siempre en una misma dirección perpendicular a los planos en los que se mueven todos los puntos del CR .

Figura 8.15:

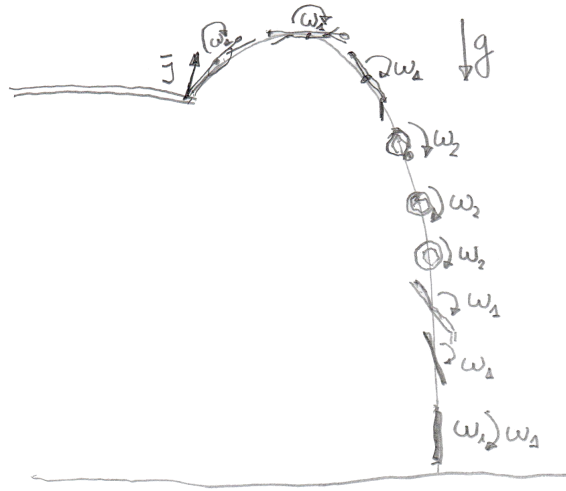


Para este tipo de problemas, la ley $I_{CM}\dot{\omega} = \tau$ para las rotaciones, es análoga a la segunda ley de Newton (insistimos: solo para rotaciones planas). Vemos entonces, que I_{CM} , es el “equivalente” a la masa inercial para rotaciones. Es decir, el momento de inercia I_{CM} , es lo que determina la tendencia que tiene un cuerpo rígido a mantener su velocidad de rotación $\bar{\omega}$ alrededor de su CM . Cuanto mayor es el I_{CM} , mayor será esa tendencia. Como vimos, el I_{CM} no solo depende de la masa total, sino también de cómo esa masa está distribuida alrededor del eje de rotación (que en este caso, al ser una rotación plana, es un eje principal de inercia). Vemos algunas consecuencias. Ya sabemos que:

$$\frac{dL_s}{dt} = \frac{d(I_{CM}\omega)}{dt} = \tau$$

Imaginemos un sistema tal que $\tau = 0$. En ese caso, $I_{CM}\omega = L_s = cte$. Es decir, el momento angular de spin se conserva, y si el cuerpo es indeformable (cuerpo rígido), esto lleva a la conservación de su velocidad angular $\bar{\omega}$. ¿Pero qué sucede si el sistema tiene la posibilidad de deformarse (y por lo tanto cambiar su I_{CM})? En ese caso, la constancia de L_s impone que al valor I_{CM} también varíe $\bar{\omega}$. Un ejemplo clásico de esto, es lo que hacen los clavadistas cuando se tiran de un trampolín:

Figura 8.16:



El clavadista, recibe un impulso J de la tabla del trampolín en los pies. Esto impulsa su centro de masa hacia arriba y luego cae siguiendo una parábola. Pero además, recibe una cantidad de movimiento angular L_s (que permanece constante durante toda la caída debido a que $\tau = 0$ desde su CM). Mientras el clavadista permanece estirado, su velocidad angular es $\omega_1 = \frac{L_s}{I_{CM}^{(1)}}$. En algún momento, se hace un ovillo (una bolita) y entonces $\omega_2 = \frac{L_s}{I_{CM}^{(2)}}$.

Como $I_{CM}^{(2)} < I_{CM}^{(1)}$, cuando está hecho una bolita, gira más rápido. Hagamos algunos números. Supongamos que cuando está estirado, el $I_{CM}^{(1)}$ es aproximadamente el de una barra de longitud $2m$. Entonces:

$$I_{CM}^{(1)} = \frac{M 4m^2}{12} = \frac{M}{3}m^2$$

Cuando se hace bolita, el $I_{CM}^{(2)}$ es aproximadamente el de una esfera ($I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$) de $0.8m$ de diámetro. O sea,

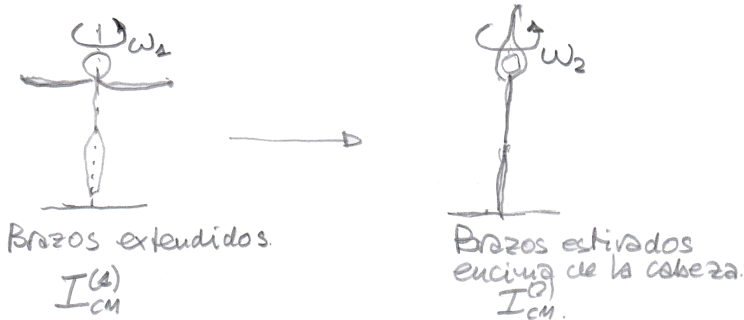
$$I_{CM}^{(2)} = \frac{2}{5}M(0.4)^2m^2 = \frac{M}{5}0.32m^2,$$

llegamos a la relación:

$$\frac{I_{CM}^{(1)}}{I_{CM}^{(2)}} = \frac{\frac{M}{3}m^2}{\frac{M}{5}0.32m^2} = \frac{5}{3} \frac{1}{0.32} \approx 5$$

Entonces, $\omega_2 \approx 5\omega_1$, ¡cuando está en forma de bolita, rota 5 veces más rápido!
El mismo efecto lo utilizan los bailarines para girar más rápido sobre sí mismos:

Figura 8.17:

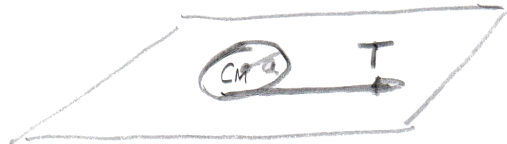


Como $I_{CM}^{(2)} < I_{CM}^{(1)} \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$

8.5. Ejemplos de movimientos de CR

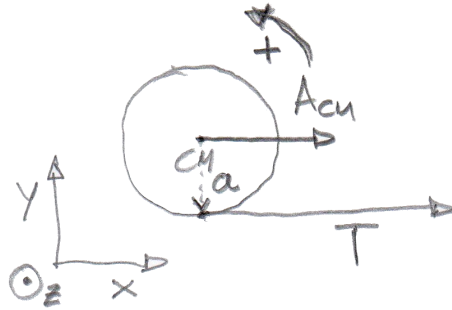
- Supongamos un disco con una soga enrollada sobre una superficie horizontal sin rozamiento. La masa del disco es M y el radio es a .

Figura 8.18:



Si tiramos de la soga, ¿cómo será el movimiento?

Figura 8.19:



La aceleración del CM viene dado por la segunda ley de Newton:

$$MA_{CM} = T \Rightarrow A_{CM} = \frac{T}{M}$$

La rotación alrededor del CM está dada por la ecuación:

$$I_{CM}\gamma = \tau$$

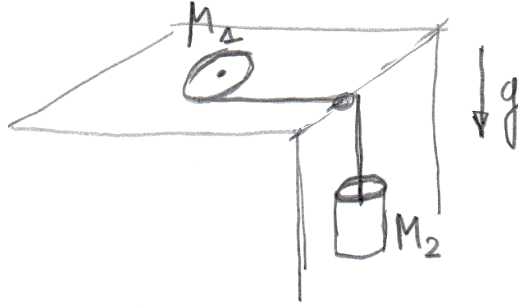
Antes que nada, debemos definir un sentido positivo para la rotación. Esto está indicado por la flecha curva en el dibujo. Entonces:

$$I_{CM}\gamma = aT$$

y como $I_{CM} = \frac{Ma^2}{2}$ (es un disco de radio a): $\frac{Ma^2}{2}\gamma = aT \Rightarrow \gamma = \frac{2T}{Ma}$

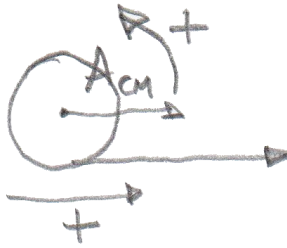
- Ahora, el mismo disco del problema anterior, está unido por la cuerda que pasa por una polea (de masa despreciable) a un cilindro que cuelga.

Figura 8.20:



Hacemos los diagramas de cuerpo libre:

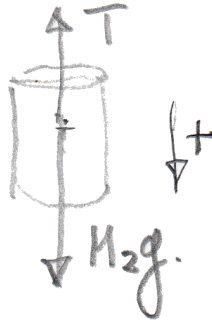
Figura 8.21:



$$M_1 A_{CM_1} = T \quad (\text{traslación})$$

$$I_{CM} \gamma = aT \quad (\text{rotación})$$

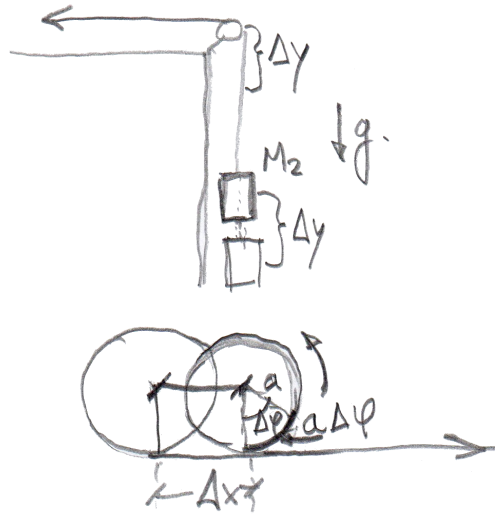
Figura 8.22:



$$M_2 A_{CM_2} = M_2 g - T \quad (\text{traslación})$$

Hasta aquí, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas (A_{CM_1} , A_{CM_2} , γ y T). Nos falta una ecuación. Resulta que T es una fuerza de vínculo (asociada al hilo). Mientras el hilo esté tenso ($T > 0$), va a existir una relación entre A_{CM_1} , A_{CM_2} y γ . En efecto, supongamos que transcurre un Δt . En ese instante el cilindro desciende un Δy .

Figura 8.23:



Este Δy es igual a la cantidad de hilo que aparece del lado de la polea donde cuelga el cilindro. Esa cantidad de hilo, proviene de dos contribuciones: lo que se traslada el CM del disco en ese tiempo Δx , y el hilo que se desenrolla del disco en ese tiempo ($a\Delta\varphi$). O sea,

$$\Delta y = \Delta x + a\Delta\varphi$$

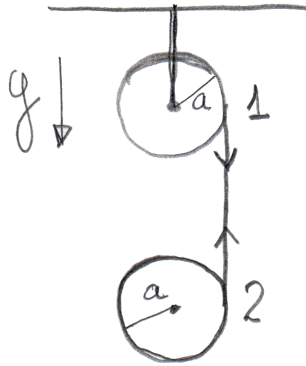
Esto quiere decir que:

$$A_{CM_2} = A_{CM_1} + a\gamma$$

Esta es la ecuación que faltaba. Esta ecuación, junto con las otras tres, constituyen un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que resuelven el problema.

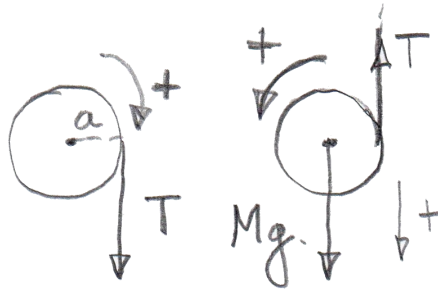
- Los dos discos son iguales (de misma masa M y mismo radio a , por ende idéntico I_{CM}). Determinar las aceleraciones angulares de cada disco (γ_1 y γ_2) y la aceleración del CM del disco 2.

Figura 8.24:



El disco 1 está fijo (no se traslada y puede rotar). El disco 2 cae a medida que el hilo se va desenrollando de ambos discos.

Figura 8.25:



$$I_{CM}\gamma_1 = aT \quad (\text{rotación del disco 1})$$

$$MA_2 = Mg - T \quad (\text{traslación del disco 2})$$

$$I_{CM}\gamma_2 = aT \quad (\text{rotación del disco 2})$$

Ecuación de vínculo: lo que desciende el CM del disco 2 en un Δt (Δy), tiene dos contribuciones: el hilo que se desenrolla de 1 en Δt ($a\Delta\varphi_1$), más lo que

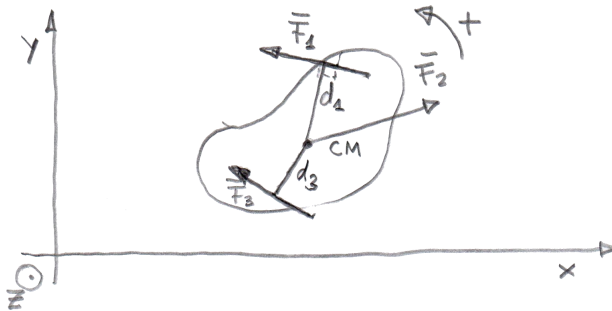
se desenrolla de 2 en Δt ($a\Delta\varphi_2$). O sea,

$$\Delta y = a\Delta\varphi_1 + a\Delta\varphi_2 \Rightarrow A_2 = a\gamma_1 + a\gamma_2$$

Esta ecuación permite completar el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que resuelven el sistema.

Podemos establecer el procedimiento típico para determinar y construir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido libre (esto es, sin vínculos) para el caso en que su rotación es plana.

Figura 8.26:



La aceleración del CM está definida por:

$$M\bar{A}_{CM} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{R}$$

donde $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ es la resultante de todas las fuerzas externas, no importa dónde estén aplicadas. O sea,

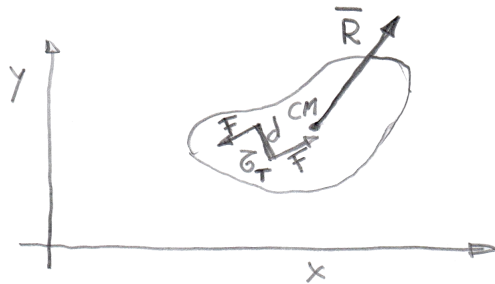
$$\left\{ \begin{array}{l} MA_{CM_x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x \\ MA_{CM_y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = R_y \end{array} \right.$$

La aceleración angular alrededor del CM , con eje de rotación en la dirección \hat{z} , está determinada por:

$$I_{CM}\gamma = \tau_1 + \tau_3 = |\bar{F}_1|d_1 - |\bar{F}_3|d_3 = \tau_T \quad (\text{torque total}).$$

τ_1 y τ_3 son los torques de \bar{F}_1 y \bar{F}_3 (d_1 y d_3 son las distancias de las respectivas rectas de acción de las fuerzas al CM ; en este caso, \bar{F}_2 no interviene porque su torque es nulo). El signo de los torques se corresponde con el sentido de giro que favorecen, de acuerdo con el que indicamos en el diagrama del problema. En este caso, elegimos signo + al antihorario. Vemos aquí, que lo que determina el movimiento es \bar{R} y τ_T . Si definimos ahora una “cupla” (o un par de fuerzas), como dos fuerzas de igual módulo pero opuestas, cuyas rectas de acción están separadas por una distancia d , notamos que la misma dinámica que planteamos antes se obtiene si:

Figura 8.27:



donde $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$. Aquí el vector \bar{F} es una fuerza y d es una distancia arbitraria tal que la cupla (o el par) es:

$$|\bar{F}|d = |\tau_T|$$

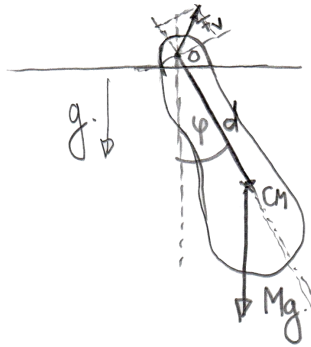
y cuyo sentido de giro (el signo) es el de:

$$F_1d_1 - F_3d_3 = \tau_T$$

8.6. Movimiento de CR vinculados

Consideremos ahora el movimiento de un CR con un punto fijo. El ejemplo más simple de esto es el caso de *péndulo físico*, llamado así, para diferenciarlo del sistema de péndulo ideal que ya estudiamos. Un péndulo físico es un CR que cuelga de algún punto diferente a su CM .

Figura 8.28:



Las fuerzas aplicadas en este sistema son, el peso del CR ($P = Mg$ aplicada en el CM) y F_V (fuerza de vínculo aplicada en el punto fijo de suspensión o). Por lo tanto, para el movimiento del CM , tendremos:

$$MA_{CM} = \bar{P} + \bar{F}_V$$

Esta ecuación la podemos escribir en componentes polares:

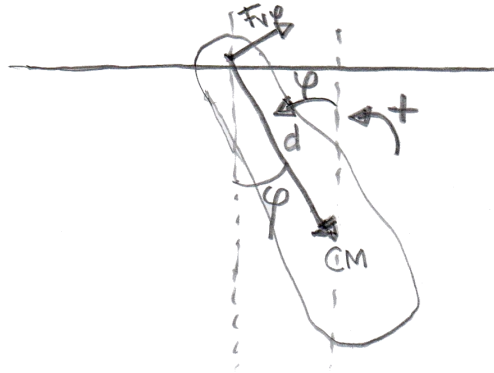
$$Md\ddot{\varphi} = -Mg \operatorname{sen}(\varphi) + F_{V_\varphi} \quad (8.1)$$

$$-Md\dot{\varphi}^2 = Mg \cos(\varphi) - F_{V_r} \quad (8.2)$$

donde F_{V_φ} y F_{V_r} son las componentes angular y radial de la fuerza de vínculo. Conviene remarcar aquí que en el péndulo ideal la fuerza de vínculo, la tensión, no tiene componente angular, ya que siempre apunta en la dirección del hilo. En

el caso del péndulo físico, no sabemos *a priori* para dónde va a apuntar \vec{F}_V . Respecto de la rotación alrededor del CM :

Figura 8.29:



El único torque que actúa es el de la componente angular de la fuerza de vínculo (el peso está aplicado en el CM , o sea, no tiene torque). Entonces tendremos

$$I_{CM}\gamma = -F_{V\varphi}d$$

donde, como $\omega = \dot{\varphi}$ y $\gamma = \ddot{\varphi}$, tenemos

$$I_{CM}\ddot{\varphi} = -F_{V\varphi}d \quad (8.3)$$

Notemos aquí que el ángulo φ , que corresponde a la coordenada angular del CM , es el mismo que describe la rotación del cuerpo alrededor del CM . Esto es, en realidad, la ecuación de vínculo asociada a la existencia de $F_{V\varphi}$. Si utilizamos la Ec. (8.3), para reemplazar $F_{V\varphi}$ en la Ec. (8.1), obtendremos:

$$Md\ddot{\varphi} = -Mg \text{sen}(\varphi) - \frac{I_{CM}}{d}\ddot{\varphi} \Rightarrow (I_{CM} + Md^2)\ddot{\varphi} + Md \text{sen}(\varphi) = 0$$

Esta ecuación, nos permite determinar $\varphi = \varphi(t)$. Podemos escribir la última ecuación como:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{(I_{CM} + Md^2)} \text{sen}(\varphi) = 0$$

y ya sabemos resolver esta ecuación para $\sin(\varphi) \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{(I_{CM} + Md^2)}\varphi = 0$$

Si la comparamos con la ecuación para el péndulo ideal:

$$\ddot{\varphi} + \omega_o^2\varphi = 0 \quad \text{con } \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

inmediatamente concluimos que la solución es igual salvo que ahora:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_{CM} + Md^2}}$$

Una de las cosas remarcables del péndulo ideal es que su período no depende de la masa. Aquí vemos, que en el caso del péndulo físico, aparentemente sí depende de M . Veremos que en realidad, no depende de la masa, sino de la “forma”. Para ello, definiremos una magnitud llamada *radio de giro* (R_g) como:

$$MR_g^2 = I_{CM} \Rightarrow R_g = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}$$

El radio de giro, es la distancia a la que hay que concentrar toda la masa del CM para tener el mismo momento de inercia del CR . Claramente, dependerá de la “forma” del cuerpo. Por ejemplo:

Para disco homogéneo:

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow R_g = \frac{1}{\sqrt{2}}R. \quad \text{Si } I_{CM} = \frac{MR^2}{4} \Rightarrow R_g = \frac{1}{2}R$$

Para aro homogéneo:

$$I_{CM} = MR^2 \Rightarrow R_g = R. \quad \text{Si } I_{CM} = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow R_g = \frac{1}{\sqrt{2}}R$$

Para una esfera:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow R_g = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$

y así siguiendo. Podemos entonces reescribir ω en función de R_g :

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_{CM} + Md^2}} = \sqrt{\frac{Mgd}{MR_g^2 + Md^2}} = \sqrt{\frac{gd}{R_g^2 + d^2}}$$

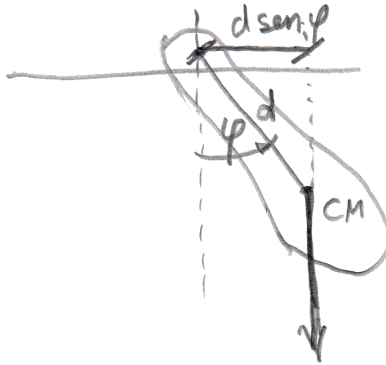
¡y es independiente de la masa!

La ecuación de movimiento que obtuvimos tiene además otra lectura. Escribámosla como

$$(I_{CM} + Md^2) \ddot{\varphi} = -Mgd \text{sen}(\varphi)$$

Sabemos, por otra parte, que el movimiento que hemos descrito como una traslación del CM más una rotación alrededor de este, desde el punto de suspensión o , es una rotación pura (ya que al ser un punto fijo, con velocidad nula, todos los puntos del CR rotan alrededor de o con aceleración angular $\gamma = \ddot{\varphi}$).

Figura 8.30:



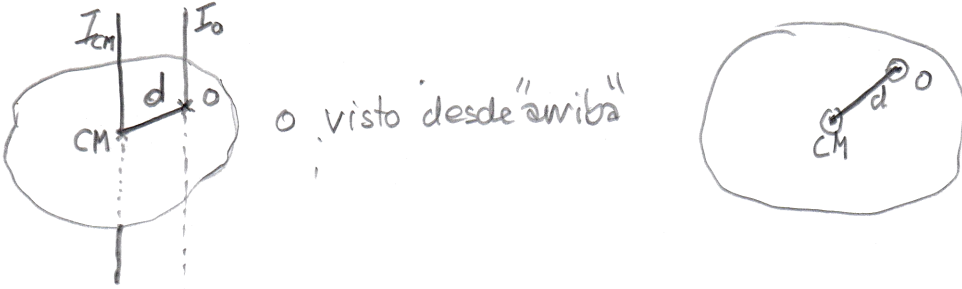
La llamamos $(I_{CM} + Md^2) = I_o$, la ecuación de movimiento resulta:

$$I_o \gamma = -Mgd \text{sen}(\varphi)$$

Pero $-Mgd \text{sen}(\varphi)$ es precisamente el torque del peso respecto de o . Es decir, si definimos el momento de inercia del CR pero que pasa por o como $(I_{CM} + Md^2) = I_o$, podemos plantear el movimiento como una rotación pura (notar que desde o

el torque de \bar{F}_V es nulo). Esto es un caso particular de lo que se conoce como teorema de Steiner. Este teorema relaciona el momento de inercia respecto de un eje principal de inercia de un cuerpo (que pasa por su CM) con otro paralelo a él a una distancia d (que pasa por o).

Figura 8.31:

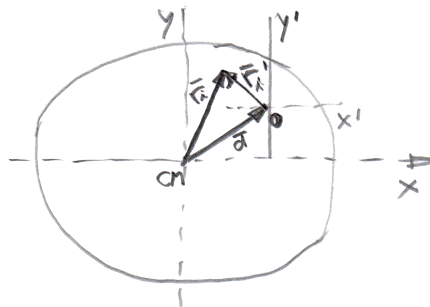


Pensemos el CR formado por un montón de masitas puntuales m_i , cada una en \bar{r}_i , entonces:

$$I_{CM} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_o = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

Figura 8.32:



Se ve en la figura que $(\bar{r} - \bar{d}) = \bar{r}'$. O sea $(x_i - d_x) = x'_i$ e $(y_i - d_y) = y'_i$. Entonces:

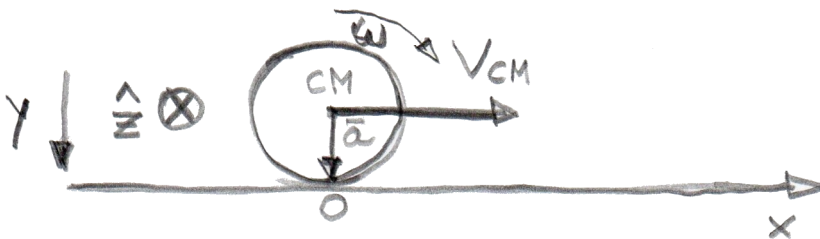
$$\begin{aligned}
 I_o &= \sum m_i (x_i - d_x)^2 + \sum m_i (y_i - d_y)^2 \\
 &= \sum m_i x_i^2 - 2d_x \sum m_i x_i + \sum m_i d_x^2 \\
 &\quad + \sum m_i y_i^2 - 2d_y \sum m_i y_i + \sum m_i d_y^2 \\
 &= \underbrace{\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{I_{CM}} + \underbrace{\sum m_i (d_x^2 + d_y^2)}_{d^2} = I_{CM} + Md^2
 \end{aligned}$$

$\sum m_i x_i$ y $\sum m_i y_i$ se anulan, ya que son las coordenadas x e y de CM medidas, precisamente, desde el CM .

8.7. Rodadura

Además de los puntos fijos, otro vínculo que acopla el movimiento del CM con la rotación alrededor de él, es la rodadura. Consideremos un cilindro de radio a , cuyo centro de masa se traslada con velocidad \vec{V}_{CM} en una dirección (la x supongamos). Además, el cilindro rota alrededor del CM con una velocidad $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. El cilindro se mueve sobre una superficie.

Figura 8.33:



Si utilizamos el campo de velocidades del CR para calcular la velocidad del punto del cilindro que está en contacto con la superficie (punto o), resulta:

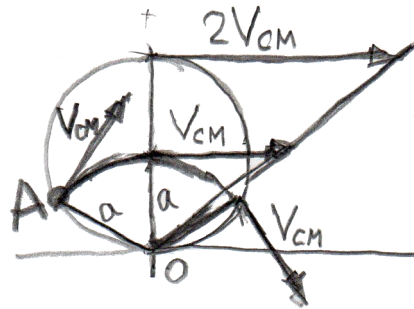
$$\vec{V}_o = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Como $\bar{\omega} = \omega \hat{z}$, $a = a \hat{y}$ y $\bar{V}_{CM} = V_{CM} \hat{x}$, se obtiene:

$$\bar{V}_o = V_{CM} \hat{x} - \omega a \hat{x} = (V_{CM} - \omega a) \hat{x}$$

Si $V_{CM} > \omega a$, el punto o deslizará respecto del piso hacia adelante. Si, en cambio, $V_{CM} < \omega a$, el punto deslizará hacia atrás. ¿Qué ocurre si $V_{CM} = \omega a$? En ese caso, el punto o no deslizará, está en reposo respecto de la superficie. Decimos entonces, que el cilindro “rueda sin deslizar”. Todos los puntos de contacto del cilindro con la superficie, constituyen lo que se conoce como “eje instantáneo de rotación”. En ese instante, todos los puntos del cilindro, están rotando alrededor de ese eje. De hecho, podemos dibujar el campo de velocidades:

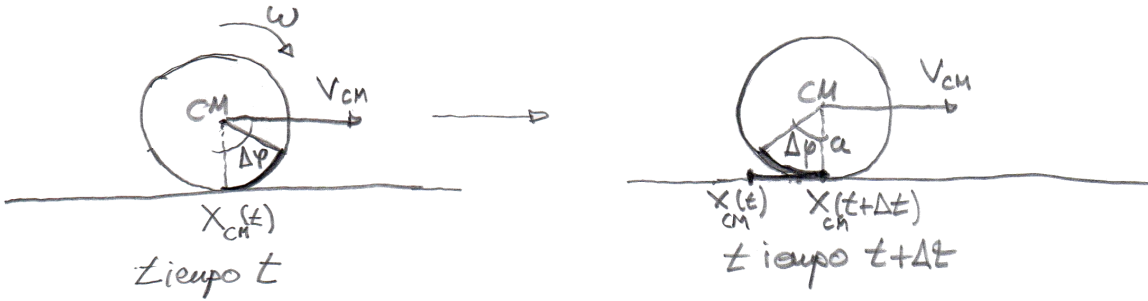
Figura 8.34:



Vistos desde o , el módulo de la velocidad de cada punto es ωd , siendo d la distancia desde o al punto. Su dirección es perpendicular al vector posición desde o al punto, cuyo módulo es precisamente d . Por ejemplo, el módulo de la velocidad del punto A es V_{CM} (igual que el CM), dado que está a la misma distancia de o que el CM , pero apunta en otra dirección. Todos los puntos que están sobre la circunferencia de radio a , trazada desde el centro o , tienen velocidad con ese mismo módulo V_{CM} , pero apuntan en la dirección tangente a la circunferencia. La diferencia entre un punto fijo y el punto de contacto del cilindro cuando este rueda sin deslizar es que el punto fijo está en un eje de rotación “permanente”.

En el caso del punto de contacto, es un “eje instantáneo”. Eso quiere decir que, un instante después, ese punto del cilindro, al dejar de estar en contacto con el piso, dejó de ser parte del eje de rotación y fue reemplazado por otro punto. El vínculo de rodadura puede verse como una relación geométrica:

Figura 8.35:



Lo que avanza el CM , $(x(t + \Delta t) - x(t))$, en un tiempo Δt es la longitud del arco subtendido por el ángulo $\Delta\varphi$ que rota el cilindro en ese tiempo. Luego,

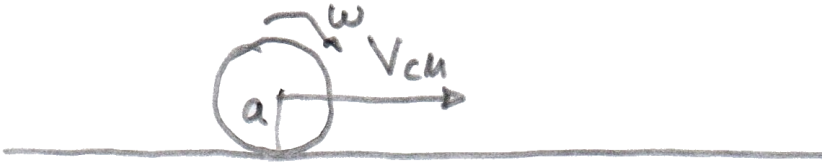
$$\Delta X_{CM} = a\Delta\varphi$$

Si dividimos por Δt , y tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$, resulta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X_{CM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = V_{CM} = a\omega$$

Si hacemos girar el cilindro con cierta ω y lo apoyamos sobre una superficie, dándole al CM una velocidad V_{CM} tal que $V_{CM} = a\omega$, el cilindro rodará sin deslizar sobre la superficie y no se detendrá. Este movimiento será independiente de la existencia de un coeficiente de rozamiento entre la superficie del cilindro y el plano. En efecto, no aparecerá rozamiento dinámico (dado que este rozamiento se opone al deslizamiento, y en rodadura, precisamente, no lo hay) y tampoco estático porque no hay fuerzas externas (recordar que el rozamiento estático se “acomoda” a las fuerzas externas).

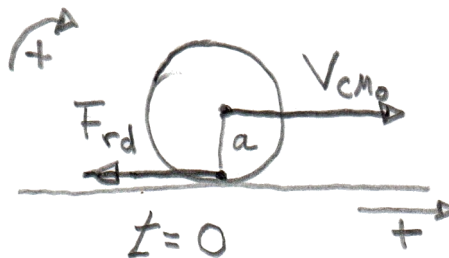
Figura 8.36:



O sea, si $V_{CM} = a\omega$ y no hay fuerzas externas, el cilindro seguirá rodando sin deslizar con $V_{CM} = cte$ y $\omega = cte$. De hecho, va deteniéndose si se mueve en el aire, por ejemplo, por el rozamiento con el medio. La condición de rodadura, $V_{CM} = a\omega$, podría parecer singular (o sea, muy poco usual). Sin embargo, se puede ver que es el movimiento terminal de cualquier cuerpo que pueda rodar (un cilindro, un aro, una esfera, etcétera), cualesquiera sean las condiciones iniciales de V_{CM_0} y ω_0 , si el plano sobre el que se mueve el cuerpo tiene un coeficiente de rozamiento dinámico μ_d .

- Primero, supongamos que lanzamos el cilindro sobre la superficie con $V_{CM} \neq 0$, pero con $\omega = 0$.

Figura 8.37:



En este caso, inicialmente, el punto de contacto desliza hacia adelante respecto de la superficie. Entonces aparece una fuerza de rozamiento dinámico

ca $F_{r_d} = -\mu_d Mg$. Las ecuaciones de movimiento son:

$$MA_{CM} = -\mu_d Mg \quad (\text{traslación})$$

$$I_{CM}\gamma = a\mu_d Mg \quad (\text{rotación})$$

Entonces,

$$A_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} = -\mu_d g \Rightarrow V_{CM} = -\mu_d g t + V_{CM_0}$$

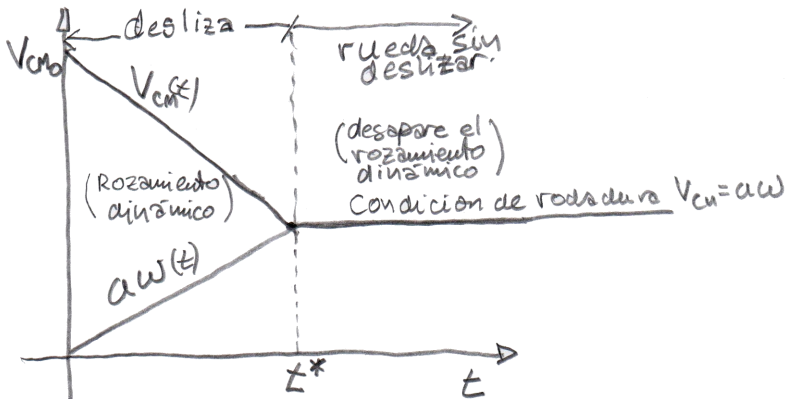
$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a\mu_d Mg}{I_{CM}} t \Rightarrow \omega = \frac{a\mu_d Mg}{I_{CM}} t + \underbrace{\omega_0}_{\omega_0=0}$$

Esta última ecuación la podemos escribir como:

$$a\omega = \frac{a^2\mu_d Mg}{MR_g^2} t = \left(\frac{a}{R_g}\right)^2 \mu_d g t$$

Si graficamos V_{CM} y $a\omega$ vs. t , tendremos:

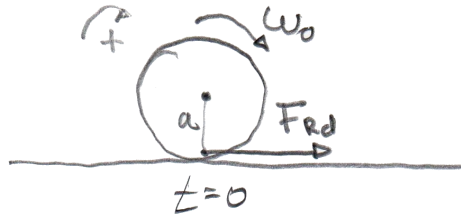
Figura 8.38:



Como $V_{CM} = a\omega$, se llega a la rodadura, F_{r_d} desaparece y el cilindro continúa rodando. El tiempo t^* es el tiempo en el que se alcanza la rodadura (notar que este tiempo dependerá de R_g , es decir, si es un aro, un disco, una esfera, etcétera).

- Otra condición inicial posible sería $V_{CM_o} = 0$ y $\omega_o \neq 0$. En ese caso, el punto de contacto deslizará hacia atrás inicialmente. Entonces tendremos:

Figura 8.39:

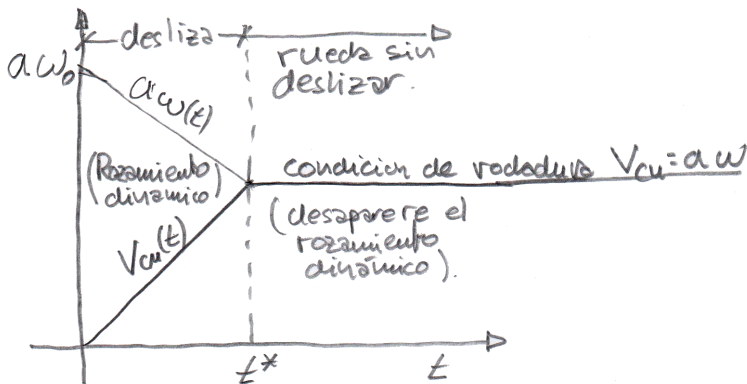


$$MA_{CM} = m\mu_d Mg \quad (\text{traslación})$$

$$I_{CM}\gamma = -a\mu_d Mg \quad (\text{rotación})$$

Entonces, $V_{CM} = \mu_d g t$ y $\omega = -\left(\frac{a}{R_g}\right)^2 \mu_d g t + \omega_o$. En este caso

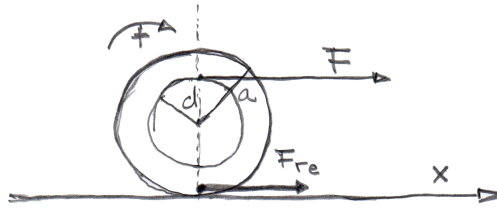
Figura 8.40:



Vemos entonces, que cualquiera sea la condición inicial, si no hay otras fuerzas distintas al rozamiento dinámico, el movimiento terminal es la rodadura.

Veamos qué sucede si hay otras fuerzas externas en presencia de la rodadura. Supongamos ahora que el cilindro tiene una polea de la cual se puede desenrollar un hilo:

Figura 8.41:



En este caso, si hay rodadura, podría aparecer una fuerza de rozamiento estática (cuyo valor máximo, sabemos que es $F_{r_{e_{max}}} = \mu_e Mg$). Las ecuaciones en este caso son:

$$MA_{CM} = F + F_{re} \quad (\text{traslación})$$

$$I_{CM}\gamma = -aF_{re} + dF \quad (\text{rotación})$$

Si se mantiene la rodadura: $A_{CM} = a\gamma$ (dado que si $V_{CM} = a\omega$, derivando respecto del tiempo obtenemos esa condición). Entonces, la ecuación para la rotación se puede poner como:

$$I_{CM} \frac{A_{CM}}{a} = -aF_{re} + dF \Rightarrow A_{CM} = \frac{a}{I_{CM}} (-aF_{re} + dF)$$

y como $A_{CM} = \frac{1}{M} (F_{re} + F)$, resulta que

$$-\frac{a^2 F_{re}}{I_{CM}} + \frac{adF}{I_{CM}} = \frac{F}{M} + \frac{F_{re}}{M} \Rightarrow \frac{adF}{I_{CM}} - \frac{F}{M} = \frac{F_{re}}{M} + \frac{a^2 F_{re}}{I_{CM}}$$

Es decir,

$$\frac{F_{re}}{M} \left(1 + \left(\frac{a}{R_g} \right)^2 \right) = \frac{F}{M} \left(\frac{ad}{R_g^2} - 1 \right)$$

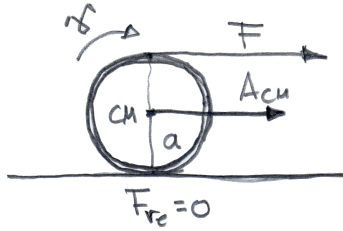
$$F_{re} = \frac{\left(\frac{ad}{R_g^2} - 1\right)}{\left(1 + \left(\frac{a}{R_g}\right)^2\right)} F$$

Si $|F_{re}| < F_{re_{max}} = \mu_e Mg$, el movimiento, acelerado en este caso, será de rodadura. Notemos que el sentido de F_{re} depende del signo de $\left(\frac{ad}{R_g^2} - 1\right)$.

Si $\left(\frac{ad}{R_g^2} - 1\right) > 0$, F_{re} apuntará como está indicado en el gráfico.

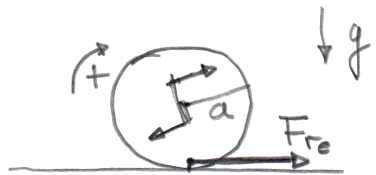
Si $\left(\frac{ad}{R_g^2} - 1\right) < 0$, F_{re} apuntará en sentido contrario. El caso del aro ($R_g = a$), resulta interesante: si $d = 1$ (la fuerza está en el borde del aro), no hace falta el rozamiento estático para mantener la rodadura.

Figura 8.42: Esta es la situación para el aro



Otro caso interesante, es lo que sucede si en lugar de una fuerza externa, sobre el cuerpo hay un par externo τ .

Figura 8.43:



En este caso, las ecuaciones son:

$$MA_{CM} = F_{r_e} \quad (\text{traslación})$$

$$I_{CM}\gamma = \tau - aF_{r_e} \quad (\text{rotación})$$

pero si $A_{CM} = a\gamma \Rightarrow A_{CM} = \frac{a}{I_{CM}}(\tau - aF_{r_e}) \Rightarrow \frac{F_{r_e}}{M} = \frac{a}{I_{CM}}(\tau - aF_{r_e})$

$$\Rightarrow \frac{F_{r_e}}{M} \left(1 + \left(\frac{a}{R_g} \right)^2 \right) = \frac{a\tau}{MR_g^2} \Rightarrow F_{r_e} = \frac{a\tau}{R_g^2 \left(1 + \left(\frac{a}{R_g} \right)^2 \right)}$$

En este caso, F_{r_e} siempre resulta en la dirección del diagrama: el cuerpo se traslada gracias a la fuerza de rozamiento estática. En el caso de las ruedas motrices de bicicletas, motos, etcétera, el “motor” le imprime una cupla a la rueda y es el rozamiento lo que “empuja” el móvil. Por cierto, si la cupla es muy grande, la F_{r_e} necesaria podría superar el valor máximo posible ($\mu_e Mg$) y la rueda “patina”. Es lo que pasa cuando aceleramos demasiado cuando el semáforo se pone en verde.

8.8. Energía del CR

Como todo sistema formado por muchas partículas, la energía cinética resulta, la suma de las energías cinéticas de las partículas que lo componen. Es decir, la energía total de un sistema con N cuerpos es:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Como ya vimos, la velocidad de cada cuerpo puede escribirse como

$$\bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{V}_{CM}$$

donde \bar{V}_{CM} es la velocidad del centro de masa y \bar{V}'_i es la velocidad del cuerpo i -ésimo respecto del CM . Entonces:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 + V_{CM} \sum_{i=1}^N \underbrace{m_i v'_i}_0 \\ &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + T_{INT} \end{aligned}$$

Es decir, T es la suma de dos contribuciones. $\frac{1}{2} M V_{CM}^2$ es la energía cinética del CM , mientras $T_{INT} = \sum m_i v_i'^2$, es la energía cinética asociada al movimiento de los cuerpos alrededor del CM (habitualmente conocida como energía cinética interna). Esta expresión, aplicada al cuerpo rígido, tiene una forma particular. En efecto, como

$$\bar{v}_i = \bar{V}_{CM} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_i$$

resulta que $\bar{v}'_i = \bar{\omega} \times \bar{r}'_i$ (recordemos que en un CR , el único movimiento posible de todos los puntos respecto del CM es una rotación) y entonces:

$$T = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)^2$$

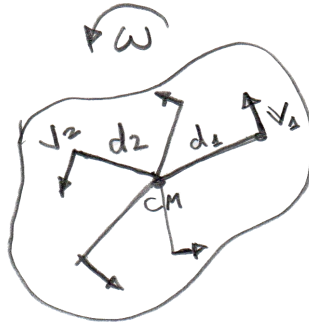
Esta última energía interna, como corresponde a la rotación de los puntos alrededor del CM , se la llama *energía cinética de rotación*. Para un movimiento general del CR , esta energía se puede escribir como:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z)$$

Para llegar a esta expresión hay que seguir los mismos pasos que llevan a $\bar{L}_s = I\bar{\omega}$, como ya lo hicimos anteriormente. Esta energía cinética de rotación, se simplifica mucho para el caso de “rotaciones planas”. En efecto, en ese caso:

$$|v'_i| = d_i|\omega|$$

Figura 8.44:



Entonces,

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \omega^2$$

y como $\sum_{i=1}^N m_i d_i^2 = I_{CM}$

(en su versión continua $I_{CM} = \int_V \rho(\vec{r}) d^2(\vec{r}) dV$), resulta

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{T_{tras}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}_{T_{rot}}$$

donde T_{tras} es la *energía cinética de traslación* y T_{rot} es la *energía cinética de rotación*.

8.8.1. Teorema de las fuerzas vivas para el CR

Como vimos, para el caso de “rotaciones planas”

$$\underbrace{M \bar{A}_{CM} = \bar{F}}_{\text{(traslación del CM)}} \quad \text{y} \quad \underbrace{I_{CM} \gamma = \tau}_{\text{(rotación alrededor del CM)}}$$

Entonces, escribimos las ecuaciones de traslación del CM en coordenadas intrínsecas. Resulta, para la dirección tangencial:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_{CM}}{dt} &= M \frac{dV_{CM}}{ds} \frac{ds}{dt} = F_t \Rightarrow \\
 MV_{CM} dV_{CM} &= F_t ds = \bar{F}_t \cdot \bar{ds} \Rightarrow \\
 \int_{V_{CM_o}}^{V_{CM}} MV_{CM} dV_{CM} &= \int_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} \bar{F}_t \cdot \bar{ds} = W_F \Big|_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} \\
 \frac{1}{2} MV_{CM}^2 - \frac{1}{2} MV_{CM_o}^2 &= W_F \Big|_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} = \Delta T_{tras}
 \end{aligned}$$

O sea, al igual que sucede con una partícula, la variación de la energía cinética de traslación, entre dos posiciones, es igual al trabajo que realizan las fuerzas externas.

Por otra parte, para la rotación:

$$\begin{aligned}
 I_{CM} \frac{d\omega}{dt} &= I_{CM} \frac{d\omega}{d\varphi} \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega} = \tau \Rightarrow \\
 I_{CM} \omega d\omega &= \tau d\varphi \Rightarrow \int_{\omega_o}^{\omega} I_{CM} \omega d\omega = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \tau d\varphi \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 - \frac{1}{2} I_{CM} \omega_o^2 &= W_\tau \Big|_{\varphi_o}^{\varphi} \Rightarrow \Delta T_{rot} = W_\tau \Big|_{\varphi_o}^{\varphi}
 \end{aligned}$$

donde $\int_{\varphi_o}^{\varphi} \tau d\varphi$, es el trabajo que realiza la cupla. En suma, mostramos que:

$$\Delta T = \Delta (T_{tras} + T_{rot}) = W_F \Big|_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} + W_\tau \Big|_{\varphi_o}^{\varphi}$$

Del mismo modo que ocurre para el caso de una partícula, existen fuerzas que tienen la propiedad de que su trabajo entre dos posiciones del CM , solo depende de estas dos posiciones. Estas son las fuerzas conservativas. En ese caso:

$$W_F \Big|_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} = \int_{\bar{R}_{CM_o}}^{\bar{R}_{CM}} \bar{F} \cdot d\bar{R}_{CM} = - (V(\bar{R}_{CM}) - V(\bar{R}_{CM_o}))$$

Con $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{R}_{CM})$. En problemas de CR en que el CM se mueve en una dimensión (digamos la x , por ejemplo), resulta:

$$W_F \Big|_{X_{CMo}}^{X_{CM}} = \int_{X_{CMo}}^{X_{CM}} F \cdot X_{CM} = -(V(X_{CM}) - V(X_{CMo})) = -\Delta V \Big|_{X_{CMo}}^{X_{CM}}$$

con $F = -\frac{dV(X_{CM})}{dX_{CM}}$.

Si todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas y no hay cuplas que realicen trabajo, entonces, como $W_F \Big|_{X_{CMo}}^{X_{CM}} = -\Delta V \Big|_{X_{CMo}}^{X_{CM}}$, resulta:

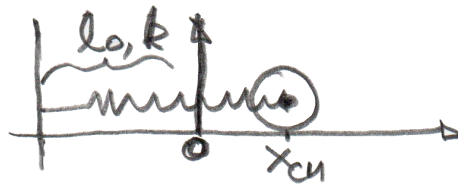
$$\Delta T = -\Delta V \Rightarrow \Delta \underbrace{(T + V)}_E = 0$$

En ese caso, $E = T + V = T_{tras} + T_{rot} + V$ y la *energía mecánica total del CR*, se conserva.

8.8.2. Ejemplos de fuerzas conservativas

1. Fuerza elástica.

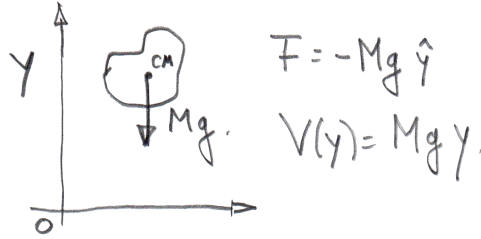
Figura 8.45:



$$\vec{F} = -k\vec{X}_{CM} \quad \text{y} \quad V(X_{CM}) = \frac{1}{2}kX_{CM}$$

2. Fuerza peso.

Figura 8.46:



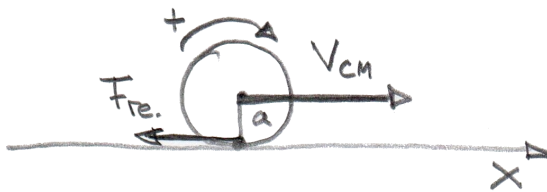
$$\vec{F} = -Mg\hat{y} \quad \text{y} \quad V(y) = Mgy$$

8.8.3. Ejemplos de fuerzas no conservativas

1. Rozamiento dinámico
2. Fuerza de rozamiento estática.

El caso del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento estático, en condiciones de rodadura, resulta interesante. Consideremos un *CR* en condiciones de rodadura.

Figura 8.47:



Cuando el *CR* se traslada un dX_{CM} , el trabajo que realiza el rozamiento en la traslación es:

$$\delta W_F = -F_{re} dX_{CM}$$

y el trabajo que realiza la cupla del rozamiento es:

$$\delta W_\tau = \tau d\varphi$$

pero si rueda sin deslizar:

$$ad\varphi = dX_{CM} \Rightarrow \delta W_F + \delta W_\tau = -F_{re}dX_{CM} + F_{re}dX_{CM} = 0$$

Es decir, *en rodadura, la fuerza de rozamiento estática, si bien es no conservativa, no realiza trabajo*. El trabajo que realiza en la traslación es de signo opuesto al correspondiente a la rotación. En otras palabras:

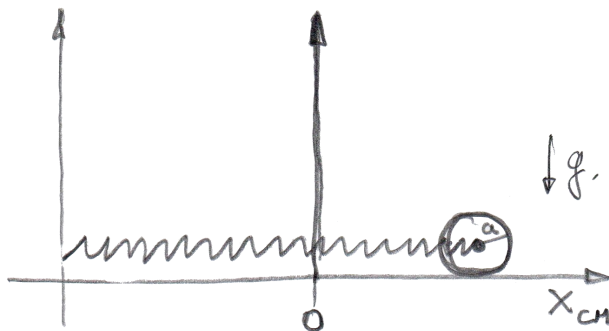
$$\Delta T = \Delta (T_{tras} + T_{rot}) = 0$$

pero como $\Delta T_{tras} \neq 0$ y $T_{rot} \neq 0$, lo que sucede es que hay conversión entre la energía cinética de traslación a la de rotación, o al revés.

8.8.4. Análisis de ejemplos varios

- Tenemos un cilindro de radio a ($I_{CM} = \frac{Ma^2}{2}$), cuyo CM está sujeto a un resorte. El otro extremo del resorte, está sujeto a una pared. ¿Cuál es la máxima velocidad que podrá alcanzar el CM del cilindro sin que el cilindro deslice? El coeficiente estático entre la superficie y el cilindro es μ_e .

Figura 8.48:



La única fuerza que realiza trabajo es la elástica (recordemos que la fuerza de rozamiento estático no realiza trabajo neto en la rodadura). Entonces, la energía mecánica se conserva:

$$E = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}kX_{CM}^2$$

Si estamos en rodadura, $V_{CM} = a\omega$, entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}kX_{CM}^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{a^2}\omega^2 + \frac{1}{2}kX_{CM}^2 \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right)}_{M'}V_{CM}^2 + \frac{1}{2}kX_{CM}^2 \end{aligned}$$

Aquí vemos que el efecto de la rodadura puede pensarse como un “cambio” en la masa del sistema. La energía mecánica que obtuvimos, es la equivalente a la de un oscilador armónico puntual (una partícula, no un CR) de masa $M' = \left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right)$.

Esto quiere decir que la solución para $X_{CM}(t)$, será:

$$X_{CM}(t) = A \cos(\omega_o t + \alpha), \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{M'}}$$

entonces

$$V_{CM}(x) = -A\omega_o \text{sen}(\omega_o t + \alpha) \quad , \quad A_{CM}(x) = -A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \alpha)$$

Notemos aquí, que la amplitud A la podemos poner como X_{max} , o sea, el punto de estiramiento máximo del resorte. Por otra parte, en $\pm X_{CM}$, la energía es toda potencial, y el módulo de la aceleración resulta máxima:

$$|A_{max}| = X_{max} \frac{k}{\left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right)}$$

En esos puntos, por el vínculo de rodadura:

$$|A_{max}| = a|\gamma_{max}|$$

y además, sabemos que:

$$I_{CM}|\gamma| = aF_{r_e}$$

O sea, en esos puntos:

$$I_{CM}|\gamma_{max}| = aF_{r_e}^* a$$

donde $F_{r_e}^*$, es la máxima fuerza de rozamiento estática para garantizar la rodadura, y debe ser:

$$F_{r_e}^* = \frac{I_{CM}|\gamma_{max}|}{a} \leq F_{r_{e_{max}}} = \mu_e Mg$$

O sea,

$$\frac{I_{CM}}{a^2} \frac{X_{max} k}{\left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right)} \leq \mu_e Mg \Rightarrow$$

$$X_{max} \leq \frac{\mu_e Mg (a^2 M + I_{CM})}{k I_{CM}} = \frac{\mu_e Mg}{k} \left(1 + \frac{Ma^2}{I_{CM}}\right)$$

Este es el máximo valor que puede tomar X_{max} , de modo que todo el movimiento sea con rodadura. Esto corresponde a una energía mecánica máxima.

$$E = \frac{1}{2} k \left[\frac{\mu_e Mg}{k} \left(1 + \frac{Ma^2}{I_{CM}}\right) \right]^2$$

Aquí toda la energía potencial es $E = \frac{1}{2} k X_{max}^2$. Esta energía, cuando pasa por $X_{CM} = 0$, se convierte todo en energía cinética:

$$\frac{1}{2} M' V_{max}^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right) V_{max}^2$$

o sea,

$$\frac{1}{2} \left(M + \frac{I_{CM}}{a^2}\right) V_{max}^2 = \frac{1}{2} k \left[\frac{\mu_e Mg}{k} \left(1 + \frac{Ma^2}{I_{CM}}\right) \right]^2 \Rightarrow$$

$$V_{max}^2 = \frac{\mu_e^2 M^2 g^2 (I_{CM} + Ma^2)^2}{k I_{CM}^2} \frac{a^2}{(I_{CM} + Ma^2)}$$

$$V_{max}^2 = \frac{\mu_e^2 M^2 g^2 a^2 (I_{CM} + Ma^2)}{k I_{CM}}$$

$$\Rightarrow V_{max} = \mu_e M g a \sqrt{\frac{I_{CM} + Ma^2}{k I_{CM}}}$$

Todavía no especificamos que se trata de un cilindro $\left(I_{CM} = \frac{Ma^2}{2} \right)$. Si en lugar de reemplazar por un I_{CM} específico, lo hacemos en términos del radio de giro $(I_{CM} = MR_g^2)$, obtendremos:

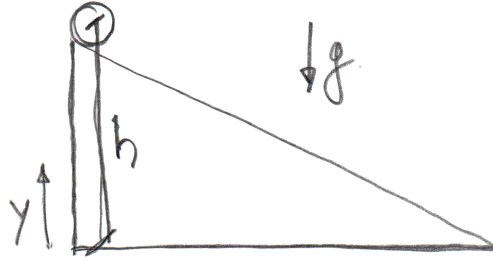
$$V_{max} = \frac{\mu_e M g a}{MR_g^2} \sqrt{\frac{M}{k}} \sqrt{R_g^2 + a^2} = \mu_e g \left(\frac{a}{R_g} \right) \sqrt{\frac{M}{k}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{R_g} \right)^2}$$

Vemos aquí que la velocidad resultará mayor cuanto menor sea el radio de giro. O sea, entre una esfera, un cilindro y un aro (de igual radio a y masa M), tenemos:

$$V_{max}^{(esfera)} > V_{max}^{(cilindro)} > V_{max}^{(aro)}$$

- Tenemos una esfera, un cilindro y un aro, todos ellos de igual masa M y radio a , a una misma altura sobre un plano inclinado. El rozamiento estático garantiza que los tres cuerpos lleguen al final del plano rodando sin deslizar. Si los soltamos juntos, ¿llegarán a la base juntos? Si no es así, ¿en qué orden llegan?

Figura 8.49:



La energía mecánica se conserva (la única fuerza que realiza trabajo es el peso), entonces, la energía inicial de todos ellos es potencial:

$$E = Mgh = T_{tras} + T_{rot} + Mgy$$

$$= \frac{1}{2}V_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + Mgy$$

y como rueda sin deslizar: $V_{CM} = a\omega$, entonces:

$$E = Mgh = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_{CM}}{a^2} \right) V_{CM}^2 + Mgy \Rightarrow$$

$$V_{CM}^2(y) = \frac{2Mg(h-y)a^2}{Ma^2 + I_{CM}} = \frac{2Mg(h-y)a^2}{\mathcal{M}(a^2 + R_g^2)} \Rightarrow$$

$$V_{CM}(y) = \frac{\sqrt{2g(h-y)}a}{\sqrt{a^2 + R_g^2}}$$

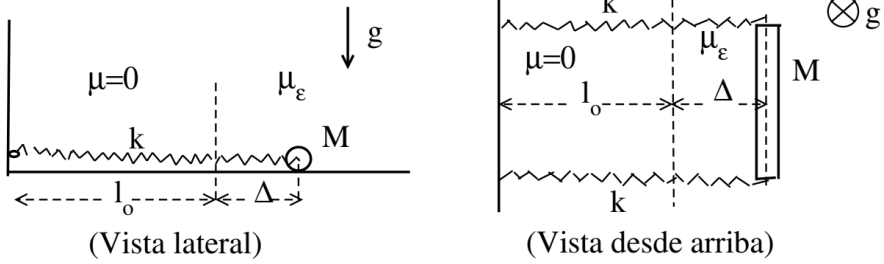
Notar que la velocidad es en función de la altura y no depende de la masa M , sino de la forma del cuerpo (R_g). Vemos aquí, que a igual altura y , la velocidad del cuerpo de menor radio de giro es mayor. Por consiguiente, la carrera la gana la esfera, segundo cae el cilindro y el aro queda cola.

8.9. Ejercicios resueltos del capítulo

PROBLEMA 1: El eje que pasa por el centro de masa de un cilindro homogéneo de masa M y radio a está unido a dos resortes idénticos de constante k y longitud natural l_0 cada uno (ver Fig (8.50)). Los otros extremos de los resortes están unidos a una pared. La superficie sobre la que se mueve el cilindro es tal que hasta una distancia l_0 de la pared es lisa (no hay rozamiento), mientras que a una distancia mayor es áspera y tiene un coeficiente de rozamiento μ_e . Inicialmente se separa el cilindro de modo tal que los resortes se estiran, cada uno, una distancia Δ y se suelta desde el reposo.

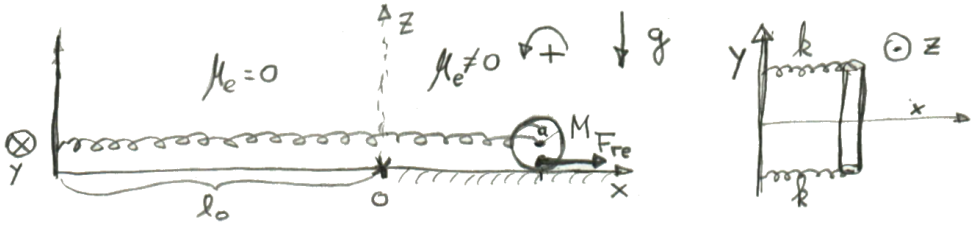
- ¿Cuál será el máximo estiramiento Δ_{max} tal que el cilindro rueda sin deslizar en la parte rugosa?
- Suponiendo que el estiramiento inicial resulta menor que el determinado en el punto anterior, hallar el tiempo que tarda el cilindro en llegar a la compresión máxima de los resortes.
- Hallar X_{CM} (centro de masa del cilindro) en función del tiempo desde que se lo suelta hasta llegar a la compresión máxima. Hacer un gráfico para la posición del centro de masa entre esos dos tiempos.
- ¿Cómo cambia el resultado del primer ítem si en lugar de un cilindro macizo de radio a tenemos un cilindro de igual masa M pero hueco, de radio exterior a e interior b de igual masa M unido al eje por medio de rayos de masa despreciable (como las bicicletas)?

Figura 8.50: Problema 1



RESOLUCIÓN:

Figura 8.51:



a)

Para $x > 0$

$$M\ddot{X}_{CM} = -2kX_{CM} + F_{re} \quad (8.4)$$

$$I\gamma = aF_{re} \quad (8.5)$$

La condición de rodadura es:

$$\dot{X}_{CM} = -\omega a \quad (8.6)$$

Entonces, de la Ec. (8.6):

$$\ddot{X}_{CM} = -\gamma a \Rightarrow \gamma = -\frac{\ddot{X}_{CM}}{a}$$

y reemplazando esto en (8.5), obtenemos:

$$F_{re} = -\frac{I\ddot{X}_{CM}}{a^2}\omega a \quad (8.7)$$

Reemplazando en (8.6), obtenemos $M\ddot{X}_{CM} = -2kX_{CM} - \frac{I\ddot{X}_{CM}}{a^2}$, o sea:

$$\left(M + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{X}_{CM} + 2kX_{CM} = 0$$

o también:

$$\ddot{X}_{CM} + \omega_o^2 X_{CM} = 0, \text{ con } \omega_o = \sqrt{\frac{2k}{\left(M + \frac{I}{a^2}\right)}} = \sqrt{\frac{4k}{3M}}$$

Para que ruede sin deslizar debería ser (por Ec. (8.7):

$$F_{re} = -\frac{I}{a^2} (\ddot{X}_{CM}) \leq \mu_e Mg$$

Ahora bien, $(\ddot{X}_{CM}) = -\omega_o^2 (\Delta)_{max}$, entonces:

$$\frac{1}{2}M \frac{4k}{3M} \Delta X_{max} \leq \mu_e Mg \Rightarrow$$

$$\Delta X_{max} \leq \frac{3}{2} \mu_e \frac{Mg}{k}, \text{ o sea, } \Rightarrow$$

$$\Delta_{max} = \frac{3}{2} \mu_e \frac{Mg}{k}$$

Para $x \leq 0$

$M\ddot{X}_{CM} = -2kX_{CM}$, reacomodando, tenemos:

$$\ddot{X}_{CM} + (\omega'_o) X_{CM} = 0, \text{ donde } \omega'_o = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

- b) Luego, el tiempo que transcurre entre el máximo estiramiento ($X_{CM} = \Delta$) y la máxima compresión es:

$$t = \frac{1}{4}\tau_1 + \frac{1}{4}\tau_2$$

donde $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{4K}}$ y $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega'_o} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$, es decir

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{2K}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}} + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{4M}{2K}} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{3M}{K}} + \sqrt{\frac{2M}{K}}\right) \end{aligned}$$

c)

La solución para $X_{CM} > 0$ es:

$$X_{CM}(t) = \Delta \cos(\omega_o t)$$

$$\dot{X}_{CM}(t) = -\omega_o \Delta \text{sen}(\omega_o t)$$

Esto es válido para $0 \leq t < \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}}$.

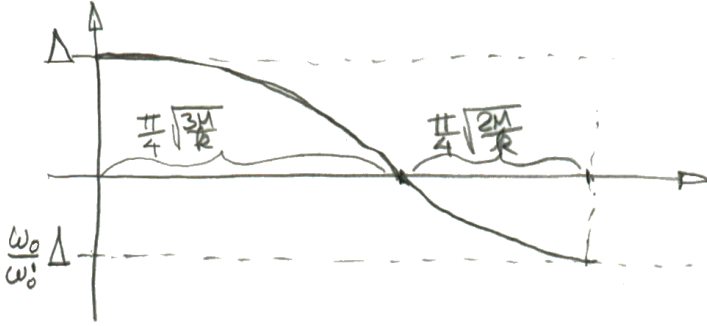
La solución para $X_{CM} \leq 0$ es:

$$X_{CM}(t) = -\frac{\omega_o \Delta}{\omega'_o} \text{sen}\left(\omega'_o \left(t - \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}}\right)\right)$$

$$\dot{X}_{CM}(t) = -\omega_o \Delta \cos\left(\omega'_o \left(t - \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}}\right)\right)$$

Esto es válido para $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3M}{K}} < t \leq \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{3M}{K}} + \sqrt{\frac{2M}{K}}\right)$. Es decir

Figura 8.52:



Notar que $\frac{\omega_o}{\omega'_o} < 1$ por lo tanto la compresión máxima es menor que el estiramiento máximo.

d) Primero, cambia ω_o , como $\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{\left(M + \frac{I}{a^2}\right)}}$ y $I = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$.

resulta $\omega_o = \sqrt{\frac{4k}{M\left(3 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}}$. Además $\frac{I}{a^2} = \frac{1}{2}M\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$.

entonces:

$$\frac{1}{2}M\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \frac{4k}{M\left(3 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} \Delta X_{max} \leq \mu_e Mg$$

$$\Delta X_{max} \leq \frac{\left(3 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \mu_e Mg}{2\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) k}$$

Lo que implica:

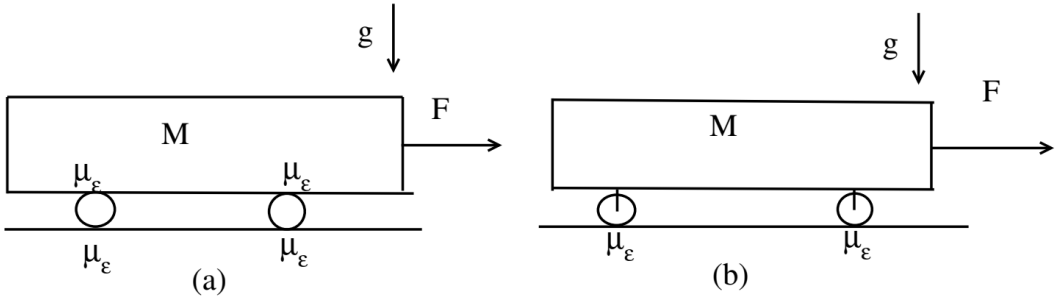
$$\Delta_{max} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} \frac{\mu_e Mg}{k}$$

y como $\frac{\left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} < 1$, si $b \neq 0$, vemos que Δ_{max} menor que para el cilindro macizo.

PROBLEMA 2: Se desea trasladar un contenedor de masa M aplicando una fuerza F tal como muestra la Fig. (8.53). Para ello se dispone de dos cilindros idénticos de radio a . Los cilindros se pueden disponer de dos formas. La forma (a) es utilizarlos como rodillos, es decir apoyar el contenedor sobre ellos de modo que la superficie de los cilindros quede en contacto con la superficie y el contenedor. La forma (b) es utilizarlos como ruedas, es decir, los cilindros están fijos a ejes solidarios al contenedor, pero no en contacto con la superficie de este. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies vale lo mismo (μ_e). Considerando que en ambas disposiciones los cilindros ruedan sin deslizar en ninguna superficie de contacto, determinar:

- a) La aceleración del CM del contenedor y de los rodillos y las aceleraciones angulares de estos últimos para cada disposición ((a) y (b)).
- b) ¿Cuál será la máxima fuerza aplicable en cada caso, tal que los cilindros no deslicen, y cuál será la aceleración del contenedor en esos casos límite?

Figura 8.53: Problema 2

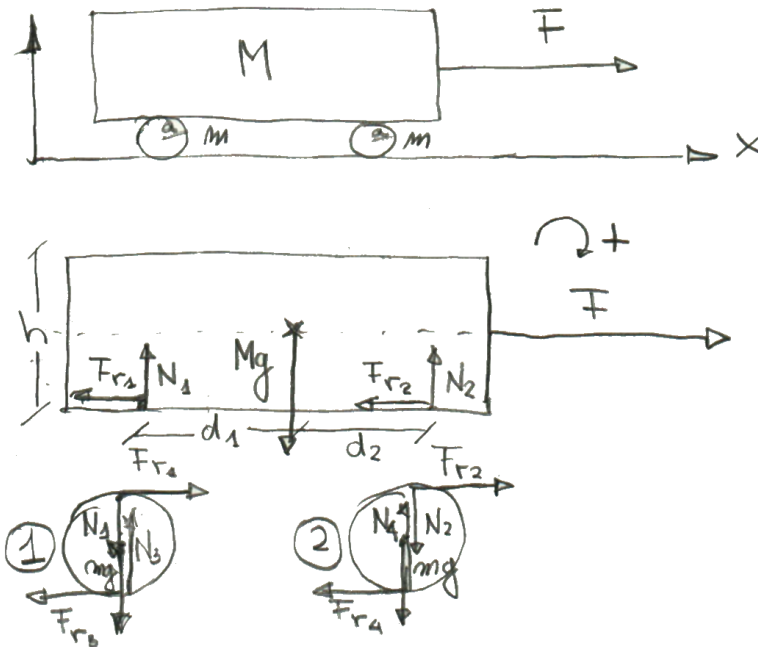


RESOLUCIÓN:

a) Para la configuración de “rodillos” (a).

El diagrama de cuerpo libre es

Figura 8.54:



Para la traslación del CM del contenedor, entonces:

$$MA_{CM}^{(c)} = F - F_{r_2} - F_{r_1} \quad (\text{según } x) \quad (8.8)$$

$$0 = -Mg + N_1 + N_2 \quad (\text{según } y)$$

Para la rotación del contenedor:

$$0 = (F_{r_2} + F_{r_1}) \frac{h}{2} + N_1 d_1 - N_2 d_2$$

Para la traslación del CM del rodillo 1 ,entonces:

$$MA_{CM}^{(R_1)} = F_{r_1} - F_{r_3} \quad (\text{según } x) \quad (8.9)$$

$$0 = -mg - N_1 + N_3 \quad (\text{según } y)$$

Para la rotación del rodillo 1:

$$I_R \gamma_1 = (F_{r_1} + F_{r_3}) a \quad (8.10)$$

Para la traslación del CM del rodillo 2:

$$MA_{CM}^{(R_2)} = F_{r_2} - F_{r_4} \quad (\text{según } x) \quad (8.11)$$

$$0 = -mg - N_2 + N_4 \quad (\text{según } y)$$

Para la rotación del rodillo 2:

$$I_R \gamma_2 = (F_{r_2} + F_{r_4}) a \quad (8.12)$$

A estas ecuaciones hay que agregarles las correspondientes a los vínculos de rodadura:

$$A_{CM}^{(R_1)} = a\gamma_1 \quad (8.13)$$

$$A_{CM}^{(R_2)} = a\gamma_2 \quad (8.14)$$

y además:

$$A_{CM}^{(c)} = 2a\gamma_1 \quad (8.15)$$

$$A_{CM}^{(c)} = 2a\gamma_2 \quad (8.16)$$

Estas dos últimas ecuaciones expresan el hecho de que los puntos de contacto de los rodillos con el contenedor no deslizan respecto de este. Es decir, se mueven con una velocidad igual a la del CM del contenedor.

Combinando la Ec. (8.13) con la Ec. (8.15) y la Ec. (8.14) con la Ec. (8.16), obtenemos $A_{CM}^{(c)} = 2A_{CM}^{(R_1)} = 2A_{CM}^{(R_2)}$, y $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$.

Entonces, considerando que $I_R = \frac{ma^2}{2}$, utilizamos las Ec. (8.8), (8.9), (8.10), (8.11) y (8.12) que se pueden escribir, utilizando las ecuaciones de vínculo como:

$$\left\{ \begin{array}{l} MA_{CM}^{(c)} = F - F_{r_2} - F_{r_1} \\ \frac{m}{2}A_{CM}^{(c)} = F_{r_1} - F_{r_3} \\ \frac{m}{4}A_{CM}^{(c)} = F_{r_1} + F_{r_3} \\ \frac{m}{2}A_{CM}^{(c)} = F_{r_2} - F_{r_4} \\ \frac{m}{4}A_{CM}^{(c)} = F_{r_2} + F_{r_4} \end{array} \right. \quad (8.17)$$

Estas cinco ecuaciones con cinco incógnitas ($A_{CM}^{(c)}$, F_{r_1} , F_{r_2} , F_{r_3} y F_{r_4}) resuelven el problema. Multiplicamos miembro a miembro la primera ecuación por dos y le sumamos las otras cuatro. Así, obtenemos:

$$\left(2M + \frac{3m}{2}\right) A_{CM}^{(c)} = 2F \Rightarrow A_{CM}^{(c)} = \frac{2F}{\left(2M + \frac{3m}{2}\right)}$$

y como

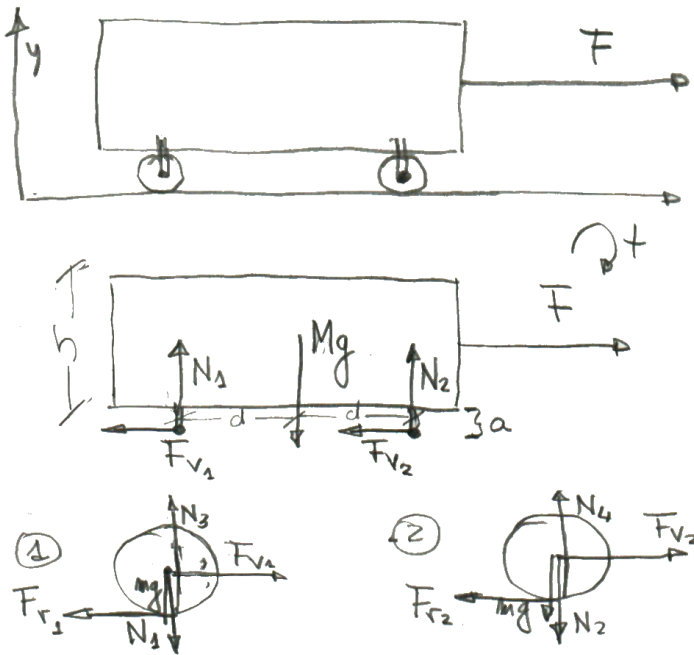
$$A_{CM}^{(R_1)} = A_{CM}^{(R_2)} = \frac{A_{CM}^{(c)}}{2} \Rightarrow$$

$$A_{CM}^{(R_1)} = A_{CM}^{(R_2)} = \frac{F}{\left(2M + \frac{3m}{2}\right)} \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma = \frac{F}{a \left(2M + \frac{3m}{2}\right)}$$

b) Para la configuración de "rodillos" (b)

El diagrama de cuerpo libre es:

Figura 8.55:



Ahora, para el contenedor:

$$MA_{CM}^{(c)} = F - F_{v_2} - F_{v_1} \quad (\text{según } x)$$

$$0 = -Mg + N_1 + N_2 \quad (\text{según } y)$$

$$MA_{CM}^{(c)} = (F_{v_1} + F_{v_2}) \left(\frac{h}{2} + a \right) + (N_1 - N_2) d \quad (\text{rotación})$$

para 1:

$$MA_{CM}^{(R_1)} = F_{v_1} - F_{r_1} \quad (\text{según } x)$$

$$0 = -mg - N_1 + N_3 \quad (\text{según } y)$$

$$I_R \gamma_1 = F_{r_1} a \quad (\text{rotación})$$

para 2:

$$MA_{CM}^{(R_2)} = F_{v_2} - F_{r_2} \quad (\text{según } x)$$

$$0 = -mg - N_2 + N_4 \quad (\text{según } y)$$

$$I_R \gamma_2 = F_{r_2} a \quad (\text{rotación})$$

Las ecuaciones de vínculo correspondientes a la rodadura son:

$$A_{CM}^{(R_1)} = a\gamma_1, \quad A_{CM}^{(R_2)} = a\gamma_2$$

A lo que hay que agregar que como las ruedas están unidas al contenedor por el eje. Entonces,

$$A_{CM}^{(R_1)} = A_{CM}^{(R_2)} = A_{CM}^{(c)}$$

y por lo tanto obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} MA_{CM}^{(c)} = F - F_{v_1} - F_{v_2} \\ mA_{CM}^{(c)} = F_{v_1} - F_{r_1} \\ \frac{m}{2} A_{CM}^{(c)} = F_{r_1} \\ mA_{CM}^{(c)} = F_{v_2} - F_{r_2} \\ \frac{m}{2} A_{CM}^{(c)} = F_{r_2} \end{array} \right.$$

Sumamos las cinco ecuaciones miembro a miembro y obtenemos:

$$(M + 3m) A_{CM}^{(c)} = F \Rightarrow A_{CM}^{(c)} = \frac{F}{(M + 3m)}$$

y como

$$A_{CM}^{(R_1)} = A_{CM}^{(R_2)} = A_{CM}^{(c)} \Rightarrow$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma = \frac{F}{a(M + 3m)}$$

c) Para los “rodillos”.

Primero encontramos las fuerzas de rozamiento a partir del sistema de ecuaciones (8.17) De allí obtenemos:

$$F_{r_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3m}{4} \right) A_{CM}^{(c)} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3m}{4} \right) F}{\left(M + \frac{3m}{4} \right)}$$

$$F_{r_3} = -\frac{m}{8} A_{CM}^{(c)} = -\frac{m}{8} \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4} \right)}$$

$$F_{r_2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3m}{4} \right) F}{\left(M + \frac{3m}{4} \right)}$$

$$F_{r_4} = -\frac{m}{8} \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4} \right)}$$

Aquí se ve, entonces, que debe suceder:

$$F_{r_1} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3m}{4} \right) F}{\left(M + \frac{3m}{4} \right)} \leq F_{r_{1max}} = \mu_e N_1$$

$$F_{r_2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3m}{4}\right) F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \leq F_{r_{2max}} = \mu_e N_2$$

N_1 y N_2 salen de:

$$N_1 + N_2 = Mg$$

$$N_1 d_1 - N_2 d_2 = - (F_{r_1} + F_{r_2}) \left(\frac{h}{2}\right) - \left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \left(\frac{h}{2}\right)$$

d_1 y d_2 cambian con el tiempo, ya que el *CM* de los cilindros es más lento que el *CM* del contenedor. Asumimos que $d_1 = d_2 \equiv d$ inicialmente y hacemos el cálculo con ese valor, entonces:

$$N_1 = \frac{1}{2} \left[Mg - \left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \left(\frac{h}{2d}\right) \right]$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left[Mg + \left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \left(\frac{h}{2d}\right) \right]$$

o sea, debe ser:

$$\left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \leq Mg - \left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \left(\frac{h}{2d}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3m}{4}\right) \frac{F}{\left(M + \frac{3m}{4}\right)} \left(1 + \frac{h}{2d}\right) \leq Mg \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{Mg \left(M + \frac{3m}{4}\right)}{\left(\frac{3m}{4}\right) \left(1 + \frac{h}{2d}\right)} \quad (\text{de la condición de } F_{r_1})$$

y

$$F \leq \frac{Mg \left(M + \frac{3m}{4} \right)}{\left(\frac{3m}{4} \right) \left(1 - \frac{h}{2d} \right)} \quad (\text{de la condición de } F_{r_2})$$

Es claro que para $\frac{h}{2d} < 1$, la condición es:

$$F \leq \frac{Mg \left(M + \frac{3m}{4} \right)}{\left(\frac{3m}{4} \right) \left(1 + \frac{h}{2d} \right)}$$

Para el caso de las rueditas hay que hacer algo análogo solo que allí $d_1 = d_2 \equiv d$ para todo t .

Y..... FIN
(Aplauso, Medalla y beso)

Apéndice A

Resumen de números complejos

En este apéndice haremos un resumen de algunos conceptos básicos de números complejos.

A.1. Unidad imaginaria

La unidad imaginaria i es una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Como sabemos, no existe un número real que sea solución de esa ecuación.

La unidad imaginaria verifica que:

$$i^2 = -1.$$

Incorporar esta unidad nos permite extender al cuerpo de los números reales y, de esta manera, por ejemplo, los polinomios de grado n tienen n raíces.

A.2. Definición

Se llama número complejo a toda expresión de la forma $z = a + b \cdot i$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Al valor a se lo llama parte real del número complejo y se lo denota $Re(z) = a$. En cambio, al valor b se lo denomina parte imaginaria y se escribe como $Im(z) = b$.

A la expresión $z = a + bi$ (por comodidad se omite el \cdot) se la llama *forma binómica* del número complejo.

Si $a = 0$, queda $0 + bi = bi$, que es un número imaginario puro.

Si $b = 0$, queda $a + 0i = a$, que es un número real.

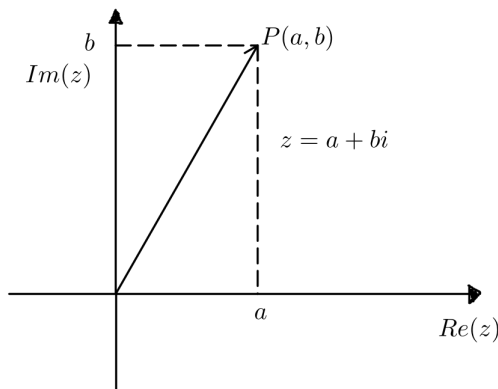
Un número complejo es igual a cero si $a = 0$ y $b = 0$.

Diremos que dos números complejos son iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales.

A.2.1. Representación gráfica

Existe un isomorfismo entre \mathbb{C} y $\mathbb{R}^{2 \times}$, por lo que podemos representar a un número complejo $z = a + bi$ como un par ordenado de la forma $z = (a, b)$.

Figura A.1:



A cada número complejo (a, b) le corresponde un punto P que se llama su

afijo y, recíprocamente, a cada punto corresponde un número complejo.

A.2.2. Operaciones

La suma de números complejos en su forma binómica se resume a sumar las partes reales, por un lado, y las partes imaginarias, por el otro.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

El producto de dos números complejos en su forma binómica se realiza aplicando la propiedad distributiva y considerando que $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para realizar el cociente entre dos números complejos debemos usar el conjugado del denominador (siempre y cuando $w \neq 0 + 0i$):

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + db) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + db}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

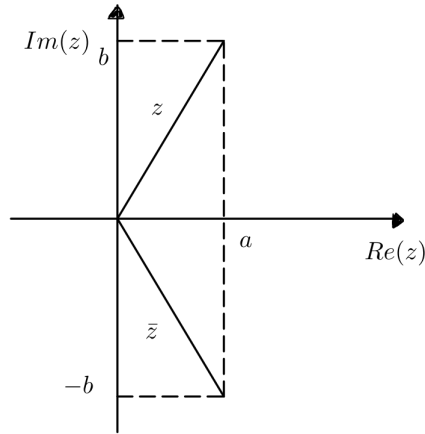
A.2.3. Número complejo conjugado

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es otro número complejo de la forma $a - bi$. Es decir, tienen la misma parte real, pero cambia el signo de la parte imaginaria.

Se lo denota $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

z y \bar{z} son simétricos respecto del eje real (eje de abscisas).

Figura A.2:



Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$

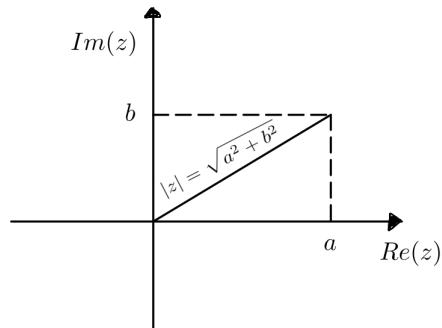
- $\bar{\bar{z}} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

A.2.4. Módulo del número complejo

Si consideramos el vector \overrightarrow{OP} podemos calcular su longitud, que llamaremos *módulo o valor absoluto* de número complejo z y se denota $|z|$. Se calcula como:

$$\text{Si } z = a + bi, \text{ entonces } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura A.3:



Propiedades

Sea $z = a + bi$ un número complejo, entonces:

- $|z| \geq 0$. Cuando $|z| = 0$ si y solo si $z = 0 + 0i$.
- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Inverso multiplicativo

Teniendo en cuenta el módulo del número complejo z , se puede definir el inverso multiplicativo de z (siempre y cuando $z \neq 0 + 0i$):

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

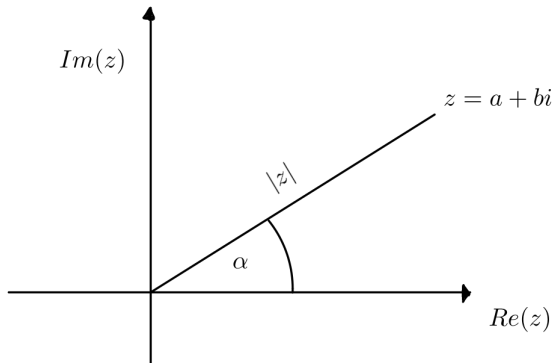
De aquí se puede calcular el cociente de dos números complejos z y $w \neq 0 + 0i$ de la siguiente manera:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = z \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

A.3. Forma trigonométrica de un número complejo

Si tenemos el número complejo $z = a + bi$, podemos obtener las coordenadas polares del punto P , tomando por polo el origen de coordenadas y por eje polar el semieje positivo real.

Figura A.4:



Al ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ se lo denomina *argumento principal* de z .

Sabiendo que:

$$\begin{cases} a = |z| \cos(\alpha) \\ b = |z| \operatorname{sen}(\alpha) \end{cases}$$

podemos escribir el número complejo z en su *forma trigonométrica*:

$$z = r (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$$

donde $r = |z|$ y α es el argumento principal de z . Es decir, todo número complejo $z \neq 0$ queda determinado por su módulo y su argumento.

A.3.1. Operaciones

El producto y cociente son más fácilmente realizables en forma trigonométrica: si tenemos dos números complejos $z = r_z (\cos (\alpha) + i \operatorname{sen} (\alpha))$ y $w = r_w (\cos (\beta) + i \operatorname{sen} (\beta))$ entonces:

- $z \cdot w = r_z r_w [\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]$.
- Si $w \neq 0 + 0i$, $\frac{z}{w} = \frac{r_z}{r_w} [\cos (\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]$

A.4. Forma exponencial de un número complejo

Si consideramos la fórmula de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos (\alpha) + i \operatorname{sen} (\alpha)$$

y si tenemos la forma trigonométrica del complejo $z = r (\cos (\alpha) + i \operatorname{sen} (\alpha))$ podemos escribir a todo número complejo en *forma exponencial*:

$$z = r e^{i\alpha}$$

A.4.1. Operaciones

Si tenemos dos números complejos $z = r_z e^{i\alpha}$ y $w = r_w e^{i\beta}$, entonces:

- $z \cdot w = r_z r_w e^{i(\alpha+\beta)}$.
- Si $w \neq 0 + 0i$, $\frac{z}{w} = \frac{r_z}{r_w} e^{i(\alpha-\beta)}$

A.4.2. Forma exponencial compleja de seno y coseno

Si consideremos un número imaginario de módulo 1, las fórmulas de Euler expresan la relación entre la función exponencial de exponente imaginario y las

funciones trigonométricas, de las que podemos deducir las expresiones de seno y coseno en función de ellas y recordando que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ y $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$:

$$\left. \begin{array}{l} e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha) \\ e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i \text{sen}(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \text{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{array} \right\}$$

Índice alfabético

- 1ra ley de Kepler, 109
- 2da ley de Kepler, 114
- 3ra ley de Kepler, 116
- campo de velocidades del cuerpo rígido, 181
- condición de rodadura, 213
- cuerpo rígido, 176
- eje instantáneo de rotación, 183, 211
- ejes principales de inercia, 187
- el problema de Kepler, 108
- energía cinética de rotación, 220
- energía cinética de traslación, 220
- energía mecánica del CR , 222
- excentricidad de la órbita, 113
- factor de calidad (Q), 56
- fuerza centrífuga, 166
- fuerza de arrastre, 166
- fuerza de Coriolis, 166
- fuerza ficticia, 155
- fuerzas centrales, 96
- momento angular, 84
- momento angular de spin, 127
- momento angular orbital, 127
- momento de inercia, 185
- oscilador amortiguado, 48
- oscilador amortiguado forzado, 59
- oscilador armónico, 16
- oscilador armónico isótropo, 118
- oscilador críticamente amortiguado, 54
- oscilador sobreamortiguado, 54
- oscilador subamortiguado, 53
- potencial efectivo, 98
- péndulo físico, 205
- péndulo ideal, 33
- resonancia, 63
- resortes en paralelo, 30
- resortes en serie, 32
- rodadura, 211
- sistema de referencia rotante, 159
- sistema no inercial, 153
- tensor de inercia, 185

torque, 88, 188

vida media del oscilador, 53

Bibliografía

- [1] Ingard U. y Krausaar W.L. (1966); *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [2] French A.P. (1974); *Mecánica Newtoniana*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [3] Alonso M. y Finn E. (1987); *Física*, Vol. 1 Mecánica, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.
- [4] Roller D.E. y Blum R. (1983); *Física. Mecánica, Ondas y Termodinámica*, Vol. I, Barcelona, Ed. Reverté.
- [5] Roederer J. (2008); *Física Elemental*, Buenos Aires, Eudeba.
- [6] Kittel C. H., Knight W.D., Ruderman M.A. (1982); *Mecánica*, Berkeley Physics Course I, Barcelona, Ed. Reverté.
- [7] Feynman R.P., Leightin R.B., Sands M. (1998); *Física*, Vol. 1: Mecánica, radiación y calor, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.
- [8] Maestripieri A., Pavón M., Resmesar P. (2008); *Notas de álgebra lineal*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.
- [9] Schiffini C., Varela A., Aragón A. (2004); *Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.

- [10] Apostol T. (2002); *Calculus*, Vol 1, Barcelona, Ed. Reverté.
- [11] Spivak M. (1995); *Calculus*, Barcelona, Ed. Reverté.
- [12] Rubio D. (2008); *Números complejos*, Los Polvorines, Universidad Nacional de General Sarmiento.

En la mecánica clásica se describe el movimiento de objetos (mientras no sean extremadamente masivos y viajen a velocidades menores a la velocidad de la luz), desde una bala de cañón hasta una galaxia. En esa descripción, sabiendo el estado actual del objeto, se puede conocer cómo fue el movimiento previo y cómo se moverá.

Las notas de mecánica elemental están dirigidas a los estudiantes del Profesorado Universitario en Educación Superior en Física y en Matemática que estén cursando la materia Mecánica Elemental. De igual modo, también a aquellos estudiantes de las ingenierías que cursen Física I.

En esta segunda parte se abordan los conceptos de movimiento oscilatorio, momento angular, fuerzas centrales, sistemas no inerciales y cuerpo rígido.

Universidad Nacional
de General Sarmiento



Libro
Universitario
Argentino

