Números Complejos

Rubio, Diana
Números complejos - 1a ed. 2a reimp. - Los Polvorines : Univ. Nacional de General Sarmiento, 2013.
112 p. ; 24x17 cm.

ISBN 978-987-630-016-2

1. Matemática. 2. Educación Superior. I. Título
CDD 516.207 11

J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507 Fax: (54 11) 4469-7504
e-mail: ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

ISBN: 978-987-630-016-2

Números Complejos

para el primer ciclo universitario

Diana Rubio

Colección Textos Básicos

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

Prefacio

Estas notas están dirigidas a los estudiantes del curso de Matemática II del Primer Ciclo Universitario de la Universidad Nacional de General Sarmiento con la intención de cubrir los temas referentes a Números Complejos. Fue escrito con la intención de presentar un Texto Básico, riguroso y autocontenido. Los resultados son ilustrados mediante ejemplos y gráficos y se incluyó un apéndice sobre trigonometría para consultar los resultados utilizados sobre este tema.

La autora agradece profundamente las valiosas correcciones, sugerencias y comentarios realizados por Alejandra Maestripieri y María Inés Troparevsky. Agradece también a Giselle Carolina Urcola por la cuidadosa revisión del texto y de los ejemplos presentados.

Índice general

Capítulo 1

Breve historia

La primera referencia conocida de raíces cuadradas de números negativos proviene de trabajos de matemáticos griegos, como Herón de Alejandría, en el siglo I antes de Cristo. Más tarde, en el siglo III, Diofanto planteó un problema cuya solución suponía la existencia de un número que elevado al cuadrado fuese igual a -1, pero no conocía ningún número que satisfaciera esa condición. Pasaron siglos hasta que este tipo de problemas nuevamente cobró interés. En el siglo XVI Rafaello Bombelli fue uno de los primeros en admitir la importancia de encontrar *raíces cuadradas de números negativos.* Por otro lado, en el mismo siglo, matemáticos italianos como Cardano y Tartaglia, buscaban fórmulas para las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 y se encontraron con la necesidad de hallar raíces de números negativos. En el siglo XVII Descartes usó el término imaginario y a fines del siglo XVIII el matemático suizo Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra i. Sin embargo, al no encontrar significado geométrico para tales números, éstos no fueron completamente aceptados. Unos años después Wessel le dio una interpretación al número i y la misma idea fue dada por Jean-Robert Argand. Más tarde Gauss la utilizó para dar la interpretación geométrica de los números complejos. El uso de pares de números reales para la representación de números complejos y su implementación más formal recién fue dada en el siglo XIX.

Más información histórica se puede encontrar en [3], [4], [9].

Como complemento bibliográfico de los temas desarrollados en este capítulo se sugieren los textos [1],[2],[8].

Capítulo 2

El Conjunto de los Números Complejos

1 Introducción

El conjunto de números complejos es una extensión de los números reales. Se obtienen considerando pares ordenados de números reales bajo operaciones particulares de suma y producto entre éstos.

2 Definición, Operaciones y Propiedades

Definición 2.1. *Se llama conjunto de números complejos, y se denota $\mathbb{C}$, al conjunto de pares ordenados $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ donde las operaciones de suma y producto se definen de la siguiente manera,*

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d), \qquad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C},$$

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc), \qquad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}.$$

De la definición anterior podemos escribir $\mathbb{C} = \{\mathbb{R}^2, +, .\}$, donde $+, .$ denotan las operaciones de suma y producto definidas anteriormente.

Ejemplo 2.2. Calcular $z+w$ y zw para $z=(1,3), w=(2,-2) \in \mathbb{C}$.

A partir de la definición de suma y producto se obtiene

(a) $z+w = (1,3)+(2,-2) = (3,1)$,

(b) $zw = (1,3)(2,-2) = (1.2 - 3.(-2), 1.(-2) + 3.2) = (8,4)$.

Propiedades de la Suma

Sean z, w, $u \in \mathbb{C}$, *entonces*

(1)	$z + (w + u) = (z + w) + u$,	(propiedad asociativa)
(2)	$z + w = w + z$,	(propiedad conmutativa)
(3)	$z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$,	(neutro para la suma)
(4)	$z + (-z) = (0, 0)$,	(inverso aditivo).

El inverso aditivo $-z$ de un número complejo $z = (a, b)$ es el número complejo $-z = (-a, -b)$. La resta de números complejos puede ser considerada como una suma: $z - w = z + (-w)$.

Propiedades del Producto

Sean z, w, $u \in \mathbb{C}$, *entonces*

(5)	$z(wu) = (zw)u$,	(propiedad asociativa)
(6)	$zw = wz$,	(propiedad conmutativa)
(7)	$z(1, 0) = (1, 0)z = z$	(neutro para el producto).

Propiedad Distributiva del Producto con Respecto a la Suma

Sean z, w, $u \in \mathbb{C}$ *entonces*

(8) $\quad z(w + u) = zw + zu.$

Las propiedades de suma y producto (1) - (8) se pueden demostrar fácilmente usando la definición 2.1.

Identificamos el número real a con el par $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Resulta entonces

$$\mathbb{R} = \{(a, b) \in \mathbb{C} : b = 0\} \subset \mathbb{C}.$$

En otras palabras, el conjunto $\mathbb{C}$ contiene al conjunto de los números reales.

Observación 2.3. Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{C}$ extienden la suma y el producto definidos en $\mathbb{R}$:

Consideremos $z = (a, 0), w = (b, 0) \in \mathbb{C}$, notemos que z y w se identifican con los números reales a y b. Aplicando la definición de suma y producto en $\mathbb{C}$ tenemos que

- $z + w = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \equiv a + b \in \mathbb{R}$,
- $zw = (a, 0)(b, 0) = (ab - 0, a0 + 0b) = (ab, 0) \equiv ab \in \mathbb{R}$.

De aquí en adelante escribiremos a en lugar de $(a, 0)$, en particular el elemento neutro para el producto es $1 = (1, 0)$.

Los números complejos de la forma $(0, b) \in \mathbb{C}$ (primera componente nula) se denominan *imaginarios puros*. El conjunto de números imaginarios puros se denota $\mathbb{I}$,

$$\mathbb{I} = \{(a, b) \in \mathbb{C} : a = 0\}.$$

Por lo tanto el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos está formado por el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, el conjunto $\mathbb{I}$ de los imaginarios puros y el conjunto de números formado por las sumas de ellos. Esta manera de describir los números complejos es el tema de el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Forma Binómica

1 Definiciones y Operaciones

Definición 3.1. *Se llama* i *al número complejo* $(0, 1) \in \mathbb{I}$.

Propiedades 3.2. *El número* $i \in \mathbb{C}$ *es el único que satisface* $i^2 = -1$.

Demostración: Notemos que $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, luego $i^2 = -1$. □

Encontramos un elemento de $\mathbb{C}$ cuyo cuadrado es -1, por lo tanto el conjunto $\mathbb{C}$ contiene números de cuadrado negativo.

Definición 3.3. *Si* $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, *llamamos forma binómica de* z *a la representación dada como suma de un número real más un número imaginario:*

$$z = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi.$$

Definición 3.4. *Dado* $z = a + bi \in \mathbb{C}$, *se denomina*

(a) *parte real de* z *al número real* a *y se denota* $Re(z) = a$.

(b) *parte imaginaria de* z *al número real* b *y se denota* $Im(z) = b$.

Observación 3.5. Notemos que la parte imaginaria $Im(z)$ es el número real b que multiplica a i (**no confundir** con el término imaginario bi).

Ejemplo 3.6. Escribir en forma binómica y las partes real e imaginaria de los números complejos $(2,0),(0,3),(1,-1),(3,4)$.

Par ordenado	Forma Binómica	$Re(z)$	$Im(z)$
$z=(2,0)$	2	2	0
$z=(0,3)$	$3i$	0	3
$z=(1,-1)$	$1-i$	1	-1
$z=(3,4)$	$3+4i$	3	4
$z=(0,-2)$	$-2i$	0	-2

Propiedades 3.7. *Dos números complejos, z, $w \in \mathbb{C}$, son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria:*

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad Re(z) = Re(w) \text{ y } Im(z) = Im(w).$$

Demostración La demostración es inmediata de la Definición 3.3. $\square$

Esta propiedad nos dice que un número complejo queda completamente determinado por su parte real y su parte imaginaria.

Las operaciones de suma y producto en $\mathbb{C}$ se traducen a la forma binomial de la siguiente manera:

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

$$zw = (ac - bd) + (ab + dc)i.$$

También podemos realizar las operaciones algebraicas con la forma del binomio. Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, se obtiene

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2.$$

Como $i^2 = -1$ reagrupando términos nos queda $zw = ac - bd + (ad + bc)i$ que se escribe como par ordenado $(ac - bd, ad + bc)$, que coincide con la definición de producto para números complejos (ver definición 2.1).

Ejemplo 3.8. Calcular zw siendo $z = 2 + 3i$ y $w = -1 + 4i$.
Aplicamos la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} zw &= (2+3i)(-1+4i) \\ &= -2 + 8i - 3i + 12i^2 \\ &= -14 + 5i. \end{aligned}$$

Proposición 3.9. *El inverso multiplicativo de i es $-i$.*

Demostración: Vimos que $i^2 = -1$, luego $-i^2 = 1$ o equivalentemente $-i\,i = 1$ y de aquí

$$i^{-1} = -i.$$

□

2 Potencias de i

Definimos $i^0 = 1$ y dado que $i^2 = -1$, al calcular las potencias i^n se obtienen cuatro resultados posibles: 1, i, -1,$-i$:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = i^2 i = -i, \\ i^4 = i^2 i^2 = 1, & i^5 = i^4 i = i, & i^6 = i^4 i^2 = -1, & i^7 = i^4 i^3 = -i. \end{array}$$

Propiedades 3.10. *Si n y m son números enteros que difieren en un múltiplo de 4 entonces*

$$i^n = i^m.$$

Demostración: Si n y m son números enteros que difieren en un múltiplo de 4 entonces podemos escribir $n - m = 4k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, o bien $n = m + 4k$. Ya que $i^{4k} = (i^4)^k = 1$ resulta

$$i^n = i^{4k+m} = i^{4k} i^m = i^m.$$

□

Corolario 3.11. *Dado un número cualquiera $n \in \mathbb{Z}$, resulta $i^n = i^m$ donde $m \in \mathbb{N}$ es el resto de la división de n por 4.*

Demostración Se deduce de la Propiedad 3.10, escribiendo $n = m + 4k$ siendo k el cociente de la división y m el resto. □

Observación 3.12. Notar que una potencia negativa, digamos i^{-n} con $n > 0$, también se puede calcular como

$$i^{-n} = \left(i^{-1}\right)^n = (-i)^n = (-1)^n i^n.$$

Ejemplo 3.13. Calcular las siguientes potencias
(a) i^{39}, (b) i^{1348}, (c) i^{-13}, (d) i^{-450}.

Escribimos cada exponente $n \in \mathbb{Z}$ en términos del cociente y resto de dividir por 4: $n = 4k + m$ y luego aplicamos la propiedad 3.11.

(a) Como $39 = 4.9 + 3$, se tiene $i^{39} = i^3 = -i$.

(b) Calculemos ahora i^{1348}. Como 1348 es múltiplo de 4 resulta $i^{1348} = i^0 = 1$.

(c) En el caso i^{-13}, podemos proceder de dos maneras distintas. Por un lado,

$$i^{-13} = (-1)^{13}\, i^{13} = (-1)i^{4.3+1} = -i,$$

o se puede escribir

$$i^{-13} = i^{4.(-4)+3} = i^3 = -i.$$

(d) De manera similar al caso anterior, i^{-450} se puede calcular como

$$i^{-450} = (-1)^{450}\, i^{450} = i^{4.112+2} = i^2 = -1,$$

o como

$$i^{-450} = i^{4(-113)+2} = i^2 = -1.$$

Propiedades 3.14. *Dados $n, m \in \mathbb{Z}$,*

(a) $i^n.i^{-n} = 1$,

(b) $i^n.i^m = i^{n+m}$.

Ejemplo 3.15. Calcular $i^{105}(1-i^5)+i^{-35}$.

Aquí aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y las propiedades de potencia para obtener

$$i^{105}(1-i^5)+i^{-35}=i^{105}-i^{105}i^5+i^{-35}=i^{105}-i^{110}+i^{-35}.$$

Reescribimos cada término aplicando las propiedades vistas para potencias de i:

$$\begin{array}{rclcr} i^{105} & = & i^{4.26}\,i & = & i, \\ i^{110} & = & i^{4.27}\,i^2 & = & -1, \\ i^{-35} & = & i^{4.(-9)}\,i & = & -i. \end{array}$$

Reemplazando en la expresión anterior, resulta

$$i^{105}(1-i^5)+i^{-35}=i^{105}-i^{110}+i^{-35}=i-(-1)+i=1+2i.$$

La igualdad $i^2=-1$ nos dice que i es raíz del polinomio x^2+1, por lo tanto es solución de la ecuación $x^2+1=0$. Queda como ejercicio para el lector verificar que $-i$ también es raíz de x^2+1. Entonces el polinomio x^2+1 tiene dos raíces imaginarias puras.

El polinomio x^2+1 es un ejemplo de un polinomio que no admite raíces en el conjunto de los números reales, pero sí en $\mathbb{C}$. Observemos que los polinomios que tienen raíces reales tienen raíces en $\mathbb{C}$ ya que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Nos preguntamos si dado cualquier polinomio, éste siempre admite una raíz en el conjunto de los números complejos. El siguiente teorema responde esta pregunta.

Teorema 3.16. Teorema Fundamental del Álgebra
Todo polinomio real de grado mayor o igual que uno admite una raíz en $\mathbb{C}$.

3 Plano Complejo

Un número complejo se puede representar gráficamente como un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, también llamado *plano complejo* o *diagrama de Argand.*

4 Representación Gráfica

En el eje horizontal se representa la parte real de z, $Re(z)$ (primera coordenada del par) y en el eje vertical la parte imaginaria, $Im(z)$ (segunda coordenada del par). Así, los números reales $z = a$ se grafican sobre el eje x y los imaginarios puros, $z = bi$, se grafican sobre el eje y.

Ejemplo 3.17. Representar en el plano los números complejos $2+3i$, $3-i$, $-5+i$ y $-3-2i$.

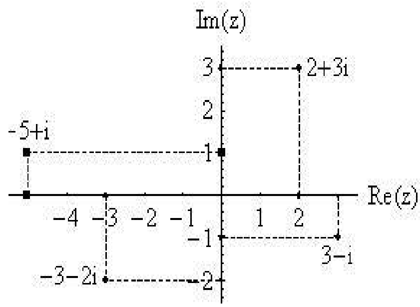


Figura 3.1: Representación en el Plano Complejo.

Ejemplo 3.18. Escribir en forma binómica los números complejos representados en la Figura 3.2.

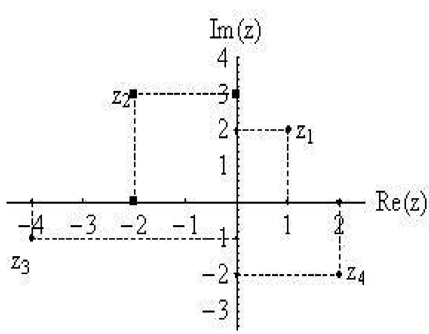


Figura 3.2: Representación de números complejos en el plano.

Los números complejos representados son: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = -4 - i$ y $z_4 = 2 - 2i$.

Representación Gráfica de la Suma y la Resta en el Plano

La suma y la resta de números complejos se pueden representar gráficamente de la misma manera que la suma y la resta de vectores del plano. Esto es,

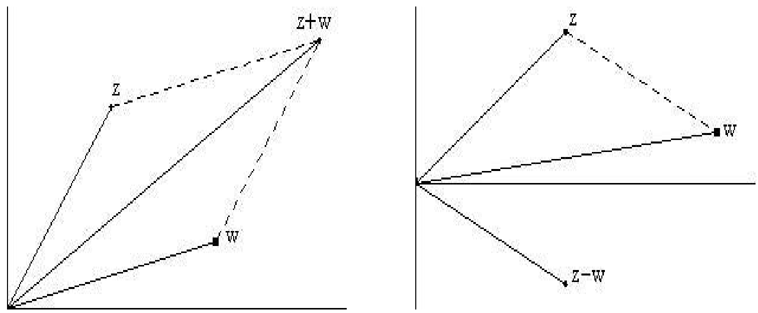


Figura 3.3: Suma de dos números complejos, Resta de dos números complejos.

Notar que gráficamente, la suma $z + w$ y la resta $z - w$ quedan determinadas por la diagonal mayor y la diagonal menor, respectivamente, del paralelogramo que tiene como lados a los segmentos $0z$ y $0w$ que unen el origen 0 con z y con w, respectivamente.

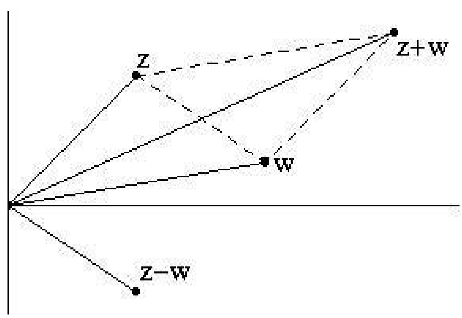


Figura 3.4: Representación de la suma y la resta de dos números complejos.

La interpretación gráfica del producto de vectores se verá más adelante.

Capítulo 4

Número Complejo Conjugado

1 Definición y Propiedades

Definición 4.1. *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama conjugado de z y se denota $\overline{z}$, al número complejo*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Gráficamente el complejo conjugado de un número $z \in \mathbb{C}$ es la reflexión respecto del eje real.

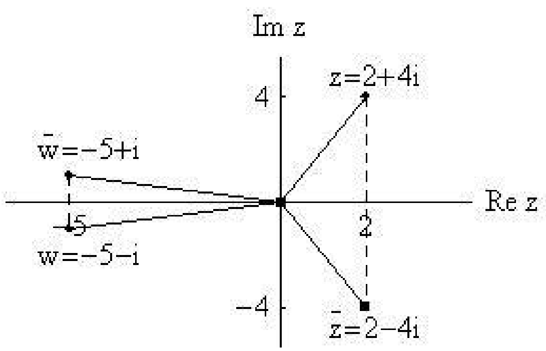


Figura 4.1: Representación de Números Complejos y sus Conjugados.

Ejemplo 4.2. Calcular el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos.
(a) $z = 2 + 4i$, (b)$z = -5 - i$, (c) $z = 3i$, (e) $z = 2$,

Notemos que para obtener el conjugado de un número complejo, basta con cambiar el signo a la parte imaginaria. Por lo tanto,

(a) Si $z = 2 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 2 - 4i$,

(b) Si $z = -5 - i \Rightarrow \overline{z} = -5 + i$.

(c) Si $z = 3i \Rightarrow \overline{z} = -3i$,

(d) Si $z = 2 \Rightarrow \overline{z} = 2$,

Propiedades 4.3. *Dado $z \in \mathbb{C}$ entonces*

(a) $\overline{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$,

(b) $\overline{\overline{z}} = z$,

(c) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$.

(a) Por unicidad de la forma binómica, $z = \overline{z}$ si y sólo si $Re(z) = Re(\overline{z})$ e $Im(z) = Im(\overline{z})$ y por la definición de número conjugado resulta $b = -b$, de donde $b = 0$ y por lo tanto $z = a \in \mathbb{R}$.

(b) Es inmediato de la definición de número conjugado.

(c) Por definición de suma, $z + \overline{z} = (a + a) + (b + (-b))i = 2a = 2Re(z)$. Luego, $z + \overline{z} = 2Re(z)$, o equivalentemente, $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$. De manera análoga se demuestra que $z - \overline{z} = 2\,i\,Im(z)$, de donde resulta la igualdad que queríamos demostrar.

□

2 Propiedades de Suma y Producto

La conjugación es distributiva con respecto a la suma y al producto:

Propiedades 4.4. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces*

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Demostración: Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$.

(a) Como $z + w = (a + c) + (b + d)i$, entonces

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i.$$

Reagrupando se tiene que $\overline{z + w} = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$.

(b) Calculamos el producto $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego el conjugado es

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i. \end{aligned}$$

Por otro lado $\overline{z} = (a - bi)$ y $\overline{w} = (c - di)$, luego el producto de los conjugados de z y w es $\overline{z}\,\overline{w} = (ac - bd) + (-ad - bc)i$. De donde resulta $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. □

3 Ecuaciones en z y $\overline{z}$

Ejemplo 4.5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las ecuaciones dadas.

(a) $2 + z - 2i = 3\overline{z} + 5i$.

(b) $-2i(\overline{z} + 3 - i) + (1 - i)i^{21}z = 2 - i$.

(c) $z(1 + i) = (1 - i^{39})\overline{z}$.

(d) $z^3(1 - i) = -z(1 + z^2 i)$.

(e) $-2i^{-17}z^2 + \overline{z} = 0$.

En estos casos no es posible despejar z o $\overline{z}$, por este motivo usamos la notación binómica para z y reescribimos las ecuaciones en términos de las incógnitas $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$.

(a) La ecuación $2 + z - 2i = 3\overline{z} + 5i$ es equivalente a la ecuación $z - 3\overline{z} = -2 + 7i$. Usamos la notación binómica $z = a + bi$ y resolvemos la ecuación para $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a + bi - 3(a - bi) &= -2 + 7i \iff \\ -2a + 4bi &= -2 + 7i. \end{aligned}$$

Por la unicidad de la forma binómica (propiedad 3.7) deben coincidir las partes reales por un lado y las partes imaginarias por el otro, es decir

$$\left\{\begin{array}{rcr} -2a & = & -2 \\ 4b & = & 7 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & \frac{7}{4} \end{array}\right. .$$

Luego, la única solución es $z = 1 + \dfrac{7}{4}i$.

(b) Resolvamos ahora $-2i(\overline{z} + 3 - i) + (1 - i)i^{21}z = 2 - i$.
Notemos que $i^{21} = i$ y se tiene

$$\begin{aligned} -2i(\overline{z} + 3 - i) + (1 - i)i^{21}z &= 2 - i \Longleftrightarrow \\ -2i\overline{z} - 6i - 2 + (i - i^2)z &= 2 - i. \end{aligned}$$

Agrupamos los términos que contienen las incógnitas z y $\overline{z}$ del lado izquierdo de la ecuación y las constantes del lado derecho para obtener

$$-2i\overline{z} + iz + z = 4 + 5i.$$

Escribimos $z = a + bi$ y buscamos $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfagan la igualdad.

$$\begin{aligned} -2i(a - bi) + i(a + bi) + a + bi &= 4 + 5i \Longleftrightarrow \\ -2ia - 2b + ia - b + a + bi &= 4 + 5i \Longleftrightarrow \\ -ia - 3b + a + bi &= 4 + 5i. \end{aligned}$$

Agrupando los términos imaginarios resulta

$$a - 3b + (-a + b)i = 4 + 5i$$

y por la unicidad de la forma binómica obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - 3b & = & 4 \\ -a + b & = & 5 \end{array}\right. .$$

De la primera ecuación resulta $a = 4+3b$ y reemplazando en la segunda ecuación se tiene $b = -9/2$ y por lo tanto $a = -19/2$. Luego la única solución es $z = -\dfrac{19}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

(c) Notemos que, ya que $i^{39} = i^3 = -i$, resulta entonces

$$z(1 + i) = (1 - i^{39})\overline{z} \Longleftrightarrow z(1 + i) = (1 + i)\overline{z} \Longleftrightarrow z = \overline{z}.$$

Por la propiedad 4.3 (a) debe ser $z \in \mathbb{R}$. Luego, el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

(d) La ecuación $z^3(1-i) = -z(1+z^2 i)$ tiene factor común z en ambos miembros. Luego, $z = 0$ es solución.

Consideramos ahora $z \neq 0$ para poder obtener las soluciones no nulas:

$$\begin{aligned} z^2(1-i) &= -(1+z^2 i) \Longleftrightarrow \\ z^2 - z^2 i &= -1 - z^2 i \Longleftrightarrow \\ z^2 &= -1. \end{aligned}$$

De aquí $z = i$ o $z = -i$ y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación $z^3(1-i) = -z(1+z^2 i)$ son $z = 0, z = -i$ y $z = i$.

(e) La ecuación $-2i^{-17}z^2 + \overline{z} = 0$ es equivalente a $\overline{z} = -2iz^2$, ya que $i^{-17} = -i$. Luego $z = 0$ es solución.

Supongamos ahora que $z \neq 0$, escribiendo la ecuación en forma binómica resulta

$$\begin{aligned} a - bi &= -2i(a+bi)^2 \qquad \Longleftrightarrow \\ a - bi &= 4ab - 2(a^2 - b^2)\, i. \end{aligned}$$

Recordemos que dos números complejos son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, en este caso

$$\left\{ \begin{aligned} a &= 4ab \\ b &= 2(a^2 - b^2) \end{aligned} \right. \quad \text{o equivalentemente,} \quad \left\{ \begin{aligned} a(-4b+1) &= 0 \\ 2a^2 - 2b^2 - b &= 0 \end{aligned} \right.$$

Luego

$$a(-4b+1) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ o } \ b = \frac{1}{4}.$$

Para el caso $a = 0$ resulta

$$2a^2 - 2b^2 - b = 0 \Longleftrightarrow -2b^2 = b \Longleftrightarrow b = 0 \text{ o } \ b = -\frac{1}{2}.$$

Si $a \neq 0$ debe ser $b = 1/4$, luego,

$$2a^2 - 2b^2 - b = 0 \Longleftrightarrow 2a^2 = 3/8 \Longleftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ o } a = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

De aquí se tiene que las soluciones son cuatro:

$$z = 0, \quad z = -\frac{1}{2}i, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \quad \text{y} \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Capítulo 5

Módulo de un Número Complejo

La norma para vectores de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, permite definir la magnitud de un número complejo.

1 Definición y Propiedades

Definición 5.1. *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama módulo (o valor absoluto o magnitud) de z y se denota $|z|$, al número real*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

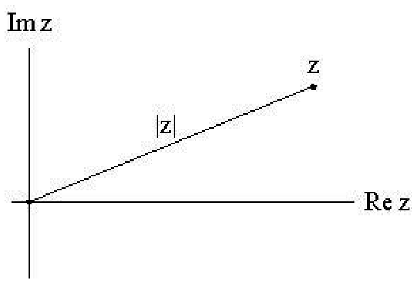


Figura 5.1: Módulo de un número complejo z.

El módulo $|z|$ de un número complejo $z = a + bi = (a, b)$ es igual a la distancia del punto z al origen 0, es decir $dist(z, 0) = |z|$, como se puede observar en el gráfico de la Figura 5.1.

En general, podemos definir la distancia entre dos puntos z, w del plano complejo como el módulo de la diferencia entre dichos puntos, es decir $dist(z, w) = |z - w|$. Esta afirmación se puede comprobar fácilmente mediante un gráfico, como lo muestra la Figura 5.2 donde representamos dos números complejos z, w, la diferencia $z - w$ y su módulo $|z - w|$.

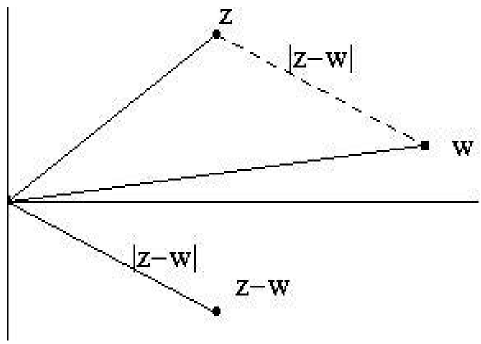


Figura 5.2: Distancia entre dos números complejos: $dist(z, w) = |z - w|$.

Además, si $z = a \in \mathbb{R}$, es decir $Im(z) = 0$, entonces resulta $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ y por lo tanto el módulo coincide con la función módulo (o valor absoluto) en $\mathbb{R}$.

Propiedades 5.2. *Dado $z \in \mathbb{C}$, el módulo $|z|$ satisface*

(a) $|z| \geq 0$. Además $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$,

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$,

(c) $|\overline{z}| = |z|$.

(d) $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$,

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$.

(a) Por definición de módulo de un número complejo, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, luego $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $|z| = 0$ si y sólo si $a^2 + b^2 = 0$ y esto ocurre si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$, es decir $z = 0$.

(b) Por definición del número conjugado $\overline{z}$ y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma se tiene

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(c) $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + (b)^2} = |z|$.

(d) Notemos que $|Re(z)| = |a| = \sqrt{a^2}$.
Por otro lado, como $0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2$ $a, b \in \mathbb{R}$ y la función $f(x) = \sqrt{x}$ es una función creciente en $[0, +\infty)$, entonces

$$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Por lo tanto resulta

$$|Re(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \Longrightarrow |Re(z)| \leq |z|.$$

De manera análoga se puede probar que $|Im(z)| \leq |z|$.

$\square$

2 Propiedades para Suma y Producto

El módulo posee la propiedad distributiva con respecto al producto de números complejos, sin embargo no se puede distribuir cuando se trata de una suma.

Propiedades 5.3. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces*

(a) $|zw| = |z||w|$,

(b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad Triangular)

Demostración: Sea $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$.

(a) Observemos que $|zw| = |z||w|$ si y sólo si $|zw|^2 = |z|^2.|w|^2$. Entonces, como $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, resulta

$$|zw|^2 = |(ac - bd) + (ad + bc)i|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Desarrollando los cuadrados de los binomios y simplificando, se tiene

$$|zw|^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2,$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2). \end{aligned}$$

Sacando factor común $(c^2 + d^2)$, resulta

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (c^2 + d^2)(a^2 + b^2) \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

(b) Probemos la desigualdad triangular, $|z+w| \leq |z| + |w|$.
Por ser $|z+w|, |z|, |w| \geq 0 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ y ya que las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son crecientes para $x \geq 0$, se tiene

$$|z+w| \leq |z| + |w| \text{ si y sólo si } |z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Además, $|z|^2 = z\overline{z}$ y $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (Propiedad 4.4 (a)), entonces se tiene

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2. \end{aligned}$$

Aplicando las Propiedades 4.3 y 4.4 (b) el tercer término se puede escribir como

$$w\overline{z} = \overline{\overline{w}}\,\overline{z} = \overline{\overline{w}\,z} = \overline{z\,\overline{w}},$$

luego, resulta

$$z\overline{w} + w\overline{z} = z\,\overline{w} + \overline{z\,\overline{w}}.$$

De la Propiedad 4.3 (c) tenemos que $u + \overline{u} = 2Re(u) \forall u \in \mathbb{C}$, eligiendo $u = z\,\overline{w}$ resulta

$$z\,\overline{w} + \overline{z\,\overline{w}} = 2Re(z\,\overline{w}).$$

Las dos últimas iguldades implican

$$z\overline{w} + w\overline{z} = 2Re(z\,\overline{w})$$

y como $Re(z\,\overline{w}) \leq |Re(z\,\overline{w})|$, de la Propiedad 5.2 (d) se deduce que

$$z\,\overline{w} + w\overline{z} = 2Re(z\,\overline{w}) \leq 2|Re(z\,\overline{w})| \leq 2|z\,\overline{w}|.$$

Reemplazando en la expresión obtenida anteriormente para $|z+w|^2$ resulta

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\,\overline{w}} + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2. \end{aligned}$$

Por último, $|z\overline{w}| = |z||\overline{w}|$ y ya que $|\overline{w}| = |w|$ (propiedad 5.2), tenemos

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

□

Ejemplo 5.4. Calcular los módulos de los siguientes números complejos
(a) i (b) 2 (c) $(3+4i)(5-i)$ (d) $(1-i)+(3-i)$.

Aplicando la definición de módulo y las propiedades obtenemos,

(a) $|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$,

(b) $|2| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$,

(c) Aplicando la propiedad distributiva del módulo respecto del producto, obtenemos

$$|(3+4i)(5-i)| = |(3+4i)||(5-i)| = \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{5^2+1^2} = 5\sqrt{26}.$$

(d) Como el módulo no es distributivo con respecto a la suma, debemos calcular primero la suma y luego hallar el módulo:

$$|(1-i)+(-3-i)| = |-2-2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

3 Representación Gráfica de Conjuntos

Algunos conjuntos del plano complejo pueden expresarse a través de relaciones que involucran $|z|$, $Re(z)$ y $Im(z)$. En algunos casos resulta más sencillo expresarlos y representarlos como intersección de dos o más conjuntos definidos con una sola restricción.
Mostraremos algunos ejemplos y los representaremos gráficamente teniendo en cuenta el significado geométrico de las restricciones planteadas.

Ejemplo 5.5. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3| \leq 3\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z-(1+i)| < 2\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z+3-2i| < 1\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : |\sqrt{2}-i|^2 \leq |z+2i| < 6\}$,

(g) $G = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in [-1,3)\}$,

(h) $H = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3,\ |Im(z)| < 2\}$,

(i) $I = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 4,\ Re(z) > -2\}$.

Como es usual, marcaremos los límites de los conjuntos con línea punteada cuando la desigualdad sea estricta ($<$, $>$).

(a) Recordemos que la circunferencia centrada en el origen de radio r se define a través de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ o $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. El conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$ está formado por los números complejos que están a distancia 5 del origen, luego A se representa por la circunferencia que se muestra en la Figura 5.3

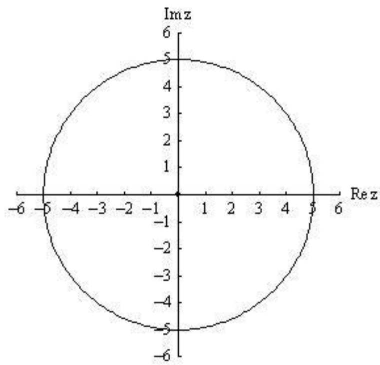


Figura 5.3: Conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$

(b) La desigualdad $|z| \leq 5$ es satisfecha por todos los números complejos que están a distancia menor o igual que 5 del origen. Gráficamente, forman un círculo o disco cerrado con centro en el origen y radio 5.

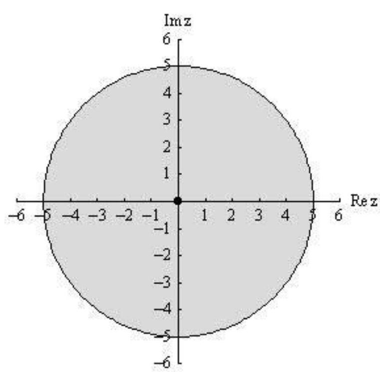


Figura 5.4: Conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}$

(c) Los números pertenecientes al conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3| \leq 3\}$ satisfacen dos restricciones: que la distancia de z al número 3 sea mayor que 2 y a su vez es menor o igual que 3. Entonces podemos obtener C como intersección de dos conjuntos: $C = C_1 \cap C_2$, siendo $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3|\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 3\}$.

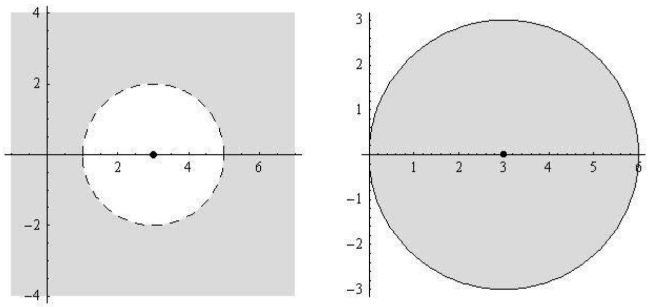


Figura 5.5: $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3|\}$ $\qquad$ $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 3\}$

De la intersección de estos dos conjuntos se obtiene un anillo centrado en $z = 3$ con borde interior abierto y borde exterior cerrado

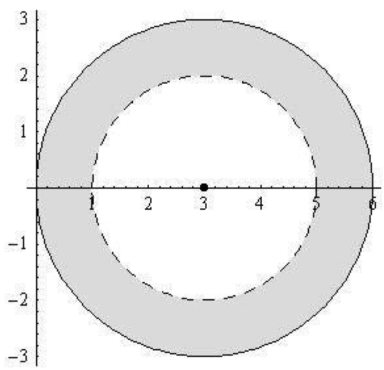


Figura 5.6: Conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-3| \leq 3\}$

(d) De manera análoga a la anterior el conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z-(1+i)| < 2\}$ se representa como un anillo con centro en $1+i$ de radio interior 1 y radio exterior 2. En este caso el borde externo se marca con línea de puntos ya que la desigualdad es estricta.

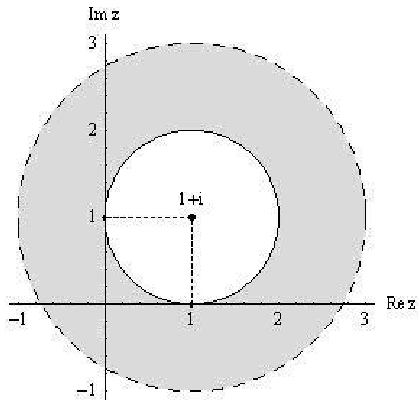


Figura 5.7: Conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - (1 + i)| < 2\}$

(e) Consideremos el conjunto $E = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3 - 2i| < 1\}$. Para interpretar correctamente $|z + 3 - 2i|$ como una distancia entre 2 puntos, reescribimos $z+3-2i$ como una diferencia, $|z+3-2i| = |z-(-3+2i)|$. Luego, los números complejos $z \in E$ están a distancia menor que 1 de $-3 + 2i$: círculo abierto con centro en $-3 + 2i$ y radio 1.

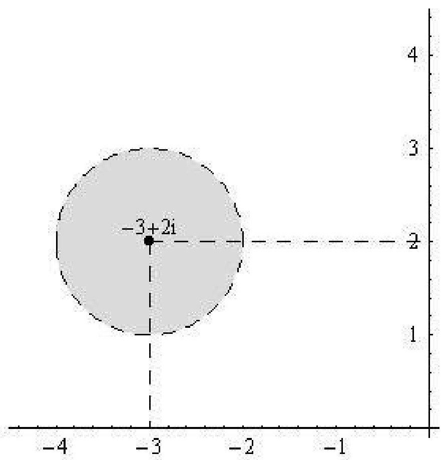


Figura 5.8: Conjunto $E = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3 - 2i| < 1\}$

(f) Los puntos del conjunto $F = \{z \in \mathbb{C} : |\sqrt{2} - i|^2 \leq |z + 2i| < 6\}$ forman un anillo con centro en $-2i$, radio interior $|\sqrt{2} - i|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 =$

3 y radio exterior 6.

$$\begin{aligned} F &= \{z \in \mathbb{C} : |\sqrt{2} - i|^2 \leq |z + 2i| < 6\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : 3 \leq |z - (-2i)| < 6\} \end{aligned}$$

Luego, F se representa en el plano como muestra la Figura 5.9.

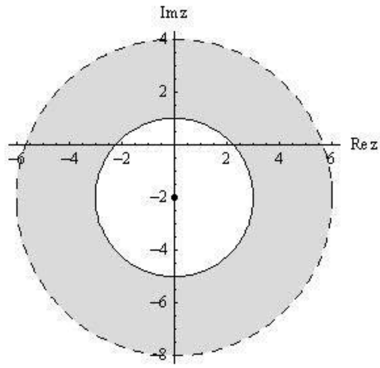
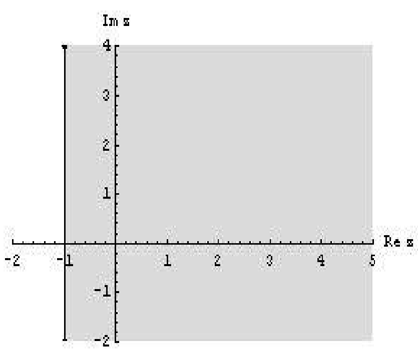


Figura 5.9: Conjunto $F = \{z \in \mathbb{C} : |\sqrt{2} - i|^2 \leq |z + 2i| < 6\}$

(g) El conjunto $G = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in [-1, 3)\}$ se puede escribir como intersección de dos conjuntos: $G = G_1 \cap G_2$, donde $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq Re(z)\}$ y $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 3\}$.



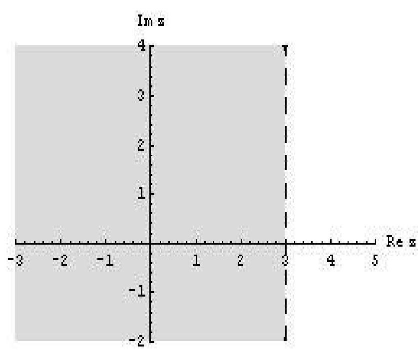


Figura 5.10: $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq Re(z)\}$ $\quad$ $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 3\}$

Las restricciones sobre el conjunto G son sólo sobre la parte real, luego tiene como bordes las rectas verticales $Re(z) = -1$ y $Re(z) = 3$.

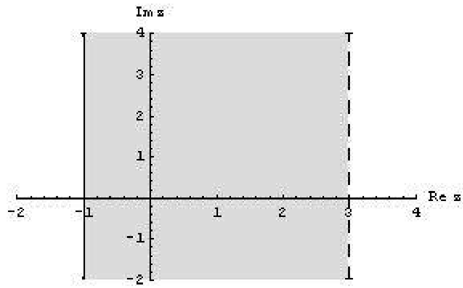


Figura 5.11: Conjunto $G = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in [-1, 3)\}$

(h) El conjunto $H = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3, |Im(z)| < 2\}$ se puede escribir como $H = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3, -2 < Im(z) < 2\}$ y describirse como la intersección de tres conjuntos: $H = H_1 \cap H_2 \cap H_3$, donde $H_1 = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3\}$, $H_2 = \{z \in \mathbb{C} : -2 < Im(z)\}$, y $H_3 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 2\}$,

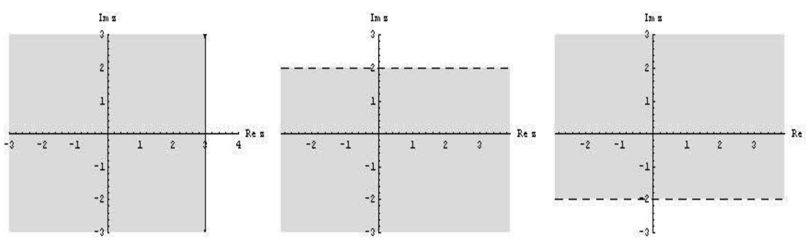


Figura 5.12: $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3\}, \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 2\}, \{z \in \mathbb{C} : -2 < Im(z)\}$

De aquí se obtiene el siguiente gráfico para el conjunto H

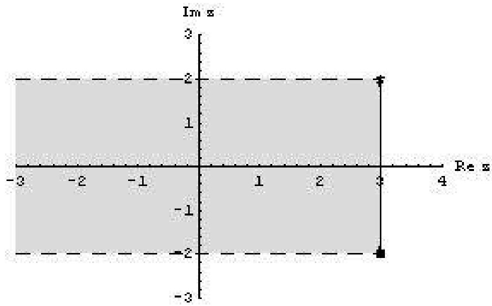


Figura 5.13: Conjunto $H = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 3, \ |Im(z)| < 2\}$.

(i) Por último, el conjunto $I = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 4, \ Re(z) > -2\}$ se puede escribir como $I = I_1 \cap I_2$ con $I_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 4\}$ e $I_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > -2\}$.

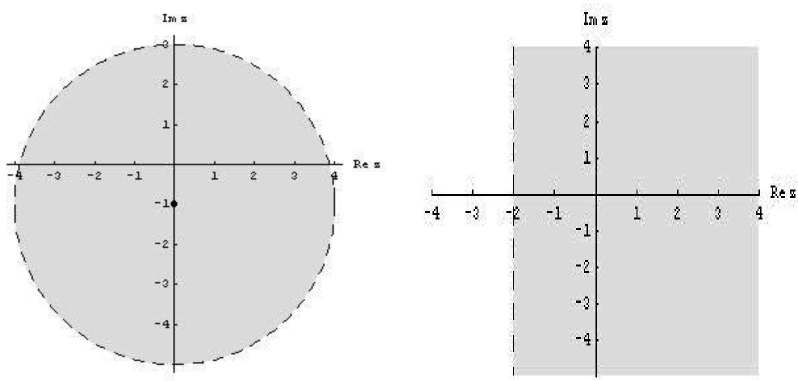


Figura 5.14: $I_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 4\}$ $\qquad$ $I_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > -2\}$

La Figura 5.15 muestra la representación gráfica de I.

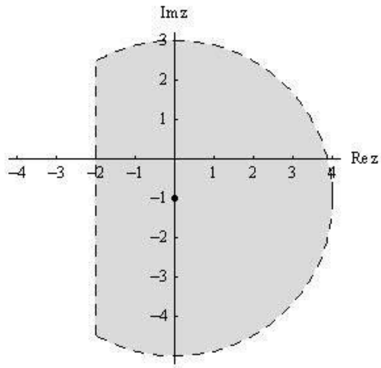


Figura 5.15: Conjunto $I = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 4,\ Re(z) > -2\}$

Capítulo 6

Inverso Multiplicativo y División

1 Definición y Ecuaciones

Usando propiedades de módulo podemos definir el inverso multiplicativo z^{-1} de un número complejo z.

Propiedades 6.1. *Todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, tiene inverso multiplicativo z^{-1}, siendo*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Demostración: Consideremos $z \neq 0$, luego $|z| > 0$ y como $|z|^2 = z\overline{z} \neq 0$ se puede dividir por $|z|^2$ ambos miembros y resulta

$$\frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1, \qquad \text{o} \qquad z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Entonces $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ es el inverso multiplicativo de z.

$\square$

Definición 6.2. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, la operación cociente, z/w, se define como*

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = z\frac{\overline{w}}{|w|^2}.$$

Ejemplo 6.3. Calcular z/w en los siguientes casos.

(a) $z = 1 - 2i$, $w = 3 + i$.

(b) $z = -2 + i$, $w = 4 - 3i$.

(a) Para calcular $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1-2i}{3+i}$ usamos la fórmula 6.2 de w^{-1} y obtenemos:

$$\frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{3-6i-i+2i^2}{10} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

(b) Si $z = -2 + i$, $w = 4 - 3i$, tenemos

$$\frac{-2+i}{4-3i} = \frac{(-2+i)(4+3i)}{16+9} = \frac{-8+4i-6i+3i^2}{25} = -\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i.$$

Ejemplo 6.4. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$.

(a) $(2+3i)z = 1 + i + z$.

(b) $(1-2i)\overline{z} + 3 - i = 2\overline{z} + i$.

(a) Despejemos z de la ecuación $(2+3i)z = 1 + i + z$,

$$\begin{aligned} (2+3i)z - z &= 1 + i \quad \Longleftrightarrow \\ (1+3i)z &= 1 + i. \end{aligned}$$

Como $1 + 3i \neq 0$, tiene inverso multiplicativo $(1+3i)^{-1}$ y por la propiedad 6.1 $(1+3i)^{-1} = \dfrac{1-3i}{|1-3i|^2} = \dfrac{1-3i}{10}$, resulta

$$z = (1+3i)^{-1}(1+i) = \frac{(1-3i)(1+i)}{10} = \frac{4-2i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Por lo tanto, la única solución es $z = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$.

(b) Ahora resolvamos $(1-2i)\overline{z} + 3 - i = 2\overline{z} + i$. Observemos que en esta ecuación no aparece z sino $\overline{z}$. Despejemos, entonces, $\overline{z}$:

$$\begin{aligned} (1-2i)\overline{z} + 3 - i = 2\overline{z} + i \quad &\Longleftrightarrow \\ (-1-2i)\overline{z} = -3 + 2i.& \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por $(-1-2i)^{-1} = \dfrac{-1+2i}{5}$ resulta

$$\overline{z} = (-1-2i)^{-1}(-3+2i) = \frac{(-1+2i)(-3+2i)}{5} = \frac{-1-8i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

Luego, la ecuación tiene solución única $z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{8}{5}i$.

2 Conjugado del Cociente

Como vimos en la propiedad 4.4, la conjugación es distributiva con respecto a la suma y al producto. Ahora veremos que también es distributiva con respecto al cociente.

Propiedades 6.5. *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *entonces*

(a) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}, \qquad \forall\, w \neq 0,$

(b) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, \qquad \forall z \neq 0.$

Demostración: Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$.

(a) Si $w \neq 0$ entonces $\overline{w} \neq 0$ y existen w^{-1} y $(\overline{w})^{-1}$. Luego, podemos escribir

$$z = zw^{-1}w,$$

y por la propiedad 4.4 resulta

$$\overline{z} = \overline{zw^{-1}w} = \overline{zw^{-1}}\,\overline{w}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(\overline{w})^{-1}$, se tiene

$$\overline{z}(\overline{w})^{-1} = \overline{zw^{-1}}.$$

(b) Es un caso particular de la propiedad anterior reemplazando z por 1 y w por z. □

Ejemplo 6.6. Calcular $\overline{z/w}$ y $\overline{w^{-1}}$ para

(a) $z = 1 - 2i$, $w = 3 + i$.

(b) $z = -2 + i$, $w = 4 - 3i$.

(a) Para $z = 1 - 2i$, $w = 3 + i$ se tiene

$$\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w} = \frac{1+2i}{3-i}.$$

Usando la fórmula del inverso de un número complejo se obtiene

$$\overline{z/w} = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{|3+i|^2} = \frac{1+7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i,$$

$$\overline{(w^{-1})} = 1/\overline{w} = \frac{1}{3-i} = \frac{(3+i)}{|3+i|^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

(b) Si $z = -2 + i$, $w = 4 - 3i$, tenemos

$$\frac{-2-i}{4+3i} = \frac{(-2-i)(4-3i)}{25} = -\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

$$\overline{w^{-1}} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i.$$

Ejemplo 6.7. Calcular $\overline{zw}$, $\overline{z}/z$ y $\overline{z}/w$ en los siguientes casos:
(a) $z = 2 + i$, $w = -1 + i$. (b) $z = -1 - i$, $w = 3i$.

(a) Si $z = 2 + i$, $w = -1 + i$, entonces $\overline{z} = 2 - i$ y $\overline{w} = -1 - i$. Luego,

$$\overline{zw} = (2-i)(-1-i) = -3 - i,$$

$$\frac{\overline{z}}{z} = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i,$$

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{2-i}{-1+i} = \frac{(2-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(b) Si $z = -1 - i$, $w = 3i$, entonces $\overline{z} = -1 + i$ y $\overline{w} = -3i$. Luego,

$$(-1+i)(-3i) = 3i - 3i^2 = 3 + 3i,$$

$$\frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

$$\frac{-1+i}{3i} = \frac{(-1+i)(-3i)}{(3i)(-3i)} = \frac{3+3i}{9} = \frac{1}{3}(1+i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$$

3 Módulo del Cociente

El módulo también es distributivo con respecto al cociente y a la potencia.

Propiedades 6.8. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$*

(a) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad \forall w \neq 0,$

(b) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \qquad \forall z \neq 0.$

(c) $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in Z$.

Demostración: Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $w = c + di$.

(a) Si $w \neq 0$ entonces existe w^{-1}. Luego,

$$|z| = |zw^{-1}w| = |zw^{-1}||w| = |z/w||w|.$$

Podemos dividir por $|w|$ ya que $w \neq 0$ y obtenemos

$$\frac{|z|}{|w|} = |z/w|.$$

(b) Se demuestra de manera análoga a la anterior, considerando $1 = z^{-1}z$ para $z \neq 0$.

(c) Demostraremos primero que $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \geq 0$, por el *principio de inducción* (ver [2])

- Si $n = 0$, $|z^0| = 1 = |z|^0$ por definición de potencia nula.
- Paso inductivo: Supongamos que vale $|z^k| = |z|^k$ para cierto $k > 0$ (*hipótesis inductiva*), entonces por la propiedad distributiva del módulo con respecto al producto se tiene que

  $$|z^{k+1}| = |z^k\, z| = |z^k|\,|z|$$

  y como suponemos que $|z^k| = |z|^k$ resulta

  $$|z^{k+1}| = |z|^k\,|z| = |z|^{k+1}.$$

Como demostramos que vale si $n = 0$ y además demostramos que si vale para un número cualquiera k vale para el número siguiente, la propiedad vale para cualquier valor $n \geq 0$.
Por último, si $n < 0$ definimos $m = -n > 0$ y a partir de b) obtenemos $|z^n| = |z^{-m}| = |z^m|^{-1} = |z|^{-m} = |z|^n$.

$\square$.

Ejemplo 6.9. Calcular el módulo de los siguientes números complejos

(a) $(-3+i)^2(-i)^{-2}$,

(b) $(-2+i)\overline{(1+3i)^{-2}}$,

(c) $(-1-3i)(2+i)^{-1}-\overline{(2+2i)}$.

(a) Aplicando las propiedades de módulo a $|(-3+i)^2(-i)^{-2}|$, se tiene

$$\begin{aligned} |(-3+i)^2(-i)^{-2}| &= |(-3+i)^2|\,|(-i)^{-2}| \\ &= \left((-3)^2+(1)^2\right)\,1^{-2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

(b) Calculemos ahora $|(-2+i)\overline{(1+3i)^{-2}}|$. Recordemos que $|\overline{z}|=|z|$, luego

$$\begin{aligned} |(-2+i)\overline{(1+3i)^{-2}}| &= |-2+i|\,|\overline{(1+3i)^{-2}}| \\ &= \sqrt{(-2)^2+1^2}\,|1+3i|^{-2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

(c) Recordemos que el módulo no es distributivo con respecto a la suma ni a la resta. Luego, para hallar $|(-1-3i)(2+i)^{-1}-\overline{(2+2i)}|$ primero debemos realizar las operaciones y luego calcular el módulo del resultado obtenido.

$$\begin{aligned} |(-1-3i)(2+i)^{-1}-\overline{(2+2i)}| &= \left|\frac{(-1-3i)(2-i)}{|2-i|^2}-\overline{(2+2i)}\right| \\ &= |-1-i-(2-2i)| \\ &= |-3+i| \\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.10. Calcular $|2z\overline{w}|$, $\left|\dfrac{z^6}{\overline{w}}\right|$ y $\left|\dfrac{(-z)^3}{\overline{w}}\right|$ para

(a) $z=1-i$, $w=1-2i$,

(b) $z=-4i$, $w=3$.

De las propiedades anteriores, se observa que

$$|2z\overline{w}|=|2z||\overline{w}|=2|z||w|,$$

$$\left|\frac{z^6}{\overline{w}}\right|=\frac{|z^6|}{|\overline{w}|}=\frac{|z|^6}{|w|},$$

$$\left|\frac{(-z)^3}{\overline{w}}\right|=\frac{|(-z)^3|}{|\overline{w}|}=\frac{|-z|^3}{|w|}=\frac{|z|^3}{|w|}.$$

Aplicamos estos resultados en cada caso.

(a) Si $z = 1 - i$, $w = 1 - 2i$ tenemos $|z| = \sqrt{2}$ y $|w| = \sqrt{5}$. Luego

$$|2z\overline{w}| = 2\sqrt{10}, \qquad \left|\frac{z^6}{\overline{w}}\right| = \frac{\sqrt{2}^6}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\left|\frac{(-z)^3}{\overline{w}}\right| = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

(b) Para $z = -4i$, $w = 3$, tenemos $|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ y $|w| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$. Luego,

$$|2z\overline{w}| = 2{,}4{,}3 = 24, \qquad \left|\frac{z^6}{\overline{w}}\right| = \frac{4^6}{3},$$

$$\left|\frac{(-z)^3}{\overline{w}}\right| = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}.$$

4 Ecuaciones

En el siguiente ejemplo veremos resolución de ecuaciones más generales que las vistas en los ejemplos 4.5 y 6.4.
Siempre que podamos, despejaremos z o $\overline{z}$, cuando no sea posible escribiremos las ecuaciones en forma binómica usando la notación usual $z = a + bi$ y resolveremos las ecuaciones obtenidas para a y b.

Ejemplo 6.11. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las ecuaciones dadas.

(a) $2|z^2| + i^{480}z^2 = \overline{z}z - 1 - Re(z - 2)$.

(b) $2(Im(z + 1))^2 + 4 = |iz^4| + i^{-501}z^2 + \overline{z}z - 2Re(z)Im(z)$.

(a) Aplicamos las propiedades vistas y observamos que $Re(z-2) = Re(z)-2$, entonces resulta

$$\begin{array}{lcll}
2|z^2| + i^{480}z^2 & = & \overline{z}z - 1 - Re(z - 2) & \Longleftrightarrow \\
2|z^2| + z^2 & = & \overline{z}z - 1 - (Re(z) - 2) & \Longleftrightarrow \\
2|z|^2 + z^2 & = & |z|^2 - Re(z) + 1 & \Longleftrightarrow \\
|z|^2 + z^2 + Re(z) - 1 & = & 0. &
\end{array}$$

Ya que no podemos despejar z, reescribimos la ecuación usando la forma binómica de z y como $z^2 = a^2 - b^2 * 2abi$ obtenemos

$$a^2 + b^2 + a^2 - b^2 + 2abi + a - 1 = 0$$

o equivalentemente $\quad (2a^2 + a - 1) + 2abi = 0$. Por unicidad de la forma binómica, se tiene

$$2a^2 + a - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2ab = 0.$$

De la primera ecuación resulta $a = -1 \quad \text{o} \quad a = 1/2$ y de la segunda ecuación se tiene $a = 0$ o $b = 0$. Entonces, para que se cumplan las dos ecuaciones debe ser $a = -1$ o $a = 1/2$ y $b = 0$. Entonces las soluciones son $z = -1$ y $z = 1/2$.

(b) Notemos que $Im(z+1) = Im(z)$ y $|iz^4| = |i||z|^4 = |z|^4$, luego

$$\begin{aligned} 2(Im(z+1))^2 + 4 &= |iz^4| + i^{-501}z^2 + \overline{z}z - 2Re(z)Im(z) \quad \Longleftrightarrow \\ 2(Im(z))^2 + 4 &= |z|^4 - iz^2 + |z|^2 - 2Re(z)Im(z). \end{aligned}$$

Usando la forma binómica $z = a + bi$, tenemos $|z|^4 = \sqrt{a^2+b^2}^4 = (a^2+b^2)^2$ y la ecuación es equivalente a

$$\begin{array}{lcll} 2b^2 + 4 & = & (a^2+b^2)^2 - i(a^2 - b^2 + 2abi) + (a^2+b^2) - 2ab & \Longleftrightarrow \\ 4 & = & (a^2+b^2)^2 - ia^2 + ib^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab - 2b^2 & \Longleftrightarrow \\ 4 & = & (a^2+b^2)^2 + a^2 - b^2 - ia^2 + ib^2 & \Longleftrightarrow \\ 4 & = & (a^2+b^2)^2 + a^2 - b^2 + i(-a^2 + b^2) & \end{array}$$

Por unicidad de la forma binómica se tiene que

$$4 = (a^2+b^2)^2 + a^2 - b^2 \quad \text{y} \quad 0 = -a^2 + b^2.$$

De la segunda ecuación resulta $a^2 = b^2$, luego la primera condición se reduce a

$$4 = (2a^2)^2 \qquad \text{o} \qquad 4 = 4a^4,$$

de donde $a = 1$ o $a = -1$. Entonces las soluciones son

$$z = 1 + i, \quad z = 1 - i, \quad z = -1 + i \quad \text{y} \quad z = -1 - i.$$

Capítulo 7

Forma Trigonométrica

La forma binómica describe un número complejo $z = a + bi$ mediante su parte real $a = Re(z)$ y su parte imaginaria $b = Im(z)$. Otra manera de presentar un número complejo es la denominada *forma trigonométrica*.

La forma trigonométrica de un número complejo es sumamente útil para el cálculo de potencias de un número complejo, como veremos en este capítulo.

1 Argumentos y Argumento Principal

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, si $z \neq 0$ entonces, $|z| > 0$ y

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right).$$

Recordemos que $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\frac{a}{|z|} = \frac{|Re(z)|}{|z|} \leq 1 \qquad\qquad \frac{b}{|z|} = \frac{|Im(z)|}{|z|} \leq 1.$$

Por lo tanto

$$-1 \leq \frac{a}{|z|} \leq 1, \qquad -1 \leq \frac{b}{|z|} \leq 1$$

y además

$$\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{|z|^2} = 1.$$

Por lo tanto, existe un ángulo α que satisface

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{|z|}.$$

Definición 7.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llama argumento principal de z y se denota Arg(z), al único ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ que satisface*

$$\cos(\alpha) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{a}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{b}{|z|}.$$

Por convención, $Arg(0) = 0$.

Observación 7.2. Existen infinitos ángulos α que son argumentos de z, es decir que satisfacen

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{|z|}.$$

Todos ellos difieren en un múltiplo de 2π, es decir son congruentes (ver definición A.15 del Apéndice de Trigonometría). Luego, si α es un argumento de z, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha = Arg(z) + 2k\pi$.

Observación 7.3. Notemos que para $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, los signos de $a = Re(z)$ y de $b = Im(z)$ coinciden, respectivamente, con los signos $\cos(Arg(z))$ y $\operatorname{sen}(Arg(z))$

$$\frac{z}{|z|} = \frac{a}{|z|} + i\,\frac{b}{|z|},$$

$$\frac{z}{|z|} = \cos(Arg(z)) + i\,\operatorname{sen}(Arg(z)).$$

En particular, si $|z| = 1$, resulta $a = \cos(Arg(z))$ y $b = \operatorname{sen}(Arg(z))$.

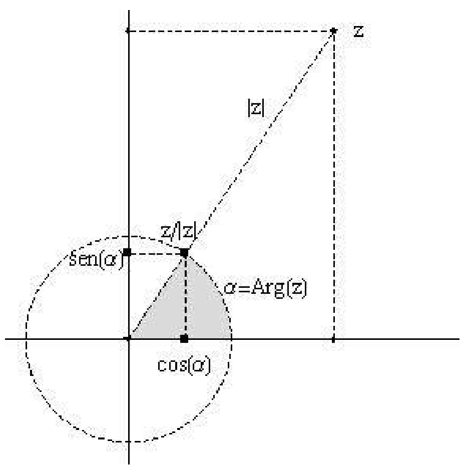


Figura 7.1: Módulo $|z|$ y $Arg(z)$ de un número complejo z.

2 Definición y Propiedades

Definición 7.4. *Dado $z \in \mathbb{C}$, se llama forma trigonométrica de z a la expresión*

$$z = r(\cos(\alpha) + i\ \mathrm{sen}(\alpha)), \qquad \textit{donde} \quad r = |z|, \ \ y \ \ \alpha = Arg(z).$$

Observemos que cualquier número complejo $z \neq 0$ queda unívocamente determinado por su módulo (o norma) y su argumento.

Propiedades 7.5. *Dos números complejos z, w son iguales si y sólo si tienen la misma norma y el mismo argumento principal (o sus argumentos difieren en $2k\pi$), es decir*

$$z = w \qquad \textit{si y sólo si} \qquad |z| = |w| \ \ y \ \ Arg(z) = Arg(w).$$

3 Argumento Principal y Reducción al Primer Cuadrante

Para hallar la forma trigonométrica de un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, primero calculamos su módulo $|z|$. Luego calculamos su argumento principal $Arg(z)$ mediante el método de *reducción al primer cuadrante* (ver la Sección 6 del Apéndice de Trigonometría).

Llamamos ángulo de referencia $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$ al ángulo obtenido por reducción al primer cuadrante. La relación entre un ángulo α y su ángulo de referencia α_0 es la siguiente

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } \alpha \in (0, \pi/2) \text{ (cuadrante I)} & \Longrightarrow & \alpha = \alpha_0 \\
\text{Si } \alpha \in (\pi/2, \pi) \text{ (cuadrante II)} & \Longrightarrow & \alpha = \pi - \alpha_0 \\
\text{Si } \alpha \in (\pi, 3\pi/2) \text{ (cuadrante III)} & \Longrightarrow & \alpha = \pi + \alpha_0 \\
\text{Si } \alpha \in (3\pi/2, 2\pi) \text{ (cuadrante IV)} & \Longrightarrow & \alpha = 2\pi - \alpha_0.
\end{array}$$

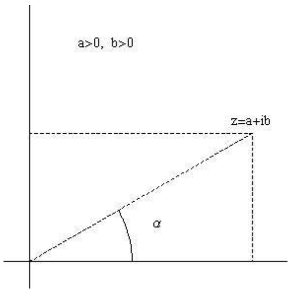
Recordemos la tabla de signos de $\cos(\alpha)$ y $\mathrm{sen}(\alpha)$ para cada cuadrante

$\cos(\alpha) < 0$ $\mathrm{sen}(\alpha) > 0$	$\cos(\alpha) > 0$ $\mathrm{sen}(\alpha) > 0$
$\cos(\alpha) < 0$ $\mathrm{sen}(\alpha) < 0$	$\cos(\alpha) > 0$ $\mathrm{sen}(\alpha) < 0$

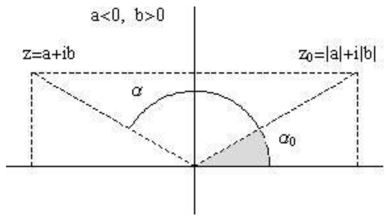
Luego, para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se tiene

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Si } a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ (cuadrante I)} & \Longrightarrow & Arg(z) = \alpha_0 \\
\text{Si } a < 0 \text{ y } b > 0 \text{ (cuadrante II)} & \Longrightarrow & Arg(z) = \pi - \alpha_0 \\
\text{Si } a < 0 \text{ y } b < 0 \text{ (cuadrante III)} & \Longrightarrow & Arg(z) = \pi + \alpha_0 \\
\text{Si } a > 0 \text{ y } b < 0 \text{ (cuadrante IV)} & \Longrightarrow & Arg(z) = 2\pi - \alpha_0
\end{array}
$$

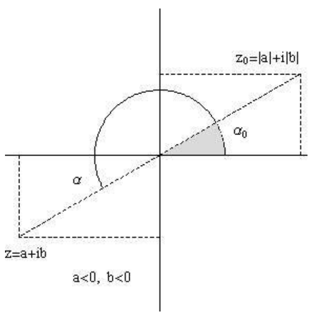
Gráficamente, la relación entre un número complejo z y su ángulo de referencia es la siguiente



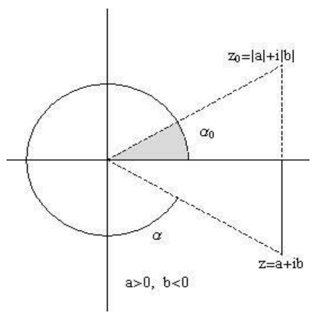
Primer Cuadrante



Segundo Cuadrante



Tercer Cuadrante



Cuarto Cuadrante

Figura 7.2: Número complejo z y su ángulo de referencia

Observación 7.6. Observemos que, en particular,

- si $z \in \mathbb{R}$, entonces $Arg(z) = 0$ o $Arg(z) = \pi$,
- si $z \in \mathbb{I}$, se tiene $Arg(z) = \pi/2$ o $Arg(z) = 3\pi/2$.

Ejemplo 7.7. Hallar la forma trigonométrica de los siguientes $z \in \mathbb{C}$.
(a) $z = 3+3i$, (b) $z = -3+3i$, (c) $z = 3-3i$, (d) $z = -3-3i$.

Calculemos sus argumentos principales por reducción al primer cuadrante.

(a) Si $z = 3 + 3i$, entonces $|z| = 3\sqrt{2}$, $a = 3$, $b = 3$,

$$\cos(Arg(z)) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}(Arg(z)) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces z pertenece al primer cuadrante y $Arg(z) = \pi/4$, de donde

$$z = |z| = 3\sqrt{2}(cos(\pi/4) + i\,\operatorname{sen}(\pi/4))$$

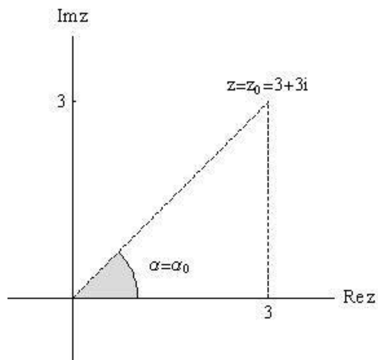


Figura 7.3: Representación trigonométrica de $z = 3 + 3i$.

(b) El número complejo $z = -3 + 3i$ pertenece al segundo cuadrante (ya que $a < 0$ y $b > 0$), luego su ángulo principal satisface $Arg(z) = \pi - \alpha_0$ siendo α_0 el ángulo de referencia.
El número de referencia es $z_0 = |-3| + |3|i = 3 + 3i$ y como $|z| = 3\sqrt{2}$

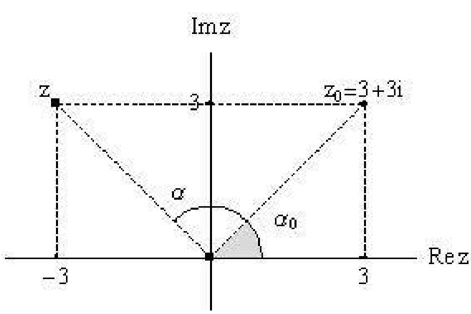


Figura 7.4: Representación trigonométrica de $z = -3 + 3i$.

entonces

$$\cos(\alpha_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha_0) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y el ángulo de referencia es $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Luego los argumentos de z son $\alpha = \pi - \pi/4 + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, de donde $Arg(z) = 3\pi/4$ y como $|z| = 3\sqrt{2}$ resulta

$$z = |z| = 3\sqrt{2}(cos(3\pi/4) + i\operatorname{sen}(3\pi/4)).$$

(c) Para $z = -3 - 3i$, se tiene $|z| = 3\sqrt{2}$ y el número de referencia es $z_0 = |-3| + |3|i = 3 + 3i$. Como en el caso anterior, el ángulo de referencia resulta $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
Por ser z un número ubicado en el tercer cuadrante (ya que $a = -3 < 0$ y $b = -3 < 0$) , su argumento principal se calcula como $Arg(z) = \pi + Arg(z_0)$. Luego $Arg(z) = 5\pi/4$ y

$$z = |z| = 3\sqrt{2}(cos(5\pi/4) + i\operatorname{sen}(5\pi/4)).$$

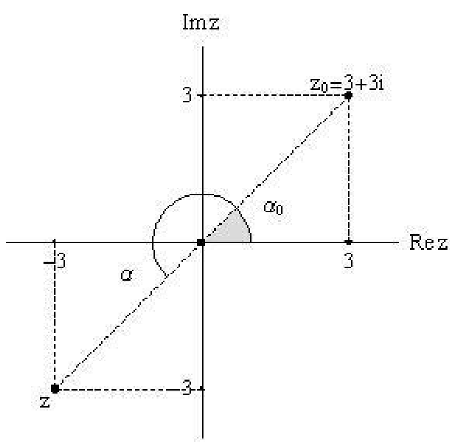


Figura 7.5: Representación trigonométrica de $z = -3 - 3i$.

(d) Por último, si $z = 3 - 3i$ se tiene $|z| = 3\sqrt{2}$ y el número de referencia es $z_0 = |-3| + |3|i = 3 + 3i$, de donde $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Por ser z del cuarto cuadrante su argumento principal es $Arg(z) = 2\pi - \alpha_0 = 7\pi/4$ y

$$z = |z| = 3\sqrt{2}(cos(7\pi/4) + i\,\text{sen}(7\pi/4)).$$

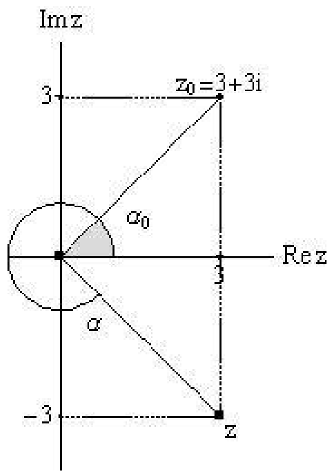


Figura 7.6: Representación trigonométrica de $z = 3 - 3i$.

Calculamos ahora la forma binómica $z = a + bi$ a partir de la forma trigonométrica de un número $z = |z|(\cos(Arg(z)) + i\ \text{sen}(Arg(z))) \in \mathbb{C}$.

Observación 7.8. Notar que $a = |z|\cos(\alpha)$ y $b = |z|\,\text{sen}(\alpha)$ pueden ser obtenidos con una calculadora usando modo "'RAD"' para operar con radianes. Aquí usaremos reducción al primer cuadrante.

Ejemplo 7.9. Escribir en forma binómica los siguientes números complejos,

(a) $z = 2(\cos(0) + i\ \text{sen}(0))$,

(b) $z = 3(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{5}{4}\pi))$,

(c) $z = 4(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{11}{6}\pi))$.

Para calcular los valores de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ usamos reducción al primer cuadrante en los casos en que sea necesario.

(a) Si $z = 2(\cos(0) + i\ \operatorname{sen}(0))$ y ya que $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$, resulta

$$z = 2.$$

(b) Dado $z = 3(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\ \operatorname{sen}(\frac{5}{4}\pi))$, se tiene $z = 3\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\,3\operatorname{sen}(\frac{5}{4}\pi)$. Observemos que $\frac{5}{4}\pi$ es un ángulo en el tercer cuadrante,

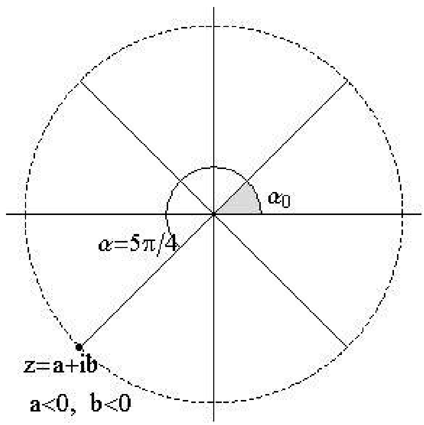


Figura 7.7: $z = 3(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\ \operatorname{sen}(\frac{5}{4}\pi))$

luego el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{5}{4}\pi = \pi + \alpha_0$ y resulta $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Además, en el tercer cuadrante $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{|z|} < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{b}{|z|} < 0$, de donde resulta

$$\cos(\frac{5}{4}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(\frac{5}{4}\pi) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces

$$z = -3\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\,i.$$

(c) En el caso de $z = 4(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i\ \operatorname{sen}(\frac{11}{6}\pi))$, el ángulo $\frac{11}{6}\pi$ pertenece al cuarto cuadrante, como muestra la figura 7.8, entonces deben ser $\cos(\frac{11}{6}\pi) > 0$, $\operatorname{sen}(\frac{11}{6}\pi) < 0$ y el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{11}{6}\pi = 2\pi - \alpha_0$. De aquí se tiene que $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$ y

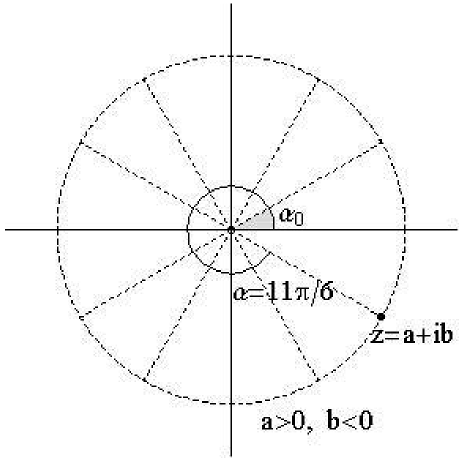


Figura 7.8: $z = 4(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{11}{6}\pi))$

$$\cos(\frac{11}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ \text{sen}(\frac{11}{6}\pi) = -\,\text{sen}(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2},$$

entonces

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Ejemplo 7.10. Escribir en forma trigonométrica y representar gráficamente el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos

(a) $z = -3$,

(b) $z = 4i$,

(c) $z = 1 - \sqrt{3}i$,

(d) $z = -3 + \sqrt{3}i$.

En cada caso hallaremos primero el módulo de z y luego su argumento principal $Arg(z)$ por reducción al primer cuadrante.

(a) Si $z = -3$ entonces $|z| = 3$ y $\alpha = Arg(z)$ debe satisfacer

$$\cos(\alpha) = \frac{-3}{3} = -1, \qquad \text{sen}(\alpha)) = 0.$$

Luego, $Arg(z) = \pi$ y la forma trigonométrica de $z = -3$ es

$$z = 3\left(\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)\right).$$

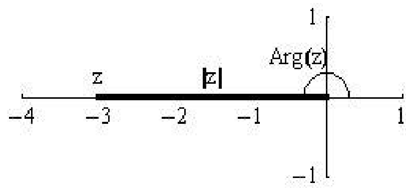


Figura 7.9: Módulo y Argumento de $z = -3$.

(b) Si $z = 4i$, observemos que $|z| = 4$ y $Arg(z)$ debe satisfacer

$$\cos(Arg(z)) = \frac{0}{4} = 0, \qquad \operatorname{sen}(Arg(z)) = \frac{4}{4} = 1.$$

Entonces, $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ y la forma trigonométrica de $z = 4i$ es

$$z = 4\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\right).$$

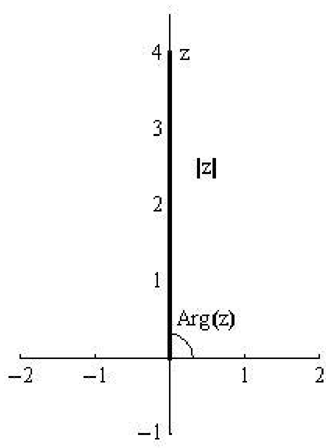


Figura 7.10: Módulo y Argumento de $z = 4i$.

(c) Para $z = 1 - \sqrt{3}i$, calculamos $|z| = \sqrt{1+3} = 2$.
El número de referencia es $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$, luego el ángulo de referencia satisface

$$\cos(\alpha_0) = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De la tabla para ángulos típicos en el primer cuadrante obtenemos $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{3}$. Por otro lado, por los signos de a y b, z está en el cuarto cuadrante, luego

$$Arg(z) = 2\pi - \alpha_0 = \frac{5}{3}\pi.$$

Por lo tanto, la forma trigonométrica de $z = 1 - \sqrt{3}i$ es

$$z = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi)).$$

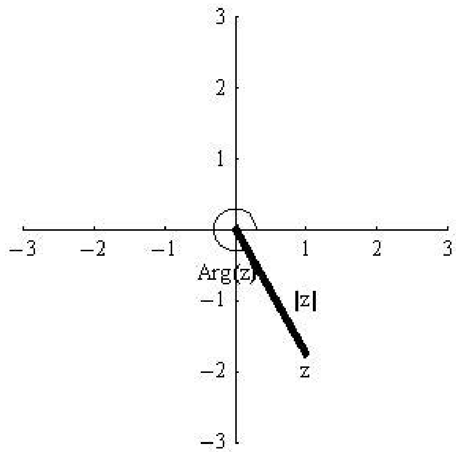


Figura 7.11: Módulo y Argumento de $z = 1 - \sqrt{3}i$.

(d) Si $z = -3 + \sqrt{3}i$, tenemos $|z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Como el número de referencia es $z_0 = 3 + \sqrt{3}i$, el ángulo de referencia satisface

$$\cos(\alpha_0) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathrm{sen}(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

de donde resulta $\alpha_0 = \pi/6$. Como z pertenece al segundo cuadrante, se tiene

$$\alpha = \pi - \alpha_0 = \frac{5}{6}\pi$$

entonces la forma trigonométrica de $z = -3 + \sqrt{3}i$ es

$$z = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{6}\pi))$$

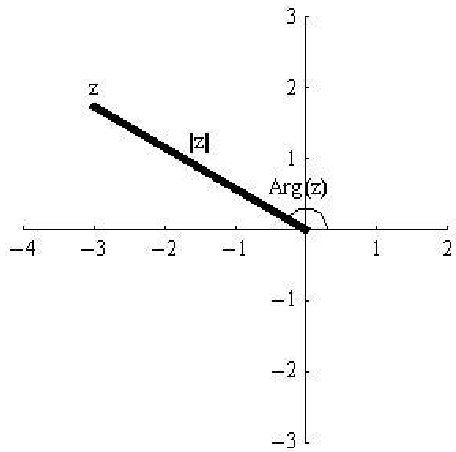


Figura 7.12: Módulo y Argumento de $z = -3 + \sqrt{3}i$.

4 Uso de la Calculadora

Para calcular un ángulo mediante una calculadora se pueden utilizan las funciones inversas de cos, sen o tan según corresponda. Aquí explicaremos el uso de las it funciones inversas de cos y sen.

Para obtener el argumento usando la calculadora hay que tener en cuenta:

- *el sistema de medición*:
  hay que seleccionar 'RAD"' para obtener el resultado en radianes.

- *la ubicación del número complejo en el plano*:
  La *función inversa de* cos de la calculadora devuelve como resultado un ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ (cuadrantes I y II) mientras que la *función inversa de* sen devuelve como resultado un ángulo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (cuadrantes I y IV). Notemos que el ángulo que se obtiene depende de cuál de las dos funciones inversas usemos y en ninguno de los dos casos se obtiene un ángulo del cuadrante III.

Ejemplo 7.11. Hallar $Arg(x)$ para los siguientes números complejos ubicados en los distintos cuadrantes: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ y $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ usando
(i) *función inversa de cos*
(ii) *función inversa de sen.*

(a) Tomemos $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Cuadrante II)

  (i) Usando la *función inversa de cos* de la calculadora se obtiene el ángulo del segundo cuadrante $\frac{2}{3}\pi$, luego $Arg(z) = \frac{2}{3}\pi$.

  (ii) Usando la *función inversa de sen* el resultado sería $\frac{\pi}{3}$, ángulo del primer cuadrante y para hallar $Arg(z)$ (cuadrante II) debemos restarle ese valor a π, es decir $Arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

(b) Consideremos $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ (Cuadrante III).

  (i) Con la *función inversa de cos* obtenemos el ángulo $\frac{2}{3}\pi$ en el cuadrante II. El argumento principal se calcula restando el resultado a 2π, $Arg(z) = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$.

  (ii) Usando la *función inversa de sen* el resultado hubiera sido $-\frac{\pi}{3}$ correspondiente al cuadrante IV. El argumento principal de z se calcula restando éste valor a π, es decir $Arg(z) = \pi - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{4}{3}\pi$.

(c) Para $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ (Cuadrante IV).

  (i) Usando la *función inversa de cos* de la calculadora obtenemos $\frac{\pi}{3}$ que es un ángulo del primer cuadrante. Como z es del cuarto cuadrante su argumento principal se calcula restando el resultado a 2π, $Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.

  (ii) Con la *función inversa de sen* el resultado hubiera sido $-\frac{\pi}{3}$ que corresponde al cuarto cuadrante pero es un valor negativo, su argumento principal se calcula sumando 2π al resultado de la calculadora, es decir $Arg(z) = 2\pi + (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{3}\pi$.

5 Producto de Números Complejos. Teorema de De Moivre

El Argumento de un producto de números complejos se obtiene sumando los argumentos de los números:

Teorema 7.12. Teorema de De Moivre
Dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi.$$

Demostración: Como $z, w \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$, z y w se pueden escribir en forma trigonométrica como

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\alpha) + i\ \mathrm{sen}(\alpha)), \qquad \text{donde } \alpha = Arg(z), \\ w &= |w|(\cos(\beta) + i\ \mathrm{sen}(\beta)), \qquad \text{donde } \beta = Arg(w). \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos(\alpha) + i\ \mathrm{sen}(\alpha))|w|(\cos(\beta) + i\ \mathrm{sen}(\beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha) i\ \mathrm{sen}(\beta) + \\ &\qquad i\ \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + i^2\ \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) + \\ &\qquad i\,(\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta))). \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta), \end{aligned}$$

de donde resulta

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta)).$$

Entonces $\alpha + \beta$ es un argumento de zw, y $Arg(zw) \in [0, 2\pi)$ es congruente a $\alpha+\beta$, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $Arg(zw) - (Arg(z) + Arg(w)) = 2k\pi$, o equivalentemente,

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi.$$

□

Observación 7.13. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, $|w| = 1$, el producto $z.w$ tiene módulo 1 y su argumento es igual a la suma de los argumentos de z y w. Geométricamente esto se traduce en el plano a un desplazamiento de z un ángulo igual al argumento de w, como se puede observar en la figura 7.13.

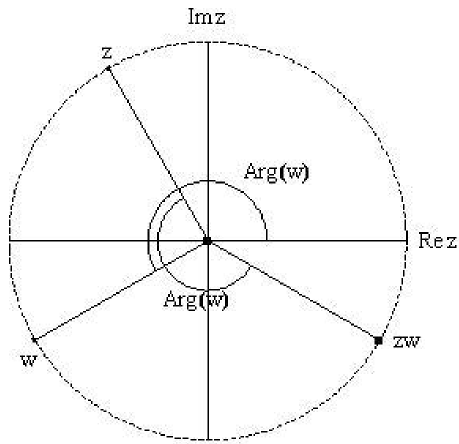


Figura 7.13: Producto de zw con $|z| = 1$, $|w| = 1$.

Observación 7.14. El argumento principal de zw se puede escribir como

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi,$$

es decir, $Arg(zw) \in [0, 2\pi)$ se obtiene al reemplazar k por el único entero que satisface

$$0 \leq Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi < 2\pi.$$

En general, para el producto de dos números cualesquiera dados en forma trigonométrica se tiene el siguiente resultado.

Corolario 7.15. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, la forma trigonométrica del producto es*

$$zw = |z||w|(\cos(Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi) + i \text{ sen}(Arg(z) + Arg(w) + 2k\pi))$$

La siguiente figura muestra la interpretación gráfica del producto de dos números complejos.

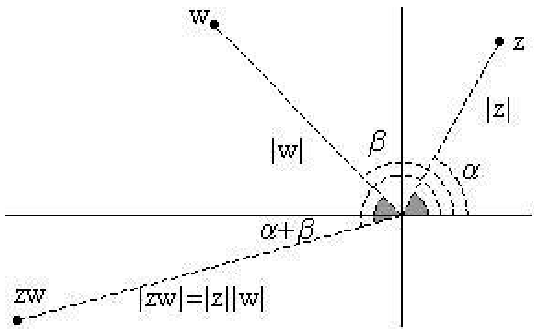


Figura 7.14: Producto de dos números complejos

Observación 7.16. Si se tienen las formas binómicas de dos números complejos, para obetener la forma trigonom'etrica del producto simplemente se realiza la multiplicación en forma binómica y luego se calcula la forma trigonométrica del resultado.
En los ejercicios que siguen nos interesa ilustrar el uso del Teorema de De Moivre y su corolario, por este motivo trabajaremos con la forma trigonométrica aún cuando los números estén dados en forma binómica.

Ejemplo 7.17. Usar el teorema de De Moivre y su corolario para calcular la forma trigonométrica de zi para $z = 1 - i$ e interpretar el resultado geométricamente.

Por lo mencionado en la observación anterior, calculamos la forma trigonométrica de z para luego aplicar el teorema de De Moivre y su corolario.

El módulo de z es $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y su argumento principal $Arg(z) = \alpha$ satisface

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces α es un ángulo del cuarto cuadrante y el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$, luego $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$ y

$$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\ \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Notemos que $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2})$. Entonces $|zi| = |z||i| = \sqrt{2}$. Además por el teorema de De Moivre, existe un $k \in \mathbb{Z}$ que satisface

$$\begin{aligned} Arg(zi) &= \frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &= \frac{9}{4}\pi + 2k\pi. \end{aligned}$$

Busquemos el valor de k para que $\frac{9}{4}\pi + 2k\pi \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & \frac{9}{4}\pi + 2k\pi & < & 2\pi & \iff \\ -\frac{9}{4}\pi & \leq & 2k\pi & < & 2\pi - \frac{9}{4}\pi & \iff \\ -\frac{9}{8} & \leq & k & < & -\frac{1}{8}. \end{array}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, debe ser $k = -1$. Luego, $Arg(zi) = \frac{9}{4}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{4}$ y se obtiene

$$zi = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\ \text{sen}(\frac{\pi}{4})).$$

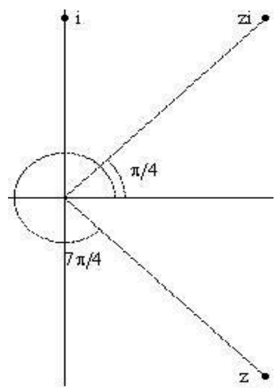


Figura 7.15: Representación gráfica de zi con $z = 1 - i$

Ejemplo 7.18. Calcular zw en forma trigonométrica y binómica para:

(a) $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}))$, $w = \frac{1}{2}(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{6}\pi))$.

(b) $z = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{7}{6}\pi)$, $w = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{3}\pi))$.

(a) Consideremos $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}))$ y $w = \frac{1}{2}(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{6}\pi))$. El módulo del producto es $|zw| = |z||w| = \frac{3}{2}$ y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$Arg(zw) = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \in [0, 2\pi).$$

Como $\frac{7}{6}\pi \in [0, 2\pi)$ resulta $k = 0$ y $Arg(zw) = \frac{7}{6}\pi$. Entonces

$$zw = \frac{3}{2}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{7}{6}\pi)).$$

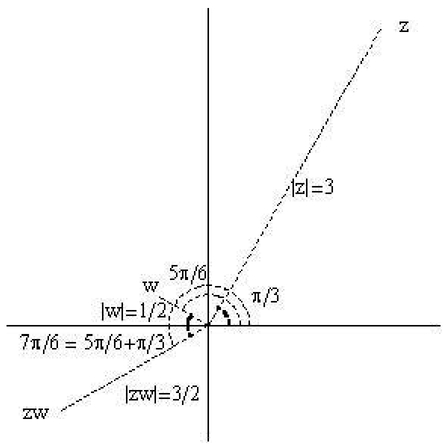


Figura 7.16: Producto zw para $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}))$ y $w = \frac{1}{2}(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{6}\pi))$.

Además ya que $Arg(zw) = \frac{7}{6}\pi$ está en el tercer cuadrante resulta que $\cos(\frac{7}{6}\pi) < 0$, $\text{sen}(\frac{7}{6}\pi) < 0$ y el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{7}{6}\pi = \pi + \alpha_0$, es decir $\alpha_0 = \frac{7}{6}\pi - \pi = \frac{\pi}{6}$. Entonces

$$\cos(\frac{7}{6}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{sen}(\frac{7}{6}\pi) = -\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

y

$$zw = \frac{3}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i.$$

El resultado se puede verificar haciendo el producto con las formas binómicas, $z = 3/2 + 3\sqrt{3}/2i$ y $w = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$.

(b) Consideramos ahora $z = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{7}{6}\pi)$ y $w = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{3}\pi))$.

El módulo del producto es $|zw| = 2$ y $Arg(zw) = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ que satisface $0 \leq \frac{17}{6}\pi + 2k\pi < 2\pi$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & \frac{17}{6}\pi + 2k\pi & < & 2\pi & \iff \\ -\frac{17}{6}\pi & \leq & 2k\pi & < & -\frac{5}{6}\pi & \iff \\ -\frac{17}{12} & \leq & k & < & -\frac{5}{12} & \iff \end{array}$$

$k = -1$ y $Arg(zw) = \frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{5}{6}\pi$. Luego

$$zw = 2\,(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{6}\pi)).$$

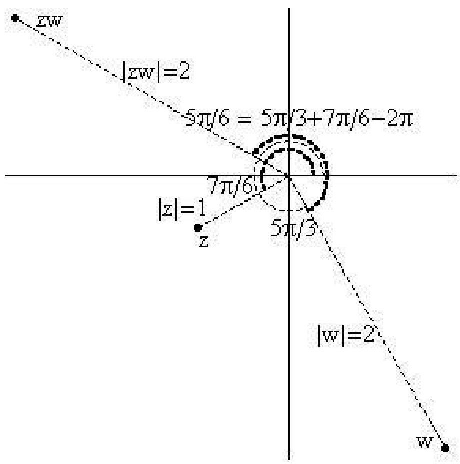


Figura 7.17: Producto zw para $z = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{7}{6}\pi)$ y $w = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{3}\pi))$.

Como $Arg(zw) = \frac{5}{6}\pi$ está en el segundo cuadrante sabemos que $\cos(\frac{5}{6}\pi) < 0$, $\text{sen}(\frac{5}{6}\pi) > 0$ y que el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{5}{6}\pi = \pi - \alpha_0$. De aquí $\alpha_0 = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$ y

$$\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{sen}(\frac{5}{6}\pi) = \text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$zw = \frac{3}{2}\,(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i.$$

Corolario 7.19. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$,*

$$Arg(z^n) = nArg(z) + 2k\pi, \qquad \textit{para algún } k \in \mathbb{Z}, \qquad \textit{y}$$

$$z^n = |z|^n(\cos(nArg(z) + 2k\pi) + i \text{ sen}(nArg(z) + 2k\pi)).$$

Demostración: La demostración formal de este resultado debe hacerse usando el *principio de inducción.*

- Para $n = 1$ el resultado es inmediato tomando $k = 0$.
- Paso inductivo: Supongamos que vale para cierto $m \in \mathbb{N}$ (*hipótesis inductiva*), es decir

  $$Arg(z^m) = mArg(z) + 2k\pi, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{y}$$

  $$z^m = |z|^m(\cos(mArg(z) + 2k\pi) + i \text{ sen}(mArg(z) + 2k\pi)).$$

  Por el teorema de De Moivre 7.12 y su corolario 7.15, para el producto $z^m z$ valen

  $$Arg(z^{m+1}) = Arg(z^m\, z) = Arg(z^m){+}Arg(z){+}2k\pi, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \text{ y}$$

  $$z^m z = |z^m||z|(\cos(Arg(z^m){+}Arg(z){+}2k\pi){+}i \text{ sen}(Arg(z^m){+}Arg(z){+}2k\pi)).$$

  Usamos ahora la hipótesis inductiva para z^m y obtenemos que para algún $k \in \mathbb{Z}$ se cumplen

$$\begin{aligned} Arg(z^{m+1}) &= Arg(z^m) + Arg(z) + 2k\pi \\ &= mArg(z) + Arg(z) + 2k\pi = (m+1)Arg(z)) + 2k\pi, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z^m z &= |z|^m|z|(\cos(Arg(z^m) + Arg(z) + 2k\pi) + i \text{ sen}(Arg(z^m) + Arg(z) + 2k\pi)) \\ &= |z|^{m+1}(\cos(mArg(z) + Arg(z) + 2k\pi) + i \text{ sen}(mArg(z) + Arg(z) + 2k\pi)) \\ z^{m+1}z &= |z|^{m+1}(\cos((m+1)Arg(z) + 2k\pi) + i \text{ sen}((m+1)Arg(z) + 2k\pi)). \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 7.20. Para $z = 1 - i$, calcular en forma trigonométrica z^3.

Del ejemplo 7.17, sabemos que la forma trigonométrica de z es

$$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \text{ sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Aplicamos el corolario 7.19 y obtenemos

$$z^3 = \sqrt{2}^3(\cos(\alpha) + i \text{ sen}(\alpha)),$$

donde el argumento está dado por

$$Arg(z^3) = 3\,Arg(z) + 2k\pi = \frac{21}{4}\pi + 2k\pi.$$

Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{21}{4}\pi + 2k\pi \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & \frac{21}{4}\pi + 2k\pi & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{21}{4}\pi & \leq & 2k\pi & < & 2\pi - \frac{21}{4}\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{21}{8} & \leq & k & < & -\frac{13}{8}. & \end{array}$$

Luego $k = -2$ y $Arg(z^3) = \frac{21}{4}\pi - 4\pi = \frac{5}{4}\pi$ y

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos(5/4\pi) + i \text{ sen}(5/4\pi)\right).$$

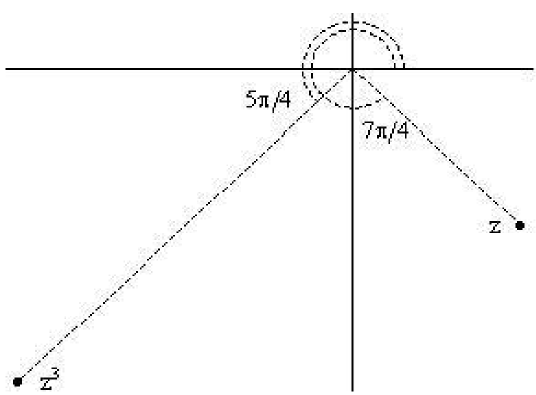


Figura 7.18: Forma Trigonométrica de $(1 - i)^3$.

Ejemplo 7.21. Expresar en forma binómica $z^{12}\, w^4$ para $z = -3+3i$ y $w = -1-\sqrt{3}i$.

Calculemos las formas trigonométricas de z y de w.
Como $z = -3+3i$ es un número del segundo cuadrante, entonces $Arg(z) = \pi - \alpha_0$, donde $\alpha_0 \in [0, \pi/2)$ es el ángulo de referencia que satisface

$$\cos(\alpha_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo tanto $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ y $Arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Luego, como $|z| = 3\sqrt{2}$ se tiene

$$z = 3\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\operatorname{sen}(3\pi/4)).$$

Por otro lado, $w = -1-\sqrt{3}i$ es un número del tercer cuadrante y entonces $Arg(w) = \pi + \alpha_0$, donde $\alpha_0 \in [0, \pi/2)$ satisface

$$\cos(\alpha_0) = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De aquí $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ y $Arg(w) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$. Como $|w| = 2$ tenemos

$$w = 2(\cos(4\pi/3) + i\operatorname{sen}(4\pi/3)).$$

Por el Corolario 7.19 del teorema de De Moivre, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} Arg(z^{12}w^4) &= 12.\frac{3}{4}\pi + 4.\frac{4}{3}\pi + 2k\pi \\ &= \frac{43}{3}\pi + 2k\pi. \end{aligned}$$

Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ que cumpla

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & \frac{43}{3}\pi + 2k\pi & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{43}{3}\pi & \leq & 2k\pi & < & 2\pi - \frac{43}{3}\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{43}{6} & \leq & k & < & -\frac{37}{6} & . \end{array}$$

Por lo tanto, $k = -7$ y $Arg(z^{12}w^4) = \frac{43}{3}\pi - 14\pi = \frac{1}{3}\pi$. Luego,

$$z^{12}w^4 = \left(3\sqrt{2}\right)^{12}\, 2^4 \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\right),$$

$$z^{12}w^4 = 3^{12}2^{10} \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\right).$$

Ya que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, la forma binómica es

$$z^{12}w^4 = 3^{12}2^{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}), \quad \text{o} \quad z^{12}w^4 = 3^{12}2^9\sqrt{3} + i\, 3^{12}2^9.$$

Ejemplo 7.22. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : Arg(w^3) < Arg(z) \leq 7/4\pi, \quad w = 2(cos\, \frac{\pi}{9} + i\, sen\, \frac{\pi}{9})\}$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \leq Arg(w^2), \quad |z| < 1, \quad w = \sqrt{3} + i\right\}$.

(a) Calculemos $Arg(w^3)$ para $w = 2(cos\, \frac{\pi}{9} + i\, sen\, \frac{\pi}{9})$. Por el teorema de De Moivre, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$Arg(w^3) = 3.\frac{\pi}{9} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Como $\frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi)$, entonces $Arg(w^3) = \frac{\pi}{3}$. Luego,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{3} < Arg(z) \leq 7/4\pi\}.$$

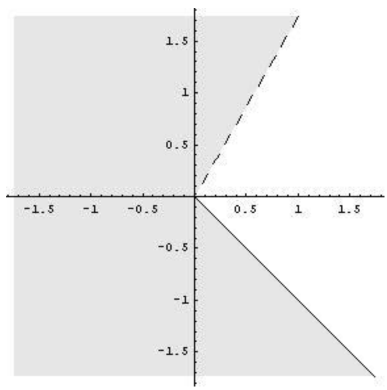


Figura 7.19: $A = \{z \in \mathbb{C} : Arg(w^3) < Arg(z) \leq 7/4\pi\}$, donde $w = 2(cos\, \frac{\pi}{9} + i\, sen\, \frac{\pi}{9})$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \leq Arg\left(w^2\right), \ |z| < 1 \qquad , w = \sqrt{3} + i\right\}$.
Para $w = \sqrt{3}+i$, tenemos que $|w| = \sqrt{3+1} = 2$ y $Arg(w)$ es el ángulo en el primer cuadrante que satisface

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Entonces $Arg(w) = \frac{\pi}{6}$ y

$$\begin{aligned} Arg(w^2) &= 2\,\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \end{aligned}$$

es decir, $Arg(w^2) = \frac{\pi}{3}$. Por lo tanto,

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, Arg(z) \leq \frac{\pi}{3},\ |z| < 1 \right\},$$

consiste en los números complejos del disco abierto unitario que forman un ángulo menor o igual a $\frac{\pi}{3}$ con el semieje positivo de las x.

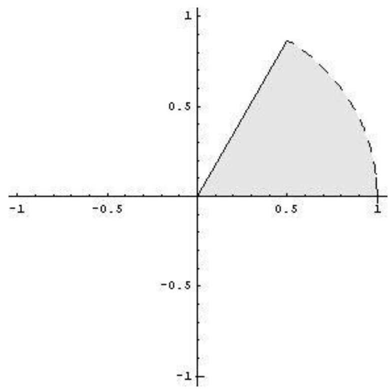


Figura 7.20: $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, Arg(z) \leq Arg(w^2),\ |z| < 1, \quad w = \sqrt{3} + i \right\}.$

Ejemplo 7.23. Para $z = \sqrt{3} - i$, hallar la forma trigonométrica de
(a) z^{-1}, (b) $\overline{z}$.

Calculemos $|z|$ y $Arg(z)$.
El módulo de z es $|z| = 2$ y z está en el cuarto cuadrante, luego

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_0) \qquad\qquad \operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha_0),$$

donde α_0 es el ángulo de referencia y satisface

$$\cos(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\alpha_0) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ y $Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.

(a) Para z^{-1}, notemos que como $z \neq 0$, existe z^{-1}. Por la propiedad distributiva del módulo con respecto al producto resulta

$$1 = |z\,z^{-1}| = |z||z^{-1}| \qquad \text{o } |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}.$$

Por otro lado, por el teorema de De Moivre sabemos que

$$\begin{array}{rcll} Arg\left(z\,z^{-1}\right) & = & Arg(z) + Arg\left(z^{-1}\right) + 2k\pi & \qquad \text{y, además} \\ Arg\left(z\,z^{-1}\right) & = & Arg(1) = 0 & \end{array}$$

Luego, $|z^{-1}| = \frac{1}{2}$ y $Arg(z) + Arg\left(z^{-1}\right) + 2k\pi = 0$, y de aquí

$$\begin{array}{rcl} Arg\left(z^{-1}\right) & = & -Arg(z) - 2k\pi \\ & = & -\dfrac{11}{6}\pi - 2k\pi. \end{array}$$

Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\frac{11}{6}\pi - 2k\pi \in [0, 2\pi)$. Notemos que para $k = -1$ se tiene

$$Arg\left(z^{-1}\right) = -\frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{1}{6}\pi.$$

Entonces,

$$z^{-1} = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \text{ sen}(\frac{\pi}{6})).$$

(b) Para hallar la forma trigonométrica de $\overline{z}$ recordemos que $z\,\overline{z} = |z|^2$, entonces $\overline{z} = |z|^2\, z^{-1}$.
Por lo tanto, como $|z|^2 \in \mathbb{R}, |z|^2 > 0$, $Arg(|z|^2) = 0$ y

$$\begin{array}{rcl} Arg\left(\overline{z}\right) & = & Arg\left(|z|^2\right) + Arg\left(z^{-1}\right) + 2k\pi \\ & = & 0 + Arg\left(z^{-1}\right) + 2k\pi \end{array}$$

De donde resulta

$$Arg\left(\overline{z}\right) = Arg\left(z^{-1}\right)$$

y como $|\overline{z}| = |z|$,

$$\overline{z} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \text{ sen}(\frac{\pi}{6}\pi)).$$

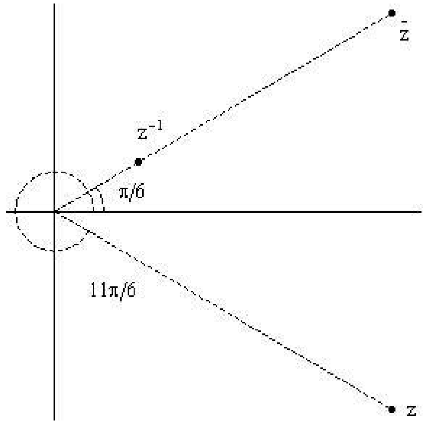


Figura 7.21: $z = \sqrt{3} - i$ su inversa z^{-1} y $\overline{z}$.

7 Forma Trigonométrica del Inverso y del Cociente

Nota 7.24. En el ejemplo anterior, probamos que cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un valor de $k \in \mathbb{Z}$ que satisface

$$\begin{array}{rcll} Arg(z^{-1}) + Arg(z) & = & 2k\pi & \quad\text{y} \\ Arg(\overline{z}) & = & Arg(z^{-1}). & \end{array}$$

Luego, las formas trigonométricas son

$$\begin{array}{rcl} z^{-1} & = & |z|^{-1}\left(\cos(-Arg(z) + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(-Arg(z) + 2k\pi)\right) \\ \overline{z} & = & |z|\,\left(\cos(-Arg(z) + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(-Arg(z) + 2k\pi)\right). \end{array}$$

Ejemplo 7.25. Expresar en forma binómica los resultados de las siguientes operaciones

(a) z^6/w^{15} para $z = -3 + 3i$ y $w = -1 - \sqrt{3}i$

(b) $z = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{30}$.

(a) Del Ejemplo 7.21, sabemos que

$$z = 3\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(3\pi/4)),$$

$$w = 2(\cos(4\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(4\pi/3)).$$

Notemos que $z^6/w^{15} = z^6 w^{-15}$. Aplicamos el Corolario 7.19 del teorema de De Moivre,

$$Arg(w^{-15}) = Arg((w^{-1})^{15}) = 15Arg(w^{-1}) = -15Arg(w) + 2k\pi,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} Arg\left(\frac{z^6}{w^{15}}\right) &= 6\,\frac{3}{4}\pi - 15\,\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \\ &= \frac{9}{2}\pi - 20\pi + 2k\pi, \\ &= -\frac{31}{2}\pi + 2k\pi. \end{aligned}$$

Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{array}{rcccccl} & \leq & -\frac{31}{2}\pi + 2k\pi & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ \frac{31}{2}\pi & \leq & 2k\pi & < & 2\pi + \frac{31}{2}\pi & \Longleftrightarrow \\ \frac{31}{4} & \leq & k & < & \frac{35}{4}. \end{array}$$

Entonces $k = 8$ y

$$Arg\left(\frac{z^6}{w^{15}}\right) = -\frac{31}{2}\pi + 16\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, la forma trigonométrica de z^6/w^{15} es

$$\frac{z^6}{w^{15}} = \frac{3^6}{2^{12}}\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\ \text{sen}(\frac{\pi}{2})\right).$$

(b) Calculemos ahora $z = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{30}$.
Comenzamos por calcular la forma trigonométrica de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Por un lado, tenemos $|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$, y por lo tanto, es un punto de la circunferencia de radio 1 con argumento $Arg(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \pi/3$. Entonces

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\pi/3) + i\,\text{sen}(\pi/3).$$

De aquí, aplicando el teorema de De Moivre 7.12 y su Corolario 7.19, tenemos

$$\begin{array}{rcll} z & = & (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{30} & \Longleftrightarrow \\ z & = & \cos(30\pi/3 + 2k\pi) + i\,\text{sen}(30\pi/3 + 2k\pi) & \Longleftrightarrow \\ z & = & \cos(10\pi + 2k\pi) + i\,\text{sen}(10\pi + 2k\pi) & \Longleftrightarrow \end{array}$$

y ya que $k \in \mathbb{Z}$ debe verificar $10\pi + 2k\pi \in [0, 2\pi)$,

$$0 \leq 10\pi + 2k\pi < 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad -10 \leq 2k < -8 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 \leq k < -4,$$

entonces $k = -5$ y la solución es

$$z = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0) \qquad \text{o, en forma binómica} \qquad z = 1.$$

Capítulo 8

Raíces $n$ésimas

Definición 8.1. *Llamamos raíz n-ésima de un número complejo z al número $w \in \mathbb{C}$ que satisface la ecuación $w^n = z$ donde $n \in \mathbb{N}$.*

Calcularemos primero raíces n-ésimas de 1 y luego veremos ejemplos para casos más generales.

1 Raíces n-ésimas de la Unidad

Antes de hallar las raíces *n-ésimas* de la unidad, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 8.2. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que
(a) $z^4 = 1$. (b) $z^6 = 1$. (c) $z^8 = 1$.

(a) Hallar las raíces cuartas de 1 es equivalente a hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = 1$.
Por la unicidad de la forma trigonométrica z^4 y 1 deben tener el mismo módulo y el mismo argumento principal. Entonces $|z| = 1$ y $Arg(z^4) = 0$.
Aplicando el teorema de De Moivre,

$$Arg(z^4) = 4Arg(z) + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4Arg(z) + 2k\pi \in [0, 2\pi)$.
Como además debe ser $Arg(z^4) = 0$, resulta

$$4Arg(z) + 2k\pi = 0, \Longleftrightarrow Arg(z) = -\frac{2k\pi}{4} \quad \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z},$$

o, equivalentemente,

$$Arg(z) = -\frac{k\pi}{2} \quad \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Observemos que no hay un único valor de k que satisfaga esta ecuación. La restricción $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ implica $-\frac{k\pi}{2} \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$, luego,

$$0 \geq \frac{k\pi}{2} > -2\pi \iff 0 \geq k > -4 \iff k = 0, -1, -2, -3.$$

Los Argumentos de las raíces z se obtienen al reemplazar los posibles valores de k en la expresión $-\frac{k\pi}{2}$, en este caso tenemos cuatro ángulos

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \pi, \quad \alpha_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

como $|z| = 1$ se tiene que $z = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$ de donde las raíces cuartas de 1 son

$$z_1 = 0, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -i.$$

Gráficamente, corresponden a los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia de centro 0 y radio 1 como muestra la figura.

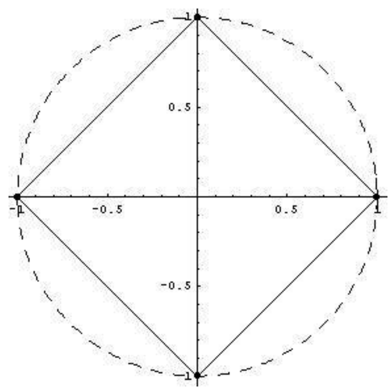


Figura 8.1: $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$

(b) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = 1$.
Por la unicidad de la forma trigonométrica se tiene que

$$z^6 = 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \begin{cases} |z^6| & = & 1 \\ Arg(z^6) & = & Arg(1) \end{cases}$$

De la condición sobre el módulo resulta

$$|z^6| = |z|^6 = 1 \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1.$$

Por otro lado, $Arg(z^6) = 6Arg(z) + 2k\pi$ y $Arg(1) = 0$, entonces de la condición de igualdad de los argumentos se tiene

$$6Arg(z) + 2k\pi = 0, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

o equivalentemente

$$Arg(z) = \frac{2k\pi}{6} = -\frac{k\pi}{3} \in [0, 2\pi).$$

Luego,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & -\frac{k\pi}{3} & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ 0 & \geq & k & > & -6 & . \end{array}$$

Por lo tanto $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ y así obtenemos 6 raíces de la unidad:

$$\begin{array}{llcll}
Arg(z_1) = 0 & \Rightarrow & z_1 & = & 0 & \text{para } k = 0, \\
Arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} & \Rightarrow & z_2 & = & \cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{\pi}{3}) & \text{para } k = -1, \\
Arg(z_3) = \dfrac{2\pi}{3} & \Rightarrow & z_3 & = & \cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(2\dfrac{\pi}{3}) & \text{para } k = -2, \\
Arg(z_4) = \pi & \Rightarrow & z_4 & = & \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) & \text{para } k = -3 \\
Arg(z_5) = \dfrac{4\pi}{3} & \Rightarrow & z_5 & = & \cos(\dfrac{4\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(4\dfrac{\pi}{3}) & \text{para } k = -4, \\
Arg(z_6) = \dfrac{5\pi}{3} & \Rightarrow & z_6 & = & \cos(\dfrac{5\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(5\dfrac{\pi}{3}) & \text{para } k = -5,
\end{array}$$

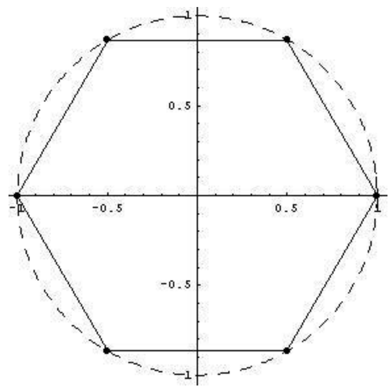


Figura 8.2: $\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\}$

(c) Queda como ejercicio para el lector hallar las raíces octavas de la unidad y verificar que se encuentran en los vértices del octógono inscripto en la circunferencia de radio 1, como muestra la siguiente figura.

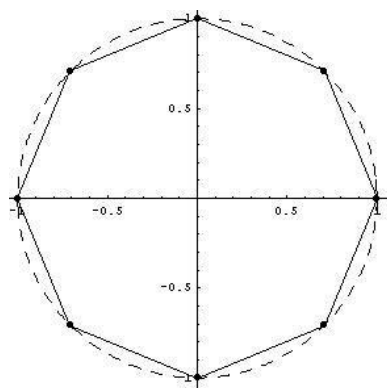


Figura 8.3: $\{z \in \mathbb{C} : z^8 = 1\}$

Raíces n-ésimas de la Unidad - Caso General

Ahora queremos hallar todas las raíces n-ésimas de 1 para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, es decir, hallar todos los números $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$w^n = 1.$$

Propiedades 8.3. *Las raíces n-ésimas de la unidad son exactamente n y* *tienen la forma*

$$w = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Demostración: Como $w^n = 1$, resulta

$$|w^n| = 1 \Rightarrow |w|^n = 1 \Rightarrow |w| = 1.$$

Además, $Arg(w^n) = Arg(1) = 0$ y $Arg(w^n) = nArg(w) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ o podemos escribir

$$Arg(w^n) = nArg(w) - 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Luego, despejando se tiene que

$$Arg(w) = \frac{2k\pi}{n},$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq \frac{2k\pi}{n} = \frac{k}{n}2\pi \in [0, 2\pi)$, o bien $0 \leq \frac{k}{n} < 1$. Por lo tanto, su forma trigonométrica resulta

$$w = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \qquad \square$$

2 Cálculo de Raíces n-ésimas

Ejemplo 8.4.

(a) Hallar las raíces cúbicas de $-8i$, es decir, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = -8i$.

(b) Hallar las raíces cuartas de $1 + \sqrt{3}i$, es decir, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$.

(a) Para $z \in \mathbb{C} \,/\, z^3 = -8i$, escribimos $-8i$ en forma trigonométrica

$$-8i = 8\,(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi)),$$

ya que $|-8i| = 8$ y $Arg(-8i) = \frac{3}{2}\pi$.
Por unicidad de la forma trigonométrica debe satisfacerse

$$|z^3| = |-8i| \qquad \text{y} \qquad Arg(z^3) = Arg(-8i).$$

Entonces

$$|z|^3 = 8 \qquad \Longrightarrow \qquad |z| = 2$$

y respecto del argumento, existe $k \in \mathbb{Z}$ que satisface

$$\begin{array}{rcll} 3Arg(z) - 2k\pi & = & \frac{3}{2}\pi & \Longleftrightarrow \\ Arg(z) & = & \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}k\pi. & \end{array}$$

Buscamos todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ que satisfacen $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{array}{rcccll} 0 & \leq & \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{\pi}{2} & \leq & \frac{2}{3}k\pi & < & \frac{3}{2}\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{3}{4} & \leq & k & < & \frac{9}{4}, & \end{array}$$

entonces k puede tomar los valores 0,1 y 2. Luego, las raćes cúbicas de $-8i$ son:

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) \qquad k = 0,$$

$$z_2 = 2(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7}{6}\pi) \qquad k = 1,$$

$$z_3 = 2(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11}{6}\pi) \qquad k = 2.$$

y sus gráficos son

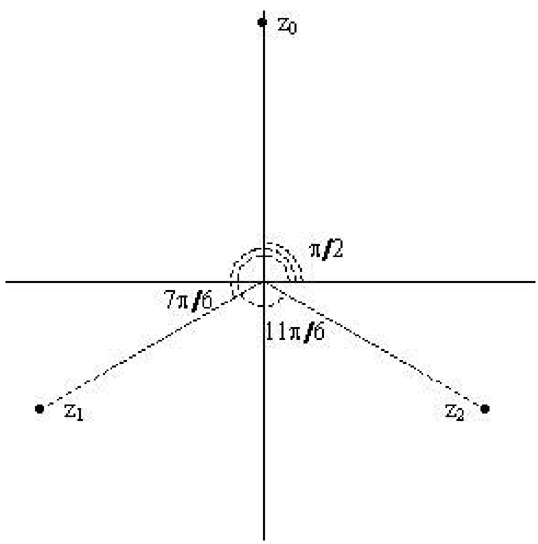


Figura 8.4: Raíces cúbicas de $-8i$

(b) Resolvamos ahora la ecuación $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$.
Escribimos en forma trigonométrica el número $1 + \sqrt{3}i$, siguiendo los pasos del item anterior. Tenemos, $|1+\sqrt{3}i| = 2$ y $1+\sqrt{3}i$ es un número ubicado en el primer cuadrante, luego $Arg(1 + \sqrt{3}i)$ satisface

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \qquad , \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

entonces $Arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$.
La propiedad de unicidad de la forma trigonométrica implica que

$$|z^4| = |\sqrt{3} + i| \qquad \text{y} \qquad Arg(z^4) = Arg(\sqrt{3} + i).$$

Entonces

$$|z|^4 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad |z| = \sqrt[4]{2}$$

y $k \in \mathbb{Z}$ satisface

$$\begin{array}{lcll} 4Arg(z) - 2k\pi & = & \frac{\pi}{3} & \Longleftrightarrow \\ Arg(z) & = & \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}. & \end{array}$$

Buscamos todos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ que satisfacen $\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{array}{ccccll} 0 & \leq & \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} & < & 2\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{\pi}{12} & \leq & k\frac{\pi}{2} & < & \frac{23}{12}\pi & \Longleftrightarrow \\ -\frac{1}{6} & \leq & k & < & \frac{23}{6}, & \end{array}$$

entonces k puede tomar los valores 0,1,2 y 3 y, por lo tanto, los valores para $Arg(z)$ son, respectivamente, $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7}{12}\pi, \dfrac{13}{12}\pi$ y $\dfrac{19}{12}\pi$. Luego, las raíces cuartas de $1 + \sqrt{3}i$ son:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12})) \qquad k = 0,$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\frac{7}{12}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{7}{12}\pi)) \qquad k = 1,$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\frac{13}{12}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{13}{12}\pi)) \qquad k = 2,$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{19}{12}\pi)) \qquad k = 3.$$

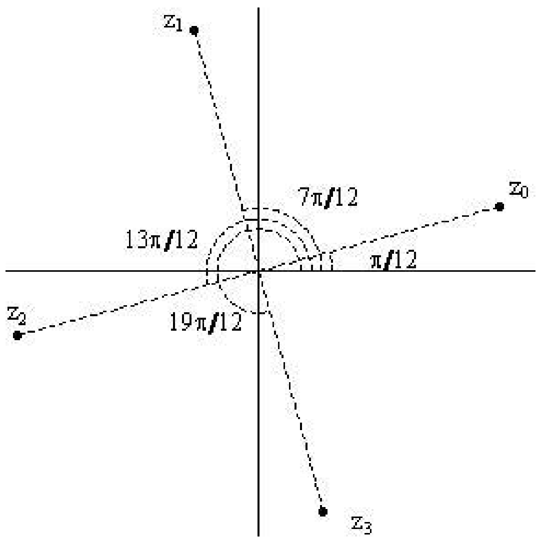


Figura 8.5: Raíces cuartas de $1 + \sqrt{3}i$

Apéndice A

Trigonometría

1 Breve historia

La trigonometría se ocupa, principalmente, de estudiar la relación entre lados y ángulos de un triángulo. Etimológicamente, la palabra *trigonometría* significa medida de los elementos de un triángulo, esta palabra proviene del griego *trigonos*: triángulo y *metría*: medida. Esta rama de la matemática nace en Grecia en el siglo II a.C. como consecuencia del interés que tenían los astrónomos en obtener una manera de predecir el movimiento de astros y diseñar calendarios más precisos. Es utilizada también en cartografía, navegación y agrimensura.

La Trigonometría es utilizada también para modelar fenómenos periódicos que se observan en la naturaleza como por ejemplo las mareas, los latidos del corazón, la vibración de una cuerda.

Más información histórica se puede encontrar en [4], [5],[9].

Como complemento bibliográfico de los temas desarrollados en estas notas se sugieren los siguientes textos: [6], [7], [10],[11].

2 Ángulos y medidas

Los sistemas más usados para medir un ángulo son el *sistema sexagesimal* y el *sistema circular o radial.*

En el sistema sexagesimal, la unidad es el *grado*. Un grado se define como la noventa-ava parte de un ángulo recto.

En el sistema circular o radial la unidad de medida es el *radián*. Un radián es el ángulo que abarca un arco de la circunferencia de longitud igual al radio de la misma. Por ejemplo, en una circunferencia de radio 1 el radián es el ángulo correspondiente a un arco de longitud 1, en una circunferencia de radio 5 el radián es el ángulo correspondiente a un arco de longitud 5.

Longitud de Arco

La relación entre la medida del ángulo α expresada en radianes y la longitud de arco s sobre una circunferencia de radio r está dada por

$$s = \alpha r \qquad \text{o bien} \qquad \alpha = \frac{s}{r}.$$

El ángulo α es independiente del valor del radio de la circunferencia que se esté considerando (ver Figura A.1). Notemos que el ángulo central subten-

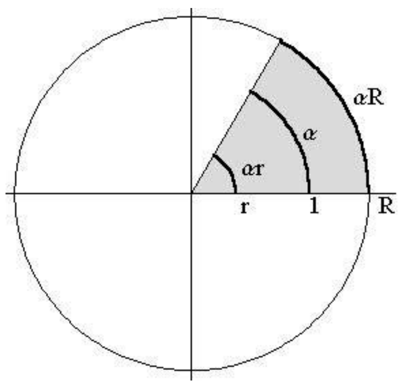


Figura A.1: Longitud de arco de un ángulo α.

dido por un arco de circunferencia s de longitud α sobre el círculo unitario es de α radianes. Por este motivo usaremos el círculo unitario para definir las funciones trigonométricas.

Ejemplo A.1. Calculemos el ángulo central α subtendido por un arco de circunferencia de longitud $s = 2\pi$ de un círculo de radio

(a) $r=1$ (b) $r=4$ (c) $r=8$.

Usamos la relación $\alpha = s/r$ entre la longitud de arco de circunferencia s de un círculo de radio r y el ángulo subtendido α:
(a) $\alpha = \frac{s}{r} = 2\pi$ (b) $\alpha = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (c) $\alpha = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Consideremos una circunferencia de radio 1, la longitud total es 2π, es decir un giro completo corresponde a un ángulo de 2π radianes. La relación entre radianes y grados está dada por la ecuación

$$\pi \ radianes = 180^\circ.$$

- Un ángulo llano mide 180° y equivale a medio giro, es decir π radianes.
- Un ángulo recto mide 90° y representa la mitad de un ángulo llano, por lo tanto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes.

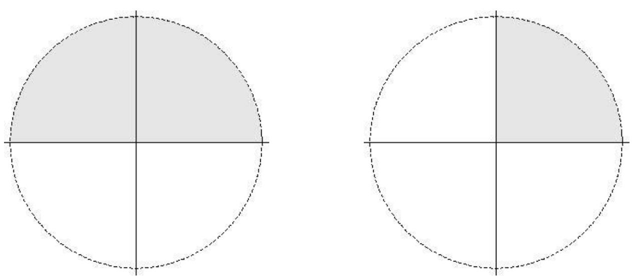


Figura A.2: Ángulo llano $180^\circ = \pi$ radianes Ángulo recto $90^\circ = \pi/2$ radianes

Veamos ejemplos de conversión de un sistema de medición angular al otro.

Ejemplo A.2. Expresar en el sistema radial la medida del ángulo dado.
(a) 30°. (b)-135°.

De la equivalencia $180^\circ = \pi$ radianes se tiene que $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ y

(a) $30^\circ = 30\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$.

(b) $-135^\circ = -135\frac{\pi}{180} = -\frac{3}{4}\pi$.

Ejemplo A.3. Convertir al sistema sexagesimal.

(a) $\dfrac{7}{4}\pi$. (b) $-\dfrac{11}{6}\pi$.

Ya que π rad $= 180°$, se tiene que 1 rad $= \dfrac{180°}{\pi}$, luego

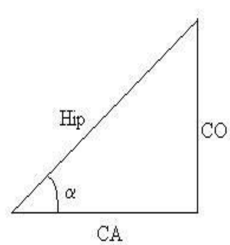
(a) $\dfrac{7}{4}\pi = \dfrac{7}{4}\pi\dfrac{180°}{\pi} = 315°$.

(b) $-\dfrac{11}{6}\pi = -\dfrac{11}{6}\pi\dfrac{180°}{\pi} = -330°$.

De aquí en adelante usaremos el sistema radial para la medición de ángulos a menos que se establezca lo contrario, por lo que omitiremos la palabra *radianes*. Es decir, cuando hablemos de un ángulo, por ejemplo $\frac{\pi}{4}$, vamos a querer decir $\frac{\pi}{4}$ radianes.

3 Funciones Trigonométricas Elementales en el Círculo Unitario

Recordemos la definición de las funciones trigonométricas básicas para un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo de lados CO (cateto opuesto) y CA cateto adyacente) e hipotenusa Hip, como se muestra en la siguiente figura



$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{Hip}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{Hip}} \qquad \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$$

$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{\mathrm{Hip}}{\mathrm{CO}} \qquad \sec(\alpha) = \frac{\mathrm{Hip}}{\mathrm{CA}} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CO}}$$

Consideramos ahora el círculo centrado en el origen de radio 1. A cada ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ (en radianes) le asociamos un punto P sobre la circunferencia unitaria de manera que la longitud de arco desde el punto $A = (1, 0)$ hasta P sea α (ver Figura A.3).

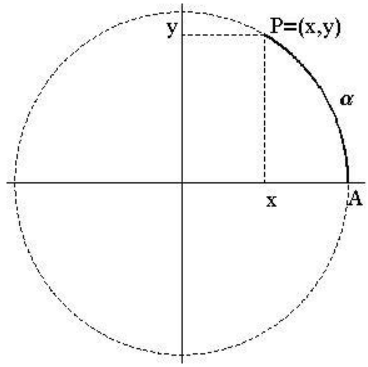


Figura A.3: Ángulo α (rad.) en el círculo unitario.

Notar que el origen de coordenadas, el punto $P = (x, y)$ y el punto $(x, 0)$, determinan un triángulo rectángulo, como muestra la Figura A.4.

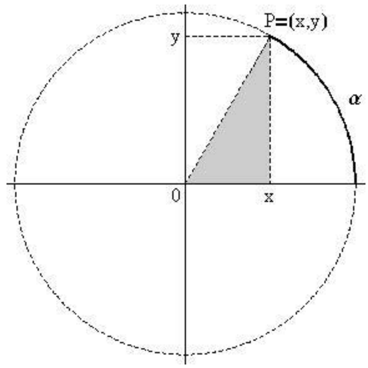


Figura A.4: Triángulo rectángulo inscripto en la circunferencia.

Por otro lado observemos los triángulos rectángulos de la Figura A.5. El de menor altura tiene hipotenusa igual al radio de la circunferencia que contiene al punto $P = (x, y)$, es decir 1. Luego para este triángulo resulta $\cos(\alpha) = x$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = y$. Para el triángulo de mayor altura se tiene $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$ con base igual a 1, es decir CA=1, luego su altura es $\operatorname{tg}(\alpha)$.

Definición A.4. *Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$ y sea $P = (x, y)$ el punto sobre la circunferencia unitaria que determina un ángulo α con el eje x. Entonces*

$$\begin{array}{lll} \cos(\alpha) = x, & \operatorname{sen}(\alpha) = y, & \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}. \\ \sec(\alpha) = \frac{1}{x}, & \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{y}, & \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{x}{y}. \end{array}$$

Observación A.5. Consideremos una circunferencia de radio r y centro $O = (0, 0)$. Sea $P = (x, y)$ el punto sobre la circunferencia tal que la longitud

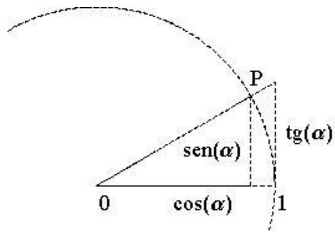


Figura A.5: Funciones Trigonométricas Elementales en el Círculo Unitario.

de arco $\hat{AP}$ es αr, donde $A = (r, 0)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{x}{r}, & \operatorname{cosec}(\alpha) &= \tfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \tfrac{r}{x} \\
\cos(\alpha) &= \frac{y}{r}, & \sec(\alpha) &= \tfrac{1}{\cos(\alpha)} = \tfrac{r}{y} \\
\operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{x}{y}, & \cot(\alpha) &= \tfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \tfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \tfrac{y}{x}.
\end{aligned}$$

4 Valores para Ángulos Típicos en el Primer Cuadrante

En esta sección usaremos fórmulas de geometría para calcular los valores de $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ para $\alpha = 0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$.

- **Valores para** $\alpha = 0$

  Notemos que el punto de la circunferencia unitaria que determina un ángulo $\alpha = 0$ es $(x, y) = (1, 0)$, entonces se tiene que

  $$\cos(0) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(0) = 0.$$

- **Valores para** $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

  Consideremos un triángulo equilátero de lado 1 con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y en el punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria que tiene ambas coordenadas positivas y se encuentra a distancia 1 de $(1, 0)$ (ver la Figura A.6). Por tratarse de un triángulo equilátero los ángulos

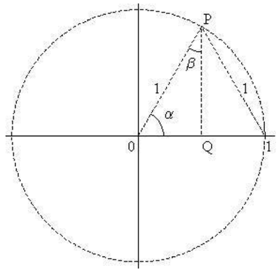


Figura A.6: Ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

también son iguales y cada uno mide $\pi/3$. El triángulo rectángulo OPQ de la figura tiene base x de longitud $1/2$, por lo tanto,

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}.$$

Del teorema de Pitágoras resulta $1 = x^2 + y^2$ y $|y| = \sqrt{1 - x^2}$. Por ser $y > 0$ y $x = 1/2$ se tiene $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, y de aquí

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- **Valores para** $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

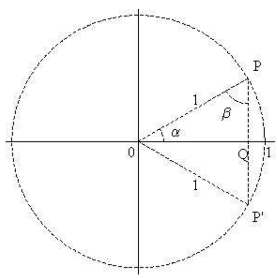


Figura A.7: Ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Consideramos el triángulo rectángulo OPQ de la Figura A.7. Notemos que el triángulo OPP' es equilátero ya que sus ángulos interiores miden $\pi/3$. De aquí que el triángulo OPQ tiene altura $y = 1/2$ y base $x = \sqrt{3}/2$, de donde

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

- **Valores para** $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

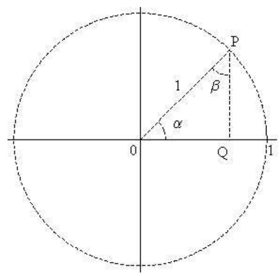


Figura A.8: Ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Tomamos el triángulo isósceles OPQ donde la base y la altura son de igual longitud, como se muestra en la Figura A.8. Por ser isósceles, OPQ tiene dos lados iguales $x = y$ de donde resulta $1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2}$ y de aquí $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Por otro lado, uno de los ángulos es recto y como tiene dos ángulos interiores iguales $\alpha = \beta$, éstos deben medir $\pi/4$.
Estas observaciones implican que

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- **Valores para** $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

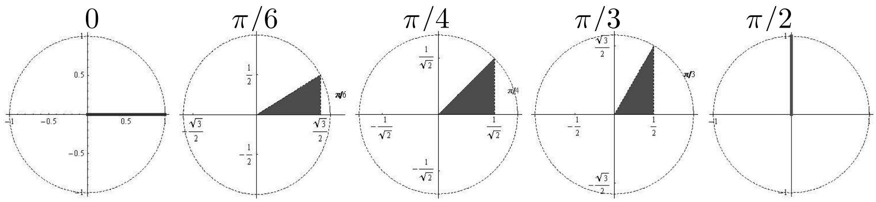
En este caso observemos que el triángulo se reduce a un segmento vertical, es decir su base x es nula, y su altura y es 1. En otras palabras, el punto de la circunferencia unitaria que determina un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ es el $(0, 1)$ de donde

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Así se obtiene la tabla de valores para ángulos típicos (Cuadro A.1)

α (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\alpha\,(^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Cuadro A.1: Valores para Ángulos Típicos del Primer Cuadrante



Consideremos (x, y) en la circunferencia unitaria, de la definición A.4 resulta $\cos(\alpha) = x$, $\operatorname{sen}(\alpha) = y$ donde α es el ángulo asociado al punto (x, y). De aquí se tiene la siguiente tabla de signos para $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$.

Cuadrante II $\cos(\alpha) < 0$ $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$	Cuadrante I $\cos(\alpha) > 0$ $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$
Cuadrante III: $\cos(\alpha) < 0$ $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$	Cuadrante IV $\cos(\alpha) > 0$ $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$

Cuadro A.2: Signos de las $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$.

A partir de los signos de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ podemos deducir los signos de las otras cuatro funciones trigonométricas elementales $\operatorname{tg}(x), \sec(x), \operatorname{cosec}(x)$ y $\operatorname{cotg}(x)$ en cada cuadrante.

5 Identidades trigonométricas

El siguiente resultado es una de las identidades más usadas en trigonometría y se basa en el teorema de Pitágoras.

Proposición A.6. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces* $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Demostración: Queda como ejercicio demostrar esta identidad aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo inscripto en el círculo unitario (ver Figura A.4).

$\square$

Ejemplo A.7. Muestre que **no** se cumple $\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\beta) = 1\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Dar un contraejemplo).

Dividiendo la identidad $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ por $\cos^2(\alpha)$ y por $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ se obtienen, respectivamente, las identidades

$$\operatorname{tg}^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) \qquad\qquad 1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha).$$

Otras identidades trigonométricas:

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes identidades trigonométricas.

(a) Fórmulas para la suma de ángulos:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$

Las siguientes identidades se pueden deducir de las anteriores.

(b) Fórmulas para la resta de ángulos:

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
- $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

(c) Fórmulas para el doble de un ángulo:

- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$
- $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

(d) Otras identidades:

- $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$

6 Reducción al primer cuadrante

Mediante el uso de las identidades anteriores podemos calcular el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas para un ángulo dado, reduciéndolo al primer cuadrante.

Propiedades A.8. *Dado un ángulo cualquiera α se satisfacen las siguientes relaciones,*

$$\begin{array}{llcrlcr} (a) & \operatorname{sen}(\pi - \alpha) & = & \operatorname{sen}(\alpha), & \cos(\pi - \alpha) & = & -\cos(\alpha) \\ (b) & \operatorname{sen}(\pi + \alpha) & = & -\operatorname{sen}(\alpha), & \cos(\pi + \alpha) & = & -\cos(\alpha) \\ (c) & \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) & = & -\operatorname{sen}(\alpha), & \cos(2\pi - \alpha) & = & \cos(\alpha) \end{array}$$

Demostración: Para demostrar las identidades dadas, basta con aplicar las fórmulas de suma y resta de ángulos para cada caso particular:

(a) De las identidades

$$\operatorname{sen}(\theta - \gamma) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\gamma) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\gamma)$$

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos(\theta)\cos(\gamma) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\gamma),$$

tomando $\theta = \pi$ y $\gamma = \alpha$ se tiene

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(\alpha) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Sabiendo que $\operatorname{sen}(\pi) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$, resulta

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha).$$

(b) Probar estas identidades a partir de las identidades para la suma de ángulos sabiendo que $\operatorname{sen}(\pi) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$.

(c) Basta aplicar las identidades para la resta de dos ángulos a $2\pi - \alpha$ (queda como ejercicio). $\square$

Propiedades A.9. *Dado un ángulo cualquiera β, existe un ángulo $\alpha \in [0, \pi/2]$ que satisface*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = |\operatorname{sen}(\beta)| \qquad y \qquad \cos(\alpha) = |\cos(\beta)|.$$

Demostración: Si $\beta \in [0, 2\pi]$, entonces definimos α de la siguiente manera,

$$\begin{array}{lll} \text{si } \beta \in (0, \pi/2) \text{ (cuadrante I)} & \Longrightarrow & \alpha = \beta, \\ \text{si } \beta \in (\pi/2, \pi) \text{ (cuadrante II)} & \Longrightarrow & \alpha = \pi - \beta, \\ \text{si } \beta \in (\pi, 3\pi/2) \text{ (cuadrante III)} & \Longrightarrow & \alpha = \beta - \pi, \\ \text{si } \beta \in (3\pi/2, 2\pi) \text{ (cuadrante IV)} & \Longrightarrow & \alpha = 2\pi - \beta. \end{array}$$

Si $\beta \notin [0, 2\pi]$, hallamos el ángulo en $[0, 2\pi]$ congruente a β y luego hallamos el ángulo α. $\square$

Definición A.10. *Denominaremos ángulo de referencia al ángulo obtenido por reducción al primer cuadrante.*

Veamos una interpretación geométrica:

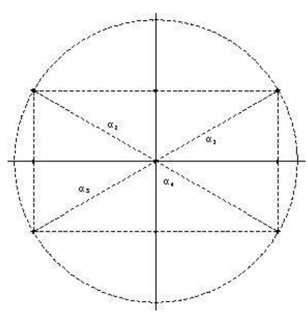


Figura A.9: Ángulos en los distintos cuadrantes con el mismo ángulo de referencia

Dibujemos un círculo unitario, marquemos un ángulo α del primer cuadrante y marquemos en el mismo gráfico los siguientes ángulos:

$$\alpha_2 = \pi - \alpha, \qquad \alpha_3 = \pi + \alpha, \qquad \alpha_4 = 2\pi - \alpha.$$

Recordamos que al considerar una circunferencia de radio 1, los valores de $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ se corresponden con las coordenadas x e y del punto $P = (x, y)$ de la circunferencia correspondiente al ángulo α.

Para $\alpha_2 = \pi - \alpha$ se tiene el siguiente gráfico

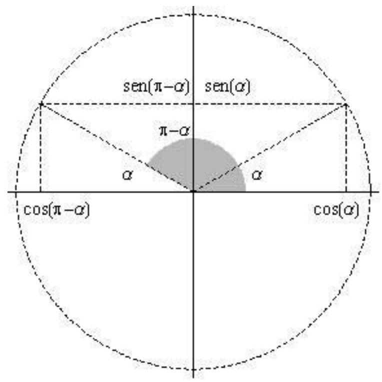


Figura A.10: Ángulo en el cuadrante II y su ángulo de referencia

En la Figura A.11 graficamos el ángulo $\alpha_3 = \pi + \alpha$ en el tercer cuadrante.

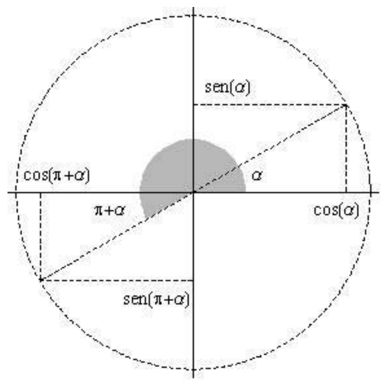


Figura A.11: Ángulo en el cuadrante III y su ángulo de referencia

Por último, en la Figura A.12 graficamos $\alpha_4 = 2\pi - \alpha$ en el cuarto cuadrante

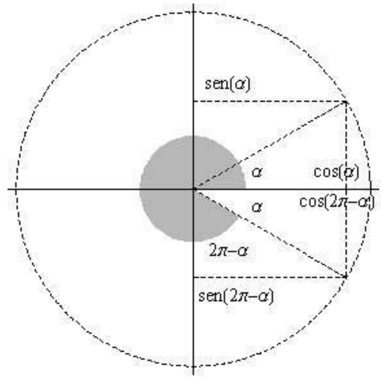


Figura A.12: Ángulo en el cuadrante IV y su ángulo de referencia

Observamos entonces que tomando un ángulo β cualquiera, los valores de $\operatorname{sen}(\beta)$ y $\cos(\beta)$ se pueden obtener por reducción al primer cuadrante, anteponiendo al valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$ o $\cos(\alpha)$ del ángulo α de referencia en el primer cuadrante, el signo correspondiente según el cuadrante.

Ejemplo A.11. Calcule los siguientes valores por reducción al primer cuadrante.

(a) $\operatorname{sen}(11\pi/6)$ y $\cos(11\pi/6)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ y $\cos(7\pi/6)$
(c) $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ y $\cos(2\pi/3)$ (d) $\operatorname{sen}(\pi/4)$ y $\cos(\pi/4)$

En cada caso vamos a ubicar el cuadrante donde se encuentra el ángulo dado y hallaremos su ángulo de referencia α. Luego anteponemos al valor de la función en α el signo correspondiente según el cuadrante.

(a) El ángulo $11\pi/6$ se encuentra en el cuarto cuadrante, luego

$$11\pi/6 = 2\pi - \alpha$$

+ de donde se deduce que el ángulo de referencia es $\alpha = \pi/6$. Por otro lado, como $11\pi/6$ en el cuarto cuadrante observamos que debe ser $\operatorname{sen}(11\pi/6) < 0$ y $\cos(11\pi/6) > 0$. Aplicando los signos y la tabla de valores del primer cuadrante, resulta

$$\operatorname{sen}(11\pi/6) = -\operatorname{sen}(\pi/6) = -\frac{1}{2} \quad y \quad \cos(11\pi/6) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

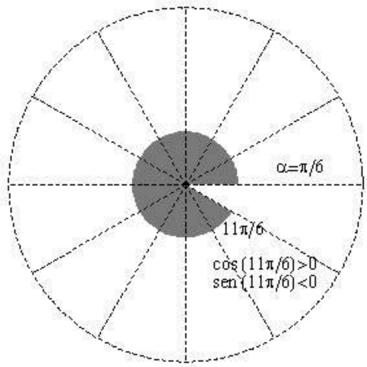


Figura A.13: Ángulo $11\pi/6$, ángulo de referencia $\pi/6$

(b) El ángulo $7\pi/6 = \pi + \alpha$ por hallarse en el tercer cuadrante. Luego $\alpha = \pi/6$. Por tratarse de un ángulo del tercer cuadrante debe ser $\operatorname{sen}(7\pi/6) < 0$ y $\cos(7\pi/6) < 0$, de donde

$$\operatorname{sen}(7\pi/6) = -\operatorname{sen}(\pi/6) = -\frac{1}{2} \text{ y } \cos(7\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

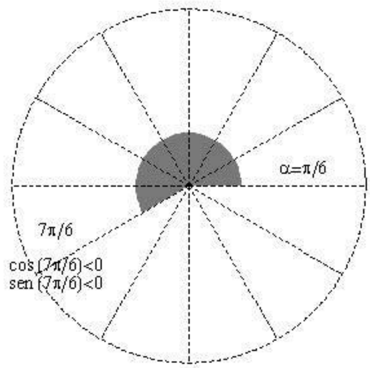


Figura A.14: Ángulo $7\pi/6$, ángulo de referencia $\pi/6$

(c) En este caso, el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, luego $2\pi/3 = \pi - \alpha$ con $\alpha = \pi/3$. Además $\operatorname{sen}(2\pi/3) > 0$ y $cos(2\pi/3) < 0$, entonces

$$\operatorname{sen}(2\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y \qquad \cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

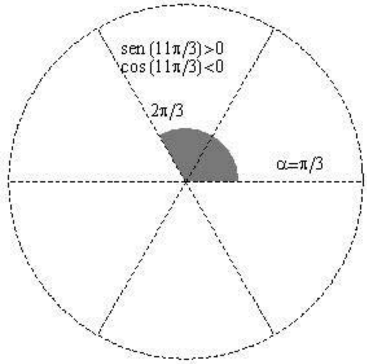


Figura A.15: Ángulo $2\pi/3$, ángulo de referencia $\pi/3$

(d) Por último, $\pi/4$ es un ángulo del primer cuadrante y $\text{sen}(\pi/4) > 0$ y $\cos(\pi/4) > 0$. Luego, $\text{sen}(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

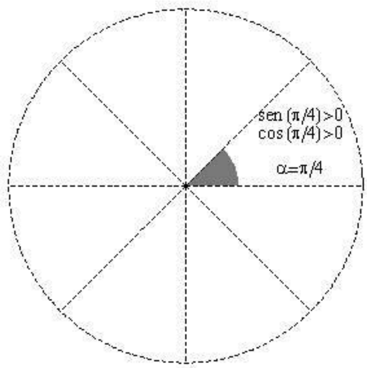


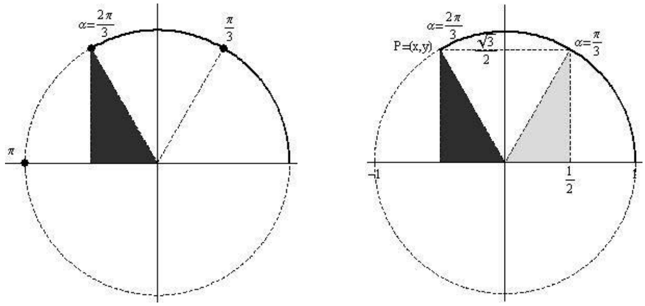
Figura A.16: Ángulo $\pi/4$.

Ejemplo A.12. Calculamos $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(\alpha)$ para los siguientes casos:

(a) $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ (b) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (c) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ (d) $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

(a) Representamos gráficamente el ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ y el *triángulo de referencia.*

El ángulo de referencia es $\pi/3$. Del Cuadro A.1 se tiene que $\cos(\pi/3) =$

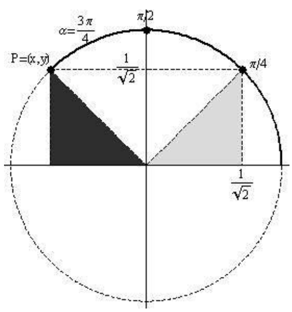


Triángulo inscripto para $\frac{2\pi}{3}$. Triángulo de referencia.

Figura A.17: Reducción al primer cuadrante, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

$1/2$ y $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Como $\alpha = 2\pi/3$ es del segundo cuadrante debe ser $x = \cos(\alpha) < 0$, $y = \operatorname{sen}(\alpha) > 0$ de donde resulta, $\cos(\pi/3) = -1/2$ y $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

(b) Para el caso $\alpha = 3\pi/4$ proponemos al lector realizar los pasos como en el inciso anterior y verificar que se obtiene el gráfico de la Figura A.18

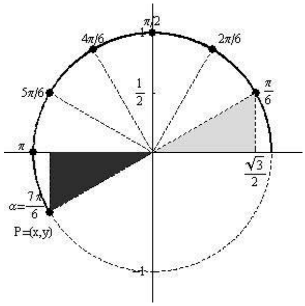


$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Figura A.18: Reducción al primer cuadrante, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

(c) Ya que $\alpha = \frac{7\pi}{6} \in [\pi, 3\pi/2)$, α es un ángulo del cuadrante III se tiene que $\cos(\alpha) < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$. (ver Cuadro A.2)
Observamos, por otro lado, que el ángulo de referencia es $\pi/6$ y de los Cuadros A.1 y A.2 obtenemos la Figura A.19

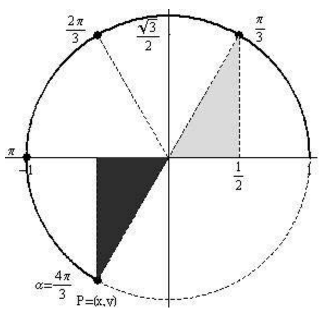


$$\cos\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Figura A.19: Reducción al primer cuadrante, $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

(d) El ángulo $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ también pertenece al tercer cuadrante y por lo tanto $\cos(\alpha) < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$. Del Cuadro A.1 se concluye



$$\cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura A.20: Reducción al primer cuadrante, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

7 Funciones Trigonométricas Elementales en la Recta.

Consideremos un valor cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A = (1, 0)$. Entonces:

(a) Si $\alpha > 0$, existe un único punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria tal que la longitud de arco $\hat{AP}$, medida en sentido *antihorario* desde A a P, es α. En particular, si $\alpha > 2\pi$, el arco $\hat{AP}$ será mayor que una vuelta completa, ya que la longitud total de la circunferencia es 2π.

(b) Si $\alpha = 0$ o α es un múltiplo de 2π entonces $P = A$.

(c) Si, en cambio, $\alpha < 0$, entonces existe un único punto P sobre la circunferencia unitaria tal que la longitud de arco $\hat{AP}$, medida en sentido *horario* desde A a P, es $|\alpha|$.

De esta manera, a cada valor real α se le asoció un único punto P sobre la circunferencia unitaria, como se hizo al definir las funciones trigonómetricas en el círculo unitario en la sección 3 (ver Figura A.3):
Dada $\alpha \in \mathbb{R}$ le asociamos el punto P de la circunferencia unitaria y calculamos el valor de cada función trigonométrica considerando el triángulo rectángulo inscripto que queda determinado.

Recordemos que el gráfico de una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como el conjunto $Gr(f) = \{(x, y)/x \in A, y = f(x)\}$.

Observación A.13. La coordenada x representa la longitud de arco sobre una circunferencia unitaria hasta ahora denotada α, pero de aquí en más la llamaremos x.

En la Figura A.21 mostramos la asociación entre un ángulo en la circunferencia y entre un punto de la recta real.

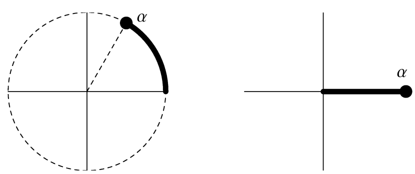
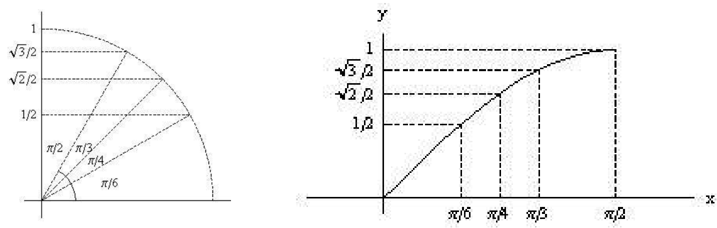


Figura A.21: Correspondencia entre un ángulo en radianes y un número real.

Graficamos sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

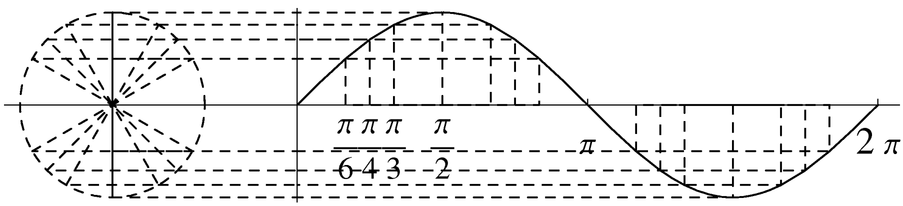
Para $x \in [0, \pi/2]$, x en el primer cuadrante, se tienen los siguientes gráficos para la circunferencia y para el plano cartesiano.



Circunferencia unitaria Plano cartesiano.

Figura A.22: Gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ para $x \in [0, \pi/2]$.

Para $x \in [0, 2\pi]$ tenemos



Circunferencia unitaria Plano cartesiano.

Figura A.23: Gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Para completar el gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ consideramos la siguiente observación.

Observación A.14. Si $x > 2\pi$ la longitud del arco es mayor que una vuelta completa y el ángulo que queda determinado es equivalente a otro con valor en el intervalo $[0, 2\pi)$, estos ángulos se denominan *congruentes*.
Notar que para $x < 0$ también podemos encontrar una longitud de arco equivalente en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Definición A.15. *Dados dos ángulos α y β, se dice que son congruentes si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha - \beta = 2\,k\,\pi$ (difieren en un número entero de vueltas).*

Ángulos congruentes determinan un mismo punto sobre la circunferencia unitaria, de allí resulta la siguiente propiedad.

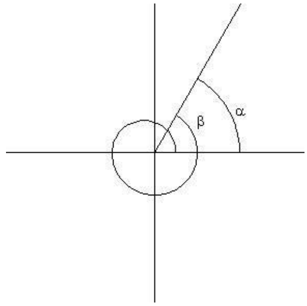


Figura A.24: Ángulos congruentes.

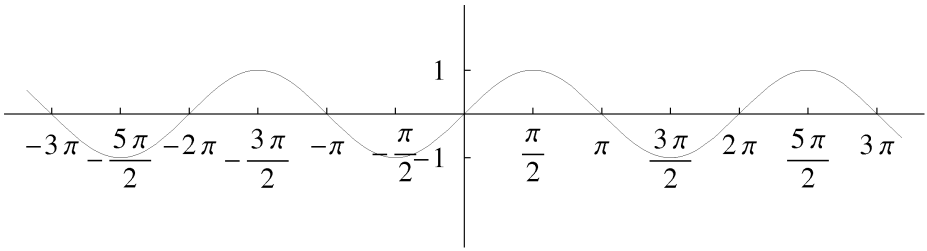


Figura A.25: Gráfico de sen(x).

Propiedades A.16. *Dados dos ángulos congruentes* α *y* $\beta = \alpha + 2\,k\,\pi$ *para algún* $k \in \mathbb{R}$*, la imagen por una determinada función trigonométrica es la misma.*

El gráfico de $\operatorname{sen}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el plano cartesiano resulta
De manera análoga podemos obtener los gráficos de $\cos(x)$ (Figura A.26), $\operatorname{tg}(x)$ (Figura A.27).
Se agregaron también los gráficos de $\operatorname{cosec}(x), \sec(x) y \operatorname{cotg}(x)$ (Figura A.28).

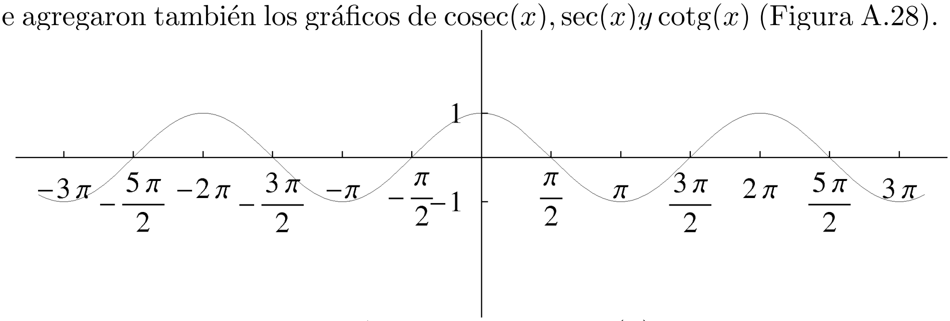


Figura A.26: Gráfico de cos(x).

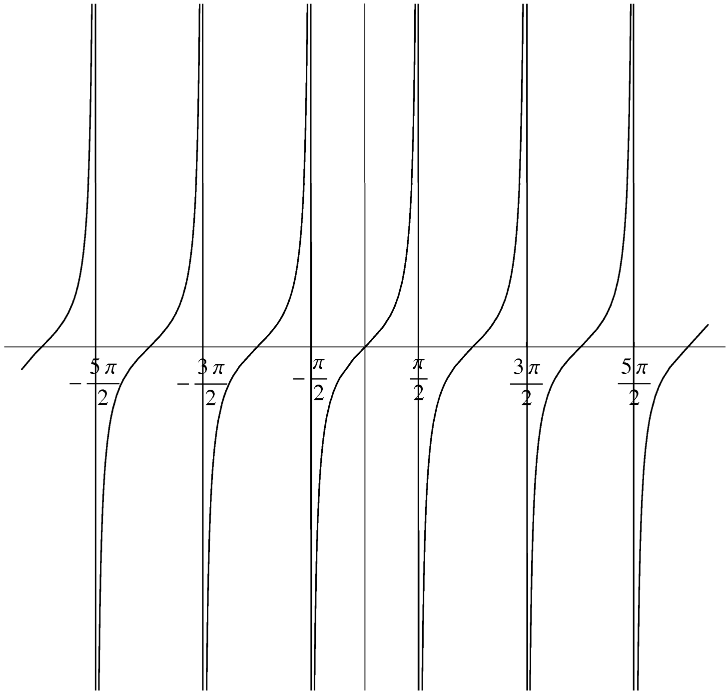


Figura A.27: Gráfico de $\operatorname{tg}(x)$.

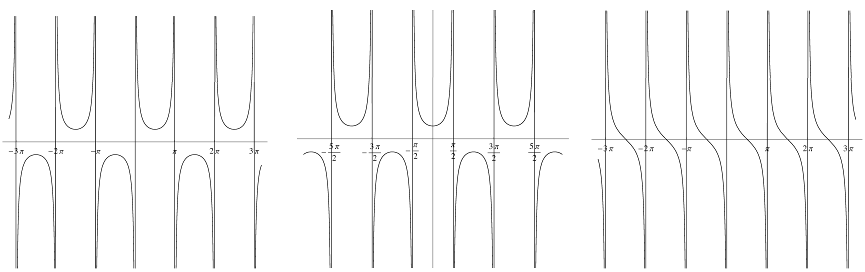


Figura A.28: Gráfico de $\operatorname{cosec}(x)$. Gráfico de $\sec(x)$. Gráfico de $\operatorname{cotg}(x)$.

Podemos observar cierta simetría en los gráficos, esto se debe a que las funciones satisfacen las siguientes relaciones:

$$
\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos(x), & \sec(-x) = \sec(x), \\
\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), & \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec}(x), \\
\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x), & \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x), .
\end{array}
$$

Es decir, $\cos(x)$ y $\sec(x)$ satisfacen la propiedad $f(-x) = f(x)$, es decir, son *funciones pares* en cambio $\operatorname{sen}(x), \operatorname{tg}(x), \operatorname{cosec}(x)$ y $cotg(x)$ satisfacen la propiedad $f(-x) = -f(x)$, es decir, son *funciones impares.*

También podemos observar que los valores de las funciones se repiten a intervalos iguales, esta propiedad que tienen algunas funciones se denomina *periodicidad.*

Definición A.17. *Decimos que una función $f(x)$ es periódica si existe un número positivo p tal que*

$$f(x+p) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El menor valor p que satisface la definición se denomina período.

Las funciones trigonométricas *seno*, *coseno*, *cosecante* y *secante* tienen período 2π y las funciones *tangente* y *cotangente* tienen período π,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosec}(x+2\pi) = \operatorname{cosec}(x) \\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) & \sec(x+2\pi) = \sec(x) \\ \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x) & \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg}(x). \end{array}$$

La propiedad de periodicidad de las funciones trigonométricas es útil para modelar matemáticamente o aproximar el comportamiento de algunos fenómenos de la naturaleza tales como los latidos del corazón, las fases de la luna y el movimiento de los planetas.

Bibliografía

[1] "Análisis de Variable Compleja", Ahlfors, L.V. Ed Aguilar, Madrid 1971.

[2] "One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra", Apostol. John Wiley & Sons, Inc. 1967.

[3] "Ascenso Infinito: Breve Historia de las Matemáticas", Berlnski. Editorial Debate, 2006.

[4] " Historia de las matemáticas", Boyer, C. Alianza Universidad, España 1986

[5] "Historia de las Matemáticas", Collette, J.P., Madrid: Siglo XXI,1985

[6] "Trigonometría", Esteban Piñero, M. y otros. Editorial Síntesis, España 1998.

[7] "Circulando por el círculo", Fernández Reyes, M. y otros. Editorial Síntesis, España 1991.

[8] "Variable Compleja", Spiegel, M.R. Ed McGraw Hill, Madrid 1988.

[9] "A Concise History of Mathematics", Struik, D.J. Dover Publications, Inc. New York, 1987.

[10] "Álgebra y Geometría analítica", Swokowski, E.W. Belmont: Grupo Editorial Iberoamericana, 1983.

[11] "Cálculo en una variable", Thomas, G. y Finney, R. Addison Wesley Longman, 1998.

Índice alfabético