Introducción a la matemática universitaria

Schffini, Claudio.
Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario / por: Claudio Schifini; Alejandro Varela y Adriana Aragón. - 1a ed. 6a reimp.– Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento, 2013.
465 p.; 23x17 cm. – (Textos básicos de la UNGS)

ISBN 978-987-9300-65-3

1. Matemática-Educación Superior. I. Varela, Alejandro. II. Aragón, Adriana. III. Título
CDD 510.071 1

J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507 Fax: (54 11) 4469-7504
e-mail: ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

ISBN: 978-987-9300-65-3

Introducción a la matemática
universitaria

Adriana Aragón
Juan Pablo Pinasco
Claudio Schifini
Alejandro Varela

Colección Textos Básicos

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO

AUTORIDADES

Rector
Dr. Eduardo Rinesi

Vicerrector
Lic. Gustavo Kohan

Director del Instituto de Ciencias
Dr. Roberto Schmit

Directora del Instituto del Conurbano
Lic. Daniela Soldano

Director del Instituto de Industria
Lic. Claudio Fardelli Corropolese

Director del Instituto del Desarrollo Humano
Dr. Daniel Lvovich

Secretario de Investigación
Lic. Pablo Bonaldi

Secretaria Académica
Dra. Gabriela Diker

Secretario General
Prof. José Gustavo Ruggiero

Secretaria Administrativa
CP Daniela Guardado

Secretario Legal y Técnica
Dr. Jaime González

Prefacio

Este libro esta dirigido a los estudiantes de los primeros cursos de matemática de la universidad, tanto para los que estudian una carrera en ciencias exactas como aquellos que necesitan una aproximación a estos conceptos para otras disciplinas.

Las guías de trabajos prácticos de las materias *Matemática I* y *Elementos de matemática I* para las que fue inicialmente dirigido este libro aparecen en dos apéndices.

Los autores y colaboradores de estas notas hemos dado clase en las asignaturas mencionadas durante varios años. Adriana Aragón escribió el capítulo 1 y casi todo el 10; Juan Pablo Pinasco el 7, el 9 y la parte de matriz de insumo-producto del 10; Claudio Schifini los capítulos 2, 3, 4, 5, 6 y el 8; Alejandro Varela el 11. Samanta Cecowski estuvo a cargo del tipeado en LaTeX de la mayor parte del texto, de la compaginación y revisión del trabajo de los autores y de la estandarización de los gráficos. Agradecemos la colaboración en ejercicios, ejemplos y correcciones de Cristian Conde y Carlos Scirica. Luis Beccaria y Alejandro Ríos leyeron algunos capítulos y aportaron sugerencias. Alejandra Maestripieri y Martín Pavón corrigieron y revisaron todo el texto para intentar uniformizarlo respetando los estilos de cada autor. Agradecemos también a Gabriel Acosta, Gabriel Larotonda, Paula Remesar y Marcela Villagra.

Índice general

Capítulo 1

Números reales

1.1. El conjunto de los números reales

El estudio del Cálculo Infinitesimal consiste, en esencia, del estudio de los números reales. Es necesario, por lo tanto, tener claro qué son los números reales y sobre todo sus propiedades básicas. Sin embargo, no intentaremos dar una definición rigurosa de *número real* si no más bien hacer una revisión del tema haciendo hincapié en el (buen) uso de sus propiedades.

Los primeros números que aparecen en la historia son los números naturales, que son aquellos que usamos para contar (1 casa, 2 árboles, etc.) y se designan con la letra $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}.$$

Sabemos que dos números naturales se pueden sumar, obteniendo así otro número natural. Sin embargo al restar dos números naturales podemos obtener un resultado negativo (es decir, podemos obtener un número que no es natural). Por este motivo *agregamos* al conjunto de los números naturales los números negativos junto con el número cero y llamamos a este nuevo conjunto $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4, \cdots\}.$$

De esta forma tenemos que todos los números naturales son también números enteros, es decir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

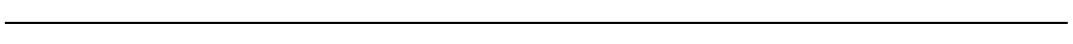
Luego para poder medir partes de un todo (por ejemplo la tercera parte de una herencia, medio alfajor, tres cuartos de hora, etc.) incorporamos los números racionales. Extendemos este concepto al considerar también cocientes negativos. Estos se notan con la letra $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

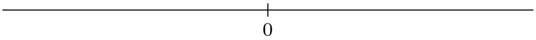
Es claro que todo número natural es entero y que todo número entero es racional (pues $m = \frac{m}{1}$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$), o sea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Además, a todo número positivo antes descripto podemos identificarlo con una longitud y representarlo geométricamente sobre una recta.

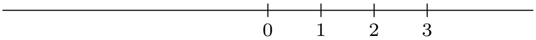
Para ver esto, procedemos de la siguiente manera: dada una recta



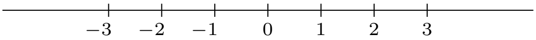
marcamos sobre ella un punto privilegiado que será el cero



y tomamos una longitud arbitraria como unidad (por ejemplo 1 centímetro). Partiendo del punto 0, a medida que desplazamos la unidad hacia la derecha, obtenemos los números naturales $\mathbb{N}$



Convenimos que si desplazamos la unidad hacia la izquierda del 0, obtenemos los números negativos



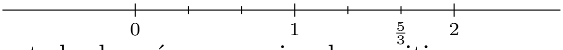
Así hemos representado sobre la recta los números enteros $\mathbb{Z}$.

Ahora, ¿cómo representamos los números racionales?

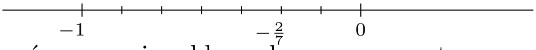
Por ejemplo, $\frac{5}{3}$. Observemos que

$$\frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}\ ,$$

luego, para representar $\frac{5}{3}$ en la recta, desplazamos 1 unidad hacia la derecha y dividimos la segunda unidad en tres partes iguales; desplazamos hacia la derecha dos de estas partes y obtenemos $\frac{5}{3}$ (para ver mejor agrandamos un poco la escala, pero la unidad es todavía la longitud 1).



Así quedan representados los números racionales positivos como una longitud sobre la recta. Si consideramos un número racional negativo, realizamos el mismo procedimiento pero desplazando la unidad o sus partes hacia la izquierda. Por ejemplo, para representar al número $-\frac{2}{7}$, la longitud que marcamos sobre la recta es



Con lo cual a todo número racional lo podemos representar como una longitud sobre la recta. Ahora surge naturalmente la siguiente pregunta, ¿será cualquier longitud sobre la recta un número de los descriptos hasta ahora?

Un discípulo de Pitágoras trajo la respuesta:

Si dibujamos un cuadrado de lado 1 y trazamos su diagonal, esa longitud, ¿cuánto vale?, ¿será un número racional?

Observemos primero que dicha longitud se puede representar sobre la recta.

En efecto, si trazamos una recta perpendicular a la recta numérica, que pase por el 1, y desplazamos desde el 1 una unidad hacia arriba, al unir el extremo con el 0 de la recta numérica tendremos la misma longitud d. Con ayuda de un compás trasladamos la longitud de la diagonal d sobre la recta numérica.

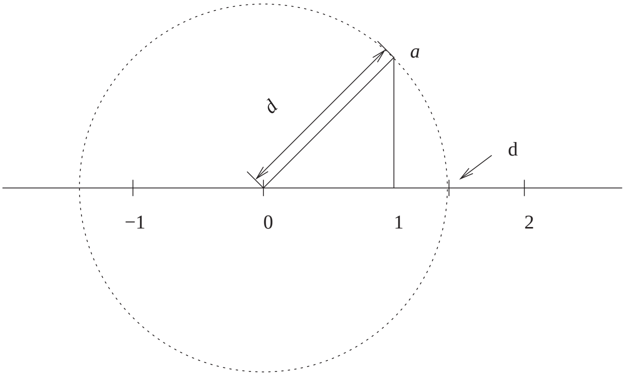


Figura 1.1: La construcción de un número de cuadrado 2.

Veamos ahora si esta longitud es un número racional. Es decir si existen $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d = \frac{m}{n}$. No conocemos el valor de d pero conocemos (por el teorema de Pitágoras) alguna información sobre su longitud; al ser d la hipotenusa de un triángulo rectángulo con ambos catetos de longitud 1 deducimos que

$$1^2 + 1^2 = d^2.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la fracción $\frac{m}{n}$ es irreducible (no podemos simplificar una parte de m con una parte de n). Luego,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Por lo tanto, $m^2 = 2 \cdot n^2$ ①

Entonces, m^2 es par y, por lo tanto, m es par. ②

Que m sea par significa que existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2 \cdot h$. ③

Reemplazando ③ en ① resulta que

$$2 \cdot n^2 = m^2 = (2 \cdot h)^2 = 4 \cdot h^2 \quad \text{entonces} \quad n^2 = 2 \cdot h^2. \quad ④$$

Luego, n^2 es par y, por lo tanto, n es par. ⑤

De ② y ⑤ concluimos, contra lo supuesto, que $\dfrac{m}{n}$ no es irreducible (podemos simplificar por 2). Esto es un absurdo (una contradicción) que provino de suponer que $d = \frac{m}{n}$. Luego $d \notin \mathbb{Q}$, o sea d no es la longitud de ningún número racional. ✓

De este modo podemos concluir que, aunque a todos los números racionales los podemos representar como una longitud, hay longitudes que no se pueden medir con números racionales. Estas longitudes (hacia la derecha y hacia la izquierda del 0), junto con los racionales *completan* la recta. Entendemos así al conjunto de los números reales como el conjunto de todas las longitudes y lo notamos con la letra $\mathbb{R}$. Además $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Dado un número racional, dividiendo el numerador por el denominador, podemos escribirlo mediante una expresión decimal. Por ejemplo:

$$\tfrac{1}{2} = 0,5 \qquad \tfrac{3}{4} = 0,75 \qquad \tfrac{25}{4} = 6,25\ .$$

En algunos casos su expresión decimal puede ser periódica (a partir de un cierto momento un subconjunto de dígitos de su mantisa se repite infinitamente). Por ejemplo:

$$\tfrac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3} = 0,33333\cdots \qquad \tfrac{19}{90} = 0,2\overset{\frown}{1} = 0,2111111\cdots$$

Puede probarse que todo número racional posee un desarrollo decimal finito (su mantisa consta de un número finito de dígitos) o bien periódico.

Recíprocamente, todo número que posee un desarrollo decimal finito o periódico es un número racional. Por ejemplo:

$$0,25 = \tfrac{25}{100} = \tfrac{1}{4}\ ; \qquad 0,2\overset{\frown}{1} = \tfrac{21-2}{90} = \tfrac{19}{90}\ .$$

Sin embargo, si consideramos el número $r = 0,101001000100001000001\cdots$, tiene un desarrollo decimal infinito y no periódico. Es claro que podemos construir infinitos de estos números que, por lo observado, no serán racionales. Estos números son los que rellenan los "baches" que dejan los números racionales en la recta y se denominan *números irracionales.*

Una desventaja de caracterizar a los números reales mediante su desarrollo decimal es la de no poder escribir ningún número irracional; es decir, nunca podemos describir completamente (usando solo el desarrollo decimal) un número irracional.

Al pensar en el desarrollo decimal de un número irracional, por ejemplo

$$r \ = \ 3,101001000100001000001000000100000001\cdots$$

tenemos que imaginar cómo continúa este desarrollo. Sin embargo, resulta claro que a dicho número lo podemos aproximar por un número racional. Es decir

$$3,1 \qquad 3,101 \qquad 3,101001 \qquad 3,1010010001$$

son números racionales que aproximan cada vez mejor el valor de r. Queremos remarcar que al trabajar con una calculadora no distinguimos la diferencia entre r y el número racional $3,1010010001$ (pues son idénticos en sus primeros diez dígitos).

Ya hemos probado que la longitud d descripta como la diagonal de un cuadrado de lado 1, es un número irracional. Pero, en principio no sabemos qué número es (¿es mayor que 10?, ¿menor que 5?). Para conocerlo un poco mejor, vamos a aproximarlo con un número racional. Recordemos que por el teorema de Pitágoras sabíamos que

$$d^2 = 2$$

y como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, entonces d tiene que estar entre estos dos números, es decir $1 < d < 2$. Podemos mejorar este argumento si nos fijamos qué sucede con $1,1$; con $1,2$; con $1,3$; etc. Al elevarlos al cuadrado

$$(1,1)^2 = 1,21 \quad (1,2)^2 = 1,44 \quad (1,3)^2 = 1,69 \quad (1,4)^2 = 1,96 \quad (1,5)^2 = 2,25\ .$$

Usando el mismo argumento que antes descubrimos que $1,4 < d < 1,5$; o sea, sabemos cuál es su primer decimal, $d = 1,4...$ Si queremos conocer más decimales del desarrollo de d tenemos que calcular

$$(1,40)^2 = 1,9600 \qquad (1,41)^2 = 1,9881 \qquad (1,42)^2 = 2,0164$$

entonces $1,41 < d < 1,42$, y así $d = 1,41...$ El número racional $1,41 = \frac{141}{100}$ aproxima el valor de d pero de ningún modo es el número d. Sin embargo, repitiendo el procedimiento sabemos qué hacer para conocer más dígitos de d (aunque no vamos a poder conocerlos todos).

1.2. Propiedades básicas de la suma de números reales

En el conjunto de los números reales, tenemos definidas dos operaciones: la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$. Estas operaciones verifican algunas propiedades básicas que ya conocemos y que usamos naturalmente. Vamos a enunciarlas para ponernos de acuerdo sobre el lenguaje que vamos a adoptar y para poner en evidencia exactamente cómo las usamos.

Las primeras propiedades que mostraremos se refieren a la operación suma.

Dados a y b números reales, la suma $a + b$ es un número real. Resulta razonable preguntarnos cómo sumar más de dos números, por ejemplo $a + b + c$.

Esto podemos hacerlo de dos maneras: Podemos sumar primero b y c obteniendo $b + c$ y después añadirle al número a el resultado anterior, obteniendo así $a + (b + c)$; o bien, podemos sumar primero a y b obteniendo $a + b$ y luego añadirle a este número el número c, esto es $(a + b) + c$. La primer propiedad , que llamaremos $\mathcal{S}_1$, establece que estos resultados son iguales

$$\mathcal{S}_1 : \qquad (a + b) + c = a + (b + c), \qquad \text{para todo } \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Gracias a esta propiedad es que sabemos sumar más de dos números. Por ejemplo

$$a + b + c + d = ((a + b) + c) + d = (a + b) + (c + d).$$

La segunda propiedad que mencionaremos nos dice que la suma de dos números puede efectuarse en cualquier orden, ya que ambos resultados son iguales

$$\mathcal{S}_2 : \qquad a + b = b + a, \quad \forall^*\ a,\ b \in \mathbb{R}.$$

La propiedad $\mathcal{S}_3$ establece que entre los números reales, el número 0 cumple un papel especial

$$\mathcal{S}_3 : \qquad a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall\ a \in \mathbb{R}.$$

El número 0 se llama *elemento neutro* para la suma, ya que al sumar 0 a un número real dado, obtenemos el mismo número. Notemos que en particular $0 + 0 = 0$.

La cuarta y última propiedad básica para la suma hace referencia a la existencia de elementos opuestos; es decir dado un elemento $a \in \mathbb{R}$ existe otro elemento $b \in \mathbb{R}$

---

[*] Abreviaremos la expresión *...para todo...* con el símbolo $\forall$.

tal que $a + b = 0$. Podemos demostrar que cada número a tiene un único elemento opuesto, al que llamaremos $-a$.

$$\mathcal{S}_4 : \qquad \text{si } \ a \in \mathbb{R} \ \text{ existe } \ -a \in \mathbb{R}, \ \text{ tal que } \ a + (-a) = 0.$$

Podemos ver que el opuesto de un número no siempre será un número negativo. Por ejemplo al considerar $a = -3$, el número $-a$ debe satisfacer $(-3) + (-a) = 0$, luego $-a = 3$, que no es un número negativo.

En base a la propiedad $\mathcal{S}_4$ vamos a poder considerar a la operación resta $(-)$ como una suma. Recordemos que $-b$ es el opuesto de b; definimos

$$a - b = a + (-b).$$

O sea que restar b, es sumar el opuesto de b.

Hemos visto en la propiedad $\mathcal{S}_3$ que el número 0 verifica $a + 0 = a$ para todo número real a; podríamos preguntarnos ¿será cierto que si un número r satisface que al ser sumado, por ejemplo, con el número 3 y da como resultado 3, entonces r es el 0 ? Esto es, ¿será cierto que si r es un número tal que $r + 3 = 3$ entonces $r = 0$? Sí, es cierto, y podemos demostrar este hecho usando las propiedades antes mencionadas. Veamos, si

$$r + 3 = 3,$$

la propiedad $\mathcal{S}_4$, nos asegura que existe el opuesto del número 3, esto es -3. Podemos entonces sumar -3 a la igualdad anterior para conseguir una expresión equivalente

$$\begin{array}{lrcl}
\text{sumamos } -3 \text{ a ambos miembros} & r + 3 + (-3) & = & 3 + (-3) \\
\text{luego aplicando la propiedad } \mathcal{S}_1 & r + (3 + (-3)) & = & 3 + (-3) \\
\text{que al aplicar la propiedad } \mathcal{S}_4 \text{ se transforma en} & r + 0 & = & 0 \\
\text{que por la propiedad } \mathcal{S}_3 \text{ resulta} & r & = & 0. \quad \checkmark
\end{array}$$

Con esto hemos demostrado que si un número r satisface $r + 3 = 3$ (y usando $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ y $\mathcal{S}_4$) entonces el número r es 0. Podemos enunciar este hecho de forma general:

$$\text{Si } \ r \ \text{ es tal que } \ a + r = a\,, \ \text{ entonces } \ r = 0.$$

Con este razonamiento hemos demostrado que el 0 es el **único** número con la propiedad $\mathcal{S}_3$.

No consideramos a esta una propiedad básica (a pesar de ser muy importante) ya que podemos deducirla de las propiedades anteriores.

Veamos cómo, con las propiedades estudiadas hasta ahora, podemos justificar la resolución de ecuaciones sencillas (recordemos que *resolver* una ecuación es hallar todos los número reales x que verifican la igualdad). Resolvamos la ecuación

$$x + 2 = 5.$$

Por la propiedad $\mathcal{S}_4$ existe el opuesto de 2, esto es -2. Entonces, podemos sumar -2 a ambos miembros de la expresión anterior y obtenemos una expresión equivalente

$$(x+2)+(-2)=5+(-2).$$

Al aplicar la propiedad $\mathcal{S}_1$ obtenemos

$$x+(2+(-2))=3,$$

que por la propiedad $\mathcal{S}_4$ es equivalente a

$$x+0=3.$$

Al aplicar la propiedad $\mathcal{S}_3$ (recordemos que $x+0=x$) obtenemos

$$x=3. \quad \checkmark$$

Naturalmente estos procesos tan detallados son de interés al estudiar las propiedades, pero en la práctica simplemente recurriremos a estas justificaciones cuando dudemos del paso a seguir y habitualmente no explicaremos tan minuciosamente cuándo aplicamos cada propiedad.

Antes de pasar a las propiedades relacionadas con el producto, queremos hablar un poco más de la propiedad $\mathcal{S}_2$. Esta propiedad nos dice que no importa el orden en el cual se sumen dos números, ya que el resultado es igual; o sea

$$a+b=b+a.$$

Cabe mencionar que no todas las operaciones se comportan de esta manera. Por ejemplo, la resta no cumple esta propiedad. Es distinto restar dos números en un orden o restarlos en el orden inverso; dado que estamos sumando números distintos, $a-b=a+(-b)$ y $b-a=b+(-a)$ por definición.

1.3. Propiedades básicas del producto de números reales

Dados a y b números reales, el producto $a \cdot b$ es un número real. Enunciamos a continuación cuatro propiedades que satisface el producto, análogas a las de la suma:

$$\mathcal{P}_1: \qquad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c, \quad \forall\, a,\ b,\ c\in\mathbb{R}.$$

Así para calcular $a\cdot b\cdot c$ bastará efectuar primero $a\cdot b$ y al resultado multiplicarlo por c. La segunda propiedad que enunciamos (también como en el caso de la suma) dice que podemos calcular el producto en cualquier orden indistintamente

$$\mathcal{P}_2: \qquad a\cdot b=b\cdot a, \quad \forall\, a,\ b\in\mathbb{R}.$$

La propiedad $\mathcal{P}_3$ establece que entre los números reales, el número 1 cumple un papel especial con respecto al producto (tan especial como el 0 con respecto a la suma)

$$\mathcal{P}_3: \qquad a\cdot 1=1\cdot a=a, \quad \forall\, a\in\mathbb{R}.$$

Al número 1 se lo llama *elemento neutro* para el producto, ya que al multiplicar un número real dado por el número 1, obtenemos el mismo número. También (como en el caso de la suma) podemos demostrar que el elemento 1 es el **único** elemento neutro para el producto.

Una observación clara pero de vital importancia es que $1 \neq 0$.

La cuarta propiedad básica para el producto hace referencia a la existencia de elementos inversos, es decir dado un elemento no nulo $a \in \mathbb{R}$ existe otro elemento $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$. Nuevamente, el inverso de a es único y lo llamamos a^{-1}.

$$\mathcal{P}_4: \qquad \text{si } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0, \quad \text{entonces} \quad \exists^* \, a^{-1} \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1.$$

Observemos que la condición $a \neq 0$ en la propiedad $\mathcal{P}_4$ es necesaria, ya que si $a = 0$ podemos probar (y de hecho lo haremos, página 19) que $0 \cdot b = 0$ para todo elemento $b \in \mathbb{R}$; luego no podremos encontrar ningún número 0^{-1} que satisfaga $0 \cdot 0^{-1} = 1$ ¡puesto que $1 \neq 0$!

Así como pensamos la resta como una suma, de la misma manera podremos pensar la división como una multiplicación (con ayuda de la propiedad $\mathcal{P}_4$) del siguiente modo

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad \forall \, a, \; b \; \in \mathbb{R} \text{ con } b \neq 0.$$

Como ya hemos mencionado 0^{-1} no existe, por lo tanto no podemos dividir por el número 0 ya que para dividir por cualquier número b este debe tener inverso multiplicativo. Observemos entonces que nunca escribiremos un cociente de la forma $\frac{a}{0}$ para ningún a. Notemos además que, si $a \neq 0$, entonces el cociente $\frac{1}{a} = 1 \cdot a^{-1}$ (por ser 1 el elemento neutro del producto) resulta ser el inverso multiplicativo de a.

La propiedad $\mathcal{P}_4$ tiene muchas consecuencias importantes, con ella podemos justificar razonamientos que usamos a menudo. Por ejemplo si tenemos dos números a y b que satisfacen $2a = 2b$ decimos que esto es equivalente a $a = b$. El razonamiento mediante el cual justificamos esto es "hemos cancelado el 2", es decir, multiplicamos ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} 2a & = & 2b \\ \frac{1}{2} \cdot 2a & = & \frac{1}{2} \cdot 2b \\ 1 \cdot a & = & 1 \cdot b \\ a & = & b. \end{array}$$

Este hecho planteado en general sugiere que $k \cdot a = k \cdot b$ implica[†] $a = b$. Esta afirmación sólo es válida para todo k no nulo. Por ejemplo, si $k = 0$, $a = 3$ y $b = -5$ la primer igualdad resulta

$$\begin{array}{rcl} k \cdot a & = & k \cdot b \\ 0 \cdot 3 & = & 0 \cdot (-5) \\ 0 & = & 0 \quad \text{verdadera,} \end{array}$$

---

[*] Abreviaremos la expresión ...*existe*... con el símbolo $\exists$.

[†] De aquí en más abreviaremos las expresiones ...*implica*... o ...*entonces*... mediante el símbolo $\Rightarrow$

mientras que la segunda igualdad resulta

$$\begin{array}{rcll} a & = & b & \\ 3 & = & -5 & \text{falsa.} \end{array}$$

Encontramos un ejemplo concreto que contradice la proposición. A este tipo de ejemplos los llamamos *contraejemplos.*

La diferencia entre el contraejemplo hallado y la ecuación original radica en que en el contraejemplo no podemos cancelar k ya que es el número 0. Si quisiéramos cancelar el 0, deberíamos multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{0}$ ¡cosa imposible, ya que $\frac{1}{0}$ no es un número! Enunciaremos la propiedad correctamente:

$$\text{si} \quad k \neq 0 \quad \text{y} \quad k \cdot a = k \cdot b \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Para demostrar esta propiedad debemos suponer que se verifica la igualdad $k{\cdot}a = k{\cdot}b$ donde $k \neq 0$ y arribar mediante algún razonamiento correcto a la conclusión $a = b$

$$\text{si} \quad k \neq 0 \quad \text{y} \quad k \cdot a = k \cdot b \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llrcll} \text{por } \mathcal{P}_4 & \exists\, k^{-1} \text{ con} & k^{-1} \cdot (k \cdot a) & = & k^{-1} \cdot (k \cdot b) & \Rightarrow \\ & \text{por } \mathcal{P}_1 & (k^{-1} \cdot k) \cdot a & = & (k^{-1} \cdot k) \cdot b & \Rightarrow \\ & \text{por } \mathcal{P}_2 & (k \cdot k^{-1}) \cdot a & = & (k \cdot k^{-1}) \cdot b & \Rightarrow \\ & \text{por } \mathcal{P}_4 & 1 \cdot a & = & 1 \cdot b \quad \Rightarrow & \\ & \text{por } \mathcal{P}_3 & a & = & b. \quad \checkmark & \end{array}$$

Con esto hemos demostrado la propiedad.

Otra consecuencia de la propiedad $\mathcal{P}_4$ es la propiedad que establece que el producto de dos números reales es 0 *si y sólo si* alguno de los dos números es el número 0 (o ambos lo son).

La expresión *...si y sólo si...* merece un párrafo aparte.

Abreviamos dicha expresión con el símbolo $\Leftrightarrow$ y significa que ambas proposiciones, "el producto de dos números reales es 0" y "alguno de los dos números es el número 0", son equivalentes; es decir, se cumplen ambas proposiciones simultáneamente, o no se cumple ninguna de ellas. Una manera de interpretar esta equivalencia de proposiciones es la siguiente:

la primer proposición *implica* la segunda proposición
y
la segunda proposición *implica* la primer proposición

De esta manera, la propiedad que hemos enunciado la escribimos

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \text{ó} \ b = 0$$

que significa

$$a \cdot b = 0 \;\;\Rightarrow\;\; a = 0 \text{ ó } b = 0^{*}$$
$$\text{y}$$
$$a = 0 \text{ ó } b = 0 \;\;\Rightarrow\;\; a \cdot b = 0^{\dagger}.$$

Realizaremos las demostraciones de la implicación $\Leftarrow$ y de la implicación $\Rightarrow$ por separado

$\Leftarrow$) Partiendo de $a = 0$ ó $b = 0$ queremos concluir que $a \cdot b = 0$.

Si $a = 0$ entonces $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ (recordar la propiedad " $k \cdot 0 = 0\,,\ \forall\, k$ " que ya mencionamos en la página 16).

Si a no fuera 0 entonces b debe ser 0 (ya que el dato que suponemos cierto es que alguno de los dos es el número 0). Entonces

$$\text{si} \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{y en ese caso} \quad a \cdot b = a \cdot 0 = 0. \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$) Partiendo de $a \cdot b = 0$ queremos concluir que $a = 0$ ó $b = 0$.

En principio a es un número real cualquiera.

- si $a = 0$ entonces la conclusión se verifica.
- si $a \neq 0$, por la propiedad $\mathcal{P}_4$ debe existir a^{-1} y como $a \cdot b = 0$ entonces

$$(a^{-1}) \cdot a \cdot b = (a^{-1}) \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Deducimos que si $a \neq 0$ entonces $b = 0$, es decir que si el producto $a \cdot b$ es 0, alguno de los factores a ó b debe ser 0. ✓

Al haber demostrado ambas implicaciones hemos demostrado la propiedad enunciada.

Queremos resaltar que, en las condiciones de la propiedad, puede suceder que $a = 0$ y al mismo tiempo $b = 0$; esta posibilidad no se excluye cuando decimos $a = 0$ ó $b = 0$. En matemática el "o" se usa siempre en el sentido "lo uno", "lo otro" o las dos cosas a la vez.

Apliquemos la última propiedad demostrada para resolver la siguiente ecuación

$$(x + 1) \cdot (x - 3) = 0.$$

Como $x + 1$ y $x - 3$ son los factores de un producto que da 0, luego, alguno de ellos debe ser 0; es decir

$$(x + 1) \cdot (x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \;\text{ ó }\; x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \;\text{ ó }\; x = 3 \quad \checkmark$$

---

[*] Informalmente llamaremos a esta implicación *la ida*, que corresponde a leer de izquierda a derecha el símbolo $\Leftrightarrow$ quedando así $\Rightarrow$.

[†] Análogamente llamaremos a esta implicación *la vuelta*, que corresponde a leer de derecha a izquierda el símbolo $\Leftrightarrow$ quedando así $\Leftarrow$.

La ecuación planteada tiene más de una solución, y expresaremos **todas** las soluciones de la ecuación como el conjunto solución

$$S = \{-1\ ,\ 3\}.$$

Hasta ahora enunciamos ocho propiedades de los números reales (cuatro para la suma y cuatro para el producto), la siguiente propiedad relaciona ambas operaciones y la llamaremos propiedad $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D}: \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\,, \quad \forall\, a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}.$$

Observemos que la propiedad $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ también se cumple (por la propiedad $\mathcal{P}_2$).

Veamos cómo, usando todas las propiedades hasta ahora enunciadas (las básicas), podemos demostrar otras que usamos habitualmente.

1. $a + a = 2a\,, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$

   Esta propiedad se verifica ya que

   $$a + a \underset{por\ \mathcal{P}_3}{=} a \cdot 1 + a \cdot 1 \underset{por\ \mathcal{D}}{=} a \cdot (1+1) = a \cdot 2 \underset{por\ \mathcal{P}_2}{=} 2a\,. \quad \checkmark$$

2. $0 \cdot a = 0, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

   Esta propiedad ya fue mencionada en la página 16; sólo falta la demostración.

   Un hecho peculiar es que para "comenzar" la demostración no sabemos nada del número a excepto que es un número real, y queremos arribar a la conclusión $0 \cdot a = 0$.

   $$\text{como} \quad 0 = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 0 = a \cdot (0+0) \quad \Rightarrow$$
   $$\text{por } \mathcal{D}, \quad a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

   Si sumamos $-(a \cdot 0)$, el opuesto de $a \cdot 0$, a ambos lados de la igualdad obtenemos

   $$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0 \quad \Rightarrow$$
   $$0 = 0 + a \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a \cdot 0\,. \quad \checkmark$$

3. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b), \quad \forall a,\ b\ \in \mathbb{R}.$

   Esta propiedad dice que al calcular el opuesto de a y multiplicarlo por b obtenemos el opuesto de $a \cdot b$. Para demostrarla observemos que si tomamos el número $(-a) \cdot b$ y le sumamos $a \cdot b$ obtenemos

   $$(-a) \cdot b + a \cdot b \underset{por\ \mathcal{D}}{=} [(-a) + a] \cdot b \underset{por\ \mathcal{S}_4}{=} 0 \cdot b = 0,$$

   que es lo mismo que verifica $-(a \cdot b)$ (el opuesto de $a \cdot b$). Dado que el opuesto es único, podemos concluir que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. ✓

4. $a - b = b - a \quad \Leftrightarrow \quad a = b$.

   Al sumar b de ambos lados de la igualdad conseguimos

$$a - b = b - a \quad \Leftrightarrow \quad a - b + b = b - a + b \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b - a.$$

   Del mismo modo, al sumar a de ambos lados

$$a = 2b - a \quad \Leftrightarrow \quad a + a = 2b - a + a \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 2b.$$

   Que al multiplicar por $\frac{1}{2}$ resulta

$$2a = 2b \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot 2a = \tfrac{1}{2} \cdot 2b \quad \Leftrightarrow \quad a = b\,. \quad \checkmark$$

Ahora veamos cómo, usando las propiedades, podemos resolver una ecuación sencilla (sin equivocarnos). Por ejemplo, calculemos todas las soluciones de

$$5x - 3 = 4.$$

Para resolver la ecuación tenemos que "pasar del otro lado" de la igualdad el 5 y el -3 para que x quede "despejada". Empecemos por el -3; ya vimos en un ejemplo anterior que pasar el -3 es una manera de decir que sumamos el opuesto de -3 de ambos lados de la igualdad, así

$$5x - 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 3 + 3 = 4 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 7.$$

Para terminar pasamos el 5 dividiendo, o sea, multiplicamos ambos lados de la igualdad por el inverso de 5 que sabemos que es $\frac{1}{5}$

$$5x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{5} \cdot 5x = \tfrac{1}{5} \cdot 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{7}{5}\,.$$

Queremos remarcar que *es muy importante* el orden en el cual se pasan los números del otro lado de la igualdad, ¿está permitido pasar el 5 dividiendo antes de pasar el -3? O sea

$$¿\ 5x - 3 = 4 \quad \text{es equivalente a} \quad x - 3 = \tfrac{4}{5}\ ?$$

La respuesta es **no**. Observemos que para pasar dividiendo el 5 *debemos multiplicar a ambos lados de la igualdad por* $\frac{1}{5}$, si decidimos empezar por el 5 la ecuación se transforma del siguiente modo

$$5x - 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{5} \cdot (5x - 3) = \tfrac{1}{5} \cdot 4,$$

que al aplicar la propiedad $\mathcal{D}$ es

$$\tfrac{1}{5} \cdot (5x - 3) = \tfrac{1}{5} \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{5} \cdot 5x - \tfrac{1}{5} \cdot 3 = \tfrac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5}\,.$$

Vemos que se puede empezar pasando el 5 pero debemos respetar las propiedades de los números

$$5x - 3 = 4 \quad \text{no es equivalente a} \quad x - 3 = \tfrac{4}{5},$$

pero

$$5x - 3 = 4 \quad \text{sí es equivalente a} \quad x - \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5}$$

y para terminar de resolver pasamos $-\frac{3}{5}$ (sumamos el opuesto de $-\frac{3}{5}$ a ambos lados de la igualdad)

$$x - \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5} + \tfrac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{4+3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{7}{5}\ .$$

para obtener el mismo resultado que antes (menos mal).

1.4. El orden de los números reales

En el conjunto de los números reales existe una relación de orden " $<$ ". A continuación enunciaremos cuatro propiedades básicas.

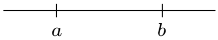
Gráficamente (sobre la recta numérica) diremos que a es menor que b si la representación de a está a la izquierda de la representación de b. En símbolos

$$a < b \quad \text{se lee} \quad a \textit{ es menor que } b\ .$$

Así resulta que b es mayor que a si la representación en la recta de b está a la derecha de la representación de a. En símbolos

$$b > a \quad \text{se lee} \quad b \textit{ es mayor que } a\ .$$

Observamos que estas dos situaciones son equivalentes. Es lo mismo decir $a < b$ o decir $b > a$. Gráficamente



tenemos $a < b$ o dicho de otra forma $b > a$.

En un caso concreto decimos

$$1 < 3 \quad (1 \text{ es menor que } 3) \quad \text{que es lo mismo que} \quad 3 > 1 \quad (3 \text{ es mayor que } 1)\ .$$

Observemos algunos ejemplos

$$\begin{array}{rl} 5 < 2 & \text{es falso,} \\ 4 > 4 & \text{es falso,} \\ -10 < -5 & \text{es verdadero,} \\ 8 > -2 & \text{es verdadero.} \end{array}$$

Con esta notación podemos dar una desigualdad que describa a los números positivos

$$a \text{ es positivo} \quad \Leftrightarrow \quad a > 0.$$

Análogamente para los números negativos

$$a \text{ es negativo} \quad \Leftrightarrow \quad a < 0.$$

Para el orden, la primera propiedad que enunciamos, que vamos a llamar $\mathcal{O}_1$, es conocida como *ley de tricotomía* y dice que si a y b son dos números reales, se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$a \text{ es menor que } b \ , \quad a \text{ es igual a } b \ , \quad a \text{ es mayor que } b.$$

Es decir

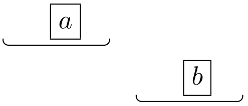
$$\mathcal{O}_1 : \quad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R} \ \text{ se cumple sólo una de las posibilidades } \quad a < b\ , \ \ a = b\ , \ \ a > b\ .$$

Esto dice que si tomamos dos números cualesquiera, siempre podemos compararlos, si no son iguales, alguno es mayor que el otro.

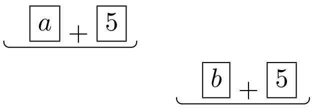
La segunda propiedad que enunciaremos se llama *transitividad* y afirma que si un número es menor que otro, y este a su vez es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero. En símbolos:

$$\mathcal{O}_2 : \qquad \text{si } \ a < b \ \text{ y } \ b < c \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

La siguiente propiedad muestra cómo se comportan las desigualdades al sumar (o restar) un número de ambos lados de la desigualdad. Pensemos que una desigualdad $a < b$ es como una balanza donde el lado izquierdo (a) pesa menos que el lado derecho (b).



Si le agregamos a los dos platillos la misma cantidad de kilos (o se los quitamos), la balanza se mantiene en la misma posición que al principio, el lado izquierdo sigue pesando menos.



Esta propiedad del orden de los números reales es conocida como *monotonía con respecto a la suma* y nosotros la llamamos $\mathcal{O}_3$

$$\mathcal{O}_3 : \qquad a \ < \ b \quad \Rightarrow \quad a + c \ < \ b + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Cuando c es un número positivo podemos pensar que estamos agregando kilos de ambos lados y cuando c es negativo los estamos sacando (de ambos lados también). Esta propiedad nos dice que en una desigualdad, al sumar o restar el mismo número de ambos lados, la desigualdad se mantiene, el lado que era menor sigue siendo menor.

La última propiedad (relacionada con el orden) que vamos a mencionar es la *monotonía con respecto al producto*, que llamamos $\mathcal{O}_4$. Esta propiedad dice cómo se comportan las desigualdades cuando multiplicamos ambos miembros por un número positivo.

$$\mathcal{O}_4: \qquad \text{si } c > 0, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.$$

Es decir, si tenemos una desigualdad $a < b$ y multiplicamos ambos miembros por un *número positivo*, la desigualdad se mantiene. Veamos algunos ejemplos.

Sabemos que	$2 < 5,$	
al multiplicar por $c = 3$	$2 \cdot 3 < 5 \cdot 3,$	
que es lo mismo que	$6 < 15$	¡que es verdadero!

Si pensamos en la balanza, multiplicar por $c = 3$ una desigualdad es poner el triple de peso en cada platillo; es claro que el lado más liviano sigue siendo el mismo.

Funciona del mismo modo si nos quedamos con la mitad del peso en cada platillo, o sea, si multiplicamos de ambos lados por $c = \frac{1}{2}$.

Sabemos que	$2 < 5,$	
al multiplicar por $c = \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{1}{2} < 5 \cdot \frac{1}{2},$	
que es lo mismo que	$1 < \frac{5}{2}$	que es verdadero.

Gracias a la propiedad de tricotomía $\mathcal{O}_1$, podemos entender el significado de otros símbolos que también usaremos frecuentemente.

Que un número a sea *menor o igual* que un número b significa que a es menor que b, o bien que a es igual a b. En símbolos

$$a \leq b \quad \text{significa:} \quad a \text{ es menor que } b \quad \text{o bien} \quad a \text{ es igual a } b\ .$$

En otras palabras, decimos que a es menor o igual que b si a **no** es mayor que b. Observemos que por la propiedad $\mathcal{O}_1$, si a no es mayor que b, ha de ser $a < b$ ó $a = b$. Resumiendo:

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a < b \quad \text{ó} \quad a = b.$$

De la misma manera

$$b \geq a \quad \text{significa} \quad b \text{ es mayor que } a \quad \text{o bien} \quad b \text{ es igual a } a.$$

Los símbolos $\geq$ y $\leq$ tienen una característica algo desconcertante, al utilizarlos en ejemplos concretos como

$1 + 1 \leq 3$ podríamos decir directamente $1 + 1 < 3$,
$1 + 1 \leq 2$ podríamos decir directamente $1 + 1 = 2$.

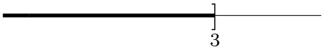
¿Por qué adoptamos un símbolo que expresa dos nociones? Veremos su utilidad al trabajar con incógnitas. Consideremos la desigualdad

$$a \leq 3.$$

algunos de los números que verifican esta desigualdad son

$a = 0$	ya que 0 cumple	$0 \leq 3$	pues	$0 < 3$,
$a = -1$	ya que -1 cumple	$-1 \leq 3$	pues	$-1 < 3$,
$a = 3$	ya que 3 cumple	$3 \leq 3$	pues	$3 = 3$.

Así todos los números que verifican la desigualdad son los que están representados a la izquierda de 3 ó el mismo número 3.



Definiremos a continuación algunos subconjuntos muy particulares de $\mathbb{R}$, los intervalos. Si a y $b \in \mathbb{R}$ denominamos:

1. *Intervalo abierto* con extremos a y b al conjunto
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,.$$
2. *Intervalo cerrado* con extremos a y b al conjunto
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}\,.$$
3. *Intervalo semiabierto o semicerrado* con extremos a y b a los conjuntos
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\,, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\,.$$

   Para definir intervalos infinitos no acotados se utiliza el símbolo ∞ (que se lee *infinito*). Hay que tener en claro que ∞ es sólo un símbolo y no un número real.

   Se definen entonces los siguientes intervalos infinitos:

4. *Intervalo abierto infinito* con extremo izquierdo a al conjunto
$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\,.$$
5. *Intervalo abierto infinito* con extremo derecho b al conjunto
$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\,.$$
6. *Intervalo cerrado infinito* con extremo izquierdo a al conjunto
$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}\,.$$
7. *Intervalo cerrado infinito* con extremo derecho b al conjunto
$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\,.$$

Volviendo al ejemplo, podemos decir
$$a \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty,3].$$

Quedará como ejercicio para el lector verificar que las propiedades $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ y $\mathcal{O}_4$ también se verifican reemplazando el símbolo $\leq$ en lugar del símbolo $<$.

Ejercicio 1.4.1. Mostrar que dados a, b y c números reales

1. Si $\;a \leq b\;$ y $\;b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$.
2. Si $\;a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$.
3. Si $\;a \leq b\;$ y $\;c\;$ es positivo $\Rightarrow\; a \cdot c \;\leq\; b \cdot c$.

Usando las propiedades estudiadas hasta ahora, podemos resolver inecuaciones. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.4.2. Resolver $\;x + 5 \;<\; 7$.

Primero, es conveniente aclarar qué quiere decir resolver una inecuación. Imitando lo que hicimos con ecuaciones, decimos que *resolver una inecuación* es encontrar **todos** los valores de x que la satisfacen. En este ejemplo, debemos hallar todos los valores de x tales que al sumarles 5 nos da un resultado menor que 7. Probemos con algunos números, por ejemplo

$$\begin{array}{lllll}
x = -1 & \text{es una solución porque} & -1 + 5 < 7, & \\
x = 0 & \text{es una solución porque} & 0 + 5 < 7, & \\
x = 1,9 & \text{es una solución porque} & 1,9 + 5 < 7, & \\
x = \frac{3}{2} & \text{es una solución porque} & \frac{3}{2} + 5 < 7 & (\frac{3}{2} = 1,5), \\
x = 2 & \textbf{no} \text{ es una solución porque} & 2 + 5 \not< 7 & (2 + 5 = 7), \\
x = 10 & \textbf{no} \text{ es una solución porque} & 10 + 5 \not< 7 & (10 + 5 > 7).
\end{array}$$

Probando, encontramos *algunas* soluciones, pero no podemos encontrar todas las soluciones de este modo, ya que ni siquiera sabemos cuántas soluciones hay (además, tendríamos que poder probar con todos los números reales). Para resolver la inecuación aplicamos las propiedades básicas para deducir cómo debe ser cualquier x que sea solución. Partiendo de

$$x + 5 \;<\; 7,$$

podemos aplicar la propiedad $\mathcal{O}_2$; sumamos $c = -5$ a ambos miembros, tenemos

$$x + 5 + (-5) \;<\; 7 + (-5),$$

usando las propiedades $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \cdots$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2, \cdots$, $\mathcal{D}$ en cada miembro de la desigualdad, queda de un lado de la desigualdad

$$x + 5 + (-5) = x$$

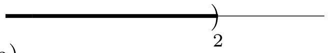
y del otro lado

$$7 + (-5) = 2 \;,$$

así $x < 2$. Entonces deducimos que la expresión $\;x + 5 < 7\;$ es equivalente a $x < 2$:

$$x + 5 \;<\; 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \;<\; 2.$$

En la recta numérica las soluciones son



(recordar que 2 no es solución).

Vemos en el gráfico que la inecuación tiene infinitas soluciones. Las soluciones son los números x que pertenecen al intervalo $(-\infty\ ,\ 2)$. Más formalmente expresamos todas las soluciones de la inecuación como el conjunto solución

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \quad x + 5 \ < \ 7\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \ < \ 2\} = (-\infty\ ,\ 2).$$

Ejemplo 1.4.3. Resolver $\ 2x + 3 \ \geq \ 8$.

Para poder despejar empezamos como en el ejemplo anterior, sumamos -3 a ambos miembros (la propiedad $\mathcal{O}_2$ dice que no se altera la desigualdad) y obtenemos

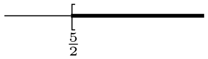
$$2x + 3 + (-3) \ \geq \ 8 + (-3) \quad \text{que es lo mismo que} \quad 2x \ \geq \ 5 \ .$$

Ahora para despejar x, para "dejarla sola", queremos "pasar" el 2. Para esto, como en las ecuaciones, multiplicamos ambos miembros por el número $\ c = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2}$ es un número positivo la propiedad $\mathcal{O}_3$ dice

$$2x \ \geq \ 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot 2x \ \geq \ \tfrac{1}{2} \cdot 5$$

obteniendo así

$x \ \geq \ \frac{5}{2}$ cuya representación en la recta es



Entonces el conjunto solución es

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : 2x + 3 \geq 8\} = \left\{x \in \mathbb{R} \ : x \ \geq \ \tfrac{5}{2}\right\} = \left[\tfrac{5}{2}\ ,\ +\infty\right) .$$

Veamos que sucede cuando multiplicamos por número negativo. Resolvamos

$$-3x + 5 \ < \ 7.$$

Como antes, aplicamos la propiedad $\mathcal{O}_2$ para pasar el 5; sumamos de ambos lados -5

$$-3x + 5 < 7 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + 5 + (-5) < 7 + (-5) \quad \Leftrightarrow \quad -3x < 2.$$

Si queremos terminar de despejar tenemos que pasar el -3 del otro lado; pensando en el ejemplo anterior sería bueno multiplicar por $\ c = -\frac{1}{3}$, porque quedaría

a la izquierda y a la derecha

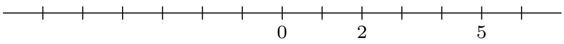
$$\begin{array}{ccc} (-\frac{1}{3}) \cdot (-3x) & ? & (-\frac{1}{3}) \cdot 2 \\ x & ? & -\frac{2}{3} \end{array}$$

Pero ya no podemos usar la propiedad $\mathcal{O}_3$ porque $\ c = -\frac{1}{3}$ es negativo y $\mathcal{O}_3$ solamente nos dice qué pasa cuando multiplicamos por un número positivo.

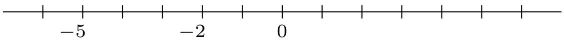
Debemos estudiar qué sucede al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número negativo; aunque sabemos cómo quedará cada lado, no sabemos si el lado que era menor en un comienzo, seguirá siendo menor.

Investiguemos con un ejemplo:

Si tomamos los números 2 y 5 sabemos que $2 \ < \ 5$, es decir 2 está a la izquierda de 5.



Si multiplicamos ambos números por un número negativo, digamos $c = -1$, obtenemos -2 y -5 ; sabemos que $-2 > -5$ es decir ahora -2 esta a la derecha de -5.



¿Qué conclusión podemos sacar? Partimos de la desigualdad $2 < 5$ y al multiplicar ambos lados por $c = -1$ obtuvimos $(-1) \cdot 2 > (-1) \cdot 5$; al multiplicar por un número negativo la desigualdad no se mantuvo, se "invirtió". Este hecho constituye una propiedad* muy importante que demostraremos más adelante (página 28). Por el momento queremos terminar de resolver la inecuación que planteamos. Recordemos que trabajando con la propiedad $\mathcal{O}_2$ logramos ver que

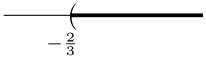
$$-3x + 5 < 7 \quad \Leftrightarrow \quad -3x < 2,$$

al multiplicar ambos lados por $c = -\frac{1}{3}$ (que es negativo) sabemos que se *invierte* la desigualdad

$$-3x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad (-\tfrac{1}{3}) \cdot (-3x) > (-\tfrac{1}{3}) \cdot 2 \,,$$

o sea,

$x > -\frac{2}{3}$ cuya representación en la recta es



El conjunto solución es

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : -3x + 5 < 7\} = \left\{x \in \mathbb{R} \ : x > -\tfrac{2}{3}\right\} = \left(-\tfrac{2}{3} \ , \ +\infty\right) \ .$$

Ejemplo 1.4.4. Resolver $\frac{3}{2}x - 2 \geq \frac{5}{3}x + 1$.

Primero vemos que en esta inecuación, la incógnita aparece de ambos lados de la desigualdad, así que como primer paso deberíamos juntar ambas x de un mismo lado, para trabajar con una inecuación parecida a las inecuaciones de los ejemplos anteriores (que supimos resolver). Por ejemplo si queremos pasar $\frac{5}{3}x$ del otro lado de la desigualdad, tenemos que restar $\frac{5}{3}x$ de ambos lados. Hagámoslo

$$\tfrac{3}{2}x - 2 \geq \tfrac{5}{3}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{5}{3}x + \tfrac{3}{2}x - 2 \quad \geq \quad -\tfrac{5}{3}x + \tfrac{5}{3}x + 1 \quad .$$

Usando $\mathcal{S}_1$, es equivalente a

$$(-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{3}{2}x) - 2 \geq (-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{5}{3}x) + 1$$

y ahora $\mathcal{S}_4$ nos lleva a

$$(-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{3}{2}x) - 2 \geq 0 + 1.$$

Si sumamos 2 de ambos lados resulta

$$(-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{3}{2}x) - 2 \ \geq \ 0 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-\tfrac{5}{3}x + \tfrac{3}{2}x) \ \geq \ 3.$$

---

*No es una propiedad básica porque la podemos deducir de $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, y $\mathcal{O}_3$

Ahora necesitamos "hacer la cuenta" con las x. Para esto, usemos la ley distributiva $\mathcal{D}$, mediante la cual

$$-\tfrac{5}{3}x+\tfrac{3}{2}x=\left(-\tfrac{5}{3}+\tfrac{3}{2}\right)x=\left(\tfrac{9-10}{6}\right)x=-\tfrac{1}{6}x.$$

Volviendo a la inecuación,

$$(-\tfrac{5}{3}x+\tfrac{3}{2}x)\ \geq\ 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{6}x\ \geq\ 3.$$

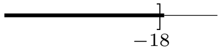
Multiplicando por $c=6$ de ambos lados (6 es positivo, así que $\mathcal{O}_3$ dice que no se modifica la desigualdad) resulta

$$-\tfrac{1}{6}x\ \geq\ 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot\left(-\tfrac{1}{6}\right)x\ \geq\ 6\cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad -x\ \geq\ 18.$$

Por último multiplicamos por $c=-1$ ambos miembros (-1 es negativo, la desigualdad se invierte) para obtener

$$-x\geq 18 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)\cdot(-x)\leq(-1)\cdot 18 \quad \Leftrightarrow$$

$x\ \leq\ -18$ cuya representación en la recta es



y el conjunto solución es

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\tfrac{3}{2}x-2\geq\tfrac{5}{3}x+1\right\}=\{x\in\mathbb{R}\ :x\ \leq\ -18\}=(-\infty\ ,\ -18]\ .$$

Para terminar esta sección vamos a demostrar la propiedad que prometimos, o sea, la propiedad que dice cómo se comporta una desigualdad cuando multiplicamos a ambos lados por un número negativo. Primero la enunciamos

Proposición 1.4.5. *Si* $c<0$ *y* $a<b$ *entonces* $a\cdot c>b\cdot c$ *.*

Demostración. Tenemos como dato $a<b$ más el hecho $c<0$ y queremos concluir que $a\cdot c\ >\ b\cdot c$. Podemos aplicar $\mathcal{O}_3$ siempre que multipliquemos por un número positivo así que deberíamos transformar a c en algún número positivo

esto es, $c<\ 0$; si sumamos $-c$ a ambos lados
$0<-c$, o sea que $-c$ ¡es positivo!

Entonces si multiplicamos $a<b$ a ambos lados por $-c$ la desigualdad se mantiene

$$a<b \quad \Leftrightarrow \quad (-c)\cdot a<(-c)\cdot b \quad \Leftrightarrow \quad -c\cdot a<-c\cdot b.$$

Ya probamos usando las propiedades básicas de los números reales (página 19) que

$$(-c)\cdot a=-c\cdot a \quad \text{y del mismo modo} \quad (-c)\cdot b=-c\cdot b,$$

o sea, que

$$(-c)\cdot a<(-c)\cdot b \quad \Leftrightarrow \quad -c\cdot a<-c\cdot b.$$

Sumando a ambos lados $c \cdot a$, y luego $c \cdot b$ resulta finalmente

$$\begin{array}{rcll} -c \cdot a & < & -c \cdot b & \Leftrightarrow \\ -c \cdot a + c \cdot a & < & -c \cdot b + c \cdot a & \Leftrightarrow \\ c \cdot b + 0 & < & c \cdot b - c \cdot b + c \cdot a & \Leftrightarrow \\ c \cdot b & < & 0 + c \cdot a & \Leftrightarrow \\ c \cdot b & < & c \cdot a. & \end{array}$$

□

Los números reales verifican una propiedad básica más, fundamental para desarrollar la teoría del Cálculo. El llamado **axioma de completitud**. Su enunciado es el siguiente:

$\mathcal{C}$: *Todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente, tiene supremo.*

Tratemos de comprender, aunque más no sea someramente, su significado.

- Que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ sea *no vacío* significa que A tiene por lo menos un elemento.
- Que A sea *acotado superiormente* significa que, por lo menos, posee una cota superior, esto es, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq a$, $\forall\ a \in A$ (b se denomina una *cota superior de* A).
- Que A tiene *supremo* significa que existe una cota superior de A que es menor o igual que toda otra cota superior de A.

Consideremos un par de ejemplos:

1. Sea $A = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

   Es claro que $A \neq \emptyset$ (por ejemplo, $\frac{1}{2} \in A$) y también que es acotado superiormente (por ejemplo por 3). Si consideramos el conjunto de todas las cotas superiores de A resulta que 1 es una cota superior de A (pues $1 \geq a$, $\forall\ a \in A$) y que no existe ningún número menor que 1 que sea cota superior de A. Luego 1 es el supremo del conjunto A.

   En este caso $1 = \sup(A) \in A$.

2. Sea $B = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

   Es claro que $B \neq \emptyset$ (por ejemplo, $\frac{1}{2} \in B$) y también que es acotado superiormente (por ejemplo por 3). Si consideramos el conjunto de todas las cotas superiores de B resulta que 1 es una cota superior de B (pues $1 \geq b$, $\forall\ b \in B$). También en este caso no existe ningún número menor que 1 que sea cota superior de B. La razón fundamental de esto último es que en $\mathbb{R}$ no existe un número "anterior" a otro (observar que $0,\widehat{9} = 1$ y **no** $0,\widehat{9} < 1$).

   Luego 1 también es el supremo del conjunto B.

   En este caso $1 = \sup(B) \notin B$.

Estos ejemplos nos muestran que en ambos casos existe el supremo. En el primero, $1 = \sup(A) \in A$, es decir el supremo de A es el máximo (el mayor elemento) de A. En el segundo, $1 = \sup(B) \notin B$, es decir el supremo de B **no** es el máximo del conjunto B, más aún el conjunto B **no** posee un máximo.

La existencia de supremo es la propiedad que caracteriza a los números reales (no se cumple en el campo de los números racionales) y es la base fundamental para la noción de límite, noción central en la teoría del Cálculo.

La noción de supremo es una noción delicada en cuanto a su comprensión. Por esta razón, teniendo en cuenta que el objetivo de este libro es sólo introducir al alumno en el Cálculo, muchos de los resultados teóricos necesarios para desarrollar el tema serán tratados de una manera intuitiva.

Recopilemos las propiedades básicas estudiadas. Para referirnos a ellas usaremos nombres más descriptivos que $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{D}$, etc.; no es indispensable recordarlos de memoria pero son útiles cómo referencia.

$\mathcal{S}_1$: Ley asociativa para la suma

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{S}_2$: Ley conmutativa para la suma

$$a+b = b+a \quad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{S}_3$: Existencia de neutro para la suma

$$a+0 = 0+a = a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{S}_4$: Existencia de opuestos

$$\text{si } a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists -a \in \mathbb{R} \ : \ a+(-a) = 0.$$

$\mathcal{P}_1$: Ley asociativa para el producto

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c \quad \forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{P}_2$: Ley conmutativa para el producto

$$a\cdot b = b\cdot a \quad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{P}_3$: Existencia de neutro para el producto

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{P}_4$: Existencia de inversos

$$\text{si } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} \ : \ a\cdot a^{-1} = 1.$$

$\mathcal{D}$: Ley distributiva

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \forall\, a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{O}_1$: Ley de tricotomía

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\text{ se cumple sólo una de las posibilidades }\; a < b,\; a = b,\; a > b.$$

$\mathcal{O}_2$: Transitividad

$$\text{si }\; a < b \;\text{ y }\; b < c \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

$\mathcal{O}_3$: Monotonía con respecto a la suma

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c,\; \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{O}_4$: Monotonía con respecto al producto

$$\text{si } c > 0, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.$$

Capítulo 2

Funciones

2.1. El concepto de función

A continuación definimos el concepto de función.

Definición 2.1.1. *Sean A y B dos conjuntos. Una* **función** *f de A en B es una correspondencia o relación que asigna a* **cada** *elemento de A un* **único** *elemento de B.*

Es costumbre notar $f\colon A \to B$ y para cada $a \in A$ indicar con $f(a)$ (imagen de a por f) al único elemento de B que le corresponde por la función f.

Definición 2.1.2. *El conjunto A se denomina* **dominio** *de la función f y se nota $Dom(f)$.*

Definición 2.1.3. *El conjunto B se denomina* **codominio** *de la función f y se nota $Codom(f)$.*

Definición 2.1.4. *Sea $f : A \to B$ una función. Llamamos* **imagen** *de f al subconjunto de B:*

$$Im(f) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : \exists\, a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}\,.$$

Ejemplos 2.1.5. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

1. Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 1 \quad \text{y} \quad f(d) = 3.$$

Luego, esta correspondencia es una función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. En este caso

$$Im(f) = B = \{0, 1, 2, 3\}\,.$$

Podemos representar esta situación recurriendo a los *"Diagramas de Venn"*:

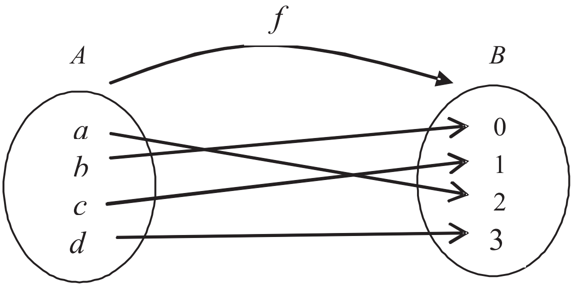


Figura 2.1: $f(a) = 2, \;\; f(b) = 0, \;\; f(c) = 1, \;\; f(d) = 3.$

2. Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0 \quad \text{y} \quad f(d) = 2.$$

Esta correspondencia también es una función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. Observemos que *no importa* que a dos elementos de A (b y c) le correspondan el mismo elemento de B (0), *ni tampoco* que haya un elemento de B (3) que no es correspondiente de ningún elemento de A. En este caso

$$Im(f) = \{0, 1, 2\}.$$

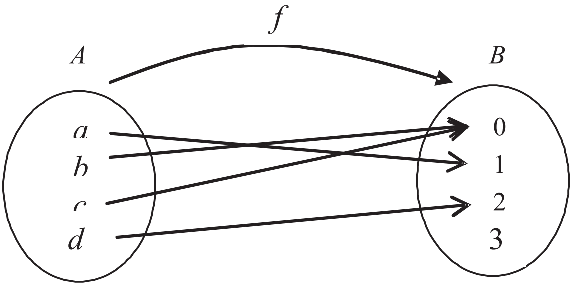


Figura 2.2: $f(a) = 1, \;\; f(b) = 0, \;\; f(c) = 0, \;\; f(d) = 2.$

3. Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1, \quad f(a) = 2, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 3 \quad \text{y} \quad f(d) = 2.$$

Esta correspondencia **no** es una función de A en B pues al elemento a de A le corresponden dos elementos de B (1 y 2).

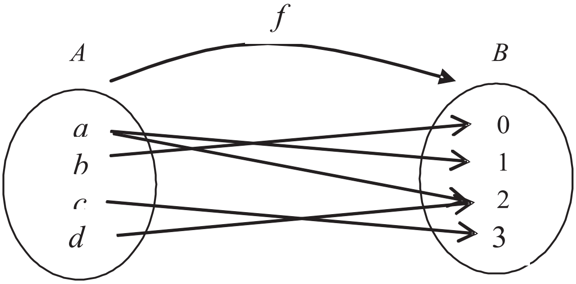


Figura 2.3: $f(a) = 1,\ \ f(a) = 2,\ \ f(b) = 0,\ \ f(c) = 3,\ \ f(d) = 2.$

4. Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 0 \quad \text{y} \quad f(c) = 2.$$

Esta correspondencia *tampoco* es una función de A en B pues al elemento d de A no le corresponde ningún elemento de B.

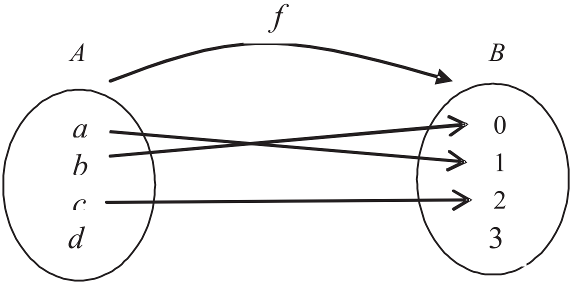


Figura 2.4: $f(a) = 1,\ \ f(b) = 0,\ \ f(c) = 2.$

2.2. Funciones reales

Recordemos que en el capítulo 1 hemos notado con la letra $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.

Nos interesa estudiar las funciones de A en B donde estos conjuntos son subconjuntos de $\mathbb{R}$, o sea $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. A estas funciones las denominamos *funciones reales de variable real* o, para abreviar, directamente *funciones reales*.

Ejemplo 2.2.1. La correspondencia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$ (a cada número real x le corresponde el triple de dicho número real) es una función real ($A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$).

Ejemplo 2.2.2. Recordemos primero la siguiente definición:

Dado un número real a positivo o cero, llamamos *raíz cuadrada de a* al único número real b, positivo o cero tal que $b^2 = a$. Al número b lo notamos con $\sqrt{a}$.

Por la definición de raíz cuadrada, tenemos que la correspondencia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ *no* es función puesto que a los números reales negativos no les corresponden ningún número real (no existe la raíz cuadrada de un número negativo).

Podemos corregir esto último manteniendo la correspondencia pero cambiando el dominio; si consideramos

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \quad (A = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{y} \quad B = \mathbb{R}),$$

la correspondencia definida por $f(x) = \sqrt{x}$, ahora sí es una función real[*].

Observemos que en el ejemplo anterior hemos podido corregir el hecho de que la correspondencia $f(x) = \sqrt{x}$ no era función "achicando" el conjunto de "salida", tomando como nuevo conjunto el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la expresión "tiene sentido" (la "cuenta" se puede hacer).

Observemos también que la expresión considerada no ofrece problemas de ambigüedad en cuanto a la correspondencia de un elemento (a ningún elemento le corresponde más de un elemento), propiedad esencial para que una correspondencia pueda ser función.

Es común, en estos casos, hablar de *la función real* sobreentendiendo que estamos hablando de la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siendo A el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ que verifica que f es función en el sentido de la definición 2.1.1 (el mayor dominio posible para f).

Luego, al decir "sea f una función real ...", al hablar del dominio de la función f nos referimos al mayor dominio posible en el sentido antes mencionado y al hablar del codominio de la función f nos estaremos refiriendo a todo $\mathbb{R}$.

Ejemplos 2.2.3. Ejemplos de funciones reales

1. Sea f la función real, definida por $f(x) = \sqrt{1-x}$.

   Luego, $Dom(f) = \mathbb{R}_{\leq 1} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0\} = (-\infty, 1]$.

   Este ejemplo puede ser perturbador ya que la función se puede calcular en valores negativos a pesar de involucrar el cálculo de una raíz cuadrada. Sin embargo, no hemos cometido ningún error ya que si $x \leq 1$, entonces $1 - x \geq 0$ y por lo tanto tiene sentido calcular $\sqrt{1-x}$. Veamos un par ejemplos.

   $$f(-8) = \sqrt{1-(-8)} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$$

   pero

   $$f(5) = \sqrt{1-5} = \sqrt{-4}$$

   que no está definido.

2. Sea f la función real, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

   Luego, $Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

---

[*] Más adelante, en este mismo capítulo (ver p. 47), volveremos a ocuparnos de esta función desde otro punto de vista.

3. Sea f la función real, definida por $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-3x+2}$.

   En este caso existen dos condiciones simultáneas para poder calcular la expresión:

   a) $x+1 \geq 0$ (no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo).

   b) $x^2-3x+2 \neq 0$ (no se puede dividir por cero).

   O sea, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \quad \wedge^{*} \quad x^2-3x+2 \neq 0\}$.

   Observemos que

   $$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1, \qquad (a)$$

   y que

   $$x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee^{\dagger} \ x = 2,$$

   o sea,

   $$x^2-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \ \wedge \ x \neq 2. \qquad (b)$$

   Luego, de (a) y (b) resulta

   $$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1, \ x \neq 1 \ \wedge \ x \neq 2\} = [-1,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)\,.$$

2.3. Función inyectiva, suryectiva o biyectiva

Estudiaremos a continuación algunas características que pueden tener las funciones.

Definición 2.3.1. *Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que f es* **inyectiva** *si*

$$\forall\, a, a' \in A : \quad f(a) = f(a') \quad \Rightarrow \quad a = a'.$$

Podemos reescribir esta definición de la siguiente forma:

$$f \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, a, a' \in A : a \neq a' \ \Rightarrow \ f(a) \neq f(a').$$

Leída de esta manera, tenemos que f es inyectiva si y sólo si "a valores distintos de A le corresponden valores distintos de B". Por lo tanto, f **no** es inyectiva si

$$\text{existen} \quad a, a' \in A, \ a \neq a' \quad \text{tales que} \quad f(a) = f(a')$$

Observemos que la función del punto 1 de los ejemplos 2.1.5 es una función inyectiva y mientras que la del punto 2 no lo es.

Definición 2.3.2. *Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que f es* **suryectiva** *o* **sobreyectiva** *si $Im(f) = B$.*

---

[*] $\wedge$ es el símbolo lógico para "y"

[†] $\vee$ es el símbolo lógico para "o"

Esta definición dice que f es suryectiva si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ (ver definición 2.1.4). Dicho en palabras, una función es suryectiva si **todo** elemento de B está relacionado con algún elemento de A (informalmente, decimos que todo elemento de B "viene" de algún elemento de A). Por lo tanto, f **no** es suryectiva si existe $b \in B$ tal que $b \notin Im(f)$.

Observemos que la función del punto 1 de los ejemplos 2.1.5 es suryectiva y que la función del punto 2 *no* lo es.

Definición 2.3.3. *Sea* $f : A \to B$ *una función. Decimos que* f *es* **biyectiva** *si* f *es inyectiva y sobreyectiva.*

Esto nos dice que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces

1. Por ser función, a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B (todo elemento de A "va a parar" a un único elemento de B).
2. Por ser suryectiva, cada elemento de B está relacionado con algún elemento de A (todo elemento de B "viene", por lo menos, de algún elemento de A).
3. Por ser inyectiva, a valores distintos de A le corresponden valores distintos de B.

Luego, $f : A \to B$ biyectiva si y sólo si, cada elemento de B está relacionado con un único elemento de A (todo elemento de B "viene" de un único elemento de A).

Observación 2.3.4. Las propiedades de inyectividad y suryectividad son propiedades independientes. Existen funciones inyectivas pero no suryectivas, existen funciones suryectivas pero no inyectivas, existen funciones inyectivas y suryectivas (biyectivas) y existen funciones que no son ni inyectivas ni suryectivas.

2.4. El plano real

Consideremos el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O sea el conjunto de *pares ordenados* de números reales (no es lo mismo $(1, 2)$ que $(2, 1)$).

A partir de la representación geométrica de $\mathbb{R}$ (vista en el capítulo 1) el conjunto $\mathbb{R}^2$ puede ser representado sobre un plano considerando dos rectas perpendiculares, una horizontal y una vertical. En cada una de ellas representamos a $\mathbb{R}$ colocando el número real 0, de cada copia de $\mathbb{R}$, en el punto de intersección de ambas rectas, los números reales positivos correspondientes a la representación horizontal de $\mathbb{R}$ hacia la derecha y los números reales positivos correspondientes a la representación vertical de $\mathbb{R}$ hacia arriba de la siguiente manera:

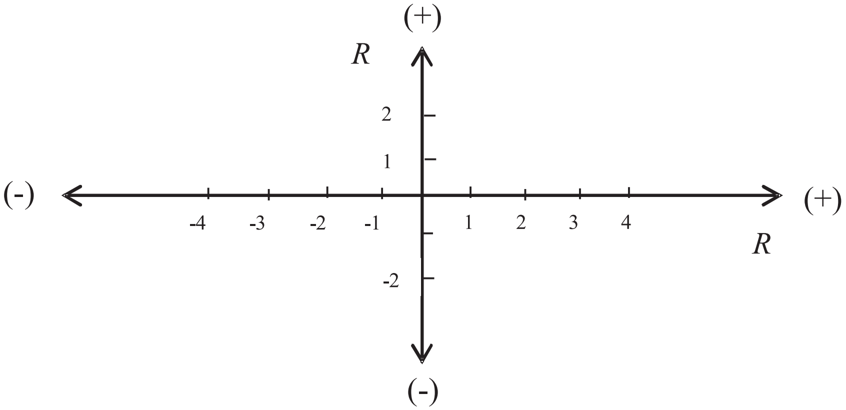


Figura 2.5: Ejes cartesianos.

Luego, para representar un par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ hacemos lo siguiente:

- Ubicamos el número real a (primer coordenada) en la copia horizontal de $\mathbb{R}$.
- Ubicamos el número real b (segunda coordenada) en la copia vertical de $\mathbb{R}$.
- Trazamos una recta vertical que pase por a.
- Trazamos una recta horizontal que pase por b.
- Representamos el par ordenado (a, b) como el punto de intersección de estas rectas.

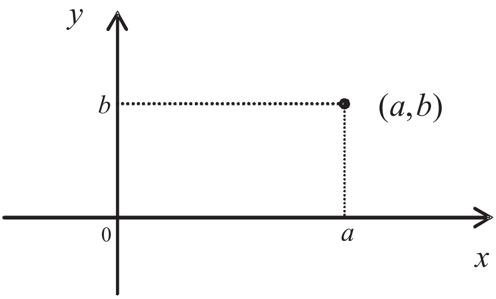


Figura 2.6: Representación del par ordenado $(a,\ b)$.

A la recta horizontal se la suele denominar "eje x" o eje de las *abscisas* y a la recta vertical "eje y" o eje de las *ordenadas*.

Esta representación de $\mathbb{R}^2$ se denomina *sistema de coordenadas cartesianas*.

Ejercicio 2.4.1. Graficar los siguientes subconjuntos del plano:

1. $\{(1,2);(0,-1)\}$.
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=5\}$.
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x=-3\}$.
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\leq x\leq 1\}$.
5. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0\ \wedge\ y\geq 0\}$.

2.5. Gráfico de una función

Definición 2.5.1. *Sea f una función real. Llamamos* **gráfico de f** *al subconjunto de $\mathbb{R}^2$*

$$Gr(f)=\{(x,f(x)):x\in Dom(f)\}\subset\mathbb{R}^2.$$

Definición 2.5.2. *Sea f una función real. Decimos que f es* **par** *si $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in Dom(f)$ y que f es* **impar** *si $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in Dom(f)$.*

Si f es una función real, el gráfico de f nos permite de una manera intuitiva y rápida deducir propiedades de la función.

Mencionemos algunas propiedades que se pueden deducir del gráfico de f (recomendamos volver sobre estas propiedades al estudiar los ejemplos).

Observación 2.5.3.

Si f es par, su gráfico es simétrico respecto de la recta $x=0$ (el eje y).

Si f es impar, su gráfico es simétrico respecto del origen de coordenadas.

Son ejemplos de funciones pares: $f(x)=x^2$, $f(x)=x^4$, en general $f(x)=x^n$ con $n\in\mathbb{N}$ par, $f(x)=3x^6-2x^4+x^2-1$.

Son ejemplos de funciones impares: $f(x)=x$, $f(x)=x^3$, en general $f(x)=x^n$ con $n\in\mathbb{N}$ impar, $f(x)=2x^5+3x^3-x$.

Por supuesto no todas las funciones pueden ser clasificadas en estas dos categorías. Hay funciones que no son ni pares ni impares.

Observación 2.5.4. Un valor $y_0\in Im(f)$ si la recta horizontal $y=y_0$ corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez.

Si la recta horizontal $y=y_0$ corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez significa que existe, por lo menos, un $x_0\in Dom(f)$ tal que $f(x_0)=y_0$.

Observación 2.5.5. Una función f es inyectiva si toda recta horizontal $y=y_0$ corta al $Gr(f)$ a lo sumo una vez.

Si alguna recta horizontal, $y=y_0$, corta al $Gr(f)$ más de una vez significa que existen por lo menos dos valores distintos x_0, $x_1\in Dom(f)$ tales que $f(x_0)=f(x_1)=y_0$ y por lo tanto f **no** es inyectiva.

Observación 2.5.6. Una función f es suryectiva si toda recta horizontal $y = y_0$, con $y_0 \in Codom(f)$, corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez.

Si alguna recta horizontal, $y = y_0$, **no** corta al $Gr(f)$ significa que $y_0 \notin Im(f)$ y por lo tanto f **no** es suryectiva. (Recordemos que $y_0 \in Codom(f)$.)

Observación 2.5.7. Una función f es biyectiva si toda recta horizontal $y = y_0$ con $y_0 \in Codom(f)$ corta al $Gr(f)$ exactamente una vez.

Este hecho se deduce inmediatamente de las observaciones anteriores.

Queremos hacer notar que, desde un punto de vista estricto, cualquier argumentación que realicemos observando el gráfico de una función tenemos que tomarla como una conjetura que *indefectiblemente* deberemos probar usando las definiciones analíticas.

Por ejemplo, podemos argumentar que una función es inyectiva observando su gráfico y utilizando la observación 2.5.5, pero la única manera que tenemos de probarlo es usando la definición de función inyectiva (definición 2.3.1).

Sin embargo queremos enfatizar que es sumamente importante mantener siempre presente la idea geométrica del gráfico de una función, realizar argumentaciones a partir de él y posteriormente tratar de formalizar la argumentación realizada intentando una demostración analítica.

Ilustramos este modo de proceder con algunos ejemplos.

2.6. Ejemplos de gráficos de funciones

Ejemplo 2.6.1. Sea $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$.

Luego la representación del $Gr(f)$ en un sistema de coordenadas cartesianas es una recta de pendiente 2 y ordenada al origen -1.

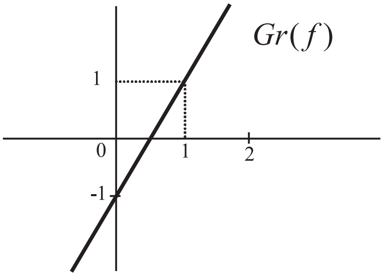


Figura 2.7: Gráfico de $f(x) = 2x - 1$.

Es claro del gráfico (ver 2.5.7) que f resulta ser una función biyectiva.

Veamos cómo podemos probar esto analíticamente.

1. f es inyectiva.

Sean $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(x')$. Por la definición 2.3.1 debemos probar que $x = x'$.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow 2x - 1 = 2x' - 1 \Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'.$$

Luego f es inyectiva. ✓

2. f es suryectiva.

   Sea $y \in \mathbb{R}$. Por la definición 2.3.2 debemos probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

   O sea, debemos probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $2x - 1 = y$. Ahora bien,

$$2x - 1 = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y+1}{2}\ .$$

   Luego, tomando $x = \frac{y+1}{2}$ resulta que

$$f(x) = f\left(\frac{y+1}{2}\right) = 2\left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y.$$

   Por lo tanto, f es suryectiva. ✓

Entonces, por la definición 2.3.3, f es biyectiva. ✓

Ejemplo 2.6.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Su gráfico es una parábola.

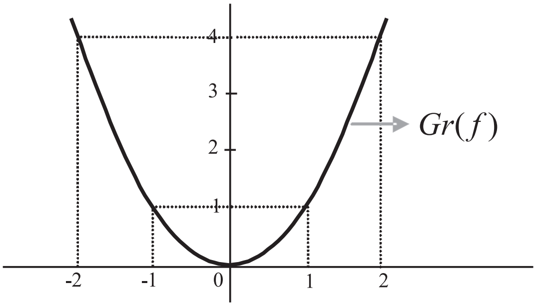


Figura 2.8: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Es claro del gráfico que esta función no es inyectiva ni suryectiva.
Sean $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(x')$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \Leftrightarrow \quad & x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x') \cdot (x + x') = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x - x' = 0 \ \vee \ x + x' = 0 \Leftrightarrow x = x' \ \vee \ x = -x'. \end{aligned}$$

Nos damos cuenta entonces, que no podemos deducir en general que $x = x'$. Más aún el razonamiento anterior nos muestra que si tomamos cualquier $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y $x' = -x$ resultará $x \neq x'$ y $f(x) = f(x')$. Por ejemplo, $-1 \neq 1$ y $f(-1) = f(1) = 1$.

Luego, por la definición 2.3.1, resulta que f no es inyectiva. ✓

Veamos que f no es suryectiva. Sea $y \in \mathbb{R}$, debemos ver si existe o no $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = y$. Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debería ser $y \geq 0$. Esto nos muestra que si $y \in \mathbb{R}_{<0}$, entonces no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = y$. Por ejemplo, $f(x) \neq -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego $y = -1 \notin Im(f)$ y por lo tanto, por la definición 2.3.2, f no es suryectiva. ✓

Más aún, el razonamiento anterior nos muestra que

$$y \in Im(f) \Leftrightarrow y \geq 0.$$

Si $y \geq 0$, tomando $x = \sqrt{y}$ resulta que $f(x) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. Luego,

$$Im(f) = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = [0, +\infty). \quad ✓$$

Ejemplo 2.6.3. Sea f la función real dada por $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Es claro que $Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq -1}$ y su gráfico es una hipérbola.

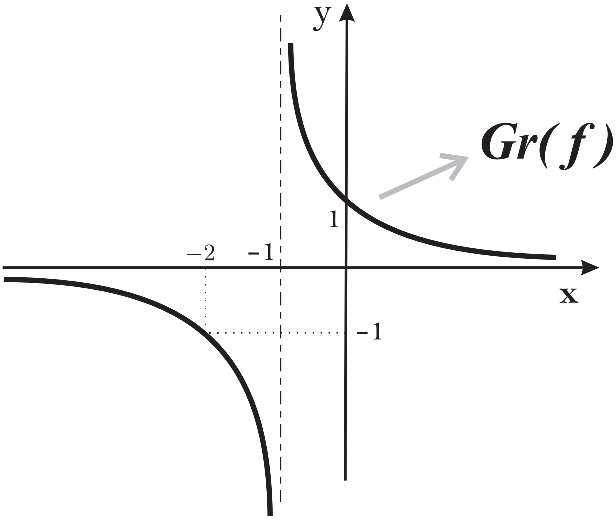


Figura 2.9: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

En el gráfico notamos que f es una función inyectiva pero no suryectiva. En efecto, sean $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(x')$. Luego,

$$f(x) = f(x') \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x'+1} \;\Leftrightarrow\; x' + 1 = x + 1 \;\Leftrightarrow\; x' = x.$$

Entonces, f es inyectiva. ✓

Para ver que no es suryectiva calculemos su imagen. Los valores $y \in Im(f)$ son aquellos que son "resultados" de la función. Otra manera de pensar esto, es decir que

y es un punto de la imagen si y sólo si la ecuación $f(x) = y$ tiene alguna solución en el dominio de f. Por ejemplo la ecuación $f(x) = 3$, ¿tiene solución en $Dom(f)$?

$$\begin{gathered} f(x) = 3 \Leftrightarrow \tfrac{1}{x+1} = 3 \Leftrightarrow 1 = 3 \cdot (x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tfrac{1}{3} = x + 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{3} - 1 = -\tfrac{2}{3} \,, \end{gathered}$$

y como $-\frac{2}{3} \in Dom(f)$ se verifica $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3$.

De la misma manera podemos descubrir quienes son *todos* los valores de la imagen de f pensando para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Intentamos despejar:

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x+1} = y \iff 1 = y \cdot (x+1).$$

Luego, si $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y} = x + 1 \iff x = \frac{1}{y} - 1.$$

Llegamos a la conclusión que siempre y cuando $y \neq 0$ la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. ¿Qué sucede entonces con $y = 0$? Al plantear $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 0$ vemos que la ecuación no tiene solución, por lo tanto $Im(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$ con lo que hemos probado que f no es suryectiva. ✓

2.7. Función inversible

El ejemplo 2.6.1 de la sección anterior mostró que la función $f(x) = 2x - 1$ es biyectiva. Cuando probamos la suryectividad, dado $y \in \mathbb{R}$, encontramos el único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Nos queda definida entonces una nueva función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) = \frac{y+1}{2}$$

o bien, lo que es lo mismo, cambiando el nombre de la variable,

$$g(x) = \frac{x+1}{2} \,.$$

La función g tiene la propiedad de que si a $x \in \mathbb{R}$ le aplicamos f y a lo que nos da le aplicamos g el resultado vuelve a ser x. Lo mismo ocurre si primero aplicamos g y luego f. Más precisamente,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g(f(x)) = x \\ f(g(x)) = x \end{cases} .$$

En efecto:

$$g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{(2x-1)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x.$$

La función g nos permitió "desandar el camino" que realizó f. Nos permitió resolver el *problema inverso* que nos planteó f. Se dice entonces que f es inversible y que g es (en principio "una") función inversa de f. Más precisamente:

Definición 2.7.1. *Sea $f : A \to B$. Se dice que f es* **inversible** *si existe $g : B \to A$ tal que*

$$\begin{cases} g(f(a)) = a, & \forall\, a \in A \\ f(g(b)) = b, & \forall\, b \in B \end{cases}.$$

En este caso, g se denomina (una) **inversa** *de f.*

Proposición 2.7.2. *Sea $f : A \to B$ inversible. Entonces existe una única $g : B \to A$ inversa de f. Es decir, si g y $g' : B \to A$ son inversas de f, entonces $g = g'$ (o sea $g(b) = g'(b)$, $\forall\, b \in B$).*

Demostración. Por ser g inversa de f resulta que (ver definición 2.7.1)

$$\begin{cases} g(f(a)) = a, & \forall\, a \in A \quad ① \\ f(g(b)) = b, & \forall\, b \in B \end{cases}.$$

Por ser g' inversa de f resulta que (ver definición 2.7.1)

$$\begin{cases} g'(f(a)) = a, & \forall\, a \in A \\ f(g'(b)) = b, & \forall\, b \in B \quad ② \end{cases}.$$

Luego,

$$g(b) \underset{②}{=} g(f(g'(b))) \underset{①}{=} g'(b), \quad \forall\, b \in B$$

Por lo tanto,

$$g = g'.$$

□

2.8. La inversa de una función

Si $f : A \to B$ inversible, por la definición 2.7.1 y la proposición 2.7.2, f tiene una **única** inversa.

Definición 2.8.1. *Sea $f : A \to B$ inversible. A la única función inversa de f se la denomina "la" función* **inversa** *de f y se la designa mediante $f^{-1} : B \to A$. O sea, f^{-1} es la única función que verifica*

$$\begin{cases} f^{-1}(f(a)) = a, \ \forall\, a \in A \\ f(f^{-1}(b)) = b, \ \forall\, b \in B \end{cases}.$$

Proposición 2.8.2. *Sea $f : A \to B$. Entonces:*

$$f \text{ es biyectiva } \Leftrightarrow f \text{ es inversible }.$$

Demostración. Probaremos las implicaciones por separado:

$\Rightarrow$) Por ser f biyectiva, para cada $b \in B$ existe (es suryectiva) un único (es inyectiva) $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego, sea $g : B \to A$ definida por $g(b) = a$.

Afirmamos que g es inversa de f.

En efecto. Sea $a \in A$, luego, $g(f(a)) = a$ ① (a es el único elemento de A que por f va a parar a $f(a)$). Sea $b \in B$ y sea $a \in A$ el único elemento de A tal que $f(a) = b$. Luego, $f(g(b)) = f(a) = b$ ②.

Por lo tanto, de ① y ② g es la inversa de f.

$\Leftarrow$) Por ser f inversible, existe $f^{-1} : B \to A$ tal que

$$\begin{cases} f^{-1}(f(a)) = a, \ \forall\, a \in A & \text{①} \\ f(f^{-1}(b)) = b, \ \forall\, b \in B & \text{②} \end{cases} .$$

Sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$. Entonces,

$$f(a) = f(a') \underset{\text{①}}{\Longrightarrow} f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a')).$$

Pero por ① $f^{-1}(f(a)) = a$ y $f^{-1}(f(a')) = a'$. Por lo tanto $a = a'$.

Luego f es inyectiva.

Sea $b \in B$. Por ②, $f(f^{-1}(b)) = b$. Entonces, existe $a = f^{-1}(b)$ tal que $f(a) = b$, por lo tanto f es suryectiva.

Como f es inyectiva y suryectiva, entonces es biyectiva.

□

2.9. Gráfico de la función inversa

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva, sabemos entonces que existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, resulta que $(x, y) \in Gr(f) \Leftrightarrow (y, x) \in Gr(f^{-1})$.

Por lo tanto, el gráfico de f^{-1} y el gráfico de f son simétricos respecto de la recta $y = x$.

Observación 2.9.1. Es importante notar que en la definición del concepto de función, intervienen tres elementos: el **dominio** (A), el **codominio** (B) y la **relación funcional** (la "ley" que relaciona los elementos de A con los elementos de B).

Por lo tanto, si modificamos alguno de estos tres elementos entonces obtenemos una nueva función (distinta de la anterior).

En el caso en que modifiquemos el dominio o el codominio de una función pero **no** la relación funcional (en esencia no cambiamos la correspondencia), mientras no exista peligro de confusión, seguiremos notando a la nueva función de la misma manera que notábamos la original pero debemos recordar siempre que hemos cambiado la función.

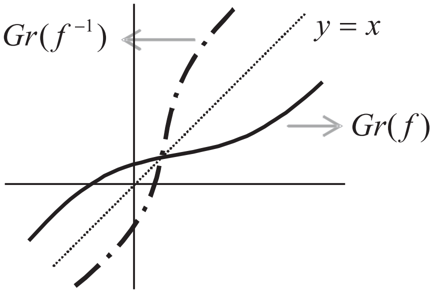


Figura 2.10: El gráfico de f^{-1} y el gráfico de f.

Ejemplo 2.9.2. La función raíz cuadrada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Vimos en el ejemplo 2.6.2 que $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x' \ \vee \ x = -x'$. Luego, para que resulte inyectiva, como nuevo dominio podemos optar entre los conjuntos $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 0]$.

Elijamos $[0, +\infty)$ como su nuevo dominio. Teniendo en cuenta la observación anterior, si consideramos $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ resulta que ahora f es biyectiva.

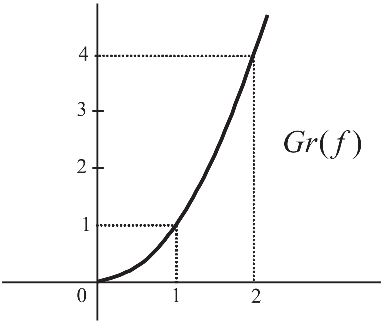


Figura 2.11: $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \quad f(x) = x^2$.

Luego, existe $f^{-1}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (por la proposición 2.8.2 y la definición 2.8.1) tal que

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall\, x \geq 0 \\ f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall\, y \geq 0 \end{cases} . \quad ①$$

Esta función (f^{-1}), que ya estudiamos antes, es la **raíz cuadrada** y la notamos $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Observemos entonces que, como ya sabemos, sólo podemos calcular la raíz cuadrada de números positivos o cero y que su resultado es un número positivo o cero.

Si $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es el único número no negativo b tal que $b^2 = a$. ②

En este caso ① dice que

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = x, & \forall\, x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, & \forall\, x \geq 0 \end{cases} .$$

Observemos, por ②, que si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\sqrt{x^2} = |x| \,.$$

2.10. Composición de funciones

Definición 2.10.1. *Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ tales que $Im(f) \subseteq C$. Denominamos* **composición** *de g y f a la función $g \circ f : A \to D$ definida por*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad \forall\, a \in A.$$

Al representar esta operación mediante diagramas de Venn obtenemos:

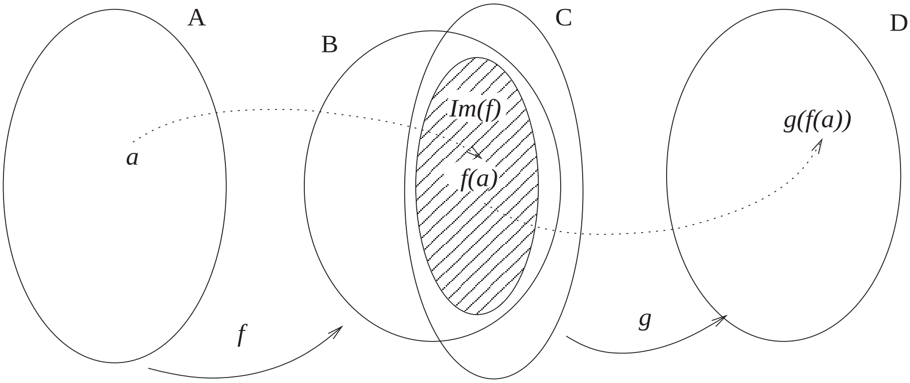


Figura 2.12: Representación de la composición $g \circ f$.

Observación 2.10.2. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ tales que $Im(f) \subset C$. De la definición, es claro que $A = Dom(g \circ f) = Dom(f)$.

Observación 2.10.3. Sea f una función real, si $f : A \to B$ es inversible, su inversa es la única función $f^{-1} : B \to A$ que verifica (recordar las definiciones 2.7.1, 2.8.1 y 2.10.1.)

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = id_A \\ f \circ f^{-1} = id_B \end{cases} .$$

Donde $id_A\colon A \to A$, la función *identidad en A,* es la función definida por $id_A(a) = a$, para todo $a \in A$.

A continuación mostramos algunas composiciones entre funciones reales.

Ejemplo 2.10.4. Sean f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$.

Dado que $Im(f) = [0, +\infty)$ y $Dom(g) = \mathbb{R}$, tenemos que $Im(f) \subseteq Dom(g)$ y podemos calcular, según la definición, $g \circ f$:

$$g \circ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{y, por 2.10.2,} \quad Dom(g \circ f) = Dom(f) = \mathbb{R}.$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3.$$

O sea,

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad ①$$

Como $Im(g) = \mathbb{R}$, $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(g) \subseteq Dom(f)$, también podemos calcular

$$f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{y también} \quad Dom(f \circ g) = Dom(g) = \mathbb{R}.$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2\,.$$

O sea,

$$(f \circ g)(x) = (x+3)^2\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad ②$$

Es claro que

$$x^2 + 3 \neq (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Por lo tanto, de ① y ② concluimos que $g \circ f \neq f \circ g$. Es decir, concluimos que en general no vale que $f \circ g = g \circ f$.

Ejemplo 2.10.5. Sean f y g las funciones reales dadas por $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Luego, $Im(f) = \mathbb{R}_{\neq 1} = Dom(g) = \mathbb{R}_{\neq 1}$. Podemos calcular entonces $g \circ f$ que resulta una función real y $Dom(g \circ f) = Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq -2}$.
Si $x \neq -2$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = \\ &= \frac{1}{\frac{(x+3)-(x+2)}{x+2}} = \frac{x+2}{(x+3)-(x+2)} = \frac{x+2}{1}\,,\end{aligned}$$

o sea,

$$(g \circ f)(x) = x + 2, \quad \forall\, x \neq -2. \quad ①$$

Observemos que al considerar la función real $h(x) = x + 2$, no nos referimos a la misma función ya que $Dom(h) = \mathbb{R}$ y $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}_{\neq -2}$.

Intentemos calcular $f \circ g$. Como $Im(g) = \mathbb{R}_{\neq 0} \not\subset Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq -2}$, en principio (según la definición 2.10.1), no podemos calcular $f \circ g$. Deberíamos entonces restringir, “achicar”, el $Dom(g)$ para que se verifique la condición $Im(g) \subset Dom(f)$.

Sin embargo, si operamos formalmente, resulta que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1}+3}{\frac{1}{x-1}+2}.$$

Y nos damos cuenta de que

$$Dom(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} : \quad x-1 \neq 0 \ \wedge \ \frac{1}{x-1}+2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \left\{\tfrac{1}{2}; 1\right\}.$$

Luego, basta considerar $Dom(g) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}; 1\}$, o sea $g : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}; 1\} \to \mathbb{R}$, para que se verifique $Im(g) \subset Dom(f)$ y poder calcular $f \circ g$. En este caso

$$(f \circ g)(x) = \frac{\frac{1}{x-1}+3}{\frac{1}{x-1}+2} = \frac{\frac{1+3(x-1)}{x-1}}{\frac{1+2(x-1)}{x-1}} = \frac{3x-2}{2x-1} \quad \forall\, x \neq \tfrac{1}{2}, 1. \quad ②$$

Luego, al calcular la composición $f \circ g$, debe preocuparnos qué conjunto consideraremos como dominio de g. Sin embargo al operar formalmente, podremos descubrir dicho conjunto siempre y cuando no "simplifiquemos" la expresión.

De ① y ②, es claro que también en este ejemplo resultó $g \circ f \neq f \circ g$.

Ejemplo 2.10.6. Sean $f(x) = \sqrt{x} - 2$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

Quedará a cargo del lector verificar que:

$$Dom(f) = [0, +\infty)\,, \qquad Im(f) = [-2, +\infty)$$

y

$$Dom(g) = \mathbb{R}_{\neq -1}\,, \qquad Im(g) = \mathbb{R}_{\neq 0}.$$

Al calcular $f \circ g$ obtenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} - 2$$

donde $Dom(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x+1} \geq 0 \ \wedge x+1 \neq 0\right\} = (-1, +\infty)$.

En cambio al calcular $g \circ f$ obtenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}-2\right) = \frac{1}{(\sqrt{x}-2)+1}$$

donde $Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0 \ \ \wedge \ \ \sqrt{x} - 2 + 1 \neq 0\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.11. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Sean f y g funciones reales. Las operaciones de $\mathbb{R}$ permiten definir nuevas funciones a partir de f y g.

Definición 2.11.1. *Se denomina función* **suma** *de f y g a la función real $f+g$ definida por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

En este caso, $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

Por ejemplo si consideramos $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ y $g(x) = \frac{3x-1}{2x-4}$ la función suma de f y g está dada por

$$(f+g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{3x-1}{2x-4}$$

y como

$$Dom(f) = [0,+\infty) \quad \text{y} \quad Dom(g) = \mathbb{R}_{\neq 2} \quad \Rightarrow$$

$$Dom(f+g) = [0,+\infty) \cap \mathbb{R}_{\neq 2} = [0,2) \cup (2,+\infty).$$

Definición 2.11.2. *Se denomina función* **resta** *de f y g a la función real $f-g$ definida por*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

En este caso, $Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

Definición 2.11.3. *Se denomina función* **producto** *de f y g a la función real $f \cdot g$ definida por*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

En este caso, $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

Definición 2.11.4. *Se denomina función* **cociente** *de f y g a la función real $\frac{f}{g}$ definida por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

En este caso, $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap \{x \in Dom(g) : g(x) \neq 0\}$.

Otra vez, si consideramos $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ y $g(x) = \frac{3x-1}{2x-4}$ la función cociente $\frac{f}{g}$ esta dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{3x-1}{2x-4}}.$$

y como

$$Dom(f) = [0,+\infty) \ \text{ y } \ \{x \in Dom(g) : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}_{\neq 2} - \{\tfrac{1}{3}\} \Rightarrow$$

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = [0,+\infty) \cap \mathbb{R}_{\neq 2} - \{\tfrac{1}{3}\} = [0,\tfrac{1}{3}) \cup (\tfrac{1}{3},2) \cup (2,+\infty).$$

Observando este ejemplo notamos la importancia de los conjuntos que se definen a continuación.

Definiciones 2.11.5. *Sea f una función real.*

1. *Decimos que $r \in Dom(f)$ es una* **raíz** *o* **cero** *de f si $f(r) = 0$.*

2. *Al conjunto de todas las raíces de f lo denominamos* **conjunto de ceros** *o de raíces y lo notamos*

$$C_0(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) = 0\}.$$

   Desde un punto de vista geométrico $C_0(f)$ es la intersección del gráfico de f con la recta $y = 0$ (el eje x).

3. *Denominamos* **conjunto de positividad** *de f al conjunto*

$$C_+(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) > 0\}.$$

   Desde un punto de vista geométrico $C_+(f)$ es el conjunto de puntos del dominio de la función donde el gráfico de f se mantiene por arriba del eje x.

4. *Denominamos* **conjunto de negatividad** *de f al conjunto*

$$C_-(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) < 0\}.$$

   Desde un punto de vista geométrico $C_-(f)$ es el conjunto de puntos del dominio de la función donde el gráfico de f se mantiene por abajo del eje x.

Un hecho que puede resultar práctico es

$$C_0(f) \cup C_-(f) \cup C_+(f) = Dom(f)$$

Mencionaremos a continuación algunos ejemplos de funciones reales de variable real.

2.12. Funciones lineales

Definición 2.12.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es* **lineal** *si tiene la forma*

$$f(x) = mx + b, \quad \textit{para ciertos } m, b \in \mathbb{R}\ .$$

Si f es una función lineal, $Dom(f) = \mathbb{R}$. Si $m \neq 0$ entonces f es biyectiva.

Su gráfico es una recta no vertical que tiene pendiente m (el número m es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el semieje x positivo) y ordenada al origen b (el número $b = f(0)$ es la intersección de la recta con el eje y). En particular, si $m = 0$, la función $f(x) = b$ se denomina función *constante*. Su gráfico es una recta horizontal.

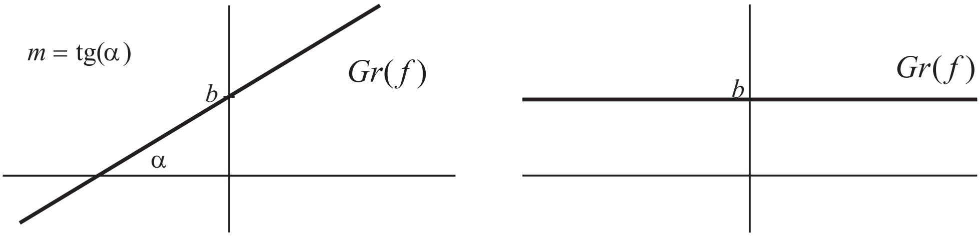


Figura 2.13: Gráfico de $f(x) = mx + b$ con $m \neq 0$ y con $m = 0$.

2.13. Funciones polinómicas

Definición 2.13.1. *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Decimos que* f *es una función* **polinómica** *o simplemente un* **polinomio** *si tiene la forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Si f es una función polinómica, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Las funciones lineales son un caso particular de funciones polinómicas. Las funciones **cuadráticas**, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, también son funciones polinómicas.

Otros ejemplos de funciones polinómicas son $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = -7x^9$, $f(x) = 4x^5 - \sqrt{2}x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 3$, $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, etc.

2.14. Funciones racionales

Definición 2.14.1. *Sea* f *una función real. Decimos que* f *es una función* **racional** *si es un cociente de dos funciones polinómicas. Es decir, si* f *tiene la forma*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

para ciertos polinomios P *y* Q .

Si f es una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, entonces $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

En particular los polinomios son ejemplos de funciones racionales.

Las funciones *homográficas* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ (cuyos gráficos son las hipérbolas) son ejemplos de funciones racionales.

Algunos ejemplos variados de funciones racionales son:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}; \quad f(x) = \frac{x}{x+3},\ Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}\,;$$

$$f(x) = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 2},\ Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \ \wedge \ x \neq 2\}\,.$$

2.15. Construcción de las funciones trigonométricas

Recordemos que construyendo un triángulo rectángulo a partir de un ángulo agudo α (mayor que 0 y menor que un recto),

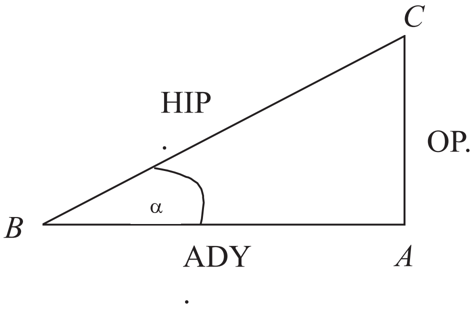


Figura 2.14: Triángulo rectángulo a partir del ángulo α.

se definen las relaciones trigonométricas del ángulo α por:

$sen(\alpha)$	$= \frac{\text{OP}}{\text{HIP}}$	(seno de α)	$cosec(\alpha)$	$= \frac{\text{HIP}}{\text{OP}} = \frac{1}{sen(\alpha)}$	(cosecante de α)
$cos(\alpha)$	$= \frac{\text{ADY}}{\text{HIP}}$	(coseno de α)	$sec(\alpha)$	$= \frac{\text{HIP}}{\text{ADY}} = \frac{1}{cos(\alpha)}$	(secante de α)
$tg(\alpha)$	$= \frac{\text{OP}}{\text{ADY}}$	(tangente de α)	$cotg(\alpha)$	$= \frac{\text{ADY}}{\text{HIP}} = \frac{1}{tg(\alpha)}$	(cotangente de α)

Donde: OP = cateto opuesto a α, ADY = cateto adyacente a α e HIP = hipotenusa del triángulo rectángulo construido.

Por propiedades relativas a triángulos semejantes (Teorema de Thales), estas relaciones dependen sólo del ángulo α y no del triángulo rectángulo construido a partir de él.

Podemos extender estas relaciones definiendo, geométricamente, funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para ello hacemos lo siguiente:

Consideramos la circunferencia de centro 0 y radio 1 de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

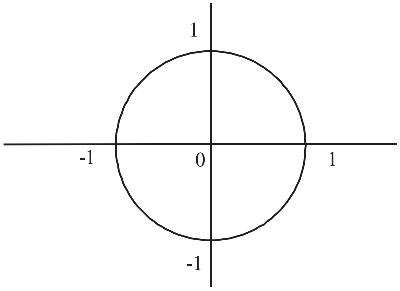


Figura 2.15: Circunferencia unitaria.

- "Enrollamos" la semirrecta positiva de números reales sobre la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj haciendo coincidir el número real 0 con el punto $(1, 0)$ del plano (el extremo derecho de la circunferencia).
- "Enrollamos" la semirrecta negativa de números reales sobre la circunferencia en sentido de las agujas del reloj.

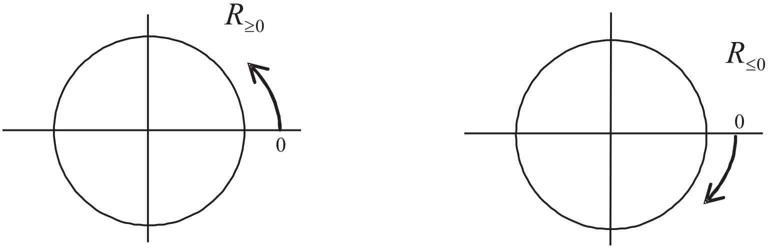


Figura 2.16: Enrollamos la recta real.

Luego, todo $x \in \mathbb{R}$ queda representado como una caminata sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1 desde el punto $(1, 0)$ en alguna de las dos direcciones posibles. Es claro que, como la longitud de la circunferencia es 2π, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, los números $x + 2k\pi$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ quedan representados sobre el mismo punto de la circunferencia. Por ejemplo, los números reales $0,\ 2\pi,\ 4\pi, ...,\ -2\pi,\ -4\pi, ...,$ quedan representados sobre la circunferencia como el punto del plano $(1, 0)$.

De esta manera, cada $x \in \mathbb{R}$, pensado sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1, es un punto del plano (a, b).

Definimos entonces las funciones trigonométricas seno y coseno.

Definiciones 2.15.1. *Definimos las funciones* sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(seno) y* cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(coseno) como*

$$\begin{cases} \cos(x) = a \\ \operatorname{sen}(x) = b \end{cases}.$$

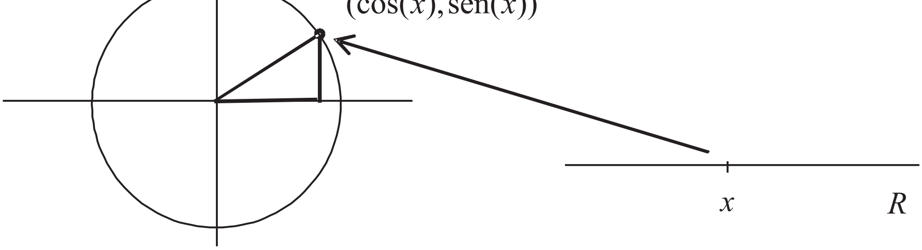


Figura 2.17: El coseno es la primer coordenada y el seno la segunda.

Así por ejemplo

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1, & \operatorname{sen}(\pi) = 0, & \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 1, & \cos(\pi) = 0, & \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right). \end{array}$$

Esta definición extiende a todo $\mathbb{R}$ las relaciones trigonométricas definidas para ángulos α tales que (medido en radianes) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Los gráficos de las funciones $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son los siguientes:

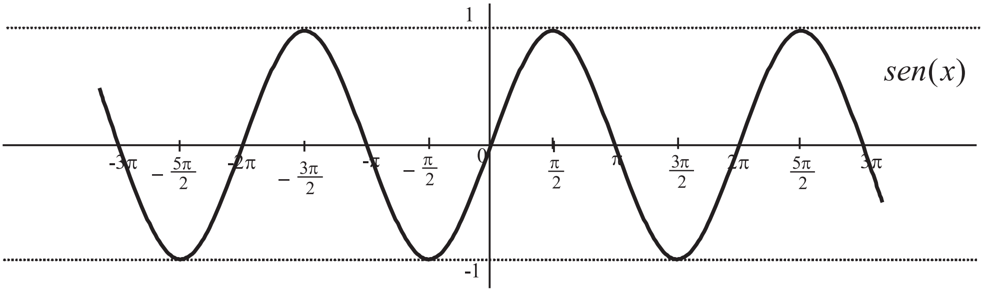


Figura 2.18: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

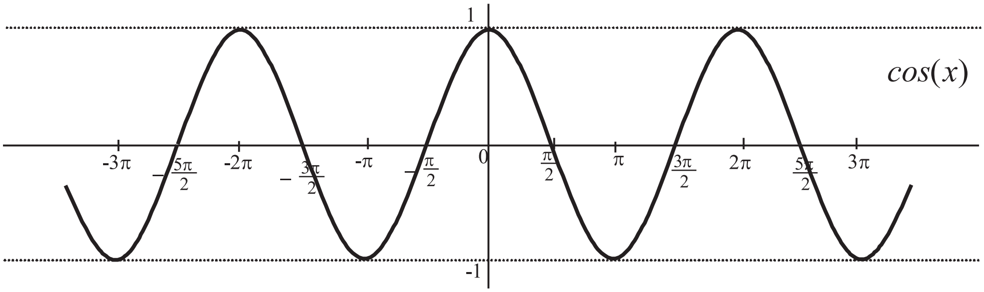


Figura 2.19: Gráfico de $f(x) = \cos(x)$.

A partir de estas definiciones geométricas de las funciones seno y coseno se pueden verificar rápidamente (entre otras) las siguientes propiedades:

Proposición 2.15.2.

1. *Dom*(sen) = *Dom*(cos) = $\mathbb{R}$.

2. *Las funciones* sen *y* cos *son funciones periódicas de período* 2π. *O sea,*

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad y \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Esto nos dice que sus gráficos se repiten cada 2π comenzando desde cualquier punto de la recta.

3. *La función* sen $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es impar.*

   Pues $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (ver definición 2.5.2).

4. *La función* cos $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es par.*

   Pues $\cos(-x) = \cos(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

5. $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ *(gracias al Teorema de Pitágoras).*

6. $\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}(x) \cdot \cos(y) \pm \text{sen}(y) \cdot \cos(x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

7. $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(x) \mp \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

8. *Para todo* $x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ *y* $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x)$.

9. *La función* sen *es positiva en el primer y segundo cuadrante y negativa en el tercer y cuarto cuadrante.*

10. *La función* cos *es positiva en el primer y cuarto cuadrante y negativa en el segundo y tercer cuadrante.*

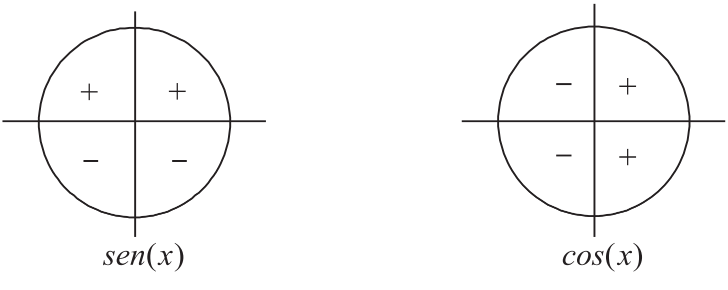


Figura 2.20: Signos de las funciones seno y coseno.

11. *Para todo* $x \in \mathbb{R} : |\text{sen}(x)| \leq 1$ *y* $|\cos(x)| \leq 1$.

12. $C_0(\text{sen}) = \{x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

13. $C_0(\cos) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2.16. Más funciones trigonométricas

A partir de las funciones sen y cos se definen las otras funciones trigonométricas:

Definición 2.16.1. *La función real* tg *(tangente),* $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$,

$$Dom(\text{tg}) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por ejemplo $\text{tg}(0) = 0$, $\text{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, $\text{tg}(\frac{3\pi}{4}) = -1$ (recordar: $\text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$). Su gráfico es el siguiente:

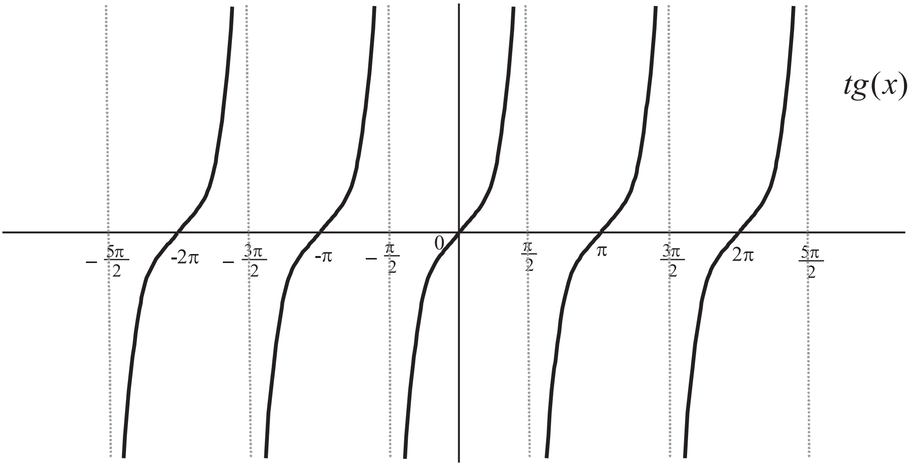


Figura 2.21: El gráfico de la función tangente.

Definición 2.16.2. *La función real* cosec *(cosecante),* $\text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$,

$$Dom(\text{cosec}) = \{x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definición 2.16.3. *La función real* sec *(secante),* $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$,

$$Dom(\sec) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definición 2.16.4. *La función real* cotg *(cotangente),* $\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$,

$$Dom(\text{cotg}) = \{x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.17. Inversas de las funciones trigonométricas

De los gráficos de las funciones seno, coseno y tangente podemos concluir que estas no son biyectivas. Sin embargo, como hicimos en el ejemplo 2.9.2, podemos restringir los dominios y codominios de cada una de ellas para que lo sean. Como $Im(\text{sen}) = Im(\cos) = [-1, 1]$ e $Im(\text{tg}) = \mathbb{R}$, deberemos considerar los siguientes nuevos codominios:

$$Codom(\text{sen}) = [-1, 1] \quad Codom(\cos) = [-1, 1] \quad Codom(\text{tg}) = \mathbb{R}.$$

Ahora bien, en el caso de los dominios observamos que existen, para las tres funciones, varias elecciones posibles.

Para el seno podemos elegir cualquier intervalo de la forma

$$[\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + (k + 1)\pi] \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

por ejemplo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, etc.

Para el coseno podemos elegir cualquier intervalo de la forma

$$[k\pi, (k+1)\pi] \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

por ejemplo $[0, \pi]$, $[-\pi, 0]$, $[\pi, 2\pi]$, etc.

Para la tangente, teniendo en cuenta que no está definida si $\cos(x) = 0$, podemos elegir cualquier intervalo de la forma

$$(\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

por ejemplo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, etc.

Las elecciones naturales (las que usan las calculadoras) son $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para el seno, $[0, \pi]$ para el coseno y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para la tangente.

Luego, restringiendo las tres funciones mencionadas resulta que

$$\text{sen} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1], \quad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{y} \quad \text{tg} : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}.$$

son biyectivas. Por lo tanto, existen sus funciones inversas.

Definiciones 2.17.1.

1. *Definimos la inversa de la función* sen

$$(\text{sen})^{-1} = \text{arc sen} : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \textit{(arcoseno).}$$

Por la definición 2.8.1, verifica las relaciones

$$\begin{cases} \text{sen}(\text{arc sen}(x)) = x, & \forall\, x \in [-1, 1] \\ \text{arc sen}(\text{sen}(x)) = x, & \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

2. *Definimos la inversa de las función* cos

$$(\cos)^{-1} = \text{arc cos} : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad \textit{(arcocoseno).}$$

Por la definición de función inversa, verifica las relaciones

$$\begin{cases} \cos(\text{arc cos}(x)) = x, \ \forall\, x \in [-1, 1] \\ \text{arc cos}(\cos(x)) = x, \ \forall\, x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

3. *Se define la inversa de las función* tg

$$(\text{tg})^{-1} = \text{arc tg} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \quad \textit{(arcotangente).}$$

Por la definición de función inversa, verifica las relaciones

$$\begin{cases} \text{tg}(\text{arc tg}(x)) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \text{arc tg}(\text{tg}(x)) = x, \ \forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

2.18. Funciones exponenciales

Recordemos que dado $a \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

Esta operación, denominada *potenciación*, verifica las siguientes propiedades:

Proposición 2.18.1.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^{n+m} = a^n \cdot a^m & ① \\ a^{n \cdot m} = (a^n)^m & ② \end{array} \right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \ \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

La potenciación se extiende a potencias enteras definiendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^0 = 1 & ③ \\ a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n} & ④ \end{array} \right. \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_{\neq 0}, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil verificar que con las definiciones ③ y ④ las propiedades ① y ② siguen siendo válidas para todo n, $m \in \mathbb{Z}$.

Para poder extender la potenciación a potencias racionales es necesario restringir los valores de a.

Si $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{Z})$ definimos

$$a^q = (a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

donde $\sqrt[n]{a^m}$ indica el único número positivo b tal que $b^n = a^m$.

Podemos verificar que en este caso también siguen siendo válidas las propiedades ① y ②.

Ahora bien, la extensión de la potenciación a potencias reales ya no es tan sencilla. Se basa en el Axioma de Completitud de los números reales (la última propiedad de los números reales mencionada en el capítulo 1).

[Para realizar dicha extensión, utilizando el Axioma de Completitud se prueba que todo número real x puede "aproximarse" por números racionales, es decir existe una "sucesión" de números racionales $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que, a medida que tomamos n cada vez más grande, los números q_n están cada vez más cerca de x (el "límite" de la sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es x). Una vez elegida esta sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se considera la nueva sucesión $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y se comprueba que a medida que tomamos n cada vez más grande, los números a^{q_n} están cada vez más cerca de un número real (la sucesión $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ "converge") que notaremos a^x. Se puede verificar que esta definición de a^x depende sólo de x y no de la sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elegida y que además siguen siendo válidas las propiedades ① y ②].

En definitiva: para cada $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ queda definida una función que denominamos *exponencial* en base a.

Definición 2.18.2. *Para cada $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ definimos las funciones*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{dadas por} \quad \exp_a(x) = a^x.$$

Hemos excluido el caso $a = 1$ pues, como $1^x = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, obtendríamos la función constante $f(x) = 1$.

Las funciones exponenciales verifican las siguientes propiedades:

Proposición 2.18.3.

1. $\exp_a(x) = a^x > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$
3. $a^{x \cdot y} = (a^x)^y\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$
4. $\exp_a(0) = a^0 = 1.$
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
6. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$
7. *Si* $a > 1,\ x < y \Rightarrow a^x < a^y.$
8. *Si* $0 < a < 1,\ x < y \Rightarrow a^x > a^y.$

En la figura 2.22 vemos los tipos de gráficos posibles para una función exponencial.

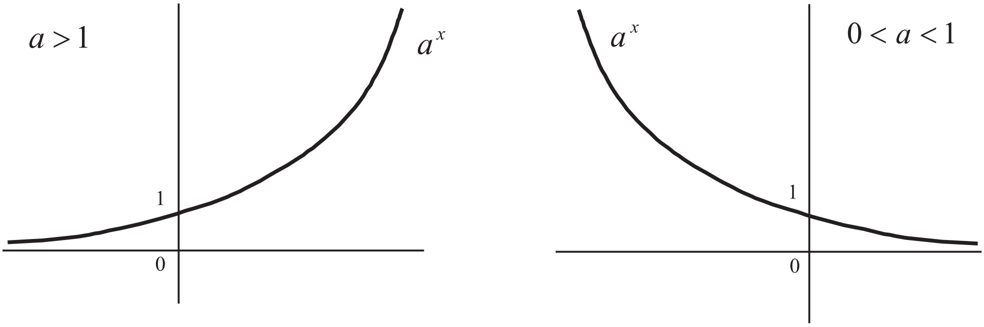


Figura 2.22: Gráfico de la función $f(x) = a^x$.

A partir de sus gráficos observamos que, para todo $a \in \mathbb{R}_{>0},\ a \neq 1$,

$$Dom(\exp_a) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Im(\exp_a) = (0, +\infty).$$

2.19. Funciones logarítmicas

De los puntos *7* y *8* de la proposición 2.18.3 (y de su gráfico) es claro que las funciones exponenciales son inyectivas pero no suryectivas. Luego, para que resulten biyectivas deberemos considerar como nuevo codominio su imagen, o sea, el conjunto $(0, +\infty)$.

Considerando entonces, para cada $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$,

$$\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

ahora sí resulta biyectiva.

Su función inversa se denomina *logaritmo en base a.*

Definición 2.19.1. *Llamaremos* **logaritmo en base** a *a la inversa de la función* $\exp_a$

$$(\exp_a)^{-1} = \log_a \quad \textit{o sea,} \quad \log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

El logaritmo en base a, es la única función que verifica

$$\begin{cases} \log_a(\exp_a(x)) = x, & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \exp_a(\log_a(x)) = x, & \forall\, x > 0 \end{cases}.$$

Recordando que $\exp_a(x) = a^x$, podemos reescribir estas relaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \log_a(a^x) = x, & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a(x)} = x, & \forall\, x > 0 \end{cases}.$$

Observemos que, dado que hemos definido el $\log_a$ como la función inversa de la $\exp_a(x)$, no existe una expresión que describa al $\log_a$. Todo lo que sabemos es que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x,$$

es decir, el $\log_a(x)$ es el único número real y que verifica que $a^y = x$.

En la figura 2.23 vemos los tipos de gráficos posibles para una función logarítmica.

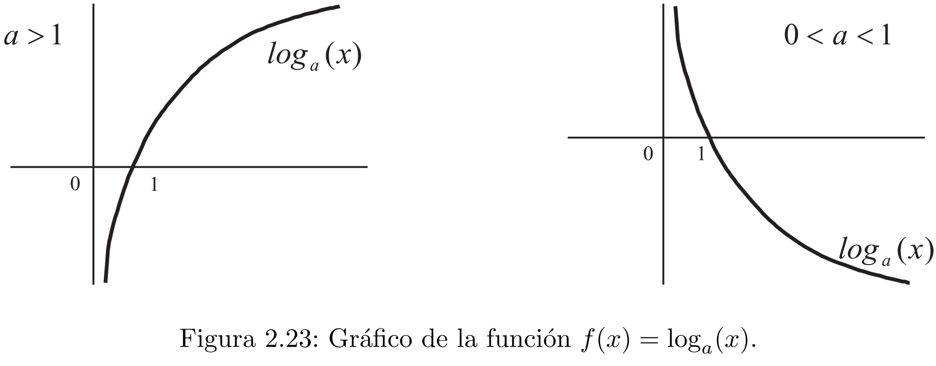


Figura 2.23: Gráfico de la función $f(x) = \log_a(x)$.

Proposición 2.19.2. *Las funciones logarítmicas verifican las siguientes propiedades:*

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.
3. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}, \forall\, y \in \mathbb{R}$.
4. $\log_a(1) = 0$.
5. $\log_a(a) = 1$.
6. $C_0(\log_a) = \{1\}$.
7. *Si* $a > 1$*:* $C_+(\log_a) = (1, +\infty)$ *y* $C_-(\log_a) = (0, 1)$*.*
8. *Si* $0 < a < 1$*:* $C_+(\log_a) = (0, 1)$ *y* $C_-(\log_a) = (1, +\infty)$*.*
9. *Si* $a > 1$*,* $x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y)$*.*
10. *Si* $0 < a < 1$*,* $x < y \Rightarrow \log_a(x) > \log_a(y)$*.*
11. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$*,* $a \neq 1$*,* $b \neq 1$*.* $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \quad \forall\, x > 0$*.*

2.20. El número e y las funciones e^x y $\ln(x)$

Recordemos que existe un número real (irracional) muy especial, el número e.

[Para definir el número e consideramos la sucesión de números reales

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Podemos probar que la sucesión, que es creciente ($a_n < a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) y acotada superiormente ($a_n < 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$), converge (a medida que se toma $n \in \mathbb{N}$ cada vez más grande los números a_n se aproximan cada vez más a un número real). El número real al cual converge la sucesión se denomina número e.]

Se sabe que $2 < e < 3$ (en particular $e > 1$) y que e es un número irracional. Pensando en su desarrollo decimal, lo podemos *aproximar* por

$$e \approx 2,7182818 \;\; .$$

En particular, tenemos la función $\exp_e(x) = e^x$ y su inversa $\log_e$. A la función $\log_e$ la denominamos *logaritmo natural* y la notamos ln. O sea,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

Si consideramos $a = 10$ obtenemos las funciones $\exp_{10}(x) = 10^x$ y su inversa $\log_{10}$. La función $\log_{10}$ se la nota simplemente log. O sea,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \log(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x.$$

El punto *11* de la propiedad 2.19.2 de las funciones logarítmicas nos permite calcular el valor del logaritmo en una base dada en función del logaritmo en otra base. Es por esta razón que en las calculadoras generalmente aparecen únicamente ln y log.

2.21. Funciones definidas a trozos

Dado $x \in \mathbb{R}$ podemos definir, desde un punto de vista geométrico, el *módulo* o *valor absoluto de x* como la distancia entre x y 0. Desde un punto de vista analítico esta definición da lugar a una función *definida a trozos* (o por partes).

Definición 2.21.1. *Se define la función* **módulo**,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \textit{dada por} \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Mostramos su gráfico en la figura 2.24.

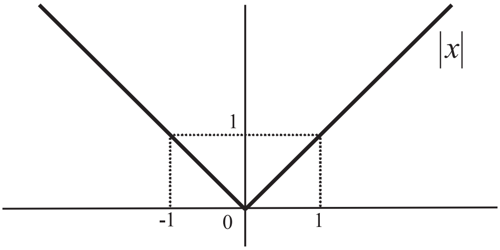


Figura 2.24: Gráfico de la función $f(x) = |x|$.

Proposición 2.21.2. *Algunas de las propiedades más importantes de la función módulo son las siguientes:*

1. $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad y \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $|-x| = |x|\,, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ *(Recordando la definición 2.5.2, la función módulo es par.)*

3. $|x + y| \leq |x| + |y|\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$

4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$

Proposición 2.21.3.

1. *Si* $a > 0$, $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a \;\Leftrightarrow\; x \in [-a, a]$.

2. *Si* $a > 0$, $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a \;\Leftrightarrow\; x \in (-a, a)$.

3. *Si* $a > 0$, $|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; x \leq -a \vee x \geq a \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

4. *Si* $a > 0$, $|x| > a \;\Leftrightarrow\; x < -a \vee x > a \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

5. $|x - y|$ *mide la distancia entre x e y.*

La proposición 2.21.3 nos permite describir el conjunto de todos los números reales cuya distancia a un número real fijo es menor o menor o igual que una distancia prefijada.

Más precisamente, si $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, queremos describir el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{la distancia entre } x \text{ y } x_0 \text{ es menor que } \varepsilon\}.$$

Teniendo en cuenta la proposición 2.21.3 resulta que la distancia entre x y x_0 es menor que ε si y sólo si

$$|x - x_0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Por lo tanto,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Análogamente, si B es el conjunto definido por

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \text{la distancia entre } x \text{ y } x_0 \text{ es menor o igual que } \varepsilon\},$$

teniendo en cuenta la proposición 2.21.3 resulta la distancia entre x y x_0 es menor o igual que ε si y sólo si

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Entonces,

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon\} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Se dice que A es un *entorno abierto* alrededor de x_0 y que B es un *entorno cerrado* alrededor de x_0.

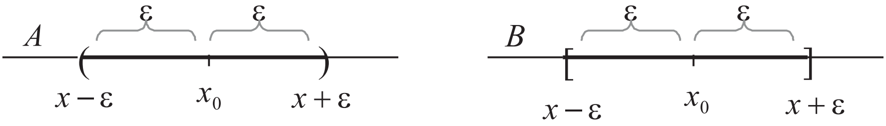


Figura 2.25: Entornos alrededor del punto x_0.

Otro ejemplo de función partida, es la función *signo.*

Definición 2.21.4. *Se define la función* **signo**

$$sg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

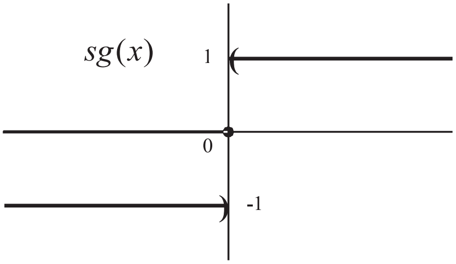


Figura 2.26: Gráfico de la función signo.

Podemos definir funciones partidas a partir de funciones conocidas. Por ejemplo si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases},$$

f queda definida a partir de las funciones $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x^2$.

Su gráfico se muestra el la figura 2.27.

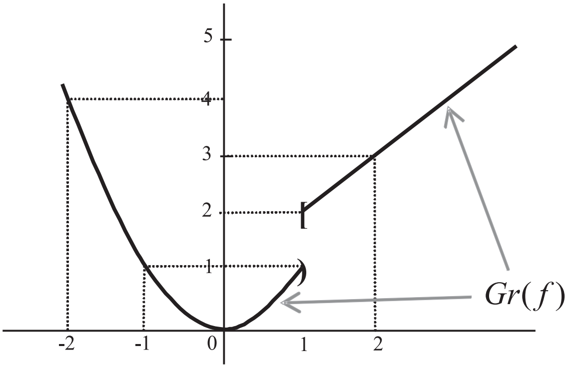


Figura 2.27: Gráfico de $f(x)$.

Es decir, la función f posee dos expresiones según sea $x \geq 1$ o $x < 1$. Por lo tanto, hay que tener en claro que tenemos una única función, la función f, y **no** dos. Si queremos saber cuál es el valor de f aplicada a un número x, primero debemos observar si $x \geq 1$ o $x < 1$ y recién entonces aplicamos la expresión correspondiente. Por ejemplo, como $2 \geq 1$, $f(2) = g(2) = 2 + 1 = 3$; y como $0 < 1$, $f(0) = h(0) = 0^2 = 0$.

Capítulo 3

Límite de una función

3.1. La noción de límite

Desarrollaremos a continuación una noción central en el Cálculo, el concepto de *límite de funciones*. Dada una función real f y $x_0 \in \mathbb{R}$ queremos precisar la siguiente pregunta:

¿Qué le pasa a $f(x)$ cuando x se acerca a x_0?

Aclaremos la pregunta, si consideramos valores x cada vez más cerca del valor x_0, ¿los valores $f(x)$ se acercan a algún número?

Para comprender el concepto de límite, lo primero que debe quedar claro es que *no importa* qué pasa en x_0, sólo interesa qué ocurre "cerca" de x_0. Más aún, la función podría no estar definida en x_0.

Analicemos algunos ejemplos.

Consideremos f, g y h las funciones reales definidas por:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}, \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Sus gráficos son los de la figura 3.1.

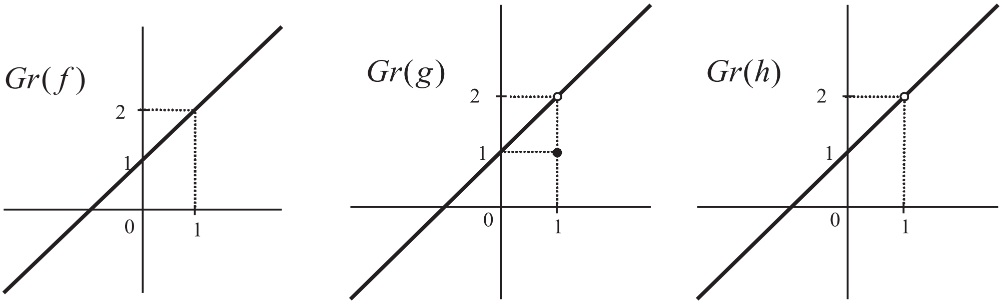


Figura 3.1: Los gráficos de f, g y h difieren sólo en $x = 1$.

Luego, $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Dom(g) = \mathbb{R}$ y $Dom(h) = \mathbb{R} - \{1\}$. Al considerar $x_0 = 1$ es claro que

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \neq 1.$$

Por otra parte, para todo $x \neq 1$,

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} \underset{*}{=} x + 1 = f(x),$$

observemos que la igualdad $*$ sólo vale para $x \neq 1$. Por lo tanto, $f(x) = g(x) = h(x)$, para todo $x \neq 1$.

Tomemos valores cada vez más cerca de 1 (pero **no** en 1) y evaluemos las tres funciones en dichos puntos como muestra la siguiente tabla:

x	$f(x) = g(x) = h(x)$	x	$f(x) = g(x) = h(x)$
$0,9$	$1,9$	$1,1$	$2,1$
$0,99$	$1,99$	$1,01$	$2,01$
$0,999$	$1,999$	$1,001$	$2,001$
$0,9999$	$1,9999$	$1,0001$	$2,0001$
$0,99999$	$1,99999$	$1,00001$	$2,00001$
$0,999999$	$1,999999$	$1,000001$	$2,000001$
$0,9999999$	$1,9999999$	$1,0000001$	$2,0000001$
$0,99999999$	$1,99999999$	$1,00000001$	$2,00000001$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Observando la tabla *intuimos* que, a medida que consideramos valores x cada vez más cerca de 1, los valores $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ se encuentran cada vez más cerca del número 2.

En el caso de la función f, $1 \in Dom(f)$, $f(1) = 2$ y $f(x)$ se acerca a $f(1) = 2$.

En el caso de la función g, $1 \in Dom(g)$, $g(1) = 1$ y $g(x)$ **no** se acerca a $g(1) = 1$.

En el caso de la función h, $1 \notin Dom(h)$ y, como no existe $h(1)$, no tiene sentido preguntarse si $h(x)$ se acerca o no a $h(1)$.

Ahora bien:

- ¿Porqué estamos tan seguros de que las funciones se acercan a 2?
- ¿No podría ocurrir que, tomando valores aún más cercanos a 1, la función cambie la tendencia que muestra la tabla?
- ¿La tabla nos alcanza?
- ¿Cuántos valores tendremos que tomar para estar seguros de nuestra conclusión?

El hecho que alrededor de un número real x_0 fijo haya siempre infinitos números reales, tan cerca de x_0 como queramos, hace que ninguna "tabla" que podamos construir nos alcance para sacar conclusiones certeras (ejemplos no tan simples como éstos nos mostrarán que, realizando un análisis similar, podemos arribar a conclusiones erróneas). Por lo tanto el análisis anterior no nos garantiza nada.

Es el momento entonces, de comenzar a precisar la definición de límite. Sean f una función real, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$. Queremos precisar la frase

"$f(x)$ se acerca a ℓ cuando x se acerca a x_0".

Para ello realizamos las siguientes observaciones:

1. **No** importa lo que le pasa a la función en x_0.

2. Sólo importa qué le pasa a la función "cerca" de x_0, no "lejos".

3. Que $f(x)$ se acerca a ℓ es lo mismo que decir que $f(x)-\ell$ se acerca a 0. Es decir, que la distancia entre $f(x)$ y ℓ se hace tan chica como se quiera. Esto último significa que $|f(x)-\ell|$ se hace tan chico como se quiera.

4. Que x está cerca de x_0 (pero no es x_0) es lo mismo que decir que la distancia entre x y x_0 es pequeña pero no nula. Esto último significa que $|x-x_0|$ es pequeño pero distinto de 0.

Por lo tanto, la frase "$f(x)$ se acerca a ℓ cuando x se acerca a x_0" significa que:
"$|f(x)-\ell|$ puede hacerse tan chico como se quiera con tal de tomar $|x-x_0|$ suficientemente pequeño pero distinto de 0".

Por último observemos que "ser tan pequeño como se quiera" significa ser menor que cualquier número positivo.

Precisando aún más, la frase "$f(x)$ se acerca a ℓ cuando x se acerca a x_0 " significa entonces que:
"dado cualquier número positivo ε, se puede conseguir que $|f(x)-\ell|$ sea menor que ε con tal que $|x-x_0|$ sea suficientemente pequeño pero distinto de 0, es decir con tal que $0<|x-x_0|<\delta$, para un cierto número positivo δ (que, en principio, depende de ε y x_0)".

Estamos en condiciones ahora de dar la definición de límite.

Definición 3.1.1. *Sea $x_0 \in (a,b)$; sea f una función real definida en (a,b), salvo quizás en x_0, y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$* **tiende a ℓ cuando x tiende a x_0**, *o que $f(x)$ tiene* **límite ℓ cuando x tiende a x_0** *si se verifica:*

"Cualquiera sea $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ (que depende de x_0 y de ε) tal que, si $0<|x-x_0|<\delta$, entonces $|f(x)-\ell|<\varepsilon$."

En ese caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

que se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a ℓ.

Por lo tanto, para probar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ en un caso determinado tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, encontrar $\delta > 0$ que verifique:

"Si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$."

¡Y comprobarlo!

Recordemos que, por la proposición 2.21.3 del capítulo 2,

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)\,,$$

y que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta) \quad \text{y} \quad x \neq x_0.$$

Es decir, si

$$x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0) \cup (x_0\ ,\ x_0 + \delta)\,.$$

Luego, desde un punto de vista geométrico, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa que cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que en general depende de ε y de x_0) de manera tal que para valores $x \neq x_0$ en el intervalo $(x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$, el gráfico de f se encuentra en la zona sombreada como muestra la figura 3.2.

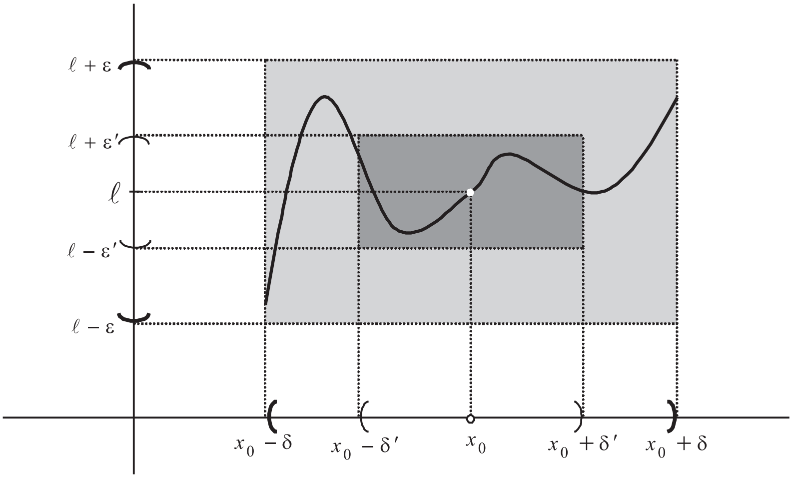


Figura 3.2: Si $x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$ el gráfico de f esta en la zona sombreada.

Observación 3.1.2. Teniendo en cuenta la dificultad de la noción de límite (que en esencia se basa en el axioma de Completitud de los números reales) recordemos que el objetivo de este libro es sólo introducir al alumno en el Cálculo. Luego, aceptaremos muchas de las propiedades que posee el límite de funciones intentando su comprensión de manera intuitiva.

Ejemplo 3.1.3. Un límite que no existe.

Sea f la función real definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$. Su gráfico aproximado es el de la figura 3.3.

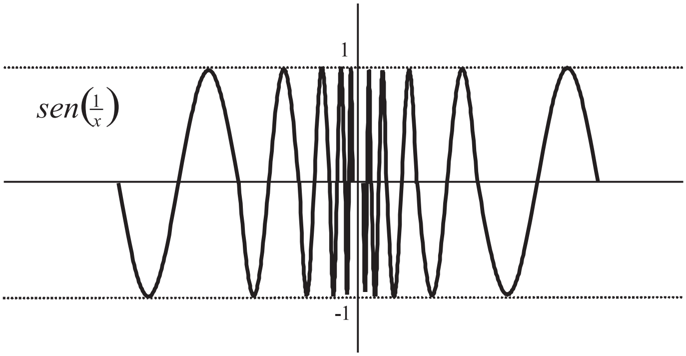


Figura 3.3: Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Observando el gráfico, nos damos cuenta que a medida que nos acercamos a $x = 0$, $f(x)$ va tomando todos los valores posibles entre -1 y 1 infinitas veces. O sea, **no** es cierto que $f(x)$ se acerca a un número cuando x se acerca 0 (todo lo que podemos observar es que el gráfico se acerca al eje y pero *no* a un número). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textbf{no} \text{ existe.}$$

Probar que esto es efectivamente así equivale a demostrar que no se verifica la definición 3.1.1 para ningún $\ell \in \mathbb{R}$. Esto es, deberíamos *demostrar* (cosa no demasiado sencilla) que cualquiera sea $\ell \in \mathbb{R}$ no se verifica la definición de límite. O sea,

"existe un $\varepsilon > 0$ de manera tal que cualquiera sea $\delta > 0$, existe un x que verifica $0 < |x| < \delta$ y sin embargo $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \ell\right| \geq \varepsilon$".

Observemos cómo podríamos haber arribado a una conclusión errónea si hubiésemos construido algún tipo de tabla de valores. Analicemos las siguientes tablas:

x	$f(x)$
$\frac{1}{\pi}$	0
$\frac{1}{2\pi}$	0
$\frac{1}{3\pi}$	0
$\cdots$	$\cdots$
$\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$	0

Tabla 1 .

x	$f(x)$
$\frac{2}{\pi}$	1
$\frac{2}{5\pi}$	1
$\frac{2}{9\pi}$	1
$\cdots$	$\cdots$
$\frac{2}{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$	1

Tabla 2 .

Es claro que los números elegidos en ambas tablas ($\frac{1}{k\pi}$ y $\frac{2}{(4k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$) se encuentran cada vez más cerca de 0.

Luego, si sólo hubiéramos construido la *Tabla 1* concluiríamos que $f(x)$ se está acercando al número 0 (más aún diríamos que la función siempre vale 0).

Si por el contrario, hubiésemos sólo construido la *Tabla 2* concluiríamos que $f(x)$ se está acercando al número 1 (más aún diríamos que la función siempre vale 1).

Esto muestra que **ninguna** tabla de valores puede garantizar cuál es el límite de una función, más aún (como en este caso) la función puede **no** tener límite.

Las tablas y los gráficos sólo nos permiten intuir (que no es poca cosa) el comportamiento de una función cerca de un punto.

Una vez que intuimos (tabla, gráfico o cualquier otra manera) que una cierta función tiene límite, o bien que no tiene límite, la única manera de garantizarlo es verificar rigurosamente si se cumple o no la definición 3.1.1.

Proposición 3.1.4. Unicidad del límite
Sea $x_0 \in (a,b)$ *y sea* f *una función real definida en* (a,b) *salvo quizás en* x_0*. Sean* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$*. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \textit{y} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell' \quad \textit{entonces} \quad \ell = \ell'.$$

Es decir, en caso de existir, el límite de una función es único.

Veamos qué ocurre con algunas funciones elementales.

Proposición 3.1.5. *Sea* $c \in \mathbb{R}$ *y sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = c$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *(función constante). Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la definición 3.1.1 debemos considerar $\varepsilon > 0$ y tratar de encontrar un $\delta > 0$ de manera tal que se verifique la definición de límite. Esto quiere decir que queremos hallar $\delta > 0$ de modo que el gráfico de f esté en la región sombreada de la figura 3.4 si $x \in (x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta)$.

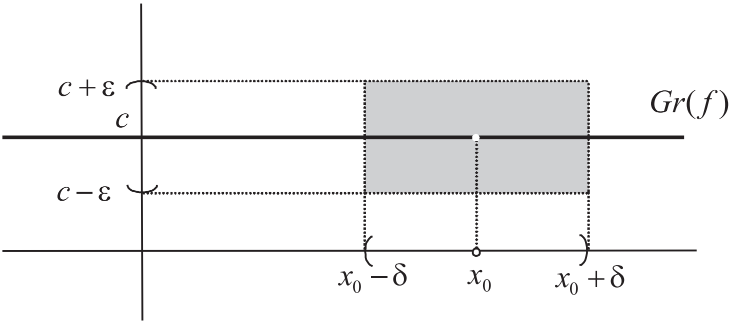


Figura 3.4: Buscamos δ de modo que se verifique la definición.

Ahora bien, como en este caso particular es

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0,$$

nos damos cuenta que eligiendo cualquier $\delta > 0$ se satisface la definición ya que

$$\text{“ } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \text{ ”.}$$

Por lo tanto hemos *probado* (por la definición 3.1.1) que $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$. ☐

Proposición 3.1.6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, (función identidad). Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

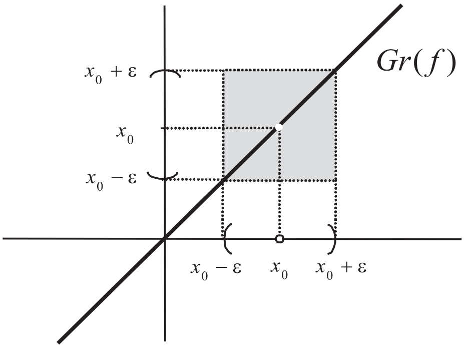


Figura 3.5: Buscamos δ de modo que se verifique la definición.

Como $|f(x) - x_0| = |x - x_0|$ nos damos cuenta entonces que eligiendo $\delta = \varepsilon$ se satisface la definición pues

$$\text{“ } 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon \text{ .”}$$

☐

Proposición 3.1.7. *Sea $x_0 \in (a, b)$ y sea f una función real definida en (a, b) salvo quizás en x_0 tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (es decir, el límite existe y vale ℓ). Si $r \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. *Si $\ell < r \Rightarrow f(x) < r$, “cerca” de x_0.*
2. *Si $\ell > r \Rightarrow f(x) > r$, “cerca” de x_0.*
3. *Si $f(x) < r$, “cerca” de $x_0 \quad \Rightarrow \ell \leq r$.*
4. *Si $f(x) > r$, “cerca” de $x_0 \quad \Rightarrow \ell \geq r$.*

Donde “cerca de x_0” significa que existe $\delta > 0$ tal que la propiedad es válida para valores $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Observación 3.1.8. De ahora en adelante, cada vez que escribamos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ entenderemos que (a) el límite en cuestión existe y (b) el valor del límite es ℓ.

3.2. Límites laterales

Ejemplo 3.2.1. Otro límite que no existe
Recordemos la función signo, $sg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; definida en el capítulo 2 (página 65).

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

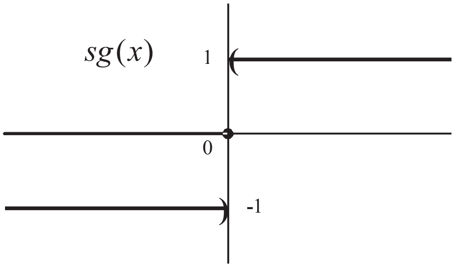


Figura 3.6: El gráfico de la función signo.

Sea $x_0 > 0$. Es claro que, $\forall x$ "cerca" de x_0, $\;sg(x) = 1$. Luego,

$$\lim_{x \to x_0} sg(x) = 1.$$

Sea $x_0 < 0$. Es claro que, $\forall x$ "cerca" de x_0, $\;sg(x) = -1$. Luego,

$$\lim_{x \to x_0} sg(x) = -1.$$

Ahora bien,

$$\text{¿existe } \lim_{x \to 0} sg(x)?$$

Si consideramos valores x "cerca" de 0, por más cerca que los tomemos, $sg(x)$ toma el valor 1 y el valor -1. Luego, es claro que el límite $\lim\limits_{x \to 0} sg(x)$ **no** existe.

Sin embargo, nos damos cuenta de que, si **sólo** consideramos valores x "cerca" de 0 pero mayores que 0 (geométricamente "por la derecha" del 0), entonces $sg(x)$ es la función constante 1.

Decimos entonces que, el límite de $sg(x)$ cuando x tiende 0 a por la derecha vale 1, y escribimos

$$\lim_{x \to 0^+} sg(x) = 1.$$

Análogamente, si **sólo** consideramos valores x "cerca" de 0 pero menores que 0 (geométricamente "por la izquierda" del 0), entonces $sg(x)$ es la función constante -1.

Diremos entonces que, el límite de $sg(x)$ cuando x tiende a 0 por la izquierda vale -1, y escribiremos

$$\lim_{x \to 0^-} sg(x) = -1.$$

Estos límites se denominan *límites laterales* (por la derecha y por la izquierda). Sus definiciones precisas son las siguientes.

Definición 3.2.2. Límite por la derecha
Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ *y sea* f *una función real definida en* (x_0, b) *(o sea que* f *está definida a la derecha de* x_0*). Sea* $\ell \in \mathbb{R}$*. Se dice que* $f(x)$ *tiene* **límite** ℓ **cuando** x **tiende a** x_0 **por la derecha** *si*

> *"Cualquiera sea* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *(que depende de* x_0 *y de* ε*) tal que, si* $x_0 < x < x_0 + \delta$*, entonces* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$*"*

En ese caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

Definición 3.2.3. Límite por la izquierda
Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ *y sea* f *una función real definida en* (a, x_0) *(o sea que* f *está definida a la izquierda de* x_0*). Sea* $\ell \in \mathbb{R}$*.*

Se dice que $f(x)$ *tiene* **límite** ℓ **cuando** x **tiende a** x_0 **por la izquierda** *si*

> *"Cualquiera sea* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *(que depende de* x_0 *y de* ε*) tal que si* $x_0 - \delta < x < x_0$*, entonces* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$*"*

En ese caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Ejemplos 3.2.4.

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}.$$

Su gráfico se muestra en la figura 3.7.

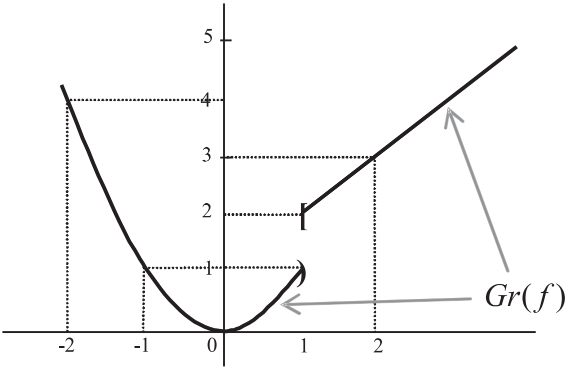


Figura 3.7: Gráfico de la función del ejemplo 1.

Observando el gráfico, es claro que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

Analíticamente,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \underset{①}{=} \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) \underset{②}{=} \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1.$$

Notemos que la igualdad ① es válida dado que $f(x) = x+1$, $\forall x > 1$.

Análogamente, la igualdad ② es válida dado que $f(x) = x^2$, $\forall x < 1$.

Además, es claro que el límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

También observemos que los límites laterales existen pero son distintos.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}.$$

Su gráfico se muestra en la figura 3.8.

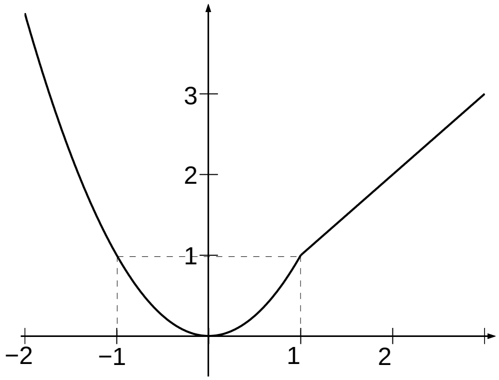


Figura 3.8: Gráfico de la función estudiada en el ejemplo 2.

Luego,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1.$$

En este caso $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ (o sea, el límite existe y vale 1). Observemos además, que en este caso, los límites laterales existen y son iguales.

Proposición 3.2.5. *Sean* $x_0 \in (a,b)$, $\ell \in \mathbb{R}$ *y* f *una función real definida en* (a,b) *salvo quizás en* x_0. *Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Es decir, si ambos límites laterales existen y son iguales, entonces el límite existe. Por otro lado, si el límite existe, ambos límites laterales deben existir y ser iguales.

Una consecuencia importante de esto, es que si los límites laterales son distintos, o si alguno de ellos no existe, entonces el límite no existe.

3.3. Límites relacionados con el infinito

Ampliaremos a continuación la noción de límite de funciones. Por un lado nos interesará conocer el comportamiento de una función a medida que la variable x toma valores cada vez más grandes positivos, o bien cada vez más grandes en valor absoluto pero negativos. Por otro lado puede ocurrir que, si bien f no se acerca a un número, $f(x)$ toma valores positivos tan grandes como se quiera, o bien tan grandes en valor absoluto pero negativos como se quiera. Ejemplifiquemos estas situaciones.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos la función real f dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$.

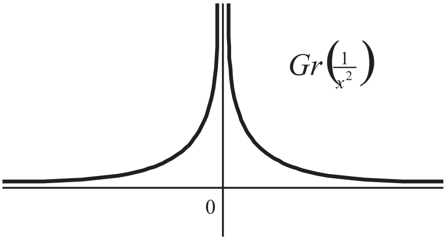


Figura 3.9: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Observando su gráfico (figura 3.9) notamos que a medida que x toma valores cada vez más grandes, el número $f(x)$ se acerca cada vez más al número 0. Decimos entonces que el límite de $f(x)$ es 0 cuando x tiende a $+\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Análogamente, notamos que a medida que x toma valores cada vez más grandes en valor absoluto pero negativos, el valor $f(x)$ también se acerca cada vez más al número 0. Decimos entonces que el límite de $f(x)$ es 0 cuando x tiende a $-\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Por último, observamos que a medida que x se acerca a 0 los valores $f(x)$ se hacen cada vez más grandes positivos. Decimos entonces que el límite de $f(x)$ es $+\infty$ cuando x tiende a 0 y escribimos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Recordemos que $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) *son sólo símbolos*, *no* números. Por lo tanto "x tiende a $+\infty$" significa que x toma valores positivos tan grandes como se quiera y "x tiende a $-\infty$" significa que x toma valores tan grandes como se quiera en valor absoluto pero negativos.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos la función g dada por $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, $Dom(g) = \mathbb{R}_{\neq 0}$.

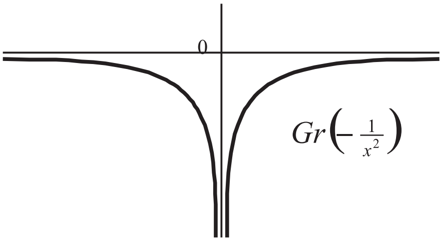


Figura 3.10: Gráfico de $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Como en el ejemplo anterior, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$.

En este caso, a medida que x se acerca a 0 los valores $g(x)$ se hacen cada vez más grandes en valor absoluto pero negativos. Decimos entonces que el límite de $g(x)$ es $-\infty$ cuando x tiende a 0 y escribimos

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$

Ejemplo 3.3.3. Consideremos la función real h dada por $h(x) = \frac{1}{x}$, $Dom(h) = \mathbb{R}_{\neq 0}$. (Figura 3.11.)

Como en los dos ejemplos anteriores resulta que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ahora bien, a medida que x se acerca a 0 los valores $h(x)$ se hacen cada vez más grandes positivos si $x > 0$ y cada vez más grandes en valor absoluto pero negativos si $x < 0$.

Resumiendo, los valores $|h(x)|$ se hacen cada vez más grandes a medida que x se acerca a 0. Decimos entonces que el límite de $h(x)$ es simplemente ∞ (infinito) cuando x tiende a 0 y escribimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

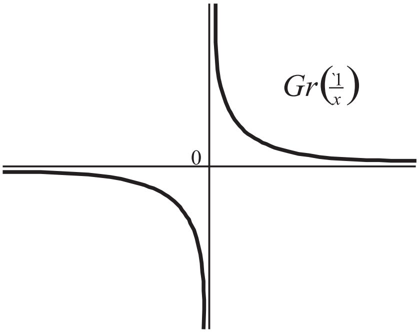


Figura 3.11: Gráfico de $h(x) = \frac{1}{x}$.

Observemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Precisemos estas nuevas nociones.

En las siguientes definiciones la función real f debe estar definida de manera tal que tenga sentido calcular el límite. O sea, si se está calculando el límite cuando $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, f debe estar definida en algún entorno abierto que contenga a x_0 (salvo quizás en x_0). Si se está calculando el límite cuando $x \to +\infty$, f debe estar definida en algún intervalo de la forma $(a, +\infty)$, etc.

Definiciones 3.3.4.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ *si* "$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N > 0 : x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$".
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *si* "$\forall M > 0,\ \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$".
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *si* "$\forall M > 0,\ \exists\, N > 0 : x > N \Rightarrow f(x) > M$".

Observación 3.3.5. Las definiciones para los casos en que el límite es ∞ o $-\infty$, o bien para x tendiendo a $-\infty$ son similares a las dadas con los cambios obvios. Lo mismo ocurre en los casos en que calculamos límites laterales.

Proposición 3.3.6. *Con las definiciones anteriores, tenemos los siguientes resultados:*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.
5. *Para todo* $a > 1$,
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = 0.$$
6. *Para todo* $0 < a < 1$,
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to +\infty} a^x = 0 \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = +\infty.$$

Conviene comparar las afirmaciones de la proposición con los gráficos de las funciones exponencial y logaritmo (páginas 61 y 62).

3.4. Propiedades del límite

Proposición 3.4.1. *Sea* $x_0 \in (a,b)$. *Si* f *y* g *son dos funciones reales definidas en* (a,b), *salvo quizás en* x_0, *tales que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, *con* ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{R}$. *Entonces,*

1. *Existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right)$, *y además*

   $$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = \ell_1 + \ell_2.$$

   *Es decir, si existen ambos límites y son finitos**, ***"el límite de la suma es la suma de los límites".***

2. *Existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (f-g)\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)-g(x)\right)$, *y además*

   $$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)-g(x)\right) = \ell_1 - \ell_2.$$

   Es decir, si existen ambos límites y son finitos, ***"el límite de la resta es la resta de los límites".***

3. *Existe* $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$, *y además*

   $$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \ell_1 \cdot \ell_2.$$

   Es decir, si ambos límites existen y son finitos, ***"El límite del producto es el producto de los límites".***

4. *Si* $\ell_2 \neq 0$, *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$, *y además*

   $$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

   O sea, si existen ambos límites, son finitos y el límite del denominador es distinto de 0, ***"El límite del cociente es el cociente de los límites".***

5. *Si* $\ell_1 > 0$, *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} \ln\left(f(x)\right)$ *y además,*

   $$\lim_{x\to x_0} \ln\left(f(x)\right) = \ln\left(\ell_1\right).$$

6. *Existe* $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)}$ *y además*

   $$\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\ell_1}.$$

---

*O sea, que el límite sea un número, más adelante veremos que ocurre en otros casos.

7. *Si* $\ell_1 > 0$*, existe* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f^{\,g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$*, y además*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (\ell_1)^{\ell_2}\,.$$

Es decir, si existen ambos límites, son finitos y el límite de la base es positivo, ***"El límite de una potencia es la potencia de los límites".***

Corolario 3.4.2. *Sea* $x_0 \in (a,b)$*, sea* $\ell \in \mathbb{R}$ *y sea* f *una función real definida en* (a,b) *salvo quizás en* x_0 *tal que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$*. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \ell,\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

(Recordemos que la igualdad $\lim\limits_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \ell$ quiere decir que el límite existe y que vale $k \cdot \ell$).

Demostración. Sea $k \in \mathbb{R}$.

Por la proposición 3.1.5, sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ y por hipótesis, que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$; es decir, ambos límites existen y son finitos.

Luego, podemos aplicar el punto *3* de la proposición anterior ("el límite del producto es el producto de los límites") y obtenemos

$$\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = \left(\lim_{x\to x_0} k\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = k \cdot \ell.$$

☐

Corolario 3.4.3. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = x^n$*. Si* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} x^n = (x_0)^n\,.$$

Demostración. Probemos primero el resultado para $n = 2$.

Ya sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ (por la proposición 3.1.6).

Luego, aplicando el punto *3* de la proposición 3.4.1 ("el límite del producto es el producto de los límites") tenemos que

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = \lim_{x\to x_0} x \cdot x = \left(\lim_{x\to x_0} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} x\right) = x_0 \cdot x_0 = (x_0)^2\,.$$

Observando que $x^{n+1} = x^n \cdot x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ($x^3 = x^2 \cdot x$, $x^4 = x^3 \cdot x$, etc.), obtenemos el resultado general aplicando recurrentemente este mismo argumento. ☐

Corolario 3.4.4. *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función polinómica, o sea,*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para $n \in \mathbb{N}$ *y ciertos* $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots\cdots,\ a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n (x_0)^n + a_{n-1} (x_0)^{n-1} + \ \cdots\cdots\ + a_2 (x_0)^2 + a_1 x_0 + a_0.$$

Demostración. Probamos este resultado aplicando los puntos *1* y *3* de la proposición anterior y los dos últimos corolarios. □

Nota 3.4.5.

1. Todas las propiedades que hemos mencionado hasta ahora sobre límite de funciones siguen siendo válidas para los límites laterales.

2. Las propiedades de los límites que hemos mencionado hasta ahora (límite de la suma es la suma de los límites, límite del producto es el producto de los límites, etc.) **sólo son validas para límites finitos** (números) y dejan de ser válidas cuando alguno de los límites es $+\infty$, $-\infty$ o ∞.

   En algunos casos, podemos encontrar leyes que permiten decidir el valor de un límite. Sin embargo, dado que la lista es muy extensa, es preferible no memorizar las mismas. Por el contrario, es mejor analizar cada caso particular teniendo en cuenta que:

   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, significa que los valores $f(x)$ son cada vez más grandes en valor absoluto.
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, significa que los valores $f(x)$ son cada vez más chicos.
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, significa que los valores $f(x)$ son "prácticamente" ℓ.

La siguiente proposición hace mención, en forma no exhaustiva, a alguna de esas leyes.

Proposición 3.4.6. *Las siguientes propiedades son válidas considerando $x_0 \in \mathbb{R}$ o también reemplazando x_0 por $+\infty$ o $-\infty$. Asimismo son válidas (en los casos que corresponda) para límites laterales.*

Por otra parte, dejamos a cargo del lector analizar propiedades análogas en función del signo del infinito cuando corresponda.

Entre paréntesis colocamos reglas mnemotécnicas, entendiendo que en ellas sólo se trata de valores de límites de funciones y no números.

Bajo ningún punto de vista deben ser consideradas igualdades numéricas.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \infty.$

   $(\infty \pm \ell = \infty)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty.$

   $(\infty \cdot \infty = \infty)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty.$

   $(\ell \neq 0,\ \infty \cdot \ell = \infty)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$

   $\left(\frac{\infty}{\ell}=\infty,\ \frac{\ell}{\infty}=0\right)$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}_{\neq 0},\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$

   $\left(\ell\neq 0,\ \frac{\ell}{0}=\infty\right)$

6. *Si* $f(x)\neq 0$, $\forall x\neq x_0$ *“cerca” de* x_0, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$

   $\left(\frac{1}{0}=\infty,\ \frac{1}{\infty}=0\right)$

7. $\ell\in\mathbb{R},\ \ell>1,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=+\infty.$

   $(\ell>1,\ \ell^{+\infty}=+\infty)$

8. $\ell\in\mathbb{R},\ \ell>1,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=0.$

   $(\ell>1,\ \ell^{-\infty}=0)$

9. $0<\ell<1,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=0.$

   $(0<\ell<1,\ \ell^{+\infty}=0)$

10. $0<\ell<1,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=+\infty.$

    $(0<\ell<1,\ \ell^{-\infty}=+\infty)$

11. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=+\infty.$

    $(+\infty^{+\infty}=+\infty)$

12. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=0.$

    $(+\infty^{-\infty}=0)$

Proposición 3.4.7. Límite de una composición
Sean $x_0\in(a,b)$, $y_0\in(c,d)$ *y* $\ell\in\mathbb{R}$. *Sea* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función definida en* (a,b), *salvo quizás en* x_0, *tal que* $g(x)\neq y_0$, $\forall x\neq x_0$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$.

Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función definida en* (c,d) *salvo quizás en* y_0 *tal que* $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=\ell$. *Entonces*

$$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=\ell.$$

Si $y_0\in Dom(f)$ *y* $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=f(y_0)$, *la condición* $g(x)\neq y_0$ *puede quitarse.*

3.5. Ejemplos

Veamos en los siguientes ejemplos cómo podemos *calcular* el límite de una función utilizando las propiedades ya mencionadas.

Ejemplo 3.5.1. Calcular

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 5x + 6.$$

La función es un polinomio; utilizando el corolario 3.4.4

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 5x + 6 = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 8. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.5.2. Calcular

$$\lim_{x\to -5} \left(x^2+2\right)\cdot(x+3).$$

La función es el producto de dos polinomios. Igual que en el ejemplo anterior, por el corolario 3.4.4, tenemos que

$$\lim_{x\to -5} x^2 + 2 = (-5)^2 + 2 = 27 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -5} x + 3 = -5 + 3 = -2.$$

Entonces, se verifican las hipótesis de la proposición 3.4.1 y por el punto 3 (*"el límite de un producto es el producto de los límites)*

$$\lim_{x\to -5} \left(x^2+2\right)\cdot(x+3) = \lim_{x\to -5}\left(x^2+2\right)\cdot \lim_{x\to -5}(x+3) = 27\cdot(-2) = -54. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.5.3. Calcular

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x-1} \underset{\text{Proposición 3.4.1}}{=} \frac{\lim_{x\to -1}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to -1}(x-1)} \underset{\text{Corolario 3.4.4}}{=} \frac{(-1)^2-1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0. \quad \checkmark$$

Observemos que hemos podido utilizar que *"el límite del cociente es el cociente de los límites"* (proposición 3.4.1) pues $\lim_{x\to -1}(x-1) = -2 \neq 0$.

Ejemplo 3.5.4. Calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

En este caso **no** podemos utilizar que *"el límite del cociente es el cociente de los límites"* (proposición 3.4.1), dado que no se verifica una de las hipótesis; tenemos que $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$ y si bien existen y son finitos ambos límites, no se cumple que el límite de denominador sea distinto de 0.

Sin embargo, como no nos interesa qué pasa cuando $x = 1$ y cuando $x \neq 1$, resulta $x - 1 \neq 0$; podemos simplificar y queda

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Entonces, dado que para calcular el límite no nos interesa lo que ocurre cuando $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.5.5. Calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}.$$

En este caso tampoco podemos utilizar que *"el límite del cociente es el cociente de los límites"* (proposición 3.4.1), dado que

$$\lim_{x\to 1} x^2-4x+3 = 0.$$

Sin embargo, para todo $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

y como **no** nos importa lo que pasa cuando $x = 1$, resulta que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.5.6. Calcular

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}.$$

Tampoco podemos utilizar que *"el límite del cociente es el cociente de los límites"*, dado que $\lim_{x\to 3} x-3 = 0$.

Sin embargo, para todo $x \neq 3$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \\ &= \frac{x-3}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

y dado que **no** nos importa lo que pasa cuando $x = 3$, resulta que

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,. \quad \checkmark$$

Para calcular el último límite usamos que $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, $x_0 > 0$, (ver 4.2.7 en el capítulo siguiente)

3.6. Límites de la forma “ $0\cdot$ acotado”

Definición 3.6.1. Funciones acotadas
Sea f una función real, con $A \subset Dom(f)$. Decimos que f es **acotada** *en A si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in A$.*

Observación 3.6.2. Sea f una función real, con $A \subset Dom(f)$. Entonces

$$f \text{ es acotada en } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, M \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tal que } |f(x)| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son ejemplos de funciones acotadas en $\mathbb{R}$. Recordemos que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ y $|\cos(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.6.3. Lema del Sándwich
Sean $x_0 \in (a,b)$, $\ell \in \mathbb{R}$ y f, g y h funciones reales definidas en (a,b), salvo quizás en x_0, tales que:

1. $\forall x \in (a,b),\ x \neq x_0 :\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *2.* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell.$

Entonces,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Proposición 3.6.4. *Sea f una función real tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g una función real acotada en $0 < |x - x_0| < \delta$, para $\delta > 0$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0. \quad (\text{“ cero por acotada es cero” }^*)$$

Ejemplo 3.6.5. Calcular

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observemos que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es una función acotada en $\mathbb{R}_{\neq 0}$, luego

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad \checkmark$$

Observación 3.6.6. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, o bien si g no es acotada la proposición 3.6.4 no puede aplicarse. Por ejemplo:

1. $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)\cdot \cos(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x+1)\cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = (0+1)\cdot \cos(0) = 1.$

   Sin embargo, si hubiésemos aplicado la proposición 3.6.4, hubiésemos concluido erróneamente que $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)\cdot \cos(x) = 0$.

   En este caso $\cos(x)$ es acotada pero $\lim\limits_{x\to 0} (x+1) = 1 \neq 0$.

---

[*] Esta propiedad sigue siendo válida reemplazando x_0 por $\pm\infty$ o si calculamos límites laterales.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (ver ejemplo 3.5.4).
   Sin embargo, si hubiésemos aplicado la proposición 3.6.4, hubiésemos concluido erróneamente que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(x^2-1\right) \cdot \frac{1}{x-1} = 0$.
   En este caso $\lim\limits_{x\to 1} \; x^2 - 1 = 0$ pero $\frac{1}{x-1}$ **no** es una función acotada en ningún entorno de $x_0 = 1$.

3.7. Indeterminaciones

Hemos visto en los ejemplos 3.5.4, 3.5.5 y 3.5.6 casos donde no es posible aplicar directamente ninguna de las propiedades usuales para el cálculo de límite por no cumplirse alguna de las hipótesis. Más aún, en los tres ejemplos citados los límites de los numeradores y de los denominadores valían 0 y, una vez que conseguimos calcular el límite tras algunas manipulaciones algebraicas, los resultados fueron distintos. Vale la pena aclarar que, además del caso de cociente de funciones, existen otros casos donde no se pueden aplicar directamente las propiedades básicas. En estos casos, diremos que estamos en presencia de un *límite indeterminado*, o simplemente de una *indeterminación*. Para poder calcular este tipo de límites debemos recurrir a algún tipo de manipulación algebraica para "salvar" la indeterminación y poder luego aplicar alguna propiedad conocida. En lo que sigue x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.
Los casos de indeterminación son los siguientes:

$\boxed{\frac{0}{0}}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado.

Por ejemplo:

1. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x$. Luego, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
   En este caso, dado que $\forall x \neq 0$ es $\frac{x}{x} = 1$, resulta
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$
2. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Luego, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
   En este caso, dado que $\forall x \neq 0$ es $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, resulta
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$
3. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$. Luego, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
   En este caso, dado que $\forall x \neq 0$ es $\frac{x^2}{x} = x$, resulta
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado.

Por ejemplo:

1. Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = -5x$. Luego, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. En este caso, dado que para $\forall x \neq 0$ es $\frac{2x}{-5x} = -\frac{2}{5}$, resulta
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-5x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}.$$
2. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2+x$. Luego, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. En este caso, dado que $\forall x \neq 0$ es $\frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$, resulta
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$
3. Sean $f(x) = x^2-5$ y $g(x) = x$. Luego, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. En este caso, dado que $\forall x \neq 0$ es $\frac{x^2-5}{x} = x - \frac{5}{x}$, resulta
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5}{x} = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{5}{x} = +\infty.$$

$\boxed{\infty-\infty}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ es indeterminado.

$\boxed{0\cdot\infty}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x))$ es indeterminado.

$\boxed{0^0}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ es indeterminado.

$\boxed{\infty^0}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ es indeterminado.

$\boxed{1^\infty}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ es indeterminado.

Resumiendo. *Son indeterminaciones los casos*
$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty.$$

3.8. Límites de potencias

Cuando queremos calcular un límite de la forma $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ muchas veces podemos llegar a dudar (porque no lo recordamos con precisión) si estamos o no en un caso de indeterminación.

El siguiente método permite por un lado intentar el cálculo del límite y por otro lado decidir si el límite es indeterminado o no.

Primero supongamos que $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \ell$ (eventualmente $+\infty$). Entonces, por la propiedad del límite de una composición,

$$L=\ln(\ell)=\lim_{x\to x_0}\ln\left((f(x))^{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right).$$

Donde convenimos que $L=-\infty$ si $\ell=0$ y que $L=+\infty$ si $\ell=+\infty$.

Por otra parte, si $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=L$, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\exp\Big(g(x)\ln\left(f(x)\right)\Big)=\lim_{x\to x_0}\exp\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)=\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=e^L=\ell. \tag{1}$$

A partir de esto, deducimos el siguiente criterio para decidir si el límite de f^g es indeterminado o no:

"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ es indeterminado si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln(f(x))$ lo es."

Para calcularlo primero determinamos $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln(f(x))$ (cosa que puede ser difícil o involucrar alguna indeterminación) y después aplicamos la función exponencial como en (1).

Debemos tener en cuenta que en el caso en que $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=\infty$ es necesario precisar si es $+\infty$ o $-\infty$ dado que "$e^{+\infty}=+\infty$" y en cambio "$e^{-\infty}=0$" (recordar los puntos *3* y *4* de la proposición 3.3.6).

Observación 3.8.1. En el desarrollo precedente, hemos usado que

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\ln(f(x))=\ln(\ell).$$

Otra manera de escribir esto es

$$\ln\Big(\lim_{x\to x_0}f(x)\Big)=\lim_{x\to x_0}\ln(f(x)).$$

De ahora en más nos referiremos a esta situación (donde intercambian lugares lím y ln) diciendo que *el logaritmo conmuta con el límite.* Lo mismo se aplica a la función exponencial, es decir, también vale que *la función exponencial conmuta con el límite* (o sea, $\exp(\lim f(x))=\lim(\exp(f(x)))$.

3.9. Ejemplos

A continuación mostramos cómo resolver algunos límites indeterminados.

Ejemplo 3.9.1. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-x^2$.

Dado que

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Ahora bien, $\forall x\neq 0$, es

$$x^3-x^2=x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right), \quad ①$$

y como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, resulta que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$. ②

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, ① y ②, resulta que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 &= \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} x^3\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \text{“}(+\infty)\cdot 1\text{”} = +\infty.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9.2. En general, si f es una función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$$

O sea,

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases},$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_1 x + a_0 = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \quad \text{y} \quad n \quad \text{es par} \\ -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \quad \text{y} \quad n \quad \text{es impar} \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \quad \text{y} \quad n \quad \text{es par} \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \quad \text{y} \quad n \quad \text{es impar} \end{cases}.$$

En efecto, para todo $x \neq 0$,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_1 x + a_0 = x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ \cdots\ + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}\right). \quad ①$$

Luego, como para todo $a \in \mathbb{R}$, y para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a \cdot \frac{1}{x^k} = 0$, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ \cdots\ + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}\right) = a_n. \quad ②$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, ① y ②, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_1 x + a_0\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}\tfrac{1}{x} + \ \cdots\ + a_1 \tfrac{1}{x^{n-1}} + a_0 \tfrac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} x^n\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \left(a_n + a_{n-1}\tfrac{1}{x} + \ \cdots\ + a_1 \tfrac{1}{x^{n-1}} + a_0 \tfrac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= a_n \cdot \lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n = \text{“}(+\infty)\cdot a_n\text{”} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}.$$

Análogamente si $x \to -\infty$, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n es par y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n es impar. ✓

Ejemplo 3.9.3. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^2-x-4}$.

Por lo visto en el ejemplo anterior, sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^3-x^2+2x+1\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2-x-4\right) = +\infty$. Estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Ahora bien, para todo $x \neq 0$ es

$$\frac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^2-x-4} = \frac{x^3\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}. \quad ①$$

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a\cdot\frac{1}{x^k} = 0$, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = 2. \quad ②$$

y

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = 3. \quad ③$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, ①, ② y ③, resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^2-x-4} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \\
&= \frac{\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \\
&= \text{“}+\infty\cdot\frac{2}{3}\text{”} = +\infty. \quad ✓
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9.4. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x-4}{2x^3-x^2+2x+1}$.

Como en el ejemplo anterior, es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Un análisis similar (observemos que hemos invertido los polinomios del numerador y del denominador) nos muestra que para todo $x \neq 0$ es

$$\frac{3x^2-x-4}{2x^3-x^2+2x+1} = \frac{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} .$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x-4}{2x^3-x^2+2x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right)} = \\
&= \text{“}\,\frac{3}{(+\infty)\cdot 2}\,\text{”} = 0. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9.5. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^3-x-4}$.

También es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para todo $x \neq 0$ es

$$\frac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^3-x-4} = \frac{x^3\cdot\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x^2+2x+1}{3x^3-x-4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Observemos que el valor del límite es el cociente de los coeficientes principales (coeficientes que acompañan a la potencia de mayor grado).

Ejemplo 3.9.6. En general: si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots\cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad b_m \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to\pm\,\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad n > m \\ 0 & \text{si} \quad m > n \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \end{cases}.$$

En el caso $n > m$ el signo del ∞ depende de los signos de a_n y b_m. Si $x \to -\infty$ el signo del ∞ depende además de la paridad de n y m.

3.10. El límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ este límite es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Mostraremos que se verifica la siguiente propiedad:

Proposición 3.10.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Probaremos primero que el límite lateral $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$

Ahora bien, como estamos calculando el límite cuando $x \to 0^+$ (y sólo nos interesan valores de x "cerca" de 0), podemos considerar que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

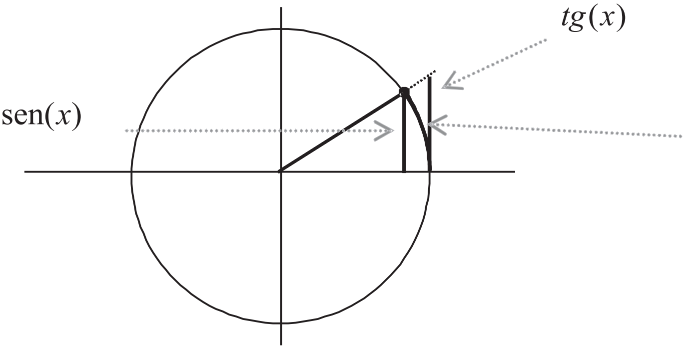


Figura 3.12: $\operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{tg}(x)$ cuando $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observando la figura 3.12 es claro que para todo $x \; : \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$ resulta

$$\operatorname{sen}(x) < \; x \; < \operatorname{tg}(x).$$

O sea,

$$\operatorname{sen}(x) < \; x \; < \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}. \quad ①$$

Dado que $\operatorname{sen}(x) > 0$, para todo $x \; : \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$, dividiendo ① por $\operatorname{sen}(x)$ obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}. \quad ②$$

Por último observemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$.

Luego, por el "Lema del Sándwich" (página 86) para límites laterales resulta que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1. \quad ③$$

Calculemos ahora el límite lateral $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ (es impar) resulta que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}.$$

Realizando el cambio de variables $y = -x$ resulta que $y \to 0^+$ (pues $x \to 0^-$). Luego,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1. \quad ④$$

Por lo tanto, por lo concluido en ③, ④ y por la proposición 3.2.5 tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

□

A continuación vemos en algunos ejemplos cómo podemos aplicar la proposición 3.10.1 para resolver límites indeterminados.

Ejemplo 3.10.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Dado que

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cdot\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)},$$

resulta por la proposición 3.10.1 que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right) = 1{\cdot}1 = 1. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.10.3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Dado que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, estamos en un caso de indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Realizando el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ y teniendo en cuenta que $y \to 0$ (pues $x \to +\infty$). Resulta por la proposición 3.10.1 que

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\cdot\operatorname{sen}(y) = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.10.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Ahora bien,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} .$$

Realizando el cambio de variable $y = 2x$ en el último límite y teniendo en cuenta que $y \to 0$ (pues $x \to 0$) resulta por la proposición 3.10.1 que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} . \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.10.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Ahora bien,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2\cdot(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)}.$$

Realizando el cambio de variable $y = x-1$ en el último límite y teniendo en cuenta que $y \to 0$ (pues $x \to 1$) resulta por la proposición 3.10.1 que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{(y)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\ . \quad \checkmark$$

La siguiente proposición generaliza la proposición 3.10.1 y nos evitará tener que realizar cambios de variable como en los ejemplos anteriores.

Proposición 3.10.6. *Sea f una función real tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1\ .$$

El resultado sigue siendo válido reemplazando x_0 por x_0^+, x_0^-, $+\infty$ o $-\infty$.

Observación 3.10.7. En la proposición 3.10.6, x_0 no tiene por qué ser 0, pero es esencial la condición $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Por ejemplo, para calcular $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2}$ basta observar como antes que

$$\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2} = \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2\cdot(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)}.$$

Luego, si consideramos $f(x) = x-1$, resulta que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ y así podemos aplicar la proposición 3.10.6 y concluir que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = 1$.

Por último, obtenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}. \quad \checkmark$$

3.11. El límite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ estamos en una indeterminación del tipo 1^∞. Se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 3.11.1.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

2. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$

El resultado sigue siendo válido reemplazando x_0 por x_0^+, x_0^-, $+\infty$ o $-\infty$.

A continuación mostramos ejemplos de cómo podemos utilizar la proposición 3.11.1 para resolver algunos límites indeterminados (siempre de la forma 1^∞).

Ejemplo 3.11.2. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo 1^∞. Es claro que

$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, utilizando la proposición 3.11.1 y las propiedades discutidas en la proposición 3.4.1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]\right\}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11.3. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo 1^∞. Operando algebraicamente, resulta que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x &= \left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)^x = \left(1+\frac{(x-1)-(x+1)}{x+1}\right)^x = \\ &= \left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)\cdot x\cdot\left(\frac{-2}{x+1}\right)} = \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right]^{x\cdot\left(\frac{-2}{x+1}\right)} = \left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right]^{\left(\frac{-2x}{x+1}\right)}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{-2} = \infty$, aplicando la proposición 3.11.1 con $f(x) = \frac{x+1}{-2}$ se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}=e.$$

Luego, (recordar el ejemplo 3.9.6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2$, además por las propiedades vistas en la proposición 3.4.1 resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right]^{\left(\frac{-2x}{x+1}\right)} = \\ &= \left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right]\right\}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x+1}\right)} = e^{-2}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 3.11.4. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=e$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo 1^{∞}. Operando

$$(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Como $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$, aplicando la proposición 3.11.1 con $f(x)=\frac{1}{x}$ resulta

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=e. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.11.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Estamos en un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Operando

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\ln\left[(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right].$$

Luego, por la observación 3.8.1, resulta que

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln\left[(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}\left((1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\right]=\ln(e)=1. \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.11.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Estamos en un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Realizamos el cambio de variables $t = e^x - 1$. Luego,

$$t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t + 1 \Rightarrow x = \ln(t+1).$$

Teniendo en cuenta que $t \to 0$ (pues $x \to 0$), recordando la proposición 3.4.1 y el ejemplo 3.11.5, resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)} = \frac{\lim\limits_{t\to 0} 1}{\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)} = \frac{1}{1} = 1. \quad \checkmark$$

3.12. Función exponencial versus función polinómica

Concluimos este capítulo estableciendo algunas propiedades (que podrán ser demostradas más adelante) que indican cómo se comparan la función exponencial (e^x) y la función logaritmo ($\ln(x)$), con los polinomios y las potencias de x.

Proposición 3.12.1. *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $P(x)$ *un polinomio. Entonces,*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$. *Más aún,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \infty$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$. *Más aún,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$.

   Esto nos dice que cuando $x \to +\infty$, la exponencial "tiende más rápido a ∞" que cualquier polinomio.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$. *Más aún,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{P(x)} = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \infty$. *Más aún,* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{\ln(x)} = \infty$.

   Esto nos dice que cuando $x \to +\infty$, el logaritmo natural "tiende más despacio a ∞" que cualquier polinomio.

Capítulo 4

Funciones continuas

4.1. La noción de continuidad

Desde un punto de vista histórico y geométrico las funciones continuas son aquellas funciones cuyo gráfico puede realizarse con un trazo continuo. Esto es, aquellas funciones cuyo gráfico "no pega saltos" ni tiene "agujeros". Es claro que este tipo de cosas (repasar ejemplos anteriores) sólo suceden en aquellos puntos x_0 que verifican alguna de las siguientes tres condiciones:

- El punto x_0 no pertenece al dominio de f.
- El límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe o bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.
- El límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existe, pero $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Estamos en condiciones de definir el concepto de continuidad.

4.2. Definiciones y sus consecuencias

Definición 4.2.1. *Sea f una función real definida en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f es* **continua en** x_0 *si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observación 4.2.2. De acuerdo con la definición, tenemos que f es continua en x_0 si se verifican simultáneamente las siguientes tres condiciones:

(a) $x_0 \in Dom(f)$ (o sea, f está definida en x_0).

(b) Existe el límite de f cuando x tiende a x_0 y es finito (o sea, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe y da un número).

(c) El límite de f cuando x tiende a x_0 coincide con $f(x_0)$ (es decir, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$).

Definición 4.2.3. *Sea f una función real. Se dice que f es* **continua** *en $A \subset \mathbb{R}$ si es continua en x_0, para todo $x_0 \in A$.*

Definición 4.2.4. *Sea f una función real y sea $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Se dice que x_0 es un punto de **discontinuidad** *de f, o bien que f es* **discontinua** *en x_0, si f* ***no*** *es continua en x_0. O sea, si alguna de las tres condiciones (a, b ó c) de la observación 4.2.2 no se satisface.*

Los puntos de discontinuidad se clasifican en dos grupos.

Definiciones 4.2.5.

Decimos que x_0 es un punto de discontinuidad **evitable** *de f, si se verifica b de la observación 4.2.2 (pero no se verifica a o c). Es decir, si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y es finito.*

Decimos que x_0 es un punto de discontinuidad **esencial** *o* **inevitable** *de f si* ***no*** *se verifica b de 4.2.2. Es decir, si no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ o bien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.*

Observación 4.2.6. Sea f una función real y $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Teniendo en cuenta la definición de límite de una función (recordar la definición 3.1.1 del capítulo 3) resulta que f es continua en $x_0 \in Dom(f)$ si y sólo si

   $$\text{“Cualquiera sea } \varepsilon > 0 \text{, existe } \delta > 0 \ \ (\delta \text{ depende de } \varepsilon \text{ y } x_0\ ) \text{ tal que:}$$
   $$\text{si } \ |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.\text{”}$$

2. Si x_0 es un punto de discontinuidad **evitable** de f, dado que existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y es finito, es posible redefinir la función en x_0 (modificar el valor asignado a x_0 o bien asignarle algún valor en el caso que $x_0 \notin Dom(f)$) para convertirla en continua de la siguiente manera:

   Sea $\tilde{f}$ la función real definida por

   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in Dom(f) - \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases} .$$

   Luego, $\tilde{f}$ es continua en x_0. (Notar que para todo $x \neq x_0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Sin embargo $\tilde{f} \neq f$).

3. Si x_0 es un punto de discontinuidad **esencial** o **inevitable** de f, dado que no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ o bien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, es imposible redefinir la función en x_0 para convertirla en continua (no hay manera de asignarle a x_0 algún valor para que se “pegue” bien).

Observación 4.2.7. Son funciones continuas en todo su dominio:

1. Las funciones polinómicas.
2. Las funciones raíz n-ésima ($\sqrt[n]{x}$), en particular la función $\sqrt{x}$.

3. Las funciones trigonométricas ($\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$).
4. Las funciones exponenciales (a^x, con $a > 0,\ a \neq 1$). En particular e^x.
5. Las funciones logarítmicas ($\log_a(x)$, con $a > 0,\ a \neq 1$). En particular $\ln(x)$.

4.3. Ejemplos

Ejemplo 4.3.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} .$$

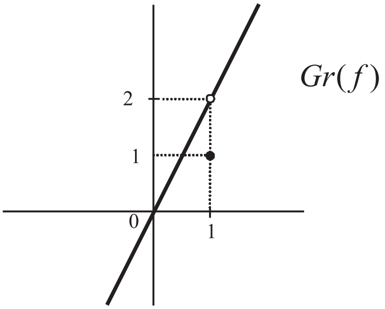


Figura 4.1: Gráfico de f.

Luego, f es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ pues $f(x) = 2x$, para todo $x \neq 1$ y los polinomios son continuos.
Estudiemos la continuidad en $x = 1$.

a. $1 \in Dom(f) = \mathbb{R}$ (pues $f(1) = 1$).

b. Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2x = 2 \in \mathbb{R}$.

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$.

Luego, como no se verifica la condición c de la observación 4.2.2, f es discontinua en $x_0 = 1$.

Por otra parte, como sí se verifica la condición b de la 4.2.2, $x_0 = 1$ es un punto de discontinuidad evitable.

Observemos que si se considera $\tilde{f}(x) = 2x$, resulta que $\tilde{f}$ es continua en $x_0 = 1$, y por lo tanto en $\mathbb{R}$. Debemos tener en claro que para todo $x \neq 1$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ pero $f \neq \tilde{f}$.

Ejemplo 4.3.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} .$$

(Ver el punto 2 de los ejemplos 3.2.4 del capítulo 3).

Luego, f es continua en $(-\infty, 1)$ pues $f(x) = x^2$, para todo $x < 1$ y los polinomios son funciones continuas. ①

f es continua en $(1, +\infty)$ pues $f(x) = x$, para todo $x > 1$ y los polinomios son funciones continuas. ②

Estudiemos la continuidad en $x_0 = 1$.

a. $1 \in Dom(f) = \mathbb{R}$.

b. Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ pues

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1.$$

(Los límites laterales existen y son iguales).

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Luego, f es continua en $x_0 = 1$. ③

De ①, ② y ③, f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} .$$

(Ver el punto 1 de los ejemplos 3.2.4 del capítulo 3).

Luego, f es continua en $(-\infty, 1)$ pues $f(x) = x^2$, para todo $x < 1$ y los polinomios son continuos.

f es continua en $(1, +\infty)$ pues $f(x) = x + 1$, $x > 1$ y los polinomios son continuos.

Estudiemos la continuidad en $x_0 = 1$.

a. $1 \in Dom(f) = \mathbb{R}$.

b. No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ pues

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1.$$

(Los límites laterales existen pero son distintos).

Luego, como no existe el límite de f cuando x tiende a 1, f es discontinua en $x_0 = 1$. Más aún, $x_0 = 1$ es un punto de discontinuidad esencial o inevitable.

4.4. Propiedades de las funciones continuas

Proposición 4.4.1. *Sean f y g funciones continuas en x_0**. *Entonces*

---

*Dado que la noción de continuidad es en esencia la existencia de un límite finito, estas propiedades se deducen inmediatamente de las propiedades estudiadas en la proposición 3.4.1 del capítulo 3.

1. *$f \pm g$ es continua en x_0.*
2. *$f \cdot g$ es continua en x_0.*
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en x_0.*

Proposición 4.4.2. *Sean f y g funciones reales tales que f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0* [*]*.*

Definición 4.4.3. *Sea f una función real. Decimos que f es* **continua por la izquierda** *en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

Definición 4.4.4. *Sea f una función real. Decimos que f es* **continua por la derecha** *en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

Proposición 4.4.5. *Sea f una función real definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces:*

f es continua en x_0 $\Leftrightarrow$ f es continua por la derecha y por la izquierda en x_0.

Ejemplos 4.4.6.

1. La función del ejemplo 4.3.1 **no** es continua **ni** por la izquierda **ni** por la derecha en $x_0 = 1$.
2. La función del ejemplo 4.3.2 es continua por la izquierda y por la derecha en $x_0 = 1$.
3. La función del ejemplo 4.3.3 **no** es continua por la izquierda pero **sí** por la derecha en $x_0 = 1$.
4. La función signo ($sg(x)$) definida en la sección 2.21.4 del capítulo 2 **no** es continua **ni** por la izquierda **ni** por la derecha en $x_0 = 0$.
5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\left(x^2 + x\right) - 1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\[2ex] -2\dfrac{(x-2)^2}{x+3} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\[2ex] e^{\frac{1}{(2-x)}} & \text{si} \quad 2 < x \end{cases} .$$

   Analizamos la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

---

[*] Esta propiedad se deduce de la proposición 3.4.7 del capítulo 3.

En $(-\infty, -1)$:

$$f(x) = \frac{\cos^2\left(x^2+x\right)-1}{(x+1)^2}, \quad \forall\, x < -1.$$

Por la observación 4.2.7, las propiedades de funciones continuas (proposición 4.4.1) y la proposición 4.4.2, resulta que $\cos^2\left(x^2+x\right)-1$ y $(x+1)^2$ son funciones continuas. Luego, dado que $(x+1)^2 \neq 0$, para todo $x < -1$, resulta que f es continua en $(-\infty, 1)$. ①

En $(-1, 1)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}, \quad \forall\, -1 < x < 1.$$

Luego, por ser una función constante (por lo tanto un polinomio), resulta, por la observación 4.2.7, que f es continua en $(-1, 1)$. ②

En $(1, 2)$:

$$-2\,\frac{(x-2)^2}{x+3}, \quad \forall\, 1 < x < 2.$$

Nuevamente teniendo en cuenta 4.2.7, las propiedades de funciones continuas y que $x+3 \neq 0$ si $x \in (1, 2)$, resulta que f es continua en $(1, 2)$. ③

En $(2, +\infty)$:

$$f(x) = e^{\frac{1}{(2-x)}}, \quad \forall\, x > 2.$$

Una vez más, teniendo en cuenta $\frac{1}{2-x}$ es continua pues $2 - x \neq 0$ si $x > 2$ y la proposición 4.4.2, resulta que f es continua en $(2, +\infty)$. ④

Resta analizar la continuidad de f en los puntos $x = -1,\ 1$ y 2.

Por ser $Dom(f) = \mathbb{R}$, sólo basta verificar las condiciones b y c de la definición de continuidad (observación 4.2.2).

Por otra parte, dado que f cambia de expresión en cada uno de esos puntos, para estudiar la existencia o no del límite, nos vemos obligados a estudiar los límites laterales.

$\boxed{x = -1}$.

$\lim\limits_{x\to\, -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\, -1^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. ⑤

$\lim\limits_{x\to\, -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\, -1^-} \frac{\cos^2\left(x^2+x\right)-1}{(x+1)^2}$ (indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Ahora bien, recordando que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo x, resulta que

$$\cos^2\left(x^2+x\right) - 1 = -\operatorname{sen}^2\left(x^2+x\right).$$

Luego,

$$\frac{\cos^2\left(x^2+x\right)-1}{(x+1)^2} = \frac{-\operatorname{sen}^2\left(x^2+x\right)}{(x+1)^2} = -\frac{\operatorname{sen}^2\left(x^2+x\right)}{(x+1)^2}\cdot\frac{\left(x^2+x\right)^2}{\left(x^2+x\right)^2} =$$

$$= -\frac{\left(x^2+x\right)^2}{(x+1)^2} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)}\right]^2 = -\frac{(x \cdot (x+1))^2}{(x+1)^2} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)}\right]^2 =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^2} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)}\right]^2 \underset{x \neq -1}{=} -x^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)}\right]^2.$$

Ahora bien, dado que $x^2 + x \underset{x \to -1}{\longrightarrow} 0$, por la proposición 3.10.6 del capítulo 3, resulta que

$$\lim_{x \to\ -1^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)} = 1 \quad \text{y como} \quad \lim_{x \to\ -1^-} -x^2 = -1$$

Entonces,

$$\lim_{x \to\ -1^-} f(x) = \lim_{x \to\ -1^-} \frac{\cos^2\left(x^2+x\right) - 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to\ -1^-} -x^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x\right)}\right]^2 = (-1) \cdot (1)^2 = -1. \quad ⑥$$

De ⑤ y ⑥, no existe $\lim_{x \to\ -1} f(x)$. Luego, f no es continua en $x = -1$. Más aún, $x = -1$ es un punto de discontinuidad esencial de f. ⑦

$\boxed{x = 1}$

$$\lim_{x \to\ 1^-} f(x) = \lim_{x \to\ 1^-} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

y

$$\lim_{x \to\ 1^+} f(x) = \lim_{x \to\ 1^+} -2\frac{(x-2)^2}{x+3} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces existe $\lim_{x \to\ 1} f(x)$ y además $\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2} = f(1)$. Por lo tanto, f es continua en $x = 1$. ⑧

$\boxed{x = 2}$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -2\frac{(x-2)^2}{x+3} = 0,$$

Teniendo en cuenta que $2 - x < 0$, cuando $x \to 2^+$, resulta (recordar el punto *4* de la proposición 3.3.6), que $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} e^{\frac{1}{(2-x)}} = 0$. Luego, como son iguales los límites laterales, existe $\lim_{x \to\ 2} f(x) = 0 = f(2)$. Por lo tanto, f es continua en $x = 2$. ⑨

Resumiendo, de ①, ②, ③, ④, ⑦, ⑧ y ⑨ resulta que la función f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ y $x = -1$ es un punto de discontinuidad esencial. ✓

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(a(x-3))}{x-3} & \text{si} \quad x < 3 \\ \\ 2b & \text{si} \quad x = 3 \\ \\ \dfrac{x^2+x-12}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}.$$

Analicemos la continuidad de f en función de los parámetros a y b.

En $(-\infty, 3)$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(a(x-3))}{x-3}, \quad \forall\, x < 3.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de funciones continuas, la proposición 4.4.2 y que $x-3 \neq 0$ si $x < 3$, resulta que f es continua en $(-\infty, 3)$ cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$. ①

En $(3, +\infty)$:

$$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}, \quad \forall\, x > 3.$$

Teniendo en cuenta que los polinomios son funciones continuas y que $x-3 \neq 0$ si $x > 3$, resulta que f es continua en $(3, +\infty)$ cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$. ②

En $x = 3$:

Dado que $Dom(f) = \mathbb{R}$, basta verificar que el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe y coincide con $f(3)$.

Analicemos los límites laterales. Es claro que ambos son indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$. Operando algebraicamente,

$$\frac{\operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{x-3} \underset{a\neq 0}{=} \frac{a\cdot \operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{a\cdot(x-3)} = a\cdot\frac{\operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{a\cdot(x-3)}.$$

Dado que $a\cdot(x-3) \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 0$, resulta (al aplicar la proposición 3.10.6 del capítulo 3, siempre que $a \neq 0$) que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} a\cdot\frac{\operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{a\cdot(x-3)} =$$

③

$$= a\cdot \lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}(a\cdot(x-3))}{a\cdot(x-3)} = a.$$

Por otro lado,

$$\frac{x^2+x-12}{x-3} = \frac{(x-3)\cdot(x+4)}{x-3} \underset{x\neq 3}{=} x+4.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x-12}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} x+4 = 7. \quad ④$$

De ③ y ④, para que se verifique la condición (b) de la observación 4.2.2, debe ser $a = 7$ ⑤

En ese caso,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = a = 7$$

para que se verifique la condición c de la observación 4.2.2, debe ser

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 7 = 2b = f(3),$$

de donde, $b = \frac{7}{2}$. ⑥

Por último, observemos que si $a = 0$ es $f(x) = 0$, para todo $x < 3$. Luego, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$ y, por ④, no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$. ⑦

Luego, por ⑤, ⑥ y ⑦

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a = 7 \text{ y } b = \tfrac{7}{2}.$$

Si $a \neq 7$, $x = 3$ es un punto de discontinuidad esencial de f.

Si $a = 7$ y $b \neq \frac{7}{2}$, $x = 3$ es un punto de discontinuidad evitable de f. ✓

4.5. Teoremas que involucran funciones continuas

Observación 4.5.1. Que una función real f sea continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ significa que:

1. f es continua en (a, b) (según la definición 4.2.3).
2. f es continua por la derecha en a (según la definición 4.4.4).
3. f es continua por la izquierda en b (según la definición 4.4.3).

Definiciones 4.5.2. *Sea f una función real y sea $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Decimos que x_0 es un* **máximo local** *o* **relativo** *de f si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x "cerca" de x_0.*
2. *Decimos que x_0 es un* **mínimo local** *o* **relativo** *de f si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x "cerca" de x_0.*
3. *Decimos que x_0 es un* **máximo global** *o* **absoluto** *de f si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in Dom(f)$.*
4. *Decimos que x_0 es un* **mínimo global** *o* **absoluto** *de f si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in Dom(f)$.*

Donde por "cerca" de x_0 queremos decir que existe $\delta > 0$ tal que la propiedad es válida para valores $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Por otra parte, con más precisión, deberíamos decir que f alcanza un máximo (mínimo) en x_0. El valor máximo (mínimo) de f es $f(x_0)$ y no x_0.

Teorema 4.5.3. Teorema de Weierstrass
Sea una función real f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

1. *f es acotada en $[a, b]$.*
2. *f alcanza un máximo global y un mínimo global en $[a, b]$.*

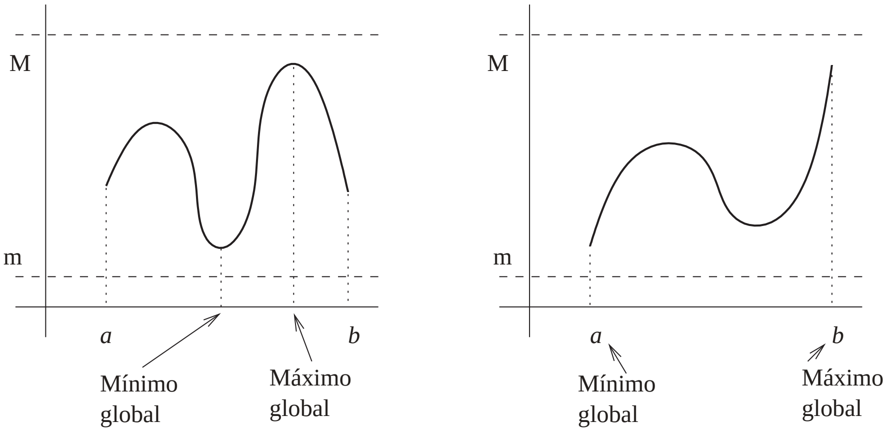


Figura 4.2: Teorema de Weierstrass.

Teorema 4.5.4. Teorema de Bolzano
Sea una función real f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ (o viceversa). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ (c es una raíz de f).[*]

Teorema 4.5.5. Teorema del valor intermedio
Sea una función real f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$ (o $f(a) > f(b)$). Si $d \in (f(a), f(b))$ (en el otro caso $d \in (f(b), f(a))$), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. [*]

---

[*] El Teorema asegura que existe un $c \in (a, b)$, puede haber otro o no, pero no dice cómo encontrarlo.

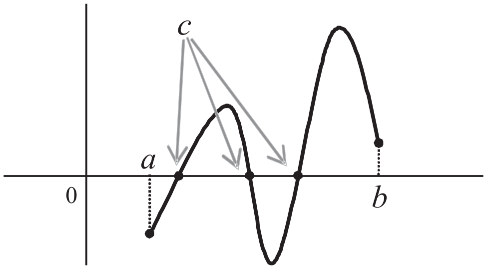


Figura 4.3: Teorema de Bolzano.

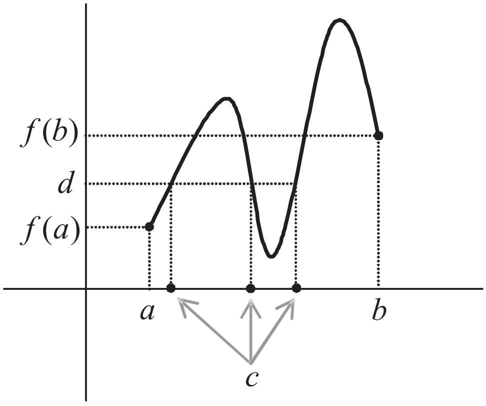


Figura 4.4: Teorema del valor intermedio.

4.6. Aplicaciones del Teorema de Bolzano

Como consecuencia del Teorema de Bolzano, existe un método para calcular, de manera aproximada, raíces de una función continua (por ejemplo polinomios). Dada una función real f, continua en algún intervalo cerrado $[a, b]$, el método (algoritmo) para hallar una raíz r de f, denominado de **bipartición**, consiste en los siguientes pasos:

a. Hallar dos números x_1 y $x_2 \in [a, b]$, (lo suficientemente cercanos para que el proceso sea más corto), que verifiquen $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$ (o viceversa).

b. Calcular el número medio entre x_1 y x_2, $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ y calcular $f(x_3)$.

c. Si $f(x_3) < 0$, cambiar x_1 por x_3 y volver a realizar el paso (b).

d. Si $f(x_3) > 0$, cambiar x_2 por x_3 y volver a realizar el paso (b).

e. Realizar tantos pasos como hagan falta para que la aproximación sea buena.

Observemos que cada vez que se reitera el paso (b) la distancia entre los valores x_1 y x_2 se reduce a la mitad y, por lo tanto, como la raíz r siempre está en el medio de dichos valores, luego de un número n de pasos, la distancia entre r y el último x_3 es menor que la distancia entre los valores x_1 y x_2 originales dividida por 2^n (¡Pensarlo!). El último valor x_3 obtenido será una buena aproximación de la raíz r buscada, tanto mejor como más grande sea la cantidad de pasos n realizados.

Otra consecuencia importante del teorema de Bolzano es que nos brinda una herramienta muy poderosa para calcular los conjuntos de positividad y negatividad de una función continua.

Proposición 4.6.1. *Si r_1 y r_2 con $r_1 < r_2$ son dos raíces **consecutivas** de una función continua f (o sea que $f(x) \neq 0,\ \forall x \in (r_1, r_2)$) resulta que, si calculamos $f(c)$ para algún valor c entre r_1 y r_2 (o sea consideramos c que cumpla $r_1 < c < r_2$), entonces:*

- *si $f(c) > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in (r_1, r_2)$,*
- *si $f(c) < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in (r_1, r_2)$.*

Demostración. En efecto, Si $f(c) > 0$ y existiera $d \in (r_1, r_2)$ con $f(d) < 0$, por el teorema de Bolzano, debería existir una raíz entre c y d, o sea, una raíz entre r_1 y r_2 y esto contradice el hecho que habíamos supuesto, que r_1 y r_2 son dos raíces consecutivas. (Análogamente si $f(c) < 0$). □

También se deduce del Teorema de Bolzano la siguiente propiedad:

Proposición 4.6.2. *Todo polinomio de grado impar tiene, por lo menos, una raíz real.*

Demostración. Sea f una función polinómica de grado impar, o sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots \ + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0, \text{ y } n \text{ impar.}$$

Por el punto *2* de los ejemplos 3.9 del capítulo 3, resulta que (n es impar)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\,-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Luego, deben existir a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Entonces, por el Teorema de Bolzano, debe existir $c \in (a, b)$ (o $\in (b, a)$) tal que c es una raíz de f. □

El siguiente ejemplo muestra otra aplicación del Teorema de Bolzano.

Ejemplo 4.6.3. La ecuación $x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 15 \cdot \operatorname{sen}(x) - 15 = 0$ tiene, por lo menos, una solución en $\mathbb{R}$.

En efecto; sea f la función real definida por $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 15 \cdot \operatorname{sen}(x) - 15$. Ahora bien,

$$f(0) = -15 < 0 \quad y \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4} > 0.$$

Luego, como f es continua en $\mathbb{R}$, y por lo tanto en $[0, \frac{\pi}{2}]$, por el Teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$. ✓

Capítulo 5

Derivada

5.1. Introducción

Vimos en la introducción del capítulo 4 que la noción de función continua surge al tratar de caracterizar a aquellas funciones cuyo gráfico puede realizarse con un trazo continuo (sin levantar el lápiz).

Queremos caracterizar ahora aquellas funciones cuyo gráfico es "suave". Esto es, aquellas funciones cuyo gráfico no tenga "picos" o vértices (ejemplo de una función cuyo gráfico tiene un "pico" en $x = 0$ es la función módulo).

Desde un punto de vista geométrico, ser "suave" en un punto significa que es posible graficar una "recta tangente" al gráfico de la función en dicho punto. Las funciones "suaves" son las que llamaremos *derivables.* Precisemos esta idea.

Sea f una función real definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Analicemos qué condiciones deben cumplirse para que exista una recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Tomamos valores cercanos a x_0, esto es, para cada $h \in \mathbb{R}$ consideramos valores $x_0 + h$. Dado que $\lim\limits_{h\to 0} (x_0 + h) = x_0$, cuanto más chico consideremos h (positivo o negativo), más cerca estará $x_0 + h$ de x_0. Para cada $h \in \mathbb{R}$, sea

$$L_h : \quad y = m_h x + b_h$$

la recta (secante) que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ como muestra la figura 5.1. Es claro que a medida que consideramos h cada vez más chico, las rectas secantes L_h se acercan cada vez más a la recta RT tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$; esto es

$$L_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} RT,$$

donde RT es la recta,

$$RT : \quad y = mx + b.$$

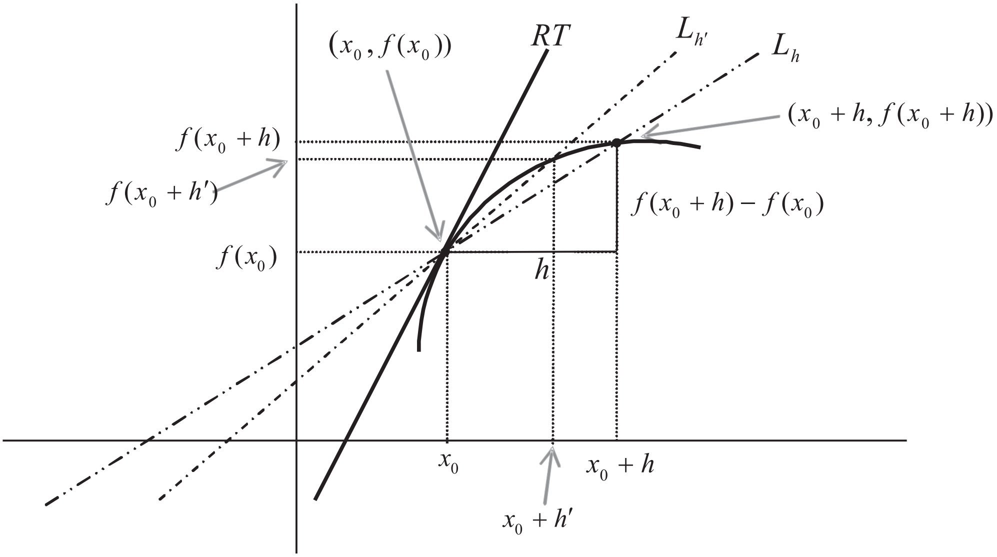


Figura 5.1: $L_h : \quad y = m_h x + b_h$.

Por lo tanto, las pendientes m_h, de las rectas secantes L_h, se acercan cada vez más a la pendiente m, de la recta tangente RT. O sea,

$$\lim_{h\to 0} m_h = m. \quad ①$$

Ahora bien, como

$$m_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ ,$$

para que exista recta tangente al gráfico de la función en $(x_0, f(x_0))$ debe verificarse entonces que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m.$$

A la expresión

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

la denominamos el *cociente incremental de f en x_0*.

5.2. Definición de derivada en un punto

Definición 5.2.1. *Sea f definida en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Decimos que f* **es derivable en** x_0 *si existe y es finito el límite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ .$$

En este caso, al valor del límite del cociente incremental de f lo denominamos **derivada de f en x_0** *y lo notamos $f'(x_0)$. O sea,*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Definición 5.2.2. *Decimos que f es* **derivable en $A \subset \mathbb{R}$** *si f es derivable en x_0, para todo $x_0 \in A$.*

Observación 5.2.3. Sea f definida en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Entonces[*],

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

luego,

$$f \text{ es derivable en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe y es finito.}$$

En ese caso,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definiciones 5.2.4. *Sea f derivable en x_0.*

1. *Se denomina* **recta tangente al gráfico de f en x_0** *a la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene como pendiente al número $f'(x_0)$.*
2. *Se denomina* **recta normal al gráfico de f en x_0** *a la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.*

Observación 5.2.5. Sea f derivable en x_0. La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 es

$$RT: \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

En efecto, por definición, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 es

$$RT: \quad y = f'(x_0) \cdot x + b. \quad ①$$

Como pasa por $(x_0, f(x_0))$ resulta que

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \quad \Longrightarrow \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0. \quad ②$$

Si reemplazamos ② en ①, resulta que

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad \checkmark \end{aligned}$$

---

[*] Basta realizar el cambio de variables $x = x_0 + h$.

Observación 5.2.6. Sea f derivable en x_0. La ecuación de la recta normal al gráfico de f en x_0 es

$$RN: \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0) & \text{si} \quad f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & \text{si} \quad f'(x_0) = 0 \end{cases}.$$

En efecto, si $f'(x_0) \neq 0$, la pendiente de la recta perpendicular a RT es

$$-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Luego,

$$RN: \quad y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + b. \quad ①$$

Como pasa por $(x_0, f(x_0))$ resulta que

$$f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0 + b \quad \Longrightarrow \quad b = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0. \quad ②$$

Si Reemplazamos ② en ①, resulta que

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0 \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es horizontal. Por lo tanto la recta perpendicular es vertical. Como pasa por $(x_0, f(x_0))$, su ecuación es

$$x = x_0. \quad \checkmark$$

5.3. Algunas propiedades de la derivada

Observación 5.3.1. Sea f derivable en x_0. Entonces, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ y representa la *pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto* $(x_0, f(x_0))$.

Observación 5.3.2. Desde el punto de vista de la física, si consideramos que el gráfico de f representa la trayectoria de un móvil, con movimiento rectilíneo, en función del tiempo recorrido (x = tiempo, $f(x)$ = espacio recorrido) , entonces el cociente incremental de f

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

mide la *velocidad promedio entre los instantes de tiempo x_0 y $x_0 + h$.*

En este caso $f'(x_0)$, nos da la *velocidad instantánea* del móvil en el instante x_0.

Observación 5.3.3. Observemos que el límite del cociente incremental de una función *siempre* es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Observación 5.3.4. Sea f derivable en x_0. Entonces la recta tangente a f en x_0 es una *"buena" aproximación* de f:

En efecto, como

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0,$$

sacando denominador común $x - x_0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-RT(x)}{x-x_0} = 0. \quad ①$$

Luego, como $\lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0) = 0$, teniendo en cuenta ① y que el límite de un producto es el producto de los límites, resulta que

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - RT(x)\big) = 0 \quad ②$$

(pues

$$\lim_{x\to x_0} \left[\left(\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))}{x-x_0}\right)\cdot \lim_{x\to x_0} (x-x_0) = 0\cdot 0 = 0.)$$

Luego, por ②, la diferencia entre la función y la recta tangente tiende a cero. Esto significa que "cerca" de x_0 el valor de $f(x)$ y el valor de la recta tangente en x son muy parecidos ($f(x) \cong RT(x)$).

Más aún, por ①, la diferencia entre la función y la recta tangente tiende a cero aún dividida por $x - x_0$, que también tiende a cero. Esto significa que la aproximación es "buena".

La recta tangente a f en x_0 es un polinomio de grado 1 y se denomina *Polinomio de Taylor de grado 1 de f en x_0*[*].

Usando este resultado, para valores x cercanos a x_0, es posible calcular, de manera aproximada, el valor $f(x)$ utilizando la recta tangente en vez de la función.

Proposición 5.3.5. *Sea f una función real definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces,*

$$f \text{ es derivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ es continua en } x_0.$$

(Equivalentemente: f ***no*** *es continua en x_0 $\Longrightarrow$ f* ***no*** *es derivable en x_0).*

Demostración. Por la definición 5.2.1,

---

[*] A partir de las derivadas sucesivas de f en x_0 (noción que veremos luego), es posible definir polinomios de mayor grado, denominados *Polinomios de Taylor de f en x_0*. La aproximación de estos polinomios es mejor cuanto mayor sea su grado.

f es derivable en $x_0 \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. ①

Por otra parte,

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0) = 0. \quad ②$$

Luego, como el producto de los límites es el límite del producto, de ① y ② resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \left[\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)\right] = \\
&= \left[\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} (x-x_0)\right] = \\
&= f'(x_0)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

O sea,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0. \quad ③$$

Por último, como

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0), \quad ④$$

teniendo en cuenta que el límite de una suma es la suma de los límites, de ③ y ④ resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} [(f(x)-f(x_0))+f(x_0)] = \\
&= \lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) \\
&= 0+f(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Entonces (teniendo en cuenta que $x_0 \in (a,b) \subset Dom(f)$), f es continua en x_0. ☐

La recíproca de la proposición 5.3.5 es *falsa*. Veamos dos ejemplos de funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto.

Ejemplo 5.3.6. Sabemos que $|x|$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $x=0$. Recordemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Estudiemos la derivabilidad de $|x|$ en $x=0$.

Su cociente incremental en $x=0$ es

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h > 0 \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}.$$

Es claro entonces que para calcular el límite cuando $h \to 0$ debemos considerar los límites laterales.

Ahora bien, teniendo en cuenta que no interesa lo que ocurre en $h = 0 \quad (*)$, resulta que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \underset{(*)}{=} \lim_{h\to 0^+} 1 = 1,$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \underset{(*)}{=} \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

Luego, como los límites laterales existen pero son distintos, resulta que **no** existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} .$$

Por lo tanto, $|x|$ **no** es derivable en $x = 0$. ✓

Ejemplo 5.3.7. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es una función acotada, resulta que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

("0 por acotada es 0")

Además, $0 \in Dom(f)$ y $f(0) = 0$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ y entonces, f es continua en $x = 0$.

Analicemos la derivabilidad de f en $x = 0$.

El cociente incremental de f en $x = 0$ es

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-0}{h} = \frac{f(h)}{h} \underset{(*)}{=} \frac{h \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \underset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{h}\right),$$

(una vez más, no interesa lo que ocurre en $h = 0 \quad (*)$).

Y, como sabemos (ver el ejemplo 3.1.3 en la página 70), no existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Por lo tanto, f **no** es derivable en $x = 0$. ✓

5.4. Operaciones con funciones derivables

Proposición 5.4.1. *Sean f y g funciones reales definidas en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Si f es derivable en x_0 y g es derivable en x_0, entonces*

1. *$f \pm g$ es derivable en x_0 y además*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

(La derivada de una suma (resta) es la suma (resta) de las derivadas).

2. $f \cdot g$ es derivable en x_0 y además

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

3. Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_0 y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Ejemplo 5.4.2. Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea f la función dada por $f(x) = c$ (función constante). Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = 0$.

En efecto. Recordemos que el gráfico de una función constante es una recta horizontal, luego, desde un punto de vista geométrico, es claro que éste es suave y en todo punto la recta tangente coincide con él. Por lo tanto, la recta tangente en cualquier punto es horizontal y su pendiente (la derivada de f) debe ser 0. Veamos como podemos verificar esto analíticamente.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.4.3. Sea f la función dada por $f(x) = x$ (función identidad). Entonces, para todo $x \in R$, f es derivable en x y $f'(x) = 1$.

Desde un punto de vista geométrico, es claro que el gráfico de la función (la recta $y = x$), es suave y en todo punto la recta tangente coincide con él. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente (la derivada de f) en cualquier punto debe ser 1. Verifiquemos esto analíticamente.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.4. Sea f la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = 2x$.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\,x\,h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.5. Sea f la función dada por $f(x) = x^3$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = 3x^2$.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3\ x\ h^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3\ x\ h^2 + h^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(3x^2 + 3\ x\ h + h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3\ x\ h + h^2\right) = 3x^2. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Proposición 5.4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea f la función real dada por $f(x) = x^n$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = n\ x^{n-1}$.*

La demostración de esta proposición escapa de los objetivos de este libro, pero la aplicaremos cuando sea conveniente.

Ejemplo 5.4.7. Sea f derivable en x_0. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea g definida por $g(x) = a \cdot f(x)$. Entonces, g es derivable en x_0 y $g'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$.

En efecto. Por el punto *2* de la proposición 5.4.1 y el ejemplo 5.4.2, la función g es derivable y $g'(x_0) = a' \cdot f(x_0) + a \cdot f'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + a \cdot f'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$. ✓

Proposición 5.4.8. *Si $f(x)$ es una función polinómica,*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots\ + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad a_n \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N},$$

entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)\cdot a_{n-1}x^{n-2} + \ \cdots\ + 2\cdot a_2 x + a_1.$$

La demostración de este resultado se sigue aplicando el punto *1* de la proposición 5.4.1 y la proposición 5.4.6.

Ejemplo 5.4.9. Sea f dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = \cos(x)$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Recordando la fórmula para el seno de una suma, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot(\cos(h)-1) + \operatorname{sen}(h)\cdot\cos(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot(\cos(h)-1)}{h} + \frac{\operatorname{sen}(h)\cdot\cos(x)}{h}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)= \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\underset{(*)}{=} \\
&= \operatorname{sen}(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1=\cos(x).
\end{aligned}$$

En $(*)$ hemos usado la proposición 3.10.1 del capítulo 3 y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0.$$

Para verificar este último límite, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}=\frac{\cos^2(h)-1}{h\cdot(\cos(h)+1)}= \\
&= \frac{-sen^2(h)}{h\cdot(\cos(h)+1)}=-\frac{sen(h)}{h}\cdot\frac{sen(h)}{\cos(h)+1}.
\end{aligned}$$

Luego, utilizando nuevamente la proposición 3.10.1 resulta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=-\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{\cdot(\cos(h)+1)}\right)=-1\cdot 0=0. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.4.10. Sea f dada por $f(x)=\cos(x)$. Entonces, para todo $x\in\mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x)=-\operatorname{sen}(x)$.

Sea $x\in\mathbb{R}$. Recordando la fórmula para el coseno de una suma, tenemos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}= \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(h)-\cos(x)}{h}= \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cdot(\cos(h)-1)-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(h)}{h}= \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)= \\
&= \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\operatorname{sen}(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\underset{(*)}{=} \\
&= \cos(x)\cdot 0-\operatorname{sen}(x)\cdot 1=-\operatorname{sen}(x). \quad \checkmark
\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ es válida por las mismas observaciones que en el ejemplo anterior.

Ejemplo 5.4.11. Sea f dada por $f(x) = e^x$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y $f'(x) = e^x$.

En efecto. Sea $x \in \mathbb{R}$. Por el ejemplo 3.11.6 del capítulo 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot \left(e^h - 1\right)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \cdot 1 = e^x. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.12. Sea f dada por $f(x) = \ln(x)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$, f es derivable en x y $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Sea $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Recordando las propiedades del ln, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot (\ln(x+h) - \ln(x)) = \\
&= \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right) = \\
&= \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}\right] = \\
&= \ln\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}.
\end{aligned}$$

luego, recordando que la función logaritmo es continua y aplicando la proposición 3.11.1 del capítulo 3 resulta que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\} = \\
&= \ln\left\{\lim_{h\to 0}\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}\right\} = \ln\left\{\lim_{h\to 0}\left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \quad \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\,. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.4.13. Sea f dada por $f(x) = \operatorname{tg}(x)$. Entonces, para todo $x \in Dom(\operatorname{tg})$, f es derivable en x y $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Sea $x \in Dom(tg)$. Dado que $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ por el punto *3* de la proposición 5.4.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{sen}'(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cdot(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\,. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.14. Sea f dada por $f(x) = cotg(x)$. Entonces, para todo $x \in Dom(\operatorname{cotg})$, f es derivable en x y $f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}$.

Sea $x \in Dom(cotg)$. Dado que $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, por el punto *3* de la proposición 5.4.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos'(x)\cdot\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\cdot\operatorname{sen}'(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \\ &= \frac{-\left(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

5.5. Regla de la cadena

Proposición 5.5.1. *Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\ (f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Ejemplos 5.5.2.

1. Sea f definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + x)$.

   Si definimos $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $h(x) = x^2 + x$, resulta que $f = g \circ h$. Luego, por lo visto en la proposición 5.4.6, el ejemplo 5.4.9 y la proposición 5.5.1, resulta que, f es derivable en x_0 y

   $$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'\ (h(x)) \cdot h'(x) = \cos(x^2 + x)\cdot(2x + 1).$$

Observemos que el procedimiento utilizado puede describirse de manera más sencilla (aunque menos precisa) de la siguiente manera: dado que $\operatorname{sen}(x^2+x)$, es el seno de una expresión, su derivada es el coseno (la derivada del seno) evaluado en la expresión por la derivada de la expresión.

2. Sea f definida por $f(x) = \ln(1+e^x)$.

   Si definimos $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = 1 + e^x$, resulta que $f = g \circ h$.

   Luego, por los ejemplos 5.4.3, 5.4.11, 5.4.12 y la proposición 5.5.1, resulta que para todo $x \in \mathbb{R}$, f es derivable en x y además

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'\ (h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot (0 + e^x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

   Como en el ejemplo anterior, sin tanta formalidad, como f es el logaritmo natural de una expresión, entonces, la derivada de f es la derivada del logaritmo natural evaluada en la expresión multiplicado por la derivada de la expresión.

3. Sea f definida por $f(x) = \left[\cos\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)\right]^{3}$.

   En este caso f es la composición de cuatro funciones, todas derivables en su dominio. Luego, podemos aplicar la regla de la cadena recursivamente para calcular la derivada de f de la siguiente manera:

   - Como f es del tipo $(g(x))^3$, entonces su derivada es $3 \cdot (g(x))^2 \cdot g'(x)$.
   - Como g es del tipo $\cos(h(x))$, entonces su derivada es $-\operatorname{sen}(h(x)) \cdot h'(x)$.
   - Como h es del tipo $\ln(t(x))$, entonces su derivada es $\frac{1}{t(x)} \cdot t'(x)$.
   - Por último como $t(x) = x^2 + 3$, entonces su derivada es $t'(x) = 2x$.

   En definitiva, derivando "de afuera hacia adentro", resulta que

$$f'(x) = 3 \cdot \left[\cos\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)\right]^{2} \cdot \left(-\operatorname{sen}\left[\ln\left(x^2+3\right)\right]\right) \cdot \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x.$$

5.6. Derivadas de potencias

Proposición 5.6.1. *Sean* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *con* $f(x) > 0$*, para todo* $x \in (a,b)$*. Sea* h *la función real definida por* $h(x) = (f^{\,g})\ (x) = (f(x))^{g(x)}$*. Si* f *y* g *son derivables en* $x_0 \in (a,b)$*, entonces,* h *es derivable en* x_0 *y*

$$h'(x_0) = (f(x_0))^{g(x_0)} \cdot \left[g'(x_0) \cdot ln\left(f(x_0)\right) + g(x_0) \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right].$$

Demostración. Utilizando el hecho que e^x y $\ln(x)$ son una la inversa de la otra, resulta que

$$h(x) = (f(x))^{g(x)} = e^{\ln\left[(f(x))^{g(x)}\right]} = e^{g(x)\cdot\ln[(f(x))]}.$$

Luego, hemos escrito a h como una composición. Aplicando la regla de la cadena a esta última expresión, obtenemos el resultado deseado. ☐

En los ejemplos subsiguientes puede aplicarse directamente la proposición 5.6.1. Sin embargo, recomendamos *no* utilizar dicha proposición sino imitar el método utilizado allí en cada caso particular.

Ejemplo 5.6.2. Dado $a \in \mathbb{R}$, sea f definida por $f(x) = x^a$. Es claro, por la proposición 5.6.1, que f es derivable en su dominio ($x > 0$). Calculemos su derivada.
Primera forma: Como en la proposición 5.6.1,

$$f(x) = x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \cdot \ln(x)}.$$

Aplicamos la regla de la cadena (proposición 5.5.1) a esta última expresión y resulta

$$f'(x) = e^{a \cdot \ln(x)} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Segunda forma: Aplicando ln a f,

$$f(x) = x^a \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(x)\right) = \ln\left(x^a\right) = a \cdot \ln\left(x\right).$$

Derivamos miembro a miembro esta última expresión y aplicamos la regla de la cadena; resulta que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a \cdot \frac{1}{x},$$

de donde

$$f'(x) = f(x) \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.6.3. Sea $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$. Sea f definida por $f(x) = a^x$.

Es claro, por la proposición 5.6.1, que f es derivable en $\mathbb{R}$. Calculemos su derivada.
Primera forma: Como 5.6.1,

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Aplicamos la regla de la cadena a esta última expresión (¡notemos que $\ln(a)$ es una constante!) y obtenemos

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a).$$

Segunda forma: Aplicando ln a f,

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(x)\right) = \ln\left(a^x\right) = x \cdot \ln\left(a\right).$$

Derivando miembro a miembro esta última expresión y utilizando la regla de la cadena, resulta que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(a),$$

de donde

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a). \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.6.4. Sea $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$. Sea f definida por $f(x) = \log_a(x)$.
Recordemos que (ver el capítulo 2)

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x),$$

por los ejemplos 5.4.7 y 5.4.12, f es derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ y

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Ejemplo 5.6.5. Sea f definida por $f(x) = x^{sen^3(x)}$. Es claro, por la proposición 5.6.1, que f es derivable en $\mathbb{R}_{>0}$. Calculemos su derivada.
Primera forma: Como en la proposición 5.6.1,

$$f(x) = x^{\mathrm{sen}^3(x)} = e^{\ln\left(x^{\mathrm{sen}^3(x)}\right)} = e^{\mathrm{sen}^3(x) \cdot ln(x)}.$$

Aplicando la regla de la cadena a esta última expresión resulta que

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\mathrm{sen}^3(x)\cdot \ln(x)} \cdot \left(3\mathrm{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + \mathrm{sen}^3(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = \\ &= x^{\mathrm{sen}^3(x)} \cdot \left(3\mathrm{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + \mathrm{sen}^3(x) \cdot \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Segunda forma: Aplicando ln a f,

$$\ln\left(f(x)\right) = \ln\left(x^{\mathrm{sen}^3(x)}\right) = \mathrm{sen}^3(x) \cdot \ln(x).$$

Derivando miembro a miembro esta última expresión y utilizando la regla de la cadena, resulta que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\mathrm{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + \mathrm{sen}^3(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(3\mathrm{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + \mathrm{sen}^3(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = \\ &= x^{\mathrm{sen}^3(x)} \cdot \left(3\mathrm{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + \mathrm{sen}^3(x) \cdot \frac{1}{x}\right). \quad \checkmark \end{aligned}$$

5.7. Tabla de las derivadas elementales

Resumamos en una lista las derivadas de las funciones más usuales.

- $c' = 0$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ $\quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

- Si $n \in \mathbb{Z}$ $\quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.
- $\text{sen}'(x) = \cos(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\cos'(x) = -\text{sen}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $(e^x)' = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}.$
- $\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \forall\, x \in Dom(\text{tg}).$
- $\text{cotg}'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2(x)}, \quad \forall\, x \in Dom(\text{cotg}).$
- Si $a \in \mathbb{R} > 0$ y $a \neq 1$ $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln(a), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}.$
- Si $a \in \mathbb{R} > 0$ y $a \neq 1$ $\quad (\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}.$

5.8. Derivadas de orden superior

Sea f una función derivable en (a, b). La asignación $x \mapsto f'(x)$, para todo $x \in (a, b)$ define una nueva función real f' denominada *función derivada* de f con $Dom(f') = (a, b)$.

Si a su vez, la función f' es derivable en (c, d), queda definida otra nueva función real $(f')'$, la derivada de f', con dominio (c, d). Esta nueva función se denomina *derivada segunda* de la función f y se la nota f''.

Recursivamente, mientras sigan siendo derivables en algún intervalo abierto, se definen las *derivadas sucesivas* de f. La derivada *tercera* (f''') , *cuarta* ($f^{(iv)}$), etc.

Ejemplo 5.8.1. Calculemos las derivadas sucesivas hasta el orden 5 de la función definida por $f(x) = x^6 + \text{sen}(x) + e^x$.

$$\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & 6\,x^5 + \cos(x) + e^x, \\
f''(x) & = & 30\,x^4 - \text{sen}(x) + e^x, \\
f'''(x) & = & 120\,x^3 - \cos(x) + e^x, \\
f^{(iv)}(x) & = & 360\,x^2 + \text{sen}(x) + e^x, \\
f^{(v)}(x) & = & 720\,x + \cos(x) + e^x\ .
\end{array}$$

Observemos que, en este caso, f y todas sus derivadas tienen dominio $\mathbb{R}$.

5.9. La derivada de la inversa de una función

Teorema 5.9.1. Teorema de la función inversa

Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ biyectiva (luego, existe $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$, su función inversa). Entonces,

1. *Si es f continua en $[a, b]$ entonces f^{-1} es continua en $[c, d]$.*

2. *Si es f derivable en $x_0 \in (a,b)$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y además*
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (*)$$

Llamando $y_0 = f(x_0)$ y teniendo en cuenta que entonces $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $(*)$ puede reescribirse en la forma

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}. \quad (**)$$

Observación 5.9.2. La fórmula $(*)$ del punto *2* del teorema de la función inversa puede deducirse fácilmente una vez aceptada la derivabilidad de f^{-1} en $f(x_0)$.

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \quad \forall x \in (a,b),$$

derivando miembro a miembro y aplicando la regla de la cadena resulta que

$$1 = \left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \checkmark$$

Observación 5.9.3. La fórmula $(*)$ del punto *2* del teorema 5.9.1 permite calcular la derivada de f^{-1} sin, necesariamente, conocer su expresión. Sólo alcanza con conocer la derivada de f. Este hecho es muy útil, sobre todo cuando se sabe que f es biyectiva pero no se conoce la expresión de f^{-1}. Los siguientes ejemplos de derivadas de funciones inversas (definidas en el capítulo 2) lo ilustran.

Ejemplo 5.9.4. $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ es biyectiva, derivable en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y su inversa es

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Calculemos $\operatorname{arc\,sen}'(x)$ para $x \in (-1,1)$.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \neq 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y utilizando $(**)$ del teorema 5.9.1 (cambiando adecuadamente el nombre de las variables) resulta que $\forall x \in (-1,1)$

$$\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))}. \quad ①$$

Como $\cos(\alpha) > 0$, para todo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de la relación $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ resulta que

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \quad ②$$

En particular ② es válido para $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(x)$. Reemplazando en ① resulta que

$$\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En definitiva, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.9.5. $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ es biyectiva, derivable en $(0,\pi)$ y su inversa es

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Calculemos $\arccos'(x)$, $\forall x \in (-1,1)$.

Teniendo en cuenta que $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \neq 0,\ \forall x \in (0,\pi)$ y utilizando $(**)$ del teorema 5.9.1 resulta que $\forall x \in (-1,1)$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))}. \quad ①$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha) > 0,\ \forall \alpha \in (0,\pi)$, de la relación $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ resulta que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}. \quad ②$$

En particular ② es válido para $\alpha = \arccos(x)$. Reemplazando en ① resulta que

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

En definitiva, $\forall x \in (-1,1)$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.9.6. $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es biyectiva, derivable en $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ y su inversa es

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).$$

Calculemos $\operatorname{arc\,tg}'(x)$ para $x \in (-1,1)$.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0,\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ y utilizando $(**)$ del teorema 5.9.1 resulta que si $x \in (-1,1)$

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg}(x))}\right)} = \cos^2(\operatorname{arc\,tg}(x)). \quad ①$$

Como $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, de la relación $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ resulta que

$$\operatorname{tg}^2(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1.$$

Luego,

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \operatorname{tg}^2(\alpha) + 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)+1}. \quad ②$$

En particular ② es válido para $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(x)$. Reemplazando en ① resulta que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \cos^2(\operatorname{arc\,tg}(x)) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg}(x)) + 1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

En definitiva, para todo $x \in (-1, 1)$

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{x^2+1}. \quad \checkmark$$

Nota 5.9.7. Desde un punto de vista geométrico, una función es continua si se puede graficar "sin levantar el lápiz" y una función es derivable si su gráfico es "suave".

Un ejemplo de función que se contrapone con la idea geométrica de continuidad y derivabilidad es la *función de Weierstrass*. Dicha función es continua en todo punto de $\mathbb{R}$ y no es derivable en ninguno. Si mantuviéramos la idea geométrica, deberíamos poder graficarla "sin levantar el lápiz" y de manera tal que tuviera "picos" (vértices) en todo punto. ¿Se anima a intentarlo?*

Moralejas:

- Una función es continua si verifica la definición 4.2.3 del capítulo 4.
- Una función es derivable si verifica la definición 5.2.1 de este capítulo.

5.10. Derivadas laterales

Definiciones 5.10.1.

1. *Sea f una función real definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es* **derivable por la derecha** *en x_0 si existe y es finito el límite*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

En ese caso, el valor del límite se denomina **derivada lateral por la derecha** *de f en x_0 y se lo nota $f'_+(x_0)$. O sea,*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2. *Sea f definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es* **derivable por la izquierda** *en x_0 si existe y es finito el límite*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

En ese caso, el valor del límite se denomina **derivada lateral por la izquierda** *de f en x_0 y se lo nota $f'_-(x_0)$. O sea,*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

---

*Recordemos que entre dos números reales siempre existe otro número real.

Proposición 5.10.2. *Sea f definida en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Entonces,*

$$f \text{ es derivable en } x_0 \iff f \text{ es derivable por la izquierda y por la derecha en } x_0 \text{ y } f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

En ese caso, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

5.11. Derivabilidad

Estudiemos la derivabilidad de las funciones en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.11.1. Sea f la función dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Luego, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Por el ejemplo 5.6.2, f es derivable en $x > 0$ y

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \left(= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \quad \text{en } (0,+\infty). \quad ①$$

Sin embargo en este caso $Dom(f) = \mathbb{R}$.
Estudiemos la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$. Por ①, basta estudiar la derivabilidad en $\mathbb{R}_{\leq 0}$.
Ahora bien, si $x < 0$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-(-x)} = -\sqrt[3]{-x} = -(-x)^{\frac{1}{3}} = (-1)\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}.$$

Luego, como $-x > 0$, utilizando ①, el ejemplo 5.6.2 y la regla de la cadena, resulta que es derivable en $x < 0$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\cdot\tfrac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1) = \tfrac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{si } x < 0. \quad ② \end{aligned}$$

De ① y ②, f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}. \quad ③$$

Resta analizar la derivabilidad de f en $x = 0$. Como $f(0) = 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty.$$

Luego, como el límite del cociente incremental de f **no** es finito, resulta que

$$f \text{ no es derivable en } x = 0. \quad ④$$

De ③ y ④, f es derivable en $R_{\neq 0}$, y f no es derivable en $x = 0$. ✓

Ejemplo 5.11.2. Sea f la función dada por $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$. Por el ejemplo 5.6.2, f es derivable en $x > 0$ y

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \tfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \tfrac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{x} \quad \text{en } (0,+\infty). \quad ①$$

También en este caso $Dom(f) = \mathbb{R}$. Estudiemos la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

Por ①, basta estudiar la derivabilidad en $\mathbb{R}_{\leq 0}$.
Ahora bien, si $x < 0$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}}.$$

Luego, como $-x > 0$, utilizando ① y la regla de la cadena (proposición 5.5.1), resulta que f es derivable en $x < 0$ y

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (-1) = -\tfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{-x} = \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} = \tfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \quad \text{en } (-\infty, 0). \quad ②$$

De ① y ② f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}. \quad ③$$

Resta analizar la derivabilidad de f en $x = 0$. Como $f(0) = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{4}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Por lo tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. ④
De ③ y ④, f es derivable en $\mathbb{R}$. ✓

Ejemplo 5.11.3. En general. Sea $n, m \in \mathbb{N}$. Sea f dada por $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Por el ejemplo 5.6.2, f es derivable en $x > 0$ y

$$f'(x) = \tfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = \tfrac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \tfrac{m}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{m-n}}, \quad \forall x > 0. \quad ①$$

En función de la paridad o imparidad de n y m puede ocurrir que $Dom(f) = \mathbb{R}$. *Si este es el caso* puede probarse que f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y que sigue valiendo ① para todo $x \neq 0$. La derivabilidad de f en $x = 0$ (y eventualmente su valor) *debe* analizarse en cada caso particular*.

Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **no** es derivable en $x = 0$, en cambio $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ es derivable en $x = 0$ ($f'(0) = 0$) y, por lo tanto, en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5.11.4. Sea f la función dada por $f(x) = \ln(|x|)$. Luego, $Dom(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$ y

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

En $(0, +\infty)$, f es derivable por el ejemplo 5.4.12 y además

$$f'(x) = \frac{1}{x}. \quad ①$$

En $(-\infty, 0)$, f es derivable por ser composición de funciones derivables (proposición 5.5.1) y además

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \quad ②$$

Luego, de ① y ②, f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$. ✓

---

*Entonces, es importante que recordemos que ¡Las raíces pueden **no** ser derivables en $x = 0$!

Ejemplo 5.11.5. Sea f dada por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x<1 \end{cases}.$$

(Ya consideramos está función en el ejemplo 4.3.2 del capítulo 4).

Analicemos la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

En $(-\infty,1)$, $f(x)=x^2$, que es derivable por ser un polinomio y $f'(x)=2x$. ①

En $(1,+\infty)$, $f(x)=x$, que es derivable por ser un polinomio y $f'(x)=1$. ②

En $x=1$, debemos analizar la derivabilidad de f usando derivadas laterales.

Recordando su gráfico, podemos observar que en $x=1$ se forma un "pico" (no es suave). Luego intuimos que f no debe ser derivable en $x=1$. Sin embargo, como ya explicamos, la intuición no alcanza. Debemos realizar el estudio analítico.

Dado que f tiene dos expresiones distintas alrededor de $x=1$, estamos obligados a estudiar las derivadas laterales.

Luego, teniendo en cuenta que $f(1)=1$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2. \end{aligned}$$

Entonces, existen las derivadas laterales y $f'_+(1)=1$, $f'_-(1)=2$. Como $f'_+(1)\neq f'_-(1)$, resulta (proposición 5.10.2) que f no es derivable en $x=1$. ③

De ①, ② y ③ f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 1}$ y

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>1 \\ 2x & \text{si} \quad x<1 \end{cases}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.11.6. Sea f la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x-2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax+b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}.$$

En $(-\infty,1)$, f es derivable por ser un polinomio y además $f'(x)=4x+1$. ①

En $(1,+\infty)$, f es derivable por ser un polinomio y además $f'(x) = a$. ②

En $x = 1$, debemos analizar la derivabilidad de f en función de los parámetros a y b.

Por la proposición 5.3.5, si f no es continua en $x = 1$, entonces f no es derivable en $x = 1$. Luego (aunque no es necesario) es *muy conveniente* determinar primero los valores a y b para los cuales f es continua en $x = 1$. Entonces,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 + x - 2) = 1, \quad ③$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax + b) = a + b. \quad ④$$

Como $f(1) = 1$, para que f sea continua en $x = 1$ debe ser

$$a + b = 1. \quad ⑤$$

Ahora sí, analicemos la derivabilidad de f en $x = 1$.

Dado que si $a + b \neq 1$ entonces f no es continua en $x = 1$ y, por lo tanto, no es derivable en $x = 1$, para analizar la derivabilidad de f en $x = 1$ consideramos que $a + b = 1$.

Calculemos las derivadas laterales teniendo en cuenta que $f(1) = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)^2 + (1+h) - 2 - 1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+2h+h^2) + 1 + h - 2 - 1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{5h + 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(5+2h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (5 + 2h) = 5,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{a + ah + b - 1}{h} \underset{a+b=1}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{ah}{h} = a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $a + b = 1$, existen las derivadas laterales y $f'_+(1) = a$, $f'_-(1) = 5$. Para que f sea derivable en $x = 1$ debe verificarse (proposición 5.3.5) que

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow a = 5. \quad ⑥$$

Entonces, de ⑤ y ⑥

$$f \text{ es derivable en } x = 1 \ \Leftrightarrow \ a + b = 1 \text{ y } a = 5 \ \Leftrightarrow \ a = 5 \text{ y } b = -4.$$

Si $a = 5$ y $b = -4$, f es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} . \qquad \checkmark$$

5.12. Teoremas que involucran funciones derivables

Los siguientes resultados comenzarán a mostrarnos cómo la derivada de una función nos da información sobre la función misma. Esto no es extraño ya que la derivada de una función en un punto es la medida de la *variación instantánea* de la función en dicho punto. Por lo tanto, si se conoce cómo varía la función se podrán deducir propiedades de ella (si crece, si decrece, si tiene extremos, etc.).

Para funciones “buenas”, el análisis de sus derivadas primera y segunda, junto con toda otra información que podamos extraer de la función misma (dominio, imagen, paridad, comportamiento en el infinito, raíces, conjuntos de positividad y negatividad, etc.), nos permitirán conocer el comportamiento general de la función y realizar un gráfico aproximado de la misma.

Teorema 5.12.1. Teorema de Fermat
Sea f una función definida en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Si x_0 es un extremo local de f y f es derivable en x_0, entonces*

$$f'(x_0) = 0.$$

O sea, la recta tangente al gráfico de f en un extremo es horizontal y, por lo tanto, su pendiente es nula (ver figura 5.2).

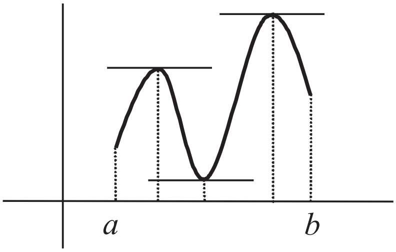


Figura 5.2: Teorema de Fermat.

Demostración. Supongamos que x_0 es un máximo local de f (si x_0 es un mínimo local, la demostración es análoga). Entonces al recordar las definiciones 4.5.2 del capítulo 4, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0) \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \, .$$

---

*Un máximo o un mínimo. Ver las definiciones 4.5.2 del capítulo 4

Luego,

$$f(x) - f(x_0) \leq 0\ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,. \quad ①$$

Como f es derivable en x_0 ,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad ②$$

y

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad ③$$

Ahora bien:

Si $x \to x_0^+$, entonces $x - x_0 > 0$. Luego, por ① y ②

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0. \quad ④$$

Si $x \to x_0^-$, entonces $x - x_0 < 0$. Luego, por ① y ③

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0. \quad ⑤$$

(En $(*)$ hemos usado la proposición 3.1.7 del capítulo 3).

Luego, de ④ y ⑤

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Observación 5.12.2. El recíproco del teorema 5.12.1 es *falso*. Esto es,

$$f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow x_0 \text{ es un extremo.}$$

En efecto, sea f la función dada por $f(x) = x^3$. Luego, $f'(x) = 3\,x^2$ y, por lo tanto, $f'(0) = 0$. Sin embargo, es claro que 0 no es un extremo de f ($f(x) < 0 = f(0)$, para todo $x < 0$ y $f(x) > 0 = f(0)$, para todo $x > 0$).

Teorema 5.12.3. Teorema de Rolle

Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

En algún punto del intervalo (a, b), la recta tangente al gráfico de f es horizontal (ver figura 5.3).

Demostración. Por el teorema 4.5.3 del capítulo 4, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que x_1 es un mínimo global de f y x_2 es un máximo global de f. O sea,

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq f(x_1) \text{ y } f(x) \leq f(x_2). \quad ①$$

Si $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b \Rightarrow x_1 \in (a, b)$ y, por el Teorema de Fermat, $f'(x_1) = 0$. ✓

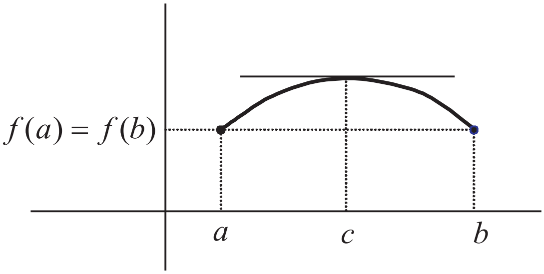


Figura 5.3: Teorema de Rolle.

Si $x_2 \neq a$ y $x_2 \neq b \Rightarrow x_2 \in (a,b)$ y, por el Teorema de Fermat, $f'(x_2)=0$. ✓

Si $(x_1 = a \;\vee\; x_1 = b) \wedge (x_2 = a \;\vee\; x_2 = b)$, o sea, si x_1 y x_2 están en los extremos de $[a,b]$ (o son los dos a, o son los dos b, o uno es a y el otro es b), entonces, como $f(a)=f(b)$, por ①,

$$f(x) = f(a) = f(b), \quad \forall x \in [a,b].$$

Luego, f es constante y, por lo tanto (por el ejemplo 5.4.2), $f'(x)=0$, $\forall\, x \in (a,b)$. □

Teorema 5.12.4. Teorema del valor intermedio de Lagrange
Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

el teorema asegura que en algún punto del intervalo (a,b), la recta tangente al gráfico de es paralela a la secante (ver figura 5.4).

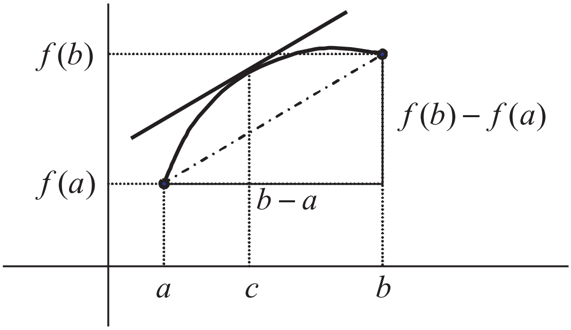


Figura 5.4: Teorema de Lagrange.

Demostración. Sea g definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a), \quad \forall x \in [a, b]. \quad ①$$

Observar que

$$L(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a),$$

es la recta con pendiente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Luego, $g(x)$ "mide la distancia" entre $f(x)$ y $L(x)$

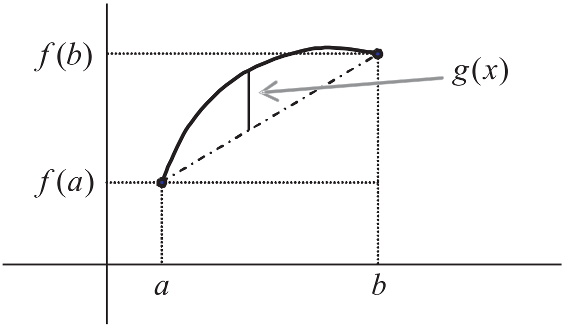


Figura 5.5: Salvo el signo, g "mide la distancia" entre la función y la recta.

Es claro de ① que g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). ②
Además

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) - f(a) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) - f(a) = \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) - f(a) = \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$g(a) = g(b). \quad ③$$

Por ② y ③, g satisface las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto,

$$\text{existe} \quad c \in (a, b) \quad \text{tal que} \quad g'(c) = 0. \quad ④$$

Pero, por ①

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in (a, b)$$

Evaluando g' en c y teniendo en cuenta ④ resulta que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Proposición 5.12.5. *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x)=0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces f es constante en $[a,b]$. O sea, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=k$, para todo $x \in [a,b]$.*

Demostración. Sean $x, x' \in [a,b]$ tales que $x < x'$. Como $[x,x'] \subset [a,b]$ resulta (por hipótesis) que f satisface las hipótesis del Teorema de Lagrange. Luego, existe $c \in (x.x')$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}.$$

Como $f'(x)=0$, para todo $x \in (a,b)$, en particular $f'(c)=0$ y, por lo tanto,

$$0 = f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \quad \Rightarrow \quad f(x')-f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x')=f(x).$$

En conclusión, $f(x')=f(x)$; para todos x, $x' \in [a,b]$, o sea, f es constante en $[a,b]$. □

Corolario 5.12.6. *Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) tales que $f'(x)=g'(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=g(x)+k$ para todo $x \in (a,b)$.*

Demostración. Sea h definida por $h(x)=f(x)-g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Luego h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y además

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0, \ \forall\, x \in (a,b).$$

Luego, por la proposición 5.12.5, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in [a,b]$

$$h(x)=f(x)-g(x)=k \quad \Rightarrow f(x)=g(x)+k.$$

□

Nota 5.12.7. Hemos demostrado el Teorema de Lagrange a partir del Teorema de Rolle (teorema 5.12.3). Es posible demostrar el Teorema de Lagrange sin usar el Teorema de Rolle. Observar que en ese caso el Teorema de Rolle es una consecuencia inmediata del Teorema de Lagrange.

Teorema 5.12.8. Teorema de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) . Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c) = (g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

Si además, $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a,b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \,.$$

Demostración. Sea h definida por

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a)), \quad \forall x \in [a, b].$$

Luego, es claro que h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además,

$$h(b) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \cdot (f(b) - f(a)) = 0,$$

y

$$h(a) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(a) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \cdot (f(a) - f(a)) = 0.$$

Por lo tanto, h satisface las hipótesis del Teorema de Rolle (teorema 5.12.3). Entonces,

$$\text{existe } c \in (a, b) \quad \text{tal que} \quad h'(c) = 0.$$

La derivada de h es

$$h'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x),$$

al evaluar en c, obtenemos

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(c).$$

Por lo tanto,

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c). \quad ①$$

Supongamos que además $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Entonces,

$$g(b) - g(a) \neq 0$$

(si no fuera así, entonces $g(a) = g(b)$ y, por el Teorema de Rolle, debería existir $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ contra lo supuesto).

Luego, es claro por ① que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Observación 5.12.9. Observar que el Teorema de Lagrange es una consecuencia inmediata del Teorema de Cauchy considerando como caso particular $g(x) = x$.

Ejemplo 5.12.10. Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$. Entonces, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Analicemos si f verifica las hipótesis del Teorema de Rolle (5.12.3) en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Ahora bien, si $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 3$, resulta que $f = g \circ h$.

Es claro que g y h son continuas en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Luego,

$$f \text{ es continua en } \left[\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}\right]. \quad ①$$

Sabemos que h es derivable en $\mathbb{R}$. Respecto de g, recordemos del ejemplo 5.11.1, que g es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y g **no** es derivable en $x = 0$. Dado que,

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 3, \quad ②$$

resulta que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Luego,

$$f = g \circ h \text{ es derivable en } \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}\right). \quad ③$$

Además,

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{3}{2} + 3} = \sqrt[3]{\tfrac{9}{4} - 6 + 3} = \sqrt[3]{\tfrac{9}{4} - 3} = \sqrt[3]{-\tfrac{3}{4}},$$

y

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{5}{2} + 3} = \sqrt[3]{\tfrac{25}{4} - 10 + 3} = \sqrt[3]{\tfrac{25}{4} - 7} = \sqrt[3]{-\tfrac{3}{4}}.$$

Luego,

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = f\left(\tfrac{5}{2}\right). \quad ④$$

De ①, ③ y ④; f verifica las (tres) hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Aplicando el teorema, su tesis asegura que existe, por lo menos, un $c \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

Hallemos un $c \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ que verifique que $f'(c) = 0$.

Si $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^2 - 4x + 3\right)^2}} \cdot (2x - 4.)$$

entonces,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Luego, hemos encontrado $c = 2 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ que verifica que $f'(c) = 0$. ✓

Si cambiamos el intervalo, ¿seguirá f verificando las hipótesis del Teorema de Rolle? Analicemos si f verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. Como antes, f es continua en $[0, 4]$ y, por lo tanto,

$$f \text{ es continua en } [0, 4]. \quad ⑤$$

Por otra parte,

$$f(0) = \sqrt[3]{(0)^2 - 4 \cdot 0 + 3} = \sqrt[3]{3},$$

y

$$f(4) = \sqrt[3]{4^2 - 4 \cdot 4 + 3} = \sqrt[3]{16 - 16 + 3} = \sqrt[3]{3}.$$

Luego,

$$f(0) = f(4). \quad ⑥$$

Teniendo en cuenta ② y el hecho que $1 \in (0, 4)$ y $3 \in (0, 4)$, como g **no** es derivable en $x = 0$, podemos asegurar que f es derivable en $(0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$, pero **no** podemos decir nada respecto de la derivabilidad de f en $x = 1$ ni en $x = 3$.

Analicemos la derivabilidad de f en $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+h)^2-4\cdot(1+h)+3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2h+h^2-4-4h+3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{-2h+h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{-2h+h^2}}{\sqrt[3]{h^3}}=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{-2h+h^2}{h^3}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{-\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}}=\infty.$$

Luego, f no es derivable en $x = 1$. Análogamente, f no es derivable en $x = 3$. Entonces, f no es derivable en $(0, 4)$. ⑦

Por lo tanto, f no verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. Observemos que por más que se verifiquen dos de las hipótesis (⑤ y ⑥) como una de ellas no se verifica (⑦) no se puede aplicar el Teorema de Rolle a f en el intervalo $[0, 4]$. El hecho que el teorema no pueda aplicarse *no significa que se contradiga*, simplemente, al no cumplirse las hipótesis, *no se puede aplicar*.

Ejemplo 5.12.11. Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } 1\le x\le 2\\ -\frac{1}{4}\,x+1 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}.$$

Analicemos si f verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange (teorema 5.12.4) en el intervalo $[1, 4]$.

Continuidad en $[1, 4]$:

En $[1, 2)$, f es continua por ser un cociente de funciones continuas con denominador no nulo. ①

En $(2, 4]$, f es continua por ser un polinomio. ②

En $x = 2$, como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\tfrac{1}{x}=\tfrac{1}{2}\,,\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}-\tfrac{1}{4}x+1=\tfrac{1}{2}\quad\text{y}\quad f(2)=\tfrac{1}{2}\,,$$

resulta que f es continua en $x = 2$. ③

Luego, de ①, ② y ③, f es continua en $[1, 4]$. ④

Derivabilidad en $(1, 4)$:

En $(1, 2)$ f es derivable por ser un cociente de funciones derivables con denominador no nulo. ⑤

En $(2, 4)$ f es derivable por ser un polinomio. ⑥

En $x = 2$.

$$\lim_{h\to 0^-} \tfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \tfrac{f(2+h)-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \tfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \tfrac{\frac{2-(2+h)}{2\cdot(2+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \tfrac{\frac{-h}{4+2h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \tfrac{-h}{h\cdot(4+2h)} = \lim_{h\to 0^-} \tfrac{-1}{(4+2h)} = -\tfrac{1}{4}.$$

Entonces,

$$f'_-(2) = -\tfrac{1}{4}. \quad ⑦$$

Calculemos la derivada por la derecha.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}(2+h)+1-\frac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}h+1-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}h}{h} = \lim_{h\to 0^+} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Luego,

$$f'_+(2) = -\tfrac{1}{4} \quad ⑧$$

De ⑤, ⑥, ⑦ y ⑧ f es derivable en $(1,4)$ y $f'(2) = -\frac{1}{4}$. ⑨

De ④ y ⑨, f verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo $[1,4]$. Aplicando el teorema, su tesis asegura que existe, por lo menos, un $c \in (1,4)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{0-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Hallemos un $c \in (1,4)$ que verifique que $f'(c) = -\frac{1}{3}$. Luego,

$$\forall\, x \in (1,2), \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{y} \quad \forall\, x \in (2,4), \quad f'(x) = -\frac{1}{4}.$$

Como además (por ⑨) $f'(2) = -\frac{1}{4}$, resulta que

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad 2 \le x < 4. \end{cases}$$

Luego, es claro que $f'(x) = -\frac{1}{3}$ sólo puede ocurrir en $(1,2)$. Entonces,

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}.$$

Como $-\sqrt{3} \notin (1,2)$ y $\sqrt{3} \in (1,2)$ resulta que $c = \sqrt{3} \in (1,4)$ verifica lo pedido.

Veamos como una aplicación del Teorema de Lagrange (teorema 5.12.4) nos permite, en algunos casos, probar ciertas inecuaciones.

Ejemplo 5.12.12. Para todo $x > 0$, $\ln(1+x) < x$.

En efecto. Sea f definida por

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Luego, $Dom(f) = (-1, +\infty)$. Sea $x > 0$. Por ser composición de funciones continuas, resulta que f es continua en $[0, x]$. ①

Por ser composición de funciones derivables, resulta que f es derivable en $(0, x)$. ②

Por ① y ②, para cada $x > 0$, f verifica las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo $[0, x]$.

Por lo tanto, existe $c_x \in (0, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x). \quad ③$$

Teniendo en cuenta que

$$f'(y) = \frac{1}{1+y}, \quad \forall\, y > -1,$$

de ③, resulta que existe $c_x \in (0, x)$ tal que

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(c_x) = \frac{1}{1+c_x}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c_x} \underset{(*)}{<} 1 \underset{x>0}{\Longrightarrow} \ln(1+x) < x. \quad \checkmark$$

Observemos que $(*)$ es válida pues,

$$c_x > 0 \Longrightarrow 1 + c_x > 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+c_x} < 1.$$

Capítulo 6

Estudio de Funciones

6.1. Regla de L'Hôpital

En el capítulo 3 vimos cómo, en algunos casos, ninguna de las propiedades del límite de funciones (ni finitos ni infinitos) permitían calcular el valor de algunos límites. A este tipo de límites los hemos llamado indeterminados. Para poder calcularlos hemos recurrido a algún tipo de manipulación algebraica para "salvar" la indeterminación y poder luego aplicar alguna propiedad conocida.

Una consecuencia muy importante del Teorema de Cauchy (teorema 5.12.8 del capítulo 5) es una regla de cálculo que nos permite, en la mayoría de los casos pero **no** en todos, calcular un límite indeterminado de una manera más sencilla que la vista hasta ahora. Es la llamada "Regla de L'Hôpital". Existen varios teoremas distintos relacionados con esta regla. A continuación enunciaremos sólo dos de ellos y demostraremos uno.

Proposición 6.1.1. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{0}{0}$)
Sea $x_0 \in (a,b)$. Sean f y g derivables en (a,b), salvo quizás en x_0, y continuas en x_0 tales que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $g'(x) \neq 0$; para todo $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$.

Si existe y es finito el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe y es finito el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Sea $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x > x_0$ (en el caso $x < x_0$ la demostración es análoga).

Por hipótesis, f y g satisfacen las hipótesis del Teorema de Cauchy en el intervalo $[x_0, x]$ (si $x < x_0$, tomamos el intervalo $[x, x_0]$).

Teniendo en cuenta que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, la tesis del Teorema de Cauchy asegura que existe $c \in (x_0, x)$ ((x, x_0) en el otro caso) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad ①$$

Dado que $c_x \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} x_0$ y que, por hipótesis, existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell. \quad ②$$

De ① y ②

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

□

Proposición 6.1.2. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{\infty}{\infty}$)
Sea $x_0 \in (a,b)$. Sean f y g derivables en (a,b), salvo quizás en x_0, y continuas en x_0 tales que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y $g'(x) \neq 0$; para todo $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$.

Si existe y es finito el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe y es finito el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.2. Ejemplos de cómo aplicar la Regla de L'Hôpital

Ejemplo 6.2.1. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$. (Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Primero, es evidente que se verifican las hipótesis de la proposición 6.1.1, luego,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Ejemplo 6.2.2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. (Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Es claro que se verifican las hipótesis de la proposición 6.1.1. Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(Observemos que el segundo límite podría haberse calculado, sin usar L'Hôpital, utilizando propiedades estudiadas en el capítulo 3).

Ejemplo 6.2.3. Calcular $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$. (Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

Se verifican las hipótesis de la proposición 6.1.1; luego,

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(Recordar que ya hemos calculado este límite, sin usar L'Hôpital, en el capítulo 3).

Ejemplo 6.2.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(x)}{\operatorname{cotg}(x)}$. (Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$).
Claramente se verifican las hipótesis de la proposición 6.1.2. Luego,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x)}{\operatorname{cotg}(x)} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^-} -\frac{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{1} = 0.$$

Ejemplo 6.2.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\left(x^2-4x+4\right)^{-1}}{\ln(x-2)}$. (Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$).
Es claro que se verifican las hipótesis de la proposición 6.1.2. Luego,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left(x^2-4x+4\right)^{-1}}{\ln(x-2)} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{-\left(x^2-4x+4\right)^{-2}\cdot(2x-4)}{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-2x^2+8x-8}{(x^2-4x+4)^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-4x+8}{2\cdot(x^2-4x+4)\cdot(2x-4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-4x+8}{4x^3-24x^2+48x-32} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-4}{12x^2-48x+48} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-4}{12\cdot(x-2)^2} = -\infty.$$

Observemos que, teniendo en cuenta que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, podemos calcular este límite, sin usar tantas veces L'Hôpital, de una manera más rápida.
En efecto:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left(x^2-4x+4\right)^{-1}}{ln(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)^{-2}}{ln(x-2)} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 2^+} \frac{-2\cdot(x-2)^{-3}}{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{-2\cdot(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty.$$

Veamos ahora cómo, en cualquier otro caso de indeterminación, es posible modificar el límite a calcular de manera tal de conseguir otro límite equivalente, pero que sea una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y poder entonces aplicar la Regla de L'Hôpital.
En lo que sigue, podemos reemplazar $x \to x_0$ por $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Proposición 6.2.6. *El caso de indeterminación* $0 \cdot \infty$
Sean f *y* g *tales que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
Luego el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ *es una indeterminación del tipo* $0\cdot\infty$. *Es claro que,*

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)} \qquad y \qquad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}, \quad ①$$

(indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ *), y*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}, \quad ②$$

(indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *).*

Luego, podemos intentar calcular el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$, utilizando ① o ② (según más convenga) y la Regla de L'Hôpital correspondiente.

Proposición 6.2.7. *El caso de indeterminación* $\infty - \infty$
Sean f *y* g *tales que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
Luego el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ *es una indeterminación del tipo* $\infty - \infty$.
Manipulando algebraicamente, resulta que

$$f(x) - g(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right].$$

Luego,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \left\{(f(x)\cdot g(x))\cdot\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]\right\}$$

que es una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$.
Aplicando el método anterior resulta que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x)}{\frac{1}{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]}}, \quad ①$$

(indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$*), o bien*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}, \quad ②$$

(indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$*).*

Luego, podemos intentar calcular el $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$, utilizando ① o ② (según más convenga) y la Regla de L'Hôpital correspondiente.

No es necesario que recordemos ① y ② de memoria. Es mejor en cambio, en cada caso particular de indeterminación del tipo $\infty - \infty$, manipular algebraicamente la expresión del límite a calcular para conseguir que sea del tipo $0\cdot\infty$ y luego sí recordar cómo, por la proposición 6.2.6, se lleva al caso $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Proposición 6.2.8. *Casos:* 0^0, ∞^0 *y* 1^∞
Sean f *y* g *tales que el* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ *es indeterminado del tipo* 0^0, ∞^0 *o* 1^∞.

Recordemos (3.8 de la sección "Límite y Continuidad") que en este tipo de casos, para calcular el límite, conviene aplicar la función ln *(logaritmo natural).*

Luego, si $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \ell$ *(eventualmente* $+\infty$*), se tiene que*

$$L = \ln(\ell) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \ln\left((f(x))^{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln(f(x)).$$

Luego, el $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln(f(x))$ *es una indeterminación del tipo* $0\cdot\infty$ *o* $\infty\cdot 0$.

Podemos entonces aplicar la proposición 6.2.6 y luego, una vez que sea del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos la Regla de L'Hôpital correspondiente para calcular

$$L = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln(f(x)) \text{ (eventualmente } +\infty \text{ o } -\infty).$$

Recordemos que

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \ell = e^L,$$

y que

$$\text{“}e^{+\infty} = +\infty\text{” y en cambio “}e^{-\infty} = 0\text{”}.$$

6.3. Más ejemplos

Ejemplo 6.3.1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\cdot\ln(x))$. (Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$).

Por la proposición 6.2.6, tenemos dos alternativas distintas para poder aplicar la regla de L'Hôpital. Estas son:

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} \text{ (tipo } \tfrac{0}{0}) \quad ①$$

o

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ (tipo } \tfrac{\infty}{\infty}). \quad ②$$

Pregunta: ¿Cuál de las dos alternativas me conviene más?

Respuesta: (sin tener práctica) No sé.

Pregunta: ¿Qué hago?

Respuesta: Intento las dos. Si cuando intento con una veo que se complica demasiado, la dejo e intento con la otra. Si las dos son complicadas intento sin L'Hôpital. Si sigo sin poder resolverlo entonces ...*

---

*Elegir lo que más le guste.

Intentemos con ①.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\ln(x))^{-1}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-(\ln(x))^{-2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{(\ln(x))^{-2}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{-2(\ln(x))^{-3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2(\ln(x))^{-3}} = \cdots$$

Nos damos cuenta que, en vez de resolver nuestro problema, se está complicando cada vez más. Dejemos esta forma e intentemos con ②.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.\end{aligned}$$

Luego*,

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0. \quad \checkmark$$

Ejemplo 6.3.2. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$. (Indeterminación del tipo $\infty - \infty$).

Recordando la proposición 6.2.7 (pero sin utilizar las fórmulas) se debe manipular algebraicamente para llegar a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Como,

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln(x)} = \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\cdot\ln(x)},$$

resulta que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\cdot\ln(x)},$$

que es del tipo $\frac{0}{0}$.

Luego,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\cdot\ln(x)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\cdot\ln(x)+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\cdot\ln(x)+x-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\ln(x)+2} = -\frac{1}{2}.$$

---

[*] Después de haber hecho 1532 ejercicios (de este tipo), la respuesta a la última pregunta hubiese sido: Intento con ②.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = -\tfrac{1}{2}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 6.3.3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$. (Indeterminación del tipo 0^0).

Por la proposición 6.2.8, sea

$$\ell = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}.$$

Luego,

$$L = \ln(\ell) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\cdot\ln(x),$$

que es del tipo $0\cdot\infty$. Luego, por 6.2.6 y teniendo en cuenta la experiencia de los ejemplos anteriores,

$$L = \ln(\ell) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\operatorname{sen}^{-1}(x)} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{sen}^{-2}(x)\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\cdot\cos(x)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)-x\cdot\operatorname{sen}(x)} = 0.$$

Entonces,

$$L = \ln(\ell) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ell = e^0 = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = 1. \quad \checkmark$$

Ejemplo 6.3.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln(x))^x$. (Indeterminación del tipo ∞^0).

Por la proposición 6.2.8, sea

$$\ell = \lim_{x\to 0^+} (-\ln(x))^x.$$

Luego,

$$L = \ln(\ell) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} (-\ln(x))^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left((-\ln(x))^x\right) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(-\ln(x)),$$

que es del tipo $0\cdot\infty$. Luego, por 6.2.6,

$$L = \ln(\ell) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(-\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(-\ln(x))}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{-\ln(x)}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{\ln(x)\cdot x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\ln(x)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$L = \ln(\ell) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ell = e^0 = 1. \quad \checkmark$$

Ejemplo 6.3.5. Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{tg}(x)}$. (Indeterminación del tipo 1^∞).

Por la proposición 6.2.8, sea

$$\ell = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{tg}(x)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} L=\ln(\ell) &= \ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{tg}(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left((\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{tg}(x)}\right) = \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\cdot\ln(\operatorname{sen}(x)), \end{aligned}$$

que es del tipo $\infty\cdot 0$. Luego, por 6.2.6,

$$L=\ln(\ell)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)\cdot\ln(\operatorname{sen}(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\cdot\cos(x)}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) = 0.$$

Por lo tanto,

$$L=\ln(\ell)=0 \Rightarrow \ell = e^0 = 1. \quad \checkmark$$

6.4. Algunas observaciones respecto de la Regla de L'Hôpital

1. Como vimos en algunos ejemplos, existen enunciados análogos a la proposición 6.1.1 y a la proposición 6.1.2 para cualquier otro caso. Más precisamente: si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \bowtie$$

   en cualquiera de los siguientes casos:

   $\ell\in\mathbb{R}$, $\ell=+\infty$, $\ell=-\infty$, $x\to x_0$, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$. Por supuesto, f y g deben ser derivables "cerca" de donde se está calculando el límite.

   (En $\bowtie$, consideramos la existencia del límite en un sentido amplio, es decir aceptamos que el límite sea un número real, $+\infty$, $-\infty$ o ∞).

2. La Regla de L'Hôpital, cualquiera sea su enunciado, sólo puede aplicarse en los casos de indeterminación que pueden llevarse a indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Si el límite no es indeterminado, la Regla de L'Hôpital *no es válida* (y *no* puede aplicarse).

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3}{x^2+1} = 3 \ \text{ (¡no es indeterminado!).}$$

Si utilizáramos (mal) la Regla de L'Hôpital, concluiríamos erróneamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+1\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1.$$

3. Si el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ pero no existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, la Regla de L'Hôpital, cualquiera sea su enunciado, *no es válida* (y *no* puede aplicarse). En este caso, usamos "*no existe*" en un sentido estricto. Es decir, *no* hay límite; la función no se acerca a "nada"; ni a un número real, ni a $+\infty$, ni a $-\infty$ ni a ∞ y no es posible volver a aplicar la regla. (Por ejemplo, lo que sucede con $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ cuando $x \to 0$).

   Si este es el caso, el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ puede o no existir y habrá que calcularlo utilizando algún otro recurso como los que ya aprendimos.

4. La Regla de L'Hôpital es una herramienta de cálculo muy poderosa y útil para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, pero *no es infalible*.

   En muchos casos, utilizando la Regla el cálculo del límite se vuelve muy engorroso (o incluso no puede resolverse) y, en cambio, si no se utiliza el cálculo del límite (aplicando otros métodos) es mucho más sencillo.

5. La Regla de L'Hôpital, cualquiera sea su enunciado, puede aplicarse en forma iterada tantas veces como se necesite (incluso utilizando distintos enunciados).

   Esto es, si el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sigue siendo indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces, *si* f' y g' también verifican las hipótesis del la Regla de L'Hôpital, aplicando dos veces la regla (siempre que se cumplan las hipótesis) resulta que

$$\text{Si} \ \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

   (Ídem si $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$).

Estudio de funciones

6.5. Crecimiento

Definiciones 6.5.1. *Sea f una función real.*

1. *Se dice que f es* **creciente (monótona creciente)** *en $A \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall\, x, x' \in A : \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x').$$

2. *Se dice que f es* **decreciente (monótona decreciente)** *en $A \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall\, x, x' \in A : \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x').$$

3. *Se dice que f es* **monótona** *en $A \subset \mathbb{R}$ si f es monótona creciente o monótona decreciente en A.*
4. *Se dice que f es* **estrictamente creciente** *en $A \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall\, x, x' \in A : \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x').$$

5. *Se dice que f es* **estrictamente decreciente** *en $A \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall\, x, x' \in A : \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x').$$

6. *Se dice que f es* **estrictamente monótona** *en $A \subset \mathbb{R}$ si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en A.*

Ver figura 6.1.

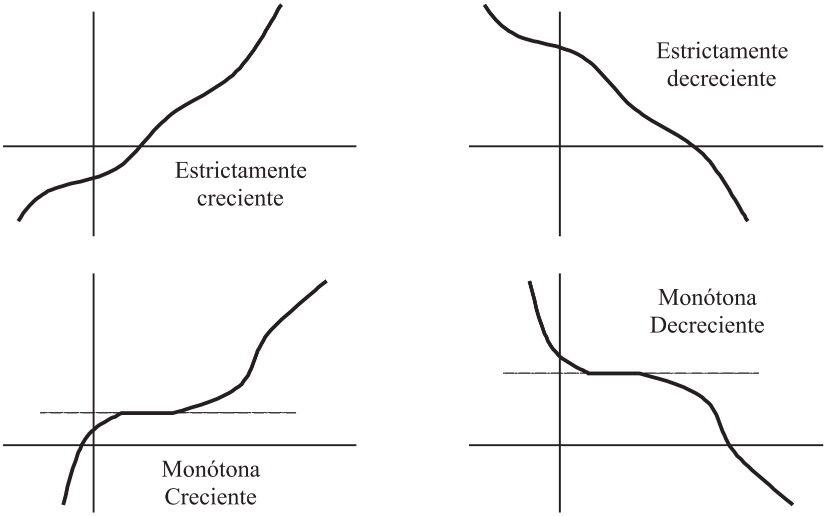


Figura 6.1: Definiciones 6.5.1.

Ejemplos 6.5.2.

- $f(x) = x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

- $f(x) = -x$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

Proposición 6.5.3. *Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces*

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ *es estrictamente creciente en* $[a, b]$.
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ *es estrictamente decreciente en* $[a, b]$.
3. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ *es creciente en* $[a, b]$.
4. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ *es decreciente en* $[a, b]$.
5. f *es estrictamente creciente (o creciente) en* $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.
6. f *es estrictamente decreciente (o decreciente) en* $[a, b] \Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Demostración. Demostremos el punto *1*. Sean x,$x' \in [a, b]$ tales que $x < x'$. ①
Como $[x, x'] \subset [a, b]$ resulta (por hipótesis) que f satisface las hipótesis del Teorema de Lagrange.
Luego, existe $c \in (\, x, x')$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\,. \quad ②$$

Por hipótesis $f'(c) > 0$. Luego, como por ① $x < x'$, resulta de ② que

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(c) > 0 \underset{x'-x>0}{\Rightarrow} f(x') - f(x) > 0 \Rightarrow f(x') > f(x).$$

Entonces, por las definiciones 6.5.1, f es estrictamente creciente en $[a, b]$. ☐

Corolario 6.5.4. *Sea f derivable en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$, y continua en x_0.*

1. *Si* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, x_0)$ *y* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, b)$, *entonces* x_0 *es un máximo global* estricto de f en (a, b). (Es decir, $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (a, b)$).*
2. *Si* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, x_0)$ *y* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, b)$, *entonces* x_0 *es un mínimo global estricto en (a, b). (Es decir, $f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in (a, b)$).*

Observación 6.5.5. Si f no es continua en x_0 el corolario 6.5.4 no tiene por qué ser cierto.

Tomemos por ejemplo, las funciones f y g cuyos gráficos se muestran en la figura 6.2, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

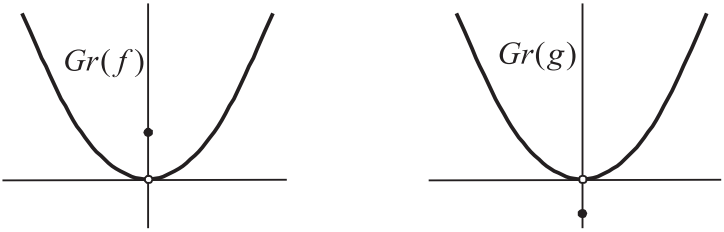


Figura 6.2: Ejemplo 6.5.5.

Como $f(x) = g(x) = x^2$, $\forall\, x \neq 0$, resulta que

$$f'(x) = g'(x) = 2x, \ \forall\, x \neq 0.$$

Luego,

$$f'(x) = g'(x) < 0, \ \forall\, x \in (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad f'(x) = g'(x) > 0, \ \forall\, x \in (0, +\infty).$$

Como $f(0) = 1$ y $g(0) = -1$, es claro que $x = 0$ es mínimo de g pero **no** es mínimo de f.

Definición 6.5.6. *Sea f una función real y sea $x_0 \in Dom(f)$. Decimos que x_0 es un* **punto crítico** *de f si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, o bien si f no es derivable en x_0. Notamos con $PC(f)$ al conjunto de puntos críticos de f. Esto es*

$$PC(f) = \{x \in Dom(f) : f \text{ no es derivable en } x\} \cup C_0(f').$$

Observación 6.5.7. Dada una función f, sea $x_0 \in Dom(f)$ un extremo local de f. Entonces x_0 es un punto crítico de f.

En efecto; basta recordar las definiciones de máximo y mínimos locales (ver 4.5.2), el Teorema de Fermat (5.12.1) y tener en cuenta que dicho teorema sólo puede aplicarse si f es derivable en x_0.

Observemos, por ejemplo, que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y sin embargo $x = 0$ es un mínimo (global) de f.

Nota 6.5.8. Teniendo en cuenta la observación anterior, los puntos críticos de una función son los únicos “candidatos” a ser sus extremos.

Observación 6.5.9. A partir de la definición de punto crítico, podemos reescribir el corolario 6.5.4 de la siguiente manera:

Sea f una función real tal que $Dom(f) = (a, b)$ o $Dom(f) = [a, b]$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Si f es continua en $Dom(f)$ y x_0 es el *único* punto crítico de f en (a, b). Entonces,

1. Si f es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha, f alcanza en x_0 un máximo global estricto.

---

*Ver la definiciones 4.5.2 del capítulo 4.

2. Si f es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha, f alcanza en x_0 un mínimo global estricto.

Proposición 6.5.10. Criterio de la derivada segunda
Sea f una función dos veces derivable en (a,b) (existen $f'(x)$ y $f''(x)$, $\forall\, x \in (a,b)$). Sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(0)=0$. Entonces

1. $f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0$ *es un mínimo local de f.*

2. $f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0$ *es un máximo local de f.*

Demostración. Demostremos el punto *1* (la demostración del punto *2* es similar). Como f'' es la derivada de f', por definición, resulta que

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Por hipótesis $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$. Luego,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0\ .$$

Recordando la proposición 3.1.7 del capítulo 3, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad ①$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$x - x_0 < 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{y} \quad x - x_0 > 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

de ① resulta que

$$f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad ②$$

y

$$f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). \quad ③$$

Luego, por ②, ③ y 6.5.4, x_0 es un mínimo global de f en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; entonces, x_0 es un mínimo local de f. ☐

Observación 6.5.11. El criterio de la derivada segunda nos permite decidir, en algunos casos, si la función alcanza un punto crítico un extremo *relativo*, pero *no* brinda información alguna sobre extremos globales.

Observemos que el criterio de la derivada segunda *no* asegura nada respecto de x_0 en el caso que $f''(x_0) = 0$.

Esto es, x_0 *puede o no* ser un extremo local de f, pero esta información *no se concluye de dicho resultado.* Si este es el caso ($f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$), habrá que analizar lo que ocurre en x_0 de otra manera (por ejemplo, estudiando el crecimiento de f a la derecha y a la izquierda de x_0).

Los siguientes ejemplos muestran que en ese caso puede ocurrir cualquier cosa.

Ejemplo 6.5.12. Sea $f(x) = x^3$. Entonces,

$$f'(x) = 3x^2 \text{ y } f''(x) = 6x.$$

Luego, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Dado que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, es claro que $x_0 = 0$ **no** es un extremo local de f.

Ejemplo 6.5.13. Sea $f(x) = x^4$. Entonces,

$$f'(x) = 4x^3 \text{ y } f''(x) = 12x^2.$$

Luego, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Es fácil ver que f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. Por lo tanto, $x_0 = 0$ es un **mínimo** global de f.

Ejemplo 6.5.14. Sea $f(x) = -x^4$. Entonces,

$$f'(x) = -4x^3 \text{ y } f''(x) = -12x^2.$$

Luego, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. Es fácil ver que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Por lo tanto, $x_0 = 0$ es un **máximo** global de f.

6.6. Problemas de máximos y mínimos

Veamos cómo los resultados relacionados con las derivadas de una función nos permiten resolver cierto tipo de problemas vinculados con el cálculo de un máximo o mínimo.

Ejemplo 6.6.1. El dueño de un campo desea cercar, con 100 mts. de alambre, una porción rectangular del terreno de manera tal que el área cercada sea máxima. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del rectángulo a cercar?

Llamemos R al rectángulo a cercar y a, b a las medidas de sus lados como se muestra en la figura 6.3. Dado que quiere cercar R con 100 mts. de alambre, resulta que el perímetro de R debe ser 100. Esto es, $2a + 2b = 100$. ①

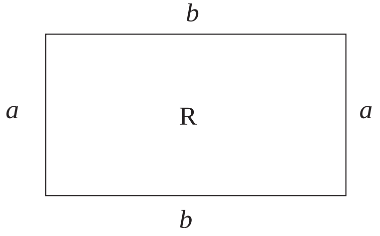


Figura 6.3: Ejemplo 6.6.1.

Es claro que el área de R depende de los parámetros a y b. Su valor es

$$\text{Área de R} = \text{A}(a, b) = a \cdot b. \quad ②$$

O sea, A es una función de *dos* variables a la cual queremos hallarle un valor máximo (esto es, valores a y b para los cuales $\mathrm{A}(a, b)$ sea el máximo posible).

Ahora bien, como no hemos hablado en este libro de funciones de dos variables, en principio, no sabemos resolver este problema planteado de esta manera. Sin embargo, la condición ① nos da una información adicional: los valores a y b están relacionados entre sí. Por ejemplo

$$2b = 100 - 2a \Rightarrow b = 50 - a. \quad ③$$

Reemplazando ③ en ② resulta que

$$\text{Área de R} = \mathrm{A}(a) = a \cdot (50 - a) = -a^2 + 50a. \quad ④$$

Ahora sí, resolver nuestro problema equivale a hallar el valor a máximo de la función A (de *una* variable) dada por ④. Una vez hallado a, el valor b se deduce de ③.

Por ser un polinomio, A es derivable en $\mathbb{R}$. Luego, por el Teorema de Fermat, si a es un máximo de A, debe ser

$$\mathrm{A}'(a) = 0.$$

es decir

$$\mathrm{A}'(a) = -2a + 50 = 0 \Rightarrow 2a = 50 \Rightarrow a = 25. \quad ⑤$$

Pero esto no alcanza. Recordemos que el hecho que $A'(25) = 0$ no garantiza que $a = 25$ sea un extremo (mucho menos un máximo). Sólo es un “candidato” a ser extremo. Para tratar de determinar si lo es, y si es un máximo o un mínimo, podemos utilizar el criterio de la derivada segunda; pero esto sólo nos da información *local* y nosotros estamos interesados en este caso determinar, si existe, un máximo, absoluto.

Dado que encontramos un *único* punto crítico, podemos aplicar la observación 6.5.9. Como $A'(x) = -2a + 50$, es claro que

$$A'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 25 \quad \text{y} \quad A'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 25.$$

Luego, por la proposición 6.5.3, A crece en $a < 25$ y decrece en $a > 25$; por lo tanto, por 6.5.9, A tiene en $a = 25$ un máximo global.

Por ③, tenemos que las medidas de los lados deben ser

$$a = 25 \quad \text{y} \quad b = 25.$$

En este caso, el área (máxima) cercada es $A(25) = 625$ mts^2.

Observemos que el problema no está definido en todo $\mathbb{R}$, ya que a y b son las medidas de los lados del rectángulo, y entonces a tiene que ser mayor que cero. Como, por otro lado,

$$b = 50 - a.$$

y también b debe ser positivo, debe ser $a \leq 50$. Nuestra función $\mathrm{A}(a)$ está definida entonces en $[0, 50]$. No obstante, A no puede tener un máximo global en los extremos del intervalo por una cuestión de crecimiento. Con toda seguridad en uno de estos extremos (o aún en los dos) A tendrá un mínimo global pero eso no nos interesa en este momento. ✓

Observemos que hemos resuelto este problema aplicando “toda la batería” de funciones que hemos visto hasta ahora. Sin embargo, podemos decir que, en este caso, “hemos matado una hormiga con un cañón”. En efecto. Teniendo en cuenta que A (por ④) es una función cuadrática cuyo gráfico es una parábola invertida, es claro (por su simetría) que el valor máximo lo toma en (la coordenada x de) su vértice. Esto es, en

$$a = \tfrac{-50}{-2} = 25.$$

Ejemplo 6.6.2. Hallar el rectángulo de área máxima inscripto en la circunferencia de centro 0 y radio 1 (recordar la ecuación de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$).

Llamemos $2x$ y $2y$ a los lados del rectángulo. Luego el área del rectángulo esta dada por

$$\mathrm{A}(x, y) = 4 \cdot x \cdot y. \quad \text{①}$$

Que el rectángulo esté inscripto en la circunferencia significa que sus vértices pertenecen a la circunferencia.

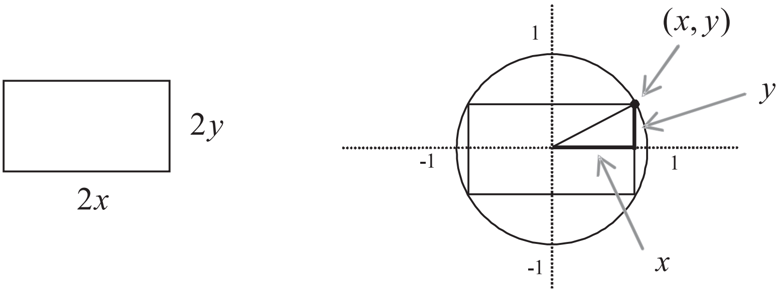


Figura 6.4: Ejemplo 6.6.2.

Observando la figura 6.4, es claro que x e y (la mitad de las longitudes de los lados del rectángulo) verifican que

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Luego,

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

pero teniendo en cuenta que $x, y \geq 0$ (son longitudes), resulta que

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{②} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 - x^2}. \quad \text{③}$$

Reemplazando ③ en ①, el área del rectángulo está dada por

$$\mathrm{A}(x) = 4 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{con } 0 \leq x \leq 1. \quad \text{④}$$

Luego, el problema se reduce a calcular el valor máximo x de la función A dada por ④. Una vez hallado x, el valor y se deduce de ③. Por ② y ④ resulta que A es derivable (composición y producto de derivables) en $(0,1)$. Por el Teorema de Fermat, si $x \in (0,1)$ es un máximo de A, debe ser

$$\mathrm{A}'(x) = 0,$$

o sea

$$\begin{aligned} \mathrm{A}'(x) &= 4 \cdot \sqrt{1-x^2} + 4x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \\ &= 4 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4 \cdot (1-x^2) - 4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-8x^2+4}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathrm{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x^2+4}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow -8x^2+4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como $-\frac{1}{\sqrt{2}} \notin (0,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$ resulta que el único "candidato" a ser máximo de A es

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}. \quad ⑤$$

Dado que A tiene un *único* punto crítico en $(0,1)$, podemos determinar si es la solución o no de nuestro problema estudiando el crecimiento de A. Para esto, determinemos $C_+(A')$ y $C_-(A')$. Para esto, podemos proceder como en el ejemplo anterior, es decir resolvemos las inecuaciones $A'(x) > 0$ y $A'(x) < 0$, o utilizar el Teorema de Bolzano (más precisamente, la proposición 4.6.1). Tomemos este segundo camino.

Primero, A' es continua en $(0,1)$ y tiene una única raíz en ese intervalo: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Recordemos que la otra raíz no nos preocupa pues la naturaleza del problema hace que sólo nos interese lo que ocurre en $(0,1)$).

Entonces, por Bolzano, A' tiene el mismo signo en todos los puntos de $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, por ejemplo el mismo signo que $A'(\frac{1}{2})$ y también tiene el mismo signo en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$, por ejemplo el mismo signo que $A'(\frac{3}{4})$. Luego,

$$A'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} > 0 \Longrightarrow A'(x) > 0 \quad \text{en} \quad \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y

$$A'\left(\tfrac{3}{4}\right) = \frac{-8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} < 0 \Longrightarrow A'(x) < 0 \quad \text{en} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right).$$

Por lo tanto, A crece a la izquierda de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y decrece a la derecha; luego A tiene un máximo global en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Aquí vale la misma observación del problema anterior: $x = 0$ ó $x = 1$ podrían ser máximos. Pero, por el estudio del crecimiento de A en $(0,1)$, descartamos esa posibilidad.)

Usando ③, $y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, el rectángulo de área máxima inscripto en la circunferencia de centro 0 y radio 1 es un cuadrado de lado $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. ✓

Ejemplo 6.6.3. Hallar dos números no negativos a y b cuyo producto sea mínimo sabiendo que $a + b = 1$.

Queremos minimizar el producto

$$P(a, b) = a \cdot b$$

teniendo en cuenta que a, $b \geq 0$ y la condición:

$$a + b = 1.$$

Despejando en esta última,

$$b = 1 - a,$$

y reemplazando, el producto está dada por

$$\mathrm{P}(a) = a \cdot (1 - a) = a - a^2.$$

Luego, el problema se reduce a calcular el valor mínimo a de la función P en el intervalo $[0, 1]$, ya que si a fuera mayor que 1, b sería negativo. Por el Teorema de Fermat, si a es un mínimo de P, debe ser

$$\mathrm{P}'(x) = 0,$$

o sea

$$\mathrm{P}'(x) = 1 - 2a = 0.$$

Luego,

$$a = \frac{1}{2}$$

es el único punto crítico de P. Teniendo en cuenta una vez más el corolario 6.5.9, tenemos que

$$P'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad P'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a > \frac{1}{2}\,.$$

Por lo tanto P crece en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, decrece en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y entonces tiene en $a = \frac{1}{2}$ un máximo global.

¿Quiere decir esto que la función P no tiene un mínimo? No. Recordemos que no estamos trabajando en todo $\mathbb{R}$, sino en el intervalo $[0, 1]$ y que P es continua en este intervalo; en estas condiciones, el Teorema de Weierstrass (ver página 108) asegura que P tiene tanto un máximo global como un mínimo global.

Ahora bien; ¿en qué punto está el mínimo? Claramente no puede estar en el intervalo $(0, 1)$, si lo estuviese, la derivada de P debería anularse, pero sólo se anula en $x = \frac{1}{2}$ y en ese punto alcanza un máximo; así que es seguro el mínimo absoluto se alcanza en uno de los extremos del intervalo. Para determinar en cúal, simplemente evaluamos la función y nos fijamos en que punto obtenemos el menor resultado. Tenemos que

$$\mathrm{P}(0) = 0,$$

$$\mathrm{P}(1) = 0,$$

con lo cual, el mínimo global se alcanza $a = 0$ y $a = 1$; por lo tanto, el par de números buscados es $a = 0$ y $b = 1$ o bien $a = 1$ y $b = 0$. En resumen, la respuesta al problema es: uno de los números es 0 y el otro 1. ✓

Ejemplo 6.6.4. Probar que, para todo $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Recordemos que ya hemos demostrado esta desigualdad, para $x > 0$ utilizando el Teorema de Lagrange.

Sea f dada por

$$f(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Luego, $Dom(f) = (-1, +\infty)$ y, por ser composición y resta de funciones derivables, f es derivable en $(-1, +\infty)$. Ahora bien,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{1 - (1 + x)}{1 + x} = \frac{-x}{1 + x} .$$

Como $1 + x > 0$, para todo $x \in (-1, +\infty)$, resulta que

$$f'(x) = \frac{-x}{1 + x} > 0, \ \ \forall x \in (-1, 0) \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{-x}{1 + x} < 0, \ \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Deducimos que $x = 0$ es un máximo **absoluto** de f y entonces

$$f(x) \leq f(0) \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + x) - x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + x) \leq x. \ \ \checkmark$$

Ejemplo 6.6.5. Una empresa desea fabricar una caja con tapa y de base cuadrada de 128 cm^3 de volumen. Para la fabricación de la tapa y el fondo se utilizará un material que cuesta \$0, 4 el cm^2 y para la fabricación de los laterales otro material cuyo precio de costo es de \$0, 2 el cm^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja (longitud del lado de la base y altura) para que su precio de costo sea mínimo?

Sea x la longitud de los lados de la base (y tapa) de la caja e y la longitud de su altura (ver la figura 6.5). El volumen de la caja está dado por $\mathrm{V} = x^2 \cdot y$ (área de la base por la altura). Como se quiere que el volumen sea de 128 cm^3, resulta que

$$x^2 \cdot y \ = 128. \quad ①$$

Dado que el área de la base (y de la tapa) es x^2, el costo de la base (y de la tapa) es de $\$0,4 \cdot x^2$. Dado que el área de cada lateral de la caja es $x \cdot y$, el costo de cada lateral es de $\$0,2 \cdot x \cdot y$.

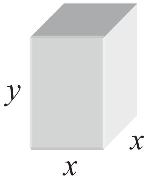


Figura 6.5: Ejemplo 6.6.5.

Luego, el costo de cada caja (base + tapa + 4 laterales) esta dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(x,y) &= 2\cdot(0,4)\cdot x^2 + 4\cdot(0,2)\cdot x\cdot y = (0,8)\cdot x^2 + (0,8)\cdot x\cdot y = \\ &= (0,8)\cdot(x^2 + x\cdot y) = \tfrac{8}{10}\cdot(x^2+x\cdot y) = \tfrac{4}{5}\cdot(x^2+x\cdot y). \quad ② \end{aligned}$$

De ①,

$$y = \tfrac{128}{x^2}. \quad ③$$

Reemplazando ③ en ①, resulta que el costo de la caja esta dado por

$$\mathrm{C}(x) = \tfrac{4}{5}\cdot\left(x^2 + x\cdot\tfrac{128}{x^2}\right) = \tfrac{4}{5}\cdot\left(x^2+\tfrac{128}{x}\right). \quad ④$$

Se quiere entonces hallar un valor x mínimo de C. Es claro que $x > 0$ (x es una longitud y si $x = 0$ no hay caja). Como C es derivable en $(0, +\infty)$ podemos tratar de aplicar el corolario 6.5.9. Ahora bien,

$$\mathrm{C}'(x) = \frac{4}{5}\cdot\left(2x - \frac{128}{x^2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{2x^3-128}{x^2}.$$

Entonces,

$$\mathrm{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{2x^3-128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 = 64 \quad\Leftrightarrow\quad x = 4. \quad ⑤$$

Por lo tanto, $x = 4$ es el único punto crítico de C en $(0, +\infty)$. Por Bolzano, como $C'(1) < 0$ y $C'(5) > 0$, tenemos que

$$C'(x) < 0 \iff x \in (0,4) \qquad \text{y} \qquad C'(x) > 0 \iff x \in (4, +\infty).$$

y, por 6.5.4, $x = 4$ es un mínimo global de C. Luego, de ③,

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 8\ .$$

En definitiva, para que el costo sea mínimo, se debe fabricar una caja de 8 cm. de altura con base y tapa cuadrada de 4 cm. de longitud cada uno de sus lados. ✓

6.7. Curvatura

Recordemos (capítulo 5) que, si f es derivable en x_0, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 es

$$RT: \qquad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Definiciones 6.7.1.

Sea f derivable en x_0. Decimos que:

- *f es* **cóncava hacia arriba**[*] *en x_0 (o bien que tiene* **curvatura positiva en** *x_0) si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$*

  $$f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)) > 0.$$

  El gráfico de f se encuentra por arriba de la recta tangente "cerca" de x_0 (ver figura 6.6).

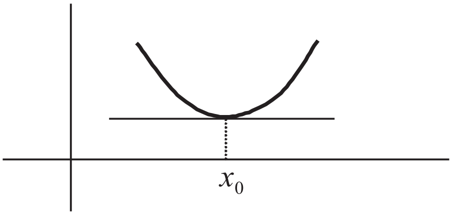


Figura 6.6: f es cóncava hacia arriba.

- *f es* **cóncava hacia abajo**[†] *en x_0 (o bien que tiene* **curvatura negativa en** *x_0) si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$*

  $$f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)) < 0.$$

  El gráfico de f se encuentra por debajo de la recta tangente "cerca" de x_0 (ver figura 6.7).

Sea f derivable en $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que:

- *f tiene* **curvatura positiva** *en A si f tiene curvatura positiva en x_0, $\forall x_0 \in A$.*
- *f tiene* **curvatura negativa** *en A si f tiene curvatura negativa en x_0, $\forall x_0 \in A$.*

Proposición 6.7.2. *Sea f derivable en (a, b). Entonces*

1. *f tiene curvatura positiva en (a, b) $\Leftrightarrow$ f' es estrictamente creciente en (a, b).*

---

[*] En algunos textos también se la llama *cóncava.*

[†] También llamada *convexa.*

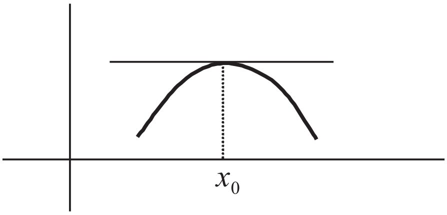


Figura 6.7: f es cóncava hacia abajo.

2. *f tiene curvatura negativa en (a, b) $\Leftrightarrow$ f' es estrictamente decreciente en (a, b).*

Definición 6.7.3. *Sean f definida en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$. Decimos que x_0* **es un punto de inflexión de** *f si f cambia su curvatura en x_0, es decir, pasa de curvatura positiva a negativa o viceversa (ver figura 6.8).*

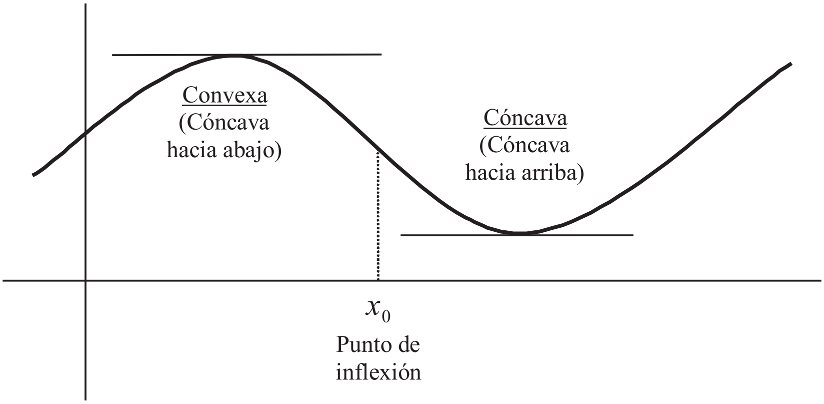


Figura 6.8: En el punto x_0 cambia la curvatura de f.

Proposición 6.7.4. *Sea f dos veces derivable en (a, b) (es decir, existen $f'(x)$ y $f''(x)$, para todo $x \in (a, b)$). Entonces*

1. *$f''(x) > 0, \ \forall\, x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f tiene curvatura positiva en (a, b) (f es $\cup$).*
2. *$f''(x) < 0, \ \forall\, x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f tiene curvatura negativa en (a, b) (f es $\cap$).*
3. *f tiene curvatura positiva en (a, b) $\Rightarrow$ $f''(x) \geq 0, \ \forall\, x \in (a, b)$.*
4. *f tiene curvatura negativa en (a, b) $\Rightarrow$ $f''(x) \leq 0, \ \forall\, x \in (a, b)$.*

Demostración. Deducimos el resultado de la proposición 6.7.2 y la proposición 6.5.3 teniendo en cuenta que $f'' = (f')'$. □

Ejemplo 6.7.5. Sea, $f(x) = x^3$. Luego, $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$.

Es claro entonces que $f''(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ y $f''(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Luego, f tiene curvatura negativa en $(-\infty, 0)$ (f es $\cap$) y f tiene curvatura positiva en $(0, +\infty)$ (f es $\cup$). Entonces $x = 0$ es un punto de inflexión (el único).

Proposición 6.7.6. *Sea f dos veces derivable en (a, b) (existen $f'(x)$ y $f''(x)$, para todo $x \in (a, b)$). Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto de inflexión de f. Entonces $f''(x_0) = 0$.*

Demostración. Por ser x_0 un punto de inflexión (definición 6.7.3) f cambia su curvatura en x_0.

Supongamos que f tiene curvatura positiva en (a, x_0) y curvatura negativa en (x_0, b) (la demostración en el otro caso es análoga).

Luego, por la proposición 6.7.2, f' es estrictamente creciente en (a, x_0) y f' es estrictamente decreciente en (x_0, b). Entonces,

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$$

y, por lo tanto,

$$f'(x) - f'(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b). \quad ①$$

Como f' es derivable en x_0,

$$f''(x_0) = f''_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}, \quad ②$$

y

$$f''(x_0) = f''_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \quad ③$$

Ahora bien:
Si $x \to x_0^+ \Rightarrow x - x_0 > 0$. Luego, por ① y ②,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} f''(x_0) = f''_+(x_0) \leq 0. \quad ④$$

Si $x \to x_0^- \Rightarrow x - x_0 < 0$. Luego, por ① y ③,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} f''(x_0) = f''_-(x_0) \geq 0. \quad ⑤$$

(En $(*)$ hemos usado la proposición 3.1.7 del capítulo 3).

Luego, de ④ y ⑤,

$$f''(x_0) = 0.$$

□

Observación 6.7.7. La recíproca de la proposición 6.7.6 es **falsa**. Esto es,

$$f''(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad x_0 \text{ es un punto de inflexión.}$$

Por ejemplo, sea f dada por $f(x) = x^4$. Luego, $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. Por lo tanto,

$$f''(0) = 0.$$

Sin embargo, como

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

por la proposición 6.7.4, f tiene curvatura positiva en todo $\mathbb{R}$.

Entonces, $f''(0) = 0$ y $x = 0$ no es un punto de inflexión (es un mínimo). ✓

6.8. Asíntotas

Definiciones 6.8.1. *Sean f una función real y $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Una recta (vertical) de ecuación $x = a$ se dice una* **asíntota vertical** *de f si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

2. *Una recta (vertical) de ecuación $x = a$ se dice una* **asíntota vertical** *de f por la* **derecha** *si*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

Análogamente se define una asíntota vertical por la izquierda.

3. *Una recta de ecuación $y = mx + b$ se dice una* **asíntota no vertical** *de f en $+\infty$ si*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + b) = 0.$$

Análogamente se define una asíntota no vertical de f en $-\infty$.

4. *Una asíntota no vertical de f de ecuación $y = mx + b$ se dice una* **asíntota horizontal** *si $m = 0$, y* **oblicua** *si $m \neq 0$.*

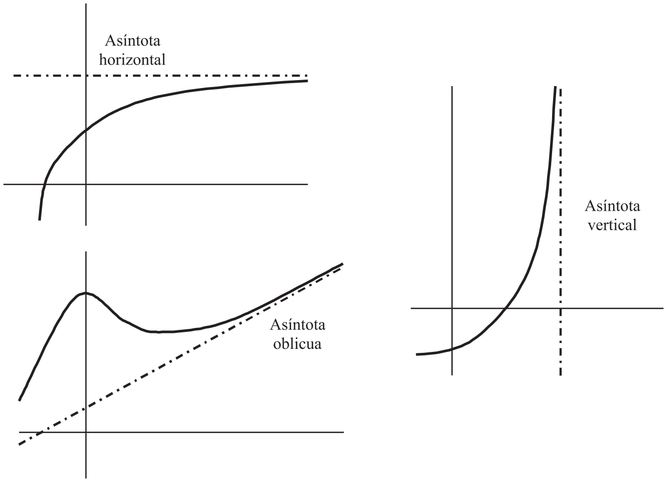


Figura 6.9: Los distintos tipos de asíntotas .

Observación 6.8.2. Sea f una función real. Es claro que si $x = a$ es una asíntota vertical de f, entonces f no es continua en $x = a$. Por lo tanto, las posibles asíntotas verticales de una función sólo pueden producirse en los puntos de discontinuidad de la misma. Sin embargo, una función puede ser discontinua en un punto y *no* tener asíntota vertical en ese punto.

Ejemplo 6.8.3. Sea

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Luego f no es continua en $x = 1$. Sin embargo

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq \infty.$$

Por lo tanto $x = 1$ no es una asíntota vertical de f.

Tratemos de encontrar condiciones para la existencia de asíntotas no verticales en $+\infty$ de f (el proceso es similar en $-\infty$).

Supongamos que $y = mx + b$ es una asíntota no vertical en $+\infty$ de f. Luego, por las definiciones,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+b) = 0\ ,$$

o sea

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx - b = 0. \quad ①$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, por ① y recordando que $\frac{0}{\infty} = 0$, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-mx-b}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right) = 0. \quad ②$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$, por ②

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0. \quad ③$$

Por último, como $\lim\limits_{x\to+\infty} m = m$, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Por lo tanto la primera condición que encontramos para que $y = mx + b$ sea una asíntota no vertical en $+\infty$ de f es que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m. \quad ④$$

La primera conclusión importante que obtenemos es:

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ *no existe o es* ∞ , f *no posee asíntota no vertical en* $+\infty$.

Ahora bien, el hecho que se verifique ④ no garantiza aún que f posea asíntota no vertical en $+\infty$.

Suponiendo que se verifica ④, reemplazando en ① el valor m hallado en ④ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to+\infty} b = b$, resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = b.$$

Por lo tanto la segunda condición que encontramos para que $y = mx + b$ sea una asíntota no vertical de f en $+\infty$, si se verificó la primera (④), es que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = b. \quad ⑤$$

La segunda conclusión importante que obtenemos es:

Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx$ *no existe o es* ∞*,* f *no posee asíntota no vertical en* $+\infty$*.*

Teniendo en cuenta estos hechos, para analizar la existencia de asíntota no vertical en $+\infty$ de f debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
    - Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ no existe o es ∞, f no posee asíntota no vertical en $+\infty$ y aquí termina el análisis. ✓
    - Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (existe y es finito), el valor m es el candidato a ser la pendiente de la asíntota (todavía no podemos asegurar que haya asíntota) y pasamos al siguiente punto. ✓
2. Calcular el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx$.
    - Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx$ no existe o es ∞, f no posee asíntota no vertical en $+\infty$ y aquí termina el análisis. ✓
    - Si el $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b$ (existe y es finito), entonces f posee asíntota no vertical en $+\infty$ de ecuación $y = mx + b$ (m es el valor hallado en el ítem anterior) y aquí termina el análisis. ✓

Los pasos seguidos *deben repetirse* cambiando $+\infty$ por $-\infty$ para analizar la existencia (y calcularla en caso afirmativo) de asíntota no vertical en $-\infty$.

Nota 6.8.4. La existencia o no de asíntotas no verticales en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función son hechos independientes. Por ejemplo una función puede no tener asíntotas no verticales ni en $+\infty$ ni en $-\infty$, o tener una asíntota no vertical en $+\infty$ y no tener asíntota no vertical en $-\infty$, etc .

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 6.8.5. Sea f definida por

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{3x^2} \,.$$

Calculemos sus asíntotas.

Asíntotas verticales

Como es continua f en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y **no** es continua en 0, la recta vertical de ecuación $x = 0$ es la única candidata a ser asíntota vertical de f. Teniendo en cuenta el punto *1* de las definiciones 6.8.1, como

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{3x^2} = +\infty \,,$$

la recta $x = 0$ es asíntota vertical de f.

Asíntotas no verticales

En $+\infty$**:** Comenzamos planteando

1.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^3+3x^2-x+2}{3x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{3x^3} = \frac{2}{3} \,.$$

   Luego, $m = \frac{2}{3}$ es el candidato a ser la pendiente de la asíntota no vertical (en el caso que exista) de f en $+\infty$.

2.
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3+3x^2-x+2}{3x^2} - \frac{2}{3}x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3+3x^2-x+2-2x^3}{3x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2-x+2}{3x^2} \right) = 1.$$

Luego, f posee asíntota oblicua en $+\infty$ de ecuación $y = \frac{2}{3}\, x + 1$.

En $-\infty$**:** Planteamos

1.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x^3+3x^2-x+2}{3x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{3x^3} = \frac{2}{3} \,.$$

   Entonces, $m = \frac{2}{3}$ es el candidato a ser la pendiente de la asíntota no vertical (en el caso que exista) de f en $-\infty$.

2.
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^3+3x^2-x+2}{3x^2} - \frac{2}{3}x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^3+3x^2-x+2-2x^3}{3x^2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2-x+2}{3x^2} \right) = 1.$$

Por lo tanto, f posee asíntota oblicua en $-\infty$ de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Observemos que f posee asíntotas oblicuas en $+\infty$ y en $-\infty$ y, en este caso particular, ambas coinciden.

Ejemplo 6.8.6. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x} & \text{si} \quad x > 0, \\ \frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Calculemos sus asíntotas.

Asíntotas verticales:

Es claro que f es continua en $R_{\neq 0}$. Estudiemos la continuidad de f en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1} = 2.$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x + 1}{x} = +\infty.$$

Luego, f no es continua en 0 y, por el punto *2* de las definiciones 6.8.1, $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha de f (pero no por la izquierda).

Asíntotas no verticales:

En $+\infty$: Comenzamos planteando

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+x+1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1.$$

   Luego, $m = 1$ es el candidato a ser la pendiente de la asíntota no vertical (en el caso que exista) de$f$ en $+\infty$.

2. $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - x \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1 - x^2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 1}{x} \right) = 1. \end{aligned}$$

Luego, f posee asíntota oblicua en $+\infty$ de ecuación $y = x + 1$.

En $-\infty$: Planteamos

1.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2+2}{x^3+x}=2.$$
Luego, $m=2$ es el candidato a ser la pendiente de la asíntota no vertical (en el caso que exista) de f en $-\infty$.

2.
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2+2}{x^2+1}-2x\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2+2-2x^3-2x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2-2x+2}{x^2+1}\right)=-1.$$

Luego, f posee asíntota oblicua en $-\infty$ de ecuación $y=2x-1$.

Observemos que f posee asíntotas oblicuas en $+\infty$ y en $-\infty$ y, en este caso, no coinciden.

6.9. Estudio completo de una función

Veamos cómo, dada una función, los resultados enunciados nos permiten realizar, lo que comúnmente se denomina, el *estudio de la función*, es decir, realizar un análisis lo más completo posible del comportamiento de la función para, con esos datos, realizar un gráfico aproximado.

Más precisamente, realizar el estudio de una función real dada f, significa obtener la siguiente información:

- Dominio de f.
- Conjuntos de positividad, negatividad y ceros de f: $C_+(f)$, $C_-(f)$ y $C_0(f)$.
- Paridad o imparidad de f.
- Continuidad de f, calculando y clasificando sus puntos de discontinuidad.
- Derivabilidad de f, incluyendo derivada segunda.
- Puntos críticos de f.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
- Cálculo y clasificación de los extremos de f (máximos y mínimos).
- Intervalos de curvatura positiva y curvatura negativa de f.
- Puntos de inflexión de f.
- Existencia de asíntotas de f y, si existen, cálculo de sus ecuaciones.
- Toda otra información que nos parezca útil.

Ejemplo 6.9.1. Sea f dada por

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x\ .$$

Es claro que $Dom(f) = \mathbb{R}$, ① y que f es derivable (y continua) en $\mathbb{R}$. ②

Calculemos $C_0(f)$:

Como

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x = \tfrac{1}{4}x \cdot (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = \tfrac{1}{4}x \cdot (x-4)^3,$$

resulta que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}x \cdot (x-4)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Luego,

$$C_0(f) = \{0, 4\}\ . \quad ③$$

Calculemos $C_+(f)$ y $C_-(f)$.

Como f es continua en $\mathbb{R}$, para su cálculo, podemos utilizar el Teorema de Bolzano.

- Como $f(-1) > 0$ y f no posee raíces en $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0) \subset C_+(f)$.
- Como $f(1) < 0$ y f no posee raíces en $(0, 4)$, $(0, 4) \subset C_-(f)$.
- Como $f(5) > 0$ y no posee raíces en $(4, +\infty)$, $(4, +\infty) \subset C_+(f)$.

Por lo tanto,

$$C_+(f) = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \quad \text{y} \quad C_-(f) = (0, 4)\ . \quad ④$$

Es claro también que f no es ni par ni impar. ⑤

Calculemos los puntos críticos de f.

Como f es derivable en $\mathbb{R}$, por la definición 6.5.6, $PC(f) = C_0(f')$. Como

$$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-1) \cdot (x-4)^2,$$

resulta que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4.$$

Luego,

$$PC(f) = C_0(f') = \{1, 4\}\ . \quad ⑥$$

Calculemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Recordando la proposición 6.5.3, debemos calcular $C_+(f')$ y $C_-(f')$.

Teniendo en cuenta que, en este caso, f' es continua en $\mathbb{R}$ (esto no es cierto para cualquier función), podemos aplicar nuevamente el Corolario del Teorema de Bolzano a f' para calcular $C_+(f')$ y $C_-(f')$.

- Como $f'(0) < 0$ y f' no posee raíces en $(-\infty, 1)$, $(-\infty, 1) \subset C_-(f')$.
- Como $f'(2) > 0$ y f' no posee raíces en $(1, 4)$, $(1, 4) \subset C_+(f')$.

- Como $f'(5) > 0$ y f' no posee raíces en $(4, +\infty)$, $(4, +\infty) \subset C_+(f')$.

Entonces,

$$C_-(f') = (-\infty, 1) \quad \text{y} \quad C_+(f') = (1, 4) \cup (4, +\infty).$$

Luego, por la proposición 6.5.3,

$$f \quad \text{es estrictamente decreciente (} f \text{ es } \searrow \text{) en } (-\infty, 1)$$
$$\text{y}$$
$$f \quad \text{es estrictamente creciente (} f \text{ es } \nearrow \text{) en } (1, 4) \cup (4, +\infty). \quad ⑦$$

Por ⑦ y la definición 4.5.2 del capítulo 4,

$$x = 1 \text{ es un mínimo local de } f \text{ .} \quad ⑧$$

Observemos que $x = 4$ no es un extremo de f por más que sea un punto crítico.

Calculemos los intervalos de curvatura positiva y curvatura negativa de f.

Como f es dos veces derivable (por ser f' un polinomio), para aplicar la proposición 6.7.4, debemos calcular $C_+(f'')$ y $C_-(f'')$.

$$f''(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

Teniendo en cuenta que, en este caso, f'' es continua en $\mathbb{R}$ (esto no es cierto para cualquier función), podemos aplicar el Corolario del Teorema de Bolzano para calcular $C_+(f'')$ y $C_-(f'')$.

Para ello, calculamos primero $C_0(f'')$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = 4.$$

- Como $f''(0) > 0$ y f'' no posee raíces en $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 2) \subset C_+(f'')$.
- Como $f''(3) < 0$ y f'' no posee raíces en $(2, 4)$, $(2, 4) \subset C_-(f'')$.
- Como $f''(5) > 0$ y f'' no posee raíces en $(4, +\infty)$, $(4, +\infty) \subset C_+(f'')$.

Luego,

$$C_+(f'') = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \quad \text{y} \quad C_-(f'') = (2, 4).$$

Entonces, por la proposición 6.7.4,

$$f \quad \text{tiene curvatura negativa (} f \text{ es } \cap\text{) en } (2, 4)$$
$$\text{y}$$
$$f \quad \text{tiene curvatura positiva (} f \text{ es } \cup\text{) en } (-\infty, 2) \cup (4, +\infty). \quad ⑨$$

Luego, por ⑨ y la definición 6.7.3, $x = 2$ y $x = 4$ son puntos de inflexión de f . ⑩

También podríamos haber usado el criterio del signo de la derivada segunda (Criterio de la derivada segunda) para tratar de clasificar los puntos críticos de f.

Recordemos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ o $x = 4$.

Como $f''(1) > 0$, por la proposición 6.5.10, podemos asegurar que $x = 1$ es un mínimo local de f.

Como $f''(4) = 0$ no podemos utilizar la proposición 6.5.10 pero acabamos de ver que $x = 4$ es un punto de inflexión de f.

Estudiemos la existencia de asíntotas de f.

Como (①) f es continua en $\mathbb{R}$, por la observación 6.8.2, f no posee asíntotas verticales.

Por otra parte, como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 12x - 16 = -\infty,$$

$$f \text{ no posee asíntotas no verticales ni en } +\infty \text{ ni en } -\infty\,.$$

Por último, dado que f no posee asíntotas no verticales, para conocer el comportamiento de f en $+\infty$ y en $-\infty$, es útil conocer sus límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x = +\infty.$$

Hemos concluido la recopilación de la información necesaria para realizar un gráfico aproximado de f. Considerando todos los puntos "especiales" (puntos de discontinuidad, de no derivabilidad, críticos, de inflexión, etc.) que surgieron en el estudio de f, es conveniente subdividir el $Dom(f)$ como unión disjunta de intervalos con extremos dichos puntos.

En este caso particular dichos puntos especiales son (por ③, ⑥ y ⑩) $x = 0, 1, 2$ y 4. Es útil volcar en una tabla la información obtenida en ① a ⑩ como se muestra en el cuadro 6.1.

$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 4)$
$f > 0$	$f(0) = 0$	$f < 0$	$f(1) = -\frac{27}{4}$	$f < 0$	$f(2) = -4$	$f < 0$
f es $\searrow$		f es $\searrow$	mínimo	f es $\nearrow$	pto. de inflexión	f es $\nearrow$
f es $\cup$		f es $\cup$		f es $\cup$		f es $\cap$

Cuadro 6.1: Recopilamos la información.

4	$(4, +\infty)$
$f(4) = 0$	$f > 0$
pto. de inflexión	f es $\nearrow$
	f es $\cup$

Cuadro 6.2: Más información.

Teniendo en cuenta la información obtenida, el gráfico aproximado de f es el que se muestra en la figura 6.10.

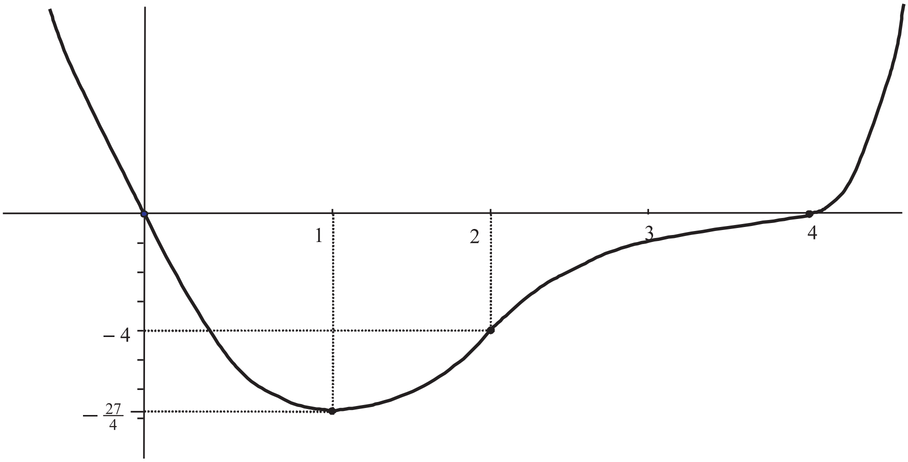


Figura 6.10: Ejemplo 6.9.1.

(Consideramos escalas distintas en los ejes para que el gráfico resulte más claro).

Ejemplo 6.9.2. Sea f dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}\ .$$

Como

$$x^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=1 \;\Leftrightarrow\; |x|=1 \;\Leftrightarrow\; x=-1 \;\vee\; x=1,$$

resulta que

$$Dom(f) = \mathbb{R}-\{-1,1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty). \quad ①$$

Es claro que f es derivable (y por lo tanto continua) en su dominio, por ser cociente de polinomios. ②

Por otra parte,

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3=0 \;\Leftrightarrow\; x=0.$$

Por lo tanto

$$C_0(f) = \{0\}\,. \quad ③$$

Por ser f continua en $Dom(f) = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$, podemos aplicar el corolario de Teorema de Bolzano para determinar $C_+(f)$ y $C_-(f)$.

Como $f(-2)<0$ y f es continua y no posee raíces en $(-\infty,-1)$, $(-\infty,-1)\subset C_-(f)$.

Como $f(-\frac{1}{2})>0$ y f es continua y no posee raíces en $(-1,0)$, $(-1,0)\subset C_+(f)$.

Como $f(\frac{1}{2}) < 0$ y f es continua y no posee raíces en $(0,1)$, $(0,1) \subset C_-(f)$.

Como $f(2) > 0$ y f es continua y no posee raíces en $(1,+\infty)$, $(1,+\infty) \subset C_+(f)$.

Luego,

$$C_+(f) = (-1,0) \cup (1,+\infty) \quad \text{y} \quad C_-(f) = (-\infty,-1) \cup (0,1). \quad ④$$

Como

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x), \quad \forall x \in Dom(f),$$

resulta que

$$f \text{ es impar} \quad ⑤$$

y, por lo tanto, su gráfico será simétrico respecto del origen.

Como f es derivable en su dominio (②), $PC(f) = C_0(f')$.

Calculemos su derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Luego, al resolver la ecuación $f'(x) = 0$ tenemos

$$\frac{x^2 \cdot (x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -\sqrt{3} \;\vee\; x = \sqrt{3}.$$

Entonces,

$$PC(f) = \left\{-\sqrt{3}\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{3}\right\}. \quad ⑥$$

Por ser f' continua en $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$, podemos aplicar el corolario del Teorema de Bolzano para determinar el signo de f' y, por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

- Como $f'(-2) > 0$ y f' es continua y no posee raíces en $(-\infty,-\sqrt{3})$, resulta que $(-\infty,-\sqrt{3}) \subset C_+(f')$.
- Como $f'(-\frac{3}{2}) < 0$ y f' es continua y no posee raíces en $(-\sqrt{3},-1)$, resulta que $(-\sqrt{3},-1) \subset C_-(f')$.
- Como $f'(-\frac{1}{2}) < 0$ y f' es continua y no posee raíces en $(-1,0)$, resulta que $(-1,0) \subset C_-(f')$.
- Como $f'(\frac{1}{2}) < 0$ y f' es continua y no posee raíces en $(0,1)$, resulta que $(0,1) \subset C_-(f')$.
- Como $f'(\frac{3}{2}) < 0$ y f' es continua y no posee raíces en $(1,\sqrt{3})$, resulta que $(1,\sqrt{3}) \subset C_-(f')$.
- Como $f'(2) > 0$y f' es continua y no posee raíces en $(\sqrt{3},+\infty)$, resulta que $(\sqrt{3},+\infty) \subset C_+(f')$.

Luego,

$$C_-(f') = (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$$

y

$$C_+(f') = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

Por la proposición 6.5.3,

$$f \quad \text{es estrictamente decreciente } (f \text{ es } \searrow) \text{ en } (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$$

y

$$f \quad \text{es estrictamente creciente } (f \text{ es } \nearrow) \text{ en } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)\ . \quad ⑦$$

Luego, por ⑦ y la definición 4.5.2 del capítulo 4,

$$x = -\sqrt{3} \text{ es un máximo local de } f \quad \text{y} \quad x = \sqrt{3} \text{ es un mínimo local de } f\ . \quad ⑧$$

Observemos que $x = 0$ **no** es un extremo de f por más que sea un punto crítico.

Como f es dos veces derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, para calcular los intervalos de curvatura de f debemos calcular $C_+(f'')$ y $C_-(f'')$. Calculemos f''.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x) \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 1) \cdot \left[(4x^3 - 6x) \cdot \left(x^2 - 1\right) - 4x \cdot (x^4 - 3x^2)\right]}{\left(x^2 - 1\right)^4} = \\ &= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{\left(x^2 - 1\right)^3} = \\ &= \frac{2x^3 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^3} = \frac{2x \cdot (x^2 + 3)}{\left(x^2 - 1\right)^3}. \end{aligned}$$

Luego,

$$f''(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 3)}{\left(x^2 - 1\right)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Teniendo en cuenta que f'' es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, podemos aplicar nuevamente el corolario del Teorema de Bolzano a f'' para calcular $C_+(f'')$ y $C_-(f'')$.

- Como $f''(-2) < 0$ y f'' es continua y no posee raíces en $(-\infty, -1)$, resulta que $(-\infty, -1) \subset C_-(f'')$.
- Como $f''(-\frac{1}{2}) > 0$ y f'' es continua y no posee raíces en $(-1, 0)$, resulta que $(-1, 0) \subset C_+(f'')$.
- Como $f''(\frac{1}{2}) < 0$ y f'' es continua y no posee raíces en $(0, 1)$, resulta que $(0, 1) \subset C_-(f'')$.
- Como $f''(2) > 0$ y f'' es continua y no posee raíces en $(1, +\infty)$, resulta que $(1, +\infty) \subset C_+(f'')$.

Entonces,

$$C_-(f'') = (-\infty, -1) \cup (0,1) \text{ y } C_+(f) = (1, +\infty).$$

Luego, por la proposición 6.7.4,

$$\begin{gathered} f \text{ tiene curvatura negativa } (f \text{ es } \cap) \text{ en } (-\infty,-1) \cup (0,1) \\ \text{y} \\ f \text{ tiene curvatura positiva } (f \text{ es } \cup) \text{ en } (-1,0) \cup (1,+\infty). \quad ⑨ \end{gathered}$$

Luego, por ⑨ y la definición 6.7.3,

$$x = -1,\ x = 0 \text{ y } x = 1 \text{ son puntos de inflexión de } f\ . \quad ⑩$$

Analicemos la existencia de asíntotas de f.
Asíntotas verticales:

Como los puntos de discontinuidad de f son $x = 1$ y $x = -1$, éstas son las (únicas) rectas candidatas a ser asíntotas verticales. Calculemos los límites.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty\ .$$

Luego,

$$\text{Las rectas } x = -1 \text{ y } x = 1 \text{ son asíntotas verticales de } f. \quad ❶$$

Asíntotas no verticales:

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$$

y

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

resulta que

$$y = x \text{ es asíntota oblicua de } f \text{ en } +\infty \text{ y en } -\infty\ .❷$$

Resumamos en una tabla la información obtenida como en el cuadro 6.3 y el cuadro 6.4.

Teniendo en cuenta todo el estudio realizado y la información obtenida, el gráfico aproximado de f es el que se muestra en la figura 6.11.

Observación 6.9.3. En el caso de realizar un estudio de una función definida a trozos (partida), se debe prestar suma atención en que se está estudiando la función en su globalidad y no cada una de las expresiones en las que se divide la función.

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0
$f<0$	$f(-\sqrt{3})=$	$f<0$	A. vertical	$f>0$	$f(0)=0$
f es $\nearrow$	$=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	f es $\searrow$	pto. de inflexión	f es $\searrow$	pto. de inflexión
f es $\cap$	máximo	f es $\cap$		f es $\cup$	

Cuadro 6.3: Toda la información obtenida.

$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f<0$	A. vertical	$f>0$	$f(\sqrt{3})=$	$f>0$
f es $\searrow$	pto. de inflexión	f es $\searrow$	$=\frac{3}{2}\sqrt{3}$	f es $\nearrow$
f es $\cap$		f es $\cup$	mínimo	f es $\cup$

Cuadro 6.4: ... y más información ...

Ejemplo 6.9.4. Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-1} & \text{si} \quad x>1 \\ \\ \frac{1}{4}\,x^4-3x^3+12x^2-16x & \text{si} \quad x\leq 1. \end{cases}.$$

Cuando se busque la información mencionada en 6.9, se debe tener bien en claro que la información buscada se refiere a la función f y no a cada expresión que la compone. Es recomendable en estos casos realizar dos estudios paralelos.

- En $(1,+\infty)$, utilizando que $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$, pero teniendo en cuenta que toda la información que se obtenga debe ser intersecada con el conjunto $(1,+\infty)$.
- En $(-\infty,1)$, utilizando que $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2-16x$, pero teniendo en cuenta que toda la información que se obtenga debe ser intersecada con el conjunto $(-\infty,1)$.

Por último se analiza si el punto de corte $x=1$ posee alguna propiedad (extremo, punto de inflexión, asíntota vertical, etc.).

Por ejemplo, recordando el ejemplo 6.9.1 y el ejemplo 6.9.2, obtuvimos que

$$C_0\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=\{0\} \text{ y } C_0(\tfrac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2-16x)=\{0,4\}.$$

Sin embargo, como $0\notin(1,+\infty)$ y $4\notin(-\infty,1)$ es

$$C_0(f)=\emptyset \text{ en } (1,+\infty) \quad \text{y} \quad C_0(f)=\{0\} \text{ en } (-\infty,1).$$

Luego,

$$C_0(f)=\{0\}.$$

Realicemos el estudio de f aprovechando que ya hemos hecho el estudio de cada una de las expresiones (en todo su dominio) que posee f en los ejemplos anteriores.

Es claro que

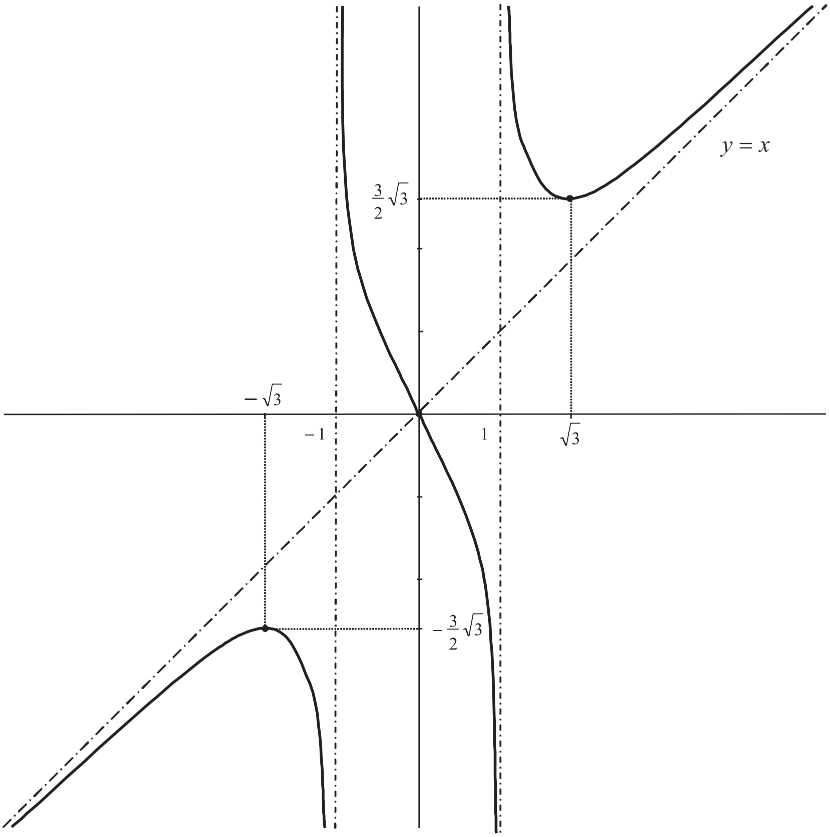


Figura 6.11: Ejemplo 6.9.2.

$$Dom(f) = \mathbb{R} \text{ y que } f \text{ es derivable (y, por lo tanto, continua) en } \mathbb{R}_{\neq 1}$$

Además, como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, resulta que

$$f \text{ no es continua (y, por lo tanto, no es derivable) en } x = 1 \text{ .}$$

$\boxed{x > 1}$ Sabemos que si $x > 1$ entonces $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Restringiendo la información obtenida en el ejemplo 6.9.2 al intervalo $(1, +\infty)$, tenemos que:

- $C_0(f) = \emptyset,\ C_-(f) = \emptyset,\ C_+(f) = (1, +\infty)$.
- $PC(f) = \{\sqrt{3}\}$.
- f es estrictamente decreciente (f es $\searrow$) en $(1, \sqrt{3})$.
- f es estrictamente creciente (f es $\nearrow$) en $(\sqrt{3}, +\infty)$.
- $x = \sqrt{3}$ es un mínimo local de f.
- f tiene curvatura positiva (f es $\cup$) en $(1, +\infty)$.

- f no posee puntos de inflexión en $(1, +\infty)$.
- f no posee asíntotas verticales en $(1, +\infty)$.
- $y = x$ es asíntota oblicua de f en $+\infty$.

$\boxed{x < 1}$ Ahora si $x < 1$ la expresión de la función es $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x$. Restringiendo la información obtenida en el ejemplo 6.9.1 al intervalo $(-\infty, 1)$, tenemos que:

- $C_0(f) = \{0\}$, $C_-(f) = (0, 1)$, $C_+(f) = (-\infty, 0)$.
- $PC(f) = \emptyset$.
- f es estrictamente decreciente (f es $\searrow$) en $(-\infty, 1)$.
- f no posee extremos en $(-\infty, 1)$.
- f tiene curvatura positiva (f es $\cup$) en $(-\infty, 1)$.
- f no posee puntos de inflexión en $(-\infty, 1)$.
- f no posee asíntotas verticales en $(-\infty, 1)$.
- f no posee asíntotas no verticales en $-\infty$.

Postergando el análisis del punto $x = 1$ y uniendo la información obtenida en ambos casos, tenemos que:

- $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- f es derivable (y, por lo tanto, continua) en $R_{\neq 1}$.
- f no es continua (y, por lo tanto, no es derivable) en $x = 1$.
- $C_0(f) = \{0\}$, $C_-(f) = (0, 1)$, $C_+(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
- $PC(f) = \{1, \sqrt{3}\}$.
- f es estrictamente decreciente (f es $\searrow$) en $(-\infty, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.
- f es estrictamente creciente (f es $\nearrow$) en $(\sqrt{3}, +\infty)$.
- $x = \sqrt{3}$ es un mínimo local de f.
- f tiene curvatura positiva (f es $\cup$) en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
- f no posee puntos de inflexión en $\mathbb{R}_{\neq 1}$.
- f no posee asíntotas verticales en $\mathbb{R}_{\neq 1}$.
- $y = x$ es asíntota oblicua de f en $+\infty$.
- f no posee asíntotas no verticales en $-\infty$.

Por último, analizamos $x = 1$.

$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f > 0$	$f(0) = 0$	$f < 0$	$f(1) = -\frac{27}{4}$	$f > 0$	$f(-\sqrt{3}) =$ $= \frac{3}{2}\sqrt{3}$	$f > 0$
f es $\searrow$		f es $\searrow$	A. vertical	f es $\searrow$		f es $\nearrow$
f es $\cup$		f es $\cup$	mínimo	f es $\cup$	mínimo	f es $\cup$

Cuadro 6.5: Resumimos toda la información.

$\boxed{x = 1}$ Como

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \tfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty \quad \text{y}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \tfrac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x = -\tfrac{27}{4}$$

resulta que

- $x = 1$ es asíntota vertical de f por la derecha.

Dado que $x = \sqrt{3}$ es un mínimo global de $\frac{x^3}{x^2-1}$ en $(1, +\infty)$, f es estrictamente decreciente (f es $\searrow$) en $(-\infty, 1)$, $f(1) = -\frac{27}{4}$ y $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, resulta que

- $x = 1$ es mínimo local de f.

Colocamos la información obtenida en el cuadro 6.5.

El gráfico aproximado de f resulta de recortar y pegar los gráficos obtenidos en los ejemplos anteriores.

Capítulo 7

Aplicaciones a la economía

7.1. Introducción

En este capítulo vamos a repasar desde el punto de vista económico los siguientes temas que vimos en los capítulos anteriores:

- Dominio.
- Inversa.
- Derivada.
- Extremos de funciones.

Además, vamos a introducir distintas funciones utilizadas en economía. Para un estudio más profundo y detallado, recomendamos los libros de Samuelson y Nordhaus o de García Venturini y Kicillof citados en la bibliografía.

7.2. La función Demanda

Si nos ponemos en el lugar de un empresario que fabrica un único producto y quiere venderlo, podemos fijar un precio p a los artículos que producimos. Claro que la cantidad que vendamos va a depender de ese precio, y para cada valor de p, vamos a vender una cantidad distinta x de nuestro producto.

Esto es fácil de imaginar. Supongamos que tenemos una carnicería y fijamos el precio de cada kilogramo de asado en 10 centavos: en ese caso, vamos a vender mucho (no nos interesa si estamos trabajando a pérdida). Pero si cambiamos el precio, y lo vamos aumentando, venderemos cada vez menos... hasta que llegue el momento en que el kilo sea tan caro, que nadie nos compre nada.

Este es un ejemplo de la *Ley de la Demanda* en economía: a cada precio p, le corresponde una cantidad x de productos que se venden, y esta cantidad disminuye cuando aumenta el precio.

Podemos expresar la relación entre el precio y la cantidad de artículos que se venden a ese precio como una función, la función *Demanda*:

$$x = D(p).$$

Aquí, x representa la cantidad de artículos que se venden cuando el precio es p. Los economistas también la llaman *curva de Demanda.*

Nota 7.2.1. Hasta ahora, las funciones eran casi todas $y = f(x)$ ó $y = g(x)$. ¿Por qué el cambio de letras? Esta función viene de la economía, D es una buena letra para representar la demanda, y p es buena para indicar el precio.

Una diferencia importante es que acá x es la variable dependiente, corresponde a la imagen de la función demanda. Antes, cuando trabajábamos con una función $y = f(x)$, y correspondía a la imagen y x al dominio. Ahora, el dominio está indicado por p y la imagen es x (el motivo de este cambio se entenderá mejor en la próxima sección, cuando veamos la función precio).

Es importante que recordemos que para graficar la demanda $x = D(p)$ lo haremos entonces en dos ejes, pero el horizontal será p y el vertical x.

Analicemos el dominio de la función demanda. Hasta ahora, nos fijábamos sólo en las cuentas involucradas en la definición de la función (dividir por cero, raíces pares de números negativos, etc.). Pero aquí el dominio se ve afectado por el significado económico que tiene la función. Hay dos factores a tener en cuenta:

- el precio no puede ser negativo,
- la cantidad de productos que se vende no puede ser negativa.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 7.2.2. Supongamos que la demanda de un producto viene dada por la fórmula

$$x = \frac{100}{1+p} - 2 \qquad \text{¿cuál es su dominio?}$$

Vemos que es una función homográfica (ver página 53), así que podemos dibujarla sin mucha dificultad. Tiene una asíntota vertical en $p = -1$, y una asíntota horizontal en $x = -2$. Al principio podemos pensar que su gráfico es el que se muestra en la figura 7.1.

Pero... ¿qué pasa con el sentido económico de la demanda?

El gráfico de la figura 7.1 corresponde a la función homográfica, pero no a la función demanda $D(p) = \frac{100}{1+p} - 2$, ya que no tiene en cuenta las condiciones.

En primer lugar, el precio no puede ser negativo: si estamos vendiendo un producto y cobramos algo por él, el precio tiene que ser mayor que cero. Podemos aceptar el cero, también, aunque en ese caso lo estaríamos regalando. Entonces, debe ser $p \geq 0$ y el dominio de esta función no incluye los negativos.

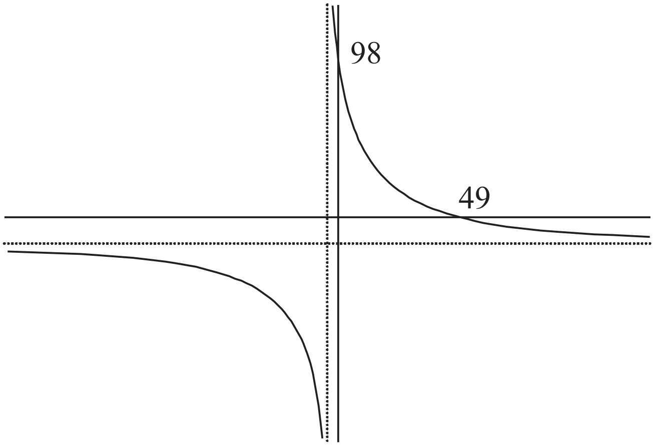


Figura 7.1: ¿Es este el gráfico de $D(p) = \frac{100}{1+p} - 2$?

Por otro lado, en el gráfico vemos que para $p = 49$, la demanda se anula. Es decir, si nuestro precio es 49, no vendemos ningún artículo. Y para los valores de p mayores que 49, la cantidad de artículos que vendemos se hace negativa... lo cual no tiene mucho sentido.

Entonces, el dominio de nuestra función demanda $D(p) = \frac{100}{1+p} - 2$ es el intervalo $[0, 49]$, y el gráfico correcto es el que mostramos en la figura 7.2.

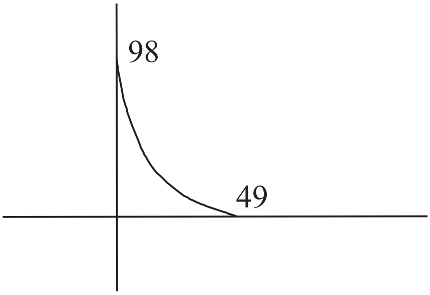


Figura 7.2: Este sí es el gráfico de la demanda.

Ejemplo 7.2.3. Supongamos que la demanda de un producto es

$$D(p) = \sqrt{14400 - p^2} \qquad \text{¿cuál es el dominio en este caso?}$$

Vamos a resolverlo sin graficar. Miremos primero la parte matemática: como tenemos que calcular una raíz cuadrada, necesitamos que $14400 - p^2$ sea mayor o igual que cero.

Esto no es difícil de averiguar:

$$14400 - p^2 = 0 \quad \text{cuando} \quad p = -120 \text{ ó } p = 120.$$

Usando una consecuencia del Teorema de Bolzano (ver 4.6.1), $14400-p^2$ tiene signo constante en cada uno de los intervalos

$$(-\infty,-120), \quad (-120,120), \quad (120,+\infty).$$

En el primero, tomando $p=-200$ tenemos

$$14400-(-200)^2 = 14400-40000 = -25600.$$

En $(-120,120)$ es positivo, basta verificarlo con $p=0$:

$$14400-0^2 = 14000.$$

Por último, en $(120,+\infty)$ queda

$$14400-(200)^2 = 14400-40000 = -25600.$$

Bien, la parte matemática tiene sentido entonces para $p \in [-120,120]$. ¿Será ese el dominio?

Falta la parte económica: como el precio tiene que ser mayor o igual que cero, tenemos que achicar el intervalo descartando los negativos: $p \in [0,120]$.

Además, como no vamos a vender una cantidad negativa de productos, tenemos que mirar si puede ser

$$\sqrt{14400-p^2} < 0,$$

pero la función raíz cuadrada, no toma valores negativos, con lo cual en el intervalo $[0,120]$, la demanda será siempre mayor o igual que cero, y éste es nuestro dominio.

7.3. La función Precio

En la sección anterior mencionamos que a mayor precio, menor demanda (es decir, menos artículos se venderán). Aquí estamos trabajando con un modelo muy simple, donde la venta del producto depende exclusivamente del precio. No es cierto que la demanda disminuye cuando aumenta el precio si uno considera más de un factor. Por ejemplo, si además del precio consideramos la temperatura ambiente, no debería asombrarnos que en verano aumente el precio del helado y, pese al aumento de precio, también aumenten las ventas.

Así, la demanda resulta una función estrictamente decreciente: a precios mayores, menor demanda del producto.

En ese caso, la demanda es una función *biyectiva* (ver 2.3.3) si nos restringimos a su dominio e imagen. Esto nos permite definir su *función inversa* (ver 2.7.1) , que llamaremos *función Precio*:

$$p = P(x),$$

esto es, ahora vemos al precio en función de la cantidad que se vende.

En la función demanda del ejemplo 7.2.2, recordemos que el dominio era $[0,49]$. Para calcular la imagen, como la función es decreciente, el valor máximo lo tomará en

$p = 0$ y el mínimo en $p = 49$. Haciendo la cuenta con estos valores, vemos que la imagen es el intervalo $[0, 98]$. Entonces, $D(p) : [0, 49] \to [0, 98]$ es biyectiva.

Calculemos la función precio $P(x)$ si la demanda es $D(p) = \frac{100}{1+p} - 2$.

$$\begin{array}{rclcrcll} x & = & \frac{100}{1+p} - 2 & \Rightarrow & x+2 & = & \frac{100}{1+p} & \Rightarrow \\ (x+2)(1+p) & = & 100 & \Rightarrow & 1+p & = & \frac{100}{x+2} & \Rightarrow \\ & & & \Rightarrow & p & = & \frac{100}{x+2} - 1 & \end{array}$$

y obtenemos la función precio

$$P(x) = \frac{100}{x+2} - 1.$$

Si miramos con cuidado, no hemos hecho nada nuevo: apenas calcular la inversa de una función homográfica.

Lo importante aquí es que, para la función Demanda, su inversa tiene un significado económico y es la función Precio. Veremos que es más útil que la función demanda en ciertos problemas.

Otra vez, el precio de un producto sólo puede ser positivo, y la cantidad que se vende también. Cuando se lo obtuvo como la inversa de la función Demanda, esto ya está garantizado (¿por qué?), de lo contrario habría que calcular su domino e imagen.

7.4. Funciones Ingreso, Costo Total y Beneficio

Vamos ahora a las tres funciones que le interesan al productor. Estas contestan tres preguntas básicas: si fabrico x artículos,

1. ¿cúanto dinero voy a recibir al venderlos?
2. ¿cuánto me costará producirlos?
3. ¿cuál será mi ganancia o pérdida?

La función *Ingreso Total*, $IT(x)$, se encarga de responder la primera pregunta, que nos dice cuánto dinero ingresa si vendemos x artículos. Es fácil deducir su expresión si consideramos la función precio:

$$IT(x) = x \cdot P(x).$$

Así, el ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos x, por el precio de cada uno $P(x)$. Como antes, $IT(x)$ está definida para $x \geq 0$, y también su imagen debe ser positiva.

Para la segunda, introducimos la función *Costo Total*, $CT(x)$, que nos dice cuánto cuesta fabricar x artículos. Esta función suele ser creciente, es más caro fabricar más artículos, pero hay excepciones (promociones industriales, subsidios, cambios técnicos, etc.). Depende de distintos factores: hay costos fijos (como el alquiler de un local, el sueldo de parte del personal, o costos de las maquinarias), y costos que dependen del número de artículos fabricados (materia prima). Para que tenga sentido económico, debe ser

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad CT(x) \geq 0.$$

Por último, la función *Beneficio*, $B(x)$, se encarga de responder la tercera pregunta, cuál será nuestra ganancia o pérdida. Como es de esperar, se la obtiene a partir de las funciones $IT(x)$ y $CT(x)$:

$$B(x) = IT(x) - CT(x).$$

El beneficio al vender x artículos será la diferencia entre el dinero que ingresó, $IT(x)$, y el costo de fabricarlos, $CT(x)$.

Por un lado, esta función está definida para $x \geq 0$ ya que el número de artículos que vamos a producir no puede ser negativo. Pero por otra parte, es posible que su imagen sea negativa. El siguiente gráfico corresponde a una posible función beneficio.

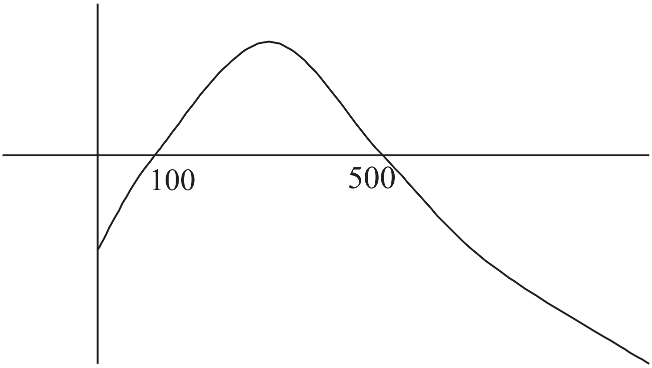


Figura 7.3: Este podría ser el gráfico de una función beneficio.

Por ejemplo, podría ser que vendiendo menos de 100 artículos no cubramos sus costos de fabricación; superada esta cantidad, sí; hasta llegar a los 500 artículos (tal vez el precio debería ser demasiado bajo si se quieren vender más de 500 artículos).

En este caso, los conjuntos de positividad y negatividad de la función beneficio se interpretan como ganancias o pérdidas.

Una pregunta que todo productor se hace es si le conviene o no fabricar más productos. La fórmula $x \cdot p(x)$ no la responde directamente: si aumenta x, el precio $p(x)$ disminuye, con lo cual no sabemos cómo cambia el ingreso.

Para esto, los economistas definen el *ingreso marginal* $IM(x)$.

Definición 7.4.1. *Llamamos* **ingreso marginal** *a la variación del ingreso al producir una unidad de producto más, o sea,*

$$IM(x) = IT(x+1) - IT(x).$$

Observación 7.4.2. Sin embargo, la fórmula de la definición anterior no se utiliza tanto, y preferimos reemplazarla por la derivada del ingreso total:

$$IM(x) \simeq IT'(x),$$

el signo “$\simeq$”quiere decir “aproximadamente igual a”; veremos en un ejemplo que estos valores no son exactamente iguales, pero sí muy parecidos. Para justificar que reemplazamos $IM(x)$ por la derivada, observemos que si x es muy grande, agregar una unidad es muy poco, con lo cual tenemos un cociente incremental, que puede considerarse una buena aproximación de la derivada:

$$IM(x) = IT(x+1) - IT(x) = \frac{IT(x+1) - IT(x)}{(x+1) - (x)} \simeq IT'(x).$$

Recordemos que el signo de la derivada nos dice si la función crece o no. Así, si queremos saber si el ingreso aumentará al aumentar la producción, nos conviene fijarnos si la derivada es positiva. Cuánto va a aumentar (o disminuir) es lo que nos da el valor absoluto o módulo de la derivada.

Ejemplo 7.4.3. El precio de un producto cuando se venden x unidades es

$$p(x) = 10 + \frac{2000}{x^2}.$$

Actualmente, se fabrican y venden $x = 100$ unidades. ¿Aumentará el ingreso si aumentamos la producción? ¿Cuánto aumentará o disminuirá?

Aquí, el ingreso es

$$IT(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(10 + \frac{2000}{x^2}\right) = 10x + \frac{2000}{x}.$$

Derivando, calculamos el ingreso marginal $IT'(x)$:

$$IT'(x) = 10 - \frac{2000}{x^2}$$

que en $x = 100$ resulta:

$$IT'(100) = 10 - \frac{2000}{10000} = 10 - 0{,}2 = 9{,}8.$$

Esto nos dice que el ingreso total es creciente en $x = 100$, y va a aumentar casi 9,8 si aumentamos la producción.

Nota 7.4.4. Podemos calcular el ingreso marginal de la otra manera, haciendo la diferencia $IT(101) - IT(100)$. En ese caso, tenemos:

$$IT(101) - IT(100) = 10 \cdot 101 + \frac{2000}{101} - 10 \cdot 100 - \frac{2000}{100} = 10 - \frac{2000}{10100} = 9{,}8019...$$

7.5. Otras funciones marginales

La idea de la sección anterior se aplica también a las funciones Costo Total y Beneficio.

Definiciones 7.5.1.

1. *Definimos el* **Costo Total Marginal**, $CTM(x)$, *como la derivada del Costo Total, es decir,*

$$CTM(x) = CT'(x).$$

2. *De la misma manera, definimos el* **Beneficio Marginal**, $BM(x)$, *como la derivada del Beneficio,*

$$BM(x) = B'(x).$$

Observaciones 7.5.2.

1. El costo marginal se puede interpretar como el costo adicional de fabricar otra unidad de nuestro producto,

$$CTM(x) = CT'(x) \simeq CT(x+1) - CT(x).$$

2. De manera análoga, el beneficio marginal nos sirve para aproximar cómo cambia el beneficio al fabricar otra unidad,

$$BM(x) = B'(x) \simeq B(x+1) - B(x).$$

7.6. Elasticidad de la demanda

En esta sección vamos a estudiar el concepto de elasticidad de una función económica. Primero veremos la elasticidad de la demanda, y luego consideraremos la elasticidad de otras funciones.

Habíamos visto que la demanda de un producto decrece cuando su precio aumenta. Sin embargo, la disminución en el consumo de los distintos productos varía. Por ejemplo, si el pan y una revista aumentan su precio en un mismo porcentaje, el consumo de pan va a disminuir menos que el de la revista.

Para un productor, es importante saber cómo va a responder el mercado a un aumento de precios. Sabe que la gente va a consumir menos, pero la pregunta importante es cómo modificará el ingreso. La herramienta para averiguar ésto es la *elasticidad.*

Definición 7.6.1. *Definimos la* **elasticidad de la demanda**, $E_D(p)$, *como la variación porcentual de la cantidad demandada, dividida la variación porcentual del precio.*

Observación 7.6.2. La elasticidad de la demanda “mide” en qué porcentaje varía la demanda cuando aumenta el precio en un 1 por ciento. Para variaciones pequeñas del precio, se utiliza la derivada para calcular la elasticidad (con lo cual uno evita calcular porcentajes):

$$E_D(p) = \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}.$$

Esta es la fórmula que utilizaremos para calcular la elasticidad de la demanda.

Su deducción no es difícil: Supongamos que el precio cambia en una pequeña cantidad, h. La variación porcentual de la demanda es

$$\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}.$$

La variación porcentual del precio viene dada por

$$\frac{p+h-p}{p}=\frac{h}{p}.$$

Ahora, el cociente de ambas variaciones es:

$$\frac{\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}}{\frac{h}{p}}=\frac{p}{D(p)}\cdot\frac{D(p+h)-D(p)}{h}.$$

Vemos que la segunda fracción es el cociente incremental de $D(p)$, y podemos aproximarlo por $D'(p)$.

Ejemplo 7.6.3. Sea $D(p)=1000-10p$, queremos calcular la elasticidad en $p=10$.

Para esto calculamos la derivada:

$$D'(p)=-10.$$

que es constante, en particular, $D'(10)=-10$. Además,

$$D(10)=1000-10\cdot 10=900.$$

Reemplazando en la fórmula,

$$E_D(10)=\frac{10\cdot(-10)}{900}=-\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 7.6.4. Para la misma demanda, $D(p)=1000-10p$, queremos calcular la elasticidad en $p=80$.

La derivada es $D'(p)=-10$, y $D(80)=1000-10\cdot 80=200$. Reemplazando,

$$E_D(80)=\frac{80\cdot(-10)}{200}=-4.$$

Ejercicio 7.6.5. Para la misma demanda, $D(p)=1000-10p$, calcular la elasticidad en $p=50$.

¿Cómo se interpretan éstos resultados económicamente? Observemos que el resultado, la elasticidad de la demanda, es un número (no una función). Ese número no indica una cantidad, tampoco un precio: sólo nos interesará saber si su módulo es menor o mayor que 1.

Cuando el módulo de la elasticidad es mayor que 1, para un determinado precio, se dice que la demanda es *elástica*. Esto quiere decir que el cambio en la demanda es grande ante la variación del precio. En el ejemplo 7.6.4 la elasticidad es -4, y su módulo es 4, esto significa que si el precio es 80, y lo aumentamos, mucha de la gente que consumía el producto a ese precio, dejará de hacerlo.

Cuando el módulo de la elasticidad es menor que 1, para el precio correspondiente, se dice *inelástica*, y significa que la variación de la demanda no será tan grande.

En el caso que $E_D(p) = -1$ o $E_D(p) = 1$, se dice que es unitaria.

La elasticidad nos da información sobre el Ingreso Total: cuando es inelástica, el Ingreso Total aumenta al aumentar el precio; cuando es elástica el Ingreso Total disminuye al aumentar el precio.

Uno puede preguntarse si la elasticidad de la demanda siempre dará negativa. Recordemos que la demanda disminuye al aumentar el precio, $D(p)$ es una función decreciente. Por este motivo, siempre que calculemos la derivada de la demanda, será un número negativo. Como el precio p, y la cantidad demandada $D(p)$ son positivos, al hacer la cuenta

$$E_D(p) = \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}.$$

la elasticidad es negativa.

Observemos además que una misma función demanda puede ser elástica para ciertos precios e inelástica para otros.

7.7. Elasticidad

Para una función cualquiera f, ya sea el Costo, el Beneficio, o cualquier otra función, definimos su *elasticidad* como en el caso de la demanda:

$$E_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}.$$

Ahora, como f puede no ser decreciente, el resultado puede ser tanto positivo como negativo.

Definición 7.7.1. *Decimos que f es* **inelástica** *cuando $|E_f(x)| < 1$, es decir, si*

$$-1 < E_f(x) < 1.$$

Por otro lado, se dirá **elástica** *cuando $|E_f(x)| > 1$, es decir, si*

$$E_f(x) < -1 \qquad o \qquad 1 < E_f(x).$$

Finalmente, diremos que es **unitaria** *si $|E_f(x)| = 1$, esto es*

$$E_f(x) = -1 \qquad o \qquad E_f(x) = 1.$$

Ejemplo 7.7.2. Sea $CT(x) = x^2 + 500$. Calculemos la elasticidad del costo para $x = 10$ y para $x = 100$.

Calculamos la derivada, $CT'(x) = 2x$.
Ahora, en la fórmula, cuando $x = 10$:

$$|E_{CT}(10))| = \left|\frac{10 \cdot CT'(10)}{CT(10)}\right| = \left|\frac{10 \cdot (2 \cdot 10)}{10^2 + 500}\right| = \frac{1}{3}.$$

con lo cual es inelástico en $x = 10$.
Para $x = 100$

$$|E_{CT}(100))| = \left|\frac{100 \cdot CT'(100)}{CT(100)}\right| = \left|\frac{100 \cdot (2 \cdot 100)}{100^2 + 500}\right| = \frac{200}{105}.$$

Observemos que este resultado es mayor que uno, y entonces en $x = 100$ el costo total es elástico.

7.8. Extremos

En esta sección nos interesará maximizar el beneficio, minimizar el costo, o maximizar el ingreso. Recordemos antes, que para hallar los extremos de una función en intervalos cerrados, hay tres clases de puntos que son candidatos:

- ceros de la derivada
- bordes del intervalo donde se trabaja
- puntos donde la función no es derivable.

Una vez que se tienen todos estos puntos, la forma más simple de determinar los máximos y mínimos es evaluar la función en cada uno de ellos, y comparar los resultados.

Se pueden usar también los criterios de crecimiento, según el signo de la derivada, pero no hay que olvidarse cuando se trabaja en un intervalo de los bordes: en ellos, rara vez la derivada es nula, y la única forma de saber si allí hay un máximo o un mínimo es evaluando. Para funciones simples, que podemos dibujar, también puede resolverse el problema dibujándola y obteniendo los máximos y mínimos a partir del gráfico.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 7.8.1. Una empresa de muebles puede hacer como mucho 300 sillones. Si la función Costo Total es $CT(x) = |x - 200| + 1000$, ¿qué cantidad de sillones tiene que producir para minimizar el costo?

Para resolverlo, determinemos primero el intervalo donde trabajamos. La producción tiene que ser mayor o igual que cero, y puede fabricar como mucho 300 sillones: entonces el intervalo es $[0, 300]$

Ahora, esta función no es difícil de graficar, pero recordemos que sólo nos interesa entre 0 y 300.

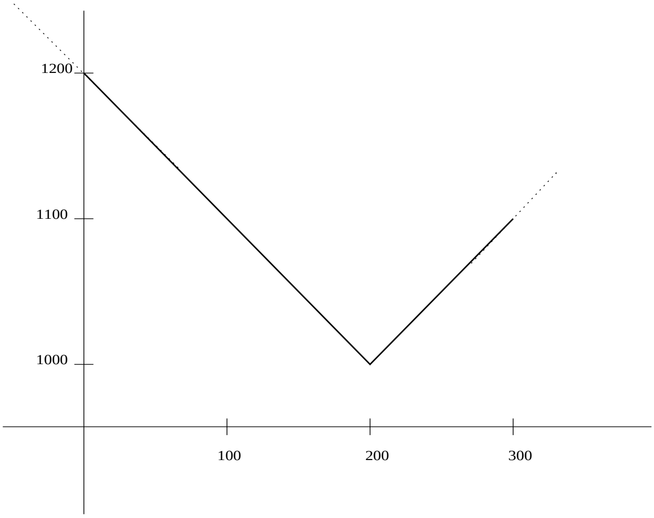


Figura 7.4: Función de costo total del ejemplo 7.8.1.

El dibujo de la figura 7.4 muestra que en $x = 200$ la función tiene un mínimo, con lo cual esa es la cantidad de sillones a fabricar si queremos minimizar el costo.

Si nos hubiesen preguntado por el máximo, hay dos máximos locales: $x = 0$ y $x = 300$, pero en la gráfica se ve que el máximo absoluto se alcanza en $x = 0$.

Ejemplo 7.8.2. El ingreso total de una fábrica viene dado por la función

$$IT(x) = x(120 - x),$$

y puede producir hasta 100 unidades del producto. ¿Para qué cantidad el ingreso es máximo?

En este caso, el intervalo es $[0, 100]$, y la función a maximizar es la parábola

$$IT(x) = 120x - x^2.$$

Para hallar el máximo buscaremos los candidatos a extremos.
Primero, ceros de la derivada: $IT'(x) = 120 - 2x$. Igualando a cero,

$$\begin{array}{rcl} 120 - 2x & = & 0 \\ 120 & = & 2x \\ 60 & = & x. \end{array}$$

Segundo, los bordes del intervalo son $x = 0$ y $x = 100$.
Tercero, puntos donde $IT(x)$ no sea derivable: en este caso, no hay.

Ahora, nuestros candidatos a extremos son $x = 60$, $x = 0$ y $x = 100$. Evaluemos la función en cada uno:

$$\begin{array}{rcl} IT(0) & = & 0, \\ IT(60) & = & 120 \cdot 60 - 60^2 = 3600, \\ IT(100) & = & 120 \cdot 100 - 100^2 = 2000. \end{array}$$

De los tres puntos, a $x = 60$ le corresponde el mayor ingreso total, así que esa es la cantidad que conviene fabricar para que el ingreso sea máximo.

Observación 7.8.3. Como la función Beneficio (página 192) es la diferencia entre el ingreso y los costos,

$$B(x) = IT(x) - CT(x)$$

uno podría pensar que para maximizar el beneficio hay que maximizar los ingresos y minimizar los costos. Esto no es así, ya que para maximizar el ingreso, por lo general habrá que producir una cierta cantidad, mientras que para minimizar los costos, habrá que producir otra diferente.

Veamos un ejemplo de esta situación:

Ejemplo 7.8.4. El precio de un producto cuando se venden x unidades viene dado por $P(x) = \frac{2000}{x} + 675$. Además, el Costo Total para fabricar x unidades es $CT(x) = x^3 - 1200x + 100000$ y se fabrican entre 10 y 1000 unidades por mes.

1. ¿Cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?
2. ¿Cuántas unidades debe producir para minimizar el costo total?
3. ¿Cuántas unidades debe producir para maximizar el beneficio?

Antes de resolverlo, observemos que el número de productos que la empresa puede fabricar está entre 10 y 1000, así que allí buscaremos los resultados que nos piden. Resolvamos la primera parte.

1. ¿Cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

La función Ingreso Total se obtenía multiplicando el precio por la cantidad,

$$IT(x) = x \cdot P(x) = x \cdot \left(\frac{2000}{x} + 675\right) = 2000 + 675x.$$

Si queremos buscar el máximo absoluto de esta función, revisemos los tres tipos de candidatos a extremos:

Primero, ceros de la derivada: $IT'(x) = 675$. Esta función nunca es cero.

Segundo, los bordes del intervalo son $x = 10$ y $x = 1000$.

Tercero, puntos donde $IT(x)$ no sea derivable: en este caso, no hay.

Ahora, evaluamos $IT(x)$ en esos dos valores:

$$\begin{aligned} IT(10) &= 2000 + 675 \cdot 10 = 8750. \\ IT(1000) &= 2000 + 675 \cdot 1000 = 677000. \end{aligned}$$

Entonces, en $x = 1000$ se alcanza el máximo de la función $IT(x)$.

En realidad, podíamos haber descubierto esto de otras dos maneras:

- gráficamente, $2000 + 675x$ es una recta con pendiente positiva, al dibujarla en el intervalo $[10, 1000]$, se ve que el máximo se alcanza en $x = 1000$.

- usando derivadas: como vimos que $IT'(x) = 675$, y éste es un número positivo, la función resulta siempre creciente, con lo cual el máximo se alcanza en el extremo derecho del intervalo donde está definida: $x = 1000$.

2. ¿Cuántas unidades debe producir para minimizar el costo total?
La función Costo Total en este problema es $CT(x) = x^3 - 1200x + 100000$. Como antes, buscaremos los candidatos a mínimos.

Primero, ceros de la derivada: $CT'(x) = 3x^2 - 1200$. Esta función es cero cuando:

$$3x^2 = 1200 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad |x| = 20.$$

Observemos que el valor $x = -20$ en realidad no nos interesa, ya que estamos buscando mínimos en $[10, 1000]$. Luego, nos quedamos con un solo candidato, $x = 20$.

Segundo, los bordes del intervalo son $x = 10$ y $x = 1000$.

Tercero, puntos donde $IT(x)$ no sea derivable: en este caso, no hay.

Ahora, evaluamos $IT(x) = x^3 - 1200x + 100000$ en esos tres valores:

$$\begin{array}{rcl} CT(10) & = & 10^3 - 1200 \cdot 10 + 100000 = 89000, \\ CT(20) & = & 8000 - 24000 + 100000 = 84000, \\ CT(1000) & = & 1000000000 - 1200000 + 100000 = 998900000. \end{array}$$

El mínimo del Costo Total se alcanza entonces en $x = 20$.

3. ¿Cuántas unidades debe producir para maximizar el beneficio?
La función Beneficio la obteníamos como la diferencia entre el ingreso y el costo, es decir: $B(x) = IT(x) - CT(x)$. En este problema será:

$$\begin{array}{rcl} B(x) & = & (2000 + 675x) - (x^3 - 1200x + 100000) \\ & = & 2000 + 675x - x^3 + 1200x - 100000 \\ & = & -x^3 + 1875x - 98000. \end{array}$$

Como antes, buscamos los candidatos a máximos.

Primero, ceros de la derivada: $B'(x) = -3x^2 + 1875$. Esta función es cero cuando:

$$3x^2 = 1875 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 625 \quad \Rightarrow \quad |x| = 25$$

Observemos que el valor $x = -25$ no nos interesa, ya que estamos buscando máximos en $[10, 1000]$. Luego, nos quedamos con un solo candidato, $x = 25$.

Segundo, los bordes del intervalo son $x = 10$ y $x = 1000$.

Tercero, puntos donde $IT(x)$ no sea derivable: en este caso, no hay.

Para no hacer la tablita de valores otra vez para esta función, veremos de otra manera que en $x = 25$ se alcanza un máximo. En el intervalo $[10, 25)$, la derivada $B'(x)$ no se anula, con lo cual la función Beneficio es siempre creciente o decreciente.

Si calculamos $B'(a)$, donde a es un punto de $[10, 25)$, sabremos si el beneficio crece o decrece. Por ejemplo, tomando $a = 10$, tenemos que $B'(10) = -3 \cdot 10^2 + 1875 = 1575$, que es mayor que cero. Luego, en $[0, 25)$ la función Beneficio es creciente.

Ahora, en $(25, 1000]$ hacemos el mismo razonamiento, ya que la derivada no tiene ceros ahí y debe tener signo constante. Evaluando en $x = 100$, tenemos que $B'(100) = -3 \cdot 100^2 + 1875 = -28125$, que es negativo y entonces el Beneficio decrece en este intervalo.

Vemos entonces que la función Beneficio crece en $[10, 25)$, y decrece en $(25, 1000]$. Esto nos dice que alcanza un máximo en $x = 25$.

Ejemplo 7.8.5. La función Beneficio de una empresa es $B(x) = x^3 - e^x - 2x^2 - 64x$, y la función Costo Total es $CT(x) = e^x - 10x^2 + 100x$, hallar la cantidad de productos que se deben fabricar para maximizar el Ingreso Total $IT(x)$, sabiendo que a lo sumo fabrica 5 unidades del producto. ¿Cuál es el beneficio para la cantidad que maximiza el ingreso? ¿Cuál es el precio unitario para esa cantidad?

En este problema nos piden el máximo de la función Ingreso Total, pero nos dan el beneficio y el costo. Como

$$B(x) = IT(x) - CT(x),$$

despejamos:

$$IT(x) = B(x) + CT(x)$$

y reemplazando las funciones que tenemos,

$$\begin{aligned} IT(x) &= (x^3 - e^x - 2x^2 - 64x) + (e^x - 10x^2 + 100x) \\ &= x^3 - 12x^2 + 36x. \end{aligned}$$

Ya tenemos la función Ingreso Total, para buscar su máximo, consideramos los puntos donde no es derivable (no los hay), los bordes del intervalo (0 y 5), y los ceros de la derivada:

$$IT'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

que son $x = 2$ y $x = 6$. Tenemos que descartar $x = 6$ pues cae fuera de la producción aceptada.

Evaluemos $IT(x)$ en los puntos encontrados:

$$\begin{aligned} IT(0) &= 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0 = 0, \\ IT(2) &= 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 32, \\ IT(5) &= 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 = 5. \end{aligned}$$

En este caso, vemos que le conviene fabricar 2 artículos si quiere maximizar el ingreso.

Se nos pregunta ahora cuál será el beneficio para esa cantidad. Evaluando,

$$B(2) = 2^3 - e^2 - 2 \cdot 2^2 - 64 \cdot 2 \simeq -135,39$$

es decir, da pérdida.

Por último, queremos averiguar el precio de cada artículo si se venden 2 unidades. Como

$$IT(x) = x \cdot P(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

sacamos x de factor común y lo que quedará es el precio:

$$IT(x) = x \cdot P(x) = x \cdot (x^2 - 12x + 36) \quad \Rightarrow \quad P(x) = x^2 - 12x + 36.$$

Cuando $x = 2$,

$$P(2) = 2^2 - 12 \cdot 2 + 36 = 16.$$

Es decir, el precio unitario es de 16.

Nota 7.8.6. Un comentario final

Este último ejemplo es sin dudas ridículo (aún más que los anteriores). Un productor cuyas opciones son fabricar entre 0 y 5 unidades de un producto no hará este análisis, ni tendrá funciones costo-beneficio como las anteriores. Sin embargo, el *procedimiento* para resolver el problema es el que interesa.

Si miramos con cuidado, tuvimos que despejar el Ingreso (que no era conocido), descartar un punto crítico (caía fuera del rango de producción posible), y averiguar la función precio, y esto nos puede ser de utilidad en problemas prácticos reales.

Por otro lado, en economía se estudian problemas de extremos en conjuntos de dos o más dimensiones, con lo cual las funciones consideradas tendrán más de una variable, y las técnicas para hallar máximos y mínimos serán una generalización de éstas. Palabras como “conjuntos convexos”, “Hessiano”, “multiplicadores de Lagrange” o de “Kuhn-Tucker” se volverán familiares, y reemplazarán a los intervalos donde buscamos máximos, a los criterios para hallar los extremos de una función, y a la forma de analizar los puntos del borde.

Capítulo 8

Integrales

8.1. Primitivas

En el capítulo 5 vimos que a cada función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable se le puede asignar una nueva función: Su derivada, $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo:

1. $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \ln(x)$ asigna la función $f'\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{sen}(x)$ asigna la función $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$.
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$ asigna la función $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2 + 1$ asigna la función $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Es decir que derivar es una operación entre el subconjunto de funciones reales derivables en (a,b) y el conjunto de funciones reales:

$$f\colon (a,b) \to \mathbb{R} \text{ derivable} \quad \rightsquigarrow \quad f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}.$$

Surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿Existirá una operación inversa?, o sea, ¿se podrá "antiderivar"? Más precisamente:

$$\text{¿Si } f\colon (a,b) \to \mathbb{R}, \text{ existe } F\colon (a,b) \to \mathbb{R} \text{ tal que } F'(x) = f(x)\ \ \forall\, x \in (a,b)\text{? } (\Diamond)$$

Los ejemplos anteriores muestran que, en esos casos, $(\Diamond)$ se responde afirmativamente: En efecto:

1. Si $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, está dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces, $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \ln(x)$ sirve.
2. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está dada por $f(x) = \cos(x)$, entonces, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ sirve.
3. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está dada por $f(x) = 2x$, entonces, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = x^2$ sirve.

4. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está dada por $f(x) = 2x$, entonces, $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $G(x) = x^2 + 1$ también sirve.

Los dos últimos ejemplos muestran que, en el caso de poder "antiderivar" una función, la "antiderivada" *no* nos va a dar una única función. Es decir que la "antiderivada" de una función, en el caso de existir, nos dará un conjunto de funciones.

En vez de utilizar el nombre antiderivada se utiliza el nombre de primitiva. Precisemos lo antedicho.

Definición 8.1.1. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Se denomina* **primitiva** *de f a toda función $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ que verifica $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$.*

Observación 8.1.2.

1. No toda función tiene primitiva.
2. Toda función continua en (a,b) posee una primitiva.

   (Este resultado se conoce con el nombre de Teorema Fundamental del Cálculo Integral que desarrollaremos en la próxima Sección).

Observación 8.1.3. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Si $F, G\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ son primitivas de f, entonces existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + K$, para todo $x \in (a,b)$ (dos primitivas difieren en una constante).

Definición 8.1.4. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Denominamos al conjunto de todas las primitivas de f* **integral indefinida de** *f y lo notamos*

$$\int f = \int f(x)\, dx = \{F\colon (a,b) \to \mathbb{R} : \ F \text{ es primitiva de } f\},$$

donde consideraremos que ***dx*** *es sólo un símbolo que llamaremos* **diferencial** *x.*

Observación 8.1.5. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Sea $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Por la observación 8.1.3 resulta que

$$\int f = \int f(x)\, dx = \{F + K \ : \ k \in \mathbb{R}\},$$

donde, para cada $K \in \mathbb{R}$, $F + K\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es la función $(F + K)(x) = F(x) + K$.

Por abuso de notación escribimos simplemente

$$\int f = F(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, para calcular $\int f(x)\, dx$ (todas las primitivas de f), bastará con calcular una primitiva de f (lo cual no es, en general, simple).

Observación 8.1.6. Sean f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Recordando las propiedades de la derivación resulta que

1. $\displaystyle\int f+g=\int f+\int g.$
2. $\displaystyle\int c\cdot f=c\cdot\int f.$

Donde, debemos entender que

$$\int f+\int g=\left\{F+G:(a,b)\to\mathbb{R}\ ,\ F\in\int f\text{ y }G\in\int g\right\}$$

y

$$c\cdot\int f=\left\{c\cdot F:(a,b)\to\mathbb{R}\ ,\ F\in\int f\right\}.$$

Observación 8.1.7. Recordando las derivadas de las funciones comúnmente usadas, podemos construir la siguiente lista de integrales inmediatas.

- $\displaystyle\int 1\ dx=x+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int x\ dx=\tfrac{1}{2}\ x^2+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int x^2\ dx=\tfrac{1}{3}\ x^3+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- En general, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int x^n\ dx=\tfrac{1}{n+1}\ x^{n+1}+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\forall\ a\in\mathbb{R},\ a\neq -1,$ $\displaystyle\int x^a\ dx=\tfrac{1}{a+1}\ x^{a+1}+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int\frac{1}{x}\ dx=ln\left(|x|\right)+K,\quad K\in\mathbb{R}\ .$
- $\displaystyle\int e^x\ dx=e^x+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\forall a\in\mathbb{R}_{>0},\ a\neq 1,$ $\displaystyle\int a^x\ dx=\frac{1}{\ln(a)}\ a^x+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int\operatorname{sen}(x)\ dx=-\cos(x)+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int\cos(x)\ dx=\operatorname{sen}(x)+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx=\operatorname{arc\,sen}(x)+K,\quad K\in\mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx=\operatorname{arc\,cos}(x)+K,\quad K\in\mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotg}(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$

8.2. Métodos para hallar primitivas

El cálculo de primitivas de una función no es, por lo general, una cosa simple.
Por ejemplo si $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\ln(x^2+1))}{\sqrt{3x^4+8}}$, ¿cuál será una primitiva de f?
Existen ciertos métodos que ayudan en el cálculo de primitivas. En lo que sigue desarrollaremos dos de estos métodos: el método de *sustitución* y el método de *integración por partes.*
El método de sustitución se basa en el siguiente resultado:

Proposición 8.2.1. *Si F es una primitiva de f, entonces $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$.*

Demostración. Por la regla de la cadena

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = (f \circ g)(x) \cdot g'(x).$$

□

Método de Sustitución

La proposición 8.2.1 dice que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad ①$$

Ya que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int F'(g(x))g'(x)\,dx = \int (F \circ g)'(x)\,dx = (F \circ g)(x) + K.$$

Llamando $u = g(x)$ y sustituyendo en ①, resulta que

$$\int f(u) \cdot u'\,dx = F(u) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad ②$$

Si convenimos en escribir $u'dx = du$, resulta de ② que

$$\int f(u)\,du = F(u) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el método de sustitución consiste en realizar los siguientes pasos:

1. Sustituir $g(x)$ por u en la integral a calcular.
2. Sustituir $u'\,dx$ (o sea $g'(x)\,dx$) por du en la integral a calcular.

3. Calcular $\int f(u)\, du$ (en función de la variable u).

4. Reemplazar u por $g(x)$ en la primitiva calculada.

A continuación mostramos varios ejemplos en donde aplicamos el Método de sustitución.

Ejemplo 8.2.2. Calcular $\int \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x)\, dx$.

Notemos que el integrando es de la forma $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$, donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$; de modo que podemos intentar la sustitución

$$u = \operatorname{sen}(x), \quad ①$$

luego,

$$du = u'dx = \cos(x)\, dx. \quad ②$$

Reemplazamos ① y ② en la integral a calcular y resulta

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(\operatorname{sen}(x))}_{u}{}^2 \cdot \underbrace{\cos(x)\, dx}_{du} &= \int u^2\, du = \frac{1}{3} \cdot u^3 + K = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}^3(x) + K, \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.3. Calcular $\int \frac{1}{2x+1}\, dx$.

Sea

$$u = 2x + 1, \quad \Longrightarrow \quad du = 2\, dx.$$

En este caso, du no aparece exactamente en la integral, pues falta 2 multiplicando a dx. Como se trata de una *constante* que está *multiplicando*, podemos operar con ella y "despejar" dx:

$$du = 2\, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\, du = dx.$$

Entonces, reemplazando $2x + 1$ por u y dx por $2\, du$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x+1}\, dx &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\, \ln(|u|) + K = \\ &= \frac{1}{2}\, \ln(|2x+1|) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.4. Calcular $\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$.

Observemos que el numerador de la función a integrar es, salvo una constante, la derivada del denominador. En efecto:

$$\left(x^3+5\right)' = 3x^2.$$

Es útil en estos casos sustituir todo el denominador. O sea,

$$u = x^3 + 5, \quad ①$$

luego,

$$du = 3x^2\,dx \quad \Longrightarrow \quad x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du. \quad ②$$

Reemplazando ① y ② en la integral a calcular, resulta que

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}ln\left(|u|\right) = \frac{1}{3}ln\left(\left|x^3+5\right|\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}.✓$$

Ejemplo 8.2.5. Calcular $\int x \cdot \sqrt{x^2-2}\,dx$.

Resolvamos este ejemplo de dos maneras distintas.

Primera forma:

Sea

$$u = x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad du = 2x\,dx.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, nos falta una constante que está multiplicando, entonces

$$du = 2\,dx \quad \Longrightarrow \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,du.$$

Sustituyendo x^2-2 por u y $x\,dx$ por $\frac{1}{2}\,du$ en la integral a calcular, resulta que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-2}\cdot x\,dx &= \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + K = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(x^2-2\right)^{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(x^2-2\right)^3} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad ✓\end{aligned}$$

Segunda forma:

Sea

$$u = \sqrt{x^2-2}. \quad ①$$

Luego,

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2}}\cdot 2x\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx.$$

En este caso, tenemos $\sqrt{x^2-2}$ dividiendo y esta no aparece en la expresión de la función a integrar; ahora bien, dado que podemos expresar a $\sqrt{x^2-2}$ en la variable u,

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx \quad \Longrightarrow \quad x\,dx = \underbrace{\sqrt{x^2-2}}_{u}\,du = u\,du. \quad ②$$

Sustituyendo ① y ② en la integral a calcular resulta que

$$\begin{aligned}\int x\cdot\sqrt{x^2-2}\,dx &= \int u^2\,du = \frac{1}{3}\cdot u^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3+K\\ &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}+K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.6. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^5}{\left(1+x^2\right)^{10}}\,dx.$

Sea

$$t = 1+x^2, \quad ①$$

luego,

$$dt = 2x\,dx \quad\Longrightarrow\quad x\,dx = \frac{1}{2}\,dt. \quad ②$$

Por otra parte, de ①, $x^2 = t-1 \Rightarrow x^4 = (t-1)^2$ ③

Teniendo en cuenta que $x^5 = x^4\cdot x$, de ①, ② y ③ resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\left(1+x^2\right)^{10}}\,dx &= \int \frac{x^4}{\left(1+x^2\right)^{10}}\cdot x\,dx = \int \frac{(t-1)^2}{t^{10}}\cdot\frac{1}{2}\,dt =\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{t^{10}}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2}{t^{10}}-2\frac{t}{t^{10}}+\frac{1}{t^{10}}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\int t^{-8}\,dt - 2\int t^{-9}\,dt + \int t^{-10}\,dt\right] =\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{-7}}{-7} - 2\cdot\frac{t^{-8}}{-8} + \frac{t^{-9}}{-9}\right] + K =\\ &= -\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^8} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^9} + K,\\ &\qquad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.7. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$

Sea

$$u = \sqrt{x}. \quad ①$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2u}\,dx \quad\Longrightarrow\quad dx = 2u\,du \quad ②$$

Reemplazando ① y ② en la integral a calcular resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{\text{sen}\,(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{\text{sen}(u)}{u}\,2u\,du = 2\int \text{sen}(u)\ \ du = \\ &= -2\cdot\cos(u) = -2\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right) + K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

El próximo ejemplo muestra como, en general, este tipo de integrales, en donde el numerador del integrando es, salvo una constante, la derivada del denominador se resuelve sustituyendo el denominador.

Ejemplo 8.2.8. Calcular $\displaystyle\int \frac{a\cdot f'(x)}{f(x)}\,dx$, donde $f(x)$ es una función derivable cualquiera.

Sea

$$u = f(x) \qquad \text{entonces,} \qquad du = f'(x)\,dx.$$

Reemplazando en la integral a calcular resulta que

$$\int \frac{a\cdot f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{a}{u}\,du = a\int \frac{1}{u}\,du = a\cdot ln\,(|u|) + K = a\cdot ln\,(|f(x)|) + K, \quad K\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo 8.2.9. Calcular $\displaystyle\int \text{tg}(x)\,dx$.

Como $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ y $(\cos(x))' = -\text{sen}(x)$, nos encontramos con una integral como las mencionadas en el ejemplo anterior, con $f(x) = \cos(x)$.

Realizamos entonces la sustitución

$$u = \cos(x) \quad ① \qquad \Rightarrow \qquad du = -\text{sen}(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}(x)\,dx = -du. \quad ②$$

Reemplazando ① y ② en la integral a calcular resulta que

$$\begin{aligned}\int \text{tg}(x)\,dx &= \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-1}{u}\,du = -\int \frac{1}{u}\,du = \\ &= -ln\,(|u|) + K = -ln\,(|\cos(x)|) + K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.10. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$.

Recordando la lista de la observación 8.1.7, $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc}\,\text{tg}(x) + K, \quad K\in\mathbb{R}$ y observando que la integral a calcular es "parecida", manipulamos algebraicamente el denominador del integrando para poder aplicar este resultado.

$$x^2 + 9 = 9\cdot\left(\frac{1}{9}x^2 + 1\right) = 9\cdot\left(\frac{x^2}{3^2} + 1\right) = 9\cdot\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1\right). \quad ①$$

Reemplazando ① en la integral a calcular resulta que

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9\cdot\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx. \quad ②$$

Realizamos la sustitución

$$u=\frac{x}{3} \quad ③ \qquad \Rightarrow \qquad du=\frac{1}{3}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = 3\cdot du. \quad ④$$

De ②, ③ y ④ resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{3}{(u^2+1)}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(u^2+1)}\,du = \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(u)+K = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right)+K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.11. Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

Observando que $\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-(x^2)^2}$ y recordando la lista de la observación 8.1.7 realizamos la sustitución

$$u=x^2 \quad ① \qquad \Rightarrow \qquad du = 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad x\,dx=\frac{1}{2}du. \quad ②$$

Reemplazando ① y ② en la integral a calcular resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(u)+K = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(x^2\right)+K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.12. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx.$

Manipulando algebraicamente el denominador podemos conseguir llevarlo, salvo una constante, a la forma $\sqrt{1-u^2}$. En efecto:

Primero completamos cuadrados en la función cuadrática (la llevamos a la forma canónica)

$$-5+6x-x^2 = -5-(x^2-6x+9)+9 = 4-(x-3)^2.$$

Luego,

$$-5+6x-x^2 = 4-(x-3)^2 = 4\cdot\left(1-\frac{(x-3)^2}{4}\right) = 4\cdot\left(1-\left(\frac{(x-3)}{2}\right)^2\right)$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{-5+6x-x^2}=\sqrt{4\cdot\left(1-\left(\frac{(x-3)}{2}\right)^2\right)}=2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(x-3)}{2}\right)^2}. \quad ①$$

Realizamos entonces la sustitución

$$u=\frac{x-3}{2} \quad ② \qquad \Rightarrow \qquad du=\frac{1}{2}dx \qquad \Rightarrow \qquad dx=2\;du. \quad ③$$

Teniendo en cuenta ① y reemplazando ② y ③ en la integral a calcular resulta que

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(x-3)}{2}\right)^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,du=$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du=\operatorname{arc\,sen}(u)+K=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-3}{2}\right)+K, \quad K\in\mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Método de Integración por partes

Proposición 8.2.13. Método de Integración por partes
Sean u y v dos funciones derivables tales que u' y v' son continuas. Entonces

$$\int [u(x)\cdot v'(x)]\;dx=u(x)\cdot v(x)-\int [u'(x)\cdot v(x)]\;dx.$$

Demostración. Por la regla de la cadena

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Luego,

$$u\cdot v=\int (u\cdot v)'=\int (u'\cdot v+u\cdot v')=\int u'\cdot v+\int u\cdot v'.$$

Por lo tanto,

$$\int u\cdot v'=u\cdot v-\int u'\cdot v.$$

□

Ejemplo 8.2.14. Calcular $\int x\cdot \operatorname{sen}(x)\;dx$.

Llamando

$$\begin{cases} u=x \\ v'=\operatorname{sen}(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=-\cos(x) \end{cases}.$$

Luego, por la proposición anterior,

$$\begin{aligned}\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x))\ dx \\ &= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx = \\ &= -x \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.15. Calcular $\int x \cdot e^x\, dx$.

Llamando $\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$, luego,

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^x\, dx &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + K = \\ &= (x-1) \cdot e^x + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.16. Calcular $\int x^2 \cdot \cos(x)\, dx$.

Llamando $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$, entonces,

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) - \int 2x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 2 \int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx. \quad ①$$

Nos queda por calcular $\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$. Esta integral ya la calculamos en el primer ejemplo del método de integración por partes:

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = -x \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + K. \quad ②$$

Luego, reemplazando ② en ① tenemos que

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos(x)\, dx &= x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 2 \int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = \\ &= x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 2\left[-x \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x)\right] + K = \\ &= x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Nota: Si no hubiésemos calculado la integral $\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$ en el primer ejemplo, deberíamos haber aplicado el método una vez más para calcularla. Es decir, es posible aplicar el método de integración por partes más de una vez.

Ejemplo 8.2.17. Calcular $\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$.

Llamando $\begin{cases} u = \operatorname{sen}(x) \\ v' = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = \cos(x) \\ v = e^x \end{cases}$, luego,

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = e^x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\, dx. \quad ①$$

Nos queda por calcular la $\int e^x \cdot \cos(x)\, dx$. A primera vista el cálculo de esta integral presenta una dificultad similar a la original. Apliquemos nuevamente el método de integración por partes a esta última integral.

Llamando $\begin{cases} z = \cos(x) \\ w' = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z' = -\operatorname{sen}(x) \\ w = e^x \end{cases}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x)\, dx &= e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\operatorname{sen}(x))\, dx = \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx. \quad ② \end{aligned}$$

Reemplazando ② en ① tenemos que

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx &= e^x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\, dx = \\ &= e^x \cdot \operatorname{sen}(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx \right] = \\ &= e^x \cdot \operatorname{sen}(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = \\ &= e^x \left[\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \right] - \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx. \end{aligned}$$

O sea,

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = e^x \left[\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \right] - \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx. \quad ③$$

Pasando de término en ③, resulta que

$$2 \int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = e^x \left[\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \right].$$

Por lo tanto,

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = \tfrac{1}{2} e^x \left[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right] + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 8.2.18. Calcular $\displaystyle\int \ln(x)\, dx$.

En principio, al no tener un producto de dos funciones, podemos llegar a pensar que el método de integración por partes no nos va a ser útil para el cálculo de esta integral. Sin embargo, teniendo en cuenta que $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, podemos considerar que una de las funciones es la función constante 1 y la otra el $\ln(x)$. Lo que sí esta claro es que, en este caso, no tenemos dos opciones para elegir quién es la función original y quién la derivada de otra, dado que no conocemos la primitiva del $\ln(x)$ (de hecho ese es nuestro problema).

Llamando $\left\{\begin{array}{l} u = \ln(x) \\ v' = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array}\right.$, luego, por la proposición 8.2.13,

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\, dx &= \int 1 \cdot \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\, dx = x \cdot \ln(x) - x = x \cdot (\ln(x) - 1) + K, \\ & \qquad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2.19. Calcular $\int \cos^2(x)\, dx$.

Primera forma: por el método de partes.

Teniendo en cuenta que

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

llamamos $\left\{\begin{array}{l} u = \cos(x) \\ v' = \cos(x) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = -\operatorname{sen}(x) \\ v = \operatorname{sen}(x) \end{array}\right.$, luego,

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)\, dx &= \int \cos(x) \cdot \cos(x)\, dx = \\ &= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) - \int (-\operatorname{sen}(x)) \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = \\ &= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \int \operatorname{sen}^2(x)\, dx. \end{aligned}$$

Ahora, usamos que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)\, dx &= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\, dx = \\ &= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \int 1\, dx - \int \cos^2(x)\, dx \\ &= \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x)\, dx. \end{aligned}$$

O sea,

$$\int \cos^2(x)\ dx = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)\ dx.$$

Por lo tanto, pasando de término, resulta que

$$2\int \cos^2(x)\ dx = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + x,$$

entonces,

$$\int \cos^2(x)\ dx = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + x\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Segunda forma: por sustitución.

Recordando la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos resulta que

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \\ &= \cos^2(x) - \big(1-\cos^2(x)\big) = 2\cdot\cos^2(x) - 1.\end{aligned}$$

O sea,

$$\cos(2x) = 2\cdot\cos^2(x) - 1.$$

De donde resulta que

$$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\ dx &= \int \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)\ dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos(2x)\right)\ dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int 1\ dx + \int \cos(2x)\ dx\right] = \frac{1}{2}\left[x + \int \cos(2x)\ dx\right]. \quad ①\end{aligned}$$

Nos queda por calcular $\int \cos(2x)\ dx$.

Sea

$$u = 2x \quad ② \qquad \Rightarrow \qquad du = 2\ dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}\ du. \quad ③$$

Sustituyendo ② y ③ en la integral a calcular resulta que

$$\int \cos(2x)\ dx = \int \cos(u)\ \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \cos(u)\ du = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(u) = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(2x). \quad ④$$

Reemplazando ④ en ①, resulta que

$$\int \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\left[x + \int \cos(2x)\ dx\right] = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right] + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Puede resultar curioso que hayamos llegado a dos respuestas aparentemente distintas; pero en realidad no es así. Observemos que, como

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + \cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x),$$

resulta que

$$\int \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right) = \frac{1}{2}\left(x + \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Y la respuesta es la misma que obtuvimos antes.

Ejemplo 8.2.20. Calcular $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Sea $u = \operatorname{arc\,sen}(x)$, o sea

$$x = \operatorname{sen}(u)\ ^{①} \quad\Longrightarrow\quad dx = \cos(u)\ du\ ^{②}.$$

Recordemos que $\operatorname{sen}^2(u) + \cos^2(u) = 1$, luego $1 - \operatorname{sen}^2(u) = \cos^2(u)$ ③

Sustituimos ①, ② y ③ en la integral a calcular y teniendo en cuenta el ejemplo anterior resulta que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}\ \cdot\cos(u)\ du = \int \sqrt{\cos^2(u)}\ \cdot\cos(u)\ du = \\ &= \int \cos^2(u)\ \ du = \frac{1}{2}\left[u + \operatorname{sen}(u)\cdot\cos(u)\right] + K, \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para volver a la variable "original", recordemos que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x \quad \text{y} \quad \cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

(ver páginas 59 y 129 respectivamente). Luego

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad ✓$$

Observemos que la sustitución $t = \operatorname{arc\,cos}(x)$, o sea $x = \cos(t)$, también resuelve esta integral.

Ejemplo 8.2.21. Calcular $\int \sqrt{4-x^2}\ dx$.

Observemos primero que

$$4 - x^2 = 4\cdot\left(1 - \tfrac{x^2}{4}\right) = 4\cdot\left(1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2} &= \sqrt{4\cdot\left(1-\tfrac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{4\cdot\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)} = \\ &= 2\cdot\sqrt{\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)} \quad ①\end{aligned}$$

Luego, sea $u = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. O sea, $\frac{x}{2} = \operatorname{sen}(u) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \operatorname{sen}(u)$.

$$x = 2 \cdot \operatorname{sen}(u) \quad ② \qquad \Rightarrow \quad dx = 2 \cdot \cos(u)\, du. \quad ③$$

Recordando que $1 - \operatorname{sen}^2(u) = \cos^2(u)$ y teniendo en cuenta ①, ② y ③ resulta que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4 - x^2}\, dx &= \int 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)}\, dx = 2 \int \sqrt{\left(1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)}\, dx = \\
&= 2 \int \sqrt{(1 - \operatorname{sen}(u)^2)} \cdot 2 \cdot \cos(u)\, du = \\
&= 4 \int \sqrt{\cos^2(u)} \cdot \cos(u)\, du = 4 \int \cos^2(u)\, du = \\
&= 4 \cdot \tfrac{1}{2}\, [x + \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)] = 2 \cdot [u + \operatorname{sen}(u) \cdot \cos(u)] + K, \quad K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

resulta,

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2 \cdot \left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

8.3. Integrales definidas. Introducción

Desarrollaremos a continuación la noción de integral definida que junto con el concepto de derivada forman el núcleo del Cálculo Diferencial e Integral. Promediando esta sección veremos cómo se conecta esta noción con la de primitiva de una función (integral indefinida).

La noción de integral definida surgió, históricamente, ante la necesidad de calcular áreas de regiones planas acotadas. Son bien conocidas expresiones (fórmulas) que nos permiten calcular áreas de regiones planas tales como el rectángulo, el triángulo, el círculo, el rombo, el trapecio, etc. Pero si consideramos una región R cualquiera, como la de la figura 8.1, se puede observar que el cálculo de su área aparece como algo complicado.

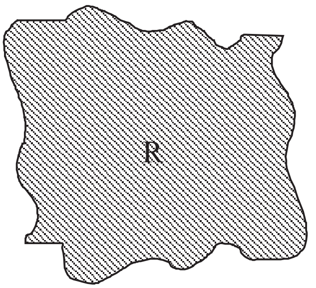


Figura 8.1: ¿ Cuál es el área de la región R ?

Sin embargo, si dividimos la región en subregiones que al unirlas formen la región original (ver la figura 8.2) y girando aquellas que sean necesarias (ver la figura 8.3), cada una de ellas corresponde a una región, un poco más simple, en donde sólo está "curvado" el borde superior, el resto de sus lados es recto. El área de la región R, que notaremos $A(\mathrm{R})$, será la suma de las áreas de las subregiones.

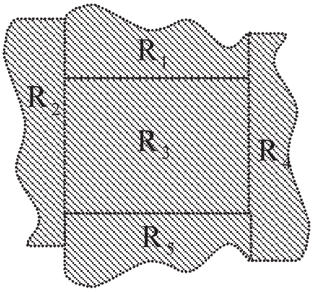


Figura 8.2: $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4 \cup \mathrm{R}_5 \;\Rightarrow\; A(\mathrm{R}) = A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2) + A(\mathrm{R}_3) + A(\mathrm{R}_4) + A(\mathrm{R}_5)$.

Por lo tanto, para poder calcular áreas de regiones planas como la de la figura 8.1 alcanzará con aprender a calcular áreas de regiones planas tales como las de la figura 8.3.

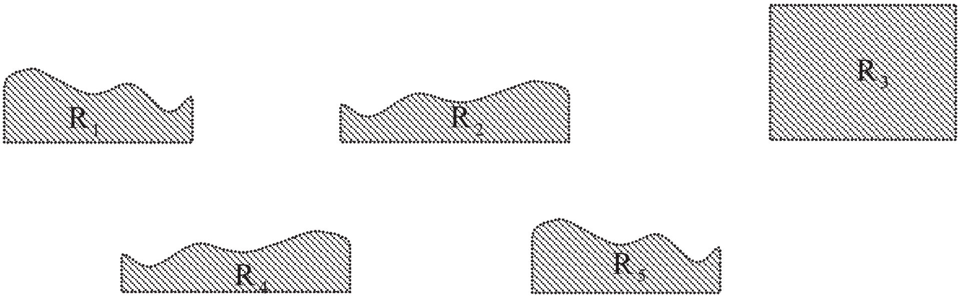


Figura 8.3: Giramos las figuras de ser necesario.

En una región plana de este último tipo podemos suponer que su "borde superior" es el gráfico de una función continua en un intervalo cerrado. Precisemos entonces este tipo de regiones y veamos como podemos calcular su área.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Consideremos la región acotada R, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ tal como lo muestra la figura 8.4 y veamos cómo es posible calcular su área mediante aproximaciones sucesivas.

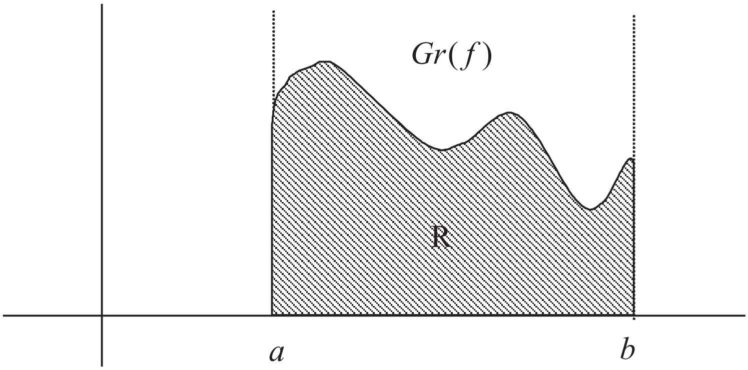


Figura 8.4: Región encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

Para examinar el método, interpretación que el matemático alemán *Bernhard Riemann* dio a conocer en el siglo *XIX*, comencemos con el siguiente ejemplo.

8.4. Región acotada por el gráfico de una función positiva

Ejemplo 8.4.1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Luego f es continua y $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [0, 1]$. Consideremos la región acotada R, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 1$ tal como lo muestra la figura 8.5 y calculemos su área.

Es claro que $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2$. Por lo tanto $A(\mathrm{R}) = A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2)$. Como R_1 es un triángulo de base y altura de longitud 1 y R_2 es un cuadrado de lado de longitud 1, resulta que

$$A(\mathrm{R}) = A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2) = \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \quad ①$$

Veamos otra forma de calcular el área de esta región, mediante aproximaciones sucesivas, que es la que se emplea en el caso general y que nos servirá para calcular áreas de regiones no tan simples como ésta (ver la figura 8.4).

Si dividimos el intervalo $[0, 1]$ por la mitad, obtenemos dos intervalos, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, de manera tal que

$$[0, 1] = \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].$$

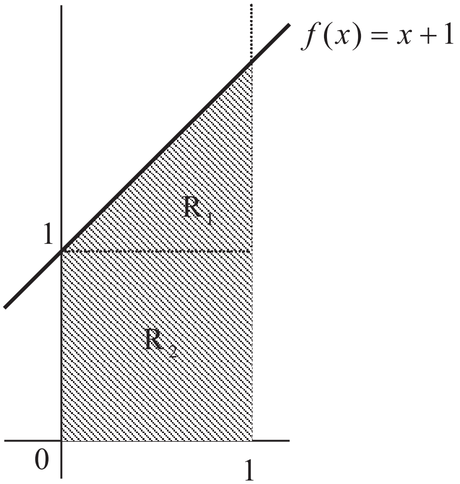


Figura 8.5: Calculamos el área de la región sombreada.

Si para cada uno de ellos trazamos un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *menor* valor de la función en el intervalo (para nuestro ejemplo es el valor de la función en el extremo izquierdo del intervalo) tendremos el siguiente esquema (ver la figura 8.6)

Es claro que la suma de las áreas de los rectángulos considerados (*área por defecto*) es menor que el área de la región que queremos calcular. En efecto:

$$A(\underline{\mathrm{R}}_1) + A(\underline{\mathrm{R}}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4},$$

que es menor que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

Si en cambio, para cada uno de los intervalos considerados trazamos un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *mayor* valor de la función en el intervalo (para nuestro ejemplo es el valor de la función en el extremo derecho del intervalo) tendremos el siguiente esquema (ver figura 8.7.)

En este caso, es claro también, la suma de las áreas de los rectángulos considerados (*área por exceso*) es mayor que el área de la región que queremos calcular. En efecto:

$$A(\bar{\mathrm{R}}_1) + A(\bar{\mathrm{R}}_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} + (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot 2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot 2 = \tfrac{3}{4} + 1 = \tfrac{7}{4},$$

que es mayor que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

Si dividimos ahora el intervalo $[0,1]$ en cuatro intervalos, es decir cada uno de los intervalos anteriores por la mitad, obtenemos cuatro intervalos, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, de manera tal que

$$[0,1] = \left[0, \tfrac{1}{4}\right] \cup \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right] \cup \left[\tfrac{3}{4}, 1\right].$$

Si repetimos el procedimiento anterior y para cada intervalo trazamos un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *menor* valor de la función en el intervalo

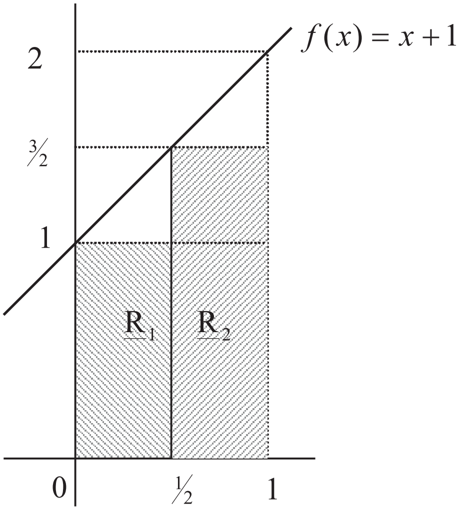


Figura 8.6: Área por defecto.

tendremos nuevas áreas por defecto como se muestra el la figura 8.8. Si en cambio, para cada uno de los intervalos considerados trazamos un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *mayor* valor de la función en el intervalo tendremos nuevas áreas por exceso (ver figura 8.8.)

Es claro que la suma de las áreas de los rectángulos considerados en la figura 8.8 (área por defecto) todavía es menor que el área de la región que queremos calcular. En efecto:

$$A(\underline{\mathrm{R}}_1) + A(\underline{\mathrm{R}}_2) + A(\underline{\mathrm{R}}_3) + A(\underline{\mathrm{R}}_4) = \tfrac{1}{4} \cdot 1 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) \cdot \tfrac{5}{4} + (\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{3}{2} + (1 - \tfrac{3}{4}) \cdot \tfrac{7}{4} =$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{4} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{16} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{7}{16} = \tfrac{11}{8},$$

que es menor que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

También es claro que la suma de las áreas de los rectángulos considerados en la figura 8.8 (área por exceso) todavía es mayor que el área de la región que queremos calcular. En efecto:

$$A(\bar{\mathrm{R}}_1) + A(\bar{\mathrm{R}}_2) + A(\bar{\mathrm{R}}_3) + A(\bar{\mathrm{R}}_4) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) \cdot \tfrac{3}{2} + (\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{7}{4} + (1 - \tfrac{3}{4}) \cdot 2 =$$

$$= \tfrac{5}{16} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot 2 = \tfrac{5}{16} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{7}{16} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{13}{8},$$

que es mayor que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

Podemos observar que estas nuevas aproximaciones son mejores que las anteriores, es decir, la nueva área por defecto es mayor que la calculada anteriormente y la nueva área por exceso es menor que la calculada anteriormente. De hecho, se observa en la figura 8.9, que hemos "ganado" las áreas de las regiones$\underline{A}_1$ y $\underline{A}_2$ en el caso del área por defecto y hemos "perdido" las áreas de las regiones$\overline{A}_1$ y $\overline{A}_2$ en el caso del área por exceso.

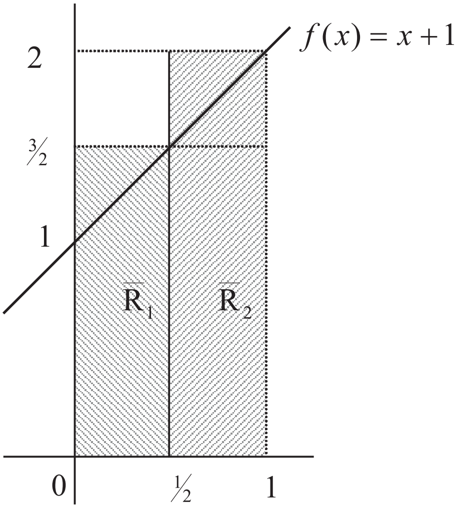


Figura 8.7: Área por exceso.

Dividamos aún más el intervalo $[0, 1]$, en ocho intervalos

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I}_1 = \left[0, \frac{1}{8}\right], & \mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], & \mathrm{I}_3 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right], & \mathrm{I}_4 = \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right], \\ \mathrm{I}_5 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], & \mathrm{I}_6 = \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right], & \mathrm{I}_7 = \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], & \mathrm{I}_8 = \left[\frac{7}{8}, 1\right], \end{array}$$

de manera tal que

$$[0, 1] = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 \cup \mathrm{I}_3 \cup \mathrm{I}_4 \cup \mathrm{I}_5 \cup \mathrm{I}_6 \cup \mathrm{I}_7 \cup \mathrm{I}_8$$

y repitamos, con un poco más de precisión y analíticamente, el procedimiento anterior.

Es claro que la longitud de cada intervalo es la octava parte de la longitud del intervalo $[0, 1]$, esto es $\frac{1}{8}$.

Como antes, para cada intervalo trazamos primero un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *menor* valor de la función y después un rectángulo con base la longitud del intervalo y altura el *mayor* valor de la función.

Le damos nombres a estos valores mínimos y máximos de la función en cada intervalo:

$$\begin{array}{l} m_1 = \text{mín } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_1\}, \ m_2 = \text{mín } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_2\}, \ \cdots, \ m_8 = \text{mín } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_8\} \\ M_1 = \text{máx } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_1\}, \ M_2 = \text{máx } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_2\}, \ \cdots, \ M_8 = \text{máx } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_8\} \end{array}$$

Observemos que nuestra función ($f(x) = x + 1$) en cada intervalo, toma su valor mínimo en el extremo izquierdo del intervalo y toma su valor máximo en el extremo derecho del intervalo, por lo tanto,

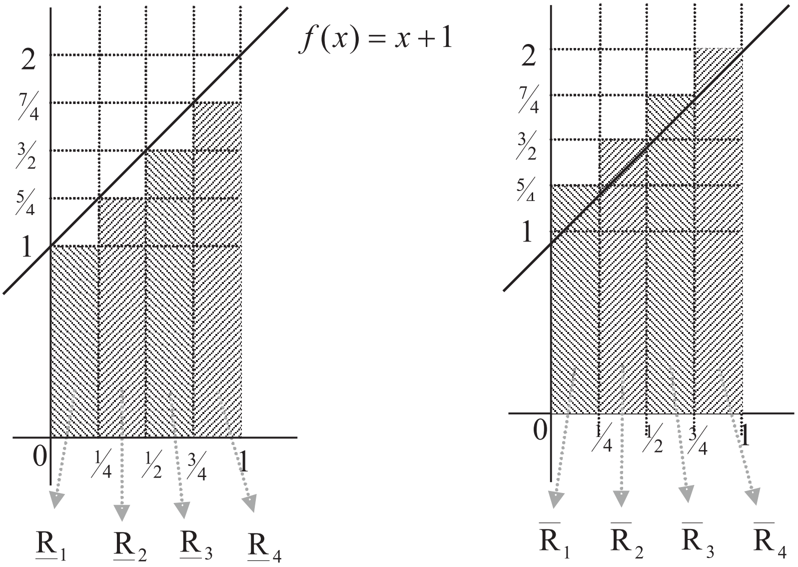


Figura 8.8: Área por defecto y área por exceso.

$$
\begin{array}{lll}
m_1 = 1, & m_2 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}, & m_3 = 1 + \frac{2}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \\
m_4 = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}, & m_5 = 1 + \frac{4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, & m_6 = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}, \\
m_7 = 1 + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, & m_8 = 1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
M_1 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}, & M_2 = 1 + \frac{2}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, & M_3 = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}, \\
M_4 = 1 + \frac{4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, & M_5 = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}, & M_6 = 1 + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \\
M_7 = 1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}, & M_8 = 1 + 1 = 2. &
\end{array}
$$

Luego, tenemos 8 rectángulos “inferiores”, $\underline{R}_1$ a $\underline{R}_8$. El área de cada uno de ellos está dada por la longitud de la base $(\frac{1}{8})$ multiplicada por la longitud de su altura (m_i, para cada i entre 1 y 8). Esto es,

$$
\begin{array}{ll}
A(\underline{R}_1) = \frac{1}{8} \cdot m_1 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}, & A(\underline{R}_2) = \frac{1}{8} \cdot m_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{64}, \\
A(\underline{R}_3) = \frac{1}{8} \cdot m_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{32}, & A(\underline{R}_4) = \frac{1}{8} \cdot m_4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{64}, \\
A(\underline{R}_5) = \frac{1}{8} \cdot m_5 = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16}, & A(\underline{R}_6) = \frac{1}{8} \cdot m_6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{13}{8} = \frac{13}{64}, \\
A(\underline{R}_7) = \frac{1}{8} \cdot m_7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{32}, & A(\underline{R}_8) = \frac{1}{8} \cdot m_8 = \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{64}.
\end{array}
$$

La suma de las áreas de los rectángulos inferiores (área por defecto) es

$$A(\underline{R}_1) + A(\underline{R}_2) + \cdots + A(\underline{R}_8) = \frac{1}{8} + \frac{9}{64} + \frac{5}{32} + \frac{11}{64} + \frac{3}{16} + \frac{13}{64} + \frac{7}{32} + \frac{15}{64} = \frac{92}{64} = \frac{23}{16},$$

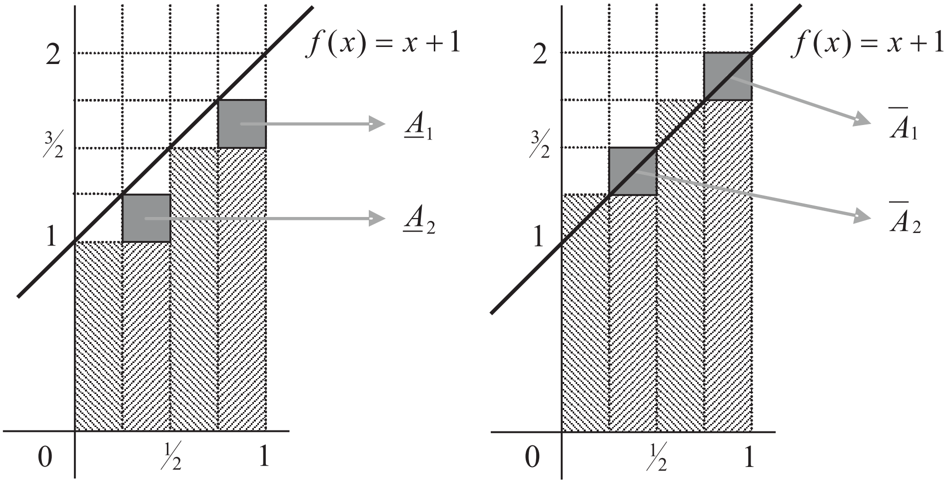


Figura 8.9: En algunas se gana y en otras se pierde.

que, aunque la aproximación es mejor que la anterior, aún es *menor* que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

Tenemos también 8 rectángulos “superiores”, $\overline{\mathrm{R}}_1$ a $\overline{\mathrm{R}}_8$. El área de cada uno de ellos está dada por la longitud de la base ($\frac{1}{8}$) multiplicada por la longitud de su altura (M_i, para cada i entre 1 y 8). Esto es,

$$A(\overline{\mathrm{R}}_1) = \tfrac{1}{8} \cdot M_1 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{8} = \tfrac{9}{64}, \qquad A(\overline{\mathrm{R}}_2) = \tfrac{1}{8} \cdot M_2 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{5}{4} = \tfrac{5}{32},$$

$$A(\overline{\mathrm{R}}_3) = \tfrac{1}{8} \cdot M_3 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{11}{8} = \tfrac{11}{64}, \qquad A(\overline{\mathrm{R}}_4) = \tfrac{1}{8} \cdot M_4 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{16},$$

$$A(\overline{\mathrm{R}}_5) = \tfrac{1}{8} \cdot M_5 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{13}{8} = \tfrac{13}{64}, \qquad A(\overline{\mathrm{R}}_6) = \tfrac{1}{8} \cdot M_6 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{7}{4} = \tfrac{7}{32},$$

$$A(\overline{\mathrm{R}}_7) = \tfrac{1}{8} \cdot M_7 = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{15}{8} = \tfrac{15}{64}, \qquad A(\overline{\mathrm{R}}_8) = \tfrac{1}{8} \cdot M_8 = \tfrac{1}{8} \cdot 2 = \tfrac{1}{4}.$$

La suma de las áreas de los rectángulos superiores (área por exceso) es

$$A(\overline{\mathrm{R}}_1) + A(\overline{\mathrm{R}}_2) + \cdots + A(\overline{\mathrm{R}}_8) = \tfrac{9}{64} + \tfrac{5}{32} + \tfrac{11}{64} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{13}{64} + \tfrac{7}{32} + \tfrac{15}{64} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{100}{64} = \tfrac{25}{16},$$

que, aunque la aproximación es mejor que la anterior, aún es *mayor* que el $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$.

Repasemos lo que hemos hecho:

- Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en $n = 2$, $n = 4$ y $n = 8$ intervalos.
- Para cada n considerado (división o “partición” del intervalo), construimos n rectángulos inferiores (de base el intervalo y de altura el menor valor de la función en dicho intervalo), y calculamos la suma de sus áreas (área por defecto).
- Para cada n considerado (división o “partición” del intervalo), construimos n rectángulos superiores (de base el intervalo y de altura el mayor valor de la función en dicho intervalo), y calculamos la suma de sus áreas (área por exceso).

Si llamamos **suma inferior** al área por defecto correspondiente a la partición (división) del intervalo $[0,1]$ en n intervalos y la notamos $s(n)$, hemos obtenido que

$$s(2) = \tfrac{5}{4} \qquad s(4) = \tfrac{11}{8} \qquad s(8) = \tfrac{23}{16}.$$

Análogamente si llamamos **suma superior** al área por exceso correspondiente a la partición (división) del intervalo $[0,1]$ en n intervalos y la notamos $S(n)$, hemos obtenido que

$$S(2) = \tfrac{7}{4} \qquad S(4) = \tfrac{13}{8} \qquad S(8) = \tfrac{25}{16}.$$

Una repetición de lo hecho (recomendamos hacerlo) nos muestra que si dividimos el intervalo $[0,1]$ en $n = 3,\ 5,\ 6$ y 7 intervalos obtenemos que

$$s(3) = \tfrac{4}{3} \qquad s(5) = \tfrac{7}{5} \qquad s(6) = \tfrac{17}{12} \qquad s(7) = \tfrac{10}{7},$$

$$S(3) = \tfrac{5}{3} \qquad S(5) = \tfrac{8}{5} \qquad S(6) = \tfrac{19}{12} \qquad S(7) = \tfrac{11}{7}.$$

Es claro que

$$s(2) < s(3) < s(4) < s(5) < s(6) < s(7) < s(8),$$

o sea, *las sumas inferiores crecen* y que

$$S(8) < S(7) < S(6) < S(5) < S(4) < S(3) < S(2),$$

o sea, *las sumas superiores decrecen.*

Además, para cada i entre 1 y 8

$$s(i) < A(\mathrm{R}) < S(i).$$

o sea, *toda suma inferior es menor que cualquier suma superior.*

Generalicemos lo anterior (siempre para nuestra función $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[0,1]$) para el caso general en que partimos el intervalo en n intervalos, donde n es un número natural cualquiera.

Sean

$$\mathrm{I}_1 = \left[0, \tfrac{1}{n}\right] = \left[\tfrac{0}{n}, \tfrac{1}{n}\right], \ \mathrm{I}_2 = \left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right], \ \mathrm{I}_3 = \left[\tfrac{2}{n}, \tfrac{3}{n}\right], \cdots,$$

$$\mathrm{I}_{n-1} = \left[\tfrac{n-2}{n}, \tfrac{n-1}{n}\right], \ \mathrm{I}_n = \left[\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n}{n}\right] = \left[\tfrac{n-1}{n}, 1\right].$$

O sea, para cada $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{I}_i = \left[\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}\right]$.

Luego, la longitud de cada uno de estos intervalos es: $Long(\mathrm{I}_i) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$, sean

$$m_i = \text{mín } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_i\} \qquad M_i = \text{máx } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_i\}. \quad ①$$

Para la función considerada $m_i = 1 + \frac{i-1}{n}$ y $M_i = 1 + \frac{i}{n}$.

Si construimos los n rectángulos inferiores (de base cada intervalo y de altura el menor valor de la función en dicho intervalo), y calculamos la suma de sus áreas (área por defecto), teniendo en cuenta la suma de una progresión aritmética $(*)$, obtenemos que la suma inferior para esta partición es

$$s(n)=\tfrac{1}{n}\cdot m_1+\tfrac{1}{n}\cdot m_2+\tfrac{1}{n}\cdot m_3+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot m_n. \quad ②$$

O sea,

$$\begin{aligned} s(n) &= \tfrac{1}{n}\cdot m_1+\tfrac{1}{n}\cdot m_2+\tfrac{1}{n}\cdot m_3+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot m_n = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{0}{n})+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{n-1}{n}) = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\left[1+\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+\left(1+\tfrac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\tfrac{n-1}{n}\right)\right] = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\left[n+\tfrac{1}{n}+\tfrac{2}{n}+\cdots+\tfrac{n-1}{n}\right]=\tfrac{1}{n}\cdot\left[n+\tfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}\right] = \\ &= 1+\tfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n\cdot n}\underset{(*)}{=}1+\frac{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}{n\cdot n}=1+\tfrac{n-1}{2n}=1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Si construimos los n rectángulos superiores (de base cada intervalo y de altura el mayor valor de la función en dicho intervalo), y calculamos la suma de sus áreas (área por exceso), obtenemos que la suma superior para esta partición es

$$S(n)=\tfrac{1}{n}\cdot M_1+\tfrac{1}{n}\cdot M_2+\tfrac{1}{n}\cdot M_3+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot M_n. \quad ③$$

O sea,

$$\begin{aligned} S(n) &= \tfrac{1}{n}\cdot M_1+\tfrac{1}{n}\cdot M_2+\tfrac{1}{n}\cdot M_3+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot M_n = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{2}{n})+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{3}{n})+\cdots+\tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{n}{n}) = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+\left(1+\tfrac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\tfrac{n}{n}\right)\right] = \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\left[n+\tfrac{1}{n}+\tfrac{2}{n}+\cdots+\tfrac{n}{n}\right]=\tfrac{1}{n}\cdot\left[n+\tfrac{1+2+\cdots+n}{n}\right] = \\ &= 1+\tfrac{1+2+\cdots+n}{n\cdot n}\underset{(*)}{=}1+\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n\cdot n}=1+\tfrac{n+1}{2n}=1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

En síntesis, $s(n)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}$ y $S(n)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Observación 8.4.2. $s(n)$ es estrictamente creciente (es decir, $s(k)<s(k+1)$, $\forall\, k\in\ \mathbb{N}$).

En efecto: Sea $k\in\mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} s(k)<s(k+1) &\Leftrightarrow 1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k-1}{k}<1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{(k+1)-1}{k+1}\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k-1}{k}<\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k}{k+1} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{k-1}{k}<\tfrac{k}{k+1} \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k+1)\cdot(k-1)<k^2 \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2-1<k^2 \quad\Leftrightarrow\quad -1<0. \end{aligned}$$

Observación 8.4.3. $S(n)$ es estrictamente decreciente ($S(k)>S(k+1)$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$).

En efecto: Sea $k\in\mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} S(k)>S(k+1) &\Leftrightarrow 1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k+1}{k}>1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{(k+1)+1}{k+1} \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k+1}{k}>\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{k+2}{k+1} \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tfrac{k+1}{k}>\tfrac{k+2}{k+1} \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k+1)\cdot(k+1)>k\cdot(k+2) \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2+2k+1>k^2+2k \quad\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1>0. \end{aligned}$$

Observación 8.4.4. $s(n) < S(k)$, para todo $n,\ k \in \mathbb{N}$ (toda suma inferior es menor que cualquier suma superior).

Sean $n,\ k \in N$. Luego

$$\begin{aligned} s(n) < S(k) &\Leftrightarrow 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n-1}{n} < 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{k+1}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n-1}{n} < \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{k+1}{k} \Leftrightarrow \tfrac{n-1}{n} < \tfrac{k+1}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k(n-1) < n(k+1) \Leftrightarrow kn - k < nk + n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -k < n \Leftrightarrow 0 < n + k. \end{aligned}$$

Observación 8.4.5. $s(n) < A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En efecto: Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$s(n) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < 1 \Leftrightarrow n - 1 < n \Leftrightarrow -1 < 0.$$

Observación 8.4.6. $S(n) > A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En efecto: sea $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n + 1 > n \Leftrightarrow 1 > 0.$$

Observación 8.4.7. Las sumas inferiores, $s(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma creciente) al número real $A(\mathrm{R})$, el área de la región R, a medida que crece el valor de n. Podemos decir esto escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \frac{3}{2} = A(\mathrm{R})^{*}.$$

Observación 8.4.8. Las sumas superiores, $S(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma decreciente) al número real $A(\mathrm{R})$, el área de la región R, a medida que crece el valor de n. Podemos decir esto escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} S(n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{3}{2} = A(\mathrm{R})^{\dagger}.$$

Más allá de que, para la función considerada, conocemos el número $A(\mathrm{R})$, la observación 8.4.7 y la observación 8.4.8 nos muestran que a medida que crece el valor de n, las sumas inferiores $s(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma creciente) a *un* número real L y las sumas superiores, $S(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma decreciente) al *mismo* número real L. Es decir:

Observación 8.4.9. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{n \to \infty} S(n) = L.$

Es claro entonces que si no hubiésemos podido calcular directamente el $A(\mathrm{R})$ sería razonable decir que $A(\mathrm{R}) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{n \to \infty} S(n) = L$.

Veamos con otro ejemplo qué hubiese ocurrido si aplicáramos el mismo método para una función continua y *negativa* en un intervalo cerrado.

---

[*] La expresión se basa en el concepto de **límite de sucesiones** que no se ha desarrollado en este texto. Sin embargo, si recordamos el cálculo de límite de funciones, es claro que $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x}\right) = \frac{3}{2}$.

[†] Mismo comentario anterior observando que $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x}\right) = \frac{3}{2}$

8.5. Región acotada por el gráfico de una función negativa

Ejemplo 8.5.1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 1$. Luego f es continua y $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$. Consideremos la región acotada R, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 1$ tal como lo muestra la figura 8.10.

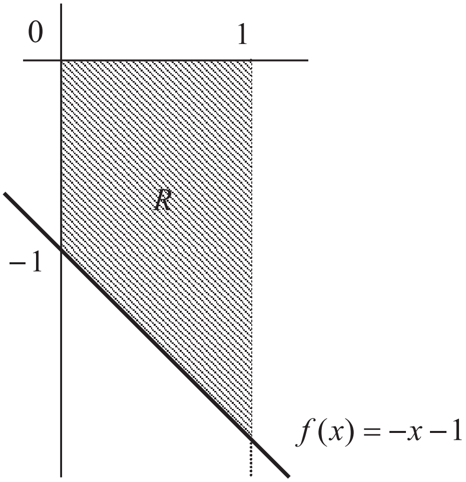


Figura 8.10: La función f es negativa en el intervalo $[0, 1]$.

Si, como en el ejemplo 8.4.1, partimos el intervalo $[0, 1]$ en n intervalos, donde n es un número natural cualquiera, consideramos ①, ② y ③ y tenemos en cuenta que ésta función en cada intervalo de la partición toma su valor máximo en el extremo izquierdo del intervalo y toma su valor mínimo en el extremo derecho del intervalo, resultará que para cada $1 \leq i \leq n$

$$m_i = -1 - \tfrac{i}{n}, \quad M_i = -1 - \tfrac{i-1}{n}.$$

Por lo tanto

$$s(n) = \tfrac{1}{n} \cdot m_1 + \tfrac{1}{n} \cdot m_2 + \tfrac{1}{n} \cdot m_3 + \cdots + \tfrac{1}{n} \cdot m_n = -1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n+1}{n}.$$

y

$$S(n) = \tfrac{1}{n} \cdot M_1 + \tfrac{1}{n} \cdot M_2 + \tfrac{1}{n} \cdot M_3 + \cdots + \tfrac{1}{n} \cdot M_n = -1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n-1}{n}.$$

La observación 8.4.2, la observación 8.4.3 y la observación 8.4.4 del ejemplo anterior siguen siendo válidas y puede verse que ahora resulta

Observación 8.5.2.

1. $s(n) < -\frac{3}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $S(n) > -\frac{3}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = -\frac{3}{2}$.

En este ejemplo es claro, como en el ejemplo anterior, que el área de la región R es $A(\mathrm{R}) = \frac{3}{2}$. Sin embargo es claro también que

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n) = -\tfrac{3}{2} \neq \tfrac{3}{2} = A(\mathrm{R}).$$

8.6. Conclusiones

- El ejemplo anterior nos muestra que el método de aproximaciones sucesivas (*Sumas de Riemann*) nos va a dar un número real (que denominaremos integral definida) que no siempre será el área de la región (más aún, nos puede dar 0).
- El método nos dará el área de la región *sólo* si la función continua considerada es no negativa en todo el intervalo cerrado que consideremos.
- A continuación generalizaremos el método para una función continua cualquiera (no necesariamente positiva) en un intervalo cerrado y llegaremos a la noción de integral definida. Y finalmente, volveremos sobre el tema del cálculo de áreas de regiones acotadas planas usando el concepto de integral definida.

8.7. Región acotada por el gráfico de una función continua

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[a,b]$ en n intervalos de la misma longitud.

Dado que la longitud del intervalo $[a,b]$ es $Long([a,b]) = b-a$, la longitud de cada intervalo de la partición será $\frac{b-a}{n}$.

Luego, los puntos extremos de los n intervalos, que notaremos $t_0,\ t_1, \cdots,\ t_n$, se obtienen sumando sucesivamente la longitud $\frac{b-a}{n}$ a partir del extremo izquierdo a del intervalo $[a,b]$. Es decir, dichos puntos son:

$$t_0 = a + 0\cdot\tfrac{b-a}{n} = a\ ,\ \ t_1 = a + 1\cdot\tfrac{b-a}{n}\ ,\ \ t_2 = a + 2\cdot\tfrac{b-a}{n}\ ,\cdots$$

$$t_{n-1} = a + (n-1)\cdot\tfrac{b-a}{n}\ ,\ \ t_n = a + n\cdot\tfrac{b-a}{n} = b.$$

Los intervalos de la partición serán:

$$\mathrm{I}_1 = [t_0, t_1]\,,\quad \mathrm{I}_2 = [t_1, t_2]\,,\quad \mathrm{I}_3 = [t_2, t_3]\,,\cdots,\ \mathrm{I}_{n-1} = [t_{n-2}, t_{n-1}]\,,\quad \mathrm{I}_n = [t_{n-1}, t_n]\,.$$

O sea, para cada $1 \le i \le n$,

$$\mathrm{I}_i = [t_{i-1}, t_i] = \left[a + (i-1)\cdot\tfrac{(b-a)}{n}\ \ ,\ \ a + i\cdot\tfrac{(b-a)}{n}\right].$$

Luego, la longitud de cada uno de estos intervalos es

$$Long(\mathrm{I}_i) = \left(a + i\cdot\tfrac{(b-a)}{n}\right) - \left(a + (i-1)\cdot\tfrac{(b-a)}{n}\right) = a + i\cdot\tfrac{(b-a)}{n} - a - (i-1)\cdot\tfrac{(b-a)}{n} =$$

$$= a + i\cdot\tfrac{(b-a)}{n} - a - i\cdot\tfrac{(b-a)}{n} + \tfrac{(b-a)}{n} = \tfrac{(b-a)}{n}.$$

Dado que f es continua en $[a, b]$, en particular f es continua en cada intervalo I_i de la partición. Por lo tanto, f alcanza un máximo global y un mínimo global en cada intervalo I_i. Es decir, para cada i existen

$$m_i = \text{mín } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_i\}\ , \quad M_i = \text{máx } \{f(x) : x \in \mathrm{I}_i\}\,.$$

Repitiendo lo hecho para los ejemplos, definimos la **suma inferior** $s(n)$ para esta partición como el número real

$$s(n) = \tfrac{b-a}{n} \cdot m_1 + \tfrac{b-a}{n} \cdot m_2 + \cdots + \tfrac{b-a}{n} \cdot m_n = \tfrac{b-a}{n} \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Análogamente, definimos la **suma superior** $S(n)$ para esta partición como el número real

$$S(n) = \tfrac{b-a}{n} \cdot M_1 + \tfrac{b-a}{n} \cdot M_2 + \cdots + \tfrac{b-a}{n} \cdot M_n = \tfrac{b-a}{n} \cdot (M_1 + M_2 + \cdots + M_n).$$

La figura 8.11 y la figura 8.12 muestran el procedimiento en el caso en que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

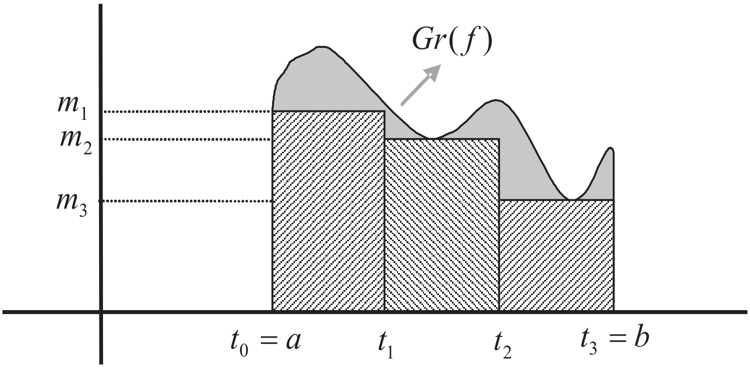


Figura 8.11: Suma inferior para $n = 3$.

Es posible, como en el ejemplo 8.4.1, demostrar las siguientes propiedades:

Proposición 8.7.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. *$s(n)$ es estrictamente creciente (es decir, $s(k) < s(k+1)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$).*
2. *$S(n)$ es estrictamente decreciente (es decir, $S(k) > S(k+1)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$).*
3. *$s(n) < S(k)$, $\forall\ k,\ n \in \mathbb{N}$ (toda suma inferior es menor que cualquier suma superior).*
4. *Las sumas inferiores, $s(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma creciente) a un número real $\underline{\mathrm{I}}$, a medida que crece el valor de n. O sea,*

$$\lim_{n \to +\infty} s(n) = \underline{\mathrm{I}}.$$

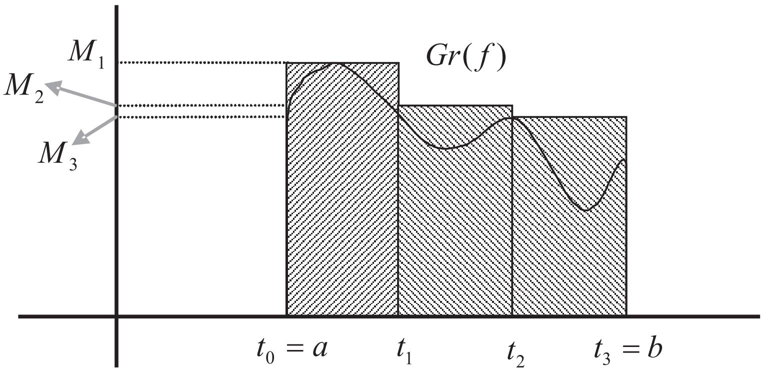


Figura 8.12: Suma superior para $n = 3$.

5. *Las sumas superiores, $S(n)$, se "acercan" cada vez más (en forma decreciente) a un número real $\bar{\mathrm{I}}$, a medida que crece el valor de n. Podemos decir esto escribiendo*

$$\lim_{n\to+\infty} s(n) = \bar{\mathrm{I}}.$$

8.8. La integral definida

Teniendo en cuenta a los puntos *4* y *5* de la proposición 8.7.1 damos las siguientes definiciones:

Definiciones 8.8.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.*

1. *Llamamos* **integral inferior** *de f en el intervalo $[a, b]$, al número real*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(n) = \underline{\mathrm{I}}.$$

2. *Llamamos* **integral superior** *de f en el intervalo $[a, b]$, al número real*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(n) = \bar{\mathrm{I}}.$$

Es posible demostrar el siguiente resultado:

Proposición 8.8.2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Esto es,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\mathrm{I}} = \lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} S(n) = \overline{\mathrm{I}} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

La proposición anterior nos permite dar la siguiente definición:

Definición 8.8.3. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, llamamos* **integral definida de** f **en el intervalo** $[a,b]$*, al número real*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Nota 8.8.4. Es posible extender la noción de integral definida para funciones acotadas (no necesariamente continuas) utilizando el axioma de completitud. El lector interesado puede recurrir a la bibliografía recomendada.

Observación 8.8.5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

1. El número$\int_a^b f(x)\,dx$ puede ser positivo, negativo o cero y, en general, **no** representa ningún área.

2. Si $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Además, el número I representa el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

3. Si $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, entonces $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$. En este caso, $-\mathrm{I}$ representa el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

Mencionaremos a continuación, sin demostración, propiedades de la integral definida.

Recomendamos interpretar las mismas pensando en funciones no negativas pues en ese caso la integral definida representa el área de una región.

Proposición 8.8.6. *Sean* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continuas. Entonces:*

1. *Si* $f(x) = c\ \in \mathbb{R}$*, para todo* $x \in [a,b]$*, entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$.

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

3. *Para todo* $k \in \mathbb{R}$, $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

4. *Si* $f(x) \geq g(x)$, *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

5. *Si* $f(x) \geq g(x)$, *para todo* $x \in [a,b]$ *y existe* $r \in [a,b]$ *tal que* $f(r) > g(r)$, *entonces*
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

6. *Si* $c \in \mathbb{R}$ *es tal que* $a < c < b$, *entonces* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

7. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

Definición 8.8.7. *Sean* $a < b$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Definimos*
$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Proposición 8.8.8. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(no necesariamente ordenados) y* f *continua en el intervalo cerrado más grande posible que se puede construir con* a, b *y* c. *Entonces*
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Teorema 8.8.9 (Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral)**.**

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Demostración. Por ser f continua en $[a,b]$, por el teorema de Weierstrass (ver página 108), f alcanza mínimo y máximo absolutos en $[a,b]$. Esto es, existen $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ tales que
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall\, x \in [a,b]. \quad ①$$

Por los puntos *1* y *4* de la proposición 8.8.6 resulta que
$$f(x_1)\cdot(b-a) = \int\limits_a^b f(x_1)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x_2)\,dx = f(x_2)\cdot(b-a). \quad ②$$

Por lo tanto,

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \leq f(x_2).$$

Llamemos

$$d = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}. \quad ③$$

Si $f(x_1) = d$, por ②, $\int\limits_a^b f(x_1)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Por ① y el punto *5* de la proposición 8.8.6 resulta que $f(x) = f(x_1)\ \forall\ x \in [a,b]$, o sea, f es constante en $[a,b]$ y cualquier c verifica la tesis.

Análogamente si $f(x_2) = d$.

Podemos suponer entonces que $f(x_1) < d < f(x_2)$. Como f es continua en $[a,b]$, el Teorema del Valor Medio (para funciones continuas, ver página 108) asegura que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$, o sea (por ③)

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b-a).$$

□

El siguiente ejemplo nos da una interpretación geométrica del teorema 8.8.9.

Ejemplo 8.8.10. Sea $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$.

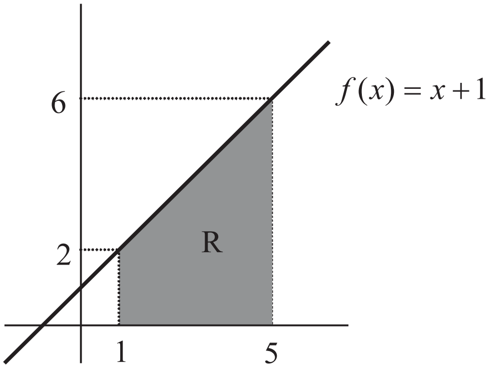


Figura 8.13: Teorema del valor medio y su interpretación geométrica.

Por el punto *2* de la observación 8.8.5 y la figura 8.13 es claro que

$$\int\limits_1^5 f(x)\, dx = \int\limits_1^5 (x+1)\, dx = A(\mathrm{R}) = 16. \quad ①$$

El teorema 8.8.9 asegura que existe (ver la figura 8.14, por lo menos un $c \in (1, 5)$ tal que

$$\int_1^5 f(x)\,dx = f(c) \cdot (5-1) = 4 \cdot f(c). \quad ②$$

Luego, de ① y ②

$$4 \cdot f(c) = 16 \quad \Leftrightarrow \quad f(c) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad c + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3.$$

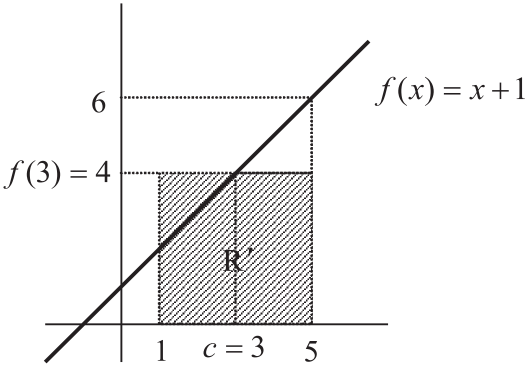


Figura 8.14: $A(\mathrm{R}) = A(\mathrm{R}')$.

Es claro que $A(\mathrm{R}) = \int_1^5 f(x)\,dx = 16 = 4 \cdot 4 = f(3) \cdot (5-1) = A(\mathrm{R}')$.

8.9. Función integral

Definición 8.9.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Llamamos* **función integral de** f *a la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Observación 8.9.2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y *no negativa*, para cada $x_0 \in [a, b]$, $F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$ (la función integral de f evaluada en x_0) nos da el área de la región acotada R encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = x_0$ tal como lo muestra la figura 8.15.

Teorema 8.9.3 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral)**.**

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ su función integral. Entonces, F es una primitiva de f, es decir, F es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

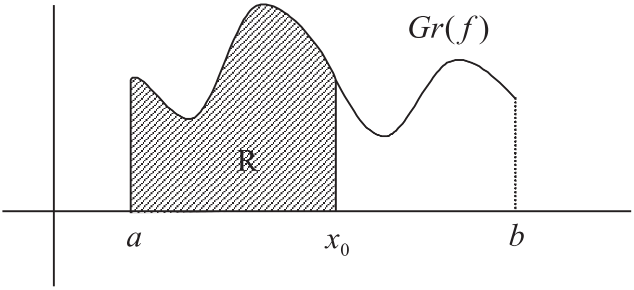


Figura 8.15: Función integral.

Demostración. Sea $x \in (a,b)$. Para h "cerca" de 0,

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \\ &= \int\limits_a^{x} f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

luego, como f es continua en $[x, x+h]$ (o en $[x+h, x]$) por el teorema del valor medio (ver 8.8.9), existe $c_x \in (x, x+h)$ (o $c_x \in (x+h, x)$) tal que

$$F(x+h)-F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_x)\cdot(x+h-x) = f(c_x)\cdot h$$

de donde,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_x).$$

Como $c_x \underset{h\to 0}{\to} x$, teniendo en cuenta que f es continua, resulta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_x) = f(x).$$

O sea, F es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. ☐

8.10. Regla de Barrow

Teorema 8.10.1. (Regla de Barrow).
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sea $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f (es decir, $G'(x) = f(x),\ \forall\, x \in (a,b)$). Entonces,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Demostración. Por el Teorema Fundamental, la función integral F de f, también es una primitiva de f. Entonces (ver 8.1.3), existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + k \ , \ \forall \, x \in (a, b). \quad ①$$

Luego, teniendo en cuenta ①, el punto *7* de la proposición 8.8.6 y la definición 8.9.1,

$$0 = \int\limits_a^a f(x)\, dx = F(a) = G(a) + k \ , \text{ de donde } \ k = -G(a). \quad ②$$

Por otra parte,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) = G(b) + k. \quad ③$$

De ①, ② y ③

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

□

Observación 8.10.2.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral (teorema 8.9.3) nos asegura que toda función continua en un intervalo cerrado posee una primitiva.

La Regla de Barrow, corolario del Teorema Fundamental, nos da un método para calcular una integral definida de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ que consiste en los siguientes pasos:

- Calcular una primitiva G de nuestra función.
- Evaluar dicha primitiva en los extremos del intervalo y restar, es decir calcular $G(b) - G(a)$.

Estos dos teoremas conectan la noción de integral definida con la de primitiva de una función (integral indefinida). Es claro entonces que el cálculo de integrales definidas consiste en esencia en el cálculo de primitivas desarrollado en el capítulo anterior.

Observación 8.10.3. Cuando se emplea la regla de Barrow, una notación común para la evaluación es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(x) \Big|_a^b \ .$$

Donde G es una primitiva de f y $G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Veamos a continuación algunos ejemplos de aplicación de la regla de Barrow.

Ejemplo 8.10.4. Sea $f(x) = x + 1$. Queremos calcular

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (x+1)\, dx.$$

Dado que f es continua, podemos aplicar la regla de Barrow, sólo necesitamos una primitiva G de f. O sea, debemos calcular la integral indefinida de f y elegir una primitiva. Es claro que

$$\int f(x)\, dx = \int (x+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Elegimos $G(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + x$ y aplicamos la regla de Barrow. Resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\, dx &= \int_0^1 (x+1)\, dx = G(x)\,\Big|_0^1 = G(1) - G(0) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^2 + 0\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Observemos, que como era previsible pues $x + 1 > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, $\int_0^1 (x+1)\, dx$ nos dio el área de la región acotada R, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 1$ (recordar el ejemplo 8.4.1 y la figura 8.5).

Ejemplo 8.10.5. Calculemos $\int_1^5 (x+1)\, dx$.

Aplicamos nuevamente la regla de Barrow y, teniendo en cuenta que en el ejemplo anterior ya hemos calculado una primitiva de esta función, resulta

$$\int_1^5 (x+1)\, dx = \left(\frac{1}{2}\, x^2 + x\right)\Big|_1^5 = \left(\frac{1}{2}\, 5^2 + 5\right) - \left(\frac{1}{2}\, 1^2 + 1\right) = \frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} - 1 = 16.$$

(Recordar el ejemplo 8.8.10).

Ejemplo 8.10.6. Calculemos la $\int_{-1}^1 x\, dx$.

Teniendo en cuenta que, salvo constante, $\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$, resulta que

$$\int_{-1}^1 x\, dx = \frac{1}{2}\cdot x^2\,\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

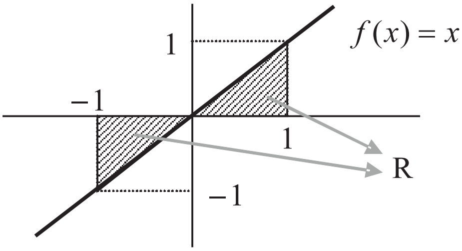


Figura 8.16: $A(\mathrm{R}) \neq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Observemos que la integral definida da 0 y que, claramente, este número *no* es el área de la región acotada R, encerrada por el gráfico de $f(x) = x$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$, $x = 1$ (ver la figura 8.16).

Es claro que el área $A(\mathrm{R}) = 1$.

Este ejemplo refuerza el concepto de que la integral definida da un número real que, salvo que la función continua considerada sea no negativa en *todo* el intervalo, *no* nos da un área. La razón fundamental en este caso es que $f(x) = x < 0$ en $[-1, 0)$ y $f(x) > 0$ en $(0, 1]$.

Teorema 8.10.7 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral, generalizado)**.**

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Sean* u, $v\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables tales que* $Im(u) \subset Dom(f)$ *e* $Im(v) \subset Dom(f)$*. Sea* $H\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt.$$

Entonces, H *es derivable en* (c, d) *y*

$$H'(x) = (f \circ v)\,(x) \cdot v'(x) - (f \circ u)\,(x) \cdot u'(x), \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Demostración. Sea F la función integral de f. Por el Teorema Fundamental (8.9.3) y la regla de Barrow,

$$H(x) = F(v(x)) - F(u(x)) = (F \circ v)\,(x) - (F \circ u)\,(x).$$

Luego, H es derivable en (c, d) por ser composición y resta de funciones derivables y, por la Regla de la cadena,

$$H'(x) = (f \circ v)\,(x) \cdot v'(x) - (f \circ u)\,(x) \cdot u'(x), \quad \forall\, x \in (c, d).$$

□

Ejemplos 8.10.8.

1. Sea $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \int\limits_{x}^{x^2} t\ dt$. Calcular, si existen, los máximos y mínimos locales de G.

   Primera forma

   Como $\frac{1}{2}\ t^2$ es una primitiva de la función $f(t) = t$, por la regla de Barrow, para cada $x \in \mathbb{R}$, resulta

   $$G(x) = \int\limits_{x}^{x^2} t\ dt = \frac{1}{2}t^2 \Bigg|_{x}^{x^2} = \frac{1}{2}(x^2)^2 - \frac{1}{2}(x^2) = \frac{1}{2}(x^4 - x^2). \quad (*)$$

   Luego, $G'(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot (2x^2 - 1) = x \cdot (2x^2 - 1)$. Entonces,

   $$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Por lo tanto los puntos críticos de G son:

   $$PC(G) = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

   La derivada segunda de G es

   $$G''(x) = \frac{1}{2}(12x^2 - 2) = 6x^2 - 1$$

   y

   $$G''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0\ , \qquad G''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0 \quad \text{y} \quad G''(0) = -1 < 0,$$

   por lo tanto, por el criterio de la derivada segunda para clasificar puntos críticos, $x = 0$ es un máximo local de f y $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ son mínimos locales. Además de $(*)$ podemos afirmar que $x = 0$ es máximo local pero no absoluto pues $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(x^4 - x^2) = +\infty$.

   Segunda forma

   Si llamamos $u(x) = x$, $v(x) = x^2$ y $f(t) = t$, como u y v son derivables y f es continua, el Teorema Fundamental del Cálculo Integral generalizado, nos asegura que

   $$\begin{aligned} G'(x) &= f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x) = f(x^2) \cdot 2x - f(x) \cdot 1 = \\ &= x^2 \cdot 2x - x = 2x^3 - x = \\ &= x \cdot (2x^2 - 1). \end{aligned}$$

   Habiendo conseguido la expresión de G', el cálculo de los máximos y mínimos se sigue como en la primera forma.

Observemos que en este caso hemos calculado directamente la expresión de G' sin haber calculado la expresión de G, que en realidad no nos interesa para nuestro objetivo. ✓

2. Calcular los extremos de $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+1} e^{-t^2}\, dt$.

Si quisiéramos repetir lo hecho en la primera forma del ejemplo anterior, para intentar calcular la expresión de G, nos encontraríamos con el problema de tener que calcular una primitiva de la función $f(t) = e^{-t^2}$. Que esta función posee una primitiva lo asegura el Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo se puede probar que es imposible encontrar una expresión (fórmula) de alguna primitiva de f. Por lo tanto, sólo podemos intentar calcular la derivada de G (que es todo lo que nos interesa).

Para ello observemos que, como $f(t) = e^{-t^2}$ es continua y $u(x) = 0$, $v(x) = x^2 + 1$ son derivables, podemos aplicar el Teorema Fundamental Generalizado y obtenemos

$$\begin{aligned} G'(x) &= f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x) = \\ &= f(x^2+1) \cdot 2x - f(0) \cdot 0 \\ &= e^{-\left(x^2+1\right)^2} \cdot 2x, \end{aligned}$$

Luego,

$$G'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Como,

$$G''(x) = 2e^{-\left(x^2+1\right)^2} + 2x \cdot e^{-\left(x^2+1\right)^2} \cdot \left(-2(x^2+1) \cdot 2x\right),$$

resulta que $G''(0) = 2e^{-1} > 0$ y, por lo tanto $x = 0$ es un mínimo local de G.

✓

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable, que satisface la ecuación:

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\, dt = x \ \cdot \ln(x^2) - 2x^2 + x + \ln(2), \quad \forall x \in R_{\neq 0}.$$

Verificar que $f(1) - f'(1) = 1$.

En efecto: Si $G(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} f(t)\, dt$, el Teorema Fundamental nos asegura que

$$G'(x) = f(x). \quad ①$$

Por otra parte, $G(x) = x \ \cdot \ln(x^2) - 2x^2 + x + \ln(2)$. Por lo tanto,

$$G'(x) = \ln(x^2) + x \cdot \frac{2x}{x^2} - 2 \cdot 2x + 1 = \ln(x^2) + 2 - 4x + 1 = \ln(x^2) - 4x + 3.$$

O sea,

$$G'(x) = \ln(x^2) - 4x + 3. \quad ②$$

De ① y ② resulta que, para todo $x \in R_{\neq 0}$,

$$f(x) = \ln(x^2) - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2} - 4 = \frac{2}{x} - 4.$$

Por lo tanto, $f(1) = -1$ y $f'(1) = -2$. De donde, $f(1) - f'(1) = 1$. ✓

8.11. Cálculo de áreas

Veamos ahora cómo la noción de integral definida nos permite calcular áreas de regiones acotadas planas. Analicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.11.1. Sea $f(x) = -x^2 + 2x$. Calculemos el área de la región acotada R, $A(\mathrm{R})$, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$ (ver figura 8.17).

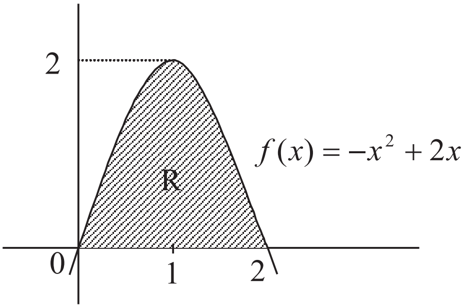


Figura 8.17: Queremos calcular el área de la región sombreada.

Como se ve en la figura anterior

$$f(x) = -x^2 + 2x \geq 0, \quad \forall\, x \in [0, 2]. \quad ①$$

Para obtener este resultado analíticamente observemos que

$$f(x) = -x^2 + 2x = x \cdot (-x + 2), \text{ luego, } f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 2.$$

Como $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0, 2)$ y es continua, podemos aplicar el corolario del Teorema de Bolzano para conocer el signo de f en $(0, 2)$.

Como $f(1) = 1 > 0$, concluimos que $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, 2)$. De donde se deduce ① . Por lo tanto resulta, por la observación 8.8.5, que el área de la región R es

$$A(\mathrm{R}) = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(\mathrm{R}) &= \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}\cdot x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 0^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\ . \end{aligned}$$

O sea, $A(\mathrm{R}) = \frac{4}{3}$.

Ejemplo 8.11.2. Sea $f(x) = x^2 - 2x$. Calculemos el área de la región acotada R, $A(\mathrm{R})$, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$ (ver figura 8.18)

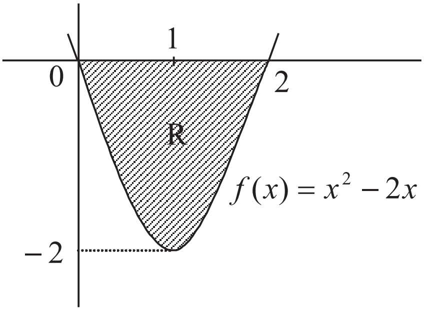


Figura 8.18: Queremos calcular el área de la región sombreada.

Como en el ejemplo anterior, tanto desde el punto de vista gráfico como analítico

$$f(x) = -x^2 + 2x \leq 0, \quad \forall\ x \in [0,2].$$

Por la observación 8.8.5, el área de la región R es

$$A(\mathrm{R}) = -\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_0^2 (x^2-2x)\,dx. \quad ①$$

Luego,

$$\int_0^2 (x^2-2x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{1}{3}2^3 - 2^2\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2\right) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}.$$

O sea, por ①, $A(\mathrm{R}) = \frac{4}{3}$.

Ejemplo 8.11.3. Sea $f(x) = x^2 - 2x$. Calculemos el área de la región acotada R, $A(\mathrm{R})$, encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = 0$, $x = 3$ (ver figura 8.19).

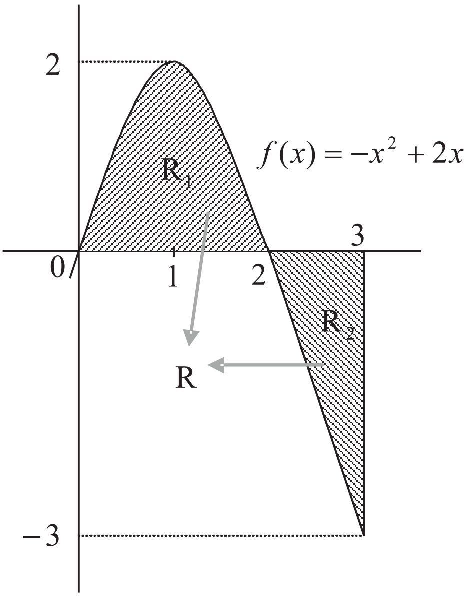


Figura 8.19: Queremos calcular el área de la región sombreada.

Es claro que $R = R_1 \cup R_2$. Luego,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2). \quad ①$$

Como ya hemos visto,

$$f(x) = -x^2 + 2x \geq 0, \quad \forall x \in [0, 2].$$

resulta, por la observación 8.8.5, que el área de la región R_1 es

$$A(R_1) = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left(-\frac{1}{3}\, x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3}\, 2^3 + 2^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\, 0^3 + 0^2\right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

O sea,

$$A(R_1) = \frac{4}{3}\,. \quad ②$$

(En realidad, ya hicimos esta cuenta en el primer ejemplo).

Por otra parte, puede verse en el gráfico y probarse analíticamente (usar Bolzano) que

$$f(x) = -x^2 + 2x \leq 0, \quad \forall x \in [2,3].$$

Por lo tanto, por la observación 8.8.5, resulta que el área de la región R$_2$ es

$$A(\mathrm{R}_2) = -\int_2^3 f(x)\,dx = -\int_2^3 (-x^2+2x)\,dx. \quad ③$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_2^3 (-x^2+2x)\,dx &= \left(-\frac{1}{3}\,x^3 + x^2\right)\Bigg|_2^3 = \left(-\frac{1}{3}\,3^3 + 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\,2^3 + 2^2\right) = \\ &= (-9+9) - (-\frac{8}{3} + 4) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}\,. \quad ④\end{aligned}$$

Luego, de ③ y ④,

$$A(\mathrm{R}_2) = \frac{4}{3}\,. \quad ⑤$$

De ①, ② y ⑤,

$$A(\mathrm{R}) = A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,.$$

Observemos que

$$\int_0^3 (-x^2+2x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}\,x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^3 = \left(-\frac{1}{3}\,3^3 + 3^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\,0^3 + 0^2\right) = -9+9 = 0$$

que, claramente, *no* es el área de la región R.

Observación 8.11.4. Los ejemplos anteriores muestran que para calcular el área de una región acotada R, encerrada por el gráfico de una función f continua en $[a,b]$, el eje x y las rectas verticales $x=a$, $x=b$, debemos realizar los siguientes pasos:

(i) Hallar las raíces de f en $[a,b]$. Supongamos que son $r_1,\ r_2, \cdots,\ r_n$ y que $a \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leq b$.

(ii) Calcular las integrales definidas: $\displaystyle\int_a^{r_1} f(x)\,dx\ ,\ \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx\ , \cdots ,\ \int_{r_n}^{b} f(x)\,dx\ .$

(iii) Considerar los valores absolutos de los números hallados en en el paso (ii) .

(iv) Sumar los números hallados en (iii) .

Observación 8.11.5. Teniendo en cuenta el punto *3* de la observación 8.8.5, resulta que si f es continua en $[c,d]$ y $f \leq 0$, $\forall\ x \in [c,d]$, entonces $-\mathrm{I} = -\int\limits_c^d f(x)\ dx$ representa el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = c$, $x = d$.

Por la proposición 8.8.6

$$-\mathrm{I} = -\int\limits_c^d f(x)\ dx = \int\limits_c^d -f(x)\ dx.$$

Luego, si f es continua en $[c,d]$ y $f(x) \leq 0$, $\forall\ x \in [c,d]$, entonces

$$\int\limits_c^d -f(x)\ dx$$

representa el área de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = c$, $x = d$.

Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 8.11.6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.*

El **área** *de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es el número real (no negativo) $\int\limits_a^b |f(x)|\ dx$.*

Observación 8.11.7. Si encaramos el ejemplo 8.11.3 según la definición 8.11.6, el área de la región a calcular es

$$A(\mathrm{R}) = \int\limits_0^3 |f(x)|\ dx = \int\limits_0^3 \left|-x^2 + 2x\right|\ dx.$$

Para realizar dicho cálculo debemos "sacar" las barras de módulo. Teniendo en cuenta (recordar el ejemplo) que

$$\left|-x^2 + 2x\right| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si} \quad -x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad -x^2 + 2x < 0, \end{cases}$$

es decir,

$$\left|-x^2 + 2x\right| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \in (2,3]. \end{cases}$$

y recordando los cálculos ya hechos resulta que

$$A(\mathrm{R}) \quad = \quad \int\limits_0^3 \left|-x^2 + 2x\right|\ dx = \int\limits_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)\ dx + \int\limits_2^3 \left(x^2 - 2x\right)\ dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-x^2+2x\right)\, dx - \int_2^3 \left(-x^2+2x\right)\, dx = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,.$$

8.12. Cálculo de áreas entre curvas

Veamos cómo la noción de integral definida nos permite calcular áreas de regiones acotadas encerradas por los gráficos de dos o más funciones.

Sean f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Supongamos que los gráficos de f y de g se cortan para $x=a$ y $x=b$ y que $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

Queremos calcular el área de la región acotada R encerrada por el gráfico de f y el gráfico de g tal como lo muestra la figura 8.20.

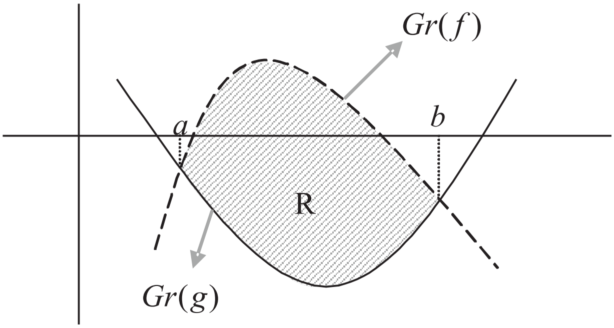


Figura 8.20: ¿Cuál es el área de la región sombreada?

Por ser f y g continuas en $[a,b]$, resulta que f y g son acotadas en $[a,b]$. Por lo tanto debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x)+k \geq 0, \quad g(x)+k \geq 0, \quad \forall\, x \in [a,b]. \quad ①$$

Definiendo

$$\tilde{f}(x)=f(x)+k, \quad \tilde{g}(x)=g(x)+k, \quad ②$$

resulta que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son continuas en $[a,b]$ y

$$\tilde{f}(x) \geq 0, \quad \tilde{g}(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in [a,b]. \quad ③$$

Como lo muestra la figura 8.21, es claro que el área de la región acotada $\tilde{\mathrm{R}}$ encerrada por el gráfico de $\tilde{f}$ y el gráfico de $\tilde{g}$ coincide con el área de la región original R. O sea

$$A(\tilde{\mathrm{R}})=A(\mathrm{R}). \quad ④$$

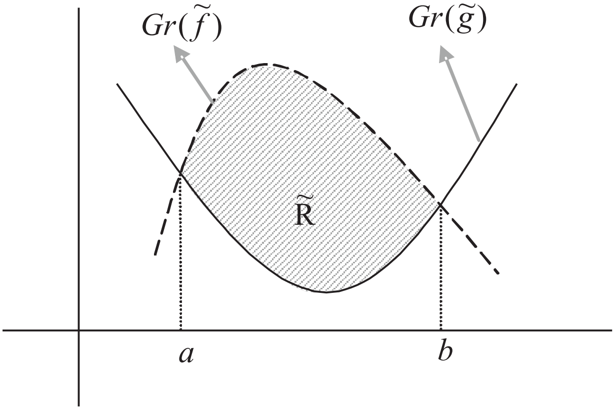


Figura 8.21: $A(\tilde{\mathrm{R}}) = A(\mathrm{R})$.

Observando la figura 8.22 y la figura 8.23, es claro que

$$A(\tilde{\mathrm{R}}) = A(\tilde{\mathrm{R}}_1) - A(\tilde{\mathrm{R}}_2). \quad ⑤$$

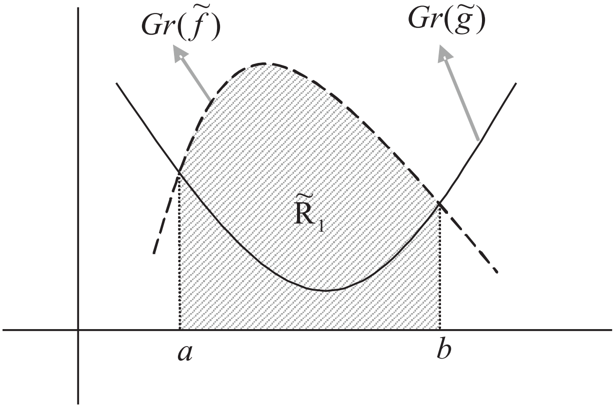


Figura 8.22: $A(\tilde{\mathrm{R}_1}) = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\, dx$.

La región $\tilde{\mathrm{R}}_1$ es la región encerrada por el gráfico de $\tilde{f}$, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. La región $\tilde{\mathrm{R}}_2$ es la región encerrada por el gráfico de $\tilde{g}$, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Luego, por ③, ④, ⑤ y la observación 8.8.5, resulta que

$$A(\mathrm{R}) = A(\tilde{\mathrm{R}}) = A(\tilde{\mathrm{R}}_1) - A(\tilde{\mathrm{R}}_2) = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\, dx - \int\limits_a^b \tilde{g}(x)\, dx = \int\limits_a^b \Big(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\Big)\, dx. \quad ⑥$$

Por último observemos que $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) = (f(x) + k) - (g(x) + k) = f(x) - g(x)$. ⑦

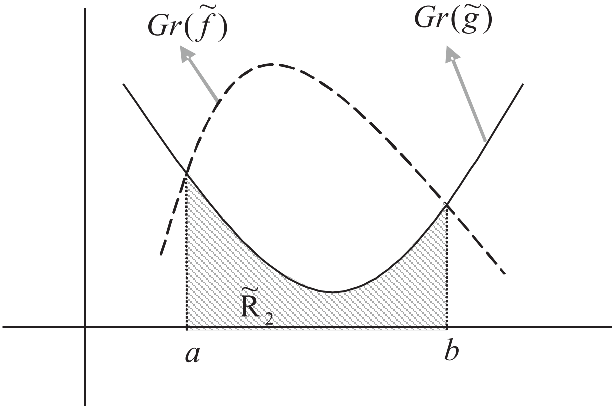


Figura 8.23: $A(\tilde{R_2}) = \int\limits_a^b \tilde{g}(x)\, dx.$

Luego, de ⑥ y ⑦,

$$A(\mathrm{R}) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$

Analicemos ahora el caso general. Sean f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continuas. Queremos calcular el área de la región acotada R encerrada por el gráfico de f y el gráfico de g tal como lo muestra la figura 8.24. Por ser f y g continuas en $[a, b]$, resulta que f y g son acotadas en $[a, b]$. Por lo tanto debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ x \in [a, b]$

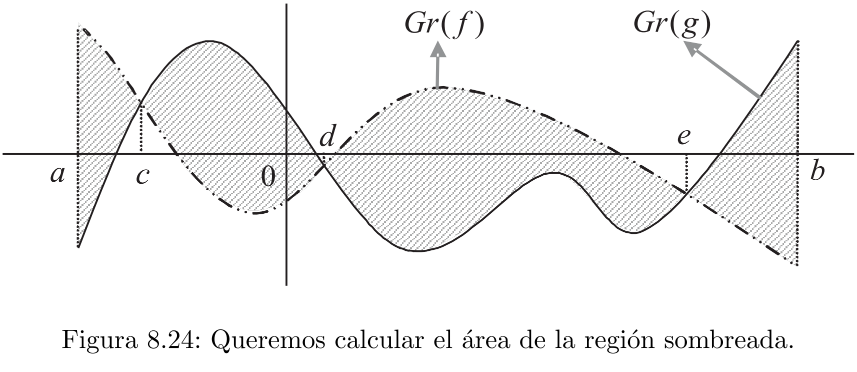


Figura 8.24: Queremos calcular el área de la región sombreada.

$$f(x) + k \geq 0, \quad g(x) + k \geq 0. \quad ①$$

Definiendo

$$\tilde{f}(x) = f(x) + k, \quad \tilde{g}(x) = g(x) + k, \quad ②$$

resulta que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son continuas en $[a, b]$ y

$$\tilde{f}(x) \geq 0, \quad \tilde{g}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad ③$$

Como antes, es claro que el área de la región acotada $\tilde{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4$ encerrada por el gráfico de $\tilde{f}$, el gráfico de $\tilde{g}$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ coincide con el área de la región original R tal como lo muestra la figura 8.25.

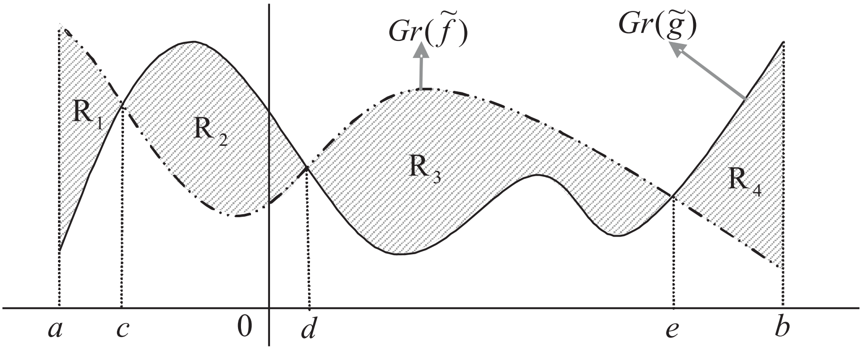


Figura 8.25: Área encerrada por $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$.

Como lo muestra la figura 8.25, supongamos que los gráficos de f y g se cortan para $x = c$, $x = d$ y $x = e$.

Luego,

$$A(\mathrm{R}) = A(\tilde{\mathrm{R}}) = A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2) + A(\mathrm{R}_3) + A(\mathrm{R}_4). \quad ❶$$

Es claro que

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) \geq \tilde{g}(x) & \text{si} \quad x \in [a, c] \\ \tilde{g}(x) \geq \tilde{f}(x) & \text{si} \quad x \in [c, d] \\ \tilde{f}(x) \geq \tilde{g}(x) & \text{si} \quad x \in [d, e] \\ \tilde{g}(x) \geq \tilde{f}(x) & \text{si} \quad x \in [e, b] \end{cases} \quad ❷$$

Observando la figura 8.25, tenemos

$$A(\mathrm{R}_1) = \int_a^c \tilde{f}(x)\,dx - \int_a^c \tilde{g}(x)\,dx = \int_a^c \left(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\right)\,dx. \quad ❸$$

Análogamente,

$$A(\mathrm{R}_2) = \int_c^d \left(\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\right)\,dx. \quad ❹$$

$$A(\mathrm{R}_3) = \int_d^e \left(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\right)\,dx. \quad ❺$$

$$A(\mathrm{R}_4) = \int_e^b \left(\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\right)\ dx. \quad ❻$$

Luego, teniendo en cuenta ❶, ❷, ❸, ❹, ❺ y ❻ resulta que

$$\begin{aligned} A(\mathrm{R}) &= A(\mathrm{R}_1) + A(\mathrm{R}_2) + A(\mathrm{R}_3) + A(\mathrm{R}_4) = \\ &= \int_a^c \left(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\right)\ dx + \int_c^d \left(\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\right)\ dx + \\ &\qquad + \int_d^e \left(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\right)\ dx + \int_e^b \left(\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)\right)\ dx\ . \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) = (f(x) + k) - (g(x) + k) = f(x) - g(x)$$

y

$$\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x) = (g(x) + k) - (f(x) + k) = g(x) - f(x), \quad ❼$$

resulta que

$$\begin{aligned} A(\mathrm{R}) &= \int_a^c (f(x) - g(x))\ dx + \int_c^d (g(x) - f(x))\ dx + \\ &\qquad + \int_d^e (f(x) - g(x))\ dx + \int_e^b (g(x) - f(x))\ dx. \quad ❽ \end{aligned}$$

Por ❷ y ❼ resulta que

$$\left\{ \begin{array}{lll} f(x) - g(x) \geq 0 & \text{si} & x \in [a, c] \cup [d, e], \\ g(x) - f(x) \geq 0 & \text{si} & x \in [c, d] \cup [e, b]. \end{array} \right. \quad ❾$$

Por último, por la definición de módulo y ❽

$$A(\mathrm{R}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$

Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 8.12.1. *Sean $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.*

El **área** *de la región acotada encerrada por el gráfico de f, el gráfico de g y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es el número real (no negativo)* $\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$.

Observación 8.12.2. El ejemplo anterior muestra que para calcular el área de la región acotada R encerrada por los gráficos de las funciones continuas f y g, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ debimos realizar los siguientes pasos:

(i) Hallar los valores x para los cuales se cortan los gráficos de f y de g. Estos son $x = c$, $x = d$ y $x = e$, con $a < c < d < e < b$.

(ii) Considerar los intervalos $[a, c]$, $[c, d]$, $[d, e]$ y $[e, b]$.

(iii) En cada uno de los intervalos dados en (ii) , analizar cuál de las dos funciones es la más grande. En cada intervalo, es común denominar función "techo" a la más grande y función "piso" a la más chica.

(iv) En cada uno de los intervalos dados en (ii) , calcular las integrales definidas de la resta entre la función "techo" y la función "piso".

(v) Considerar la suma de los números hallados en (iv) .

Ejemplos 8.12.3.

1. Sean $f(x) = 3 - x$ y $g(x) = x^2 - 9$. Queremos calcular el área de la región acotada R encerrada por el gráfico de f y el gráfico de g (ver figura 8.26).

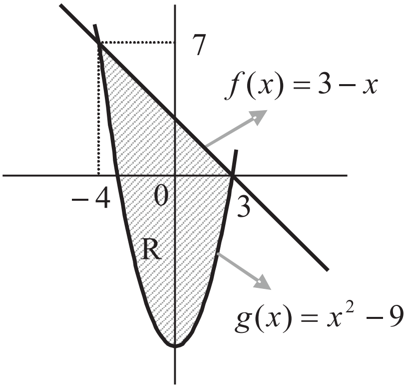


Figura 8.26: Calcular el área de la región sombreada.

Calculemos, analíticamente, la intersección de los gráficos de f y g.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3 - x = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \quad \vee \quad x = 3.$$

Como f y g son continuas, $f(x) \neq g(x) \ \ \forall\, x \in (-4, 3)$, y $f(0) = 3 > -9 = g(0)$, por el Corolario del Teorema de Bolzano, resulta que $f(x) \geq g(x), \ \ \forall\, x \in [-4, 3]$.

Luego, en el intervalo $[-4,3]$, la función "techo" es f y la función "piso" es g. Luego

$$\begin{aligned} A(\mathrm{R}) &= \int_{-4}^{3} (f(x)-g(x))\ dx = \int_{-4}^{3} \left((3-x)-\left(x^2-9\right)\right)\ dx = \\ &= \int_{-4}^{3} \left(-x^2-x+12\right)\ dx = \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+12x\right)\Big|_{-4}^{3} = \\ &= \left(-\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+12\cdot 3\right)-\left(-\frac{(-4)^3}{3}-\frac{(-4)^2}{2}+12\cdot(-4)\right) = \\ &= \frac{343}{6}\,. \end{aligned}$$

Luego,

$$A(\mathrm{R}) = \frac{343}{6}. \quad \checkmark$$

2. Sean $f(x)=x^2$ y $g(x)=2-x^2$. Queremos calcular el área de la región acotada R encerrada por el gráfico de f, el gráfico de g y las rectas verticales $x=0$, $x=2$ (ver figura 8.27).

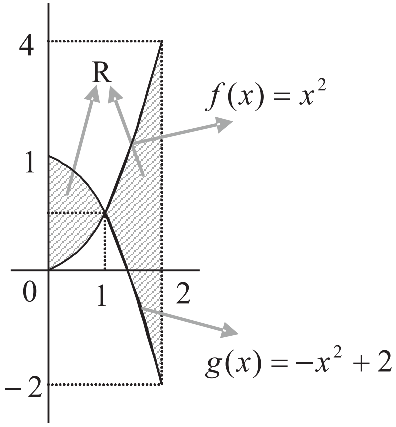


Figura 8.27: Calcular el área de la región sombreada.

Calculemos, analíticamente, la intersección de los gráficos de f y g.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=-x^2+2 \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=1.$$

Como sólo nos interesa lo que ocurre en $[0,2]$, el único punto de intersección que debemos considerar es $x=1$.

Teniendo en cuenta que:

a) f y g son continuas,

b) $f(x) \neq g(x), \ \ \forall\, x \in (0,1)$,

c) $f(x) \neq g(x), \ \ \forall\, x \in (1,2)$,

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < -\frac{1}{4} + 2 = g\left(\frac{1}{2}\right)$,

e) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} > -\frac{9}{4} + 2 = g\left(\frac{3}{2}\right)$,

por el Corolario del Teorema de Bolzano, resulta que

$$f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [0,1] \quad \text{y} \quad f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [1,2].$$

Luego, en el intervalo $[0,1]$, la función "techo" es g y la función "piso" es f y en el intervalo $[1,2]$, la función "techo" es f y la función "piso" es g. Entonces,

$$\begin{aligned} A(\mathrm{R}) &= \int_0^1 (g(x) - f(x))\ dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))\ dx = \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 + 2 - x^2\right)\ dx + \int_1^2 \left(x^2 - (-x^2 + 2)\right)\ dx = \\ &= \int_0^1 \left(-2x^2 + 2\right)\ dx + \int_1^2 \left(2x^2 - 2\right)\ dx = \\ &= \left(-\frac{2}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x\right) \Bigg|_0^1 + \left(\frac{2}{3} \cdot x^3 - 2x\right) \Bigg|_1^2 . \end{aligned}$$

Luego,

$$\left(-\frac{2}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x\right) \Bigg|_0^1 = \left[\left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0\right)\right] = \frac{4}{3}$$

y

$$\left(\frac{2}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x\right) \Bigg|_1^2 = \left[\left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1\right)\right] = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3},$$

entonces,

$$A(R) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4. \quad \checkmark$$

Capítulo 9

Sistemas de ecuaciones lineales

9.1. Introducción

En este capítulo vamos a analizar problemas donde tenemos que encontrar el valor de distintas incógnitas a partir de una o más ecuaciones. Hasta ahora, sabemos resolver ecuaciones como ésta:

$$3x = 24$$

y lo hacemos despejando x:

$$x = \frac{24}{3} \qquad 0 \qquad x = 8.$$

En la ecuación, decimos que x es una *incógnita*, ya que representa un valor que no conocemos, y que debemos calcular.

En algunos problemas puede haber más de una incógnita, veamos un ejemplo que tiene unos 4000 años de antigüedad:

> Tengo cien animales entre cabras y gallinas. Si en total suman 240 patas, ¿cuántos animales tengo de cada clase?

Para resolver este problema, introducimos dos incógnitas: x que representa la cantidad de cabras, e y la cantidad de gallinas. Ahora, armamos dos ecuaciones con los datos del problema:

$$x + y = 100 \qquad \text{tengo 100 animales entre cabras y gallinas.}$$

Cada cabra tiene cuatro patas, entonces habrá $4x$ patas de cabra, y como cada gallina sólo tiene 2, habrá $2y$. Eso nos da la segunda ecuación:

$$4x + 2y = 240.$$

El sistema que queremos resolver tiene entonces dos incógnitas, x e y, y dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ 4x & + & 2y & = & 240 \end{array}\right.$$

El objetivo de este capítulo es estudiar estos sistemas y plantear ecuaciones lineales para resolver problemas similares.

9.2. ¿Qué es un sistema lineal?

Veamos qué significa un *sistema de ecuaciones lineales:* con *sistema de ecuaciones*, indicamos que pueden ser una o más ecuaciones; lo mismo pasa con el número de incógnitas: podría haber 3, 8, o más. En general, llamaremos x, y, z a las incógnitas y si necesitamos más, agregaremos u, v, w; o bien

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Con la palabra *lineales* estamos restringiendo el tipo de ecuaciones: *no* vamos a aceptar una cuadrática, ni una ecuación polinomial, ni sistemas que involucren funciones. Por ejemplo, *no* vamos a estudiar ecuaciones como:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ e^x + 2y &= 10, \\ 3x - \ln(y) - z^4 &= 24. \end{aligned}$$

Aceptaremos únicamente que las incógnitas $(x, y, z, \ldots)$ aparezcan multiplicadas por números, y luego sumadas entre sí. No vamos a aceptar tampoco que las incógnitas se multipliquen entre sí:

$$xy + xz - 3y + z = 3$$

no es una ecuación lineal, ya que aparecen los términos xy y xz.

Los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas tienen una interpretación geométrica sencilla, ya que si despejamos una de las incógnitas en función de la otra, obtenemos la ecuación de una recta.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ 4x & + & 2y & = & 240 \end{array}\right.$$

la primer ecuación nos indica los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ que cumplen

$$x + y = 100,$$

que son los puntos de la recta

$$y = -x + 100.$$

Por otro lado, la ecuación

$$4x + 2y = 240,$$

indica los puntos de la recta

$$y = -2x + 120.$$

Una *solución del sistema* es un par de valores x e y que cumple ambas ecuaciones o, lo que es lo mismo, que está en ambas rectas a la vez. Entonces, resolver el sistema es hallar el punto de intersección de las rectas (ver la figura 9.1).

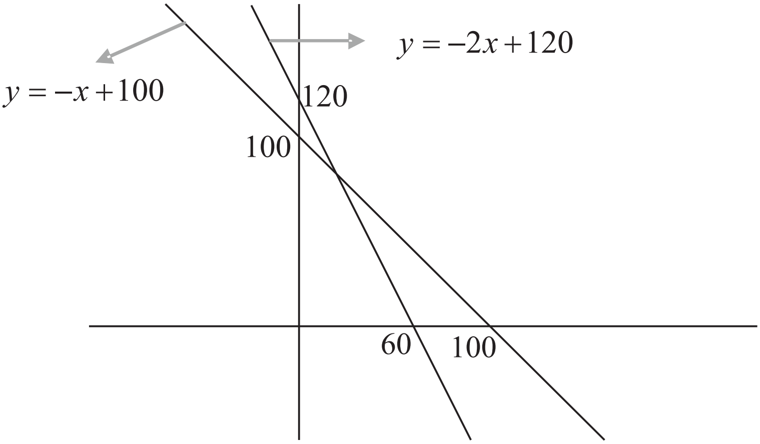


Figura 9.1: Podemos representar gráficamente el sistema.

9.3. Soluciones

En esta sección vamos a discutir qué es una solución de un sistema de ecuaciones lineales. Volviendo al ejemplo del principio,

$$3x = 24,$$

decimos que $x = 8$ es una solución ya que se cumple la igualdad:

$$3 \cdot 8 = 24$$

al reemplazar x por 8.

En cambio, si hacemos $x = 4$, queda

$$3 \cdot 4 = 12 \neq 24,$$

vemos que el cuatro no es solución, ya que no es cierto lo que obtenemos al reemplazarlo, 12 no es igual a 24.

Para los sistemas de ecuaciones, el concepto de *solución* es el mismo: son los valores de las incógnitas que verifican todas las igualdades al ser reemplazados.

En el problema de las cabras y las gallinas,

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 240 \end{cases}$$

si $x = 20$ e $y = 80$, al reemplazar tenemos

$$\begin{cases} 20 & + & 80 & = & 100 \\ 4 \cdot 20 & + & 2 \cdot 80 & = & 240 \end{cases}$$

se cumplen ambas ecuaciones. Así, $x = 20$ e $y = 80$ es *una* solución del sistema. Observemos que es una sola solución, ya que cada solución tiene que indicar un valor para x y otro para y.

En el mismo ejemplo, $x = 50$ e $y = 50$ no es una solución: aunque cumpla la primer ecuación,

$$50 + 50 = 100,$$

no cumple la segunda:

$$4 \cdot 50 + 2 \cdot 50 = 200 + 100 = 300 \neq 240.$$

Para problemas con más incógnitas procedemos de la misma manera. Por ejemplo, si el sistema es

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 30 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 50 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -15 \end{cases}$$

podemos comprobar que $x = 20, y = 5, z = 5$ es una solución:

$$\begin{cases} 20 & + & 5 & + & 5 & = & 30 \\ 2 \cdot 20 & - & 5 & + & 3 \cdot 5 & = & 50 \\ -20 & + & 2 \cdot 5 & - & 5 & = & -15 \end{cases}$$

Un sistema puede tener más de una solución. Por ejemplo, $x = 1$, $y = 9$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} x & + & y & = & 10 \\ 3x & + & 3y & = & 30 \end{cases}$$

Pero también $x = 10$, $y = 0$ es una solución, ó $x = 5$, $y = 5$.

Podemos ver que para cualquier número t que elijamos, tenemos la solución $x = t$, $y = 10 - t$. Reemplazando:

$$\begin{cases} t & + & 10 - t & = & 10 \\ 3t & + & 3(10 - t) & = & 30 \end{cases}$$

Vemos así que este sistema tiene infinitas soluciones. El conjunto de soluciones de este sistema es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) = (t, 10 - t), \ t \in \mathbb{R}\},$$

para abreviar, podemos escribir las soluciones así:

$$\{(t, 10 - t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

o también:

$$\{t(1, -1) + (0, 10) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

También es posible que un sistema no tenga soluciones, por ejemplo consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x & + & y & = & -1 \\ x & + & y & = & 8 \end{cases}$$

Si hubiera una solución, los valores de x e y sumados tendrían que valer -1 según la primer ecuación, y 8 según la segunda, lo cual no tiene sentido. Sumar dos números no me puede dar dos resultados diferentes.

Observación 9.3.1. Veamos un problema diferente que puede plantearse. Aquí conocemos las soluciones, pero no uno de los coeficientes. El problema es calcular el valor de a en el siguiente sistema

$$\begin{cases} x & + & y & = & 11 \\ ax & + & 2y & = & 25 \end{cases}$$

sabiendo que $x = 1, y = 10$ es solución.

Para resolverlo, reemplazamos los valores de x e y:

$$\begin{cases} 1 & + & 10 & = & 11 \\ a \cdot 1 & + & 2 \cdot 10 & = & 25 \end{cases}$$

La primer ecuación no nos dice nada sobre el valor de a; en cambio, en la segunda tenemos que

$$a + 20 = 25, \quad \text{de donde obtenemos que} \quad a = 5.$$

9.4. Equivalencia de sistemas

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales es conveniente definir cuándo dos sistemas son equivalentes.

Observemos estos dos sistemas:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 10 \\ -x & + & y & = & 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x & + & y & = & 10 \\ & & 3y & = & 18 \end{cases}$$

El segundo sistema es muy sencillo de resolver: si $3y = 18$, entonces $y = 6$. Ahora, en la primer ecuación, si $x + y = 10$, como $y = 6$, tenemos que

$$x + 6 = 10$$

con lo cual obtenemos $x = 4$. Observemos que no puede haber otra solución: $y = 6$ es la única opción para la segunda ecuación, y con ese valor, x está obligado a valer 4. Luego, la solución del segundo sistema es $x = 4,\ y = 6$.

Veamos ahora el primer sistema. Si reemplazamos $x = 4,\ y = 6$, queda

$$\begin{cases} 4 & + & 6 & = & 10 \\ -4 & + & 6 & = & 2 \end{cases}$$

así que $x = 4$, $y = 6$ es también una solución del primero. ¿Tendrá otras soluciones? Para averiguarlo, vamos a despejar x en la primer ecuación:

$$x = 10 - y.$$

Si reemplazamos este valor de x en la segunda ecuación, conseguimos:

$$-(10 - y) + y = 2,$$

distribuyendo el signo es

$$-10 + y + y = 2,$$

que se convierte en

$$2y = 12.$$

Esta ecuación tiene a $y = 6$ como única solución, y reemplazando en $x = 10 - y$, el único valor posible para x es 4. Por lo tanto, ambos sistemas tienen la misma solución, aunque uno fue mucho más simple de resolver que el otro.

Definición 9.4.1. *Decimos que dos sistemas son* **equivalentes** *cuando tienen las mismas soluciones.*

El concepto de equivalencia de dos sistemas nos permitirá transformar un sistema difícil de resolver en otro equivalente pero más simple.

A continuación, definimos tres operaciones para transformar un sistema en otro equivalente:

- Cambiar dos ecuaciones de lugar.
- Multiplicar (o dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar (o restar) a una ecuación, un múltiplo de otra.

Afirmamos que estas operaciones no cambian las soluciones de un sistema.

Volvamos a los sistemas anteriores:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 3y & = & 18 \end{array}\right.$$

Veamos con las operaciones permitidas que los sistemas son equivalentes, sin necesidad de resolverlos. Para eso, vamos a transformar el primero en el segundo.

La primera operación que podemos hacer es reemplazar la segunda ecuación por la suma de la primer ecuación mas la segunda, esto lo indicamos como $E_2 + E_1 \to E_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad E_2 + E_1 \to E_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right.$$

Ahora, en el nuevo sistema que obtuvimos, vamos a multiplicar la segunda ecuación por 3, y lo indicaremos como $3E_2 \to E_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right. \qquad 3E_2 \to E_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 6y & = & 36 \end{array}\right.$$

Por último, dividimos la segunda ecuación por 2 (o multiplicamos por $\frac{1}{2}$):

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 6y & = & 36 \end{array}\right. \qquad \frac{1}{2}\,E_2 \to E_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 3y & = & 18 \end{array}\right.$$

con lo cual pasamos de un sistema al otro utilizando las operaciones permitidas. Esto nos dice que ambos sistemas son equivalentes y entonces tienen las mismas soluciones. Para calcularlas nos conviene utilizar el segundo, donde tenemos y casi despejada. ✓

Ejemplo 9.4.2. Veamos que los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ 3x & + & 3y & = & 30 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Comenzamos intercambiando la primera y la segunda ecuación, y lo indicamos con $E_1 \leftrightarrow E_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ 3x & + & 3y & = & 30 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right. \qquad E_1 \leftrightarrow E_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3y & = & 30 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right.$$

Ahora, dividimos la primera ecuación por 3 (o multiplicamos por $\frac{1}{3}$):

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3y & = & 30 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right. \qquad \frac{1}{3}\,E_1 \to E_1 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right.$$

Podemos ahora sumarle a la segunda ecuación la primera:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right. \qquad E_2 + E_1 \to E_2 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right.$$

Restamos a la tercera ecuación un múltiplo de la primera, por ejemplo, el doble de la primera

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \\ 2x & + & 4y & = & 32 \end{array}\right. \qquad E_3 - 2E_1 \to E_3 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right.$$

Observemos que en el sistema que obtuvimos, las dos últimas ecuaciones son iguales. Como podemos restarle a la tercera ecuación la segunda, va a desaparecer, y el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right. \qquad E_3 - E_2 \to E_3 \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 10 \\ & & 2y & = & 12 \end{array}\right.$$

De esta manera, hemos pasado de un sistema a otro con las operaciones permitidas para mantener la equivalencia. Así, podemos decir que los sistemas

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + 3y = 30 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x + y = 10 \\ \phantom{x +{}} 2y = 12. \end{cases}$$

son equivalentes sin necesidad de calcular las soluciones. ✓

La utilidad de realizar operaciones permitidas entre las ecuaciones de un sistema, es pasar de un sistema cuyas soluciones no se pueden hallar fácilmente, a otro equivalente del cual sea sencillo hallar dichas soluciones.

9.5. Eliminación de Gauss

Hasta ahora, no hemos dado un método para *encontrar* las soluciones. En esta sección veremos uno, el método de eliminación (o triangulación) de Gauss.

La idea es sencilla: aplicar las operaciones básicas a un sistema hasta que la última ecuación tenga una sola incógnita, lo cual permite despejarla, y reduce el problema. Pero como el método es más difícil de describir que de aplicar, vamos a explicarlo resolviendo algunos ejemplos.

Ejemplo 9.5.1. Empecemos con un sistema sencillo:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - y = -8 \end{cases}$$

El primer paso será quedarnos sólo con los coeficientes de las ecuaciones, y con los resultados. No vamos a escribir las incógnitas x e y, y vamos a poner los números en una tabla:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Observemos que la primer ecuación es $x + 2y = 2$, el coeficiente de x es 1, y el de y es 2. La ecuación está igualada a 2, con lo cual ponemos ese valor del otro lado de la barra, para indicar que no es un coeficiente.

De la misma manera, la segunda ecuación es $3x - y = -8$, los coeficientes de x e y son 3 y -1, y del otro lado de la barra colocamos el -8.

Siempre que tengamos un sistema lineal, vamos a llevarlo a esta forma para resolverlo por Gauss. Mentalmente, recordemos que la primer columna representa los coeficientes de x, la segunda representa los coeficientes de y, y después de la barra vienen los valores a los que están igualadas las ecuaciones.

Podemos realizar con las filas de la tabla las mismas operaciones que con las ecuaciones: por ejemplo si multiplicamos la primer ecuación por 2

$$2 \cdot (x + 2y = 2) \quad \rightarrow \quad 2x + 4y = 4$$

los nuevos coeficientes son los mismos que si multiplicamos la primera fila por dos:

$$2\cdot\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad\rightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Recordemos entonces las operaciones elementales en términos de las filas de esta tabla:

- Cambiar dos filas de lugar.
- Multiplicar (dividir) una fila por un número distinto de cero.
- Sumar (restar) a una fila, un múltiplo de otra.

Una vez que tenemos la tabla sin las incógnitas, el segundo paso es eliminar el coeficiente de la incógnita x en la última fila.

Para esto, podemos hacer la segunda fila menos tres veces la primera, $F_2 - 3F_1 \to F_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -8 \end{array}\right) \qquad F_2 - 3F_1 \to F_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right)$$

Logramos eliminar en la segunda fila el coeficiente de la incógnita x. Como hemos aplicado las operaciones elementales, la tabla nueva corresponde a un sistema equivalente al primero:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 2 \\ & - & 7y & = & -14 \end{array}\right.$$

La ventaja es que en éste podemos despejar el valor de y de la segunda ecuación:

$$-7y = -14 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Ahora, reemplazamos en la primera y tenemos:

$$x + 2\cdot 2 = 2 \;\;\Rightarrow\;\; x + 4 = 2 \;\;\Rightarrow\;\; x = 2 - 4 \;\;\Rightarrow\;\; x = -2.$$

La solución del sistema es entonces $x = -2,\ y = 2.$ ✓

Ejemplo 9.5.2. Resolvamos ahora un sistema con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 6 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

La primera parte es exactamente igual, se ubican los coeficientes en la tabla:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Notemos que como la última ecuación no tiene la incógnita y, en ese lugar ubicamos un cero. En la primera columna van los coeficientes de x; en la segunda, los de y; y en la tercera, los de z. Si alguna de las variables falta, se coloca un cero en el lugar que corresponde.

Ahora, queremos que el coeficiente de x aparezca sólo en la primera fila, y vamos a eliminarlo de la segunda y la tercera.

A la segunda fila podemos restarle dos veces la primera:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad F_2 - 2F_1 \to F_2 \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora, vamos a sumarle la primera fila a la tercera:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad F_3 + F_1 \to F_3 \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Logramos que en la segunda y tercera fila, el coeficiente de la x sea cero. Podemos pensar que la segunda y la tercera fila son un sistema nuevo más chico, y si lo resolvemos, reemplazando los valores de y y de z en la primera, calculamos el valor de x.

Entonces, para resolverlo eliminamos el coeficiente de y de la tercera fila. La pregunta es qué haremos, porque parece haber dos opciones:

a) $F_3 - F_1$, restarle a la tercer fila, la primera.

b) $3F_3 + F_2$, multiplicar la tercer fila por 3 y sumarle la segunda.

Si pensamos un rato, vamos a ver que la primera opción es mala, ya que vuelve a colocar un 1 en el lugar de la x de la última fila, arruinando el paso anterior. En cambio, como el lugar de x en la segunda fila es cero, no perdemos el cero de la tercera fila si hacemos $3F_3 + F_2$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad 3F_3 + F_2 \to F_3 \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

Ahí terminamos el proceso de eliminación (o de triangulación: los únicos coeficientes no nulos quedaron en un triángulo). Vamos a resolver el sistema.

Armemos el nuevo sistema,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & & & 7z & = & 14 \end{array}\right.$$

En la última ecuación,

$$7z = 14 \quad \text{despejando,} \quad z = \frac{14}{7} = 2.$$

Ahora, en la segunda reemplazamos el valor de z

$$-3y + 4 \cdot 2 = 8,$$

y despejamos:

$$-3y + 8 = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8-8}{-3} = 0.$$

Para terminar, reemplazamos los valores de y y de z en la primera

$$x + 0 - 2 = -1$$

y despejamos:

$$x - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 + 2 = 1.$$

Entonces, la solución del sistema es

$$\begin{array}{rcl} x &=& 1, \\ y &=& 0, \\ z &=& 2. \quad \checkmark \end{array}$$

Observación 9.5.3. Al triangular un sistema, conviene siempre empezar por la primer columna de la tabla, y obtener ceros en la segunda fila, la tercera, cuarta, etc.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & * & * & * & \end{array}\right)$$

Cuando logramos esto, pasamos a la segunda columna. Operamos con la segunda fila para lograr ceros en los elementos de la segunda columna que están en la tercera fila, en la cuarta, etc.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & \end{array}\right)$$

Luego pasamos a la tercer columna, y queremos obtener ceros debajo de la tercera fila. Las operaciones se hacen con la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & \\ 0 & 0 & 0 & * & \end{array}\right)$$

Así continuamos hasta la última columna.

Los números que van quedando en la diagonal se llaman *pivotes* del sistema. Estos no pueden valer cero, pues no los podríamos utilizar para triangular. Pero puede ocurrir que en algún momento uno de ellos sea nulo, supongamos que después de conseguir ceros en la primera columna tenemos esta situación:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & * & * & * & \end{array}\right)$$

En ese caso, cambiamos la segunda fila con la tercera (que es una de las operaciones permitidas) y queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & \\ 0 & 0 & * & * & \\ 0 & * & * & * & \end{array}\right)$$

y ahora podemos seguir operando. (Cuidado: puede suceder que los valores de la segunda columna a partir de la segunda fila sean todos nulos, en este caso dejamos a esta columna así y pasamos a la tercera, esto lo veremos en un ejemplo.)

Por encima de la diagonal, no nos interesa qué ocurre. Necesitamos ceros debajo de los p_i, y arriba puede haber cualquier número (también en la fila del costado), buscamos que la tabla quede de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} p_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & p_2 & * & \dots & * & \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n & \end{array}\right)$$

Un consejo útil: cuando se buscan ceros en la primera columna, conviene utilizar sólo la primera fila para triangular (hacemos Fila 2 mas ó menos un múltiplo de Fila 1, Fila 3 mas ó menos un múltiplo de Fila 1, etc.). Una vez que se logró ésto, nos olvidamos de la primera fila. Para los ceros en la segunda columna, pasamos a operar con la segunda fila (hacemos Fila 3 mas ó menos un múltiplo de Fila 2, Fila 4 mas ó menos un múltiplo de Fila 2, etc.), y así sucesivamente.

Ejemplo 9.5.4. En algunas ocasiones, al triangular no podemos elegir un pivote:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

La tabla que corresponde al sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $F_2 - 2F_1 \to F_2$ y $F_3 + F_1 \to F_3$, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Vemos que se hacen ceros todos los elementos de la segunda columna a partir de la segunda fila, y no podemos obtener un pivote. Entonces, pasamos a la columna siguiente (en este caso la tercera), y seguimos triangulando a partir de allí.

Haciendo $3F_3 + 2F_2 \to F_2$ obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el sistema queda triangulado. Descartamos la última fila, ya que no da información, y en la segunda obtenemos que $-3z = -3$, es decir, $z = 1$.

Reemplazando en la primera,

$$x - y + z = 1 \to x - y + 1 = 1$$

esto es, $x - y = 0$ ó $x = y$.

Las soluciones son entonces

$$(x, x, 1) : x \in \mathbb{R},$$

que es lo mismo que

$$x(1,1,0) + (0,0,1) : x \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 9.5.5. Puede ocurrir que un sistema tenga más filas que columnas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}\right.$$

Vamos a proceder exactamente igual:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \to \qquad \left(\begin{array}{cr|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Como queremos ceros en la primera columna, hacemos:

$$\left(\begin{array}{cr|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ll} F_2 - F_1 & \to F_2 \\ F_3 - 2F_1 & \to F_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Las dos últimas filas son iguales, así que descartamos una; el sistema equivalente al original es

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ & - & 3y & = & -3 \end{array}\right.$$

De la última ecuación obtenemos $y = 1$; reemplazamos en la primera y resulta

$$x + 2 \cdot 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3 - 2 = 1,$$

Por lo tanto la solución del sistema es $x = 1$, $y = 1$. ✓

Ejemplo 9.5.6. Habíamos dicho que hay sistemas que no tienen solución, y mencionamos éste:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ x & + & y & = & 8 \end{array}\right.$$

Veamos qué pasa cuando intentamos triangularlo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ x & + & y & = & 8 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Si restamos la fila 1 a la fila 2,

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \qquad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

vemos que en la última fila los coeficientes de las dos incógnitas son nulos, y si queremos armar el sistema nuevo, queda

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ & & 0 & = & 9. \end{array}\right.$$

La última ecuación no tiene sentido, cero no puede ser igual a nueve. Ese absurdo nos dice que el sistema no tiene ninguna solución. ✓

Ejemplo 9.5.7. Cuando un sistema tiene infinitas soluciones, también nos damos cuenta al triangularlo. Por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ -2x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Veamos qué pasa cuando intentamos triangularlo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ -2x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Si sumamos el doble de la fila 1 a la fila 2,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \qquad F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vemos que en la última fila se anularon los coeficientes de las dos incógnitas, pero que también se anuló el término del otro lado de la barra. Armando el nuevo sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & -1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

La última ecuación no nos dice nada nuevo, pero no es contradictoria. Podemos borrarla, ya que no nos da información sobre x o y. Ahora, el sistema tiene sólo una ecuación, con dos incógnitas:

$$\{x + y = -1$$

Para resolverlo, despejamos una (la x, por ejemplo) y nos queda:

$$x = -1 - y.$$

Entonces, tenemos infinitas soluciones, cualquier valor para y, y para ese valor, $x = -1 - y$.

Podemos indicarlo con una letra, haciendo $y = t$, donde t es cualquier número, y tenemos

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1 - t, \\ y & = & t. \end{array}$$

Podemos escribir las soluciones como

$$\{(-1 - t, t) \ : \ t \in \mathbb{R}\},$$

o también

$$t(-1, 1) + (-1, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 9.5.8. Resolvamos este sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

La primera parte es exactamente igual, se ubican los coeficientes en la tabla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

El primer problema para hacer las cuentas es que en la primera fila el coeficiente de la x es nulo. Así, no podemos anular los coeficientes de las filas 2 y 3.

Pero podemos aplicar otra de las operaciones elementales, e intercambiar filas de lugar. Hagamos $F_1 \leftrightarrow F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Ahora, queremos eliminar el coeficiente de x de la tercera fila. Para esto, podríamos multiplicar la primera fila por $\frac{3}{2}$ y luego restarlas, pero esto va a llenar el problema de fracciones. Otra opción es multiplicar la primera fila por 3 y la tercera fila por 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} 3F_1 & \to F_1 \\ 2F_3 & \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Esto nos permite restar la primera y tercera fila sin usar fracciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad F_3 - F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Para seguir triangulando, necesitamos eliminar el coeficiente de y de la tercera fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad F_3 - F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Al hacerlo, se fue también el coeficiente de z. El sistema ya está triangulado, y podemos resolverlo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \to \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} 6x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

En la última ecuación,

$$y - z = 3 \quad \text{despejando,} \quad y = 3 + z.$$

Ahora, en la primera reemplazamos el valor de y

$$6x + 3y + 3z = 0 \quad \to \quad 6x + 3 \cdot (3 + z) + 3z = 0$$

esto es,

$$6x + 9 + 6z = 0 \quad \text{despejando,} \quad x = \frac{-6z - 9}{6}$$

simplificando un poco,

$$x = -z - \frac{3}{2}.$$

Entonces, la solución del sistema es

$$\begin{array}{rcl} x & = & -z - \frac{3}{2}, \\ y & = & 3 + z, \\ z & = & z. \end{array}$$

(con $z = z$ estamos diciendo que toma cualquier valor, y en función de ese, se calculan los valores de x e y).

Escribiremos las soluciones como

$$\left\{\left(-z-\tfrac{3}{2}\ ,\ 3+z\ ,\ z\ \right)\ :\ z\in\mathbb{R}\right\},$$

que es lo mismo que:

$$z\,(-1\ ,\ 1\ ,\ 1\ )+\left(\ -\tfrac{3}{2}\ ,\ 3\ ,\ 0\ \right)\ :\ z\in\mathbb{R}.\quad \checkmark$$

Ejemplo 9.5.9. Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2\\ -x & - & y & + & 2z & = & 0\\ 3x & + & 3y & - & z & = & 3\end{array}\right.$$

Ubicamos los coeficientes en la tabla,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2\\ -x & - & y & + & 2z & = & 0\\ 3x & + & 3y & - & z & = & 3\end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & -1 & 3\end{array}\right)$$

Para ganar tiempo, vamos a hacer dos pasos en uno:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & -1 & 3\end{array}\right) \qquad \begin{array}{ll} F_2+F_1 & \to F_2\\ F_3-3F_1 & \to F_3\end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -3\end{array}\right)$$

Aquí se presentó un problema nuevo: desaparecieron los coeficientes de y de la segunda y tercera fila. Si bien el sistema está triangulado, observemos que las dos últimas ecuaciones son:

$$\begin{array}{rcr} z & = & 2,\\ 2z & = & -3.\end{array}$$

Según esto, z debería valer 2 para cumplir una, y valer $-\frac{3}{2}$ para la otra. Eso nos dice que el sistema no tiene soluciones, ya que z no puede tener dos valores diferentes.

Otra forma de darnos cuenta era restarle a la tercera fila, el doble de la segunda:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -3\end{array}\right) \qquad F_3-2F_2\to F_3 \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right)$$

La tercera fila dice ahora que $0=-7$, lo cual es un absurdo y no puede haber soluciones. ✓

Ejercicio 9.5.10. Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2\\ -x & - & y & + & 2z & = & 0\\ 3x & + & 3y & - & z & = & 10.\end{array}\right.$$

9.6. Clasificación de sistemas

En la sección anterior vimos que al resolver un sistema de ecuaciones hay tres resultados posibles:

- no hay soluciones,
- hay infinitas soluciones,
- hay una única solución.

Estos son los únicos casos posibles, y es cierto para sistemas lineales con cualquier número de incógnitas y de ecuaciones. Nos permitirá clasificarlos según la cantidad de soluciones que tienen.

Definiciones 9.6.1. *Decimos que un sistema es* **incompatible** *cuando no tiene soluciones, y que es* **compatible** *cuando las tiene. Un sistema es* **compatible determinado** *si tiene una única solución, y es* **compatible indeterminado** *si tiene infinitas soluciones.*

$$\begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{determinado: hay una única solución.} \\ \\ \text{indeterminado: hay infinitas soluciones.} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible: no hay soluciones.} \end{cases}$$

Para recordar estos tres casos, pensemos en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Según la ubicación de las rectas, éstas pueden ser paralelas, cortarse en un punto, o coincidir (ver la figura 9.2).

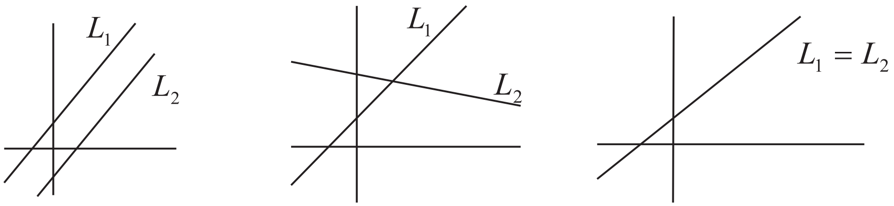


Figura 9.2: Dos rectas

Definición 9.6.2. *Cuando todas las ecuaciones están igualadas a cero, el sistema se dice* **homogéneo**, *y en caso contrario, se dice* **no homogéneo**.

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & 0 \\ -x & - & y & = & 0 \end{array} \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \end{cases}$$

son sistemas homogéneos. Observemos, de paso, que en los sistemas homogéneos siempre hay por lo menos una solución: todas las variables iguales a cero.

En cambio, los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 2y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

son sistemas no homogéneos.

9.7. Problemas

En esta sección vamos a considerar distintos problemas, similares al de la introducción. Para resolverlos, no hay un método que se aplique a todos, pero hay cuatro pasos útiles a seguir:

- *Identificar las incógnitas*: tenemos que descubrir en el problema qué es lo que nos están preguntando y cuáles son las respuestas que se esperan. Asignamos una letra distinta a cada uno de los valores que tenemos que hallar.
- *Plantear las ecuaciones*: el problema nos informa las relaciones que hay entre las distintas incógnitas, esta información la escribimos en forma de ecuaciones.
- *Resolver el problema*: se puede decir que es el más simple, alcanza con triangular el sistema como lo hemos hecho antes para encontrar el valor de cada incógnita.
- *Verificar las soluciones*: si bien este paso no siempre hace falta (sobre todo cuando se está más acostumbrado a resolver problemas), no está de más verificar que las soluciones encontradas cumplen el enunciado del problema. También es conveniente revisar el enunciado, ya que es posible que las ecuaciones estén bien resueltas pero hayan sido mal planteadas.

Vamos a resolver varios problemas como ejemplos de aplicación de estos cuatro pasos.

Ejemplo 9.7.1. El número de libros que tengo es el triple de la cantidad de mis cuadernos, y todos juntos suman veinte. ¿Cuántos libros y cuántos cuadernos tengo?

Primero, fijemos las incógnitas: nos preguntan el *número* de libros y el *número* de cuadernos, así que necesitamos dos variables:

$$x \text{ representa el número de libros, } \; y \text{ es el número de cuadernos.}$$

Segundo, armemos el sistema de ecuaciones. La frase: ‘El número de libros que tengo es el triple de la cantidad de mis cuadernos’, dice que $x = 3y$, lo cual nos da la primer ecuación,

$$x - 3y = 0.$$

Ahora, la siguiente dice 'todos juntos suman veinte'. Esto es,

$$x + y = 20.$$

El sistema es entonces

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 0 \\ x & + & y & = & 20 \end{cases}$$

Tercero, resolvemos el sistema triangulando:

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 0 \\ x & + & y & = & 20 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x & - & 3y & = & 0 \\ & & 4y & = & 20 \end{cases}$$

Ahora, en la última ecuación despejamos y

$$4 \cdot y = 20 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{20}{4} = 5.$$

Reemplazando en la primera,

$$x - 3 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 15.$$

Y tenemos la solución $x = 15$; $y = 5$.

Cuarto y último paso, verifiquemos: la cantidad de libros es 15, que es el triple de 5, la cantidad de cuadernos; y juntos suman 20. ✓

Ejemplo 9.7.2. Las familias Xérez, Yérez y Zérez salieron juntas de vacaciones. Los Zérez eran la tercera parte del grupo. Los Yérez eran cuatro personas menos que los Xérez. Sabiendo que en total eran quince, ¿cuántos eran de cada familia?

Primero busquemos las incógnitas: nos preguntan el *número* de personas en cada familia, y como son tres, necesitamos tres variables:

x es el número de personas de la familia Xérez,

y es el número de personas de la familia Yérez, y

z es el número de personas de la familia Zérez.

Segundo, armemos el sistema de ecuaciones. La frase "Los Zérez eran la tercera parte del grupo" dice que: $z = \frac{1}{3}\,(x + y + z)$.

Despejamos, lo cual nos da la primer ecuación: $-x - y + 2z = 0$.

Ahora, la siguiente dice "Los Yérez eran cuatro personas menos que los Xérez". Esto es, $y = x - 4$, y tenemos la ecuación: $-x + y = -4$.

Por último, como "en total eran quince", tenemos: $x + y + z = 15$.

El sistema es entonces

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & -4 \\ x & + & y & + & z & = & 15 \end{array}\right.$$

Tercero, resolvamos el sistema triangulando:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & -4 \\ x & + & y & + & z & = & 15 \end{array}\right. \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right) \quad F_3 + F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \quad \to \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & = & -4 \\ & & & & 3z & = & 15 \end{array}\right.$$

En la última, despejamos z,

$$3 \cdot z = 15 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{15}{3} = 5.$$

Reemplazando en la segunda,

$$2 \cdot y - 2 \cdot 5 = -4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot y = -4 + 10 = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 3.$$

Por último,

$$-x - 3 + 2 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x = 3 - 10 = -7 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

Y la solución es $x = 7,\ y = 3,\ z = 5$.

Cuarto, verifiquemos: como el total es quince, el número de personas de la familia Zérez es un tercio, es decir, 5. Los Yérez (3 personas) eran cuatro menos que los Xérez (7 personas). Finalmente, el total es $7 + 3 + 5 = 15$. ✓

Ejemplo 9.7.3. Un matrimonio tiene un hijo. Las edades de los tres, sumadas, dan 115 años. Diez años atrás, la edad del padre era cuatro veces la del hijo. Sabiendo que el padre es cinco años mayor que la madre, hallar las edades de todos.

En este problema tenemos tres incógnitas: la edad del padre (vamos a llamarla x), la edad de la madre (y), y la edad del hijo (z).

La primera información que tenemos es que su suma es 115:

$$x + y + z = 115.$$

Otro dato es que hace diez años la edad del padre era cuatro veces la del hijo. Pero hace diez años, la edad del padre era $x - 10$, y la del hijo era $z - 10$, ya que tenían diez años menos. Armemos la ecuación:

$$x - 10 = 4\,(z - 10) \quad \text{distribuyendo,} \quad x - 10 = 4z - 40$$

y podemos escribirla como

$$x - 4 \cdot z = -30.$$

Por último, como el padre es cinco años mayor que la madre, $x = y + 5$ que nos da la ecuación:

$$x - y = 5.$$

Ya tenemos el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 115 \\ x & & & - & 4z & = & -30 \\ x & - & y & & & = & 5 \end{array} \right.$$

Queda como ejercicio resolverlo. ✓

Ejemplo 9.7.4. Dos clases de animales A_1 y A_2 se alimentan con dos sustancias S_1 y S_2. La siguiente tabla indica cuántas unidades de cada una consume cada animal al día:

	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$
$\mathbf{A_1}$	1	3
$\mathbf{A_2}$	2	5

1. Supongamos que cada día se consumen 500 unidades de S_1, y 1400 unidades de S_2, ¿se puede determinar cuántos animales de cada clase hay?
2. Supongamos que cada día se consumen 500 unidades de S_1, y 400 unidades de S_2, ¿es posible este consumo de alimentos?
3. Si se consumen 600 unidades de S_1, y 500 unidades de S_2, ¿puede haber 200 animales de cada clase?
4. Si hay 100 animales A_1, y 120 animales A_2, ¿cuántas unidades de S_1 y de S_2 se consumen?

Empecemos resolviendo la primera parte:

1. Supongamos que cada día se consumen 500 unidades de S_1, y 1400 unidades de S_2, ¿se puede determinar cuántos animales de cada clase hay?

   La pregunta aquí es cuántos animales hay de cada clase. Llamemos x a la cantidad de animales A_1, y llamemos y a la cantidad de animales A_2.

   Como cada animal de A_1 consume una unidad de S_1, si hay x animales se consumirán x unidades. De la misma manera, como cada animal de A_2 consume dos unidades de S_1, si hay y animales se consumirán $2y$ unidades. Sabiendo que se consumieron 500 unidades de S_1, tenemos la ecuación:

   $$x + 2y = 500.$$

   Para la otra sustancia es igual: cada animal de A_1 consume tres unidades de S_2, si hay x animales se consumirán $3x$ unidades; cada animal de A_2 consume cinco unidades de S_2, si hay y animales se consumirán $5y$ unidades. Como se consumieron 1400 unidades de S_2, tenemos la ecuación:

   $$3x + 5y = 1400.$$

   Ya tenemos las ecuaciones, así que podemos resolver el sistema:

   $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 500 \\ 3x & + & 5y & = & 1400 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 3 & 5 & 1400 \end{array}\right)$$

   $$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 3 & 5 & 1400 \end{array}\right) \qquad F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 0 & -1 & -100 \end{array}\right)$$

   $$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 0 & -1 & -100 \end{array}\right) \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 500 \\ & - & y & = & -100 \end{array}\right.$$

   Ahora, en el último despejamos y

   $$-y = -100 \quad \Rightarrow \quad y = 100.$$

   Reemplazando en la primera,

   $$x + 2 \cdot 100 = 500 \quad \Rightarrow \quad x = 300.$$

   Entonces, podemos decir que había 300 animales de la clase A_1 y 100 de la clase A_2.

   Pasemos ahora a la segunda parte:

2. Supongamos que cada día se consumen 500 unidades de S_1, y 400 unidades de S_2, ¿es posible este consumo de alimentos?

   Suponiendo que el consumo de alimentos es el que nos dieron, tratemos de averiguar cuántos animales hay de cada clase.

El planteo de las ecuaciones es exactamente igual, sólo que igualadas a 500 y 400. Cuando resolvemos obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 500 \\ 3x & + & 5y & = & 400 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 500 \\ 3 & 5 & 400 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 500 \\ 3 & 5 & 400 \end{array}\right) \qquad F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 0 & -1 & -1100 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 500 \\ 0 & -1 & -1100 \end{array}\right) \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 500 \\ & - & y & = & -1100 \end{array}\right.$$

Ahora, en el último despejamos y

$$-y = -1100 \quad \Rightarrow \quad y = 1100.$$

Reemplazando en la primera,

$$x + 2 \cdot 1100 = 500 \quad \Rightarrow \quad x = -1700.$$

Aquí se nos presenta un problema: tenemos la solución del sistema $x = -1700$; $y = 100$, pero no puede ser la solución de un problema real, ya que no tiene sentido que haya una cantidad negativa de animales.

La respuesta es entonces que no es posible este consumo de alimentos.

3. Si se consumen 600 unidades de S_1, y 500 unidades de S_2, ¿puede haber 200 animales de cada clase?

   Observemos que este problema es distinto al anterior. Nos dicen cuánto se consume, y no nos piden que lo resolvamos: nos preguntan si es solución una determinada cantidad de animales de cada clase.

   Planteando las ecuaciones, es igual que al principio, el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 600 \\ 3x & + & 5y & = & 500 \end{array}\right.$$

   Ahora queremos saber si $x = 200$, $\quad y = 200$ puede ser una solución. Para averiguarlo, reemplazamos los valores y hacemos la cuenta

$$\left\{\begin{array}{rcl} 200 + 2 \cdot 200 & = & 200 + 400 = 600 \\ 3 \cdot 200 + 5 \cdot 200 & = & 600 + 1000 = 1600 \neq 500 \end{array}\right.$$

   No puede haber 200 animales de cada clase ya que la segunda ecuación no se cumple.

Por último, resolvamos el cuarto punto:

4. Si hay 100 animales A_1, y 120 animales A_2, ¿cuántas unidades de S_1 y de S_2 se consumen?

   Desde el primer punto sabemos que si hay x animales A_1, y hay y animales A_2, el consumo de la primer sustancia es

   $$x + 2y \quad \text{y el de la segunda,} \quad 3x + 5y.$$

   Aquí, no sabemos cuánto se consumió de cada sustancia. Podemos llamar a a la cantidad de unidades de S_1, y b a la cantidad de unidades de S_2. Nuestro sistema será

   $$\begin{cases} x & + & 2y & = & a \\ 3x & + & 5y & = & b \end{cases}$$

   En el enunciado del problema, nos dicen que hay 100 animales A_1 y 120 animales A_2, así que podemos reemplazar x e y por estos valores:

   $$\begin{cases} 100 & + & 2 \cdot 120 & = & a \\ 3 \cdot 100 & + & 5 \cdot 120 & = & b \end{cases}$$

   Haciendo la cuenta,

   $$\begin{aligned} 340 &= a, \\ 900 &= b. \end{aligned}$$

   con lo cual averiguamos la cantidad de unidades de cada sustancia que se consumen: 340 unidades de S_1 y 900 unidades de S_2. ✓

Capítulo 10

Matrices

10.1. Introducción

En el capítulo anterior aprendimos a resolver sistemas de ecuaciones lineales, como por ejemplo,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & -1 \end{array}\right.$$

y vimos que este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede escribir así:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

De esta manera, queda resumida toda la información del sistema en una tabla.

A esta tabla se la llama la *matriz ampliada* asociada al sistema.

Así fue como aparecieron las matrices en la matemática al principio, como una tabla compuesta de números. Veremos más adelante que, en ciertas condiciones, se pueden realizar operaciones con matrices como por ejemplo sumarlas, multiplicarlas por un número, multiplicarlas entre sí, etc.

En la vida cotidiana, encontramos abundantes ejemplos de matrices. Por ejemplo, el horario de trenes que vemos en las estaciones es una matriz (una tabla de números de doble entrada); la tabla de cotizaciones de la Bolsa en cada día de la semana es otra; cuando jugamos a la batalla naval usamos matrices de determinada cantidad de filas y columnas (podemos pensar que un 1 indica que hay un barco, y un 0 que no). En todos estos casos, no es lo mismo una fila que una columna: supongamos que llegamos a las doce a la estación y queremos saber cuál es el próximo tren: primero buscamos el día en la tabla, y luego seguimos con el dedo horizontalmente los distintos horarios hasta encontrarlo (no tendría sentido que primero busquemos la columna de la hora 12:05 y después busquemos verticalmente en qué día hay un tren a esa hora).

Las matrices son entonces, para nosotros, unas cajas rectangulares compuestas por números reales que forman una tabla de doble entrada. Las siguientes tablas son ejemplos de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de 2 filas y 4 columnas}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{5} & \pi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de 4 filas y 4 columnas}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de 5 filas y 2 columnas}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de 1 fila y 3 columnas}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz de 5 filas y 1 columna}$$

En general, si tenemos una matriz con n filas y m columnas, vamos a decir que es una matriz de *tamaño* (o *dimensión*) $n \times m$. Así, decimos que A es una matriz de tamaño 2×4.

Definición 10.1.1. *Si M es una matriz de n filas y m columnas, decimos que M pertenece a $\mathbb{R}^{n\times m}$ y escribimos $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Si $n = m$ decimos que la matriz es* **cuadrada.**

Por ejemplo, la matriz B es cuadrada ya que pertenece a $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

Observemos todo lo que estamos diciendo con $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

- M no es un número, sino una matriz,
- los elementos de M son números reales,
- M tiene n filas, y
- M tiene m columnas.

En los ejemplos anteriores, $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{5\times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, y $E \in \mathbb{R}^{5\times 1}$.

En general, una matriz con n filas y m columnas se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Vemos que cada elemento de la matriz tiene dos subíndices: el primero indica la fila, y el segundo indica la columna. Por ejemplo, a_{32} es el elemento de la tercer fila que está en la segunda columna.

Para simplificar, muchas veces escribimos

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$$

También, para simbolizar una matriz genérica de $\mathbb{R}^{3\times 2}$ podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

según el problema, utilizaremos una u otra notación.

Observación 10.1.2. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

no son iguales, pese a tener el mismo tamaño (2×2) y los mismos números. En la matriz A, el 2 está en la segunda fila, primera columna; en la matriz B, el 2 está en la primera fila, segunda columna.

Para que dos matrices sean *iguales*, tienen que tener los mismos números en las mismas ubicaciones.

10.2. Operaciones elementales con matrices

Hay algunas matrices especiales, que vamos a describir antes de comenzar con las operaciones.

Llamamos *matriz cero* o *matriz nula* a la matriz cuyos elementos son todos nulos. Observemos que no hay una única matriz nula, sino que hay una en cada $\mathbb{R}^{n\times m}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

Para las matrices cuadradas, hay una matriz especial que llamamos *matriz identidad,* y la escribimos I ó $I_{n\times n}$ para aclarar su tamaño. Esta matriz tiene unos en los elementos de la diagonal, y los demás elementos son todos nulos. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

En $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

10.3. Suma de matrices

Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan el mismo tamaño. Así, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

pueden sumarse. El resultado, $A+B$, es una nueva matriz, del mismo tamaño 2×3, y en cada lugar tiene la suma de los elementos que ocupan la misma posición en A y en B:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+0 & 1+(-1) & 0+5 \\ (-1)+2 & 1+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$, y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = (b_{ij})$, entonces $A+B$ tiene en el lugar i,j la suma $a_{ij} + b_{ij}$.

Otro ejemplo de suma de dos matrices cuadradas es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices cuenta con las mismas propiedades de la suma para los números reales, ya que esto es lo que hacemos en cada lugar.

Así se cumplen en cada $\mathbb{R}^{n\times m}$ las propiedades

$\mathcal{S}_1$: Asociativa. $(A+(B+C) = (A+B)+C)$.

$\mathcal{S}_2$: Conmutativa. $(A+B = B+A)$.

$\mathcal{S}_3$: Existencia de matriz nula.

$\mathcal{S}_4$: Existencia de matriz opuesta.

Veamos dos ejemplos en $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

$\mathcal{S}_3$: La matriz nula de $\mathbb{R}^{2\times 3}$ es

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La propiedad $\mathcal{S}_3$ afirma que (al igual que 0 en los números reales) si $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, entonces

$$A + \mathbb{O} = A.$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, entonces

$$A + \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+0 & 5+0 \\ -1+0 & 2+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

$\mathcal{S}_4$: Toda matriz tiene una matriz opuesta. En los números reales, está propiedad significa que, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$. Por ejemplo, si $a = 3$, el opuesto es -3 y cumple que $3 + (-3) = 0$.

Lo mismo ocurre con las matrices. En $\mathbb{R}^{2\times 3}$, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{la matriz opuesta es} \quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}.$$

ya que cumple que $A + (-A) = \mathbb{O}$. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, entonces $-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

10.4. Producto de una matriz por un número real

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, y α es un número real ($\alpha \in \mathbb{R}$), resulta que αA es una nueva matriz de $n \times m$, donde en cada lugar aparece la multiplicación del coeficiente de A por el número α.

Por ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 15 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Así se cumplen en cada $\mathbb{R}^{n\times m}$ las propiedades

$\mathcal{P}_1$: Asociativa.

$\mathcal{P}_2$: Distributiva respecto de la suma de números.

$\mathcal{P}_3$: Distributiva respecto de la suma de matrices.

$\mathcal{P}_4$: Existencia de elemento neutro.

Veamos en $\mathbb{R}^{2\times 3}$ algunos ejemplos:

$\mathcal{P}_1$: $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A = (b \cdot a) \cdot A = b \cdot (a \cdot A)$

Esto dice que si podemos multiplicar dos números por una matriz, podemos primero multiplicarlos entre ellos y ese resultado multiplicarlo por la matriz A, o podemos multiplicar alguno de los números por A y el resultado por el otro número.

Conviene leer bien $\mathcal{P}_1$ y distinguir entre los productos los que representan una multiplicación entre números reales y los que representan una multiplicación de un número por una matriz. Por ejemplo,

$$2 \cdot \left((-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$$

y

$$(2 \cdot (-3)) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-6) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_2$: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$. Por ejemplo,

$$(3 + (-1)) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_3$: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$. Por ejemplo,

$$3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_4$: $1 \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot A = A$, multiplicar cada lugar de la matriz por el número uno, no la modifica.

10.5. Matriz Transpuesta

Definición 10.5.1. *Dada una matriz A de n filas y m columnas, definimos la matriz* **transpuesta** *de A (o* **traspuesta***), y la llamamos A^t, a la matriz que se obtiene escribiendo cada fila de A como columna, es decir, fila i de la matriz original es la columna i de la matriz transpuesta.*

Ejemplo 10.5.2.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{poniendo las filas como columnas,} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $A^t \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, entonces $A^t \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 10.5.3. Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que

$$A + 3 \cdot X = B.$$

Observemos que el problema tiene sentido, ya que todas las matrices están en $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

Antes de operar tratando de resolver esta ecuación, pensemos qué haríamos con un problema similar con números reales.

Haciendo una analogía con los números reales, la ecuación matricial

$$A + 3X = B$$

con A y B dados se traduce en $\mathbb{R}$ como algo del estilo

$$8 + 3x = 6,$$

donde debemos hallar $x \in \mathbb{R}$.

En este caso, para resolver esta ecuación, primero sumamos -8 a ambos miembros, obteniendo

$$\begin{aligned} 8 + 3x - 8 &= 6 - 8 \\ 3x &= -2. \end{aligned}$$

El último paso para despejar x multiplicamos por $\frac{1}{3}$, con lo cual

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{3}\cdot 3x & = \frac{1}{3}\cdot(-2) \\ x & = -\frac{2}{3}. \end{array}$$

Trabajar con matrices es parecido. En la ecuación

$$A + 3X = B$$

donde A y B son datos, podemos sumar a ambos miembros la matriz $-A$, obteniendo

$$A + 3X + (-A) = B + (-A.)$$

Usando las propiedades,

$$\begin{array}{rl} [A + (-A)] + 3X & = B + (-A) \\ \mathbb{O} + 3X & = B + (-A) \\ 3X & = B + (-A). \end{array}$$

Ahora, multiplicando por $\frac{1}{3}$,

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{3}\cdot 3X & = \frac{1}{3}\cdot[B + (-A)] \\ (\frac{1}{3}\cdot 3)X & = \frac{1}{3}\cdot B + \frac{1}{3}\cdot(-A) \\ 1\cdot X & = \frac{1}{3}\cdot B + (-\frac{1}{3}\cdot A) \\ X & = \frac{1}{3}\,B - \frac{1}{3}\,A. \end{array}$$

Reemplazando con los valores para A y B nos queda

$$\begin{array}{rl} X & = \dfrac{1}{3}\,B - \dfrac{1}{3}\,A \\ & = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \checkmark \end{array}$$

10.6. Producto entre Matrices

Comencemos motivando la que será nuestra definición de producto de matrices con un ejemplo. Pensemos la siguiente situación:

Una familia está refaccionando su casa. Para la obra, necesita 10 bolsas de cemento, 5 bolsas de cal, y 3 metros cúbicos de arena. Para esto, pide presupuestos en diferentes corralones de materiales, obteniendo así la siguiente información.

	bolsa de cemento	bolsa de cal	m^3 de arena
Corralón A	17	5	32
Corralón B	15	6	31
Corralón C	16	7	33

Tenemos los precios de los materiales en cada corralón, y nos preguntamos en cuál le conviene comprar suponiendo que compra todo en el mismo corralón. Es decir, cuál corralón le ofrece el mejor presupuesto.

Tratemos de calcular cuánto pagaría en cada corralón.

Si vamos al corralón A, gastaría: \$17 · 10 en cemento; \$5 · 5 en las bolsas de cal; y \$32 · 3 en arena. El costo de la compra sería entonces:

$$170 + 25 + 96 = 291.$$

Análogamente, en el corralón B gastaría:

$$15 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 31 \cdot 3 = 273,$$

y en el corralón C gastaría:

$$16 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 33 \cdot 3 = 294.$$

Comparando, vemos que la opción del corralón B es la más económica.

Vamos a disponer la información de una manera especial, y obtendremos los resultados simultáneamente.

	Aquí ponemos la matriz con las cantidades que necesita
Aquí ponemos la matriz de precios	

Ahora, en los cruces de una fila de la matriz de precios con la matriz de las cantidades que necesita, escribimos la suma de los productos lugar a lugar que nos dan el presupuesto.

Así "multiplicamos" la primera fila de la matriz por la columna, lugar a lugar, y sumando obtenemos el costo de los materiales en el corralón A.

De la misma manera, "multiplicando" la segunda fila de la matriz por la columna, lugar a lugar y sumando, obtenemos el costo de los materiales en el corralón B; y al multiplicar la tercera fila de la matriz por la columna, lugar a lugar y sumando, obtenemos el costo de los materiales en el corralón C.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 17 & 5 & 32 \\ 15 & 6 & 31 \\ 16 & 7 & 33 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 17 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 32 \cdot 3 \\ 15 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 31 \cdot 3 \\ 16 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 33 \cdot 3 \end{array} \end{array}$$

En general, vamos a definir el producto entre una fila y una columna “del mismo tamaño”, multiplicando lugar a lugar y sumando luego los resultados. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, tenemos

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) = 2 - 10 + 2 = -6. \end{aligned}$$

El producto de matrices generaliza este ejemplo, pero para poder multiplicar dos matrices, necesitamos que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, ya que para multiplicar matrices, multiplicamos cada fila de la primera por cada columna de la segunda.

Ejemplo 10.6.1. Calculemos $A \cdot B$ para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{matrix} \end{array}$$

Haciendo las cuentas,

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 27 & 15 \\ -4 & -3 \end{matrix} \end{array}$$

Y el resultado es la matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Observemos que multiplicamos una matriz de 2 × 2 por otra de 2 × 2 y obtuvimos como resultado una matriz de 2 × 2. ✓

Ejemplo 10.6.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Observemos que, en este ejemplo, multiplicamos una matriz de 2×3 por otra de 3×2 y obtuvimos como resultado una matriz de 2×2. Por otro lado,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 16 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora hemos multiplicado una matriz de 3×2 por otra matriz de 2×3 y obtuvimos como resultado una matriz de 3×3. ✓

Ejemplo 10.6.3. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, podemos calcular $A \cdot B$ pero en este caso no podemos hacer $B \cdot A$.

En efecto, si $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 13 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que para poder realizar el producto $A \cdot B$ es necesario que la cantidad de columnas de A sea igual a la cantidad de filas de B. ✓

En resumen, el producto de una matriz de $n \times m$ con una matriz de $k \times r$ sólo se puede realizar si $m = k$, es decir cuando la cantidad de columnas de A sea igual al número de filas de B. La matriz producto $A \cdot B$ tendrá tantas filas como A, y tantas columnas como B:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C. \\ n \times m & & m \times r & & n \times r \end{array}$$

Ejemplo 10.6.4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A \qquad I_{3\times 3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A. \quad ✓$$

10.7. Propiedades elementales del producto entre matrices

Sean A y B dos matrices.

1. Si A y B son matrices cuadradas de $n \times n$, siempre se pueden hacer $A \cdot B$ y $B \cdot A$, y ambas son matrices cuadradas de $n \times n$.
2. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matriz identidad I en $\mathbb{R}^{n\times n}$ es el elemento neutro del producto, se comporta como el número 1 en los reales, y $A \cdot I = I \cdot A = A$.
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ se puede realizar el producto $A \cdot B$, y si $r \neq n$ no se puede realizar $B \cdot A$
4. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se pueden efectuar $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

Ejemplo 10.7.1. 1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces se puede realizar el producto $A \cdot B$ ($A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$), mientras que $B \cdot A$ no se puede realizar. ✓

2. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces ambos productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ se pueden efectuar. Sin embargo, observemos que el resultado de $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mientras que el de $B \cdot A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 10.7.2. Sean A y B las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Se puede calcular $A \cdot B$? ¿Y se puede calcular $B \cdot A$? ¿Dan iguales?

10.8. Propiedad distributiva del producto entre matrices

Como hemos visto en los ejemplos, el producto de matrices no es conmutativo. Esto tiene consecuencias en las operaciones algebraicas, que debemos efectuar con atención. Al no tener la propiedad conmutativa, estamos obligados a respetar el orden en el cual se ha de efectuar el producto.

Este hecho tiene especial importancia en la *propiedad distributiva*. El producto es distributivo con la suma, pero respetando el orden de la multiplicación.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

es decir, si multiplicamos por A del lado izquierdo de una suma, al distribuir la matriz A debe quedar a la izquierda; si multiplicamos a la derecha, al distribuir debe quedar a la derecha.

Por ejemplo, para A, B y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pueden efectuarse

$$A \cdot (B + C) \qquad \text{y} \qquad (B + C) \cdot A$$

pero estos productos son distintos en general. Conviene tenerlo en cuenta a la hora de sacar factor común en expresiones del tipo

$$A \cdot B + A \cdot C$$

En casos como

$$A \cdot B + C \cdot A$$

no es posible sacar A de factor común. En general,

$$A \cdot B + A \cdot C \neq B \cdot A + A \cdot C \neq A \cdot B + C \cdot A \neq B \cdot A + C \cdot A.$$

10.9. Matrices inversibles y matriz inversa

En $\mathbb{R}$, si tenemos la ecuación

$$2x = 5$$

resolverla es, como todos sabemos, “despejar” la incógnita x. Con este fin, “pasamos el 2 dividiendo” y como ya hemos visto, esto es equivalente a multiplicar ambos miembros de la igualdad por el número 2^{-1}. Así

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 5 \\ 2^{-1} \cdot 2x & = & 2^{-1} \cdot 5 \\ x & = & \frac{5}{2}. \end{array}$$

En esta ecuación en $\mathbb{R}$ pudimos despejar la incógnita x ya que existe el inverso multiplicativo del número 2. Es decir, existe un número b que cumple $b \cdot 2 = 1$ (sabemos que $b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$).

Al plantear una ecuación similar pero con matrices, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nos gustaría despejar la incógnita que en este caso es la matriz de $2 \times 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si quisiéramos hacer como en $\mathbb{R}$ deberíamos ver si existe un inverso multiplicativo para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A las matrices que tengan esta propiedad las llamaremos inversibles.

Definición 10.9.1. *Decimos que una matriz cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es* **inversible** *si existe otra matriz* B *del mismo tamaño,* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, tal que*

$$A \cdot B = I \quad y \quad B \cdot A = I.$$

La matriz B *es la matriz* **inversa** *de* A *y notamos* $B = A^{-1}$*.*

Observación 10.9.2.

- La matriz identidad que mencionamos en la definición anterior (I) es la identidad de las matrices de tamaño $n \times n$, es decir $I = I_{n\times n}$.
- Al trabajar con matrices no usamos la notación $\dfrac{1}{A}$; para referirnos a la inversa de A escribimos A^{-1}.
- En la definición anterior, ya que la propiedad conmutativa no es válida para el producto de matrices, necesitamos pedir las dos condiciones:

$$A \cdot B = I \quad \text{y} \quad B \cdot A = I.$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 10.9.3. Afirmamos que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es inversible y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Para demostrar nuestra afirmación debemos ver que se cumplen las condiciones $A \cdot A^{-1} = I$ y $A^{-1} \cdot A = I$. Veamos

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se cumplen ambas condiciones $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es realmente la inversa de A. ✓

Veamos ahora que hay matrices que no tienen matriz inversa: por ejemplo una matriz del mismo tamaño (2×2).

Ejemplo 10.9.4. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no tiene inversa.

Si suponemos que si, existirá una matriz cuadrada, de 2×2, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que por ser la matriz inversa debe cumplir

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pero al calcular el producto vemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

esta matriz no es igual a $I_{2\times 2}$ para ningún valor de a y b ya que el primer coeficiente a_{11} es igual a cero, y debería ser 1.

Con esto concluimos entonces que no toda matriz cuadrada tiene matriz inversa.

En principio, no sabemos si dada A, existe su inversa A^{-1}; por ahora nos abocaremos a la tarea de tratar de encontrarla. Más adelante podremos conocer de antemano la existencia de A^{-1} para cada A que se nos presente.

En el ejemplo que sigue, dada A tratamos de encontrar su inversa A^{-1} y esto que hacemos en el ejemplo terminará dándonos un método para encontrar A^{-1} en general.

Ejemplo 10.9.5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, A^{-1}.

Si existiera A^{-1} debería ser una matriz de 2×2, es decir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y deben verificarse las igualdades

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ①$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ②$$

Encontrar A^{-1} es encontrar a, b, c y d tales que verifiquen ① y ②. Nos concentramos en la condición ①

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto:

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -2a + 3c & -2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que esta igualdad de matrices se cumpla deberá pasar:

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & 2c & = & 1 \\ b & + & 2d & = & 0 \\ -2a & + & 3c & = & 0 \\ -2b & + & 3d & = & 1 \end{array} \right.$$

Este es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (a, b, c, d), pero si miramos bien, vemos que sólo la primera y tercera ecuación involucran a las incógnitas a y c, mientras que la segunda y cuarta ecuación vinculan a las incógnitas b y d. Así, para resolver el sistema S, bastará resolver estos dos sistemas más pequeños.

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & 2c & = & 1 \\ -2a & + & 3c & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} b & + & 2d & = & 0 \\ -2b & + & 3d & = & 0 \end{array} \right.$$

Al resolver S_1, si S_1 tiene solución, encontraremos a y c. Al resolver S_2, si S_2 tiene solución, encontraremos b y d.

Como vemos, la matriz de los coeficientes de S_1 es igual a la matriz de los coeficientes de S_2. Al resolver

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \quad \text{encontramos } a \text{ y } c \text{ (si tiene solución).}$$

y al resolver

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad \text{encontramos } b \text{ y } d \text{ (si tiene solución).}$$

Luego, planteamos estas dos situaciones en forma simultánea:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora, para facilitar la lectura de las soluciones, haremos operaciones permitidas (*Gauss*) en esta matriz doblemente ampliada, tratando de conseguir del lado izquierdo, unos en la diagonal y ceros en los demás lugares. Veamos:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad F_2 + 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora seguimos triangulando hacia arriba, tratando de poner ceros fuera de la diagonal. Multiplicamos la primer fila por 7, la segunda por 2, y restamos para obtener un cero en el lugar a_{12}:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad 7F_1 - 2F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{rr|rr} 7 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora para dejar unos en la diagonal del lado izquierdo hacemos

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 7 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{7}F_1 \to F_1 \\ \frac{1}{7}F_2 \to F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right) \quad \bowtie$$

Volviendo a los sistemas tenemos

$$S_1 = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{array} \right) \text{ con lo cual obtenemos } a = \tfrac{3}{7} \text{ y } c = \tfrac{2}{7}\ .$$

(recordar que a y c eran las incógnitas de S_1.)

y

$$S_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{array}\right) \text{ con lo cual obtenemos } b = -\tfrac{2}{7} \text{ y } d = \tfrac{1}{7}\ .$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

que es exactamente la matriz que queda a la derecha en ⋈ después de triangular (dejando en la matriz de la izquierda, unos en toda la diagonal y ceros en los otros lugares).

Podemos verificar si A^{-1} está bien hallada, viendo que efectivamente A^{-1} cumple las condiciones ① y ②, es decir que $A \cdot A^{-1} = I$ y $A^{-1} \cdot A = I$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} + \frac{6}{7} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} & \frac{6}{7} - \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} - \frac{2}{7} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ es inversible y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Ahora, si repasamos lo que hicimos, vemos que obtuvimos A^{-1} solamente pidiendo que se verifique la condición $A \cdot A^{-1} = I$. Esta sola condición nos hizo encontrar A^{-1} y se verificó la segunda condición $A^{-1} \cdot A = I$. Esto que pasó no es casualidad. Se puede demostrar, pero no lo haremos aquí, que cada vez que planteemos hallar A^{-1} tal que verifique $A \cdot A^{-1} = I$ y encontramos A^{-1}, la matriz que encontramos cumple también la condición $A^{-1} \cdot A = I$ y, por lo tanto, es la inversa buscada.

Este procedimiento que acabamos de hacer con un ejemplo en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ será el método que emplearemos para calcular A^{-1}.

10.10. Cálculo de la matriz inversa

El problema que queremos resolver es: dada una matriz A, hallar (si existe), A^{-1}. Desarrollamos el procedimiento en un ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para hallar A^{-1}, si existe, triangulamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

haciendo operaciones permitidas (*Gauss*) hasta obtener a la izquierda la matriz identidad.

Esto es:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 + F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 - 4F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora seguimos triangulando hacia arriba:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2F_1 - F_3 \to F_1 \\ 2F_2 + F_3 \to F_2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) F_1 - 2F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \frac{1}{2}F_1 \to F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \to F_2 \\ -\frac{1}{2}F_3 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \underbrace{\begin{array}{rrr} -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dejamos a cargo del lector la verificación de que A^{-1} está bien hallada, ya que cumple $A \cdot A^{-1} = I$ y $A^{-1} \cdot A = I$. ✓

Ejemplo 10.10.1. Hallar $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Llamemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Buscamos $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot X = B$ con las matrices A y B como datos. Si observamos bien el enunciado, vemos que lo que tenemos que resolver es una *ecuación* *matricial*, es decir una ecuación donde los elementos que la componen son matrices. Un ejemplo similar en $\mathbb{R}$, es resolver la ecuación

$$2 \cdot x = 5.$$

Al trabajar con matrices no podemos pasar dividiendo una matriz, interpretamos el hecho de “pasar dividiendo” como la multiplicación por el inverso. Así como existe en $\mathbb{R}$ el número $\frac{1}{2}$ y al multiplicar por $\frac{1}{2}$ resolvemos la ecuación anterior, si existe A^{-1} podemos resolver nuestra ecuación matricial. La matriz A tiene inversa, la hemos hallado en el ejemplo anterior, y tenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Luego para resolver} & A \cdot X & = & B & \text{multiplicamos por } A^{-1} \\
\text{y obtenemos} & A^{-1} \cdot A \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \text{①} \\
\text{asociando} & \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\
\text{como } A^{-1} \cdot A = I & I \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\
\text{como } I \cdot X = X & X & = & A^{-1} \cdot B. &
\end{array}$$

Observemos que en ① la matriz A^{-1} queda de la izquierda en los dos miembros de la igualdad. No podemos alterar el orden y poner $B \cdot A^{-1}$ ya que el producto de matrices *no* es conmutativo. Con lo cual, como conocemos A^{-1} y B es dato, para encontrar X basta efectuar el producto $A^{-1} \cdot B$. Luego

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Ejemplo 10.10.2. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que

$$3 \cdot X + B = A \cdot X + A^t.$$

Observemos que lo que tenemos que resolver es una ecuación matricial, donde la incógnita es una matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si pensamos en los números reales, vemos que primero vamos a necesitar que la incógnita X aparezca en un solo miembro de la igualdad. Con este fin, por ejemplo, restamos $A \cdot X$ a ambos miembros:

$$\begin{array}{rcl} \text{partiendo de} \quad 3\cdot X + B & = & A\cdot X + A^t \quad \text{restamos } A\cdot X, \\ -A\cdot X + 3\cdot X + B & = & -A\cdot X + A\cdot X + A^t \quad \text{restando } B, \\ -A\cdot X + 3\cdot X & = & A^t - B. \end{array}$$

Así logramos que la incógnita X aparezca únicamente en el miembro de la izquierda.

Ahora si pensamos en $\mathbb{R}$, por ejemplo para resolver $3x - 5x = 7$ operamos con las x y queda $-2x = 7$. Observemos que $-2x$ equivale a efectuar

$$3x - 5x = (3-5)x.$$

De la misma manera quisiéramos operar con las matrices para resolver

$$3\cdot X - A\cdot X.$$

Como el número 3 no es una matriz de 2 × 2, no podemos efectuar la operación $3 - A$ ya que esta operación no tiene sentido.

Para resolver $3\cdot X - A\cdot X$ debemos mirar esta expresión así:

$$\begin{array}{lrl} \text{como } X = I\cdot X & 3\cdot X - A\cdot X & \text{es igual a} \\ & 3\cdot(I\cdot X) - A\cdot X & \text{que al asociar resulta} \\ & (3\cdot I)\cdot X - A\cdot X & \text{ahora sí } 3\cdot I \text{ y } A \text{ son matrices de } 2\times 2. \end{array}$$

Luego sacando factor común X de la derecha, queda

$$(3\cdot I - A)\cdot X.$$

Con lo cual nuestra ecuación

$$3\cdot X - A\cdot X = A^t - B \quad \text{es equivalente a} \quad (3\cdot I - A)\cdot X = A^t - B\ .$$

Observemos que en esta ecuación $3\cdot I - A$ es dato ya que A era dato

$$3\cdot I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $A^t - B$ también es dato ya que A y B lo son

$$A^t - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la ecuación

$$(3\cdot I - A)\cdot X = A^t - B$$

es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver esta ecuación es similar al ejercicio 10.10.1. Busquemos entonces, si existe,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Para esto planteamos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 + F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 - 2F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad -F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Volviendo a nuestra ecuación,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

al multiplicar a izquierda por la matriz inversa resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

debe aparecer del mismo lado en cada miembro (en este caso, a la izquierda). Al usar las propiedades estudiadas obtenemos

$$I \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Observemos que estas ecuaciones pueden verificarse reemplazando la X obtenida en la ecuación original. ✓

10.11. Determinante de una matriz

En esta sección, a cada matriz cuadrada vamos a asociarle un número, que calcularemos a partir de los coeficientes de la matriz. Este número se llama *determinante* de la matriz y nos va a permitir en particular, determinar si una matriz es inversible o no.

Ahora, ¿qué es el determinante? Es una función que a cada matriz cuadrada le asocia un número. Veamos de qué manera; comencemos con matrices cuadradas de 2×2.

10.12. Determinantes de matrices de tamaño 2×2

Definición 10.12.1. *Si* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *es decir* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *definimos el* **determinante** *de* A *y lo notamos* $\det(A)$ *o* $|A|$ *a*

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

Ejemplos 10.12.2.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = |A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = |A| = 5 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 = -15 + 2 = -13.$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = |A| = (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3.$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = |A| = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot (-2) = 6 - 6 = 0.$

¿Cómo hacemos para calcular el determinante de una matriz de 3×3?

10.13. Determinantes de matrices de tamaño 3×3

Vamos a mostrar cómo se calcula con un ejemplo.

$$\text{Sea} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La idea es reducir el cálculo del determinante de una matriz de 3×3, al cálculo de tres determinantes de 2×2. Esto lo hacemos *desarrollando* el determinante por *una fila*. Primero, damos la siguiente definición que hace más amigable la notación.

Definición 10.13.1. *Dada* A *una matriz de tamaño* 3×3*, llamaremos* $\mathbf{A_{ij}}$ *a la submatriz de tamaño* 2×2 *que se obtiene al suprimir la fila* i *y la columna* j *de dicha matriz.*

Por ejemplo para

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \quad A_{11} = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Del mismo modo, A_{32} es lo que queda de la matriz A al suprimir la fila 3 y la columna 2

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \quad A_{32} = \left(\begin{array}{cr} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

Definición 10.13.2. *Dada una matriz A de tamaño 3×3 asociamos al lugar i, j un número y un signo.*

El número del lugar i, j es a_{ij} , el signo del lugar i, j es $(-1)^{i+j}$

Notemos que el signo del lugar i, j, $(-1)^{i+j}$ es 1 ó -1 según $i + j$ sea par o impar. En la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- el lugar $1, 1$ tiene asignado $\left\{ \begin{array}{l} \text{un número que es } \; a_{11} = 1 \\ \text{un signo que es } \; (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1 > 0 \end{array} \right.$
- el lugar $1, 2$ tiene asignado $\left\{ \begin{array}{l} \text{un número que es } \; a_{12} = 2 \\ \text{un signo que es } \; (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1 < 0 \end{array} \right.$
- el lugar $1, 3$ tiene asignado $\left\{ \begin{array}{l} \text{un número que es } \; a_{13} = -1 \\ \text{un signo que es } \; (-1)^{1+3} = (-1)^4 = 1 > 0 \end{array} \right.$

Observemos que el signo correspondiente a cada lugar es

$$\left(\begin{array}{ccc} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{array} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array} \right)$$

Ahora sí estamos en condiciones de desarrollar el $\det(A)$. En esta ocasión haremos el desarrollo por la fila 1.

$$A = \left(\begin{array}{rrr} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante mediante la fórmula

$$\det(A) = (-1)^{1+1}\, a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^{1+2}\, a_{12} \cdot \det(A_{12}) + (-1)^{1+3}\, a_{13} \cdot \det(A_{13}).$$

Observemos que el término $(-1)^{1+1}\ a_{11}{\cdot}\det(A_{11})$ es: el signo del lugar $1,1$ multiplicado por el coeficiente a_{11} multiplicado por el determinante de la submatriz de A que resulta de suprimir la fila y la columna a donde pertenece a_{11} . Análogamente sucede con los demás términos de la suma.

Al reemplazar según los coeficientes de A resulta

$$\det(A) = (-1)^2\ \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ +(-1)^3\ \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^4\ \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante de tamaño 2×2

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2, \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 4,$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2.$$

Luego

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -8.$$

También podemos usar otra fila para calcular el determinante; a continuación volvemos a calcularlo desarrollando por la fila 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = (-1)^{2+1}\ a_{21} \cdot \det(A_{21}) + (-1)^{2+2}\ a_{22} \cdot \det(A_{22}) + (-1)^{2+3}\ a_{23} \cdot \det(A_{23}).$$

Al reemplazar según los coeficientes de A resulta

$$\det(A) = (-1)^3\ \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ +(-1)^4\ \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5\ \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante de tamaño 2×2

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 2, \ \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 = 2.$$

Luego

$$\det(A) = (-1) \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -8.$$

Se verifica que el determinante de A da lo mismo sin importar la fila usada para el desarrollo. Si calculamos ahora el determinante desarrollando por la fila 3 debe dar igual que antes, es decir -8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Decimos entonces que

$$\det(A) = (-1)^{3+1}\, a_{31} \cdot \det(A_{31}) + (-1)^{3+2}\, a_{32} \cdot \det(A_{32}) + (-1)^{3+3}\, a_{33} \cdot \det(A_{33}).$$

Al reemplazar según los coeficientes de A resulta

$$\det(A) = (-1)^4 \ \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+(-1)^5 \ \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^6 \ \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante de tamaño 2×2

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 4, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{no importa ya que está multiplicado por el coeficiente 0.}$$

Luego

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + \ \ 0 \ \ + 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -8. \quad \checkmark$$

Vemos que, del desarrollo por las tres filas, el proceso más económico en cuentas es el desarrollo por la fila 3 ya que esta fila tiene un 0 entre sus coeficientes y de este modo podemos evitarnos el cálculo de uno de los determinantes (de las submatrices de tamaño 2×2).

Análogamente, podemos repetir todo el procedimiento cambiando la palabra “fila” por la palabra “columna”. De este modo obtendremos el $\det(A)$ *desarrollado por columnas*. El determinante debe ser el mismo siempre; no depende de las filas o columnas escogidas para el desarrollo.

Como ejemplo, calculemos el $\det(A)$ desarrollando por la columna 2 (ya que ésta es la columna que más ceros tiene). El resultado debe ser -8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 3 & \mathbf{2} & 1 \\ -1 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Decimos entonces que

$$\det(A) = (-1)^{1+2}\, a_{12} \cdot \det(A_{12}) + (-1)^{2+2}\, a_{22} \cdot \det(A_{22}) + (-1)^{3+2}\, a_{32} \cdot \det(A_{32}).$$

Al reemplazar según los coeficientes de A resulta

$$\det(A) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+(-1)^4 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada determinante de tamaño 2×2 (menos el último que está multiplicado por el coeficiente 0)

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 4, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0.$$

Luego $\det(A) = (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + \ 0 \ = -8$ como habíamos anticipado. ✓

Ejemplo 10.13.3. Calcular $\det(A)$ desarrollando por la columna 3, para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$\det(A) = (-1)^{1+3}\, a_{13} \cdot \det(A_{13}) + (-1)^{2+3}\, a_{23} \cdot \det(A_{23}) + (-1)^{3+3}\, a_{33} \cdot \det(A_{33}).$$

Es decir,

$$\det(A) = (-1)^4 \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+(-1)^5 \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^6 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando resulta

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)] + \ 0 \ + 1 \cdot 1 \cdot [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2] = 1 \cdot 3 \cdot 3 + \ 0 \ + 1 \cdot 1 \cdot 3 = 12.$$

Dejamos para el lector la tarea de desarrollar este determinante por la fila 3 y comprobar que se obtiene $\det(A) = 12$. ✓

Vemos así que el cálculo del $\det(A)$, para $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ se reduce al cálculo de tres determinantes de submatrices de A de tamaño 2×2 .

En general si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la idea es la misma, reducir el cálculo del determinante de A a n determinantes de tamaño $n - 1 \times n - 1$.

10.14. Determinantes de matrices de tamaño $n \times n$

Ejemplo 10.14.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\det(A)$ elegimos la fila o la columna que más ceros tenga, en este caso desarrollamos por la fila 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego decimos que

$$\det(A) = (-1)^{3+1}\, a_{31} \cdot \det(A_{31}) + (-1)^{3+2}\, a_{32} \cdot \det(A_{32}) +$$

$$+ (-1)^{3+3}\, a_{33} \cdot \det(A_{33}) + (-1)^{3+4}\, a_{34} \cdot \det(A_{34}).$$

Que al reemplazar los coeficientes de A resulta (recordar que $a_{33} = 0$ y $a_{34} = 0$)

$$\det(A) = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y como

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{y} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

resulta $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 0 + 0 + 0 = 1$. ✓

Ejemplo 10.14.2. Calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 5 & 8 \\ \mathbf{0} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Desarrollando por la columna 1, resulta $\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(A_{11})$ ya que tanto a_{12} como a_{13} son 0 . Luego

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot [2 \cdot (-5) - (-3) \cdot 0] = 1 \cdot 3 \cdot (-10) = -30.$$

Observamos en el ejemplo anterior que en el caso donde A es una matriz *triangular* (todos los coeficientes son cero por arriba o por debajo de la diagonal) el determinante de dicha matriz es igual al producto de los elementos de su diagonal. De la misma manera el lector puede verificar que si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 9 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 2 \cdot 3 \cdot (-2) = -12.$$

Generalizando a tamaño $n \times n$ resulta la siguiente proposición.

Proposición 10.14.3. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es una matriz triangular*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}. \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

10.15. Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es una regla práctica que nos permitirá calcular el determinante de una matriz de 3×3. La desarrollamos en un ejemplo.

Ejemplo 10.15.1. Para calcular el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos del siguiente modo: escribimos la matriz A y abajo agregamos las dos primeras filas de A, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este arreglo de 5×3 realizamos los productos de izquierda a derecha, de los elementos señalados sobre las diagonales, es decir

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 3 \\ & \searrow & & & \\ -1 & & 0 & & 1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ -2 & & -1 & & 0 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 2 & & 1 & & 3 \\ & & & \searrow & \\ -1 & & 0 & & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\cdot 0\cdot 0 = 0 \\ (-1)\cdot(-1)\cdot 3 = 3 \\ (-2)\cdot 1\cdot 1 = -2 \end{array}\right.$$

También realizamos los productos, ahora de derecha a izquierda, de los elementos señalados sobre las diagonales, es decir

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 3 \\ & & & \swarrow & \\ -1 & & 0 & & 1 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ -2 & & -1 & & 0 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 2 & & 1 & & 3 \\ & \swarrow & & & \\ -1 & & 0 & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot 0\cdot(-2)=0 \\ 1\cdot(-1)\cdot 2=-2 \\ 0\cdot 1\cdot(-1)=0 \end{array}\right.$$

Luego, para calcular el determinante de A sumamos todos los productos de izquierda a derecha $\searrow$ y les restamos los productos de derecha a izquierda $\swarrow$. Esto es

$$\det(A) = 0 + 3 + (-2) - 0 - (-2) - 0 = 3. \quad \checkmark$$

Ejemplo 10.15.2. Calcular mediante la regla de Sarrus el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Al tomar los productos $\searrow$ resulta, al tomar los productos $\swarrow$ resulta,

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & & 5 & & 1 \\ & \searrow & & & \\ 0 & & 1 & & -1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ & \searrow & & \searrow & \\ 2 & & 5 & & 1 \\ & & & \searrow & \\ 0 & & 1 & & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccccc} 2 & & 5 & & 1 \\ & & & \swarrow & \\ 0 & & 1 & & -1 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ 2 & & 5 & & 1 \\ & \swarrow & & & \\ 0 & & 1 & & -1 \end{array}\right)$$

$$2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 5\cdot(-1) = 2 + 0 - 5; \qquad (1\cdot 1\cdot 1) + ((-1)\cdot 2\cdot 2) + (1\cdot 5\cdot 0) = 1 - 4 + 0.$$

Por lo tanto $\det(A) = 2 + 0 - 5 - 1 - (-4) - 0 = 0. \quad \checkmark$

Es importante recordar que la regla de Sarrus sólo sirve para calcular determinantes de matrices de 3 × 3.

10.16. Propiedades del determinante

A continuación enunciaremos algunas propiedades del determinante sin realizar una demostración formal, simplemente mostraremos que se verifican en un ejemplo.

Proposición 10.16.1. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tiene alguna de sus filas donde todos sus elementos son* 0 *entonces* $\det(A) = 0$.

Ejemplo: si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces al desarrollar el determinante de A por la tercer fila resulta

$$\det(A) = (-1)^{3+1}\, a_{31} \cdot \det(A_{31}) + (-1)^{3+2}\, a_{32} \cdot \det(A_{32}) + (-1)^{3+3}\, a_{33} \cdot \det(A_{33})$$

que al reemplazar los coeficiente de A resulta

$$\det(A) = (-1)^4 \cdot 0 \cdot \det(A_{31}) + (-1)^5 \cdot 0 \cdot \det(A_{32}) + (-1)^6 \cdot 0 \cdot \det(A_{33}) = 0. \quad \checkmark$$

Proposición 10.16.2. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *entonces* $\det(A) = \det(A^t)$

Recordemos que A^t es la matriz traspuesta de la matriz A.

Ejemplo: observamos que si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Al calcular sus determinantes verificamos que son iguales:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7 \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7. \quad \checkmark$$

Proposición 10.16.3. *Si* A *y* B *son dos matrices que pertenecen a* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *entonces*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Ejemplo: consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta $\det(A) = 1\cdot 1 - 2\cdot(-3) = 7$ y $\det(B) = 2\cdot 1 = 2$ (B es triangular). Si calculamos el producto

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$$

Entonces $\det(A \cdot B) = 2 \cdot (-14) - 7 \cdot (-6) = 14$. Se verifica que

$$\det(A \cdot B) = 14 \quad \text{y} \quad \det(A) \cdot \det(B) = 7 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B). \quad \checkmark$$

Observación 10.16.4. La proposición 10.16.3 no se verifica al sumar matrices, es decir, en general

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Por ejemplo, al considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta $\det(A) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$ y $\det(B) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = 5$. Si calculamos la suma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\det(A+B) = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 15$. Luego

$$\det(A+B) = 15 \quad \text{y} \quad \det(A)+\det(B) = 2+5 \quad \Rightarrow \quad \det(A+B) \neq \det(A)+\det(B).$$

Proposición 10.16.5.

$$\det\left(\lambda \cdot I_{n\times n}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo al considerar la identidad de tamaño 2 × 2

$$\det\left(\lambda \cdot I_{2\times 2}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2.$$

Al considerar la identidad de tamaño 3 × 3

$$\det\left(\lambda \cdot I_{3\times 3}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3.$$

Proposición 10.16.6. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A).$$

Podemos demostrar la proposición 10.16.6 usando la proposición 10.16.3 y la proposición 10.16.5

Demostración. Sabemos que $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (I_{n\times n} \cdot A) = (\lambda \cdot I_{n\times n}) \cdot A$, luego

$$\det(\lambda \cdot A) = \det((\lambda \cdot I_{n\times n}) \cdot A) \underset{\text{Proposición 10.16.3}}{\Rightarrow} \det(\lambda \cdot A) = \det(\lambda \cdot I_{n\times n}) \cdot \det(A)$$

Entonces por 10.16.5 resulta $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$. ☐

Ejemplo 10.16.7. Al considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{resulta} \quad \det(A) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$$

Si calculamos $\lambda \cdot A$ resulta

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ -\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \quad \text{y así} \quad \det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot 3\lambda - 2\lambda \cdot (-\lambda) = 5\lambda^2. \quad \checkmark$$

Ejemplo 10.16.8. Sabiendo que A y B son matrices de tamaño 3×3, que $\det(A) = 5$ y $\det(B) = 2$, calcular $\det(2 \cdot A \cdot B)$.

Sabemos que $2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot (A \cdot B)$, luego al aplicar la proposición 10.16.6 resulta $\det(2 \cdot A \cdot B) = 2^3 \cdot \det(A \cdot B)$ (ya que la matriz $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$). Para terminar de resolver aplicamos el resultado de la proposición 10.16.3, es decir

$$\det(2 \cdot A \cdot B) = 2^3 \cdot \det(A \cdot B) = 2^3 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 8 \cdot 5 \cdot 2 = 80. \quad \checkmark$$

Ejemplo 10.16.9. Sean A, B y $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \cdot X = B^t$. Si además $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\det(B) = 3$, hallar $\det(X)$

Como se verifica que $A \cdot X = B^t$ al tomar determinante de ambos miembros (obtenemos una igualdad numérica) resulta $\det(A \cdot X) = \det(B^t)$. Al usar las propiedades estudiadas, concluimos que $\det(A) \cdot \det(X) = \det(B)$. El $\det(B)$ es dato, ahora calculemos $\det(A) = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -5$. Reemplazando tenemos que

$$\det(A) \cdot \det(X) = \det(B) \quad \Leftrightarrow \quad (-5) \cdot \det(X) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \det(X) = -\tfrac{3}{5}. \quad \checkmark$$

10.17. Matrices inversibles y determinantes

Las siguientes proposiciones muestran cuál es la relación entre el determinante de una matriz (cuadrada) y la posible existencia de la matriz inversa.

Proposición 10.17.1. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es inversible, entonces* $\det(A) \neq 0$ *y además* $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

Demostración. Recordemos que si A es inversible debe existir A^{-1} su inversa, que verifica

$$A \cdot A^{-1} = I_{n\times n} \quad \Rightarrow \quad \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det\left(I_{n\times n}\right) \quad \Rightarrow \quad \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 1^n$$

Es decir $\det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 1$. Podemos observar que dado que se verifica la igualdad anterior $\det(A) \neq 0$ y podemos despejar en este caso

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

La recíproca de esta proposición también se verifica, aunque la demostración de este hecho está fuera del alcance de este libro. Sin embargo enunciaremos la propiedad y la usaremos cuando sea conveniente.

Proposición 10.17.2. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *verifica* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ *es inversible.*

Podemos resumir las dos proposiciones anteriores en una.

Proposición 10.17.3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es inversible* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de cómo aplicamos este resultado.

Ejemplo 10.17.4. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, decidir si es inversible.

Para esto calculamos $\det(A)$ desarrollando por la fila 2.

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir $\det(A) = 3 + 0 + 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ es inversible (gracias a la proposición 10.17.3) ✓

Ejemplo 10.17.5. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, decidir si es inversible.

Para esto calculamos $\det(A)$ desarrollando también por la fila 2.

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir $\det(A) = 1 + 0 + (-1) = 0$, entonces A no es inversible. ✓

Ejemplo 10.17.6. Hallar todos los $\delta \in \mathbb{R}$ tales que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ resulte inversible, con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \delta & \delta+2 \\ -\delta & 1 & 0 & \delta \\ \delta+2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para analizar si A es inversible o no, recordamos la proposición 10.17.3 ya que A resultará inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Calculamos entonces el $\det(A)$. Observemos que no podemos aplicar la regla de Sarrus ya que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Desarrollamos el determinante por la columna 3 (es la que tiene más 0), luego

$$\det(A) = (-1)^{1+3} \cdot \delta \cdot \det \begin{pmatrix} -\delta & 1 & \delta \\ \delta+2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante que nos quedó podemos usar la regla de Sarrus o bien desarrollar por alguna fila o columna, hacemos esto último, desarrollando por la columna 1 resulta

$$\det(A) = (-1)^{1+3} \cdot \delta \cdot \left[(-1)^{1+1} \cdot (-\delta) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +(-1)^{2+1} \cdot (\delta+2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Es decir $\det(A) = \delta \cdot [(-\delta) \cdot 0 - (\delta+2) \cdot (1-\delta)] = -\delta \cdot (\delta+2) \cdot (1-\delta)$. No vale la pena distribuir esta última expresión ya que nos interesa ver cuándo $\det(A) = 0$. Planteamos

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\delta \cdot (\delta+2) \cdot (1-\delta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 0 \quad \text{o} \quad \delta = -2 \quad \text{o} \quad \delta = 1.$$

Luego, si $\delta = 0$, $\delta = -2$ ó $\delta = 1$ (como $\det(A) = 0$) la matriz A no es inversible. De la misma manera, si δ es cualquier número real excepto 0, -2 y 1 (como $\det(A) \neq 0$) A resulta inversible.

En conclusión, la respuesta es

$$A \text{ es inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \in \mathbb{R} - \{-2\ ,\ 0\ ,\ 1\}. \quad \checkmark$$

10.18. Sistemas de ecuaciones en forma matricial

La definición vista para producto de matrices es tal que nos permitirá escribir un sistema de ecuaciones lineales como un producto de matrices convenientes. Por ejemplo, dado el sistema

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & -1 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

sabemos que posee lo que llamamos *matriz de los coeficientes del sistema*, es decir la matriz A asociada al sistema S es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si definimos $X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ la matriz de las incógnitas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y calculamos $A \cdot X$ (el producto de matrices), resulta

$$\begin{array}{c|l} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2x+3y-z \\ x+y \\ y+3z \\ -x-y+z \end{array} \end{array}$$

Es decir

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ x+y \\ y+3z \\ -x-y+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

Vemos que al efectuar el producto $A \cdot X$ obtenemos los miembros de la izquierda del sistema…

Luego, si pretendemos resolver el sistema, vamos a querer que

- la primer fila de $A \cdot X$ (la primer ecuación del sistema) sea igual a 1
- la segunda fila de $A \cdot X$ (la segunda ecuación del sistema) sea igual a 2
- la tercer fila de $A \cdot X$ (la tercer ecuación del sistema) sea igual a -1
- la cuarta fila de $A \cdot X$ (la cuarta ecuación del sistema) sea igual a 0

O sea, el sistema puede expresarse así:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & -1 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es lo que llamamos *representación matricial de* S (escribir el sistema S como un producto de matrices convenientes). Esta manera de expresar el sistema S tiene la forma $A \cdot X = b$ donde las matrices A y b son conocidas (son dato) y la matriz X es la matriz que queremos hallar (la matriz incógnita). En el ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que en la representación matricial del sistema

- A es la matriz de los coeficientes del sistema.
- A tiene tantas filas como ecuaciones tiene el sistema.
- A tiene tantas columnas como incógnitas tiene el sistema.
- La matriz (de una sola columna) X está formada por las incógnitas del sistema.

Ejemplo 10.18.1. Dado un sistema de ecuaciones, su escritura en forma matricial es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 2w & = & 1 \\ & & y & & & - & w & = & -2 \end{array}\right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vamos ahora a usar la representación matricial de un sistema, junto con el hecho de que podemos calcular inversas, para resolver sistemas cuya matriz de coeficientes sea inversible.

Ejemplo 10.18.2. Resolver el sistema S dado por

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & -4 \\ -x & + & y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Recordemos que podemos resolver este sistema usando Gauss, mostraremos ahora cómo resolverlo de otra manera (aprovechando que la matriz de los coeficientes es inversible). Primero pasamos a la forma matricial, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A \cdot X = b \qquad (*)$$

donde las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema es resolver la ecuación matricial $(*)$. Pensando como en los ejemplos anteriores, si A fuera una matriz inversible, es decir, si existiese la matriz inversa A^{-1}, al multiplicar ambos miembros de $(*)$ resulta

$$A \cdot X = b \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow I_{3\times 3} \cdot X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow X = A^{-1} \cdot b.$$

Por lo tanto, para encontrar las soluciones de la ecuación $(*)$, si A tiene matriz inversa, bastará con efectuar el producto $A^{-1}{\cdot}b$. Verifiquemos si A es inversible o no, calculando su determinante (desarrollamos por la fila 3)

$$\det(A) = (-1)^{3+1}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1+1 = 2.$$

Como $\det(A) \neq 0$ la matriz A debe tener inversa, la buscamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_1 + F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) 3F_2 - F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora seguimos triangulando hacia arriba:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2F_1 - F_3 \to F_1 \\ 2F_2 - F_3 \to F_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) F_1 - 2F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \frac{1}{2}F_1 \to F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \to F_2 \\ -\frac{1}{2}F_3 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces tenemos la matriz inversa de A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego para resolver $A \cdot X = b$, multiplicamos a izquierda por A^{-1} y obtenemos

$$X = A^{-1} \cdot b.$$

Haciendo las cuentas,

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Con lo cual

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es la matriz hallada, para expresar la solución del sistema de ecuaciones S escribimos $\left\{\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{15}{2}\right)\right\}$ es decir $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{7}{2},\ z = \frac{15}{2}$ (queda como ejercicio verificarlo). ✓

Ejemplo 10.18.3. Resolver el sistema dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & -1 \end{array} \right.$$

Escribiendo en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A \cdot X = b$$

donde las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como antes, si existe A^{-1} la solución resulta $X = b \cdot A^{-1}$, pero la matriz A es la misma que la vista en el ejemplo 10.18.2 luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es compatible determinado y su solución es $\{(0, -1, -3)\}$ es decir $x = 0,\ y = -1,$ y $z = -3$.

Observemos que si tenemos un sistema S que al llevarlo a la forma matricial $A \cdot X = b$ resulta que la matriz A es inversible, entonces el sistema S resulta compatible determinado y su única solución se obtiene calculando $X = A^{-1} \cdot b$. ✓

Ejemplo 10.18.4. Resolver el sistema S dado por

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si queremos resolver el sistema usando el mismo argumento que antes, debemos hallar la inversa de la matriz A (si existe). Para decidir si existe la matriz A^{-1} calculamos $\det(A)$ (desarrollamos por la columna 1)

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-4) + 4 = 0.$$

Como $\det(A) = 0$ sabemos que A no es inversible, es decir, no existe A^{-1}. Entonces no podemos resolver el sistema del mismo modo que en los ejemplos anteriores. Para resolver S lo hacemos con el método de Gauss. Dejamos al lector la tarea de comprobar que este sistema es compatible indeterminado y que sus soluciones son

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (4, -3,\ \ 1) + (2, -1,\ \ 0)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Observamos que si planteamos otro sistema S' cuyos coeficientes sean los mismos que los de S, por ejemplo,

$$S' = \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz A de la representación matricial de S' es la misma que en el ejemplo anterior. Ya sabemos que A no es inversible. Al tratar de resolver este sistema por el método de *Gauss* (ejercicio para el lector) comprobamos que resulta ser un sistema incompatible.

Resumiendo lo visto hasta ahora, si tenemos que resolver un sistema planteado en la forma matricial $A \cdot X = b$ donde A es una matriz cuadrada, comenzamos calculando el $\det(A)$ y concluimos que:

- Si $\det(A) \neq 0$, el sistema S es compatible determinado y su única solución se obtiene calculando $X = A^{-1} \cdot b$.
- Si $\det(A) = 0$, no sabemos que puede pasar. El sistema S puede ser tanto compatible indeterminado o incompatible, dependiendo de la matriz A y la matriz b .

Usaremos estos hechos para resolver sistemas con parámetros:

Ejemplo 10.18.5. Clasificar el sistema S según el número de soluciones para cada valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (k-2)x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & (k-1)y & - & z & = & 1 \\ (k-1)x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Observemos que según los valores que tome k tenemos distintos sistemas. Se pretende decidir para qué valores de k el sistema S resulta compatible determinado, para cuáles compatible indeterminado y para qué valores de k resulta incompatible. Escribiendo el sistema en forma matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 2 \\ 1 & k-1 & -1 \\ k-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A desarrollando por la columna 1

$$\begin{aligned} \det(A) &= (k-2)\cdot[(k-1)\cdot 1-(-1)\cdot 1]-1\cdot[1\cdot 1-2\cdot 1]+ \\ &\qquad\qquad +(k-1)\cdot[1\cdot(-1)-2\cdot(k-1)] \\ &= (k-2)\cdot k-(-1)+(k-1)\cdot[(-1)-2k+2)] \\ &= k^2-2k+1+(k-1)\cdot(1-2k)=-k^2+k. \end{aligned}$$

Luego,

$$\det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 2 \\ 1 & k-1 & -1 \\ k-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -k^2+k=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=0 \ \text{ ó } \ k=1.$$

Con lo cual, si $k \neq 0$ y $k \neq 1$, $\det(A) \neq 0$ y el sistema $A \cdot X = b$ es compatible determinado; por ejemplo si $k=-8$ el sistema

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{es compatible determinado.}$$

Si $k=0$ ó $k=1$ entonces $\det(A)=0$, no sabemos qué puede ocurrir (puede ser compatible indeterminado o incompatible). Analizamos cada caso por separado aplicando el método de Gauss:

$\boxed{\text{k=0}}$ La matriz ampliada del sistema S es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_1+2F_2 \to F_2 \\ -F_1+2F_3 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad F_2+F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Observamos que el sistema es incompatible.

$\boxed{\text{k=1}}$ La matriz ampliada del sistema S es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; F_1 + F_2 \to F_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; F_2 - F_3 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (1, -1, 1) + (1, 1, 0) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Ejemplo 10.18.6. Clasificar el sistema S según el número de soluciones para cada valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} kx & + & (k-1)y & + & z & = & k \\ 2kx & + & y & + & (k+2)z & = & k+3 \\ & - & ky & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Si escribimos el sistema en forma matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} k & k-1 & 1 \\ 2k & 1 & k+2 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k+3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A, la matriz de los coeficientes del sistema. Desarrollamos por la fila 3

$$\begin{array}{rcl} \det(A) & = & -(-k) \cdot [k \cdot (k+2) - 1 \cdot 2k] + 1 \cdot [k \cdot 1 - (k-1) \cdot 2k] \\ & = & k \cdot [k^2 + 2k - 2k] + [k - 2k^2 + 2k)] \\ & = & k^3 - 2k^2 + 3k = k \cdot (k^2 - 2k + 3). \end{array}$$

Luego

$$\det(A) = k \cdot (k^2 - 2k + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \ \text{ ó } \ k^2 - 2k + 3 = 0.$$

Pero la ecuación cuadrática $k^2 - 2k + 3 = 0$ no tiene soluciones reales, luego

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0.$$

Si $k = 0$, entonces $\det(A) = 0$, no sabemos qué puede ocurrir. Analizamos este caso aplicando el método de Gauss:

$\boxed{\text{k=0}}$ La matriz ampliada del sistema S es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \; F_1 + F_2 \to F_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \; -F_2 + 3F_3 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (1, 0, 0) + (0, 1, 1) \; , \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si $k \neq 0$, entonces $\det(A) \neq 0$ y como ya sabíamos, el sistema $A \cdot X = b$ es compatible determinado. Observemos, por ejemplo, qué sucede cuando $k = 1$. La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; 2F_1 - F_2 \to F_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; -F_2 + F_3 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Luego, el sistema es compatible determinado y su única solución es

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2} \, , \, \frac{1}{2} \, , \, \frac{3}{2}\right).$$

Si cambiamos el parámetro, por ejemplo si tomamos $k = 2$, tendremos otro sistema que también tendrá solución única. ✓

10.19. Matriz de Insumo-Producto: Introducción

En esta sección vamos a suponer que en la economía de un país hay sólo tres sectores: industria (todas las fábricas juntas), agricultura (todo lo relacionado a agricultura y ganadería), y servicios (energía eléctrica, agua, combustibles). Además, supondremos que esta economía es cerrada, no hay importaciones.

Para funcionar, cada uno de estos sectores necesita comprarle insumos a los otros, y también a sí mismo, y hay una cierta cantidad de bienes que se venden a terceros. Para que uno de los sectores aumente su producción, se presenta un problema: los demás también deberán producir más y así poder abastecerlo de los insumos que necesita.

Supongamos que los consumidores comprarán más productos textiles. La industria debe producir más, y va a consumir más materias primas del sector agricultura; más energía eléctrica y combustibles que le provee el sector servicios; y más maquinarias o herramientas producidas por el propio sector industria.

Entonces, para poder aumentar la producción de la industria, deben aumentar su producción los otros sectores también. Y ésto se traslada a los otros sectores: como agricultura y servicios van a aumentar su producción, necesitarán también más materias primas (del sector agricultura), herramientas (de industria) y energía (de servicios).

Si pensamos un momento, vemos que la industria — que tiene una demanda mayor de sus productos — no sólo tiene que aumentar su producción para cubrir esa propia demanda, sino que también debe producir para que los otros sectores puedan aumentar la suya y brindarle los insumos que necesita.

Se ve que el problema no es simple, y surgen muchas preguntas: ¿cuánto debe producir cada sector, entonces? ¿Cómo prever estos aumentos de producción, si el cambio de uno obliga a cambios en la producción de los otros?

La respuesta a este problema se debe a Wassily Leontief, matemático de origen ruso que emigró a Estados Unidos. Leontief obtuvo el premio Nobel de economía en 1973: "por el desarrollo del modelo de insumo-producto (también conocido como input-output) y por sus aplicaciones a importantes problemas económicos", según la propia Fundación Nobel.

Este método es hoy día una herramienta importante para la planificación de la producción económica de los países.

Por ejemplo, la importancia que suele atribuirse a la evolución del sector de la construcción deriva, precisamente, del hecho que el mismo demanda, de manera directa e indirecta, insumos provenientes de un conjunto amplio de otras actividades. Por lo tanto, el aumento de la actividad de la construcción acarrea el aumento de la producción de muchos otros sectores.

10.20. Matriz de Insumo Producto

Analicemos esta tabla con tres sectores: Agricultura, Industria y Servicios, que están relacionados entre sí.

Si fijamos un sector, leyendo verticalmente, cada columna nos dice cuántos insumos le compra ese sector a los demás. Por ejemplo Industria debe utilizar insumos de otros sectores y compra: a Agricultura 200, a Industria 350 y a Servicios 300 (según se lee en la columna de Industria).

Horizontalmente, cada fila nos dice cuánto vende cada sector a los demás. Por ejemplo, la producción de Industria es vendida de la siguiente forma: Agricultura 70, Industria 350 y Servicios 230 (siguiendo la fila de Industria).

	Agricultura	Industria	Servicios	Demanda Final	Valor Bruto de la producción
Agricultura	50	200	15	235	500
Industria	70	350	230	350	1000
Servicios	100	300	110	445	955
Valor Agregado	280	150	600		
Valor Bruto de la producción	500	1000	955		2455

Hay otra columna que no corresponde a un sector, la columna de Demanda Final. Allí aparecen los consumos que no corresponden a los tres sectores acá incluidos: representan las compras de los consumidores finales (que no se encuadran en ningún sector productivo), a la inversión (es la parte de la producción del período que se "acumula"para los siguientes), incluye las exportaciones, etc. Por ejemplo, siguiendo con Industria, vende otros 350 además de lo que vende a los 3 sectores acá incluidos.

Finalmente, la última columna corresponde al Valor Bruto de la producción de a cada sector: es la suma de todas las ventas, por ejemplo en el caso de Industria: $70 + 350 + 230 + 350 = 1000$.

Mirando por filas, falta comentar la fila de Valor Agregado, que surge como la diferencia entre el Valor Bruto de la producción y el valor de los insumos de cada sector. En el caso de Industria es: 1000 - (200 + 350 + 300) = 150. El Valor Agregado corresponde a las remuneraciones de los trabajadores que se requieren para la producción, y también al beneficio bruto. Este beneficio bruto surge como la diferencia entre el valor agregado y las remuneraciones.

10.21. La tabla como sistema de ecuaciones

Ahora expresaremos esta tabla como sistema de ecuaciones lineales. Primero reemplazaremos los números y sectores por letras genéricas. Por ejemplo x_{23} representa el valor del insumo 2 (que era Industria) que utiliza el sector 3 (que era Servicios).

	S1	S2	S3	DF	VBP
S1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	Y_1	X_1
S2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Y_2	X_2
S3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	Y_3	X_3
VA	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	X_1	X_2	X_3		

Si representamos la tabla como un sistema de ecuaciones, dado que las ventas de cada sector sumadas a la demanda final coinciden con el valor bruto de la producción, tenemos:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + Y_1 = X_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + Y_2 = X_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + Y_3 = X_3.$$

10.22. Coeficientes técnicos

Las columnas de la tabla de insumo producto representan la estructura de costos de cada sector. Si se divide el valor de cada insumo por el valor bruto de producción correspondiente (el total de la columna), se obtienen los coeficientes técnicos (que registran la necesidad de insumos de cada sector para producir una unidad del producto que dicho sector produce):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{Xj} \quad \text{donde } i \text{ indica al sector que vende y } j \text{ al que produce.}$$

O sea: se divide cada coeficiente de una columna por el total de la misma. En nuestro ejemplo queda (redondeando al segundo decimal):

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	50/500 = 0,10	200/1000 = 0,20	15/955 = 0,02
Industria	70/500 = 0,14	350/1000 = 0,35	230/955 = 0,24
Servicios	100/500 = 0,20	300/1000 = 0,30	110/955 = 0,12

Como $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{Xj}$, entonces $x_{ij} = a_{ij} \cdot Xj$. Usando esto, podemos reescribir el sistema de ecuaciones así:

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + Y_1 = X_1$$

$$a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + Y_2 = X_2$$

$$a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot X_2 + a_{33} \cdot X_3 + Y_3 = X_3.$$

En nuestro ejemplo quedaría:

$$0,10X_1 + 0,20X_2 + 0,02X_3 + Y_1 = X_1$$

$$0,14X_1 + 0,35X_2 + 0,24X_3 + Y_2 = X_2$$

$$0,20X_1 + 0,30X_2 + 0,12X_3 + Y_3 = X_3.$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes técnicos, Y a la de demanda final y X a la de valor bruto de producción, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

el sistema expresado en forma matricial nos queda:

$$X = A \cdot X + Y.$$

De más está decir que todo lo que hicimos con 3 sectores, se puede hacer con cualquier cantidad de ellos. En la realidad, no es extraño que las matrices de insumo producto de un país tengan más de 50 sectores.

10.23. Coeficientes de requisitos directos e indirectos

Para medir las necesidades de producción de cada sector ante un cambio de la demanda final (la matriz Y) se opera algebraicamente con las matrices a partir de la ecuación anterior:

$$X = A \cdot X + Y \quad \Rightarrow \quad X - A \cdot X = Y \quad \Rightarrow \quad (I - A) \cdot X = Y.$$

Calculando la inversa de $(I - A)$, y multiplicando a izquierda por $(I - A)^{-1}$ se tiene

$$X = (I - A)^{-1} \cdot Y.$$

A la matriz $(I - A)$ se la llama *matriz de Leontief*, y a $(I - A)^{-1}$ se la llama *matriz de coeficientes directos e indirectos*. Utilizando esta última, a partir de una variación de la demanda final Y^* se obtiene una nueva matriz de producción X^*, y se puede construir la nueva tabla:

$$X^* = (I - A)^{-1} \cdot Y^*.$$

En este paso está la hipótesis principal del modelo de Leontief: dice que la matriz de coeficientes técnicos A es siempre la misma, aunque cambie la demanda final Y. También la matriz de coeficientes directos e indirectos $(I - A)^{-1}$ es la misma, ya que sólo depende de A.

En la práctica, estas matrices varían por distintos motivos (adelantos tecnológicos, aparición de nuevos sectores o desaparición de otros, etc.) y suelen ser re-calculadas cada cierto tiempo.

En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

De esta forma, si la demanda final, en vez de ser

$$Y = \begin{pmatrix} 235 \\ 350 \\ 445 \end{pmatrix} \qquad \text{fuera} \qquad Y^* = \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

se podría calcular el nuevo valor bruto de la producción X^* haciendo:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,21 & 0,44 & 0,14 \\ 0,41 & 1,91 & 0,53 \\ 0,41 & 0,75 & 1,35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1207 \\ 1772 \\ 2012 \end{pmatrix}$$

Conociendo los nuevos valores brutos de producción, podemos armar la nueva tabla, usando que

$$a^*_{ij} = \frac{x^*_{ij}}{X^*_j} \ .$$

Como la matriz de Leontief $A = (a_{ij})$ no varía, $a^*_{ij} = a_{ij}$.

Podemos colocar los datos que ya tenemos, X^* e Y^*,

	Agricultura	Industria	Servicios	DF	VBP
Agricultura	x^*_{11}	x^*_{12}	x^*_{13}	700	1207
Industria	x^*_{21}	x^*_{22}	x^*_{23}	500	1772
Servicios	x^*_{31}	x^*_{32}	x^*_{33}	1000	2012
VA	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	1207	1772	2012		

Luego calculamos cada lugar x^*_{ij} y completamos.

Por último, se obtiene el valor agregado sumando en cada columna y restando del valor bruto de la producción.

Aclaración: Al hacer las cuentas con detalle, se ve que los valores no coinciden:

$$x^*_{11} = 0,10 \cdot 1207 = 120,7$$

$$x^*_{12} = 0,20 \cdot 1772 = 354,4$$

$$x^*_{13} = 0,02 \cdot 2012 = 40,24.$$

Sumando,

$$120,7 + 354,4 + 40,24 + 700 = 1215,34$$

que no coincide con el valor 1207. El error se debe a las aproximaciones numéricas al calcular la inversa, recordemos que trabajamos con sólo dos decimales exactos. Eso nos devolvió en el resultado sólo dos dígitos precisos, 1215,34 contra 1207 (en las aplicaciones prácticas, es bueno detectar las fuentes de errores numéricos, y aunque luego no nos tomemos la molestia de corregirlas, deberíamos ser capaces de determinar qué tan grave es el error).

Ejemplo 10.23.1.

a) Completar la siguiente tabla de insumo producto para un sistema económico de dos sectores:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180		10	200
S_2		80	0	100
VA				
VBP				

b) Hallar la matriz A de coeficientes técnicos y la matriz de coeficientes directos e indirectos $(I-A)^{-1}$.

c) Calcular la tabla de insumo producto para el año siguiente, sabiendo que la demanda final será

$$Y^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Observemos que en una primera mirada, podemos completar cuatro lugares de la tabla:

- En la primera fila, la compra del sector S_2 al sector S_1, llamémosla x_{12} tiene que cumplir que:

  $$180 + x_{12} + 10 = 200$$

  y despejando, tiene que ser $x_{12} = 10$.

- En la segunda fila, la compra del sector S_1 al sector S_2, llamémosla x_{21} tiene que cumplir que:

  $$x_{21} + 80 + 0 = 100$$

  y despejando, tiene que ser $x_{21} = 20$.

- En la cuarta fila, el valor bruto de la producción es el mismo de la cuarta columna, 200 para el sector S_1, y 100 para el sector S_2. Entonces:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180	10	10	200
S_2	20	80	0	100
VA				
VBP	200	100		

Ahora calculamos los valores agregados.

- En la primera columna, como la suma tiene que dar 200, el valor agregado de S_1 es cero.

- En la segunda columna, como la suma tiene que dar 100, el valor agregado de S_2 es 10.

Obtenemos:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180	10	10	200
S_2	20	80	0	100
VA	0	10		
VBP	200	100		

b) Para hallar la matriz A de coeficientes técnicos recordemos que

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{180}{200} & \frac{10}{100} \\ \\ \frac{20}{200} & \frac{80}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}$$

Ahora, la matriz de Leontief es $(I - A)$:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Nos piden ahora la inversa de esta matriz, la matriz de requerimientos directos e indirectos:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

c) Calculemos los nuevos valores brutos de producción. Se tiene

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Finalmente, armamos otra vez la tabla. Calculemos cada lugar x_{ij}:

$$x_{11} = a_{11} \cdot X_1 = \frac{9}{10} \cdot 300 = 270 \qquad x_{12} = a_{12} \cdot X_2 = \frac{1}{10} \cdot 180 = 18$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot X_1 = \frac{1}{10} \cdot 300 = 30 \qquad x_{22} = a_{22} \cdot X_2 = \frac{8}{10} \cdot 180 = 144$$

Con lo cual, la tabla será:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	270	18	12	300
S_2	30	144	6	180
VA	0	18		
VBP	300	180		

10.24. Apéndice

Hoy día, internet es una herramienta muy útil para obtener información de diversos temas. Aquí vamos a dar direcciones de organismos nacionales e internacionales con ejemplos de matrices insumo producto de distintos países e información que permita ampliar el tema.

En Argentina, el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) es uno de los responsables de la confección de la matriz de insumo producto. Otra explicación del tema puede verse en:

$$http://www.indec.mecon.gov.ar/mip/mip.htm$$

Las siguientes tablas están en castellano:
Tabla de Argentina (1997):

$$http://www.mecon.gov.ar/peconomica/matriz/menu.html$$

Tablas de México, distintos años:

$$http://www.inegi.gob.mx/est/default.asp?c=1629$$

Tabla de Perú (1994):

$$http://www.inei.gob.pe/biblioineipub/bancopub/Est/Lib0092/Indice.htm$$

En inglés, están disponibles las tablas de Inglaterra, Italia, Francia, Alemania, Estados Unidos, Australia, Canadá, Dinamarca y Holanda (en $http://www.oecd.org$, Organisation for Economic Co-operation and Development):

$$http://www.oecd.org/document/1/0,2340,en\_2649\_34263\_2673345\_1\_1\_1\_1,00.html$$

Por último, la autobiografía de Wassily Leontief, en el sitio web de la Fundación Nobel:

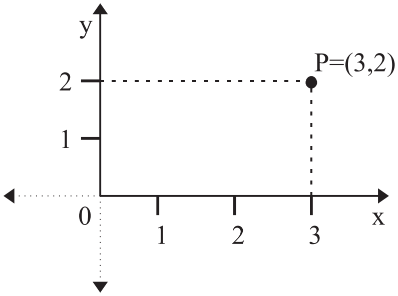
$$http://www.nobel.se/economics/laureates/1973/leontief-autobio.html$$

Capítulo 11

Geometría analítica

11.1. Puntos en el plano

Como vimos en el capítulo 2 (ver 2.4); para ubicar un punto en el plano utilizaremos los *ejes cartesianos*. Estos ejes, a los que llamaremos “eje x” (al eje horizontal) y “eje y” (al vertical), se cortan perpendicularmente en sus respectivos orígenes:



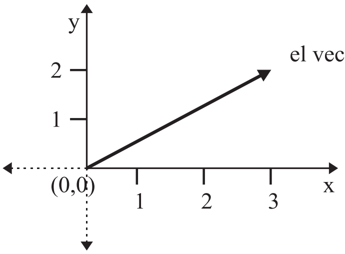
Cualquier punto del plano queda determinado si le asignamos 2 *coordenadas*. En la figura anterior, el punto P tiene primera coordenada o coordenada x igual a 3 y segunda coordenada o coordenada y igual a 2. Al conjunto de todos estos pares ordenados de números reales cualquiera (como el $(3,2)$) lo denotamos con $\mathbb{R}^2$, es decir $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

Siempre utilizaremos el orden (x,y) para referirnos primero a la coordenada x y después a la coordenada y.

11.2. Vectores en el plano

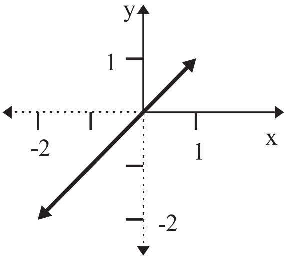
Para algunas aplicaciones vamos a interpretar los puntos como *vectores*.

Esto es, como segmentos orientados que salen del origen de coordenadas (el punto $(0,0)$ del plano) hasta las coordenadas del punto. Cuando decimos “el vector $(3,2)$” nos referimos al vector con la dirección de la recta que pasa por $(0,0)$ y por $(3,2)$



y orientado de $(0, 0)$ a $(3, 2)$ (esto quiere decir que la “flechita” está en el extremo $(3, 2)$).

Diremos que dos vectores tienen la misma *dirección* si están situados sobre la misma recta que pasa por el origen $(0, 0)$. Por ejemplo, los vectores $(1, 1)$ y $(-2, -2)$ tienen la misma dirección.



Cuando hablamos del *sentido* de un vector, nos referimos a la orientación (dentro de las dos posibles) del vector. Informalmente: “Para cuál de los dos lados posibles (dentro de la recta que determina la dirección) apunta el vector”. En el dibujo anterior, $(1, 1)$ tiene un sentido y $(-2, -2)$ tiene otro (opuesto al de $(1, 1)$).

11.3. Puntos en el espacio

Vayamos ahora a nuestro interés principal: los puntos y vectores en el espacio. Para ubicarlos, en este caso, usaremos tres ejes orientados según la figura y perpendiculares entre sí (ejes cartesianos): el “eje x”, el “eje y” y el “eje z” (como se ve en el gráfico siguiente, las líneas dibujadas llenas corresponden a los valores positivos de x, de y y de z, y las punteadas a los negativos.)

La orientación de los ejes dada en la figura no es la única posible (por ejemplo se podría poner “y” donde dice “x” y viceversa). La que hemos graficado se llama “dextrógira” o “de la mano derecha”. Esto es debido a que si se extiende esta mano con el pulgar hacia arriba y la palma abierta (imaginando que el origen $(0, 0, 0)$ está en la muñeca y la palma apunta hacia los elementos positivos del eje x), y luego se cierra la palma 90°, entonces la palma pasa de apuntar a los positivos del eje x a apuntar a los positivos del eje y, y el pulgar indica la posición de los positivos del eje z. Esta es la orientación que tienen los ejes en la figura dada más arriba.

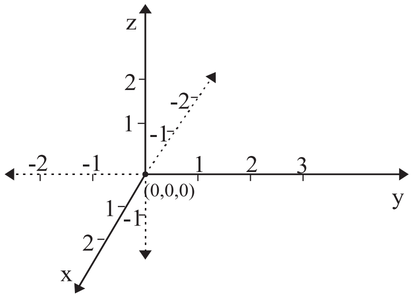
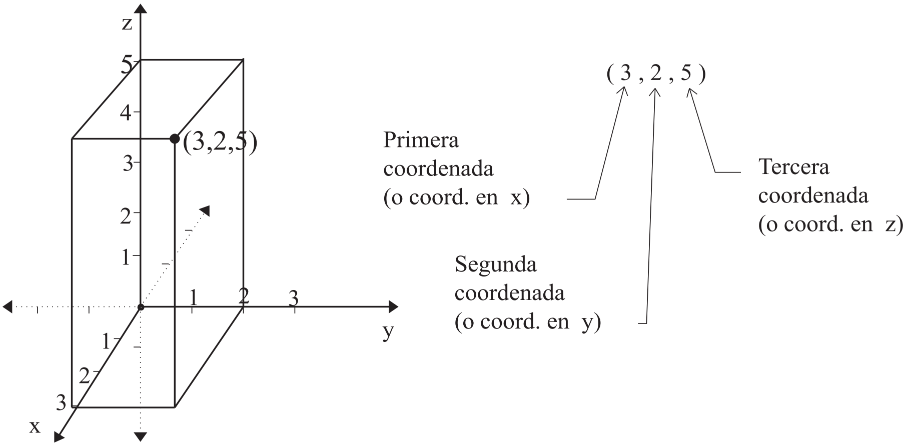


Figura 11.1: Sistema de ejes cartesianos en el espacio.

Cualquier punto del espacio, se puede ubicar dando sus coordenadas en cada uno de los ejes. Acá tenemos al punto $(3, 2, 5)$ representado gráficamente:

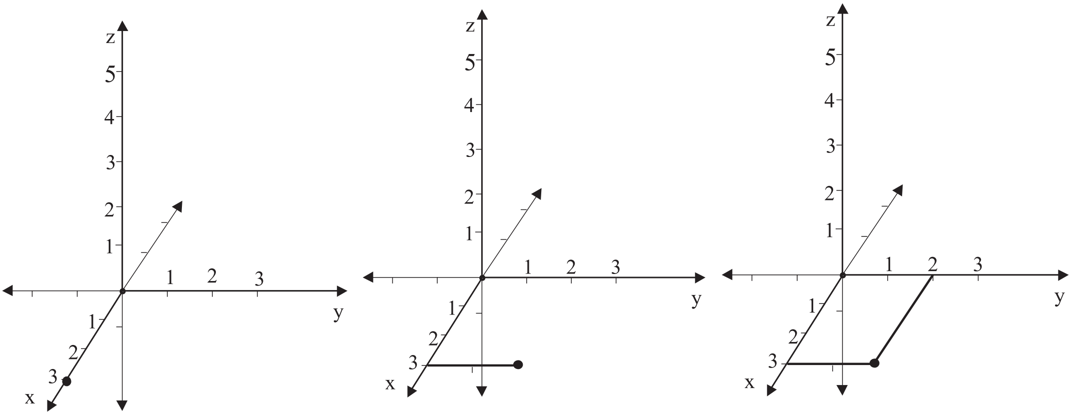


Cualquier punto del espacio queda determinado por 3 números reales (sus coordenadas) y recíprocamente 3 números reales definen 1 punto en el espacio. Denominaremos al conjunto de "ternas ordenadas de números reales" con $\mathbb{R}^3$, es decir $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

En la figura anterior hemos graficado el punto $(3, 2, 5)$ y hemos dibujado una caja con vértices en $(0, 0, 0)$ y $(3, 2, 5)$ para dar una idea de tridimensionalidad.

En la página siguiente vemos una manera de graficar la caja y el punto. También mostramos un ejemplo terminado de la representación de un punto con algunas coordenadas negativas.

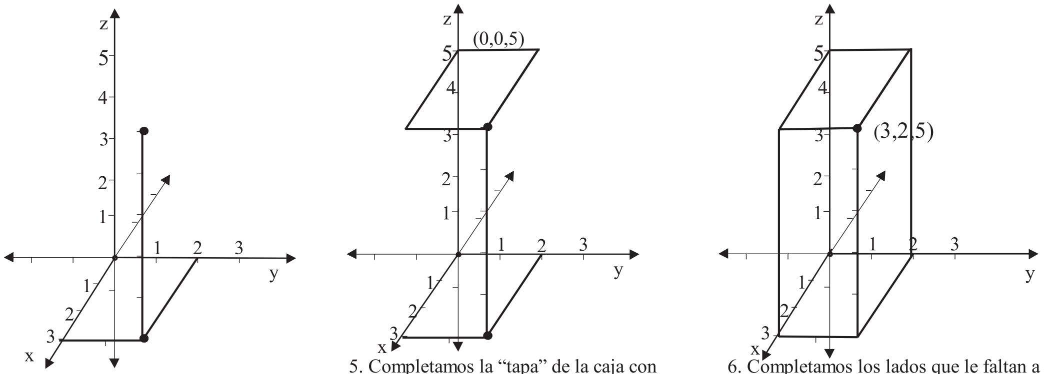
Cuando las coordenadas son negativas, conviene dibujar los bordes de la caja punteados para mayor claridad. Además para dar mayor idea de perspectiva conviene que las unidades del eje x sean más cortas que las de los otros 2 ejes (el y y el z) que deben tener igual longitud.



1. Nos movemos 3 unidades en el eje x.

2. Desde ahí nos movemos 2 unidades paralelamente al eje y.

3. Completamos la base de la caja con una línea paralela al eje x.



4. Subimos 5 unidades paralelamente al eje z (medidas desde el punto al que había llegado en el paso 2.).

5. Completamos la "tapa" de la caja con bordes paralelos a los de la base (y apoyada en el pto. (0,0,5) y el pto. al que llegamos en el paso 4.).

6. Completamos los lados que le faltan a la caja y se obtenemos una imagen bastante precisa (tridimensional) de la ubicación del punto (3,2,5).

Figura 11.2: Construcción del gráfico de un punto en $\mathbb{R}^3$.

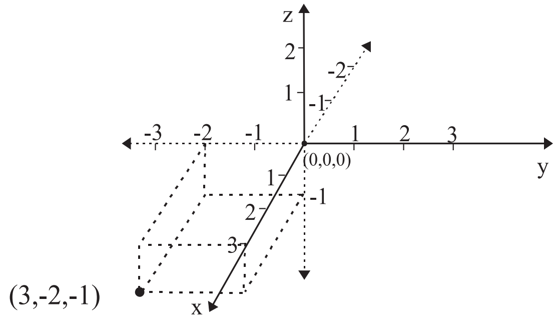
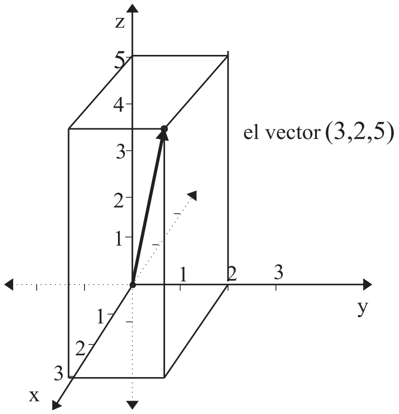


Figura 11.3: Gráfico de un punto con coordenadas negativas.

11.4. Vectores en el espacio

De manera similar a la vista en el plano, muchas aplicaciones geométricas se interpretan mejor si consideramos vectores en vez de puntos en el espacio:



El vector $(3, 2, 5)$ es un segmento orientado con la "cola" en el $(0, 0, 0)$ y la "cabeza" (la flecha) en el punto $(3, 2, 5)$. Para graficar un vector en $\mathbb{R}^3$ se procede igual que para un punto del espacio (seguir instrucciones dadas anteriormente), y al final se agrega la flecha que une al $(0, 0, 0)$ con el punto representado (esta flecha es una diagonal de la caja dibujada). Así:

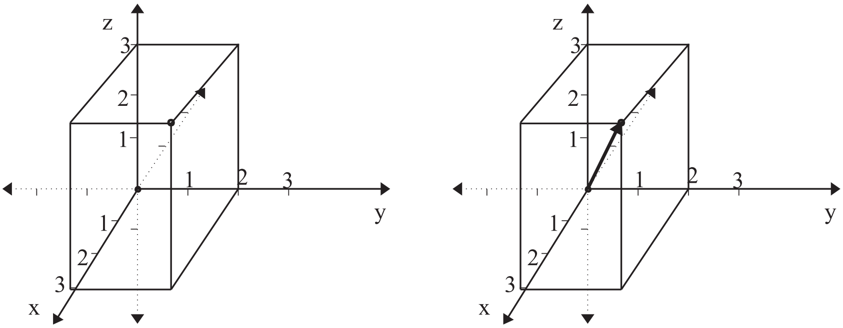


Figura 11.4: Gráfico del vector $(3, 2, 3)$.

11.5. Suma de vectores

Definición 11.5.1. *Sean* $v = (x_1, y_1)$ *y* $w = (x_2, y_2)$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^2$*. Definimos la* **suma** *de* v *y* w *como*

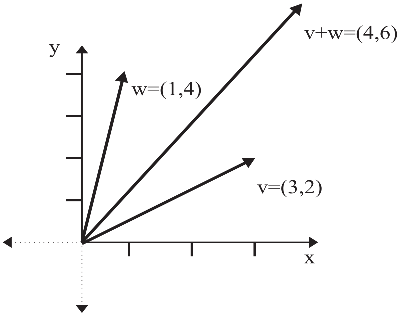
$$v + w = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).$$

Es decir, la suma de dos vectores da otro vector que se obtiene sumando las coordenadas correspondientes. Veamos un ejemplo.

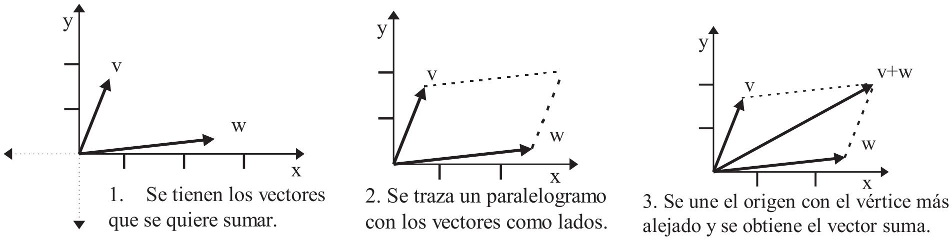
Si $v = (3, 2)$ y $w = (1, 4)$, entonces

$$v + w = (3, 2) + (1, 4) = (3 + 1, 2 + 4) = (4, 6).$$

Gráficamente:



La suma se puede calcular rápidamente usando el gráfico de los vectores sin necesidad de hacer cuentas. Se usa “la regla del paralelogramo”, así:

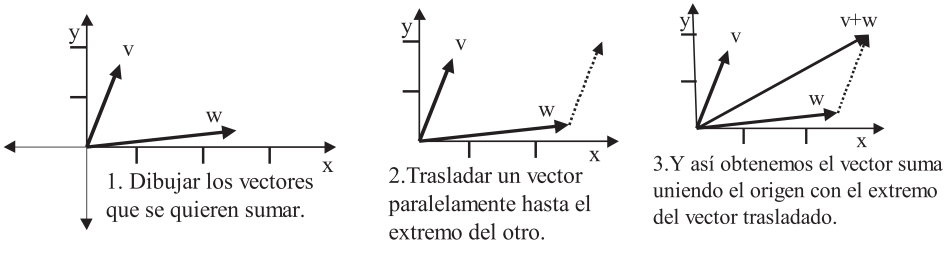


1. Se tienen los vectores que se quiere sumar.

2. Se traza un paralelogramo con los vectores como lados.

3. Se une el origen con el vértice más alejado y se obtiene el vector suma.

Hay otro método usando el gráfico que consiste en:

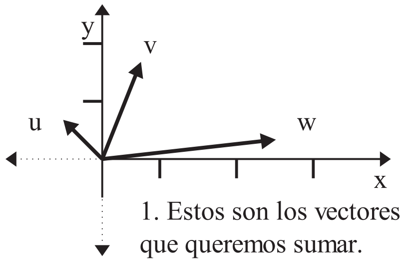


1. Dibujar los vectores que se quieren sumar.

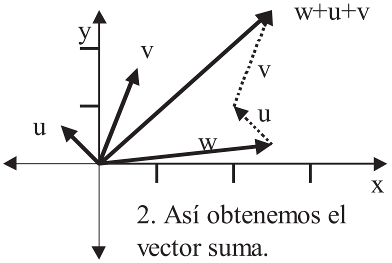
2.Trasladar un vector paralelamente hasta el extremo del otro.

3.Y así obtenemos el vector suma uniendo el origen con el extremo del vector trasladado.

Este último método es bueno si se quiere sumar más de un vector a la vez:



1. Estos son los vectores que queremos sumar.



2. Así obtenemos el vector suma.

Simplemente trasladamos paralelamente los vectores hasta poner la “cola” del vector donde quedó la “flecha” del anterior. No hay que confundir el vector trasladado con el “verdadero” vector que es el que tiene su “cola” en el origen.

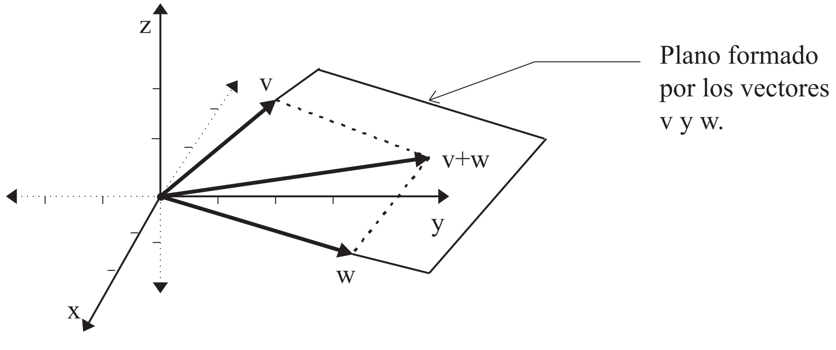
En $\mathbb{R}^3$ la *suma de dos vectores* se define como lo hicimos en el plano; sumando coordenada a coordenada:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Por ejemplo:

$$(3, 4, 5) + (3, -2, -1) = (6, 2, 4).$$

Gráficamente también se procede de manera similar. De hecho, dados 2 vectores en $\mathbb{R}^3$ hay un único plano que los contiene. En ese plano se encuentra el vector que resulta de sumar esos 2 vectores, como en la siguiente figura:



Plano formado por los vectores v y w.

11.6. Producto de un número por un vector

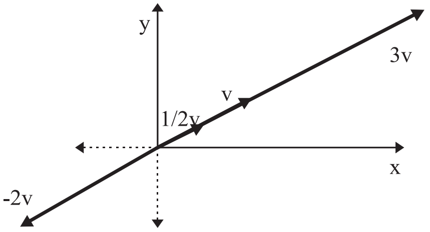
Definición 11.6.1. *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (x_1, y_1)$, *definimos el* **producto** *de* α *y* v *como*

$$\alpha \cdot (x_1,\ y_1) = (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot y_1)$$

Es decir, el producto de un número por un vector da otro vector que se obtiene multiplicando cada coordenada del vector por el número . Por ejemplo si $v = (3, 2)$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3,2) &= (3 \cdot 3, 3 \cdot 2) = (9,6) \\ (-2) \cdot (3,2) &= (-2 \cdot 3, -2 \cdot 2) = (-6,-4) \\ \tfrac{1}{2} \cdot (3,2) &= \left(\tfrac{1}{2} \cdot 3, \tfrac{1}{2} \cdot 2\right) = \left(\tfrac{3}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Gráficamente



Observación 11.6.2. Se puede ver que el vector $3 \cdot v$ tiene la misma dirección que el vector original, el mismo sentido y tres veces la longitud de v. O sea que el vector se "estiró" (al triple) en la dirección de v. El vector $-2v$ también tiene la misma dirección que v pero el sentido es opuesto, y la longitud es de dos veces la de v. Al multiplicar por $\frac{1}{2}$, el vector se "acorta" a la mitad. Esta situación es general y no depende del vector v. Podemos resumir todo de la siguiente manera:

Al multiplicar a un vector v por un *número positivo y mayor que* 1 el vector se "estira", y se "acorta" si el número es *positivo y menor que* 1. Si el número por el que multiplicamos es negativo, entonces el vector resultado, además de su longitud, cambia de sentido. La longitud nuevamente depende del valor absoluto del número por el cual se multiplica.

En el caso de vectores en $\mathbb{R}^3$, la definición es similar:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se define el *producto entre α y v* como

$$\alpha \cdot (x,\ y,\ z) = (\alpha \cdot x,\ \alpha \cdot y,\ \alpha \cdot z).$$

Por ejemplo:

$$2 \cdot (3,2,5) = (6,4,10); \quad \tfrac{1}{2} \cdot (3,2,5) = \left(\tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{5}{2}\right) \quad \text{y} \quad (-1) \cdot \left(\tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{5}{2}\right) = \left(-\tfrac{3}{2}\ , -1\ , -\tfrac{5}{2}\right).$$

También acá al multiplicar por un número positivo α se "estira" o se "acorta" el vector según α sea mayor o menor que 1, y cambia de sentido si es negativo.

Los vectores verifican las siguientes propiedades, similares a la propiedad distributiva de los números reales

Proposición 11.6.3. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, v y w dos vectores (v y $w \in \mathbb{R}^2$ o v y $w \in \mathbb{R}^3$). Entonces,*

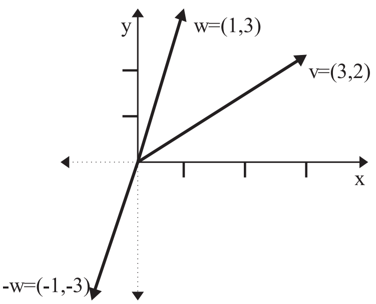
1. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.
2. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

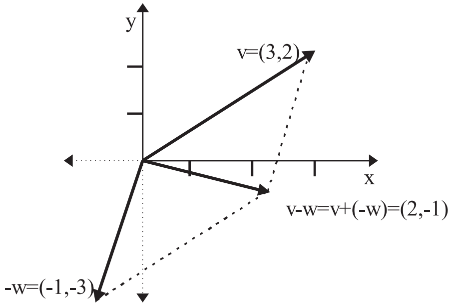
11.7. Resta de vectores

La resta de dos vectores no es en sí misma una operación que no se pueda conseguir sin las que hemos estudiado hasta ahora, porque $v - w$ es una abreviatura de $v + (-1).w$ (ver página 14 para comparar esta definición con la definición de resta de dos números reales), pero tiene una interpretación geométrica que nos resultará muy útil. Por ejemplo, si $v = (3, 2)$ y $w = (1, 3)$.

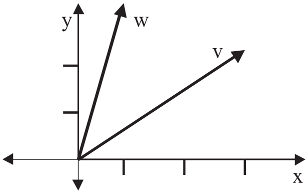
$$(3, 2) - (1, 3) = (3, 2) + (-1) \cdot (1, 3) = (3 - 1\ ,\ 2 - 3) = (2\ , -1).$$

Gráficamente

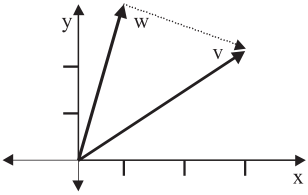




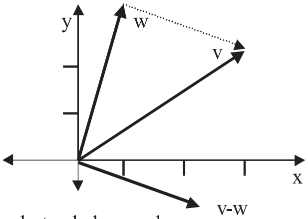
En el primer gráfico aparecen v, w y $-w$; en el segundo tenemos v, $-w$ y la suma $v + (-w)$ (usando la ley del paralelogramo). Veamos ahora una manera de calcular $v - w$ gráficamente.



Dibujamos v y w.



Si queremos hacer v-w, dibujamos un vector desde la punta de w a la de v (en ese orden).

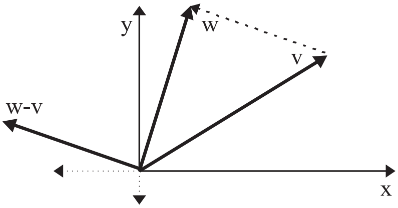


y lo trasladamos al origen paralelamente.

Así llegamos al mismo vector que obtuvimos cuando hicimos la cuenta con sus coordenadas; pero debemos tener cuidado: El vector $v - w$ no es el vector que va desde “la punta de v” a “la punta de w”; $v - w$ es ese vector trasladado al origen. La razón de esto es que, como $w + (v - w) = v$, entonces $(v - w)$ es el vector que sumado a w da v. O sea que si trasladamos $(v - w)$ al extremo de w tenemos que obtener v.

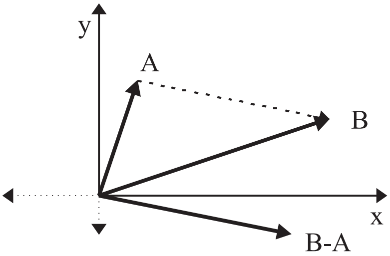
Notemos que si hubiésemos hecho $w - v$ en vez de $v - w$ el resultado hubiese sido distinto; el orden de la operación determina el sentido del vector:

Este tema (interpretación gráfica de vectores que no tienen su “cola” en el origen) puede llevar a confusiones y es delicado; es conveniente que prestemos mucho atención para evitar errores.



11.8. Vector *AB*

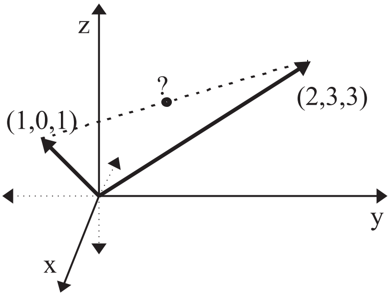
Dados dos puntos, por ejemplo $A = (3, 2, 3)$ y $B = (0, 2, 1)$, usualmente denominamos *vector* AB o "$\overrightarrow{AB}$" al vector $B - A$. Según vimos en la sección anterior, este vector no va desde A hasta B. La situación es la del gráfico siguiente:



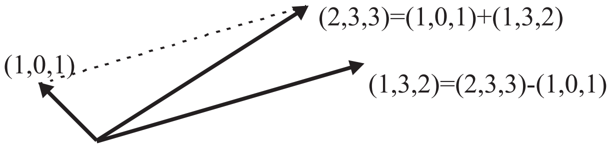
No debemos olvidarnos que todos los vectores que mencionamos con coordenadas (como $B-A = (3, 0, 2)$) tienen la "cola" pegada al origen. Los vectores que dibujamos "libres " (como en de la figura anterior que une el punto A al B) nos sirven para hacer interpretaciones geométricas. Por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ verifica que $A + \overrightarrow{AB} = B$, porque $\overrightarrow{AB} = B - A$. Entonces $\overrightarrow{AB}$ es el vector que "lleva A hasta B" en este sentido. (Recordemos que una manera de sumar gráficamente vectores era ir trasladándolos paralelamente uno hasta el extremo del otro para después unir el origen con el extremo del último vector.)

11.9. Punto medio entre dos puntos

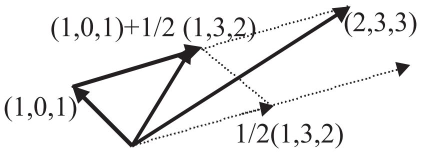
Dados dos puntos, por ejemplo el $(2, 3, 3)$ y el $(1, 0, 1)$, nos interesa encontrar otro que esté en la mitad del segmento que los une.



Este problema se puede resolver con las operaciones que acabamos de ver. Por ejemplo, el dibujo anterior sugiere usar el vector resta $(2,3,3)-(1,0,1)=(1,3,2)$. Porque



Y si recordamos que al multiplicar por 1/2 a $(1,3,2)$ obtenemos un vector con la misma dirección y sentido, pero con la mitad de su longitud, calculamos el punto medio haciendo:



Es decir, para encontrar el punto medio entre $(1,0,1)$ y $(2,3,3)$, hacemos:

$$(1,0,1)+\tfrac{1}{2}\ [(2,3,3)-(1,0,1)]=\tfrac{1}{2}\ [(1,0,1)+(2,3,3)]\,.$$

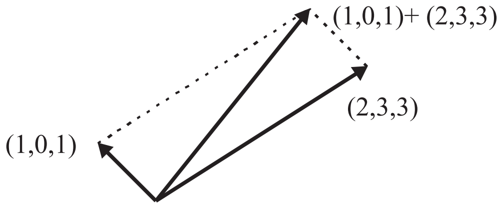
Esta última fórmula es más compacta para calcular el punto medio. El caso general se resuelve de igual manera.

Proposición 11.9.1. *Las coordenadas del punto medio entre los vectores* (x_1,y_1,z_1) *y* (x_2,y_2,z_2) *son:*

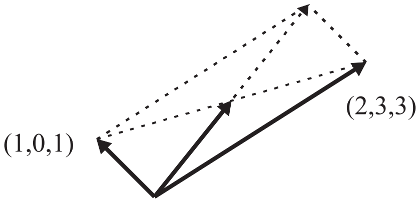
$$\tfrac{1}{2}\ [(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)]\,.$$

Una fórmula análoga vale para vectores en $\mathbb{R}^2$.

Hay otra manera de obtener el punto medio. Si sumamos $(1,0,1)+(2,3,3)$, por la regla del paralelogramo nos queda:

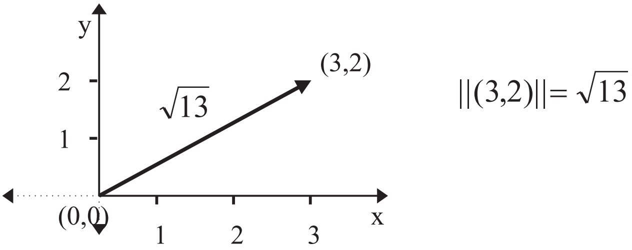


y si recordamos que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio y utilizamos lo comentado antes sobre el efecto de multiplicar un vector por $\frac{1}{2}$, es claro que el punto medio buscado es: $\frac{1}{2}\ [(1,0,1)+(2,3,3)]$. O sea la mitad del vector suma de los vectores a los que les buscamos su punto medio (igual que antes como era de esperar).



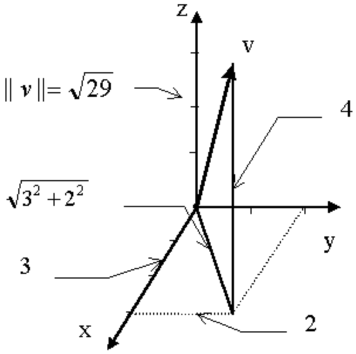
11.10. Norma de un vector

La *norma* (o el *módulo*) de un vector es su longitud. También se puede pensar que es la distancia de un punto (el extremo del vector) al origen. Por ejemplo, en el plano, la norma del vector $(3,2)$ es (usando el teorema de Pitágoras) $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.



Escribiremos $||(3,2)||$ para referirnos a la norma del vector $(3,2)$. En este caso $||(3,2)||=\sqrt{13}$. En $\mathbb{R}^3$ el cálculo no es tan directo como lo es en el plano, pero el razonamiento es similar. Calculemos la norma (la longitud) de $v=(3,2,4)$.

Para ello calculamos primero la longitud de la "sombra" del vector en el plano xy (el "piso"). Lo podemos hacer porque es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitud conocida. Son las coordenadas en x e y de v (es decir 3 y 2). Por lo tanto esta hipotenusa mide $\sqrt{3^2+2^2}$. Ahora sí podemos calcular $||v||$ (longitud de v), usando el teorema de Pitágoras porque, de nuevo, $||v||$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados de longitud conocida. Uno es $\sqrt{3^2+2^2}$ (la longitud de la "sombra", que ya calculamos) y el otro es 4 (la coordenada en z). Obtenemos entonces



O sea que $||v|| = ||(3,2,4)|| = \sqrt{3^2+2^2+4^2}$.

Definición 11.10.1. *Sea* $v = (x, y, z)$. *Llamamos* **norma** *de* v *a*

$$||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Observación 11.10.2.

- Como vimos en la discusión que precede a la definición, vale una fórmula similar para vectores en $\mathbb{R}^2$.
- Es importante recordar que geométricamente la norma de un vector mide la longitud del mismo. También se puede interpretar como la distancia del punto (x, y, z) al origen $(0, 0, 0)$.

Si sabemos que $||w|| = 3$ (es decir que w es un vector de longitud 3), ¿cuál es la norma del vector $\frac{1}{2}\, w$? Según lo que vimos al estudiar multiplicación de un número por un vector (ver 11.6) debe medir $\frac{1}{2}\, 3 = 1,5$. Este es un hecho general:

Proposición 11.10.3. *Sea* v *un vector en* $\mathbb{R}^2$ *o en* $\mathbb{R}^3$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|.$$

En particular, si w es un vector no nulo y lo dividimos por su norma (su longitud) se obtiene otro vector que tiene longitud 1. Es decir que vale siempre que $\frac{1}{||w||}\, w$ es un vector de longitud 1. Esto es útil cuando buscamos vectores de determinada longitud en la misma dirección de uno dado.

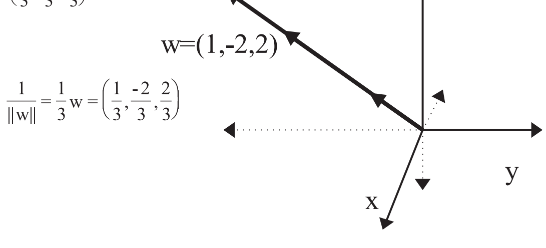
Ejemplo 11.10.4. Encontrar un vector de longitud 4 que tenga la misma dirección y sentido que el vector $w = (1, -2, 2)$.

Primero buscamos un vector en la misma dirección (y sentido) de w pero de longitud 1 (como discutimos más arriba). Para esto hacemos:

$$\frac{1}{||w||}\, w = \frac{1}{||(1,-2,2)||}\, (1,-2,2) = \frac{1}{\sqrt{9}}\, (1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

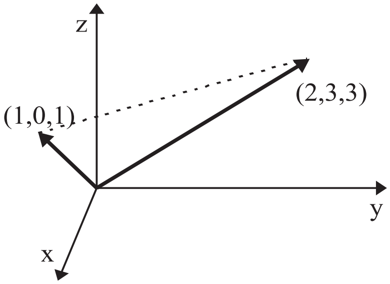
Una vez conseguido esto "estiramos" este vector de longitud 1 hasta la longitud deseada, que es 4. Esto se logra multiplicando

$$4\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right), \quad \text{que es el vector buscado.} \quad \checkmark$$



11.11. Distancia entre dos puntos

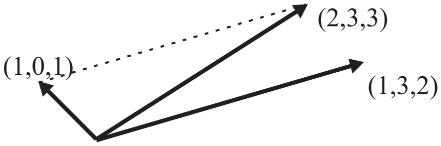
Supongamos que queremos calcular la distancia entre dos puntos, por ejemplo entre los puntos $(2,3,3)$ y $(1,0,1)$.



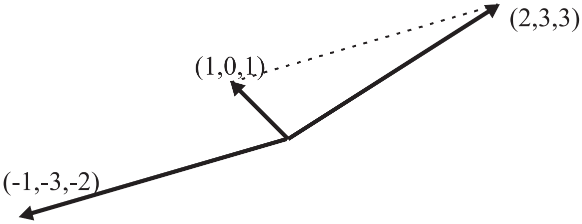
Lo visto en las secciones anteriores, nos provee de todas las herramientas necesarias para resolver este problema.

Identificando los puntos con vectores, como nos sugiere el gráfico (recordando la sección sobre resta de vectores, ver 11.7), alcanza con calcular la norma del vector resta (pensado en este caso con “cola” en $(1,0,1)$ y “punta” en $(2,3,3)$). Así que

$$(2,3,3)-(1,0,1)=(1,3,2) \quad \Longrightarrow \quad ||(1,3,2)||=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}.$$



Observemos que hacer la resta en el otro orden $(1,0,1)-(2,3,3)=(-1,-3,-2)$ y después calcular $||(-1,-3,-2)||=\sqrt{14}$ da lo mismo.



Entonces escribimos $d\left((2,3,3),(1,0,1)\right)=\sqrt{14}$.

Definición 11.11.1. *Sean $v=(x_1,y_1,z_1)$ y $w=(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, definimos la* **distancia** *entre v y w como*

$$d\left((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\right)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Es decir,

$$d(v,w)=\|v-w\|.$$

Observemos que la última fórmula se aplica también a vectores en $\mathbb{R}^2$.

11.12. Producto escalar

Definimos ahora un producto entre dos vectores que da como resultado un escalar (es decir un número).

Definición 11.12.1. *Dados* $v = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $w = (x_2, y_2, z_2)$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^3$*, definimos el* **producto escalar** *de* v *y* w*, y lo escribimos* $< v, w >$*, como*

$$< v, w > = < (x_1, y_1, z_1) \ , \ (x_2, y_2, z_2) > = \ x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \ .$$

Por ejemplo $< (1,\ 2, -1) \ , \ (0,\ 3,\ 5) > = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 0 + 6 - 5 = 1.$

Es posible definir el producto escalar para vectores de $\mathbb{R}^2$:

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \ .$$

Veamos algunas propiedades de este producto.

Proposición 11.12.2. *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* u*,* v *y* w *tres vectores de* $\mathbb{R}^2$ *o de* $\mathbb{R}^3$*. Entonces:*

i) $< \alpha \cdot u \, , v > = \ \alpha \cdot < u, v > = < u \, , \alpha \cdot v >$ *(propiedad asociativa respecto al producto por un número)*

ii) $< u, v >=< v, u >$ *(propiedad simétrica)*

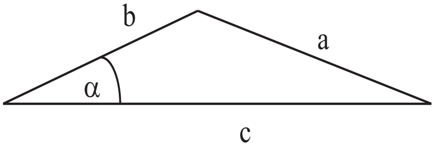
iii) $< u \, , v + w >=< u, v > + < u, w >$ *(propiedad distributiva respecto de la suma)*

iv) $< v, v >= ||v||^2$

Observación 11.12.3. Es muy importante notar que, para realizar cualquiera de las operaciones definidas hasta ahora, los vectores deben tener todos el mismo tamaño o *dimensión*, es decir no podemos por ejemplo sumar un vector de $\mathbb{R}^2$ con uno de $\mathbb{R}^3$ o calcular el producto interno entre esos vectores.

11.13. Propiedades del producto escalar

Recordemos primero el enunciado del teorema del coseno (es un resultado conocido de trigonometría más general que el teorema de Pitágoras, porque se aplica a triángulos que no son necesariamente rectángulos).



Dado un triángulo cualquiera (como el de la figura de arriba) donde a, b y c son las longitudes de los lados y α es el ángulo opuesto al lado a, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

(También valen expresiones similares para b^2 y c^2 en función de sus ángulos opuestos).

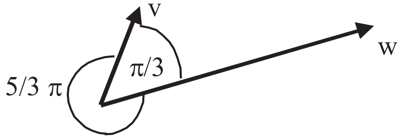
Usaremos este teorema para probar una propiedad que relaciona el producto escalar de dos vectores con sus longitudes y el ángulo entre ellos. Para ello, antes de seguir, necesitamos la siguiente

Observación 11.13.1 (Ángulo entre dos vectores)**.**

Dados dos vectores v y $w \in \mathbb{R}^3$, hay dos "candidatos" a ser llamados ángulo entre los vectores. Diremos que α es el **ángulo** entre v y w si verifica que

$$0 \leq \alpha \leq \pi.$$

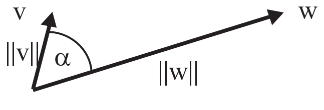
Por ejemplo, el ángulo entre v y w en el caso siguiente es $\dfrac{\pi}{3}$ y no $\dfrac{5}{3}\pi$:



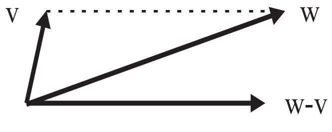
La primera de las propiedades del producto escalar que estudiaremos es

Proposición 11.13.2. *Si α es el ángulo entre v y w entonces*

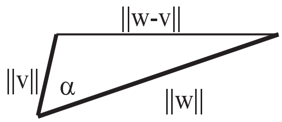
$$< v, w >= ||v||\ ||w||\ \cos(\alpha).$$



Demostración. El gráfico muestra el triángulo que queda formado por los dos vectores:



Recordemos que la longitud de la línea punteada es la longitud del vector $w - v$. Entonces, pensando en longitud de vectores y triángulos, tenemos



Aplicando el Teorema del coseno (con $a = ||w - v||$, $b = ||v||$ y $c = ||w||$) obtenemos

$$||w - v||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2||v||\ ||w|| \cos(\alpha).$$

Usando la definición de norma de un vector, si $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $w = (x_2, y_2, z_2)$, la igualdad anterior se traduce en:

$$\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right)^2 - 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\ \cos(\alpha).$$

Simplificando esta expresión queda:

$$x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2 =$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\ \cos(\alpha).$$

Simplificando aún más (cancelando los términos al cuadrado) queda:

$$-2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 = -2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\cos(\alpha),$$

de donde, cancelando el -2, obtenemos:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\cos(\alpha),$$

que es la igualdad que queríamos probar: $< v, w >= ||v||\ ||w|| \cos(\alpha)$. □

Esta propiedad nos da más información sobre qué mide el famoso número $< v, w >$ y nos da una herramienta para todas la propiedades que siguen.

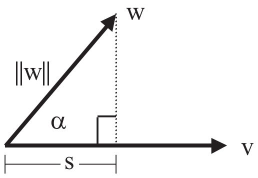
11.14. Interpretación geométrica del producto escalar

Dados $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 3, -1)$, podemos calcular fácilmente su producto escalar: $< v, w >= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 5$, pero ¿qué mide 5? Trataremos de responder esta pregunta. Para ello usaremos el teorema anterior que afirma que

$$< v, w >= ||v||\ ||w||\ \cos(\alpha).$$

Supongamos primero que tenemos dos vectores, v y w, donde uno de ellos cumple $||v|| = 1$ y llamemos s a la longitud de la proyección perpendicular de w sobre v (la longitud de la “sombra” de w sobre v).
Como $\cos(\alpha) = \frac{s}{||w||}$ (cateto adyacente sobre hipotenusa), entonces $||w|| \cos(\alpha) = s$. O sea que (por 11.13.2)

$$< v, w >= 1 \cdot ||w|| \cdot \cos(\alpha) = s.$$



Entonces, en el caso en que $||v|| = 1$, el número $< v, w >$ es exactamente la longitud de la “sombra” de w sobre v que nosotros llamamos s.

Es fácil verificar que si cambia la longitud de v, el producto escalar cambia, sin embargo la “sombra” de w no. Por lo tanto, si $||v|| \neq 1$, el producto escalar no da exactamente la longitud de la “sombra”. En este caso vale

$$< v, w >= ||v||\ ||w||\ \cos(\alpha) = ||v||\ s,$$

o sea, la longitud de la “sombra” por la longitud de v (que es $||v||$). (Si el ángulo α es mayor que 90° entonces el número $< v, w >$ mide la longitud de la sombra cambiada de signo: da negativo.)

Veamos otra propiedad del producto escalar. Primero recordemos que dos vectores v y w son *perpendiculares* si forman un ángulo recto.

Proposición 11.14.1. *Dados v, $w \in \mathbb{R}^3$ no nulos (es decir $\neq (0, 0, 0)$), entonces vale que:*

$$< v, w > = \ 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v \text{ es perpendicular a } w.$$

Se pide que v y w sean no nulos porque el producto escalar de $(0, 0, 0)$ por cualquier otro vector siempre da igual a 0 y eso no quiere decir que sean perpendiculares.

Demostración. Vamos a suponer que v y w son no nulos. Esto es equivalente a decir que sus longitudes son no nulas, o sea que $||v|| \neq 0$ y $||w|| \neq 0$. Veamos entonces la equivalencia:

$$< v, w >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad ||v||\ ||w|| \cos(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ y } w \text{ son perpendiculares.}$$

donde la primer equivalencia es cierta por 11.13.2, la segunda porque $||v|| \neq 0$ y $||w|| \neq 0$, la tercera porque $0 \leq \alpha \leq \pi$ (y porque para esos α, $\cos(\alpha) = 0$ sólo si $\alpha = \frac{\pi}{2}$) y la cuarta es por definición de perpendicularidad. Con esto hemos demostrado que los enunciados son equivalentes. ☐

Esta propiedad del producto escalar es clave, y la volveremos a usar más adelante cuando veamos rectas y planos.

Usando este último teorema, podemos fácilmente encontrar “a ojo” un vector perpendicular a uno dado (hay infinitos). Busquemos por ejemplo un vector perpendicular al $(2,5,3)$. Una forma rápida de hacer esto es "cruzar" dos números (uno cambiado de signo) y poner un 0 en el lugar restante:

$$\begin{array}{ccccccc} (& 2 & , & 5 & , & 3 &) \\ & & \searrow\!\swarrow & & & & \\ (& 5 & , & -2 & , & 0 &) \end{array}$$

Esto produce un vector perpendicular a $(2,5,3)$ pues

$$< (2,5,3),(5,-2,0) >= 2\cdot 5 - 5\cdot 2 + 3\cdot 0 = 0$$

y por la propiedad anterior esto es equivalente a que $(2,5,3)$ sea perpendicular a $(5,-2,0)$.

Veamos ahora cómo podemos usar el producto escalar para calcular el ángulo entre dos vectores.

Proposición 11.14.2. *Dados dos vectores v y w (no nulos), entonces, si α es el ángulo entre ellos (como lo definimos en 11.13.1), vale que*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{< v,w >}{||v||\ ||w||}\right).$$

Demostración. La demostración es inmediata a partir del teorema 11.13.2, que dice que $< v,w >= ||v||\ ||w|| \cos(\alpha)$, donde α es exactamente el ángulo que nos interesa calcular. Entonces, vale que

$$< v,w >= ||v||\ ||w|| \cos(\alpha) \ \Rightarrow\ \cos(\alpha) = \frac{< v,w >}{||v||\ ||w||} \ \Rightarrow\ \alpha = \arccos\left(\frac{< v,w >}{||v||\ ||w||}\right)$$

en la última implicación usamos la función arco coseno donde

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi],$$

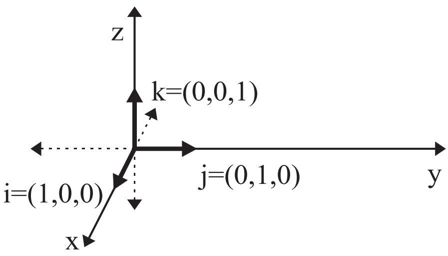
es la inversa de la función coseno . La última expresión es la que queríamos probar. ☐

Esta propiedad resulta útil porque en general tenemos como dato de los vectores sus coordenadas, digamos $v = (1,2,3)$ y $w = (5,-1,1)$ y eso permite calcular fácilmente el ángulo entre ellos: $< v,w >= 6$, $||v|| = \sqrt{14}$ y $||w|| = \sqrt{27}$. Usando el último teorema obtenemos $\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{27}}\right)$. De otra manera hubiera sido bastante complicado calcular el ángulo α entre v y w.

11.15. Producto vectorial

El producto vectorial es un producto entre dos vectores (como el producto escalar) pero con la diferencia que el resultado es un vector en vez de un número. Además, sólo podemos calcular el producto vectorial de dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Para definirlo, introduciremos antes una notación para los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Los llamaremos i, j y k respectivamente.

Esta notación y el determinante de matrices nos permite definir de manera compacta (y, esperamos, fácil de recordar) el producto vectorial.



Definición 11.15.1. *Sean* $v = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $w = (x_2, y_2, z_2)$. *Llamamos* **producto vectorial** *de* v *y* w *al vector*

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Una manera de recordar la fórmula del producto vectorial $v \times w$ consiste en calcular el determinante formal

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

donde, i, j, k son los vectores mencionados anteriormente.

Veamos un ejemplo con $v = (1, 2, 3)$ y $w = (3, -1, 5)$ para aclarar un poco:

$$\begin{aligned} v \times w &= (1,2,3) \times (3,-1,5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} k = \\ &= 13 \cdot i - (-4) \cdot j + (-7) \cdot k = \\ &= 13 \cdot (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,0) - 7 \cdot (0,0,1) = (13, 4, -7). \quad \checkmark \end{aligned}$$

11.16. Propiedades del producto vectorial

Proposición 11.16.1. *Dados dos vectores* v, $w \in \mathbb{R}^3$, *los vectores son múltiplos si y sólo si* $v \times w = 0$.

Proposición 11.16.2. *Dados dos vectores no nulos* v *y* $w \in \mathbb{R}^3$, *entonces, el vector obtenido haciendo* $v \times w$ *es perpendicular a ambos.*

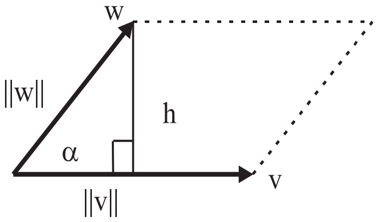
La demostración queda como ejercicio. La sugerencia que damos es considerar dos vectores genéricos $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $w = (x_2, y_2, z_2)$, calcular $v \times w$ en función de sus coordenadas y después usar el teorema 11.14.1 (que dice que para a, $b \in \mathbb{R}^3$ no nulos es equivalente que a y b sean perpendiculares a que $< a, b >= 0$). Probar entonces que en nuestro caso vale que $< v, v \times w >= 0$ y $< w, v \times w >= 0$.

Orientación de $v \times w$.

Ahora que sabemos que el vector $v \times w$ es perpendicular a v y a w, podemos preguntarnos para que lado apunta, es decir qué orientación tiene. El vector $v \times w$ respeta la "regla de la mano derecha" (ya discutida en 11.3). Esto quiere decir que si ponemos la palma de la mano derecha apuntando en la dirección y sentido de v (el primer vector) y la cierra hacia donde se encuentra w, el pulgar queda apuntando en la dirección y sentido que tiene $v \times w$. Con esto sabemos "para donde apunta" el vector $v \times w$ (conociendo a v y w, obviamente). Veamos ahora que longitud tiene.

Proposición 11.16.3. *Dados v y $w \in \mathbb{R}^3$, $||v \times w|| = ||v||\ ||w|| \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$ (donde α es el ángulo entre v y w)* [*]*.*

Si miramos el paralelogramo formado por v y w, usando el teorema anterior le podemos dar una interpretación a $||v \times w||$. ¿Cuál es?



Sabemos que $||v \times w|| = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$, y que $h = ||w|| \operatorname{sen}(\alpha)$ es la altura del paralelogramo (porque por definición $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{||w||}$). Por lo tanto $||v \times w|| = ||v||.h$, que es el área del paralelogramo determinado por v y w. Hemos encontrado una interpretación geométrica de la norma (la longitud) de $v \times w$.

Ejemplo 11.16.4. Calcular el área del paralelogramo determinado por los vectores $(1, 4, 0)$ y $(-1, 0, 2)$ utilizando la propiedad de producto vectorial recién vista.

Calculamos

$$\begin{aligned}(1,4,0) \times (-1,0,2) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} k \\ &= 8\,i - 2\,j + \ 4\,k = (8, -2, 4).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del paralelogramo es

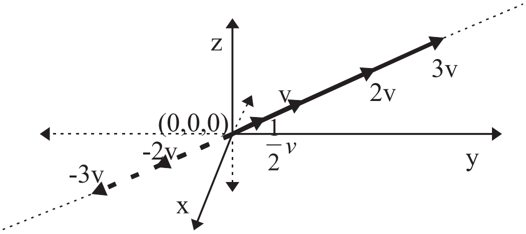
$$||(8, -2, 4)|| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 4 + 16} = \sqrt{84}. \quad \checkmark$$

---

[*] La demostración de esta propiedad es tediosa y larga, pero no difícil, de manera que el interesado puede leerla en el libro de de Guzmán y Colera, pág.139, citado en la bibliografía.

11.17. Rectas en el espacio

Estudiemos ahora conjuntos infinitos de puntos en $\mathbb{R}^3$. Empecemos con las rectas. Comencemos con una recta que contiene al origen $(0,0,0)$. Según vimos cuando estudiamos el producto de un número por un vector en 11.6, si tomamos un vector fijo, por ejemplo $v = (1,2,1)$, y lo multiplicamos por distintos números reales, se obtienen vectores en la misma dirección que v, pero de distintas longitudes.

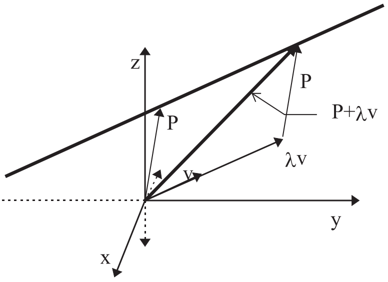


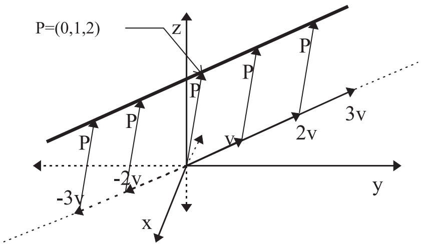
Si tomamos todos los vectores que obtenemos al hacer la multiplicación de un número real por el vector v tenemos todos los puntos que están en la dirección de v. Esto se debe a que al multiplicar v por un número "estiramos", "acortamos" o cambiamos el sentido de v según el número por el cual multiplicamos (ver 11.6). Una manera de describir genéricamente todos estos puntos es escribiendo $\lambda \cdot (1,2,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ es la letra griega lambda). Entendemos con esto que $\lambda \cdot (1,2,1)$ es un "múltiplo" de $(1,2,1)$ y que λ puede ser cualquier número. De esta manera, tenemos nuestra primer *ecuación de la recta*:

$$\lambda \cdot v, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

aunque aún es un poco limitada porque, como dijimos al principio, sólo describimos rectas que pasan por el $(0,0,0)$. Veamos como podemos describir todas las rectas.

Tratemos de encontrar una expresión genérica para la recta paralela a $\lambda \cdot (1,2,1)$, pero que "pase" por el punto $P = (0,1,2)$. "Que pase por" es una manera informal de decir que determinado punto pertenece a la recta. Podemos conseguir esto sumando a todos los vectores de la forma $\lambda.v$ el punto P, como muestran las figuras siguientes:





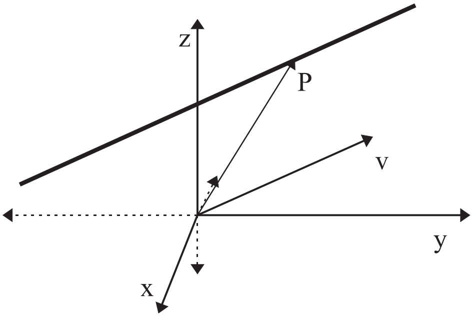
Es decir, si calculamos la suma $(0,1,2) + \lambda.(1,2,1)$ para los infinitos valores de λ, obtenemos una recta paralela a la que teníamos y que pasa por $P = (0,1,2)$. Podemos asegurar que $P = (0,1,2)$ es un punto de la recta $(0,1,2) + \lambda \cdot (1,2,1)$ porque si tomamos $\lambda = 0$, se obtiene $(0,1,2)$.

11.18. Ecuación vectorial de la recta

Definición 11.18.1. *Llamamos* **ecuación vectorial de una recta** *a toda expresión de la forma*

$$P+\lambda.v\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

donde P y v son vectores fijos, $v\neq 0$. El vector v se denomina **vector dirección** *de la recta y P el* **vector posición.**



Observemos que en general v **no** es un punto que pertenece a la recta. En cambio P siempre pertenece a la recta.

Definiciones 11.18.2. *Decimos que dos rectas son* **paralelas** *si sus vectores dirección son múltiplos.*

Decimos que dos rectas son **perpendiculares** *si sus vectores dirección lo son.*

Por ejemplo, las rectas $r_1:(0,1,2)+\lambda\cdot(2,3,-1)$ y $r_2:(5,2,6)+\lambda\cdot(-4,-6,2)$ son paralelas porque $(-4,-6,2)=(-2).(2,3,-1)$.

Por otra parte, las rectas r_1 y $r_3:(1,1,1)+\lambda\cdot(3,-2,0)$ son perpendiculares pues $<(2,3,-1),(3,-2,0>=0$.

11.19. Ecuaciones paramétricas de la recta

Otra manera de describir todos los puntos de una recta es a través de sus coordenadas. Tomemos la ecuación vectorial de la recta $(0,1,2)+\lambda.(1,2,1)$. Esto quiere decir que todos los puntos (x,y,z) que pertenecen a la recta verifican:

$$(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda.(1,2,1)=(0+\lambda,1+2\lambda,2+\lambda)$$

Pero esto es equivalente a que

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \lambda \\ y & = & 1+2\lambda \\ z & = & 2+\lambda \end{array}\right.$$

A este conjunto de ecuaciones lo llamamos las *ecuaciones paramétricas de la recta*; el número λ es el *parámetro* y sus valores determinan todos los puntos de la recta.

Por otra parte, dadas las ecuaciones paramétricas de una recta, por ejemplo

$$\begin{cases} x &= 5-2\lambda \\ y &= 3\lambda \\ z &= -2+\lambda \end{cases}$$

es muy simple hallar la ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (5-2\lambda, 3\lambda, -2+\lambda) = (5,0,-2) + (-2\lambda, 3\lambda, \lambda) = (5,0,-2) + \lambda(-2,3,1).$$

Primero separamos los términos que tienen λ de los que no lo tienen y después sacamos afuera el λ. Finalmente quedó la ecuación vectorial con vector posición $P = (5,0,-2)$ y vector dirección $v = (-2,3,1)$.

11.20. Ecuación continua de la recta

Veamos otra ecuación de la recta. Si tenemos una recta en ecuaciones paramétricas, por ejemplo

$$\begin{cases} x &= 2-\lambda \\ y &= -3+5\lambda \\ z &= 1+2\lambda \end{cases}$$

podemos despejar λ en cada igualdad y obtenemos

$$\frac{x-2}{-1} = \lambda \quad , \quad \frac{y+3}{5} = \lambda \quad , \quad \frac{z-1}{2} = \lambda \; ,$$

o sea que,

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2} \; .$$

Ésta es la *ecuación continua de la recta.* La bondad de esta ecuación es que los denominadores son las coordenadas del vector dirección $v = (-1,5,2)$ y los números que restan a las variables son las coordenadas del vector posición $P = (2,-3,1)$. Debe quedar claro que para que estas bondades sean ciertas, la ecuación tiene que estar escrita como la presentamos. Por ejemplo, si tuviéramos

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{3-y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

la afirmación anterior respecto a v y P ya no es cierta.

Hay casos donde no podemos completar el despeje porque λ no aparece en alguna de las ecuaciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} x &= 3 \\ y &= \lambda+1 \\ z &= 2+2\lambda \end{cases}$$

En este caso, λ no aparece en la primera ecuación. Esto se debe a que el vector dirección tiene esa coordenada igual a 0. Entonces escribimos

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \quad \text{y} \quad x = 3.$$

En general, si v_1, v_2, $v_3 \neq 0$, la ecuación continua de la recta tiene la forma

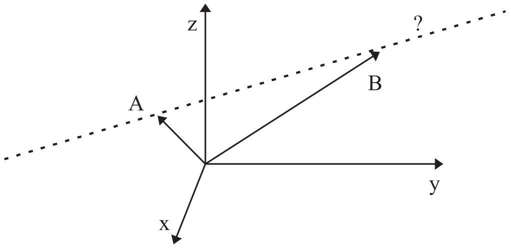
$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ es un punto de la recta y $v = (v_1, v_2, v_3)$ es su vector dirección.

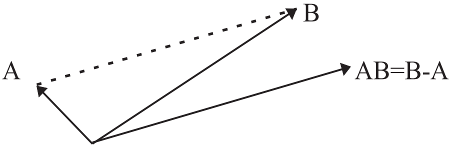
11.21. Recta que pasa por dos puntos

Tratemos de determinar una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

Ejemplo 11.21.1. Hallar una ecuación de una recta que pasa por $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 3, 3)$.



Si observamos atentamente el dibujo, vemos que el vector dirección tiene que ser $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3, 0)$ ($A - B$ también sirve) porque según vimos en 11.8 $\overrightarrow{AB}$ es el vector que "lleva" A hasta B (en el sentido que $A + \overrightarrow{AB} = A + (B - A) = B$).



Y como, para completar la ecuación vectorial, sólo falta un punto que pertenezca a la recta, basta tomar a A (que queremos que esté en la recta). De manera que la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 3, 3)$ es

$$(1, 0, 3) + \lambda \cdot (1, 3, 0) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Observemos que si tomamos los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ verificamos inmediatamente que la recta hallada pasa por A y B.

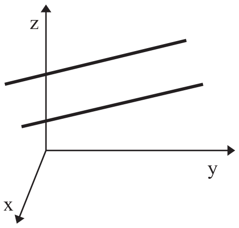
Generalizamos este ejemplo en la siguiente proposición.

Proposición 11.21.2. *Dados dos puntos distintos A y B una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es*

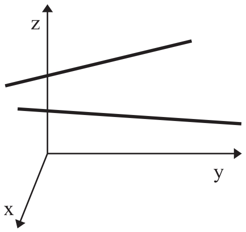
$$A + \lambda \cdot (B - A) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

11.22. Intersección de rectas

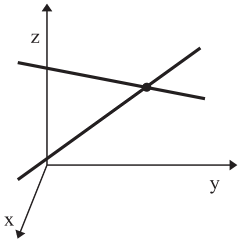
Estudiaremos los casos que aparecen cuando intersecamos rectas. A este estudio se le suele llamar la posición relativa de las rectas. Intuitivamente dadas 2 rectas r_1 y r_2 puede pasar que 1) no se corten y sean paralelas, 2) no se corten y no sean paralelas (se las llama *alabeadas*), 3) se corten en un punto, o 4) se corten en infinitos puntos (es la misma recta representada por dos ecuaciones distintas, se dice que son *coincidentes*).



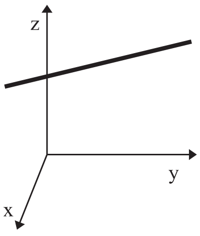
1) No se cortan y son paralelas.



2) Son alabeadas



3) Se cortan en un punto.



4) Son la misma recta.

A los casos 1) y 4) los estudiaremos juntos porque es el caso en que el vector dirección de una de las rectas es múltiplo del vector dirección de la otra. Esto podemos resolverlo a “ojo”, o viendo que las coordenadas de los vectores dirección son proporcionales.

Por ejemplo si $r_1 : (1, 0, 2) + \lambda(6, 2, -1)$ y $r_2 : (7, 1, 0) + \lambda(3, 1, -1/2)$, los vectores dirección $(6, 2, -1)$ y $(3, 1, -1/2)$ son múltiplos pues

$$(6, 2, -1) = 2 \cdot (3, 1, -1/2).$$

Esto también se puede ver porque verifican que sus coordenadas son proporcionales

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{1} = \frac{-1}{-1/2} = 2.$$

Por lo tanto, en este ejemplo sólo resta verificar si son la misma recta o si son rectas paralelas. Para ello alcanza con verificar si algún punto de r_1 (cualquiera) pertenece a r_2 . Tomemos $(1, 0, 2) \in r_1$ y veamos si está o no en r_2:

$$(1, 0, 2) = (7, 1, 0) + \lambda(3, 1, -1/2) = (7 + 3\lambda, 1 + \lambda, -1/2\lambda)$$

Obtenemos (igualando las coordenadas correspondientes)

$$\begin{cases} 1 &= 7 + 3\lambda \\ 0 &= 1 + \lambda \\ 2 &= -\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De la segunda ecuación queda $\lambda = -1$ y de la tercera $\lambda = -4$. Es un absurdo. Por lo tanto $(1, 0, 2) \notin r_2$, de donde concluimos que las rectas son paralelas y no se cortan (no son la misma recta). ✓

Veamos otro ejemplo donde resultan ser las rectas resultan coincidentes.

Consideremos el caso de $r_1 : (1, 0, 2) + \lambda(6, 2, -1)$ y $r_2 : (7, 2, 1) + \lambda(3, 1, -1/2)$. Los vectores dirección (como en el ejemplo recién visto) es uno múltiplo del otro, entonces las rectas son paralelas (pueden no cortarse como en el ejemplo anterior o pueden ser iguales). Igual que antes tomamos un punto de r_1 y verificamos si pertenece o no a r_2. El $(1, 0, 2) \in r_1$ es un buen candidato ¿Pertenece a r_2?:

$$(1, 0, 2) = (7, 2, 1) + \lambda(3, 1, -1/2) = (7 + 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - 1/2\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & = & 7 + 3\lambda & \Rightarrow \frac{1-7}{3} = \lambda \Rightarrow \lambda = -2 \\ 0 & = & 2 + \lambda \\ 2 & = & 1 - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

y $\lambda = -2$ verifica las otras 2 ecuaciones, entonces $(1, 0, 2) \in r_2$. Por lo tanto r_1 y r_2 son la misma recta. ✓

Veamos ahora los otros casos, en que los vectores dirección no son proporcionales.

Estudiemos la posición relativa de

$$r_1 : (1, 0, 2) + \lambda(3, 2, -1) \quad \text{y} \quad r_2 : (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, 3).$$

Ahora, $(3, 2, -1)$ no es múltiplo de $(1, 2, 3)$ y por lo tanto estamos en los casos 2) o 3) del principio. Primero cambiamos el nombre del parámetro de la segunda recta (lo notaremos con μ) porque no tiene por qué ser el mismo valor del parámetro en las distintas rectas el que dé el punto de intersección (veremos esto más claro en los ejemplos). Entonces

$$r_2 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \mu(1, 2, 3) = (1 + \mu, 1 + 2\mu, 1 + 3\mu)$$

y

$$r_1 : (x, y, z) = (1 + 3\lambda,\ 2\lambda,\ 2 - \lambda).$$

Planteamos que valgan lo mismo para algún punto (igualando las coordenadas de cada recta) y resolvemos:

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda & = & 1 + \mu & \Rightarrow \mu = 3\lambda \\ 2\lambda & = & 1 + 2\mu & \Rightarrow \mu = \frac{2\lambda-1}{2} \Rightarrow 3\lambda = \frac{2\lambda-1}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow \mu = -\frac{3}{4} \\ 2 - \lambda & = & 1 + 3\mu \end{cases}$$

Evaluamos en la tercera ecuación

$$2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \overset{?}{=} 1 + 3\left(-\frac{3}{4}\right)$$

y resulta

$$\frac{9}{4} \neq -\frac{5}{4}.$$

Por lo tanto las ecuaciones no tienen solución y entonces las rectas no se cortan, es decir son alabeadas (no se cortan y no son paralelas). ✓

Veamos el último caso con las rectas

$$r_1 : (1, 0, 2) + \lambda(3, 2, -1) \quad \text{y} \quad r_2 : (8, 6, 3) + \lambda(1, 2, 3).$$

Igual que en el caso anterior, como los vectores dirección no son proporcionales, intentamos ver si tienen un punto en común. Entonces procedemos igual que en el caso anterior y queda:

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda &= 8 + \mu \quad \Rightarrow \mu = 3\lambda - 7 \\ 2\lambda &= 6 + 2\mu \quad \Rightarrow 2\lambda = 6 + 2(3\lambda - 7) \Rightarrow 8 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \mu = -1 \\ 2 - \lambda &= 3 + 3\mu \end{cases}$$

Reemplazamos en la tercer ecuación y verificamos:

$$2 - 2 \overset{?}{=} 3 + 3(-1) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

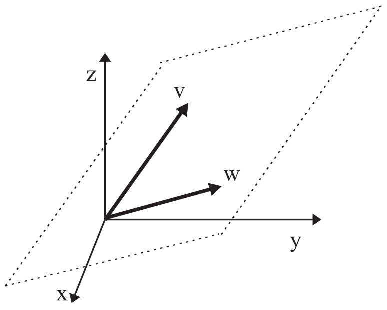
Por lo tanto las rectas se intersecan en el punto

$$(x, y, z) = (1 + 3 \cdot 2,\ 2 \cdot 2,\ 2 - 2) = (7, 4, 0)$$

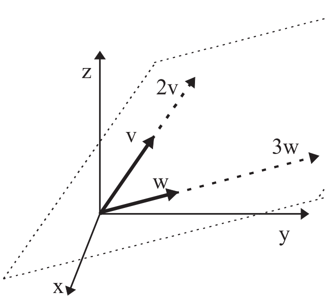
(ahí tomamos $\lambda = 2$ en r_1, pero podríamos haber tomado $\mu = -1$ en r_2). ✓

11.23. Planos en el espacio

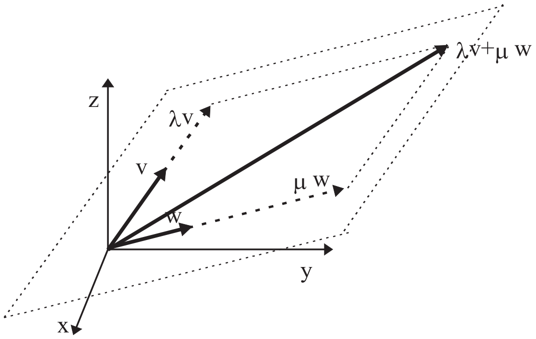
Tomemos dos vectores no alineados $v = (0, 1, 2)$ y $w = (1, 1, 1)$. Imaginemos el plano que se "apoya" en esos vectores (el único que contiene a los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$ y $(1, 1, 1)$).



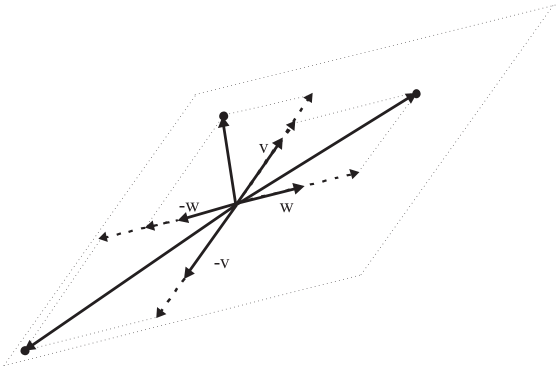
(Dibujamos el plano con "bordes" para poder verlo bien, pero los planos no tienen esos límites). Si tomamos múltiplos de v y w, por ejemplo $2v$ y $3w$, estos múltiplos siguen estando en el plano.



Y lo mismo sucede para cualquier múltiplo λv con $\lambda \in \mathrm{I\!R}$ y μw con $\mu \in \mathbb{R}$. Más aún, si sumamos dos múltiplos cualquiera, el vector suma sigue perteneciendo al plano en cuestión.

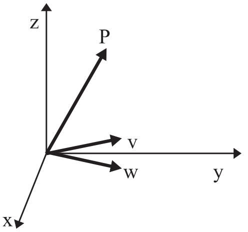


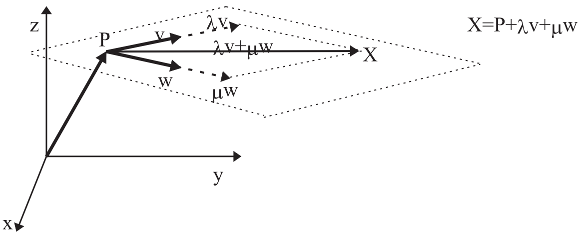
Lo importante es que eligiendo números λ y μ adecuados se "alcanza" cualquier punto del plano "apoyado" en v y w.



De manera que todos los puntos de ese plano se pueden escribir como $\lambda v + \mu w$ para algún λ y algún $\mu \in \mathbb{R}$. La limitación que tenemos es que estos planos pasan siempre por el origen.

Ahora veamos la ecuación de un plano que pase por el punto $P = (1, 2, 3)$ y que sea paralelo a los vectores $v = (0, 1, 2)$ y $w = (1, 1, 1)$. Lo que hay que hacer entonces es usar el vector P para que nos sitúe en el plano y desde allí usar los múltiplos λv y μw para acceder a cualquier punto X del plano (recordar como se sumaban vectores, ver 11.5.1).





Observar que como en el caso de las rectas, el plano contiene siempre al vector posición P, pero en general no a los vectores paralelos v y w.

11.24. Ecuación vectorial del plano

Definición 11.24.1. *Sean P un punto en $\mathbb{R}^3$ y v, w dos vectores en $\mathbb{R}^3$ no alineados*[*]*. Llamamos* **ecuación vectorial** *del plano que contiene a P y es paralelo a los vectores v y w a*

$$X = P + \lambda v + \mu w\ , \qquad \textit{para}\ \lambda,\ \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Si tenemos la ecuación vectorial del plano

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 1, 1)$$

y queremos expresarlo en función de sus coordenadas hacemos:

$$(x, y, z) = (1 + \mu \cdot 1,\ 2 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1,\ 3 + \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + \mu \\ y & = & 2 + \lambda + \mu \\ z & = & 3 + 2\lambda + \mu \end{array} \right.$$

Esas son las *ecuaciones paramétricas* del plano.

11.25. Ecuaciones paramétricas del plano

Definición 11.25.1. *Las* **ecuaciones paramétricas** *del plano que contiene al punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y es paralelo a los vectores $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & p_1 + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y & = & p_2 + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z & = & p_3 + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

---

[*] Es decir, tal que uno de los vectores no es un múltiplo del otro.

Si queremos pasar de las ecuaciones paramétricas a la vectorial se “deshace” el camino. Así:

$$\begin{cases} x &= 3 + 5\lambda - \mu \\ y &= 2 + \mu \\ z &= -5 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

entonces $(x, y, z) = (3 + 5\lambda - \mu, 2 + \mu, -5 + 2\lambda + 3\mu)$.

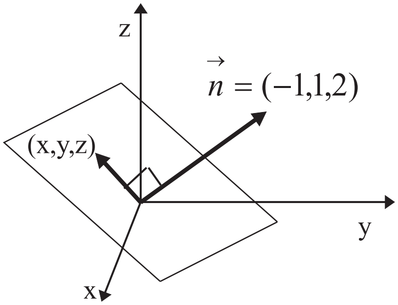
Separamos los términos que tienen λ de los que tienen μ y de los que no tienen nada y queda:

$$(x, y, z) = (3, 2, -5) + (5\lambda, 0, 2\lambda) + (-\mu, \mu, 3\mu) = (3, 2, -5) + \lambda(5, 0, 2) + \mu(-1, 1, 3)$$

que es la ecuación vectorial buscada.

11.26. Ecuación implícita del plano

Hay otra manera de definir un plano usando la noción de perpendicularidad. Primero, supongamos que el plano contiene al origen; en este caso, podemos determinarlo diciendo “ el plano está formado por todos los vectores perpendiculares al vector fijo n $(n \neq 0)$”. Para fijar ideas, supongamos que $n = (-1, 1, 2)$.



Recordando la propiedad 11.14.1 del producto escalar, los puntos (x, y, z) del plano perpendicular a $n = (-1, 1, 2)$ son exactamente los que verifican que

$$< (x, y, z), (-1, 1, 2) >= 0 \ ,$$

que es lo mismo que decir

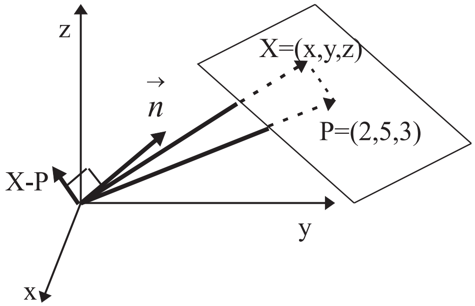
$$-x + y + 2z = 0$$

Esta es la *ecuación implícita* del plano.

De nuevo, tenemos que generalizar la ecuación a planos que no necesariamente pasan por el origen $(0, 0, 0)$. Ahora buscaremos la ecuación de un plano perpendicular a $n = (-1, 1, 2)$ pero que pase por el punto $P = (2, 5, 3)$.

¿Qué deben cumplir los vectores genéricos $X = (x, y, z)$ de ese plano? Deben cumplir que $X - P = (x, y, z) - (2, 5, 3)$ sea perpendicular a $n = (-1, 1, 2)$ (mirar el último dibujo). O sea que se cumpla que:

$$< (x, y, z) - (2, 5, 3), (-1, 1, 2) >= 0,$$



es decir que

$$-x + y + 2z - [(-2) + 5 + 6] = 0.$$

De ahí se obtiene la ecuación $-x + y + 2z - 9 = 0$ que es la ecuación buscada. Directamente de la ecuación, mirando los coeficientes que acompañan a cada variable, podemos decir cual es el vector perpendicular al plano. En este caso es

$$\underset{-1}{\underset{\downarrow}{-x}} + \underset{1}{\underset{\downarrow}{y}} + \underset{2}{\underset{\downarrow}{2z}} - 9 = 0$$

El vector normal es (-1,1, 2).

A este vector se lo llama *vector normal* al plano.

Definición 11.26.1. *Llamamos* **ecuación implícita** *del plano que contiene al punto* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *y es perpendicular al vector* $n = (n_1, n_2, n_3)$ *a*

$$< n,\ X - P >= 0 \qquad \textit{es decir} \qquad n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

Una forma más mecánica de calcular la ecuación implícita del plano perpendicular al vector $n = (-1, 1, 2)$ que contiene a $P = (2, 5, 3)$ consiste en escribir primero

$$-x + y + 2z$$

usando n y luego evaluar esa expresión en $(2, 5, 3)$ o sea hacer $-2 + 5 + 2 \cdot 3 = 9$. Y usamos el 9 para completar la ecuación implícita del plano:

$$-x + y + 2z = 9.$$

Lo que en realidad hemos usado son propiedades del producto escalar:

$$< n, X - P >= 0 \quad \Rightarrow \quad < n, X > - < n, P >= 0 \quad \Rightarrow \quad < n, X >=< n, P > .$$

De esta forma "obligamos" que $P = (2, 5, 3)$ pertenezca al plano (o verifique la ecuación que es lo mismo).

A partir de la noción de vector normal a un plano, podemos dar las siguientes definiciones.

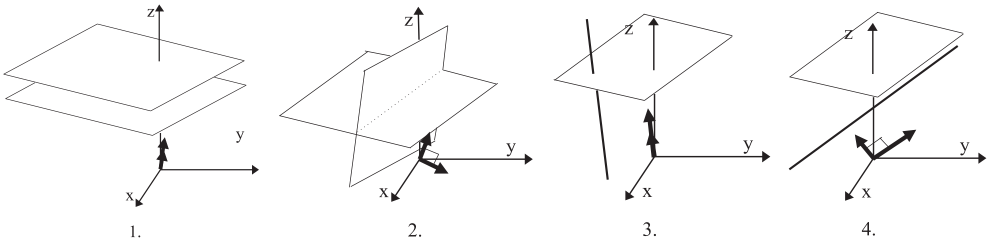
Definición 11.26.2. *Sean π_1 y π_2 dos planos con vectores normales n_1 y n_2 respectivamente y sea L una recta con vector dirección v.*

1. *Decimos que π_1 y π_2 son* **paralelos** *si n_1 y n_2 son proporcionales*[*].

2. *Decimos que dos π_1 y π_2 son* **perpendiculares** *si sus n_1 y n_2 son perpeniculares, esto es si $< n_1, n_2 >= 0$.*

3. *Decimos que L es* **perpendicular** *a π_1, v es proporcional a n_1.*

4. *Decimos que L es* **paralela** *a π_1 si v es perpendicular a n_1, es decir, si $< \ v, n_1 >= 0$.*



1. 2. 3. 4.

(En estos gráficos los vectores dibujados con trazo ancho son los vectores normales al plano o los vectores dirección de la recta, según corresponda.)

A partir de estas definiciones, es claro que conocer una ecuación implícita de un plano es de gran utilidad para resolver problemas de paralelismo o perpendicularidad.

Para pasar de la ecuación implícita $-x + y + 2z - 9 = 0$ a la ecuación vectorial necesitamos encontrar 2 vectores paralelos al plano y un punto que pertenezca al plano. Decir que un vector es paralelo al plano es lo mismo que decir que es perpendicular al vector normal $n = (-1, 1, 2)$. Usemos lo aprendido en 11.14 para encontrar “a ojo” vectores perpendiculares a $n = (-1, 1, 2)$. Uno puede ser $(1, 1, 0)$ y el otro $(0, 2, -1)$. Recordemos que estos vectores no deben estar alineados (estos no lo son, ¿ por qué?).

Ya tenemos los vectores paralelos al plano que necesitábamos para armar la ecuación vectorial; nos falta encontrar un punto cualquiera que pertenezca al plano.

Para esto, usamos la ecuación implícita que tenemos poniendo varios ceros y después despejamos de manera que se cumpla la igualdad. Por ejemplo ponemos $x = 0$ e $y = 0$ y queda

$$-0 + 0 + 2z = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{9}{2}.$$

Entonces un punto que pertenece al plano es $(x, y, z) = (0, 0, \frac{9}{2})$. Ya tenemos todos los ingredientes de la ecuación vectorial que es:

$$(0, 0, \tfrac{9}{2}) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 2, -1), \quad \lambda, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

---

[*] Es decir, si uno de los vectores es un múltiplo del otro: $n_2 = \lambda n_1, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Para pasar de la ecuación vectorial a la implícita utilizamos el producto vectorial. Recordemos que $v \times w$ da un vector perpendicular a v y a w (ver 11.16.2) Entonces, si tenemos la ecuación vectorial del plano

$$(0,0,\tfrac{9}{2}) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,2,-1).$$

y buscamos la ecuación implícita, lo primero que hacemos es buscar el vector normal que tiene que ser perpendicular a los vectores $(1,1,0)$ y $(0,2,-1)$. Para ello hacemos:

$$n = (0,2,-1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k = (1,-1,-2).$$

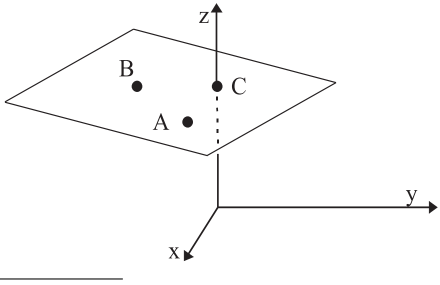
Observemos que dio un vector opuesto al que teníamos antes (cuando vimos como pasar de la ecuación implícita a la ecuación vectorial). Esto puede suceder, porque no hay un único vector normal a un plano. Ahora sólo nos falta un punto del plano para completar la ecuación implícita, para esto podemos usar el punto $(0,0,\frac{9}{2})$ de la ecuación vectorial que siempre es un punto del plano. Como vimos en el principio de la sección con estos elementos se puede calcular la ecuación:

$$< (x,y,z) - (0,0,\tfrac{9}{2}), (1,-1,-2) >= 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - 2z + 9 = 0.$$

Este ejemplo permite ver que un mismo plano tiene varias ecuaciones implícitas que lo describen (todas se obtienen multiplicando una por algún número). También tiene infinitas ecuaciones vectoriales distintas que lo describen (¿Cuántos pares de vectores v y w paralelos a un plano y cuántos puntos P que pertenezcan al mismo podemos elegir?)

11.27. Plano que pasa por tres puntos

Sabemos que dados tres puntos del espacio no alineados*, existe un único plano que lo contiene. Entonces, ¿cómo encontramos alguna ecuación del plano que contiene a los puntos $A = (1,0,1)$, $B = (2,-1,3)$ y $C = (0,0,1)$?



---

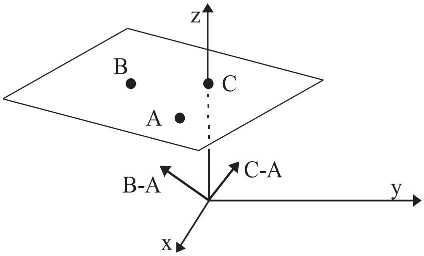
*Es decir, que no pertenecen a una misma recta. Un modo de decir si tres puntos están alineados o no, es encontrar alguna ecuación de la recta que pasa por dos de ellos y verificar si el punto restante satisface la ecuación o no.

Recordemos lo hecho para el caso de una recta que pasa por dos puntos y tratemos hacer algo similar ahora.

Si tomamos

$$B-A=(2,-1,3)-(1,0,1)=(1,-1,2) \quad \text{y} \quad C-A=(0,0,1)-(1,0,1)=(-1,0,0),$$

obtenemos dos vectores paralelos al plano buscado



Con esto tenemos la mitad del trabajo hecho, porque para conseguir la ecuación vectorial del plano sólo falta un punto del plano; pero esto no es problema, como dato tenemos tres. Elijamos uno cualquiera, por ejemplo $A=(1,0,1)$. La ecuación vectorial queda:

$$(1,0,1)+\lambda(1,-1,2)+\mu(-1,0,0).$$

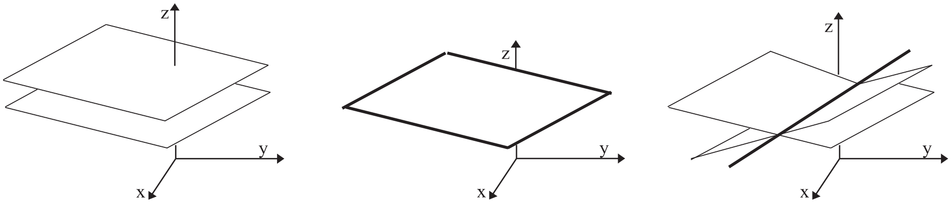
De esta ecuación podemos obtener cualquiera de las otras ecuaciones estudiadas (lo vimos en las secciones anteriores).

Proposición 11.27.1. *Dados tres puntos A, B y C no alineados, una ecuación vectorial del plano que los contiene es:*

$$A+\lambda(B-A)+\mu(C-A)\ , \quad \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}.$$

11.28. Intersección entre planos y entre planos y rectas

Primero estudiaremos las “posiciones relativas” entre 2 planos. Intuitivamente dos planos π_1 y π_2 pueden estar en las siguientes situaciones:



1) Son paralelos y no se cortan.
2) Son el mismo plano.
3) Se cortan en una recta.

Como los planos pueden determinarse con una sola ecuación lineal, usaremos sistemas de ecuaciones para resolver todas las intersecciones.

Por ejemplo veamos que ocurre con los planos

$$\pi_1 : x - 3y + 2z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : -2x + 6y - 4z = 3.$$

¿Son paralelos y no se cortan? ¿Son iguales? ¿Se cortan en una recta?

Para encontrar un punto (x, y, z) que pertenezca a ambos, ese punto debe cumplir con las dos ecuaciones del sistema al mismo tiempo, es decir debe satisfacer:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 1 \\ -2x + 6y - 4z &= 3 \end{cases}$$

Al triangular (cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales está explicado en la página 264 y siguientes) nos da un absurdo. Por lo tanto no existe solución; esto significa que no existe ningún punto que satisfaga las dos ecuaciones al mismo tiempo. Entonces, los planos no se cortan (son paralelos y no se cortan). Es el caso 1). ✓

Veamos otro ejemplo. Determinar, si existe, la intersección de los planos

$$\pi_1 : x - 3y + 2z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : -2x + 6y - 4z = -2.$$

Para resolver el problema, debemos hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 1 \\ -2x + 6y - 4z &= -2 \end{cases}$$

Al triangular, vemos que las dos ecuaciones son equivalentes (queda toda una fila de ceros). Esto significa que todos los (x, y, z) que cumplen la primera ecuación (es decir están en el plano π_1) también cumplen la segunda (están en el plano π_2) y viceversa. En este caso las dos ecuaciones describen el mismo plano o sea que estamos en el caso de la figura 2). ✓

Veamos un ejemplo más, hallar la intersección de

$$\pi_1 : x - 3y + 2z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 2x + y + z = 3.$$

Como en los ejemplos anteriores, debemos hallar las soluciones de

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Triangulando obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 1 \\ 7y - 3z &= 1 \end{cases}$$

Entonces podemos despejar x e y en función de z. Queda:

$$y = \frac{1 + 3z}{7} = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}z \quad \text{y} \quad x = 1 + 3y - 2z = 1 + 3\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{7}z\right) - 2z = \frac{10}{7} - \frac{5}{7}z.$$

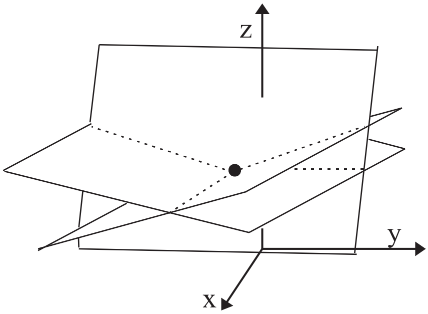
Una manera de escribir todas las soluciones es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{10}{7} - \frac{5}{7}z,\ \frac{1}{7} + \frac{3}{7}z,\ z\right),$$

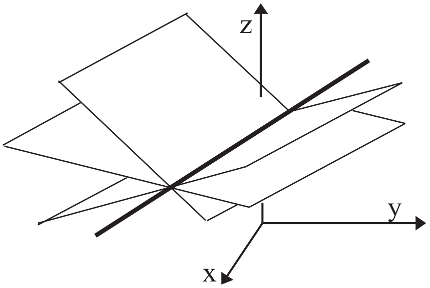
que es una recta. Es la recta en la que se cortan π_1 y π_2. Para que la ecuación tenga un aspecto más familiar, reemplazamos z (que es la variable independiente) por λ y obtenemos la ecuación (paramétrica) de la una recta

$$(x, y, z) = \left(\frac{10}{7} - \frac{5}{7}\lambda,\ \frac{1}{7} + \frac{3}{7}\lambda,\ \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \checkmark$$

Si tuviésemos 3 planos, se agrega una posibilidad más: que los planos se corten en un punto:



Se cortan en un punto



También se pueden cortar en una recta.

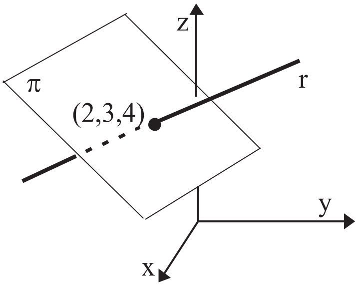
La manera de resolverlo es igual que las anteriores, con una ecuación más (queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas).

Para estudiar la posición relativa entre un plano y una recta tenemos una forma rápida de hacerlo si el plano está descripto por una ecuación implícita y la recta por sus ecuaciones paramétricas. Busquemos, por ejemplo, la intersección de la recta $r : (x, y, z) = (1 + \lambda, 3\lambda, 2 + 2\lambda),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ con el plano $\pi : x - 3y + 2z = 1$.

Como queremos encontrar los puntos de la recta que están en el plano, reemplazamos las coordenadas de la recta en la ecuación del plano y vemos cual es el λ que hace que se verifique:

$$(1 + \lambda) - 3(3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 1 \ \Rightarrow\ 5 - 4\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Entonces el punto de intersección se calcula evaluando $\lambda = 1$ en la ecuación de la recta: $(1 + 1, 3 \cdot 1, 2 + 2 \cdot 1) = (2, 3, 4)$ (porque con ese $\lambda = 1$ vimos que se verificaba la ecuación del plano). El punto $(2, 3, 4)$ es la intersección de r con π. $\checkmark$



Si la recta r no está escrita en su ecuación paramétrica la pasamos a esa forma, lo mismo si el plano no está en su ecuación implícita.

11.29. Ecuaciones implícitas de la recta

Hay otra forma de presentar una recta además de las que ya vimos y consiste en escribirla como intersección de dos planos, por ejemplo así:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

A estas ecuaciones se las llama *ecuaciones implícitas* de la recta. Veamos en un ejemplo una manera de conseguir las ecuaciones de dos planos distintos que contengan a una misma recta.

Consideremos con la recta $(1,1,1)+\lambda(3,0,1)$. Buscamos las ecuaciones de dos planos paralelos a r (o sea tales que los vectores normales de cada plano son perpendiculares al vector dirección de la recta, el vector $(3,0,1)$) y que contengan al punto $(1,1,1)$. Esto obliga a que la recta esté contenida en ambos planos, y por lo tanto que esté en la intersección de ambos. Nosotros aprendimos en 11.14 a buscar vectores perpendiculares "a ojo" de $(3,0,1)$, por ejemplo $(0,1,0)$ y $(1,0,-3)$ sirven (para que los planos sean distintos hay que elegir dos vectores no alineados). Con estos dos vectores normales a cada plano y el punto $(1,1,1)$ (que debe pertenecer a los dos planos) nos armamos las dos ecuaciones implícitas de los dos planos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 1 \\ x & & & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

y quedan las ecuaciones implícitas de la recta r. ✓

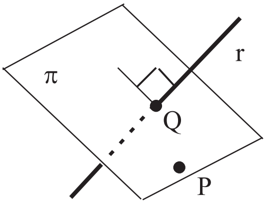
11.30. Distancia de un punto a una recta

En 11.11 vimos como calcular la distancia de un punto a otro. Ahora nos interesa calcular la menor distancia de un punto a una recta (que no lo contiene)

Para que la distancia sea la menor posible tenemos que lograr que la línea punteada en la figura siguiente sea perpendicular a la recta. Luego buscamos el punto Q intersección de la recta punteada con la recta dada y calculamos la distancia de P a Q, que es algo que sabemos hacer.

Ejemplo 11.30.1. Calcular la distancia entre la recta $r : (1, 0, 2) + \lambda(1, 3, 1)$ y el punto $P = (-5, 0, -3)$.

Procedemos de la siguiente manera. Primero buscamos un plano π perpendicular a la recta r que pase por el punto P.



Después, calculamos la intersección de π con r para obtener el punto Q. Por último, calculamos la distancia de P a Q. Esa es la distancia de P a r.

Para buscar un plano π perpendicular a la recta r, usamos que el vector dirección de la recta tiene que ser múltiplo del vector normal del plano. Como lo podemos elegir, tomaremos el mismo vector dirección de la recta: $(1, 3, 1)$. Entonces tenemos que armar la ecuación del plano con vector normal $(1, 3, 1)$ que pase por el punto $(-5, 0, -3)$ (ver 11.26). Haciendo los cálculos da la ecuación $x + 3y + z = -8$. Como dijimos más arriba ahora calculamos $r \cap \pi$:

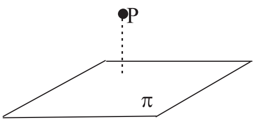
$$1 + \lambda + 3(3\lambda) + 2 + \lambda = -8 \quad \Rightarrow \quad 11\lambda + 3 = -8 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1.$$

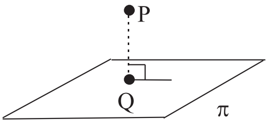
Entonces el punto intersección es $Q = (0, -3, 1)$. Por lo tanto la distancia buscada es

$$d(P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}. \quad \checkmark$$

11.31. Distancia de un punto a un plano

Ahora buscamos la menor distancia de un punto a un plano. Acá la situación es similar a la anterior (punto–recta).





Buscamos que la línea punteada sea perpendicular al plano. Si encontramos el punto Q del gráfico hemos resuelto el problema.

Ejemplo 11.31.1. Calcular distancia del punto $P = (1, 2, 0)$ al plano $x + y - z = 1$.

Primero, buscamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por P y calculamos $r \cap \pi$. Eso nos da el punto Q, calculamos $d(P, Q)$ y ya está.

La recta r tiene que tener la misma dirección que el vector normal del plano $n = (1, 1, -1)$ (porque tiene que ser perpendicular a π, igual que el vector n). Por lo tanto, como además r tiene que pasar por $(1, 2, 0)$, su ecuación vectorial es:

$$(1, 2, 0) + \lambda(1, 1, -1).$$

Después, calculamos la intersección entre la recta y el plano. Un punto de la recta tiene la forma $(1 + \lambda,\ 2 + \lambda,\ -\lambda)$ para algún λ, reemplazamos en la ecuación de π y queda $r \cap \pi$: $(1 + \lambda) + (2 + \lambda) - (-\lambda) = 1$, de donde sale $\lambda = -\frac{2}{3}$. Entonces $Q = (1, 2, 0) - (\frac{2}{3})(1, 1, -1) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. Y la distancia buscada es

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,. \quad \checkmark$$

Apéndice I
Prácticas de Matemática I

Práctica 1 - Ecuaciones e inecuaciones

1. *a*) Escriba en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base **x**, y a la altura **y**, de un rectángulo (conviene intentar pensar primero con dibujos de rectángulos concretos)

    1) La base es el doble de la altura.
    2) La base excede en 5 unidades a la altura.
    3) la altura es $\frac{2}{5}$ de la base.
    4) La base es a la altura como 7 es a 3.
    5) Es área del rectángulo es 50 cm^2.
    6) La base y la altura difieren en 10 unidades.

    por ejemplo: "La base excede en 5 unidades a la altura" se escribe

$$x = y + 5$$

   b) Asocie cada enunciado con la expresión simbólica que le corresponde utilizando una línea de lápiz.

    (I) El doble de un número menos 7.
    (II) La diferencia de dos números dividida por 3.
    (III) La tercera parte de un número menos otro.
    (IV) El cuadrado de una suma.
    (V) La suma de los cuadrados de dos números.

    (A) $(a+b)^2$
    (B) a^2+b^2
    (C) $2a-7$
    (D) $\frac{a-b}{3}$
    (E) $\frac{a}{3}-b$

2. Halle el dominio de cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $10 - \dfrac{x}{5} = 5$ b) $7x - 8 = -2x + 6$

   c) $x + 3 = x - 2$ d) $\dfrac{2}{x} = 4$

   e) $\dfrac{2x-4}{x-1} = 4$ f) $\dfrac{2-x}{6} + \dfrac{1+x}{3} = 1$

   g) $x^2 + 3x - 1 = x^2 - 4x + 2$ h) $\dfrac{2-x}{5} = \dfrac{2+x}{4}$

   i) $\dfrac{5}{x} + 1 = -4$ j) $\dfrac{6x^2 - 4 + 2x}{3x+1} = 2x$

   k) $\dfrac{1}{\frac{x-2}{x}} + \dfrac{5}{2(x-2)} = \dfrac{5x+3}{4x-8}$ l) $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{4}{x} = 3$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones indicando en cada paso qué propiedades de los números reales emplea.

   a) $3x + 1 = 2$ b) $\dfrac{2}{5}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = -1$ c) $\dfrac{2}{x} - 3 = 0$

   d) $\dfrac{x-1}{2} = 2x - 8$ e) $\dfrac{x}{2} + 1 = x + 2$

4. Aplique las propiedades de los números reales para verificar o deducir las siguientes igualdades numéricas

   (a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

   (b) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

   (c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ (d) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc} \ \forall\, b, c, d \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

5. Resuelva **todas** las ecuaciones del ejercicio **(2)**, cuidando recordar los dominios respectivos.

6. Resuelva las siguientes desigualdades de la siguiente manera:

   a) halle primero los puntos de corte (intersección) entre las gráficas de las funciones de cada inecuación

   b) grafique ambas funciones y determine gráficamente la solución

i) $x - 10 > 2 - 2x$

ii) $7x - 1 \leq 2x + 1$

iii) $x + 3(2 - x) \geq 4 - x$

iv) $-5 < x - 4 < 2 - x$

v) $3x + 2 < 3x + 7$

vi) $(x + 3)2 - x \geq 4 - x$

7. Resuelva **analíticamente** las inecuaciones (desigualdades) del ejercicio anterior, indicando en cada paso qué propiedades de los números reales ha utilizado. Represente el conjunto solución como intervalo o unión de intervalos y grafíquelo en la recta real.

8. Aplique las propiedades que ya conoce de los números reales para verificar las siguientes propiedades:

   a) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a^2 \geq 0$

   b) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < 0$, se tiene $ac > bc$

   c) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

   d) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se tiene $a < \frac{a+b}{2} < b$

9. Algunas de las siguientes relaciones no valen en general.

   a) Analice primero para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tienen sentido **todos** los términos de la relación

   b) Encuentre el **mayor** subconjunto de los números reales donde la relación es válida (¡tenga en cuenta que tiene que ser un subconjunto del hallado en el item previo!)

   a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

   b) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

   c) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

   d) $a^2 > a$

   e) $\dfrac{ac + b}{c} = a + b$

   f) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

   g) $\dfrac{1}{a + b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

   h) $a^2 < a$

   i) $(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$

   j) $\sqrt{a^2} = -a$

   k) $\dfrac{ac + b}{a} = c + b$

   l) $(\sqrt{a})^2 = a$

10. Halle el dominio de las siguientes inecuaciones, y resuélvalas gráficamente, buscando primero las intersecciones. Escriba el conjunto solución como unión de

intervalos y represéntelo en la recta numérica.

a) $\dfrac{5+x}{5-x} \leq 2$ b) $\dfrac{3+x}{4-x} > 3$ c) $0 < \dfrac{2x-1}{x-1} < 1$

d) $(x-1)(x+2) > 0$ e) $\dfrac{x+5}{x+2} \geq \dfrac{x-7}{x+1}$ f) $\dfrac{3}{x+1} < 0$

g) $x^2 - 36 \geq 0$ h) $\dfrac{-1}{x+2} - 1 < 0$ i) $x^2 - 6x + 8 > 0$

j) $x^2 \leq -x + 2$

11. Resuelva **analíticamente** las inecuaciones del ejercicio anterior.

12. Decida si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsas de un contraejemplo.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mid x \mid \geq 0$ b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \mid xy \mid = \mid x \mid\mid y \mid$

c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \mid x + y \mid = \mid x \mid + \mid y \mid$ d) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mid -3x \mid = 3 \mid x \mid$

e) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mid -x \mid = - \mid x \mid$ f) $\forall\, x < 0,\ \mid x \mid = -x$

por ejemplo: (c) *es FALSA porque tomando* $x = -7$, $y = 2$, *se tiene* $\mid x + y \mid = \mid -7 + 2 \mid = \mid -5 \mid = \mathbf{5}$; *en cambio* $\mid -7 \mid + \mid 2 \mid = 7 + 2 = \mathbf{9}$, *que es distinto de* 5

13. Resuelva las siguientes inecuaciones **analíticamente**. Escriba el conjunto solución como unión de intervalos y represéntelo en la recta.

a) $\mid x - 3 \mid \leq 5$ b) $\mid 2 - x \mid < 2$ c) $\mid 2x + 1 \mid \geq 2$

d) $\mid 3x - 2 \mid \leq 3x - 4$ e) $\mid x - 1 \mid \leq \mid x + 3 \mid$

14. Encuentre el dominio de las siguientes ecuaciones, y luego resuélvalas. Explique que operaciones realiza en cada paso de la resolución, mencionando que propiedades de los números reales utiliza.

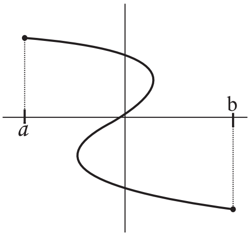
a) $-5x(3+5x^2)^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+5x^2}} = 0$ b) $\dfrac{\frac{x+3}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x+3} = 0$

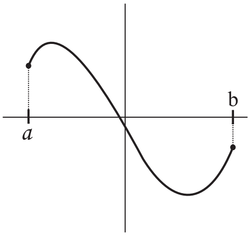
d) $\sqrt{-x^2+6x-5} - \dfrac{(x-2)(-2x+6)}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} = 0$ c) $-5x^{\frac{1}{3}} + 6x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$

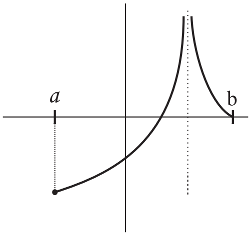
e) $\dfrac{50}{1+x^2} + x^2 - 14 = 0$ f) $\dfrac{1}{(x-3)^2} + \dfrac{-2}{(x-3)^3} = 0$

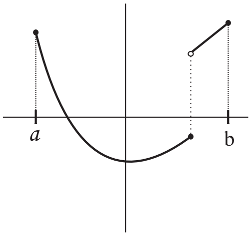
Práctica 2 - Funciones

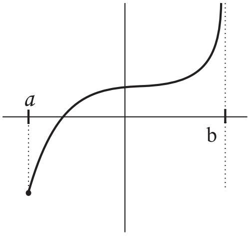
1. Decida, en cada caso, si la curva dibujada puede ser el gráfico de una función definida en el intervalo $[a, b]$

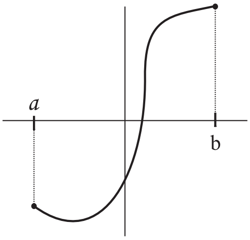












2. De las curvas que resultaron ser funciones, determine **gráficamente** su imagen.

3. Dadas las siguientes funciones reales, calcule su dominio e imagen y trace un gráfico aproximado.

   a) $f(x) = 2(x-1) + 3$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = 2(x-5)^2 - 1$

   d) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$ e) $f(x) = \mid x - 1 \mid + 5$

   f) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$ g) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x < 2 \\ x - \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

4. Considere las funciones del ejercicio anterior

   a) Halle, para cada una de ellas, los siguientes conjuntos (resuelva **analíticamente**)

   $$C_0(f) = \{x \in Dom(f) \ / \ f(x) = 0\} \ , \quad C_+(f) = \{x \in Dom(f) \ / \ f(x) > 0\}$$

   $$\text{y} \quad C_-(f) = \{x \in Dom(f) \ / \ f(x) < 0\}$$

   b) ¿ qué se obtiene al calcular la unión de los tres, o sea $C_0 \cup C_+ \cup C_-$?

5. Calcule los dominios de las siguientes funciones reales:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x-2}\qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\qquad h(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

6. Sean $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por: $f(x)=x+8,\quad g(x)=x^2,\quad h(x)=x-8$

   a) Calcule $f\circ g,\quad g\circ f,\quad f\circ h,\quad h\circ g$. ¿Cuáles son los dominios de las composiciones?

   b) Calcule **analíticamente** las imágenes de las composiciones.

7. Considere $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

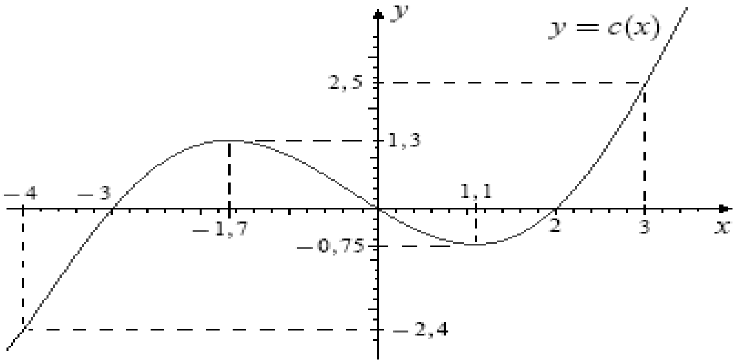
   a) Calcule la composición $f\circ g$ ¿qué fórmula obtiene?

   b) ¿Cuál es el dominio de $f\circ g$? ¿y el de $g\circ f$? (¡cuidado!)

8. Sean $f(x)=x+1$, $g(x)=x-4$, $h(x)=-2x$.

   a) A partir del gráfico de $c(x)=x^2$, haga los gráficos de: $c\circ f,\quad c\circ g,\quad c\circ h,\quad f\circ c,\quad g\circ c,\quad h\circ c$

   b) Ahora haga lo mismo con la función c dada por el gráfico siguiente:



9. Grafique, sin utilizar una tabla de valores y usando desplazamientos, las siguientes funciones

   a) $f(x)=x^3-1$ b) $g(x)=(x-1)^5$ c) $h(x)=-(x^4+2)$

10. Escriba qué operaciones se realizaron con f, g y h para obtener r, siendo

$$f(x)=\mid x\mid,\quad g(x)=x-2\quad \text{y}\quad h(x)=3x$$

a) $r(x)=\mid x-2\mid$ b) $r(x)=\mid x\mid -2$ c) $r(x)=3\mid x-2\mid$ d) $r(x)=\mid 3x-2\mid$

por ejemplo, $r(x)=3\mid x-2\mid$, *puede escribirse como* $r(x)=(h\circ f\circ g)(x)$ *¡Verifíquelo!*

11. Sea $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$

    a) Haga el gráfico de f

    b) ¿Es f sobreyectiva? ¿Cuál es su imagen? Justifique **gráficamente**

    c) Halle el intervalo $[a, b]$ más grande que contenga a $x_0 = 1/2$ donde f resulte inyectiva

12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ 3x + 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

    a) Haga el gráfico de f

    b) A partir del gráfico de f haga el gráfico de $g(x) = -f(x+2)$

    c) Calcule **gráficamente** $\mathrm{Im}(g)$ ¿Es g sobreyectiva?

13. Sean $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+3x-6}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

    a) Halle $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$

    b) Determine el dominio de $g \circ f$ y calcule su expresión.

14. Decida, en cada caso, si el número y_0 pertenece a la imagen de la f: (justifique **analíticamente**)

    a) $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad y_0 = 0$

    b) $f(x) = \sqrt{2x+3}, \quad y_0 = 3$

    c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}, \quad y_0 = 1$

15. Sea $f(x) = \mid x^2 - 8x + 12 \mid -7$

    a) Haga el gráfico de f

    b) Determine **gráficamente** la imagen de f ¿Es f inyectiva?

    c) Halle el intervalo $[a, b]$ más grande que contenga a $x_0 = 5$, de manera que f sea inyectiva en $[a, b]$

16. Para cada una de las siguientes funciones, calcule su imagen **analíticamente**

    a) $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x-3}$ b) $g(x) = \sqrt{4x-1}$ c) $h(x) = (x-2)^2+3$

17. Determine **analíticamente** el dominio natural, la imagen, inyectividad y sobreyectividad para cada una de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

18. Sea $g(x) = \left|\dfrac{3x+6}{x+1}\right| - 2$

    a) Haga un gráfico aproximado de g

    b) Si considera $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, ¿cual es la imagen de g? Justifique **gráficamente**

    c) Calcule $g^{-1} : \mathrm{Im}(g) \to (-1, +\infty)$

19. Para cada una de las siguientes funciones, elija dos <u>intervalos</u> $A, B \subset \mathbb{R}$ (los más grandes que encuentre) de forma tal que $f : A \to B$ sea biyectiva. Para estos A, B hallados calcule f^{-1} y grafique f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes coordenados:

    a) $f(x) = 3x - 7$ b) $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$ c) $f(x) = -2\sqrt{x} + 3$

    d) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$ e) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ f) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

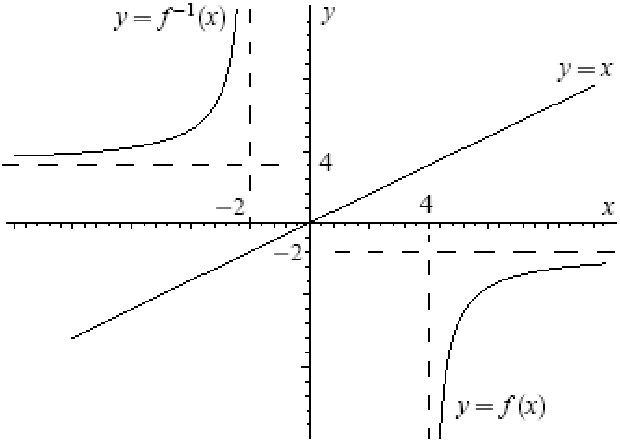
Por ejemplo, la función del item (*b*) *tiene como dominio a* $\mathbb{R}_{\neq -2}$, *y su imagen es* $\mathbb{R}_{\neq 4}$.

Como su gráfico es una hipérbola (graficarla), se puede elegir como dominio el intervalo $(-\infty, -2)$ *para que allí resulte una función inyectiva. La imagen de este intervalo por* f *resulta ser el intervalo* $(4, +\infty)$.

Entonces tomando $A = (-\infty, -2)$, $B = (4, +\infty)$, $f : A \to B$ *resulta biyectiva.*

Su inversa se obtiene despejando x, *y tiene fórmula* $f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{4-x}$.

Los gráficos correspondientes son:



Práctica 3 - Trigonométricas y Exponenciales

1. Usando la calculadora, halle el ángulo x (primero en grados, y luego en radianes) determinado por las siguientes condiciones:

   a) $\cos(x) = -1$

   b) $\operatorname{sen}(x) = 1$

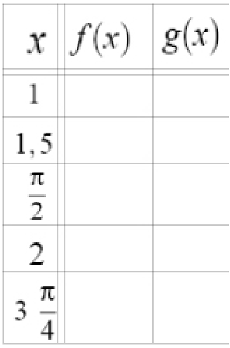
   c) $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2};\ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   d) $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2};\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

   e) $\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ y x está en el 3° cuadrante

   f) $\operatorname{tg}(x) = -1$ y x está en el 2° cuadrante

2. Sean $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ y $g(x) = 2\operatorname{sen}(x)$. Complete la siguiente tabla de valores (los valores de x están dados siempre en radianes):



x	$f(x)$	$g(x)$
1		
1,5		
$\frac{\pi}{2}$		
2		
$3\,\frac{\pi}{4}$		

   a) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$?

   b) Haga los gráficos de f y g en el mismo sistema de ejes

   c) ¿Hay algún valor de $x \in \mathbb{R}$ que verifique la relación $f(x) = g(x)$?

   d) ¿Es cierto que $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}(x)$? ¿y que $\cos(2x) = 2\cos(x)$?

3. Grafique las siguientes funciones usando desplazamientos:

   a) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

   b) $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x - \pi) - 4$

   c) $h(x) = e^{(x-3)} + 4$

   d) $k(x) = e^{-x} - 3$

4. Halle el dominio natural de las siguientes funciones reales:

   a) $f(x) = \ln(2x - 3)$ b) $f(x) = \ln\left[-x^2 + 5x - 6\right]$

   c) $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

5. Sabiendo que $\operatorname{sen}^2(x) + cos^2(x) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, muestre la validez de las siguientes propiedades (la letra k denota un número entero cualquiera)

   a) $\cos(x) - 1 = \dfrac{-\operatorname{sen}^2(x)}{1 + \cos(x)} \quad \forall\, x \neq (2k+1)\pi$

   b) $1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$

6. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \operatorname{sen}(x)$. Encuentre el dominio y la expresión algebraica de:

   a) $(f \circ g)(x)$ b) $(f \circ h)(x)$ c) $(h \circ f)(x)$

7. Exprese cada una de las siguientes funciones en términos de f, g y h (del ejercicio anterior) con las operaciones composición y suma:

   a) $2^{\operatorname{sen}(x)}$ b) $\operatorname{sen}(2^x)$ c) $2^x\operatorname{sen}(x^2)$ d) $[\operatorname{sen}(x)]^2$

   e) $\operatorname{sen}(2^x + x^2)$ f) $2^{\operatorname{sen}(x^2)}$

   por ejemplo,

   $$2^x\operatorname{sen}(x^2) = 2^x\operatorname{sen}(f(x)) = 2^x.h(f(x)) = 2^x.\left[(h \circ f)(x)\right] = g(x).\left[(h \circ f)(x)\right]$$

8. Decida en cada caso, si y_0 pertenece a la imagen de la f:

   a) $f(x) = \cos\left(x^3 - e^x\right), \quad y_0 = \sqrt{2}$ b) $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad y_0 = \dfrac{1}{3}$

   c) $f(x) = e^{x^2+1}, \quad y_0 = 1$

9. Para cada una de las siguientes funciones, calcule su imagen:

   a) $f(x) = \ln(x-1) + 2$ b) $g(x) = e^{\sqrt{x-1}}$

   c) $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 - 4x + 7\right)$

10. Sean $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = |x+1|$ y $h(x) = x - 2$

a) Calcule explicitamente $F(x) = h \circ f \circ g(x)$

b) Halle el dominio de F y haga un gráfico aproximado de F

11. Para cada una de las siguientes funciones, elija $A, B \subset \mathbb{R}$ lo más grandes posibles de forma tal que la función $f : A \to B$ sea biyectiva. Para estos A, B hallados calcule f^{-1} y grafique f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes coordenados:

a) $f(x) = \log_2(x-3)$ b) $f(x) = \log_{10}(x-3)$ c) $f(x) = -2e^x + 3$

d) $f(x) = \ln(x-3)$ e) $f(x) = \text{sen}(2x+1)$ f) $f(x) = 2^{\sqrt{x}} + 5$

12. Sea $f(x) = \ln\left(\frac{3x-3}{x-2}\right)$

a) Halle el dominio de f, $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$

b) ¿Es cierto que $\ln(3) \in Im(f)$? ¿y que $0 \in Im(f)$?

c) ¿Es f sobreyectiva? ¿por qué?

13. Sea $f(x) = \ln(3x-3) - \ln(x-2)$

a) Halle el dominio de f, $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$ (compare con la función del ejercicio anterior)

b) Calcule $Im(f)$

14. Sean $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+3x-6}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

a) Halle $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$

b) Calcule el dominio de $g \circ f$ y su expresión

15. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)+2} & \text{si} \quad 0 < x \\[2ex] \dfrac{\text{sen}(x)}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

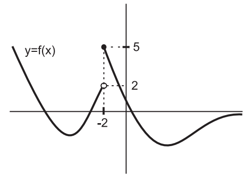
a) Halle el dominio de f

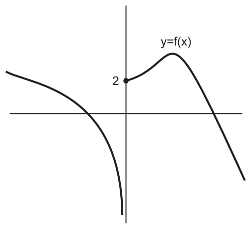
b) ¿Es cierto que $2 \in Im(f)$? ¿y que $-3 \in Im(f)$?

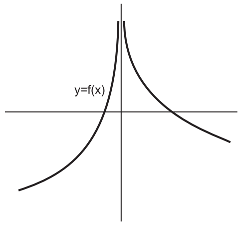
c) Muestre que $Im(f) = \mathbb{R}$, o sea, que f es sobreyectiva

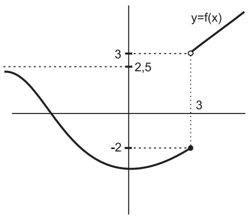
Práctica 4 - Límites de funciones

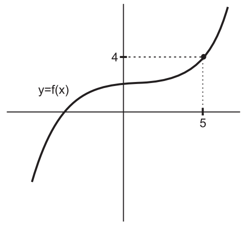
1. Dados los siguientes gráficos, calcule los límites que se indican en cada caso.

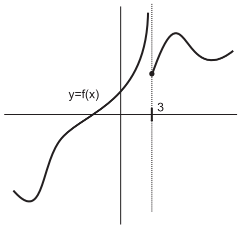












i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

iv. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

v. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

vi. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

2. *a*) Represente gráficamente la situación $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

   b) Calcule i. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5}$, ii. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{-x+2}$, iii. $\lim\limits_{x\to (\frac{1}{3})^+} \dfrac{1}{3x-1}$

3. *a*) Represente gráficamente la situación $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

   b) Calcule i. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^5+x^3+x}$, ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4. *a*) Grafique $f(x) = e^x$ y calcule i. $\lim_{x\to +\infty} e^x$, ii. $\lim_{x\to -\infty} e^x$

   b) Calcule i. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$, ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$

5. *a*) Grafique $f(x) = \ln(x)$ y calcule i. $\lim_{x\to +\infty} \ln(x)$, ii. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

b) Calcule i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1/x)$, ii. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{\ln(x-3)}$

6. Calcule $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ haciendo tablas de valores y graficando con varios valores de x próximos a x_0 (usando la calculadora de ser necesario) en los siguientes casos:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, e^x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\, \ln(x)$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

   g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

   j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

7. Con los datos obtenidos en el ejercicio anterior, haga un gráfico aproximado de $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

8. Calcule los siguientes límites "en infinito":

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4-x^3+2}{3x^4-3x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3+2x^2}{3x^2-2x+2}$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7-\sqrt{3}}{x^{10}+9x^7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^6+x^5+x)$

   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1}+2}{3^x-5}$

   g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-x+1}{x^5-x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+4x}$

   i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9. Calcule los siguientes límites indeterminados:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-3x+2}$

   c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-3x^2-x+3}$

   e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

j) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+4x-6}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$

10. Determine los números reales a y b para que se verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\text{i) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 3, \qquad \text{ii) } \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 2.$$

11. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \quad x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\cos\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left[h(x)\right],$
$h(x)$ una función cualquiera

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left[1-\cos(x)\right]\operatorname{sen}(1/x) + \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

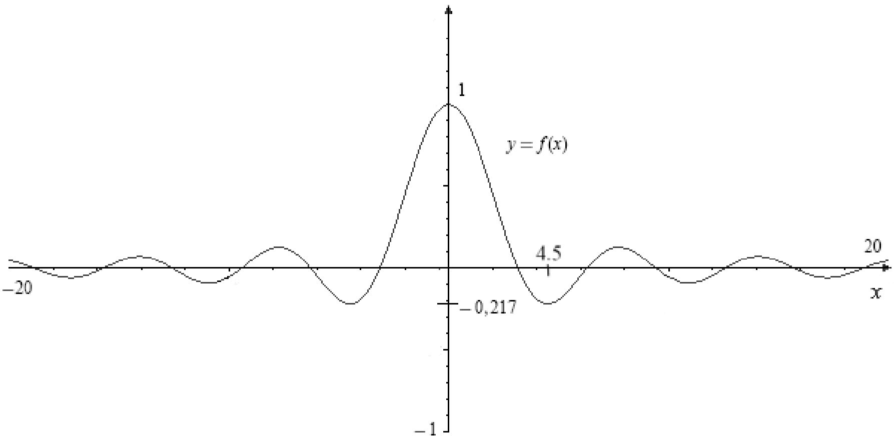
12. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule $Dom(f)$, $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) Abajo tiene el gráfico de f ¿cuál es la imagen de esta función?



13. Sabiendo que $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$ calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

14. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{\dfrac{\operatorname{tg}(x)}{3x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} (1+x)^{1/2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{3x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-3x)^{\frac{x^2}{x+1}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\right)^{\ln x}$

15. Sabiendo que $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \mathrm{e}$, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}(x))^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)^{\frac{1}{x-2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+2}{3x+2}\right)^{1/x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\cos x}{x^2}\right)^{5x+1}$

16. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+x}{2+x}\right]^{\dfrac{\sqrt[5]{x^7}}{\operatorname{sen}^2(x)}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right]^{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(3x)}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\cos(x)]^{\left(\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\dfrac{1}{x+\sqrt[5]{x}}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+1}}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+11}-x-3$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{x+\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)}\right]^{\cos(1/x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}\right]^{\operatorname{sen}(3/x)}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]^{\sqrt{x}+1}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{16x^2+5x+4}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^3+x^2}}$

Práctica 5 - Continuidad

1. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

   En caso de discontinuidad, descubra qué tipo de discontinuidad es.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x_0 = 2$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $x_0 = 2$

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - \frac{31}{4} & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = -2$

   d) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

   e) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$ en $x_0 = 0$

2. El ejercicio que sigue contiene nueve ejemplos (funciones) para trabajar.

   Se sugiere hacerlo completo para **una** función y después seguir con las otras; por ejemplo tome la primer f del item (a) y calcule los límites pedidos en el item (b)i. Luego estudie la continuidad en estos puntos tal como lo pide el item (c).

   a) Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones reales

   i. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ ii. $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

   iii. $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$ iv. $f(x) = 2^{1/x}$

v. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ vi. $f(x) = e^{x^3}$

vii. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ viii. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

ix. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x - 5}{2x + 9}\right)$

b) Calcule los límites (laterales de ser necesario) de las funciones del ejercicio anterior en los puntos x_0 indicados en la siguiente lista

i. $x_0 = 0, x_0 = 1, x_0 = 3$ ii. $x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = \pi, x_0 = \sqrt{3}$

iii. $x_0 = -\pi, x_0 = 0, x_0 = 10$ iv. $x_0 = -\frac{1}{2}, x_0 = 0, x_0 = 3$

v. $x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 1$ vi. $x_0 = -\pi/2, x_0 = 0, x_0 = \ln(2)$

vii. $x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 3$ viii. $x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 10$

ix. $x_0 = -9/2, x_0 = 5/3, x_0 = 14$

c) Estudie la continuidad de las funciones del item (a) en los puntos x_0 indicados en el item (b). En caso de discontinuidad, decida qué tipo de discontinuidad es.

¿Qué pasa si alguno de los puntos x_0 no está en el dominio de f?

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x+1}}{x - 8}$, halle dominio de f. ¿Es posible definir $f(8)$ para que resulte f continua en $x_0 = 8$?

4. Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.

   Redefínalas (modificando solamente esos puntos), si fuera posible, para que resulten continuas:

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x(x^2 - 4)}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x(x - 1)}$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} + 2x + 3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

5. Analice la continuidad en $x_0 = 5$ de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x\,e^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \\ \dfrac{45 \operatorname{sen}(x-5)\ \ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

   a) Decida si existe $a \in \mathbb{R}$, de forma tal que f resulte continua en todo $\mathbb{R}$.

   b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (¡cuidado!)

7. Tenemos una función f de la cual sólo sabemos cinco cosas: $Dom(f) = (0, +\infty)$, $f(2) = 7$, f tiene una discontinuidad evitable en $x_0 = 2$, f tiene una discontinuidad esencial en $x_0 = 6$, y por último $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

   a) Haga un gráfico de una función g que verifique **todas** las condiciones mencionadas.

   ¿Puede hacer otro gráfico distinto (o sea de otra función **distinta** h), pero de manera que el gráfico de h también cumpla todas las condiciones mencionadas?

   ¿Cuántas funciones distintas puede graficar que verifiquen todas estas condiciones?

   b) Fabrique la expresión explícita de alguna función que verifique todas las condiciones mencionadas.

   Compruebe que la función que fabricó cumple con todo lo pedido.

   ¿Cuántas fórmulas distintas puede hallar, que sigan verificando todas las condiciones?

   ¿Hay alguna manera de saber cuál de todas estas expresiones es la f de la que habla el enunciado?

8. Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-6x+8}$. Calcule $Dom(g)$ y estudie su continuidad en todo $\mathbb{R}$. En los puntos donde la discontinuidad sea evitable, redefina la función de forma tal que resulte continua. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

9. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$. Calcule $Dom(f)$ y estudie su continuidad en todo $\mathbb{R}$. En los puntos donde la discontinuidad sea evitable, redefina la función de forma tal que resulte continua.

10. Muestre que el polinomio $P(x) = x^3 + x - 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

11. Pruebe que la siguiente ecuación tienen alguna solución en $\mathbb{R}$:

$$x\ \cos(x/2) + 15\text{sen}(x) = 15.$$

12. Considere $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3^x + 1$. Aproxime con error menor que $0,01$ (en el eje x) un cero de f en el intervalo $[0, 2]$.

13. Muestre que los gráficos de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x \geq 0$.

14. Verifique que existe $x_0 \in (1, e)$ tal que $3\ln(x_0) = x_0$.

15. Este es un ejercicio para encontrar los conjuntos de positividad y negatividad de funciones **sin** necesidad de resolver desigualdades.

    a) Halle $Dom(f)$ y $C_0(f)$ para las siguientes funciones:

    i. $f(x) = x^2(2x + 1)$

    ii. $f(x) = (3x - 2)(4x + 1)(x - 5)$

    iii. $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$

    iv. $f(x) = e^{5x} - 1$

    v. $f(x) = \dfrac{50}{1 + x^2} + x^2 - 14$

    vi. $f(x) = \dfrac{\frac{x+3}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x + 3}$

    vii. $f(x) = e^{x+1}(x + 4)$

    viii. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{-2}{(x-3)^3}$

    ix. $f(x) = -5x(3 + 5x^2)^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 5x^2}}$

    x. $f(x) = \ln(2x + 5)$

    xi. $f(x) = -5x^{\frac{1}{3}} + 6x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$

    xii. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} - \frac{(x-2)(-2x+6)}{2\sqrt{-x^2+6x-5}}$

    b) Usando el Teorema de Bolzano y el ítem anterior, calcule $C_+(f)$ y $C_-(f)$ para cada una de las funciones dadas en (a).

16. Decidir si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

    En caso de ser falsa, muestre un contraejemplo **concreto**.

    En caso de ser verdadera, justifique por qué es así usando la teoría que conoce y razonamientos rigurosos.

    Se recomienda **leer** la teoría (especialmente el Teorema de Bolzano) ya sea de sus apuntes o de la bibliografía de que dispone, antes de contestar.

a) Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f se anula en $[a, b]$.

b) Si f se anula en $[a, b]$ entonces f es una función continua en $[a, b]$

c) Si $f : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 7$, entonces $[f(3), 7) \subset \ Im(f)$.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ entonces $Im(f) = \mathbb{R}$.

e) Si $f(-5).f(-1) < 0$, entonces f tiene un cero en el intervalo $[-5, -1]$.

f) Si f no se anula en el intervalo $[-2, 6]$, entonces f no es continua en $[-2, 6]$.

g) Si f se anula en el intervalo $[a, b]$ y además $f(a).f(b) < 0$ entonces f es continua en $[a, b]$.

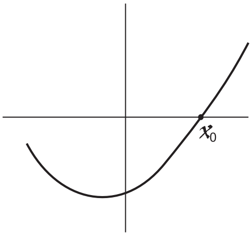
h) Si $f : (3, 8) \to \mathbb{R}$ es continua, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = -\infty$, entonces $Im(f) = \mathbb{R}$.

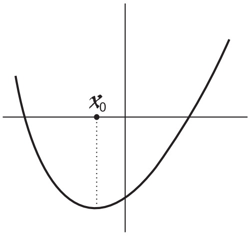
i) Si $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ es una función continua, y $f(-2).f(3) > 0$, entonces f se anula en $[-2, 3]$.

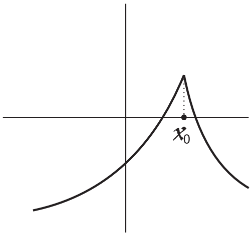
j) Si $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, entonces $Im(f) = \mathbb{R}_{>0}$.

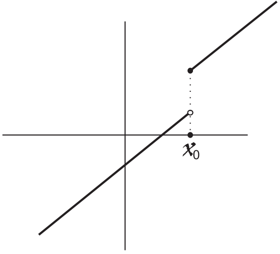
Práctica 6 - Derivadas y regla de L'Hospital

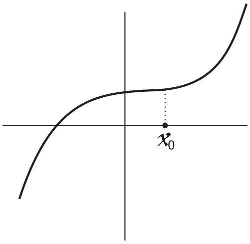
1. Dados los gráficos de las siguientes funciones, decida en cada caso (si corresponde) si son derivables o no en $x = x_0$:

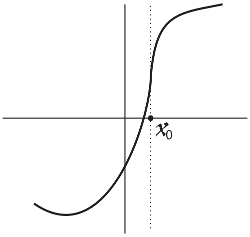












2. Para las funciones dadas:

   i. $y = 2x - 7$ en $P = (2, -3)$; ii. $y = x^2$ en $P = (2, 4)$; iii. $y = (x+2)^{1/2}$ en $P = (2, 2)$.

   a) Halle las pendientes de las rectas tangentes a las gráficas de las curvas en los puntos que se indican (utilizando la definición de derivada).

   b) Halle la ecuación de la recta tangente.

   c) Grafique las curvas y las rectas tangentes.

   d) Estime el valor de las funciones en $2 + 1/10$ utilizando la recta tangente (¡y no la calculadora!).

3. Dada $f(x) = x^2 + 1$, calcule (usando la definición) $f\,'(1)$ y $f\,'(-2)$.

4. Justifique por medio de cocientes incrementales las siguientes igualdades

   a) $y = \text{cte.} \Rightarrow y' = 0$ b) $y = ax + b \Rightarrow y' = a$ c) $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

   d) $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$ e) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. *a*) Dada la función $f(x) = \mid x \mid + x$, grafique y calcule $f\,'(1)$ y $f\,'(-2)$ usando la definición.

   b) ¿Existe $f\,'(0)$? ¿Qué ocurre con el límite del cociente incremental? Explique.

c) Dada la función $g(x) = x \ \mid x \mid$, grafique y calcule $g\,'(1)$ y $g\,'(-2)$.

d) ¿Existe $g\,'(0)$?

e) Determine la función $g\,'(x)$ para todos los valores $x \in \mathbb{R}$.

6. Dadas las siguientes funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \mid x \mid, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

a) Pruebe que las tres funciones son continuas en $x_0 = 0$.

b) Grafique cada una por separado.

c) Pruebe que f y g no son derivables en $x_0 = 0$.

d) Estudie la derivabilidad de h en $x_0 = 0$.

7. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3x & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ ¿Es f derivable en $x_0 = 1$? Justifique ¿y en $x_0 = 0$?

8. Calcule $f\ '(x)$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b) $f(x) = x(3 + x^2) + \ln 2$

c) $f(x) = 7\cos x + 5\operatorname{sen} x + xe^x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \operatorname{sen} x$

f) $f(x) = \dfrac{2 + \cos x}{3 + \operatorname{sen} x}$

g) $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{x^3}{3} + e^{\pi}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x \ln x}$

j) $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + 2\ln x$

9. Calcule $f\ '(x)$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando la *Regla de*

la cadena:

a) $f(x) = (1+x)^{129}$
b) $f(x) = \cos(3x)$
c) $f(x) = \ln(\text{sen}x)$
d) $f(x) = 3\text{sen}^4 x$
e) $f(x) = (4x^2+5)\text{sen}(3x^3)$
f) $f(x) = \sqrt{\text{sen}(\sqrt{x})}$
g) $f(x) = \sqrt{2x^3+x}$
h) $\text{sen}(\frac{x}{2}+1)$
i) $f(x) = \ln(x^4)$
j) $f(x) = \ln^4(x)$
k) $f(x) = 3\text{sen}(x^4)$
l) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen}x}$
m) $f(x) = e^{3x+1}$
n) $f(x) = e^{-x}$
o) $f(x) = e^{x^3+x}$
p) $f(x) = \ln(\text{sen}(x^2))$
q) $f(x) = \ln(e^x + \text{sen}(5x))$
r) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
s) $f(x) = 3\text{sen}^5(x^3)$
t) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
u) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

10. La ley de movimiento de un punto a lo largo de una recta es $s(t) = 3t - t^2$ (en el instante $t = 0$ el punto se encuentra en el origen). Halle la velocidad del movimiento del punto para los instantes $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.

11. La temperatura T de un cuerpo, que inicialmente estaba a $90°C$, se enfría de acuerdo a la ley $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de $20°C$) donde t es el tiempo en minutos.

    a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.

    b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura T y la temperatura ambiente. Más precisamente:

    $$T'(t) = -0,1(T(t) - 20).$$

    c) Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

    d) ¿Qué sucede con la temperatura del cuerpo a medida que avanza el tiempo?

12. Calcule las siguientes derivadas:

    a) $f(x) = 3^x$
    b) $f(x) = (\text{sen}^3 x)^{\ln x}$
    c) $f(x) = (\cos x)^{e^x}$
    d) $f(x) = \sqrt[x]{x}$
    e) $f(x) = 2^{\text{sen}x} + \sqrt{\text{sen}(3x)}$
    f) $f(x) = (\text{sen}x)^{x^2} + \pi e^x$

13. Sea $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$. Con estos datos calcule la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

14. Dada $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$, calcule $(f^{-1})'(5)$.

15. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ (b) $f(x) = \arccos x$ (c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

    (d) $f(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$

16. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abcisas se indican:

    a) $f(x) = 3x^2 - 1$, en $x_0 = 1$ b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x_0 = \pi/2$

    c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$, en $x_0 = 2$ d) $f(x) = \ln x$, en $x_0 = 1$

    e) $f(x) = e^x(x + \ln x)$, en $x_0 = 1$ f) $f(x) = e^{-x^2}$, en $x_0 = 0$

17. Determine en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.

18. Dada $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$, ¿en qué puntos la recta tangente a f es paralela a $y = -2x + 1$? Para esos puntos halle la recta tangente.

19. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \ln(x^2 - 4), \qquad g(x) = \frac{x - 28}{x + 2}.$$

    Halle todos los $x_0 \in \mathbb{R}$ para los cuales las rectas tangentes a los gráficos de f y g en $x = x_0$ son paralelas.

20. Utilice la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^{2/3}$ en $x_0 = 1$ para obtener un valor aproximado de $(1,1)^{2/3}$. Compare con el valor dado por la calculadora.

21. Utilice la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = 1$ para obtener un valor aproximado de $\ln(0,9)$. Compare con el valor dado por la calculadora.

22. Sea $f(x) = x^{1/3}$.

    a) Halle el dominio de f y realice un gráfico.

    b) Analice la continuidad y derivabilidad en $x_0 = 0$.

    c) Halle la función $f\,'(x)$ y calcule su dominio. ¿Cuánto vale $f\,'(-8)$?

23. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x\text{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 13x + 14 & \text{si } x \geq 2 \\ \dfrac{x+6}{x-3} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) Analice la derivabilidad de f en $x = 0$. Si existe calcule $f\,'(0)$.

b) Analice la derivabilidad de f en $x = 2$. Si existe calcule $f\,'(2)$.

25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x^2 \cos\left[\dfrac{\ln(x/5)}{5x}\right] & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 5x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Analice la derivabilidad de f en $x_0 = 0$.

b) Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 5$.

26. Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

a) Halle el dominio de f.

b) ¿En qué puntos resulta f continua?

c) ¿Es f derivable en $x_0 = 1$?

d) Determine $f\,'(x)$ para todo x. ¿Qué pasa en $x = 0$?

e) Halle si existe $f\,''(1)$.

27. Halle a y b de manera que f resulte derivable,

(a) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & \text{si } x < 2 \\ ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

28. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$ b) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

    c) $f(x) = \ln(7x)$ d) $f(x) = \operatorname{sen}(4x)$

29. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes de movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t + 10, \qquad g(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 2.$$

    a) Determine el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.

    b) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

30. *a*) Pruebe que la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$ y halle algún c de la tesis.

    b) Pruebe que la función $f(x) = \ln(x)$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en [1,e] y halle algún c de la tesis.

31. *a*) Dada $f(x) = x^{2/3} - 1$. Muestre que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f\,'$ no se anula en (-1,1). ¿Qué hipótesis del Teorema de Rolle no se verifica?

    b) Sea $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Muestre que $f(0) = 0, f(2) = 2$, y que no existe $c \in (0, 2)$ en el cual $f\,'(c) = 1$. ¿Qué hipótesis del Teorema de Lagrange no se verifica?

32. Decida si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados justificando adecuadamente cada respuesta. (En caso de falsedad exhiba un contraejemplo).

    a) Sea $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ continua en [0,4], derivable en (0,4) con $f(0) = f(4)$ entonces existe un único $c \in (0, 4)$ tal que $f\,'(c) = 0$.

    b) Dadas $f, g : [a, b] \to R$ tales que $f\,'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

    c) $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f\,'(c) = 0$.

    d) f derivable en $c \in (a, b)$ y $f\,'(c) = 0$, entonces c es un extremo local de f.

    e) Si $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces dados dos números distintos a y b se verifica que $f(a) < f(b)$.

33. Dada la función $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, demuestre que la ecuación $f\,'(x) = 0$ tiene exactamente tres raices reales.

34. La temperatura (medida en grados centígrados) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo a la siguiente ley $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t es el tiempo medido en horas.

a) Sin derivar $T(t)$, demuestre que en algún instante del lapso $[0,4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

b) Determine $t_0 \in (0,4)$ tal que $T'(t_0)=0$.

35. En un modelo económico supongamos que el costo de producción de x artículos está dado por $C(x)=200x-x^2$, si el número de artículos a producir varía entre 0 y 100. Pruebe (utilizando el Teorema de Lagrange) que debe haber algún valor de $x \in (0,100)$ tal que el costo marginal (es decir $C'(x)$) sea equivalente al costo promedio (el costo de cada artículo) al producir 100 artículos y halle dicho valor.

36. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}x - x}{x-\text{sen}x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\text{sen}x-1}{\ln(1+x)}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^4+1)}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}-\ln(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\text{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{3^x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2e^{1/x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

37. ¿Es aplicable la *Regla de L'Hospital* para calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\text{sen}(1/x)}{\text{sen}x}.$$

Si la respuesta fuera afirmativa, aplique la regla y calcule el límite. Si la respuesta fuera negativa, explique por qué no se puede aplicar la regla y calcule el límite por otros medios.

Práctica 7 - Aplicaciones de la derivada

1. Calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{7x+2}{3x-2}$ b) $f(x) = \ln(5x-3)$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$

   d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ e) $f(x) = e^{-2x}$ f) $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$

   g) $f(x) = (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ h) $f(x) = \sqrt[5]{x}\ e^x + \dfrac{2x^2-3x-7}{x+1}$

2. Pruebe que las siguientes funciones son monótonas en el conjunto indicado. Indicar en cada caso, si son crecientes o decrecientes.

   a) $f(x) = x + 3x^{1/3} - 2x^{-1/3}$, en $\mathbb{R}_{>0}$ b) $f(x) = e^{-1/x}$, en $\mathbb{R}_{<0}$

   c) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$, en $Dom(f)$

3. Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = e^{(x-1)^2}$ b) $f(x) = x^2e^{-x}$ c) $f(x) = x\ln(x)$

   d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

4. Sean $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2) - x^2}{x^3} + 3\,e^{2x}$ y $g(x) = 5\,e^{-2x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3}$

   a) Determine todas las asíntotas de f y todas las de g.

   b) Muestre que $4 \in Im(f)$ y que $6 \in Im(g)$.

5. Halle todos los puntos críticos de las siguientes funciones y determine cuáles de ellos son extremos relativos.

   a) $f(x) = x^3 - 6x + 2$ b) $f(x) = x\ln x$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

   d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

   g) $f(x) = x^2e^{-x}$ h) $f(x) = x^{2/3}(1-x)$

6. Se sabe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo su dominio y que su derivada se anula en -1, -1/2, 0 y 3/2. Además se tiene que

   (a) $C_+(f\,') = \{x \in \mathbb{R} :\ f'(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, 3/2)$,

   (b) $C_-(f\,') = \{x \in \mathbb{R} :\ f'(x) < 0\} = (-1, -1/2) \cup (-1/2, 0) \cup (3/2, +\infty)$.

   Encuentre los máximos y los mínimos locales de f.

7. *a*) Haga el gráfico de una función f que satisfaga
    1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
    2) $f'(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
    3) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
    4) $f'(x) = 0$ en $x = 2$ y en $x = -2$.
    5) f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntotas horizontales.

    b) Decida en qué puntos f alcanza extremos relativos, y decida si son máximos o mínimos.

8. *a*) Haga el gráfico de una función f que satisfaga
    1) $f'(x) > 0$ en el intervalo $(3, 8)$.
    2) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (8, +\infty)$.
    3) $f'(3) = f'(8) = 0$.
    4) f tiene una asíntota vertical en $x = 1$.
    5) La recta $y = -4$ es asíntota horizontal en $+\infty$; la recta $y = 2$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

    b) Decida en qué puntos f alcanza extremos relativos, y decida si son máximos o mínimos.

9. Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 12$	b) $f(x) = \dfrac{x}{12 + x^2}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$	d) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+7}{x+1}}$
e) $f(x) = -4\, e^{-\frac{9}{2}x^2 + 6x + 2}$	f) $f(x) = e^{\frac{2x-7}{x-3}}$
g) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{4}{3}}$	h) $f(x) = x + \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

10. Para cada una de las siguientes funciones, haga un estudio completo, es decir, estudie:

    i. Dominio, continuidad y discontinuidades.
    ii. Posibles asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
    iii. Derivabilidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    iv. Máximos y mínimos locales.
    v. Sentido de la curvatura, puntos de inflexión.

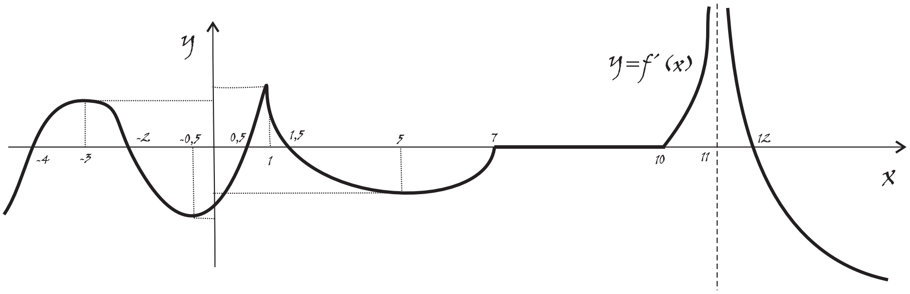
Sobre la base de todos estos datos, haga un gráfico aproximado de f.

a) $f(x) = e^x(2x^2 + x + 1)$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = 5\ e^{-2x^2-4x+3}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x\ e^{-x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

11. El siguiente es el gráfico de la **derivada** de una función f (**no** es el gráfico de f)



Analizándolo, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los puntos críticos de la función f? Clasificarlos.

b) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?

c) ¿Cuáles son los puntos de inflexión? ¿Y los intervalos de convexidad y concavidad?

d) ¿Existen $f'(1)$ y $f'(11)$? ¿Existen $f''(1)$ y $f''(11)$?

e) Si $f(7) = 4$, ¿Cuánto vale $f(9)$?

Haga una gráfica aproximada de la función f con los datos obtenidos en los ítems anteriores.

12. Si $f(x) = (x-1)\ \ln\left[(x-1)^4\right] + \frac{1}{3}\ x^3 + 2x^2 - 16x$

a) Determine la curvatura de f y sus puntos de inflexión.

b) Muestre que f alcanza un mínimo relativo en $x = 2$.

13. Sea $g(x) = \dfrac{x}{2}(x^2+7)^{2/3} - 5$

a) Muestre que g es monótona en $\mathbb{R}$.

b) Verifique que $g^{-1}(-3) = 1$ y halle $(g^{-1})'(-3)$

14. Sea $h(x) = \dfrac{x\, e^{-x}}{4x+9}$
    - *a*) Halle las asíntotas verticales y horizontales de h
    - *b*) Encuentre los máximos y mínimos relativos de h. ¿Tiene h algún extremo absoluto?

15. Sea $h(x) = x^{-\frac{1}{3}}\ \ln(x)$
    - *a*) Halle $Dom(h)$ y sus asíntotas verticales y horizontales
    - *b*) Estudie el crecimiento y decrecimiento de h
    - *c*) ¿Tiene h algún extremo absoluto? ¿cuál es la imagen de h?

16. Sea $f(x) = 3x - 2 + \cos(x)$
    - *a*) Muestre que f tiene al menos una raíz.
    - *b*) Muestre que f es creciente. ¿Cuántas raíces tiene f?

17. Sea $h(x) = -2x^2 + 2x - \ln(x)$
    - *a*) Calcule $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ *y* $\lim_{x\to+\infty} h(x)$. ¿Cuál es la imagen de h?
    - *b*) Muestre que h es estrictamente decreciente en su dominio. ¿Tiene inversa h?
    - *c*) Calcule, si es posible, $\left(h^{-1}\right)'(0)$. (observe que $h(1) = 0$).

18. Considere la función $f(x) = e^{x^2\ \ln(x)}$
    - *a*) ¿Cuál es el dominio de f? Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
    - *b*) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
    - *c*) ¿Cuál es la imagen de f?

19. Sea $h(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + x^3 + x$
    - *a*) Muestre que h es estrictamente creciente. ¿Tiene inversa h?
    - *b*) Verifique que $h(0) = 0$. ¿Cuántos ceros tiene h?
    - *c*) Calcule, si es posible, $\left(h^{-1}\right)'(0)$.

20. Sea $f(x) = e^{-10x^2}(5x+2)$
    - *a*) Calcule las asíntotas de f.
    - *b*) Encuentre los máximos y mínimos de f.
    - *c*) ¿Cual es la imagen de f?

21. Determine los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

    a) $f(x) = 3x + 1$ en $[-1, 3]$

    b) $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $[0, \pi]$

    c) $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

    d) $f(x) = x^{2/3}(5 - 2x)$ en $[-1, 2]$

    e) $f(x) = |x|(x + 1)$ en $[-2, 1]$

    f) $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0, 3]$

Problemas de extremos absolutos:

22. Dado un rectángulo de base x y altura y,

    a) Halle la fórmula del perímetro del mismo.

    b) Halle la fórmula del área del mismo.

    c) Halle la fórmula de la diagonal del mismo en función de los lados x e y.

    d) Si se sabe que el área vale $100m^2$, escriba la ecuación del perímetro en términos de x.

    e) Sabiendo que el área vale $100m^2$, determine el rectángulo de perímetro mínimo.

    f) Si se sabe que el área vale $100m^2$, escriba la ecuación de la diagonal en términos de x.

    g) Sabiendo que el área vale $100m^2$, determine el rectángulo de diagonal más corta.

23. Se quiere encerrar un terreno rectangular subdividido en tres partes iguales con paralelas a uno de sus lados. Si se disponen de 100 metros de alambre, halle las dimensiones del rectángulo de forma tal que el área encerrada sea máxima. ¿Cuánto vale el área?

24. Determine dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea máximo.

25. Entre todos los rectángulos de área $100m^2$, determine:

    a) El de perímetro mínimo.

    b) El que posee diagonal más corta.

26. Un cañón situado sobre el borde de un acantilado dispara un proyectil hacia un barco. La altura del proyectil (en metros sobre el nivel del mar) después de t segundos está dada por la ecuación $-5t^2 + 50t + 55$.

- *a*) ¿Cuál es la altura máxima del proyectil y en cuánto tiempo se alcanza?
- *b*) ¿Cuánto tiempo tiene el barco para desviar su trayectoria si logra ver el fogonazo del cañón?

27. Se quiere ahorrar el máximo de material al hacer un tanque recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de $32m^3$. Halle las dimensiones del tanque. Haga lo mismo pero ahora con tapa.

28. ¿Cuál de los puntos de la recta de ecuación $2x+y=1$ está más cerca del origen?

29. La lata de una gaseosa tiene una capacidad de $354cm^3$. Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

30. La empresa TV CABLE Co. tiene en estos momentos 3500 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$8. Una encuesta revela que habrá 50 suscriptores más por cada \$0,10 que se disminuyan en la cuota.

    ¿A qué tarifa se lograrán ingresos máximos y cuántos suscriptores habrá en ese nivel?

Práctica 8 - Primitivas y métodos de integración

1. *a*) Halle el dominio de las siguientes funciones:

   i. $g(x) = -2$ ii. $g(x) = x$ iii. $g(x) = \operatorname{sen}(x)$

   iv. $g(x) = e^x$ v. $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ vi. $g(x) = \cos(x)$

   vii. $g(x) = x^2$ viii. $g(x) = x + x^2$ ix. $g(x) = 1/x$

   x. $g(x) = x^{\frac{-2}{3}}$

   b) Encuentre una función f tal que $f'(x) = g(x)$ para cada una de las funciones de arriba. Especifique el dominio de f, y el dominio de g **ahora teniendo en cuenta que se trata de la derivada de** f.

   c) ¿Es única la f hallada cada caso?

2. *a*) Halle g sabiendo que $g'(x) = 3x$ y $g(0) = 7$.

   b) Halle g sabiendo que $g'(x) = x^3$ y $g(1) = -5$.

   c) Halle g sabiendo que $g'(x) = -\cos(x)$ y $g(\pi/2) = 3$.

   d) ¿Es única la respuesta en cada caso?

3. Calcule las siguientes integrales inmediatas:

   (a) $\displaystyle\int x^{200}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{x}(2x + \sqrt{x})\,dx$ (d) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

   (e) $\displaystyle\int (5x + \cos(x) + 3\operatorname{sen}(x))\,dx$ (f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + 3x - e^x\right) dx$

4. La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 12$, se expresa por la fórmula

$$v(t) = 12 - 10t$$

   donde t es el tiempo transcurrido.

   Si fue lanzado desde el suelo, ¿a qué distancia de la posición inicial se encontrará este cuerpo a los t segundos de haber sido lanzado?

5. Un móvil se desplaza por un camino. Se sabe que la velocidad en el instante t viene dada por

$$v(t) = t(t - 100)\text{km/h}.$$

   Si en el instante inicial $t = 0$ el móvil se encuentra a 30 km del punto de medición, ¿cuál es la posición $s(t)$ para $0 \leq t \leq 100$?

6. Un cohete está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = \sqrt{t} + 1$ para todo $t \geq 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/seg^2. ¿Qué velocidad tiene en el instante $t = 64$? ¿A qué distancia está del punto de partida en ese instante?

7. Aplicando el método de sustitución, calcule:

   (a) $\displaystyle\int 5\cos(5x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(5x^2)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\cos^{-2}(x)\,dx$

   (g) $\displaystyle\int x^{-1}\ln(x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int x^{-1}\operatorname{sen}(\ln(x))\,dx$

   (i) $\displaystyle\int (t+1)(t^2+2t+5)^{-2/3}\,dt$ (j) $\displaystyle\int \sqrt{3+\sqrt{y}}\quad y^{-1/2}\,dy$

   (k) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$

   (m) $\displaystyle\int x^{-1}\ln^2(x)\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln(x))^2}{x}\,dx$

   (o) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (p) $\displaystyle\int (1+5x^2)^{-1}\,dx$

   (q) $\displaystyle\int \frac{1}{2+2x+x^2}\,dx$ (r) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

8. Aplicando el método de integración por partes, calcule:

   (a) $\displaystyle\int x\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2(x+9)^{-1/2}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int (x^2+3x)(x+2)^{-5}\,dx$ (e) $\displaystyle\int (x+3)^2x^{3/4}\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx$

   (g) $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int x\ln(x^{-1})\,dx$ (i) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

   (j) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$ (k) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (l) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

9. Calcule las siguientes integrales utilizando las primitivas que conoce y los métodos de sustitución y partes:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$	(b) $\displaystyle\int \ln(\cos(x))\mathrm{tg}(x)\,dx$
(c) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{2x+3})\,dx$	(d) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x+1})\,dx$
(e) $\displaystyle\int x\ln(\sqrt{x+5})\,dx$	(f) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+3}}\,dx$
(g) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(\ln(x))\,dx$	(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)\mathrm{sen}(\ln(x))}{x}\,dx$
(i) $\displaystyle\int \frac{e^x+3e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$	(j) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$
(k) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{5x^2-4x+2}\,dx$	(l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$
(m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$	(n) $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{sen}(x)+2)\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)+\mathrm{sen}(x)-2}\,dx$
(o) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$	(p) $\displaystyle\int (x^3+x)\cos(x^2+1)\,dx$
(q) $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}\,dx$	(r) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3(x)\,dx$
(s) $\displaystyle\int \ln\left[\mathrm{sen}(x)\right].\,\mathrm{sen}^2(x)\cos(x)\;dx$	(t) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\;dx$
(u) $\displaystyle\int (3x^2-1)\;\ln(x^2-1)\;dx$	

Práctica 9 - El Teorema Fundamental y sus aplicaciones

1. Calcule las siguientes integrales, aplicando la *Regla de Barrow* y las propiedades de la integral:

$$\text{a)} \int_0^3 3(x-2)\,dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^2 (x^3+2x)\,dx \qquad \text{c)} \int_\pi^{5\pi} (\operatorname{sen}(x)-\cos(x))\,dx$$

2. Aplicando la *Regla de Barrow*, calcule (en términos de x) las siguientes funciones:

$$\text{a)} \int_0^x \cos(t)\,dt \qquad \text{b)} \int_1^x t^r\,dt \qquad \text{c)} \int_{\pi/2}^x \operatorname{sen}(t)\,dt \qquad \text{d)} \int_x^2 \frac{t-3}{t+2}\,dt$$

3. Considere las siguientes funciones:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le t\le 2 \\ 3 & \text{si } 2<t\le 4 \end{cases} \qquad g(t)=\begin{cases} t & \text{si } 0\le t\le 2 \\ 2 & \text{si } 2<t\le 4 \end{cases}$$

   a) La función f no es continua. ¿Lo es $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$?

   b) La función g no es derivable. ¿Lo es $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$?

4. Aplique los métodos de sustitución y partes para calcular las siguientes integrales definidas:

$$\text{a)} \int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^{-3}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^4 x^{-1}\cos(\ln(x))\,dx$$

$$\text{c)} \int_0^{\pi/4} (1+\cos(2x))^{-2}\operatorname{sen}(2x)\,dx \qquad \text{d)} \int_3^9 x\sqrt{x+1}\,dx$$

5. *a*) Sabiendo que $\int_{-3}^5 [f(x)-2]\,dx=9$, calcule $\int_{-3}^5 f(x)\,dx$

   b) Sabiendo que $\int_1^4 f(x)\,dx=7$, calcule $\int_1^4 [f(x)+3]\,dx$

   c) Sabiendo que $\int_{-3}^4 [3f(x)-4g(x)]\,dx=23$, $\int_{-3}^4 g(x)\,dx=7$ y $\int_{-3}^1 f(x)\,dx=12$, calcule $\int_1^4 f(x)\,dx$

   d) Sabiendo que $\int_1^2 2f(x)\,dx=5$ y $\int_1^2 g(x)\,dx=7$, calcule $\int_1^2 [f(x)+2g(x)]\,dx$

6. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $A(x) = \int\limits_{1}^{x} e^{-t^2}\, dt\ , \quad x \in \mathbb{R}$ b) $B(x) = \int\limits_{0}^{2x} \frac{\operatorname{sen}(u)}{1+u}\, du\ , \quad x > \text{-}1/2$

c) $C(x) = \int\limits_{0}^{\operatorname{sen}(x)} \frac{y}{2+y^3}\, dy\ , \quad x \in \mathbb{R}$ d) $D(x) = \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}\, dt,\ x > 0$

e) $E(x) = \int\limits_{\ln(x)}^{x^3} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1+t^2}\, dt,\ x > 0$ f) $F(x) = \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt\ , \quad x > 0$

g) $G(x) = \int\limits_{2}^{\operatorname{tg}(x)} \operatorname{arc\,tg}(z)\, dz, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

7. Sabiendo que, para todo $x > 0$, la función continua g satisface $\int_0^{x^2} g(t)\, dt = x^2(1+x)$, calcule $g(2)$

8. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x) + \mid \operatorname{sen}(x) \mid$

   a) Halle la expresión explícita de $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt$

   b) ¿Es cierto que $F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es una función creciente?

9. Considere la función $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\, dt$

   Muestre que f es una función creciente en su dominio.

10. Halle dominio, intervalos de crecimiento y extremos de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^{x} e^{-t^2} t^2 (t-1)(t-4)\, dt$ b) $G(x) = \int_1^{e^{x-3}} [\ln^2(t) - 2\ln(t)]\, dt$

c) $H(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \left[e^{7-t^2} - e^{t^2+1}\right]\, dt$ d) $J(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{s-1}\right)}{s-1}\, dt$

11. Considere la función $g(x) = \int_1^{e^x} \frac{\ln(t)-4}{t^7}\, dt$

   a) Muestre que $x_0 = 4$ es un mínimo absoluto de g

   b) ¿Es cierto que $x = -1$ está en la imagen de g? ¿por qué?

12. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{\operatorname{sen}(t)+2}\, dt$

    a) Halle $f\,'(x)$, estudie el crecimiento de F y muestre que alcanza un mínimo absoluto en $x = 0$

    b) ¿Es cierto que $x = -1$ está en la imagen de F?

13. Considere $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{e^t}{t^2+1}\, dt$

    a) Calcule $h\,'(x)$, y verifique que h es una función estrictamente creciente

    b) Muestre que h tiene **exactamente un** cero

14. Considere $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^4 - 4t^2 + 5}{t^4+1}\, dt$

    a) Calcule $h\,'(x)$, y verifique que h es una función estrictamente creciente

    b) Si $h(4) = 0,32$ ¿cuánto vale $\int_1^4 h\,'(x)\, dx$? ¿Representa este último número algún área?

15. Calcule el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo indicado en cada caso:

    a) $f(x) = e^x - 1$, en $[0, e]$ b) $f(x) = \cos(x)$, en $[-\pi/2, 0]$

    c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, en $[0, \pi]$ d) $f(x) = x^2 - 1$, en $[-1, 1]$

    e) $f(x) = x^2 - x$, en $[-1, 3]$ f) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, en $[-2, 1]$

16. En cada caso, calcule el área de la región encerrada por las curvas (sugerencia: haga los gráficos).

    a) $y = x;\ y = x^2 - 1$ b) $y = x^3;\ y = x$
    c) $y = x^{1/3};\ x = 0;\ y = 1$ d) $y = x^3 - 12x;\ y = x^2$

    e) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ x = 0$ f) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ y = 0$

    g) $y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 1;\ x = -1$

    h) $y = x^3 - x$; y la recta tangente a esta curva en el punto $x = -1$

17. Decida sobre la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

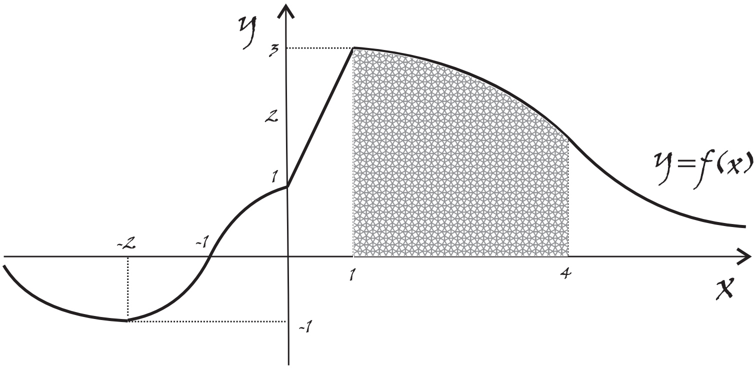
    a) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$, el eje x y el eje y es la siguiente integral: $\int_0^4 (x-2)\, dx$

b) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \leq x \leq 3$ es la siguiente suma de integrales:

$$-\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx$$

c) El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$ es la integral siguiente: $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx$

18. Considere el gráfico de siguiente: (el tramo de f entre $x = 0$ y $x = 1$ es rectilíneo)



a) Sabiendo que el área de la región sombreada vale 7, calcule $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\, dx$

b) Se sabe que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \frac{3}{4}$. Halle el área encerrada por el eje x y el gráfico de f entre $x = -2$ y $x = 4$

c) Si los dos cálculos anteriores le dieron el mismo resultado, está pensando mal el problema ¿por qué?

19. Calcule el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, en el intervalo $[a, b]$ señalado en cada caso:

a) $f(x) = \dfrac{6}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$, $\quad g(x) = x^2 - 2$ en $[-3, 0]$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 3}{x + 3}$, $\quad g(x) = 2x^2 - x - 1$ en $[-1, 1]$

c) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$, $\quad g(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en [-1/ 2, 0]

20. Halle el área de la región comprendida entre la curva $y = x\sqrt{2x+3}$ y el semieje negativo de las x.

21. Sean $f(x) = (x+2)^2$ y $g(x) = \sqrt{8(x+2)}$. Halle el área de la región acotada por los gráficos de f y g.

22. Calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2\ e^{3x+1}$ y $g(x) = 4\ e^{3x+1}$

23. Calcule el área encerrada entre el eje x y la gráfica de

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)\ \mathbf{e}^{\operatorname{sen}(x)},\ \text{entre } x = 0 \text{ y } x = \pi$$

24. Calcule el área de la región comprendida entre el eje y, las rectas de ecuaciones $y = 1$, $y = -1$ y el gráfico de la función $f(x) = \ln(x+4)$.

25. Calcule el área encerrada por los gráficos de $f(x) = x\ \ln(x) + x^2 \operatorname{sen}^2(x)$ y $g(x) = x + x^2 - x^2\cos^2(x)$ en el intervalo $[1, e^2]$. (se sugiere calcular $f-g$ y $g-f$ **antes** de integrar)

Apéndice II

Prácticas de Elementos de Matemática I

Práctica 0 – Repaso

1. Calcular:

a) $\dfrac{3}{5}+(-3)\left[-\dfrac{1}{3}+1-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}\right)-\dfrac{3}{4}\right]$

b) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\frac{1}{4}:\left(2-\frac{3}{4}\right)\right]}$

c) $\left[\left(3-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-2-\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^{1/2}$

2. Simplificar las siguientes expresiones usando propiedades de potenciación

a) $2^5\ 2^2$

b) $\frac{2^6}{2^3}$

c) $5^{-5}\ 5^2$

d) $\left(5^5\right)^5$

e) $5^{-2}\left(\frac{1}{5}\right)$

f) $\sqrt[3]{3}\ \sqrt[5]{3}$

g) 5^0

h) $\sqrt{6}\ 6^{-2}$

i) $\left(10^2\right)^0$

j) $\frac{2^4\ 2^5}{2^3}$

k) $2^4\ 2^{-2}+2^2$

l) $a^5\ a^{\frac{7}{2}}$

m) $\frac{x^{-1}}{x^{-3}}$

n) $\sqrt{x^6x^2}$

(ñ) $\frac{x^5x^{2/3}}{\sqrt[3]{x}}$

o) $\left(x^{1/2}x^2\right)^3$

p) x^3-2x^4

q) $\frac{2x^2-2}{x^2}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x-1=-7$

b) $-4x+3=-6$

c) $\frac{x}{2}-1=9$

d) $10-\frac{x}{5}=5$

e) $7x-8=-2x+6$

f) $x+3=x-2$

g) $x^2+3x-1=x^2-4x+2$

h) $\frac{x-3}{2}=3$

i) $\frac{2}{x}=4$

j) $\frac{5}{x}+1=-4$

k) $\frac{2x-4}{x-1}=4$

l) $\frac{2-x}{5}=\frac{2+x}{4}$

m) $\frac{2-x}{6}+\frac{1+x}{3}=1$

n) $\frac{2+x}{2}-\frac{2x-4}{3}=x-6$

ñ) $x^2=4$

o) $x^2-9=0$

p) $x^2-4x=0$

q) $x^2-4x=-3$

r) $3x^2=x$

s) $\frac{6x^2-4+2x}{3x+1}=2x$

t) $\sqrt{x^2-16}-3=0$

u) $\sqrt{x^2-9}+4=0$

v) $\frac{1}{\frac{x-2}{x}}+\frac{5}{2(x-2)}=\frac{5x+3}{4x-8}$

w) $\frac{6}{x^2-3x}=\frac{2}{x}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^5-4x^3=0$

b) $x^4+2x^3-3x^2=0$

c) $2x.(x^2-4)^2-(2x^3+12).(x^2-4)=0$

d) $6x^3.(x^3+8)=3.(x^3+8)^2$

5. Una tienda en liquidación anuncia que todos sus precios fueron rebajados 20 %. Si el precio de un artículo es \$28, ¿cuál era su precio antes de la liquidación?

6. Carlos va de compras y adquiere un pantalón en \$30. El precio del pantalón viene con el IVA incluido (21 %). ¿Cuánto pagó Carlos de IVA?

7. *a*) Escribir en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas a la base **x** y a la altura **y** de un rectángulo.
    1) La base es el doble de la altura.
    2) La base excede en 5 unidades a la altura.
    3) la altura es $\frac{2}{5}$ de la base.
    4) La base es a la altura como 7 es a 3.
    5) Es área del rectángulo es 50 cm^2.
    6) La base y la altura difieren en 10 unidades.

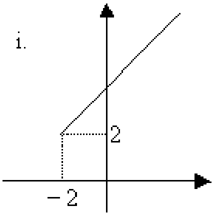
   b) Asociar cada enunciado con la expresión simbólica que le corresponde.

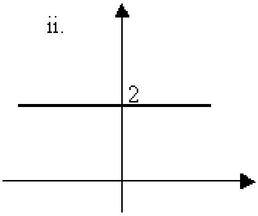
(I) El doble de un número menos 7.	(A) $(a+b)^2$
(II) La diferencia de dos números dividida por 3.	(B) a^2+b^2
(III) La tercera parte de un número menos otro.	(C) $2a-7$
(IV) El cuadrado de una suma.	(D) $\frac{a-b}{3}$
(V) La suma de los cuadrados de dos números.	(E) $\frac{a}{3}-b$

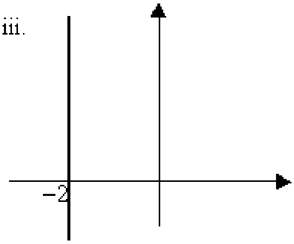
Práctica 1 – Números Reales - Funciones

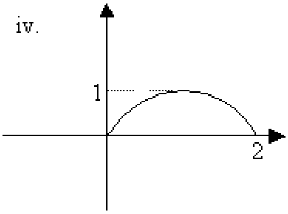
1. Representar en la recta numérica.
    - *a*) -7; 4; π; 2,7; e; $\frac{1}{8}$; $-\frac{5}{6}$.
    - *b*) Todos los números reales que verifican $x^2 - 36 = 0$.
    - *c*) Todos los números reales que verifican $(x-6)(x+6) = 0$.
    - *d*) Todos los números reales que verifican $x(x+5) = 0$.
    - *e*) Todos los números reales que verifican $x^2 - 2x - 3 = 0$.
    - *f*) Todos los números reales mayores que -1.
    - *g*) Todos los números reales menores o iguales que 3.
    - *h*) Todos los números reales mayores que -9 y menores o iguales que 7.

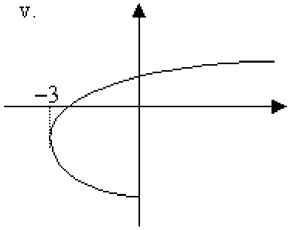
2. Determinar cuáles de los siguientes dibujos representa el gráfico de alguna función. En ese caso, determinar dominio e imagen.

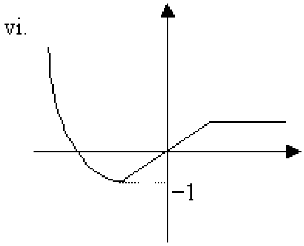












3. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones con valores reales:

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ c) $f(x) = \frac{1}{3x+4}$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ e) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ h) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4}}$ i) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

j) $f(x) = \frac{x+3}{(x^2-4)(x+5)(x^2+5)}$

4. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ x+3 & x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ \frac{1}{x+5} & x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 4 \\ \frac{1}{(x-2)(x-5)} & x \leq 4 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-16} & x \geq 0 \\ \frac{1}{(x+1)(x-2)} & x < 0 \end{cases}$

5. A partir de los gráficos de las funciones $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = |x|$, hacer los gráficos de las funciones:

a) $f_1(x) = f(x) + 1$ b) $f_2(x) = f(x-1)$ c) $f_3(x) = f(x+1) - 2$

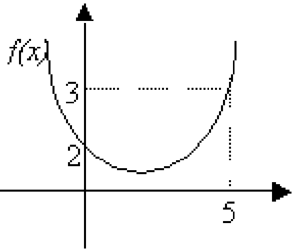
d) $f_4(x) = -f(x)$ e) $g_1(x) = g(x-2)$ f) $g_2(x) = g(x) - 1$

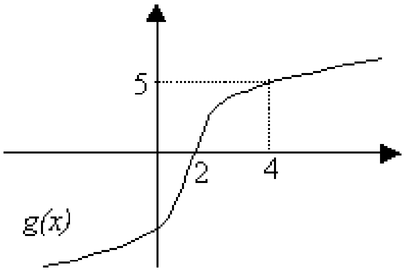
g) $g_3(x) = g(x+2) - 1$ h) $g_4(x) = -g(x)$ i) $h_1(x) = h(x) - 3$

j) $h_2(x) = h(x-1) + 3$ k) $h_3(x) = h(x+3) - 2$ l) $h_4(x) = -h(x)$

6. Para las funciones dadas por los gráficos, calcular (si es posible):

$$f \circ g(4), \quad g \circ f(2), \quad g \circ f(0), \quad f \circ g(2)$$





7. Se definen las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad g(x) = x^3 - 1.$$

Calcular: $f(0)$; $f(1/2)$; $f(2)$; $g(0)$; $g(1/2)$; $f(a)$ con $a \in \mathbb{R}$; $g(a)$ con $a \in \mathbb{R}$; $f(a-1)$ con $a \in \mathbb{R}$; $g(a+1)$ con $a \in \mathbb{R}$; $f(2x)$; $2f(x)$; $[f(x)]^2$; $g(f(x))$; $f(g(x))$.

8. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = x + 8, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = x - 8.$$

Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $g \circ h$, $h \circ f$, $h \circ g$.

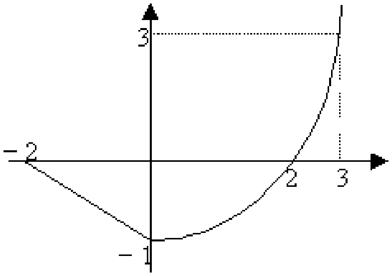
9. Sean $h_1(x) = x + 3$, $h_2(x) = x - 2$.

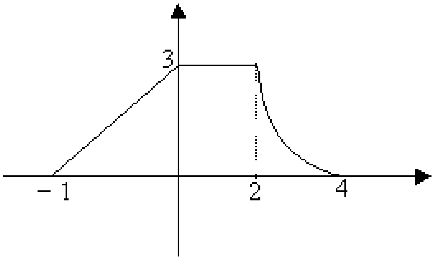
   a) A partir del gráfico de $f(x) = x^2$, hacer los gráficos de:

   $$f \circ h_1, \quad f \circ h_2, \quad h_2 \circ f, \quad h_1 \circ f, \quad h_1 \circ f \circ h_2$$

   b) Idem para $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   c) Idem para las funciones dadas por los gráficos:





10. Dadas las siguientes funciones

    a) $g_1(x) = |x| + 2$ b) $g_2(x) = |x + 2|$ c) $g_3(x) = -|x - 1| + 2$

    i. Escribir a cada una de ellas como un corrimiento de $f(x) = |x|$ (por ejemplo: si $g_4(x) = |x - 3| + 1 \Rightarrow g_4(x) = f(x - 3) + 1$).

    ii. Sin tabla y utilizando lo hecho en i, graficar en un mismo sistema de coordenadas g_1, g_2, g_3 y g_4.

11. Escribir como un corrimiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a las funciones:

    a) $g_1(x) = \dfrac{1}{x-3}$; b) $g_2(x) = \dfrac{1}{x} - 1$; c) $g_3(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$.

12. A partir de los gráficos de las funciones $f(x) = x^3, g(x) = x^5, h(x) = x^4$, graficar sin utilizar una tabla de valores:

    (a) $f(x) = x^3 - 1$; (b) $g(x) = (x - 1)^5$; (c) $h(x) = -(x^4 + 2)$.

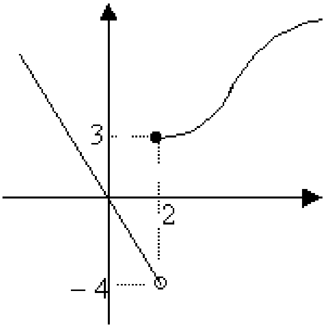
13. Determinar el dominio natural, imagen, inyectividad, sobreyectividad y graficar cada una de las siguientes funciones:

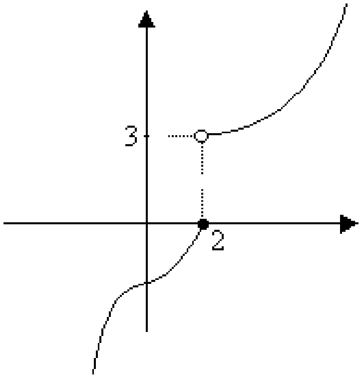
    $$a)f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \qquad b)f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad c)f(x) = \sqrt{x+2}$$

    $$d)f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad e)f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f)f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\geq 2\\ 1 & \text{si } -1<x<0\\ x+2 & \text{si } x\leq -1\end{cases}$$

14. Analizar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las funciones dadas por los gráficos:





15. Para cada una de las siguientes funciones, elegir conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tal que $f : A \to B$ sea biyectiva. Para estos A, B calcular f^{-1} y graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes coordenados:

    a) $f(x) = 3x - 7$

    b) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

    c) $f(x) = 2^x$

    d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

    e) $f(x) = \ln(x)$

    f) $f(x) = \ln(x) - 3$

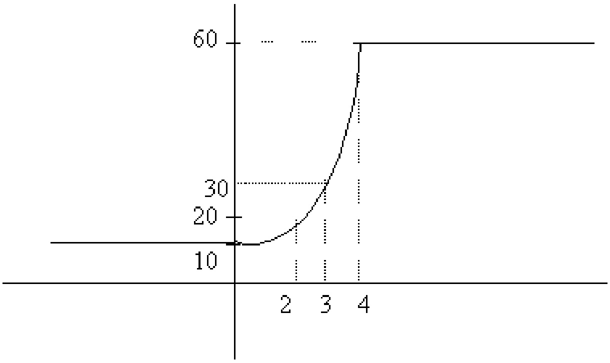
    g) $f(x) = \ln(x - 2) + 5$

    h) $f(x) = e^x - 3$

16. Hacer los gráficos de las siguientes funciones:

    a) $\operatorname{sen}(x + \pi)$; b) $\operatorname{sen}(-x)$; c) $\cos(x - \pi/2)$; d) $\cos(x + 2\pi)$.

17. Dado el gráfico de la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- *a*) Hallar conjuntos A, $B \subset \mathbb{R}$ tal que $f : A \to B$ sea biyectiva (y por lo tanto tenga inversa $f^{-1} : B \to A$).
- *b*) Indicar los valores $f^{-1}(60)$, $f^{-1}(30)$, $f \circ f^{-1}(20)$ y $f^{-1} \circ f(3)$.

18. En la República de *Simplifilandia* los ciudadanos pagan impuestos a las riquezas de acuerdo con la siguiente tabla:

Riquezas en su unidad monetaria	Impuesto a pagar
Hasta 100	0
Más de 100 y hasta 200	15
Más de 200 y hasta 300	25
Más de 300 y hasta 400	35
etc.	

- *a*) Graficar la función que relaciona las riquezas con el impuesto a pagar.
- *b*) Si un ciudadano tributa \$55, ¿a cuánto asciende su riqueza?

19. Cada pan de césped colocado cuesta \$2,25; el vivero me recarga \$25 de flete por traer los panes a casa.

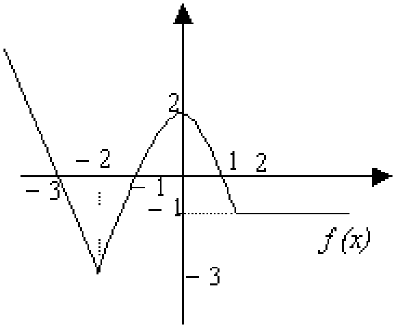
- *a*) Escribir la fórmula del gasto en función de los panes de césped colocados. Graficarla.
- *b*) ¿Cuál es el gasto si coloco 350 panes? ¿Cuántos panes coloqué si gasté \$668,50?

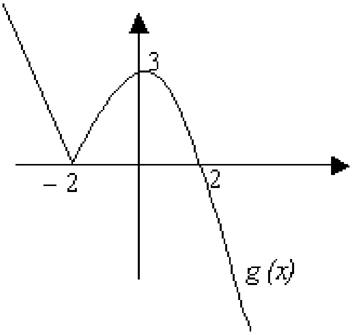
20. Una empresa calcula que el costo de producción de x unidades de un artículo de consumo es igual, medido en pesos, a:

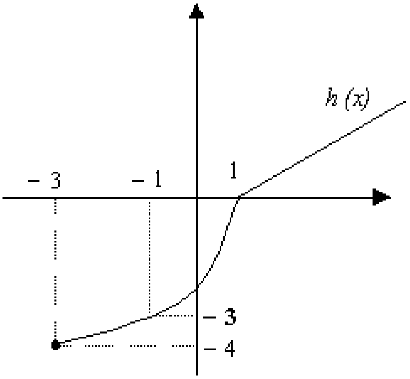
$$C(x) = 300 + 50\sqrt{x}.$$

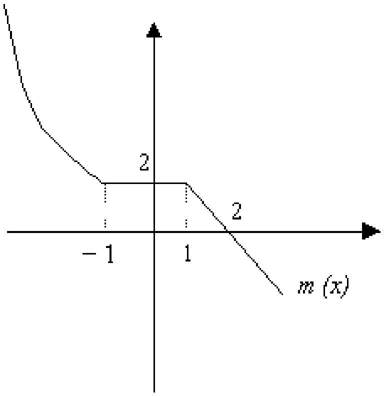
Calcular después de cuántas unidades producidas, el costo de producción supera \$100.000.

21. Para cada una de las funciones de los siguientes gráficos, determinar el dominio natural e imagen. Describir además los conjuntos de raíces, de positividad y negatividad de cada función.









22. Considerando las funciones del ejercicio 20:

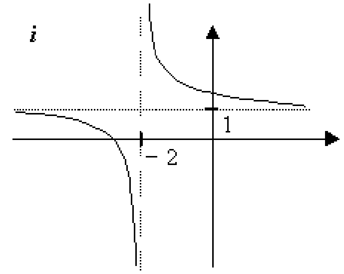
    a) a) Analizar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, justificando en cada caso las conclusiones de su análisis.

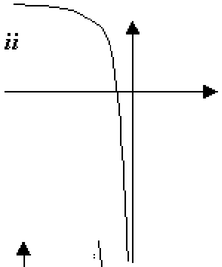
    b) b) Para aquellas que no sean biyectivas en su dominio natural, hallar (si es posible) subconjuntos A, B de los números reales, de forma que $2 \in A$ y además, $f : A \to B$ sea biyectiva. Escribir claramente los argumentos que justifican la elección tomada.

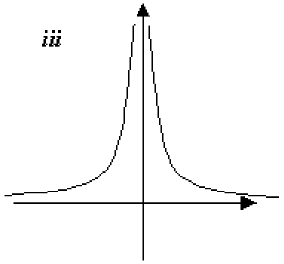
    c) c) A partir de los gráficos, indicar el valor de: $m{\circ}f(0), h^{-1}{\circ}f(-2), h{\circ}f(-2)$, y $m \circ h^{-1}(0)$.

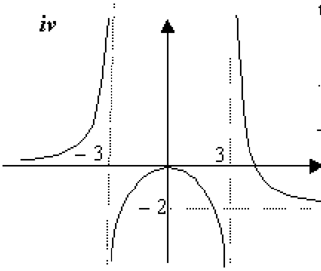
Práctica 2 – Límites y continuidad

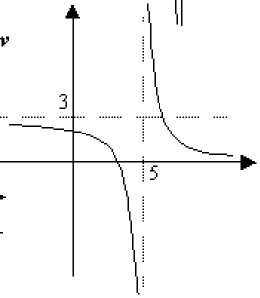
1. Dados los siguientes gráficos, calcular los límites que se indican en cada caso.

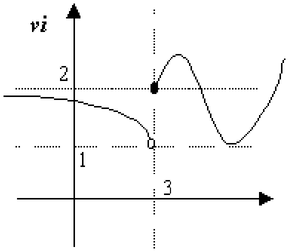


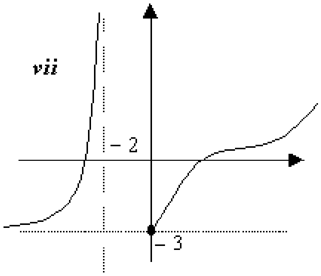












i.- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

ii.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

iii.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

iv.- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

v.- $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

vi.- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

vii.- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. *a*) Representar gráficamente la situación

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \quad \text{¿Existe } \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}\text{?}$$

b) Calcular:

$$\text{i. } \lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5}, \qquad \text{ii. } \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{-x+2}, \qquad \text{iii. } \lim_{x\to (\frac{1}{3})^+} \frac{1}{3x-1}.$$

3. *a*) Representar gráficamente la situación

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) Calcular:

$$\text{i. } \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^5+x^3+x}, \qquad \text{ii. } \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. *a*) Graficar $f(x) = e^x$ y calcular:

$$\text{i. } \lim_{x\to +\infty} e^x, \qquad \text{ii. } \lim_{x\to -\infty} e^x.$$

b) Calcular

$$\text{i. } \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}, \qquad \text{ii. } \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}.$$

5. *a*) Graficar $f(x) = \ln(x)$ y calcular:

$$\text{i. } \lim_{x\to +\infty} \ln(x), \qquad \text{ii. } \lim_{x\to 0^+} \ln(x).$$

b) Calcular

$$\text{i. } \lim_{x\to 0^+} \ln(1/x), \qquad \text{ii. } \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{\ln(x-3)}.$$

6. Usando las propiedades básicas de los límites funcionales, calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

a) $\lim_{x\to 1} (x^2+3x+2)\sqrt{3x-1}$

b) $\lim_{x\to -2} \left(\frac{x}{x+3} - \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+5}} \right)$

c) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{e^{2x+5}}{x+2}$

e) $\lim_{x\to 3} (x^2-7)^3 + \sqrt[3]{2x+21}$

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

7. Calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)$ haciendo tablas de valores y graficando con varios valores de x próximos a x_0 (usando la calculadora) en los siguientes casos:

a) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5+x}{-x}$ c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ d) $\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{1/x}\right)^{1/x}$

8. Calcular los siguientes límites “en infinito”:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^6+x^5+x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3+x^2}{3x^2-2x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4-x^3+2}{3x^4-3x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7-\sqrt{3}}{x^{10}+9x^7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}+2}{3^x-5}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x+1}+2}{3^x-5}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

9. Hallar el valor de a para que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{ax-1}=\frac{2}{3}$$

10. Calcular los siguientes límites indeterminados:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x^2-8x-12}$

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{9x-18}{x^2+4x-12}$

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$

h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to0}x\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0}x\mathrm{sen}(h(x)),\ h(x)$ cualquier función

c) $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{sen}(x)\cos\left(\ln(1+\dfrac{1}{x})\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)+\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos(x))\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

12. Sabiendo que $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$ calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$ g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$

13. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{\frac{\operatorname{tg}(x)}{3x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+\sqrt{2x^2+1}}{x}\right)^{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} (1+x)^{1/2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{3x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2x^3-3x+2}{5x^3+x^2-10}\right)^{\frac{3-x^3}{4x^2-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x-17|}{3+2x}$

14. Sabiendo que $\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{y\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$, calcular:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen}(x))^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^x$ f) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-3)^{\frac{1}{x-2}}$

15. Estudiar los límites laterales (es decir, por derecha y por izquierda) y el límite (si existe) de las siguientes funciones en los puntos x_0 indicados:

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$, $x_0 = 3$ b) $f(x) = e^{x^3}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = 2^{1/x}$, $x_0 = 0$

16. Estudiar la continuidad de las funciones dadas en el ejercicio anterior en los puntos x_0 correspondientes.

17. Estudiar los límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \quad x = 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} \quad x = 2$

c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \quad x = 0$ d) $f(x) = e^{-1/x^2} \quad x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}} \quad x = 0$ f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} \quad x = 2$

g) $f(x) = e^{1/x} \quad x = 0$

18. Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

d) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$

19. Calcular el dominio, y analizar la continuidad en punto x_0 indicado en cada caso. En caso de no ser continua en x_0, indicar el tipo de discontinuidad, y de ser .$^{\text{ev}}$itable", redefinir adecuadamente como para que resulte continua.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 2x+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = -1$ y $x_0 = 2$

20. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$. Calcular su dominio y estudiar su continuidad en todo $\mathbb{R}$. En los puntos donde la discontinuidad sea evitable, redefinir la función de forma tal que resulte continua.

21. Dada la función $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x+1}}{x-8}$:

a) Hallar el dominio de f.

b) ¿Es posible definir $f(8)$ para que f resulte continua en $x = 8$?

22. Hallar los ceros de la función f y determinar los intervalos de positividad (C_+) y negatividad (C_-).

a) $f(x) = (3x - 2)(4x + 1)(x - 5)$ b) $f(x) = x^2(2x + 1)$

c) $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$ d) $f(x) = \ln(2x + 5)$

e) $f(x) = e^{x+1}(x + 4)$ f) $f(x) = e^{5x} - 1$

Práctica 3 - Derivadas, Reglas de derivación y Regla de L'Hôpital

1. Para las funciones dadas:

   i. $y = 2x - 7$en $(2\,;-3)$ ii. $y = x^2$ en $(2;4)$ iii. $y = (x+2)^{1/2}$ en $(2;2)$

   a) Hallar las pendientes a las rectas tangentes a las gráficas de las curvas en los puntos que se indican (utilizando la definición de derivada)

   b) Hallar la ecuación de la recta tangente

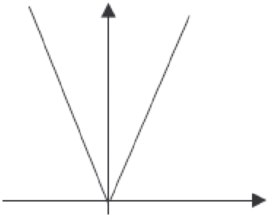
   c) Graficar las curvas y las rectas tangentes

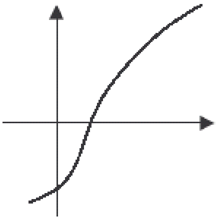
   d) Estimar el valor de las funciones en $2 + \frac{1}{13}$ utilizando la recta tangente (¡y no la calculadora!)

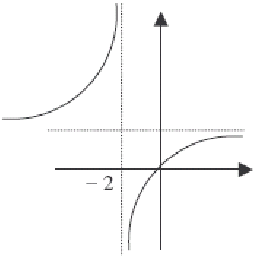
2. En cada uno de los siguientes gráficos:

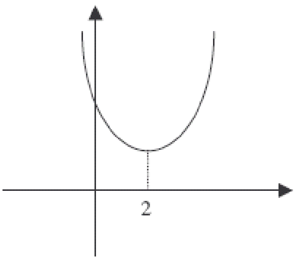
   a) Determinar los puntos donde la función no es derivable. Explicar por qué.

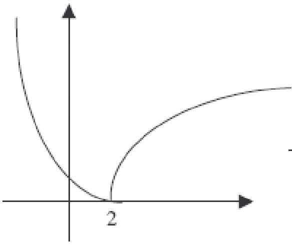
   b) Determinar los puntos donde $f'(x) > 0$.

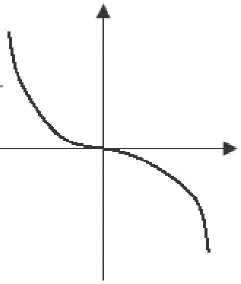












3. Calcular $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas

generales de derivación:

a. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b. $f(x) = x\,(3 + x^2) + \ln(2)$

c. $f(x) = \frac{x}{5}$

d. $f(x) = \frac{1}{7}\,x$

e. $f(x) = \frac{x-1}{x}$

f. $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \operatorname{sen}(x)$

g. $f(x) = 7\cos(x) + 5\operatorname{sen}(x) + x \cdot \mathrm{e}^x$

h. $f(x) = \frac{6}{x}$

i. $f(x) = x^2\ln(x) - \frac{x^3}{3} + \mathrm{e}^\pi$

j. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

k. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{x\cdot\ln(x)}$

l. $f(x) = \frac{2+\cos(x)}{3+\operatorname{sen}(x)}$

m. $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x) + \ln(3)$

n. $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2\ln(x)$

4. *a*) Hallar el punto $P = (x, y)$ tal que la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ en el punto P es igual a -3.

   b) Hallar el punto $P = (x, y)$ tal que la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en el punto P es $y = 8\,x - 11$.

5. El desplazamiento (en metros) experimentado por un móvil al cabo de t segundos es

$$s(t) = 5t^2$$

Hallar la velocidad instantánea en $t = 2$.

6. La ley de movimiento de un punto a lo largo de una recta es $s(t) = 3t - t^2$ (en el instante $t = 0$ el punto se encuentra en el origen). Halle la velocidad del movimiento del punto para los instantes $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.

7. Calcular $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones aplicando la *Regla de*

la cadena:

a. $f(x) = (1+x)^{129}$

b. $f(x) = \cos(3x)$

c. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x))$

d. $f(x) = 3\operatorname{sen}^4(x)$

e. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(\sqrt{x}\,)}$

f. $f(x) = 4\,(x^2+5)\cdot\operatorname{sen}(3x^3-1)$

g. $f(x) = \sqrt{2x^3+x}$

h. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

i. $f(x) = \ln(x^4)$

j. $f(x) = \ln^4(x)$

k. $f(x) = 3\text{sen}(x^4)$

l. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}$

m. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$

n. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

o. $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x}$

p. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2))$

q. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \operatorname{sen}(5x))$

r. $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$

s. $f(x) = 3\operatorname{sen}^5(x^3)$

t. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

u. $f(x) = x\cdot\sqrt{1-x}$

8. La temperatura T de un cuerpo, que inicialmente estaba a $90^{\circ}\,C$, se enfría de acuerdo a la ley

$$T(t) = 20 + 70\ \mathrm{e}^{-0{,}1\ t}$$

(se está suponiendo que la temperatura ambiente es de $20^{\circ}\,C$) donde t es el tiempo en minutos.

a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.

b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura t y la temperatura ambiente. Más precisamente:

$$T'(t) = -0,1\ (T(t) - 20)\,.$$

c) Muestre que la velocidad de enfriamiento tiende a 0 conforme avanza el tiempo.

d) ¿Qué sucede con la temperatura del cuerpo conforme avanza el tiempo?

9. La temperatura (medida en grados centígrados) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo a la siguiente ley: $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t es el tiempo medido en horas.

a) Demuestre que en algún instante del lapso $[0;4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

b) Interprete geometricamente.

Función de costo total y función de costo marginal

La función $CT(x)$ es la función que calcula el costo total (el costo fijo más el costo variable) de producir x unidades de cierto artículo (siempre supondremos $x \geq 0$ puesto que la producción negativa de artículos no tiene sentido).

La función $CT'(x)$ de la función costo, se llama *función de costo marginal.*

Si interpretamos la derivada como una razón de cambio, entonces $CT'(x)$ es la razón de cambio del costo total con respecto al número de unidades producidas.

El número $CT'(x_0)$ se denomina *costo marginal* asociado a la producción de x_0 unidades.

En macroeconomía, x es un número muy grande, de tal modo que 1 es pequeño comparado con x, entonces $CT'(x_0)$ es aproximadamente igual a $CT(x_0+1) - CT(x_0)$.

Por lo tanto, los economistas definen el *costo marginal* como el costo ocasionado por la producción de "una unidad más" (es el costo "en el margen" o "en el borde").

10. Una empresa calcula que el costo de producción de x unidades de cierto artículo de consumo está dado por

$$CT(x) = 200 + 0,05\,x + 0,001\,x^2$$

   a) Hallar el costo y el costo marginal de producir:

      i. 500 unidades ii. 1000 unidades iii. 5000 unidades

   b) En cada uno de los casos anteriores comparar el costo marginal de cada producción con el costo que le ocasiona a la empresa aumentar cada producción en un artículo más.

11. Una empresa encuentra que el costo por producir x litros de un cierto producto químico está dado por

$$CT(x) = 3 + x + \frac{10}{x}\,.$$

   Comparar el costo marginal al producir 10 litros con el costo de producir el undécimo litro.

Función de demanda y función de ingreso total.

Supongamos que una empresa sabe, por experiencia, que puede vender x unidades cuando el precio de una unidad es $p(x)$, siendo p cierta función. Decimos entonces que $p(x)$ es el precio por unidad cuando hay una demanda de x unidades. A veces se considera que la cantidad demandada x depende del precio p $(x = x(p))$.

Llamaremos a x (o a veces D) la *función de demanda* del artículo en cuestión.

El ingreso total es el producto del número de unidades vendidas por el precio por unidad, es decir $x \cdot p(x)$ (o bien $D(p) \cdot p$, si se tiene a la demanda D en función del precio p). Por esta razón la función IT definida por

$$IT(x) = x \cdot p(x)$$

se llama *función de ingreso total.*

La derivada $IT'(x)$ se llama *función de ingreso marginal.* Se utiliza para encontrar la razón de cambio del ingreso total con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades de un cierto artículo a un precio $p(x)$ por unidad, entonces el *beneficio* $B(x)$ está dado por:

$$B(x) = IT(x) - CT(x)\,,$$

donde IT y CT son las funciones de ingreso total y de costo total respectivamente. Llamamos a B la función beneficio y a B' la función de beneficio marginal.

12. El precio unitario cuando se demandan x unidades de un cierto artículo de consumo viene dado por
$$p(x) = \sqrt{1200 - 2x}$$
Hallar las funciones de ingreso total e ingreso marginal.

13. Una empresa calcula que para vender x unidades de una cierta mercancía, el precio por unidad debe ser $p(x) = 1800 - 2x$, donde $1 \leq x \leq 100$. Suponiendo que el costo total de fabricación de x unidades es $CT(x) = 1000 + x + 0,001\,x^2$, hallar:
    a) La función de ingreso total y de ingreso marginal.
    b) La función de beneficio y de beneficio marginal.

14. Un productor se enfrenta a un mercado cuya función de demanda es de la forma $x = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}p$. En este momento se encuentra produciendo 1,7 toneladas. ¿Le conviene a este empresario aumentar su producción?

Elasticidad

Si $y = f(x)$ es derivable, la *elasticidad en un punto* de la variable dependiente y respecto de la variable independiente x se calcula haciendo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\, y' = \frac{x}{f(x)}\, f'(x)$$

Puede interpretarse como (una aproximación a) la variación porcentual de la función producida por una variación del 1 % en la variable independiente. Se denota con:

$$\frac{Ey}{Ex} \qquad \text{o también} \qquad \frac{Ef(x)}{Ex}\,.$$

Interpretación de los valores de las elasticidades:

i. Si $\left|\dfrac{Ef(x)}{Ex}\right| = 1$ en el punto x entonces, una variación relativa de x a partir de ese punto dará lugar a la misma variación relativa (en valor absoluto) en $f(x)$.

ii. Si $\left|\dfrac{Ef(x)}{Ex}\right| > 1$ en el punto x entonces, una variación relativa de x a partir de ese punto dará lugar a una variación relativa mayor (en valor absoluto) en $f(x)$.

iii. Si $\left|\dfrac{Ef(x)}{Ex}\right| < 1$ en el punto x entonces, una variación relativa de x a partir de ese punto dará lugar a una variación relativa menor (en valor absoluto) en $f(x)$.

Si la función considerada es la demanda $x = f(p)$ (ó $D = f(p)$), se dice que es unitaria, elástica o inelástica respectivamente.

15. Si la función de demanda de un consumidor es $D = 30-5p$, calcular la elasticidad de la demanda respecto del precio para $p = 2$. Clasificar la demanda.

16. Dada la ley de demanda $p \cdot x = \sqrt{1+x^2}$, hallar la elasticidad de la demanda para $p = 2$.

17. Si $P(x) = -2\,x^3 - 36\,x^2 + 270\,x + 5$ es una función de producción de una fábrica que utiliza una cantidad x de horas-hombre,

    a) Hallar la función de producción marginal.
    b) Hallar la función elasticidad de la producción respecto de las horas-hombre x .
    c) Interpretar la elasticidad calculada en el punto anterior para cuando $x =$ 300 horas-hombre.

18. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

    a. $f(x) = 3\,x^3 + 5\,x - 1$ b. $f(x) = \left(x^2+1\right)^5$ c. $f(x) = \ln(7x)$
    d. $f(x) = \operatorname{sen}(4x)$

19. Calcule los siguientes límites:

    a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \operatorname{sen}(x) - 1}{\ln(1+x)}$

    d. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ e. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$ f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{cotg}(2x)$

    g. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^2\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Práctica 4 - Análisis de funciones y aplicaciones de la derivada

1. Calcular las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

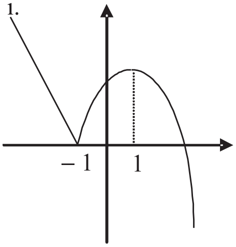
   a. $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-2}$ b. $f(x) = \ln(x-4)$ c. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

   d. $f(x) = e^{-2x}$

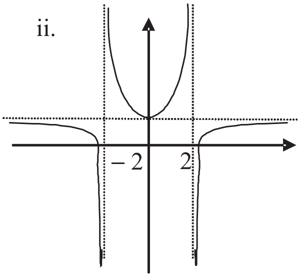
2. Dados los siguientes gráficos de funciones, determinar:

   a) En qué puntos no existe la derivada de f .
   b) El conjunto $\{x : f'(x) > 0\}$
   c) El conjunto $\{x : f'(x) < 0\}$
   d) El conjunto $\{x : f'(x) = 0\}$
   e) Máximos y mínimos relativos de f .

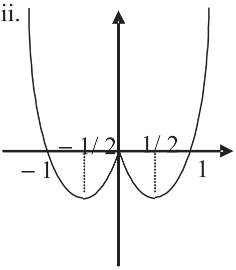
i.



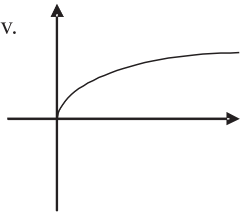
ii.



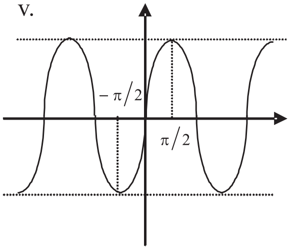
iii.



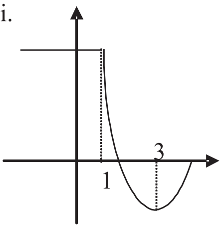
iv.



v.



vi.



3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 3x^2$.

   a) Calcular $f'(x)$.
   b) Determinar $\{x : f'(x) = 0\}$
   c) Determinar $\{x : f'(x) > 0\}$
   d) Determinar $\{x : f'(x) < 0\}$

4. Estudiar intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones. Determinar los máximos y los mínimos relativos de cada una y hacer un gráfico

aproximado.

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ c) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$

d) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

g) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ h) $f(x) = x^{2/3} \cdot (1 - x)$ i) $f(x) = 2x^6 - 27x^4$

5. *a*) Trazar el gráfico de una función f que satisfaga:
    1) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
    2) $f'(x) > 0$ en $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$
    3) $f'(x) < 0$ en $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$
    4) $f'(x) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$
    5) f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntotas horizontales.

    b) Decidir en qué puntos alcanza extremos relativos y decidir si son máximos o mínimos.

6. *a*) Trazar el gráfico de una función f que satisfaga:
    1) $f'(x) > 0$ en $(3; 8)$
    2) $f'(x) < 0$ en $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (8; +\infty)$
    3) $f'(3) = f'(8) = 0$
    4) f tiene una asíntota vertical en $x = 1$
    5) La recta $y = -4$ es asíntota horizontal en $+\infty$
    6) La recta $y = 2$ es asíntota horizontal en $-\infty$

    b) Decidir en qué puntos alcanza extremos relativos y decidir si son máximos o mínimos.

7. Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

    a. $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 12$ b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ c. $f(x) = e^{-x^2}$

8. En cada una de las siguientes funciones, estudie:

    i. Dominio.

    ii. Posibles asíntotas.

    iii. Máximos y mínimos locales.

    iv. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    v. Sentido de la curvatura.

    vi. Puntos de inflexión.

Sobre la base de todos estos datos, realice un gráfico aproximado de $f(x)$.

a. $f(x) = e^x\,(x^2+2)$

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

c. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

d. $f(x) = e^x\,(2x^2+x+1)$

e. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

f. $f(x) = e^{-x^2}$

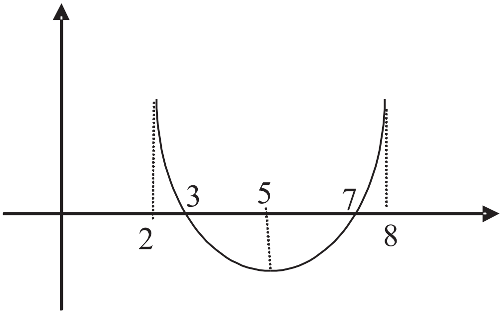
g. $f(x) = x \cdot \ln(x)$

h. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

i. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

j. $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

9. Sea $f : [2;8] \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que la función derivada f' tiene el siguiente gráfico:



   a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

   b) Hallar los máximos y mínimos locales de f.

10. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a. $f(x) = 3x+1$ en $[-1;3\,]$

b. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $[0;\pi]$

c. $f(x) = x^2$ en $[-1;1\,]$

d. $f(x) = x^{2/3}\,(5-2x)$ en $[-1;2\,]$

e. $f(x) = |x|\,(x+1)$ en $[-2;1\,]$

f. $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0;3]$

11. Las reacciones de dos drogas en función del tiempo (medido en horas) están dadas por las funciones:

$$r_1(t) = t \cdot e^{-t} \qquad ; \qquad r_2(t) = t^2 \cdot e^{-t}$$

   a) ¿Cuál de las dos drogas tiene mayor reacción máxima?

   b) ¿Cuál alcanza la reacción máxima en el menor tiempo?

12. Un cañón situado sobre el borde de un acantilado dispara un proyectil hacia un barco. La altura del proyectil (en metros sobre el nivel del mar) después de t segundos está dada por la expresión $-5t^2 + 50t + 55$.
    a) ¿Cuál es la altura máxima del proyectil y en cuanto tiempo se alcanza?
    b) ¿Cuánto tiempo tiene el barco para desviar su trayectoria si logra ver el fogonazo del cañón?

13. Determine dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea máximo.

14. Entre todos los rectángulos de área $100\,m^2$, determine:
    a) El de perímetro mínimo.
    b) El que posee diagonal más corta.

15. ¿Cuál de los puntos de la recta de ecuación $2x+y=1$ está más cerca del origen?

16. La lata de una gaseosa tiene una capacidad de $354\,cm^3$. Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

17. Una tarjeta de cartulina debe tener $150\,cm^2$ para su impresión. Se requiere un margen de $3\,cm$ en la parte superior y en la inferior, y un margen de $2\,cm$ en cada uno de los lados. Calcular las dimensiones que debe tener la tarjeta para minimizar la cantidad de material a emplear.

18. Si se producen x artículos, el precio de cada uno está dado por la ecuación $p(x) = 400 - 2x$, y la función de costo total es $CT(x) = 0,2\,x^2 + 4x + 400$.
    a) ¿Qué cantidad de artículos deben producirse para maximizar el beneficio? (recordar que beneficio = ingreso - costo).
    b) Determinar el precio en el cual se obtiene el máximo beneficio.
    c) Determinar cuál es el beneficio máximo obtenido.

19. La función de demanda de un artículo es $x = 140 - p$. Si la función de costo total es $CT(x) = x^2 + 20x + 300$, obtener precio y demanda que maximicen el beneficio. ¿Cuánto vale este beneficio?

20. Una compañía puede producir a lo sumo 50 unidades por día de cierto artículo, que se vende a \$ 200 la unidad. Si se sabe que el costo total por día es $CT(x) = 2x^2 + 40x + 1400$, ¿cuántas unidades deben producirse para que la empresa obtenga el máximo beneficio diario?

21. Una compañía recibe para la venta a lo sumo 80 escritorios por semana, y el precio de venta es de \$ 400 cada uno. La función de costo total semanal es $CT(x) = 2x^2 + 80x + 6000$. Determinar cuántos escritorios deben venderse semanalmente para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio?.

22. Dada la función de costo total $CT(x) = 4x^2 - 14x + 10$, y la función de demanda $x = \sqrt{120 - 4p}$, hallar la cantidad para la cual el beneficio es máximo. ¿Cuánto vale este beneficio?

23. Un estanciero tiene novillos que pesan $300\,kg$ cada uno. Mantenerlos en su campo le cuesta $U\$S\,0,5$ diarios por animal. Los novillos aumentan de peso a un ritmo de $5\,kg$ diarios. El precio de mercado es actualmente $U\$S\,1$ por kg y desciende $U\$S\,0,01$ por día. ¿Cuánto tiempo le conviene engordar los novillos si quiere sacar el máximo beneficio? ¿Cuánto ganará por cada novillo?

Práctica 5 - Sistemas de ecuaciones lineales

1. Indicar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales:

   a. $x^2 + x - 5y + 2 = 0$ b. $x^2 + y^2 + 2xy = 34$ c. $\sqrt{3x} - y = 5$

   d. $x + 2y - z = 3$ e. $x + 4zy = 5$

2. Escribir dos ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes:

   a. $2x + 3y + 5 = 0$ b. $2x + y = -3z + 8$

3. Se dan varios pares de sistemas de ecuaciones. Todos ellos son equivalentes. Algunos por razones muy fáciles de ver: señalarlos y decir cuál es la razón. Otros hay que resolverlos para ver que son equivalentes.

   a. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ 2x & - & y & = & 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 10 \\ 6x & - & 3y & = & 21 \end{array}\right.$

   b. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ 2x & - & y & = & 7 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ 3x & & & = & 12 \end{array}\right.$

   c. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & & & = & 7 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 12 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & & & = & 7 \\ & & & & & & \end{array}\right.$

4. Indicar y explicar, con razonamientos lógicos y ejemplos, cuáles de las siguientes transformaciones son válidas y cuales no (es decir, cuáles transforman un sistema en otro equivalente y cuáles no):

   a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de todas ellas.
   b) Sustituir dos de las ecuaciones del sistema por su suma.
   c) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de sumarla con otra.
   d) Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de restarle otra.
   e) Sumarle $3x + 1$ al primer miembro de cada ecuación.

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones indicando si son compatibles determinados, indeterminados o incompatibles:

   a. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$ b. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$

   c. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

6. Resolver $\left\{\begin{array}{lcrcl} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & 4 \end{array}\right.$

   a) Añadir una tercera ecuación de modo que el sistema siga siendo compatible. Interpretar geométricamente.

   b) Añadir una tercera ecuación de modo que el sistema sea incompatible. Interpretar geométricamente.

7. Resolver $\left\{\begin{array}{lcccccl} x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 7 \end{array}\right.$ y comprobar que tiene infinitas soluciones (es indeterminado).

   a) Añadir una tercera ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

   b) Añadir una tercera ecuación de modo que el sistema siga siendo indeterminado.

   c) Añadir una tercera ecuación de modo que el sistema sea incompatible.

8. Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a. } \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\text{b. } \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & 3z & = & -2 \\ -x & + & 8y & - & 27z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\text{c. } \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \\ 3x & + & y & + & z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\text{d. } \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 4w & = & -3 \\ 2x & - & y & + & 4z & - & 5w & = & 13 \\ -x & + & y & - & 4z & - & w & = & -6 \\ 3x & + & 4y & + & z & + & w & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\text{e. } \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ y & + & z & = & 5 \\ z & - & w & = & -1 \\ -x & + & w & = & 3 \end{array}\right.$$

9. Determinar si los siguientes sistemas lineales son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles. En los casos compatibles, hallar

la(s) solución(es):

a. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

b. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

c. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

d. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

e. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

f. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 2w & = & 5 \\ & & 2y & + & 5z & + & w & = & 2 \\ & & y & - & 3z & & & = & 4 \end{array}\right.$$

g. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

h. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array}\right.$$

i. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & + & 2y & = & 7 \end{array}\right.$$

j. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3w & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3w & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8w & = & 10 \end{array}\right.$$

k. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

l. $$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

m. $$\begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \\ -3x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

n. $$\begin{cases} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{cases}$$

o. $$\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6w & = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2w & = & 4 \end{cases}$$

p. $$\begin{cases} 2x & - & 3y & - & 2z & + & u & + & v & = & 2 \\ 3x & + & y & & & + & 2u & & & = & 10 \\ & & 3y & - & 4z & + & 3u & + & 2v & = & 3 \end{cases}$$

10. Considere tres productos distintos que se indican respectivamente con los números 1, 2, y 3. Si p_i ; d_i y o_i denotan respectivamente el precio, la cantidad demandada y la cantidad ofrecida del producto i, para $i = 1, 2, 3$, encontrar los precios y cantidades de equilibrio para un mercado puramente competitivo dado por las funciones de demanda y oferta:

$$\begin{array}{ll} d_1 = 100 - 2p_1 - 2p_2 + p_3 & o_1 = 3p_1 - 65 \\ d_2 = 135 - 4p_1 - 3p_2 + 2p_3 & o_2 = 5p_2 - 95 \\ d_3 = 140 + p_1 + p_2 - 2p_3 & o_3 = 6p_3 - 10 \end{array}$$

11. Un matrimonio tuvo en total tres hijos, que nacieron a intervalos regulares de tiempo (en años). La suma de las edades de los hijos al 31/12/92 superaba por un año la edad del padre, quien tenía la misma edad que la madre. Tres años antes, la suma de las edades de todos los miembros de la familia era 100 años, y la edad del hijo menor era dos tercios de la edad del hijo mayor. ¿Cuáles eran a la fecha mencionada las edades del padre y de cada uno de los hijos?

12. Se tienen tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:

	Plata	Cobre	Oro
1^{ra}	5	15	80
2^{da}	10	25	65
3^{ra}	15	30	55

¿Cuántos gramos se han de tomar de cada una para obtener 20 gr de una nueva aleación que contenga 12 % de plata, 26 % de cobre y 62 % de oro?

13. Tres especies de bacterias B_1, B_2 y B_3 coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan con tres alimentos A_1, A_2 y A_3. Una bacteria de la especie B_j consume una cantidad determinada de alimento A_j por día según la tabla:

	A_1	A_2	A_3
B_1	1	1	1
B_2	1	2	3
B_3	1	3	5

Se proveen diariamente 15000 unidades de A_1, 30000 de A_2 y 45000 de A_3 y todo el alimento provisto se consume.

a) ¿Puede determinarse con estos datos la cantidad de bacterias de cada especie?

b) ¿Puede determinarse la cantidad total de bacterias?

c) ¿Es posible una población de 10000 bacterias de la especie B_3 ? En caso afirmativo hallar las cantidades de bacterias de las especies restantes.

14. En el estanque de un establecimiento de cría ictícola hay tres tipos de peces que son nutridos con los alimentos A, B, C. El consumo semanal promedio de cada pez es:

- Peces tipo 1 : 1 unidad de A, 1 de B y 2 de C.
- Peces tipo 2 : 3 unidades de A, 4 de B y 6 de C.
- Peces tipo 3 : 2 unidades de A, 1 de B y 5 de C.

Semanalmente se vierten al estanque 14000 unidades del alimento A, 12000 unidades del B y 31000 unidades del C. Sabemos que toda la comida es ingerida y que los peces están bien alimentados. ¿Cuántos peces de cada tipo hay en el estanque?

15. Una fábrica de cerámica elabora tazas y platillos. Para cada pieza de cerámica un operario mide cierta cantidad de material y lo vierte en una máquina. Como promedio, esa operación insume 3 minutos para una taza y 2 minutos para un platillo. El material de una taza cuesta $\$0,25$ y el de un platillo $\$0,20$. Si disponemos de $\$44$ de material y una jornada de 8 horas de trabajo continuo, ¿cuántas tazas y platillos se podrán elaborar con esos insumos?

16. La siguiente tabla indica las cantidades de nutrientes existentes en ciertos alimentos (en cada caso, por 100 g del alimento correspondiente):

	Proteínas (g)	Vitamina C (mg)	Calorías	Calcio (mg)
Carne	20	0	325	10
Lechuga	1	15	80	40
Leche	3	2	70	120
Espinaca	2	50	22	70

Se quiere elaborar una dieta basada en estos cuatro alimentos que satisfaga los requerimientos diarios de cada una de las personas A, B y C. Esto implica determinar cuántos gramos de cada alimento deberá consumir cada una de ellas por día:

	Proteínas (g)	Vitamina C (mg)	Calorías	Calcio (mg)
Persona A	70	60	1400	1000
Persona B	60	50	300	800
Persona C	70	100	1200	900

17. Se tiene una pieza metálica que pesa $29,85\,gr$, tiene $3\,cm^3$ de volumen y está construida con una aleación de cobre y plata. Sabemos que el peso específico del cobre es de $8,95\,g/cm^3$ (peso específico = peso/volumen) y el peso específico de la plata es de $10,45\,g/cm^3$. Determinar qué proporción de plata y cobre contiene la aleación.

Práctica 6 - Matrices y determinantes

1. Calcular las matrices traspuestas de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Para las matrices A y B del ejercicio anterior, calcular: a. $2A-3B^t$; b. $A \cdot B$.

3. Paula ha contabilizado las horas semanales dedicadas a distintas tareas:

	Clase	Estudio	T.V.	Amigos
L	6	2	1	2
M	5	3	2	1
Mi	8	1	0	2
J	6	1	2	1
V	5	4	0	4
S	1	2	3	6
D	0	2	4	6

Ella valora cada hora dedicada a las distintas tareas del siguiente modo:

	Clase	Estudio	T.V.	Amigos	Total
Puntos	2	3	1	4	10

Su tía Filomena hace una valoración distinta:

	Clase	Estudio	T.V.	Amigos	Total
Puntos	4	4	0	2	10

La matriz correspondiente a las dos valoraciones es:

$$\begin{array}{l} \text{Clase} \\ \text{Estudio} \\ \text{T.V.} \\ \text{Amigos} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular el producto de las dos matrices y decir el significado de algunas de sus casillas. ¿Cuál es el día cuyas actividades, en conjunto, valora más Paula? ¿Y su tía?

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

5. Efectuar, si es posible, los siguientes productos de matrices:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ¿Qué conclusión obtiene?

6. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular: $A^2 = A \cdot A$; A^3 ; A^4 ; A^n.

7. Calcular x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz X que cumpla $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$.

9. Calcular, si es posible, la matriz inversa de las siguientes matrices:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. Resolver, calculando la inversa de la matriz de coeficientes, los sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 1 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & x & = & 1 \\ y & + & z & = & 2 \\ x & + & z & = & 4 \end{array} \right.$$

11. Para los siguientes sistemas de ecuaciones, escribirlos en forma matricial y resolverlos hallando la inversa de la matriz de coeficientes del sistema.

a. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$ b. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & x & - & z & = & -2 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$ d. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & x & - & z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

12. Hallar $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

a) $AX = B + CX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $AX - 2X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A^tX - 3(X + B) = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible. El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¿es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible? ¿y con otra matriz B cualquiera?

14. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a.}\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{b.}\ \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} \qquad \text{c.}\ \begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{d.}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{e.}\ \begin{vmatrix} 10 & 497 & 1533 \\ 0 & 10 & 8931 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \qquad \text{f.}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{g.}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{h.}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{i.}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{j.}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 & -1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 4 & -2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 11 & -12 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 9 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 21 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -4 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 0 & 3 & 2 & -4 & 9 & -23 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

15. *a*) Verificar que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

    b) Verificar que $\det(3A) = 3^2 \det(A)$, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

    c) Verificar que $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

    d) Verificar que $\det\left(A^t\right) = \det(A)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

16. ¿Es cierto que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$? Probar con ejemplos.

17. Determinar para que valores del parámetro "a" son inversibles las siguientes matrices y para cuales no (usando determinantes):

$$\text{a.}\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ a & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b.}\ \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c.}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d.}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Escribir los siguientes sistemas en forma matricial, discutir como serán sus soluciones en función del parámetro m y resolver los sistemas homogéneos planteados en los siguientes ejercicios:

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 4mz & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{b. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ mx & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

19. Escribir los siguientes sistemas de forma matricial, y determinar para qué valor o valores del parámetro a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones es: compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ 5x & - & y & + & az & = & 6 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \text{b. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ ax & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & - & 4z & = & 3 \end{array} \right.$$

20. Determinar los valores de k tales que la siguiente matriz resulte inversible:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ k & k+3 & 1 \\ k+2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

21. En los siguientes sistemas determinar los valores de λ de manera que cada uno resulte compatible determinado:

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (\lambda-1)x & + & y & - & z & = & 2 \\ 4x & + & (\lambda-1)y & & & = & -3 \\ (\lambda+3)x & + & \lambda\, y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (\lambda+2)x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ -x & + & (\lambda-1)y & - & z & = & 0 \\ 2\lambda\, x & + & y & + & \lambda\, z & = & -1 \end{array} \right.$$

Práctica 7 - Matriz Insumo-Producto

El economista W. Leontief es el autor del modelo o la tabla de insumo producto. Esta tabla refleja la interrelación entre distintos sectores de la economía y los montos de bienes intermedios utilizados durante un período. Actualmente todos los países desarrollados calculan esta matriz para planificar su economía. Conocer la matriz insumo producto ayuda a decidir cuales son los sectores que conviene (económicamente hablando) promover o subsidiar. Un ejemplo en Argentina: la apertura de la economía durante la convertibilidad trató al sector automotriz de forma excepcional. Fue porque según la matriz de insumo producto se trata de un sector muy dinámico (está relacionado con muchos otros), si aumenta la demanda final de autos, esto afecta la producción de los sectores de combustible, metalúrgico, neumáticos, etc.

En este texto presentaremos un ejemplo de una matriz insumo producto. Los interesados pueden ampliar este tema en *Álgebra, de A. E. García Venturini y A. Kicillof.*

Presentamos acá una tabla con tres sectores: Agricultura, Industria y Servicios. Los sectores están relacionados entre sí. Por ejemplo Industria debe utilizar como **insumo** productos de otros sectores y por eso **compra**: a Agricultura 200, a Industria 350 y a Servicios 300 (esto se lee en la **columna** de industria). Además la producción de Industria es consumida, en parte, por los mismos sectores: Agricultura 70, Industria 350 y Servicios 230 (y aparece en la **fila** de Industria).

	Agricultura	Industria	Servicios	Demanda final	Valor bruto de la producción
Agricultura	50	200	15	235	500
Industria	70	350	230	350	1000
Servicios	100	300	110	445	955
Valor agregado	280	150	600		
Valor bruto de la producción	500	1000	955		2455

En la columna de **Demanda final** aparecen los consumos que no corresponden a los sectores acá incluidos, a los consumidores finales (que no se encuandran en ningún sector productivo) y a la inversión (es la parte de la producción del período que se "acumula" para los siguientes). Por ejemplo, siguiendo con Industria, vende 350 además de lo que vende a los 3 sectores acá incluidos. La última columna corresponde al **Valor Bruto de la producción** correspondiente a cada sector: es la suma de todas las ventas, por ejemplo en el caso de Industria: $70 + 350 + 230 + 350 = 1000$.

La fila de Valor Agregado corresponde a la diferencia entre el Valor Bruto de la producción y la suma de todos los insumos. En el caso de Industria es: $1000 - (200 + 350 + 300) = 150$.

La tabla como sistema de ecuaciones

Ahora expresaremos esta tabla como sistema de ecuaciones lineales. Primero reemplazaremos los números y sectores por letras genéricas. Por ejemplo x_{23} representa el valor de insumo 2 (que era industria) que utiliza el sector 3 (que era Servicios).

	S_1	S_2	S_3	DF	VBP
S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	Y_1	X_1
S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Y_2	X_2
S_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	Y_3	X_3
VA	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	X_1	X_2	X_3		

Si representamos esta tabla como sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+Y_1=X_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+Y_2=X_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+Y_3=X_3 \end{cases}$$

Coeficientes técnicos

Las **columnas** representan la estructura de costos de cada sector. Si se divide cada insumo por el valor bruto de producción correspondiente (el total de la columna), se obtienen los **coeficientes técnicos** (que registran la necesidad de insumos de cada sector para producir una unidad del producto que dicho sector produce):

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (i \text{ indica al sector que vende y } j \text{ al que produce}).$$

O sea: se divide cada coeficiente de una columna por el total de la misma. En nuestro ejemplo queda (redondeando al segundo decimal)

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	$\frac{50}{500}=0,10$	$\frac{200}{1000}=0,20$	$\frac{15}{955}=0,02$
Industria	$\frac{70}{500}=0,14$	$\frac{350}{1000}=0,35$	$\frac{230}{955}=0,24$
Servicios	$\frac{100}{500}=0,20$	$\frac{300}{1000}=0,30$	$\frac{110}{955}=0,12$

Como $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$, entonces $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$. Usando esto, podemos reescribir el sistema de ecuaciones así:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + Y_1 = X_1 \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + Y_2 = X_2 \\ a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot X_2 + a_{33} \cdot X_3 + Y_3 = X_3 \end{cases}$$

En nuestro ejemplo quedaría:

$$\begin{cases} 0,10\, X_1 + 0,20\, X_2 + 0,02\, X_3 + Y_1 = X_1 \\ 0,14\, X_1 + 0,35\, X_2 + 0,24\, X_3 + Y_2 = X_2 \\ 0,20\, X_1 + 0,30\, X_2 + 0,12\, X_3 + Y_3 = X_3 \end{cases}$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes técnicos, Y a la de demandas finales y X a la de valor bruto de producción, y las notamos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

el sistema expresado en forma matricial nos queda: $X = A \cdot X + Y$.

(De más está decir, que todo lo que hicimos con 3 sectores, se puede hacer con cualquier cantidad n de ellos).

Coeficientes de requisitos directos e indirectos

Para medir las necesidades de producción de cada sector ante un cambio de la demanda final (la matriz Y) se opera algebraicamente con las matrices a partir de la ecuación de más arriba:

$$X = A \cdot X + Y \quad \Rightarrow \quad X - A \cdot X = Y \quad \Rightarrow (I - A) \cdot X = Y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X = (I - A)^{-1} \cdot Y \quad \text{(multiplicando a izquierda por } (I - A)^{-1})$$

A la matriz $(I - A)$ se la llama **matriz de Leontief**, y a $(I - A)^{-1}$ se la llama **matriz de coeficientes directos e indirectos**. Utilizando esta última, a partir de una variación de la demanda final Y^* se obtiene una nueva matriz de producción X^*, y se puede construir la nueva tabla:

$$X^* = (I - A)^{-1} \cdot Y^* \qquad (\star)$$

Y en nuestro ejemplo:

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} {Y_1}^* \\ {Y_2}^* \\ {Y_3}^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} {Y_1}^* \\ {Y_2}^* \\ {Y_3}^* \end{bmatrix}$$

De esta forma, si la demanda final, en vez de ser $Y =$ fuera $Y^* =$, se podría calcular el nuevo valor bruto de la producción X^* haciendo:

$$\begin{aligned} X^* &= \begin{bmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,21 & 0,44 & 0,14 \\ 0,41 & 1,91 & 0,53 \\ 0,41 & 0,75 & 1,35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1207 \\ 1772 \\ 2012 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El modelo de Leontief afirma que, bajo ciertas hipótesis económicas, la matriz de coeficientes técnicos A es siempre la misma, aunque cambie la demanda final, y por lo tanto, la matriz de coeficientes directos e indirectos $(I - A)^{-1}$ también, lo que justifica el razonamiento hecho en la ecuación $(\star)$.

Ejercicios

1. Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un año para la economía de un país dividida en 2 sectores S_1 y S_2,

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	5	3	12	20
S_2	10	9	5	24
VA	5	12		
VBP	20	24		44

construir la tabla del año para el cual la demanda final es $Y^* = \begin{bmatrix} 26 \\ 39 \end{bmatrix}$.

2. Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un año para la economía de un país dividida en 2 sectores S_1 y S_2,

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	40	44	16	100
S_2	40	0	15	55
VA	20	11		
VBP	100	55		155

construir la del año para el cual la demanda final es $Y^* = \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}$.

3. Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un año para la economía de un país dividida en 2 sectores S_1 y S_2:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1		18	21	
S_2		12		
VA	13			
VBP				

   a) Completar la tabla si se cumplen todas las condiciones siguientes:
      1) El sector S_1 utiliza insumos del sector S_2 por un valor de 26.
      2) El sector S_2 tiene una demanda final de 10.
      3) El sector S_1 utiliza para si 13 unidades de su propia producción.
      4) El producto bruto total de la economía es 100.

   b) Construir la tabla del año para la cual la demanda final es $Y^* = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}$.

4. Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un año para la economía de un país dividida en 2 sectores S_1 y S_2:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1		28	36	
S_2		7		
VA	48			
VBP				

   a) Completar la tabla si se cumplen todas las condiciones siguientes:
      1) El sector S_1 utiliza insumos del sector S_2 por un valor de 16.
      2) El sector S_2 tiene una demanda final de 19.
      3) El sector S_1 utiliza para si 32 unidades de su propia producción.
      4) El producto bruto total de la economía es 138.

   b) Construir la tabla del año para la cual la demanda final es $Y^* = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \end{bmatrix}$.

5. La matriz de coeficientes técnicos correspondientes a un año para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2 es: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Completar la tabla si la demanda final es $Y^t = \begin{pmatrix} 210 & 160 \end{pmatrix}$.

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1				
S_2				
VA				
VBP				

6. La matriz de coeficientes técnicos correspondientes a un año para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2 es: $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$. Completar la tabla si la producción final es $X^t = \begin{pmatrix} 200 & 110 \end{pmatrix}$.

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1				
S_2				
VA				
VBP				

Práctica 8 - Vectores y rectas

1. Dados los vectores: $u = (1;2)$; $v = (-1;3\ )$ y $w = (-1;2\ )$, realizar las operaciones siguientes, analítica y gráficamente:

   a. $u + v$ b. $u - v$ c. $u + v + w$

   d. $3u$ e. $-3v$ f. $4v - w$

2. Dados los vectores: $u = (0;1;2)$; $v = (1;1;0)$ y $w = (-1;\ 1;\ 1\ )$, realizar las operaciones siguientes, analítica y gráficamente:

   a. $u + v$ b. $u - v$ c. $u + v + w$

   d. $2u$ e. $-3u$ f. $-v + \frac{2}{3}w$

3. Dados los puntos $A = (1;3;7)$, $B = (-1;\ 3;\ 0\ )$ y $C = (3;-4;11)$:

   a) Hallar los vectores $AB = B - A$, y $BC = C - B$.

   b) Hallar el punto medio entre los puntos A y B.

4. Sean $v = (1;-2;\ 2)$ y $w = (2;0;3)$. Realizar las siguientes operaciones:

   a. $w \cdot v$ b. $v \cdot v$ c. $(w + v) \cdot w$ d. $(3v) \cdot (v - w)$

5. Calcular el módulo de los siguientes vectores: $(1;2)$, $(-1;3\ )$ de $\mathbb{R}^2$ y $(0;1;2)$; $(-1;1;1)$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Obtener 2 vectores perpendiculares a $(3;2;7)$ que no sean múltiplos entre sí.

7. Dados $u = (3;\ 2;-1)$ y $v = (0;1;2)$, encontrar:

   a. El ángulo entre u y v. b. El módulo de $u - v$. c. Un vector ortogonal a u y también a v.

8. Determinar la distancia de $(2;-3)$ a $(5;3)$ y de $(1;2;3)$ a $(4;\ 1;-2)$.

9. Sean a y b vectores de $\mathbb{R}^3$. Se sabe que $|a| = 1$ y $|b| = 3$. ¿Puede ser el producto escalar $a \cdot b = 5$? ¿Por qué?

10. Calcular los siguientes productos vectoriales:

    a. $(3;\ 5;-1) \times (7;4;3)$ b. $(2;0;0) \times (0;0;3)$

11. Calcular $(2;\ 1;-3) \times (1;-2;\ 1)$ y verificar que el resultado es un vector perpendicular a $(2;\ 1;-3)$ y a $(1;-2;\ 1)$.

12. *a*) Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3;-1;4)$ y es paralela al vector de coordenadas $(-1;5;4)$. (Escribirla de las tres formas estudiadas).

    b) Localizar y graficar 3 puntos de la recta del ítem anterior.

13. Decidir cuáles de los puntos $(1;2;0)$, $(1;2;3)$, $(3;-1;3)$ y $(1;10;8)$ pertenecen a las rectas

$$(\ 1\ ;\ 2+\lambda\ ;\ \lambda\ ) \qquad ; \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{3} \qquad ; \qquad \begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-3\lambda+2 \\ z=3\lambda \end{cases}$$

14. Dados los puntos $A=(2;-1;3)$ y $B=(0;4;1)$

    a) Determinar alguna ecuación de la recta que pasa por A y B.

    b) Hallar alguna ecuación de la recta que pasa por A y tiene la dirección del vector B.

Bibliografía

- Tom Apostol, Análisis matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1996.
- Richard Courant; John Fritz. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. 1 Editorial Limusa. México, 1994.
- Marcela Falsetti; Leopoldo Kulesz; Mabel Rodríguez. Guías de matemática para el curso de aprestamiento universitario, Módulos I, II y III. SMD No 6, I II y III. Publicaciones de la UNGS.
- Alejandro García Venturini; Axel Kicillof. Análisis Matemático 1, Economizarte, 2000.
- Miguel de Guzmán. Matemáticas I: Opciones A y B. Grupo Editorial Anaya. 1996.
- Miguel de Guzmán; J. Colera, Matemáticas 1 – C.O.U., Ed. Anaya, 1989.
- Ricardo Noriega. Cálculo diferencial e integral. Editorial Docencia. 1979
- Julio Rey Pastor; Pedro Pi Calleja; César Trejo. Análisis Matemático I. Editorial Kapelusz.
- Paul Samuelson; William Nordhaus. Economía, 16ta edición, McGraw Hill 1999,
- Michael Spivak, Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté. Barcelona, 1998.
- Earl W. Swokowski; Jeffrery A. Cole. Algebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1996.
- Earl W. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1989.