Objetos matemáticos y su aprendizaje:

un recorrido con "obstáculos"

Especialización en Didáctica de las Ciencias con Orientación en Matemática

Alumno: José Nicolás Kranewitter

Director: F. Alberto Formica

Universidad Nacional de General Sarmiento

Fecha: febrero de 2014

Resumen

En este trabajo abordaremos tres problemas de la Educación Matemática. Haremos el análisis de los mismos desde el punto de vista de los obstáculos epistemológicos. Involucraremos, también, la importancia de la imagen conceptual y de los sistemas y registros de representación.

Palabras claves: obstáculos, obstáculos epistemológicos, sistemas de representación, registros de representación, imagen conceptual, conceptos y objetos matemáticos.

Abstract

In this paper, we approach three problems about Mathematical Education, analyzing them from the standpoint of epistemological obstacles. We also involve the importance of the conceptual image and the systems and representation systems.

Key words: obstacles, epistemological obstacles, representation systems, representation records, conceptual image, mathematical concepts and objects.

Índice

1. Introducción

"Al infinito y más allá": una frase muy conocida por los más chicos. Desde pequeños escuchamos la palabra infinito y la asociamos al concepto de que algo no se termina: como el universo. Sin embargo, uno de los principales inconvenientes que encuentran los alumnos de matemática cuando comienzan sus estudios en cálculo, es la dificultad en el desarrollo de la noción mencionada: el infinito. Cabe destacar que estas dificultades no son específicas de un alumno en particular, sino que todos los que estudiamos matemática, en nuestro proceso de aprendizaje, sufrimos esta crisis.

Es objetivo de este trabajo integrar elementos teóricos del análisis del conocimiento con algunos objetos matemáticos particulares, para luego proponer preguntas simples, pero que sean anticipadoras de posibles errores por conceptos con definiciones incompletas o erradas. Se espera que las respuestas a estas preguntas promuevan el aprendizaje de los alumnos. Las propuestas suponen inspiración en la solución de problemas comunes y en la construcción de conceptos. Es deseado lograr que nuestros alumnos alcancen un aprendizaje adecuado para eliminar posibles contradicciones en sus respuestas, causadas por malinterpretaciones o asimilación incompleta (o inadecuada) de objetos matemáticos.

Vamos a citar y opinar acerca de algunos conceptos de la educación matemática para tratar de entender el por qué los alumnos devuelven respuestas que pueden ser erradas. Hay situaciones en las que los errores no surgen por falta de conocimiento de un concepto matemático, sino que tal vez el conocimiento sobre ese concepto esté incompleto. Rescataremos en esta instancia la idea que se denomina *imagen conceptual*.

Otro análisis que consideramos pertinente hacer, será referido al por qué podemos concebir nociones de un cierto concepto matemático en forma incompleta o pasible de generar errores esperables. En esta instancia vale rescatar la noción que se denominó *obstáculo epistemológico*.

Resulta además interesante pensar cómo se podrá trabajar para conseguir una definición adecuada de los conceptos, que no encuentre contradicciones en diversos contextos de trabajo, y para ello vamos a destacar lo que se denomina: *sistemas de representación*

Con la lectura de este trabajo, se espera que los interesados se vean motivados a revisar su propia práctica docente, tanto para el análisis didáctico de los ejercicios propuestos, como también para observar los errores de sus alumnos -desde una perspectiva superadora- que evidencien patrones comunes en el razonamiento de los mismos; y así analizar posibles obstáculos en la construcción del conocimiento.

2. Contexto del trabajo

Vamos a concentrar este trabajo principalmente en cuestiones que se observan en alumnos que cursan sus primeras materias en la universidad, los cuales ya tuvieron un trayecto con trabajo matemático y tienen construidos conceptos particulares. Se presentarán tres afirmaciones puntuales que en general los estudiantes asumen intuitivamente por sus experiencias previas:

- ✓ $0,\widehat{9}$ es un valor menor que 1
- ✓ Una función es continua si y sólo si su gráfica es una curva “arco-conexa” (*sin interrupciones*)
- ✓ Las asíntotas son rectas a las cuales las gráficas de las funciones “se acercan, pero nunca las tocan”

Estas tres afirmaciones las podemos apreciar en las prácticas áulicas en clases de matemática. Intentaremos encontrar explicación a los motivos por los cuales surge este problema, sosteniéndonos en constructos teóricos presentados en artículos de autores que coinciden en estas observaciones.

Nuestros alumnos pueden traer consigo conocimientos incompletos, intuitivos o bien contextualizados en casos particulares que hasta pueden crear contradicciones en una generalización. En ocasiones, cuando se les pide a los alumnos que definan un determinado concepto, lo hacen justamente con ejemplos o bien con algunos atributos particulares. Por ejemplo: la repuesta a la pregunta: ¿qué es una asíntota? podría ser “un valor al cual la función se acerca, pero que no lo toma”

3. Consideraciones teóricas

3.1. ***Obstáculos en la educación matemática***

Una de las aspiraciones que tenemos los docentes es que los alumnos puedan aprehender los objetos matemáticos y todos sus alcances en el trabajo matemático. Lamentablemente vemos que, muchas veces, esto no ocurre y, tanto en la práctica de los alumnos como en las propias, descubrimos que en ocasiones la idea que tenemos de algún concepto puede generar errores y contradicciones. Luego debemos mejorar la noción que tenemos de ese concepto. Los errores que surgen de una construcción incompleta de un conocimiento, no son imprevisibles, sino que se constituyen en lo que se denominan **obstáculos**. Brousseau (1983) comenta que el error no debe reducirse simplemente a la idea de ignorancia o de una incerteza, sino que es efecto de un conocimiento anterior que, ahora, se revela falso o inadecuado.

Podría existir entonces una multiplicidad de obstáculos en la construcción de los conceptos. Bachelard (1972) propuso reflexiones filosóficas identificando varias clases de obstáculos en el pensamiento científico, sosteniendo que no se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer que aparecen, por una suerte de necesidad funcional, las lentitudes y las dudas. Agrega además que es ahí donde aparecen las causas de estancamiento y aún de regresión. Es ahí que desaceleran las causas de inercia y los denominó **obstáculos epistemológicos.** En nuestro proceso de aprendizaje, buscamos la generalización, a partir de casos particulares para desarrollar un conocimiento, y este método puede acarrear que dicho conocimiento quede incompleto. Bachelard (1972) aclara que en el desarrollo del pensamiento científico, los obstáculos epistemológicos pueden darse por la tendencia a confiar en experiencias intuitivas engañosas, tendencias a generalizar ocultando la particularidad de situaciones u obstáculos generados por el lenguaje general.

Las teorías en educación matemática, en su generalidad, plantean que el conocimiento se construye, y es a partir de situaciones y problemas particulares en los que cobra sentido apoderarse de un cierto concepto. Es probable que cuando desarrollamos nuestras prácticas para que los alumnos generen un cierto aprendizaje, podamos fomentar que los alumnos construyan conocimientos truncos. Bachelard (1972) destacó que se podían observar obstáculos en la educación que denominó **obstáculos didácticos**. Sostuvo que profesores de ciencias, más que los de otras áreas, no comprendían que no se comprendiera. Bachelard (1972) destaca que los profesores tienen poca reflexión del hecho que el adolescente llega a una clase de ciencias con conocimientos empíricos ya constituidos: se trata entonces no de adquirir una cultura experimental, sino más bien de cambiar de cultura experimental, de reconvertir los obstáculos ya asimilados por la vida cotidiana. Propone un ejemplo: el equilibrio de cuerpos flotantes -hecho que es objeto de una intuición familiar- es un tejido de errores. Si se ensaya con la mano hundir un trozo de madera en el agua, éste resiste. No se atribuye, fácilmente, a la resistencia del agua. Es entonces difícil hacer comprender el principio de Arquímedes en su simplicidad matemática si primero no se ha criticado y desorganizado el complejo impuro de las primeras intuiciones. En particular, sin este análisis de errores iniciales, no se hará comprender jamás que el cuerpo que emerge y el cuerpo completamente sumergido obedecen a la misma ley.

Diferentes obstáculos destacables en la educación matemática

Como mencionamos anteriormente, los principales conocimientos se van construyendo a través del contacto que tenemos con los objetos propiciados por la experiencia. Bachelard (1972) define **los obstáculos en conocimientos previos** como los generados por el primer acercamiento a los objetos, influenciado por las experiencias concretas y el entorno. Asevera también que en la formación del espíritu científico, éste es el primer obstáculo que aparece en la experiencia básica. Es un ejemplo de esto cuando consultamos: ¿Qué es la recta tangente?, y la respuesta es: "la recta que toca sólo en un punto a la curva". Aquí no se hace referencia al concepto, sino a un atributo que tiene el objeto en un contexto particular como es, por ejemplo, la recta tangente a una circunferencia, que tal vez sea el primer acercamiento al concepto.

En la introducción comenzamos con la frase "al infinito y más allá". Esta famosa frase que se hizo conocida a partir de una película infantil, podría lograr que incorporemos la palabra "infinito" en nuestras mentes, y que a partir de allí generemos una concepción primitiva de este concepto. Bachelard (1972) propone en la clasificación de obstáculos a **los obstáculos en las concepciones espontáneas**. Estos obstáculos son aquellos que se forman por las percepciones sensoriales que determinan el conocimiento marcado por un contexto. Por ejemplo si se pregunta: ¿Qué es el límite?, podría ocurrir que la respuesta tenga que ver con un lugar del que no se pueda pasar, o bien una frontera. Ésta es una definición que poco tiene que ver con la definición de límite funcional. Pueden existir obstáculos generados por un conocimiento general, en donde las concepciones del objeto son vagas y carecen de exactitud. Si se pregunta qué es un cuadrado, la respuesta rápida podría ser: es una figura que tiene cuatro lados iguales. Pueden existir obstáculos generados por un conocimiento pragmático o utilitario, que reduce la explicación de un concepto a su utilidad. Por ejemplo, si preguntamos: ¿Qué es el seno de un ángulo?, la respuesta podría ser que es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

En las prácticas específicamente en matemática, se pueden encontrar una variedad de obstáculos que se evidencian a través de contradicciones. Brousseau (1983) comunica que identificó diversas manifestaciones de los obstáculos cognitivos a través de los errores. Éstos están ligados por una fuente común, una manera de conocimiento, una concepción característica, antigua y que ha sido exitosa en todo su dominio de acciones. Suelen ser persistentes y resistentes a modificaciones y resurgen a pesar de que el sujeto perciba un modelo defectuoso. Brousseau (1983) propone el ejemplo siguiente: "si el término general de una serie tiende a cero, entonces la serie converge" y se pregunta si acaso es producto de una distracción, si es una mala recitación de la relación antecedente-consecuente, si comprendió mal la noción de límite (o bien de series), o si es que acaso existe un error referido a las situaciones de condiciones suficientes o necesarias. Sostiene que el razonamiento falaz se puede remontar a un error en la representación de los números reales acarreado de una educación anterior.

Brousseau (1983) profundizó el concepto de los obstáculos en la educación matemática y supone que se podrán encontrar sus orígenes en alguna de las siguientes categorías: de origen *ontogenético*, *didáctico* o *epistemológico*.

Los **obstáculos de origen ontogenéticos:** surgen por las limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo. Brousseau (1983) sostiene que, según la epistemología genética, se evidencian etapas, acomodamientos y asimilaciones, que, a la vez, se asemejan a las etapas del desarrollo de los conceptos por las leyes de regulación que los hacen aparecer, y difieren de ellas por la naturaleza exacta de las limitaciones que determinan esas regulaciones. Para un niño, las figuras rectangulares se las clasifica como cuadrados. No asimila aún la relación de las longitudes de los lados.

Los **obstáculos de origen didáctico:** como mencionamos con anterioridad, estos obstáculos suelen surgir en las prácticas docentes. Brousseau (1983) piensa que los obstáculos de origen didáctico dependen sólo de una elección o de un proyecto de sistema educativo. Un ejemplo de esto puede ser el siguiente: cuando se presenta la noción de límite de funciones reales en un punto, se suele pedir que se complete una tabla de manera de obtener imágenes de valores cada vez más cercanos a un valor determinado. Luego este acercamiento intuitivo puede generar conflictos en el desarrollo de la definición.

Los **obstáculos de origen propiamente epistemológico**: son aquellos que surgen del rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Brousseau (1983) propone que pueden ser encontrados en la historia de los conceptos mismos, aunque esto no significa que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos. Un ejemplo puede ser la noción de continuidad de una función, que se desarrollará particularmente en un apartado de este trabajo.

Entendiendo la noción de obstáculos, podemos comenzar a tener una mirada diferente de los errores de nuestros alumnos, pudiendo imaginar una anticipación a ellos e imaginar propuestas que, justamente, los aprovechen para mejorar los conocimientos.

3.2. *Sistemas y registros de representación semiótica*

Los sistemas de representación son aquellos que engloban al conjunto de imágenes y concepciones que tenemos de un objeto, situación y toda relación asociada a ellos. Las representaciones se las denominan a aquellas que están constituidas con un significado específico. Por ejemplo, el símbolo: 3,5 es una representación semiótica de un número racional, sin embargo el símbolo 3,50,1 no lo es, porque carece de significado. Duval (1996) sostiene que las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Agrega que no se puede proceder con las representaciones semióticas como simples representaciones mentales, ya que se corresponden con ciertas funciones cognitivas esenciales, como por ejemplo el tratamiento que se le da a los objetos matemáticos y a uso que de ellos se hace.

Para que un sistema de representación semiótica tenga la categoría de **registro**, debe permitir: la formación de una representación identificable dada por la formación de un registro semiótico, el tratamiento de la representación dentro del mismo registro mediante reglas y por último, la conversión de un registro a otro. Por ejemplo, un registro puede ser la notación decimal de un número racional, que tiene una formación semiótica específica por el sistema posicional, admite sus reglas para el trabajo con distintos números. Además admite el pasaje a otros registros de representación, como por ejemplo a expresiones fraccionarias o notación científica, etc. Duval (1996) destaca la necesidad del uso de varios registros de representación por las características naturales del funcionamiento del pensamiento humano. El hecho de que existan registros de representación se justifican por tres razones:

- ✓ cada uno de ellos aporta procedimientos posibles que implican economía de tratamiento,
- ✓ los registros se complementan, en el sentido que cada uno de ellos marca una representación parcial del objeto que representa, y
- ✓ encapsular un concepto implica la coordinación de registros de representación.

Duval (1996) comenta que en general no existen reglas de conversión entre registros, es por eso que se suele evitar una explicación detallada y una enseñanza explícita de la coordinación entre distintos registros de representación. Luego propone que se deberían diseñar tareas promovedoras de ello que podrían encuadrar en alguno de los siguientes tipos:

- Aprehensión de representaciones semióticas, observando el impacto que tendrían variaciones de un registro en el otro.
- Conexión y desconexión entre tratamientos semióticos y no semióticos: en general se tiende a utilizar registros simbólicos que facilitan el cálculo, y se atiende muy poco al tratamiento en registros figurales o pictóricos.
- Producción doble para representaciones semióticas complejas: destaca como negativa la idea de *organización semiótica lineal*. Por ejemplo en análisis de funciones, es usual que siempre se recorra el mismo camino: se propone una fórmula, se elabora una tabla de valores y luego se grafica.

3.3. *La imagen conceptual*

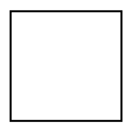
A medida que construimos nuestro conocimiento y nos hacemos de distintos conceptos, los seres humanos creamos una imagen de los mismos en nuestras mentes. Esta imagen es subjetiva y responde a la intuición. El problema es que el conocimiento intuitivo y el formal de los objetos suele diferir. En principio puede ocurrir porque, generalmente, construimos el concepto en forma contextualizada.

Los conceptos matemáticos requieren de una definición rigurosa, sin embargo, en el proceso cognitivo que se atraviesa para la construcción de ellos, existen chances de que se cometan errores y los conceptos pueden quedar mal aprehendidos. Muchos de los conceptos que utilizamos en nuestros comienzos como estudiantes no tienen una definición formal en su totalidad, pero en el transcurso de nuestros estudios se van puliendo y mejorando a medida que los manipulamos en diversos contextos.

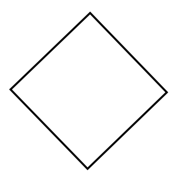
Tall & Vinner (1981) proponen usar el término de imagen conceptual para describir la total estructura cognitiva que se asocia con un concepto, que incluyen todas las imágenes mentales y asocia las propiedades y los procesos. Agregan además que la imagen conceptual se construye a medida que pasan los años, cambiando la individualidad de los elementos y madurando el concepto.

Tall & Vinner (1981) introducen el término de **imagen conceptual evocada:** es la parte de la imagen conceptual que se utiliza. Esto ocurre en diferentes tiempos y suelen causar conflictos cuando se evocan simultáneamente diferentes de estas partes de la imagen conceptual.

Es probable que desde pequeños tengamos la idea de lo que es un cuadrado y seguramente todos lo imaginaremos de la misma manera:



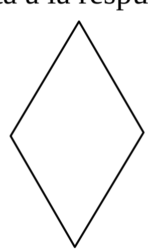
Esta es la imagen conceptual evocada en este momento. Luego se genera un conflicto cuando se quiere clasificar la siguiente figura:



Seguramente nuestra mente nos enviará como primera respuesta: es un rombo.

El conflicto que se genera va superándose cuando agregamos más información del concepto a nuestra imagen conceptual y se concluye: todo cuadrado es un rombo.

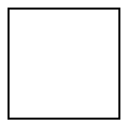
Si pensamos en otra representación, una verbal, también pueden ocurrir conflictos. Si a los estudiantes que están dando sus primeros pasos en geometría les preguntamos: ¿qué es un cuadrado? quizás contesten: "es una figura que tiene sus cuatro lados iguales". Esto puede ocurrir porque trata de dar la definición apelando a su imagen conceptual evocada. Sin embargo el conflicto ocurre cuando se evidencia que esta definición no es rigurosa, ya que la figura siguiente también se ajusta a la respuesta:



Es aquí donde seguimos puliendo el concepto de cuadrado, incluyendo a nuestra imagen conceptual la afirmación “todo cuadrado es un rectángulo”.

Podría surgir un nuevo problema: esta última proposición quizá no se ajuste a la imagen conceptual que teníamos sobre qué clase de figura es un rectángulo.

Este breve ejemplo intenta ilustrar, de algún modo, cómo nuestras mentes hacen referencia a nuestra imagen conceptual en el momento de precisar un concepto. Todos sabemos lo que es un cuadrado, pero como resultado de nuestro proceso cognitivo de la construcción del mismo, se generó una imagen conceptual que evoca información insuficiente:

Un cuadrado es:  (forma pictórica)

O bien: “una figura que tiene cuatro lados iguales” (forma verbal)

A medida que seguimos estudiando, la imagen conceptual va evolucionando hasta completar con rigurosidad el concepto.

Tall & Vinner (1981) sugieren que, siguiendo este camino, una definición personal de un concepto puede diferir de la definición formal de un concepto, el cual se refiere a la definición que acepta la comunidad matemática. Tall & Vinner (1981) sostienen además que para cada definición de un concepto, nosotros tenemos una imagen de la definición del concepto que es, en definitiva, una parte de nuestra imagen conceptual del concepto.

4. El problema $0,\widehat{9}=1$

Vamos a considerar "el problema $0,\widehat{9}=1$" no como un problema matemático en sí, sino como un conflicto que hay que superar: en la imagen conceptual de muchos estudiantes, está instalado que $0,\widehat{9}$ representa a un **número menor que 1**. Cuando pensamos en el orden de los números reales, podemos comenzar con la comparación de ellos, y así podemos decidir si dos números son iguales o distintos. Los que enseñamos Matemática podemos observar, con cierta facilidad, que la comparación de números racionales resulta más sencilla si los números están escritos en su forma decimal que si se los escribiera como fracción. La explicación se debe a la noción del sistema posicional. Si por ejemplo queremos comparar los números 351 y 326, decimos que 351 es mayor que 326, porque el "5" es mayor que el "2" (que están en la posición de las decenas), sin importarnos que en la posición de las unidades pasa lo contrario: el 1 es menor que el 6. Luego trabajamos con números con un desarrollo decimal no nulo: si por ejemplo comparamos los números 2,45231 y 2,4616, resulta que 2,4616 es mayor que 2,45231 porque el 6 que ocupa la segunda posición decimal en el primero de los números es mayor que el 5, y lo que "sigue después" no importa. Es probable que quede en nuestra imagen conceptual que "dos números son iguales si poseen los mismos dígitos en todas sus posiciones, y son distintos si en alguna (o varias) de ellas difieren". Es más, si hay varios dígitos que difieren, "el que nos indica qué número es mayor es el que posee el dígito mayor en la primera posición diferente". Cuando queremos comparar los números $0,\widehat{9}$ y el 1, si evocamos a la imagen conceptual comentada anteriormente, la respuesta debería ser que 1 es mayor que $0,\widehat{9}$, pues "el 1 es mayor que el 0 y lo demás no importa". Estamos aquí ante el problema que hay que superar y que está en relación con el conocimiento del sistema posicional, puesto que los números $0,\widehat{9}$ y 1 son iguales, aunque "difieren todos los dígitos en todas sus posiciones". Vamos a reflexionar sobre este problema (problema en el sentido antes mencionado), que también fue abordado por Tall y Vinner en algún trabajo de investigación, que oportunamente citaremos.

Éste es un conflicto que presenta el sistema posicional de los números cuando se los expresan con infinitas cifras decimales. Me atrevería a decir que se podría proponer este problema desde muy temprana edad y, sin embargo, resultaría muy difícil de sortear. A pesar de diversas pruebas formales que se nos ocurran para probar que el número $0,\widehat{9}$ es igual a 1, habrá gente que no quedará convencida.

Ya desde la educación primaria se plantean problemas en los cuales los números naturales no resultan suficientes para encontrar una solución. Es por ello que debemos considerar, por ejemplo, números que sean más grandes que 1 y más chicos que 2. Ese número será, entonces, de la forma "1 coma *algo*", donde ese *algo* se representa como alguna sucesión de dígitos, que serán los decimales. A partir de esta observación, queda instalada en el estudiante la imagen de que un número de la forma 1,… (indicando con los puntos suspensivos alguna sucesión de decimales) es un número *mayor que 1* y *menor que 2*… pero ¿esto ocurre con cualquier sucesión de números que propongamos detrás de la coma? Parece muy sencillo convencer que si esa sucesión está constituida únicamente por ceros, el número 1,000… no será mayor a uno sino que representa **exactamente** al número 1. Lo que sí resulta complicado (¡¡¡y mucho!!!) es convencer a los estudiantes (y a los otros también…) de que si luego de la coma, la sucesión está formada únicamente por nueves, es decir, el número se escribe 1,999…, ese número **no es menor que 2**. Esto podría ocurrir porque, en la imagen conceptual de la mayoría de los estudiantes parecería estar instalado el hecho que "los números *con coma* **no son enteros**". A partir de esta idea, suele sostenerse que, por ejemplo, $0,\overset{\frown}{9}$ **no puede ser entero** y, como además es de la forma "0 coma *algo*", el número debe ser más chico que 1. Estos estudiantes están convencidos de que la respuesta correcta debería ser, continuando con la lógica de la imagen conceptual evocada: $0,\overset{\frown}{9}$ es menor que 1.

En una experiencia desarrollada con estudiantes de un primer año universitario de Inglaterra, se realizaron preguntas relacionadas con este tema, a partir de las cuales se pudo recabar información muy importante. Al respecto, se señala que se les pidió a los alumnos que respondieran y justificaran si $0,\overset{\frown}{9}$ es igual a uno o es menor que uno. Según los resultados observados, la mayoría de los alumnos afirmaban que $0,\overset{\frown}{9}$ es menor que uno independientemente del método que utilizaran para encontrar su respuesta. (Tall, 1977).

Tall & Vinner (1981) publicaron que a un grupo de alumnos de cursos avanzados de universidad les dieron a responder un cuestionario en el que, entre otras preguntas, pedían calcular límites de diferentes series, entre los cuales figuraba: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}\right)$. También se les pidió que escribieran, en el caso de conocerla, la definición formal del concepto de límite para luego preguntarles si $0,\overset{\frown}{9}$ es igual a 1 o si es menor, fundamentando adecuadamente. Los autores destacaron que catorce alumnos, de un total de treinta y seis, contestaron correctamente que: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}\right)=2$ aunque señalaron, a la vez, que $0,\overset{\frown}{9}$ es menor que uno. Señalaron, también, que las respuestas dadas a la pregunta sobre la relación entre los números $0,\overset{\frown}{9}$ y 1 fueron contestadas en términos de "infinitesimales" afirmando, por ejemplo, que: "$0,\overset{\frown}{9}$ es un poco menor que 1 porque la diferencia entre $0,\overset{\frown}{9}$ y 1 es infinitamente pequeña", o bien, porque "incluso en el infinito $0,\overset{\frown}{9}$ aunque está cerca de 1, técnicamente no es igual a 1".

Los números racionales pueden ser escritos de diferentes maneras: con su desarrollo decimal o como fracción. De allí, hay actividades en Matemática en las que se propone escribir una fracción como un número decimal o viceversa: un número decimal, escribirlo en su notación fraccionaria. Justamente este último ejercicio permite ver que si escribimos el número $0,\overset{\frown}{9}$ con su desarrollo decimal, éste resulta exactamente 1. Sin embargo, esta prueba puede no convencer al alumno. Tall & Vinner (1981) destacaron algunas respuestas de los estudiantes al solicitar que escribieran como fracción los números $0,\overset{\frown}{3}$ y $0,\overset{\frown}{9}$. Algunas de estas respuestas fueron:

A) $0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$

$0,\overset{\frown}{9} = 3.0,\overset{\frown}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = absurdo$

B) $0,333... = \frac{1}{3}$ *no es fracción* (esta respuesta fue anulada)

C) $0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$

$0,\overset{\frown}{9} = 1$ *o* (*no existe*)

D) $0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$

$0,\overset{\frown}{9} = 0,999$

E) $0,\overset{\frown}{3} = \frac{1}{3}$

$0,\overset{\frown}{9} \approx 1$

En estas respuestas se evidencia el conflicto que existe con la afirmación "$0,\overset{\frown}{9}$ = 1", a partir de que sólo en una de ellas aparece una referencia a esa igualdad, aunque también se deja ver la duda sobre esa decisión, al plantear la posibilidad de que $0,\overset{\frown}{9}$ **no exista**. Esto podría estar asociado a la imagen conceptual que los estudiantes tienen del concepto del límite de una sucesión "$s_n \to s$". Tall & Vinner (1981) exhiben la respuesta que uno de sus alumnos propuso, la cual expresa que "$s_n \to s$ significa que "s_n se acerca a *s* para valores de *n* grandes, pero en realidad no llega a ser *s* hasta el infinito" a partir de la cual, puede interpretarse que la imagen conceptual sobre el límite de una sucesión que poseen los estudiantes es "s_n se **aproxima** a *s*, pero **nunca llega a tomar el valor** *s*" Teniendo en cuenta esto, los autores hacen notar que en el caso del número periódico $0,\overset{\frown}{9}$ no lo consideran igual a uno porque, justamente, y en relación con lo afirmado anteriormente, los estudiantes observan que "el proceso de acercarse al uno" **no queda completo**, pues nunca se llega a alcanzarlo, lo que los conduce a la decisión incorrecta de que ambos números (el $0,\overset{\frown}{9}$ y el 1) no coinciden.

La imagen conceptual del concepto de convergencia entre una sucesión s_n y su límite *s*, es decir, de la relación "$s_n \to s$" se hace presente en muchos de los conflictos a los cuales se enfrentan los alumnos. Un ejemplo que nos parece importante destacar, puede ser la concepción que los estudiantes tienen de las *asíntotas*, que detallaremos en el próximo apartado de este trabajo.

Dada la importancia del tema, es una inquietud desde la enseñanza de la Matemática generar actividades que promuevan acciones que intenten superar estos conflictos que hemos señalado en relación con los números periódicos, sobre todo aquellos que tienen desarrollos decimales que cuentan al 9 como única cifra periódica. Lograr que los alumnos reconozcan la igualdad $0,\overset{\frown}{9} = 1$ permite ver de una manera más amplia a los números racionales y su expresión decimal, a partir de encontrar una "doble escritura" para muchos números como, por ejemplo, $2,\hat{9} = 3$, $5,3\hat{9} = 5,4$ ó $3,125\hat{9} = 3,126$ entre otros. Presentamos a continuación algunas actividades que muestran un tipo de trabajo con el que podría abordarse el tema, en distintos niveles de escolaridad, y que tienen la intención de hacer reflexionar a los estudiantes sobre:

- la necesidad de contar con la herramienta de la "doble escritura" ante la imposibilidad de operar con números expresados en forma decimal como los mencionados,

- la importancia de recuperar el trabajo sobre la "densidad del conjunto de los números racionales", entendida desde el hecho de que entre dos números racionales distintos existe otro número racional.

En este sentido, observando previamente la propiedad de densidad de los números reales, proponemos la siguiente actividad:

Actividad 1

"Determinar, si es posible, un número racional mayor que 0,999… y, a la vez, menor que 1".

Con esta actividad, se espera que los estudiantes, ante la imposibilidad de encontrar un número como el pedido, se planteen la inquietud de investigar cuál es la causa. Lo que se espera es que la conclusión a la que arriben les permita observar que no pueden hallar tal número porque los números dados **no son distintos**.

Actividad 2. Resolver las siguientes operaciones:

i) $$\begin{array}{r} 1,245 \\ \underline{-\,0,737} \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{r} 1,000 \\ \underline{-\,0,777} \end{array}$$

$$\text{iii)}\quad \begin{array}{r} 1,00000... \\ \underline{-\,0,77777...} \end{array}$$

$$\text{iv)}\quad \begin{array}{r} 1,00000... \\ \underline{-\,0,99999...} \end{array}$$

Se proponen los primeros tres ejercicios para rescatar la resta de números decimales, con la necesidad de "reescribir el minuendo" para poder realizarla (con lo que vulgarmente se le dice "pedir al compañero"), haciendo uso de las propiedades del sistema posicional. Luego se debería observar que al "reescribir el minuendo", éste no se modifica.

Se espera que los alumnos terminen determinando que esa resta no puede ser distinta de 0, ya que el minuendo queda exactamente 0,9999… Así, se concluye que $0,\overset{\frown}{9}$ es igual a 1.

De esta manera, se puede rescatar la posibilidad de una doble escritura del número decimal con el objetivo de resolver operaciones con infinitos decimales. Por ejemplo, para resolver 2,6 – 1,455555…, podemos escribir el 2,6 como 2,599999. De este modo resultan equivalentes las operaciones:

$$\begin{array}{r} 2,6 \\ \underline{-1,455555...} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} 2,599999... \\ \underline{-0,455555...} \end{array}$$

Aunque la práctica dirá que lo más conveniente será operar estos números expresados en su forma fraccionaria.

Actividad 3

Propongan un número que verifique:

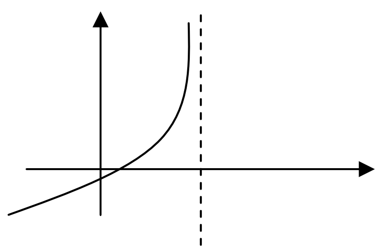
$$\begin{array}{r} 0,99999999... \\ \underline{+......................} \\ 1,00000000... \end{array}$$

Se espera que los alumnos determinen que si se propone un número distinto de cero en el desarrollo decimal del sumando buscado, el resultado será seguro mayor que uno.

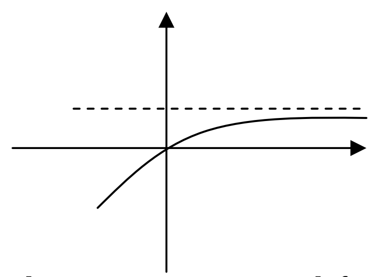
5. El problema de las asíntotas

En general, la primera vez que un estudiante necesita acercarse al concepto de *asíntota* es en el contexto del estudio de las funciones racionales, logarítmicas y exponenciales. También es probable que antes de ello, en la escuela media algún profesor haya presentado un gráfico para realizar un análisis “cualitativo” de una función, a partir del cual se pretende determinar, entre otras cosas: máximos, mínimos, dominio, imagen, etc. Allí podrían haberse observado, representadas en diversos gráficos, las asíntotas verticales u horizontales como “líneas punteadas”, alguna de las cuales podrían indicar que habría elementos (que podrían ser del dominio o de la imagen) que no se debían considerar.

A medida que se avanza en el *estudio de funciones* y ya desde una mirada más “analítica”, comienzan a aparecer nuevamente situaciones en las que se requiere del concepto de asíntotas, como dijimos, en contexto del análisis de algunas funciones particulares como las funciones racionales, exponenciales y logarítmicas que antes hemos mencionado. En muchas de estas funciones ocurre que la curva (gráfica de la función) en el plano **no corta a la asíntota**. Esto podría provocar que la imagen conceptual en torno del concepto de *asíntota de una función* se asocie a las siguientes situaciones:



o bien



A partir de ello, suele observarse que en el estudiante *se genera* una “definición” de asíntota que podría sintetizarse como “la recta a la cual la curva se acerca todo lo que se quiera pero sin tocarla ni cruzarla”. Esta frase puede corresponderse con la imagen conceptual que el estudiante posee de ese concepto y, como tal, es muy probable que sea esa la frase que se “le venga a la mente” cuando necesite operar con él. Luego de ese primer acercamiento al estudio de las asíntotas, cuando se comienza a trabajar con límites, surge el conflicto al proponerse estudiar el comportamiento de las curvas “en el infinito” y se considera el caso de la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=sen\left(\frac{1}{x}\right)$: la gráfica de esta función se “acerca” a la recta horizontal $y = 0$ “tanto como se quiera”, pero, en este caso **sí** “la toca” (es decir: $y = 0$ pertenece a la imagen de la función). Entonces… ¿Es esta recta una asíntota?

Esto podría tomarse como un disparador de algunas preguntas, por ejemplo ¿Qué significa etimológicamente la palabra asíntota?

De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española, obtenemos la siguiente definición:

> **Asíntota.** (Del gr. ἀσύμπτωτος, que no coincide).
>
> f. *Geom.* Línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla. (Real Academia Española).

Por otro lado, un análisis de la palabra nos permite observar que asíntota se conforma como a-síntota, donde: "a" significa "sin" y "síntota" significa "coincidencia" (síntesis), lo que nos permite observar que el nombre del concepto se define a partir de un "atributo" del elemento al que hace referencia.

Otro caso particular:

Pensemos en la siguiente sucesión de números naturales: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Se puede probar que esta sucesión es estrictamente creciente. Además es acotada (en particular sus términos están todos entre 0 y 3). A partir de propiedades de las sucesiones de números reales podemos, entonces, afirmar que esta sucesión es convergente. Puede verse que su límite es el número llamado "*e*", que entre sus características tiene la de ser un número irracional, cuyas primeras cifras son 2,71828182845904… Como *e* es el límite de la sucesión, resulta ser un punto de acumulación (aglomeración) de la sucesión. En este caso ocurre, además, que el número *e* **no** es un elemento de la sucesión, por lo que representa un número que nunca podrá ser "alcanzado" por la sucesión.

A propósito de esto, consideremos ahora la función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

A partir de un análisis de esta función, podremos verificar que es una función estrictamente creciente que posee a la recta de ecuación $y = e$ como una asíntota horizontal, ya que *e* es un punto de acumulación y, además, satisface la definición de asíntota con la que, usualmente, se trabaja en los cursos de Cálculo. En este caso, nuevamente ocurre que las imágenes de *f* nunca toman el valor *e*, lo que refuerza la imagen conceptual que, sobre el concepto, está en el "colectivo" de los estudiantes, tal como mencionamos.

Retomando el caso de la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, es esperable que los estudiantes se planteen la pregunta ¿Podemos decir que la recta de ecuación $y = 0$ **no** corresponde a una asíntota horizontal de la función porque **no verifica** lo observado en las situaciones anteriores, en las quela curva "**no toca la recta asíntota**"? Evidentemente, no alcanza con mirar si una recta "toca" o no a la gráfica de una función para determinar si es o no asíntota de la misma. Evidentemente, hay que recurrir a la definición del concepto para verificarlo, más allá de que esto se oponga a la imagen conceptual del estudiante. Como paso previo, y para continuar con el trabajo relacionado con la condición de que "una recta sea tocada o no por la gráfica de la función" para ser una de sus asíntotas (en caso de tenerla), podría preguntarse ¿Por qué la recta $y = 3$ no es asíntota de la función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$? ¡Si cada vez me acerco más y ambas curvas no se tocan!

¿En qué se diferencian, en el contexto del estudio de la función, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, la recta $y = e$ y la recta $y = 3$?

Al pensar en esta diferencia podría estar una de las claves: La recta $y = 3$ está "más lejos" de la gráfica de la función que la recta $y = e$. Es decir que la "diferencia" entre la gráfica de la función f y la recta $y = e$ no sólo cada vez es **más pequeña a medida que *x* aumenta más y más** sino que, además, la función se acerca a ella tanto como quisiéramos. En otras palabras, si "en el infinito" quisiéramos aproximar a nuestra función con una recta, ésta sería justamente la de ecuación $y = e$, pero para ello, deberíamos acudir a alguna definición formal de asíntota, expresada en términos del concepto de límite de una función.

Expresado en símbolos, lo que se verifica es que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0 / x > n \Rightarrow \left| f(x) - e \right| < \varepsilon$, que representa la definición de que el número e sea el límite, en el infinito, de la función f, es decir : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$

En conclusión, debemos acudir a la definición del concepto de "asíntota horizontal" para una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que expresa que dicha función tendrá una asíntota horizontal de ecuación $y = k$ para valores positivos del domino (o "a derecha" o "en más infinito") si y sólo si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ De modo análogo se define que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendrá una asíntota horizontal de ecuación $y = k$ para valores negativos del domino (o "a izquierda" o "en menos infinito") si y sólo si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$

¿Cuál será entonces el concepto de asíntota oblicua?

La idea es analizar si para una cierta función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe una recta de ecuación $y = m.x+b$ a la cual "podamos acercarnos todo lo que queramos", ya sea para valores positivos o negativos del domino. Si esto fuese posible, podremos decir que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendrá una asíntota oblicua de ecuación $y = m.x+b$ para valores positivos del domino (o "a derecha" o "en más infinito") si y sólo si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0$. De manera análoga podríamos definir el comportamiento con elementos negativos.

Aparentemente este concepto tiene que ver con dominios no acotados, es decir con el infinito… ¿Se podría pensar en la existencia de asíntotas de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$?

Seguramente que no si las rectas son de la forma $y = m.x+b$. Pero ¿son éstas las únicas rectas que se pueden definir en el plano? La respuesta es que no… También pueden definirse rectas verticales, no contempladas en las ecuaciones de la forma $y = m.x+b$: son las rectas dadas por ecuaciones de la forma $x = k$, donde k es un número real. Un ejemplo de esta situación se tiene redefiniendo alguna función con asíntota vertical, a un “dominio acotado”, como puede ser el caso de la función $f:(-1,0)\to\mathbb{R}$, definida por la expresión $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Esta función es un “recorte” de la función racional “más conocida” que posee una asíntota vertical en $x = 0$, que está definida como $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Podemos ver en este último ejemplo, que si tuviésemos que elegir la recta *que más se parezca a la función f*, analizando elementos cercanos a $x = 0$, encontramos que es justamente la recta de ecuación $x = 0$.

Evidentemente ahora el pensamiento del “infinito” es “para arriba” (o “para abajo”), es decir, que $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ y también, si analizamos elementos negativos del dominio, observamos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, con lo que decimos, entonces, que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$. A partir de este análisis, la función “recortada” mencionada, $f:(-1,0)\to\mathbb{R}$, definida como $f(x)=\frac{1}{x}$, tiene asíntota vertical de ecuación $x = 0$, pero sólo para valores negativos, porque así está definida la función, es decir, sólo se da la situación $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

Finalmente ¿se puede concluir que una función f tiene asíntota vertical en un cierto valor $x = a$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$?

Si la respuesta fuera afirmativa: ¿Tiene asíntota vertical en $x = 0$ la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$? Por supuesto que sí, pero el comportamiento asintótico **no se da a ambos lados** del valor $x = 0$, sino sólo “por la derecha” pues $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, pero $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

Evidentemente las asíntotas verticales están asociadas a los límites laterales. Es más, considerando el disparador del problema que planteamos en este apartado, que es la imagen conceptual generada a partir de la expresión “la curva se acerca a la asíntota pero no la toca”, puede también darse ejemplos de funciones que tienen asíntotas verticales en un cierto valor $x = a$ y sin embargo estar definida en ese valor, es decir, funciones para las que también existe $f(a)$ aunque en $x = a$ tenga una asíntota vertical. Un caso que verifica estas condiciones podría ser el de la función: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$. Está definida en

$x = 0$ y sin embargo tiene una asíntota horizontal de ecuación $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.

En definitiva, queda definido que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = a$ si y sólo si se verifica **alguna** de las siguientes situaciones:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

y esto, más allá de que $x = a$ sea o no un punto del dominio de la función.

Queda en evidencia que el concepto de *asíntota* **no queda definido** diciendo que es la recta con la propiedad de que *la curva se acerca a ella y no la corta* pues esta característica se basa en un "atributo irrelevante" que sólo existe en algunos casos particulares. Hay que tener en cuenta que esta característica puede estar en la imagen conceptual del concepto que posee el estudiante, y es justamente sobre esta imagen conceptual que hay que apuntar, desde la enseñanza, para la evolución del concepto.

6. El problema de las funciones continuas

Cuando se comienza con el estudio de funciones, más precisamente al estudiar el concepto de continuidad, suele quedar en nuestra imagen conceptual la siguiente situación:

En la figura I) hay un gráfico de una función que no es continua. En la figura II) hay otro de una función que sí lo es:

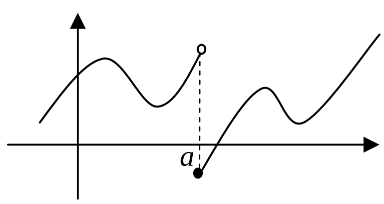


Figura I)

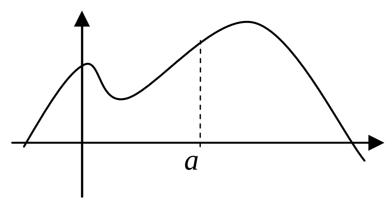
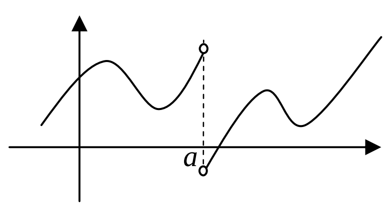


Figura II)

Si nos preguntamos por qué esto es así, la respuesta es "en la figura I) la curva que describe la función está "cortada" en $x = a$ y en la figura II) no. En este contexto, la respuesta es correcta, porque a es un elemento del dominio de estas funciones. Vamos a considerar como un problema al hecho de que en la imagen conceptual quede instalado que "toda función cuya gráfica está cortada es discontinua".

Este es un obstáculo que se puede observar con relativa facilidad. Supongamos que a nuestros alumnos les presentamos el siguiente gráfico:



Luego les preguntamos sobre continuidad de la función. Seguramente la respuesta será que no es continua, y el argumento posiblemente sea que la curva se corta en el punto a. En este contexto la respuesta es incorrecta, y el argumento es falso, dado que para entender la continuidad, nosotros proponemos como definición que: una función es **continua en un punto *a* de su dominio** si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Luego f **es continua** si y sólo si es continua en todo punto de su dominio. En este ejemplo, los alumnos podrían no tener en cuenta que a **no pertenece** al dominio de la función. Aquí podría considerarse como otro obstáculo el hecho de que, por lo general, los estudiantes no consideran a los conjuntos "dominio y codominio" como elementos centrales en la definición de función.

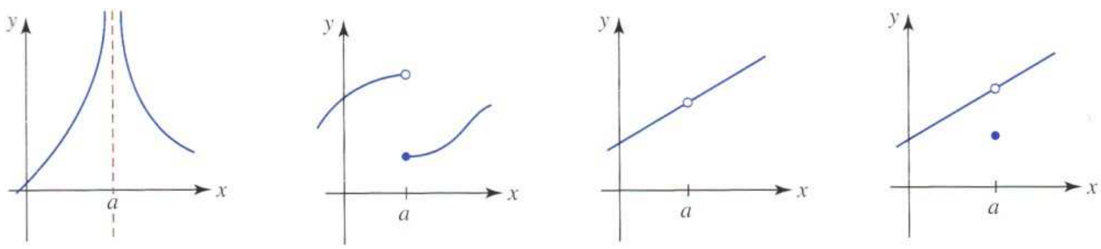
El disparador para este estudio tiene que ver con la definición del concepto de continuidad observado en un libro de Cálculo de una Variable. Éste introducía el tema con el siguiente párrafo:

> En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase *estos puntos se unen con una curva suave*. Esta frase invoca la imagen que es curva continua agradable; en otras palabras una curva sin rupturas ni huecos (Zill *et al*, 2011, p. 81).

Es usual comenzar con frases de este tenor para introducir el tema de continuidad de funciones, pero debemos estar atentos de no crear un concepto equivocado. Cuando pensamos en funciones continuas, generalmente la primera idea que se nos viene a la mente son aquellas funciones que tienen como gráfico curvas que “no producen un salto”, que “no se cortan”, que “son suaves”, etc. Es así que, a partir de la presentación del tema ya sea en los libros de texto o en el tratamiento en una clase, se puede crear en el estudiante una imagen conceptual que puede generar obstáculos para un posterior entendimiento.

Hasta lo que hemos mencionado aquí, estamos suponiendo una condición suficiente, aunque no necesaria, para la continuidad de una función y eso es lo que genera nuestro interés en desarrollar este apartado

En el tratamiento que posteriormente se le da en el libro de texto antes mencionado al desarrollo del concepto, se presentaron ejemplos de *funciones discontinuas* a partir de los siguientes gráficos:



a) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

d) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

(Zill *et al*, 2011, p. 81)

Este ejemplo genera una posible imagen conceptual equivocada del concepto. En los casos *b)* y *d)* estamos ante gráficas de funciones que, efectivamente, son discontinuas, sin embargo en los casos *a)* y *c)* las funciones propuestas serían continuas en todo su dominio, sin embargo la bibliografía propone que no lo son en $x = a$, siendo que en $x = a$ no se espera que se analice la continuidad por ser un punto que no pertenece al dominio de la función.

En este texto se trabaja el tema de continuidad de funciones de una variable a partir de dos (por lo menos dos) ideas centrales poco adecuadas para el concepto que podrían desencadenar en un obstáculo didáctico: una es que “las gráficas de las funciones continuas son siempre curvas suaves” y, también que una función “no es continua en un punto cuando en él no está definida”.

A partir de la lectura que se puede hacer en el mencionado texto, el autor utiliza el concepto de curva suave como una curva "que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel". Este criterio para analizar la continuidad de una función de una variable real tiene sentido cuando su dominio de definición es un intervalo de la recta real (que en otros contextos equivale a "dominios conexos"), pero si el dominio no fuera un conjunto conexo (por ejemplo una unión de intervalos disjuntos) la función puede ser continua en todo su dominio y, naturalmente, su gráfico necesitará que se levante el lápiz del papel para ser trazado. Es cierto que en este caso, el gráfico en cada uno de los intervalos que conforman el dominio tendrán la característica de ser "una curva suave" en el sentido usado por el autor.

Observando otros textos existentes en la bibliografía específica de introducción al cálculo y muchos sitios de internet, algunos dedicados exclusivamente a la divulgación de contenidos matemáticos, a menudo se reiteran estas ideas de continuidad como funciones no definidas en un punto o bien con gráficos que presentan saltos, a pesar de no ajustarse al concepto. Tall & Vinner (1981) encontraron en su estudio que la mayoría de los alumnos de un primer año de una escuela de Inglaterra tienen en su imagen conceptual de continuidad la idea de que la función es continua si la gráfica no tiene saltos o bien si la gráfica tiene un solo tramo.

Cuando pensamos en funciones, es muy probable que la imagen conceptual evocada devuelva una fórmula o expresión algebraica que permita operar de algún modo, y no se recurre al dominio (y codominio) como parte de la definición de la función. Esto tal vez pueda ocurrir porque en las prácticas de la educación secundaria se pondera, sobre todo, el trabajo con expresiones algebraicas. Por otro lado, cabe señalar también que muchas veces se presenta una función a partir de un gráfico, y los alumnos dan sus respuestas con cierto temor, por no poder contar con una expresión algebraica que relacione las variables involucradas. Tall & Vinner (1981) destacan que en la imagen conceptual de los estudiantes puede estar instalada la idea de que una función es continua si puede expresarse en una sola fórmula. En un cuestionario que realizaron los autores, algunos alumnos contestaron que la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua pues se encuadra en esta última idea. Otras fundamentaciones que encontraron en respuesta a la continuidad de la función, fueron que: ésta no está definida en el origen o bien que la función tiende a infinito en el origen. Tall & Vinner (1981) destacan que a pesar de que algunos estudiantes hayan contestado que la función es continua, encontraron que la imagen conceptual no coincide con la definición formal aceptada.

Además puede ocurrir que contemos con funciones partidas. Éstas también suelen traer complicaciones, ya que muchos alumnos ven allí más de una función. Tall & Vinner (1981) lograron encontrar otra idea errónea en la noción de continuidad en la imagen conceptual, al recibir respuestas equivocadas sobre la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ x & si\ x\geq 0\end{cases}$. Comentaron que fundamentaron que no lo era ya que: en el gráfico existía un cambio en el gradiente o bien que no tiene una única fórmula. Por último, cuando consultaron a los estudiantes si la función

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\ es\ racional\\ x & si\ x\ es\ irracional\end{cases}$$

es continua, hubo muchas dificultades a tal punto que muchos no contestaron, pero los que contestaron negativamente, sostuvieron que era discontinua por ser imposible realizar su gráfico.

Si analizamos nuestras prácticas, es probable que encontremos obstáculos de origen didáctico que generen la construcción de estas ideas equivocadas en la imagen conceptual de los alumnos. De igual modo, estos obstáculos existen y son comunes. Podría ocurrir que hayan existido en la construcción histórica del concepto de continuidad. Esto motiva a repasar su historia, encontrando lo siguiente:

La concepción de funciones como sinónimos de expresiones algebraicas y su análisis de continuidad, está muy arraigada desde los comienzos del estudio de este concepto. Muñoz Lencada y Román Roy (1999) publicaron que durante el siglo XVIII se consideraba una función continua a toda *expresión analítica en la que interviniesen la variable, constantes y las funciones elementales*; es decir, continuidad significaba *tener la misma expresión formal en todo el dominio*. La noción intuitiva que se tenía de continuidad era la de conexión del gráfico de la función (una curva que se podía dibujar sin levantar el lápiz del papel).

La idea de considerar la continuidad por las características de sus gráficas también es un aspecto que posee gran rigidez en la noción del concepto. Además de la conexión del dominio Muñoz Lencada y Román Roy (1999) rescatan que la idea de continuidad para Descartes (1596-1650) tenía un aspecto geométrico ligado a las curvas. Con Newton (1643-1727) se incorporaba el concepto de tiempo y con Leibniz (1646-1716) tomaba un carácter espacial.

Una breve reseña de cómo se llega al concepto de función

Un problema importante que encontramos en el desarrollo de la noción de función, es la asimilación del concepto de variables. Muñoz Lencada y Román Roy (1999) comentan que a principios del Siglo XIX no estaba aún bien definido el concepto de *variables*. El problema es que no se contaba con un concepto del todo claro sobre el cuerpo de los números reales. Los autores, además, recuerdan que Cauchy, en 1821, anuncia: “una variable es una magnitud que va tomando sucesivamente muchos valores diferentes”. Cauchy dice: “dadas varias variables tales que, conocido el valor de una de ellas, se puede obtener el valor de las demás, entonces esas otras se expresan por medio de la primera que se denomina variable independiente; mientras que de las demás se dice que son función de esa variable”. La evolución del concepto de función implicaba que ya no debía ser necesario el uso de una expresión para referirse a una función. Muñoz Lencada y Román Roy (1999) afirman que fue Dirichlet en 1837 quien dio la siguiente definición: “la variable *y* es función de la variable *x* cuando a cada valor de *x* en un intervalo le corresponde un valor de *y*”.

<u>La concepción del concepto</u>

Con respecto a la continuidad, Muñoz Lencada y Román Roy (1999) describen que en 1817 Bolzano ya había propuesto "la función $f(x)$ es continua en un intervalo si, para cada valor de *x* en ese intervalo, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando ω suficientemente pequeño". Bolzano reveló las ideas necesarias para el desarrollo del cálculo y llegó a admitir la existencia de los números infinitamente grandes y de los infinitamente pequeños, el axioma del extremo superior y el hoy llamado criterio de Cauchy para la convergencia de una sucesión de números reales.

Muñoz Lencada y Román Roy (1999) agregan también que Cauchy publicó en 1821 con precisión el concepto de límite y de continuidad, salvo que aún consideraba los números infinitamente pequeños como variables al expresar "los infinitamente pequeños como las variables con límite cero y los infinitamente grandes como las variables cuyo valor crece indefinidamente, más allá de toda cota". Señalan que esta noción dinámica de los números infinitesimales se debe al legado que deja Newton considerando al tiempo como una variable (de allí la expresión "tiende a"). Luego, su definición de continuidad fue: " $f(x)$ es continua en un punto *x* si un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal de la función"; esto es,

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

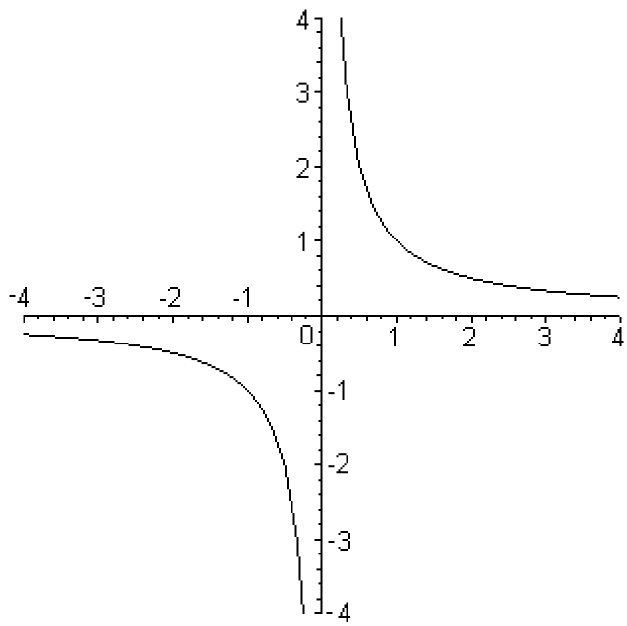
Según Muñoz Lencada y Román Roy (1999), fue Weierstrass quien luego desterró la imagen de "movimiento" de los infinitesimales y los números infinitamente grandes, cuando introdujo a las definiciones de límite y continuidad los términos que hoy se conocen como "ε-δ".

Por todo esto, quedaría en evidencia que los problemas en torno al concepto de continuidad existieron históricamente, lo cual implica que en la creación de nuestros propios conceptos la dificultad está presente por naturaleza. Si en el devenir de la historia costó llegar a la creación de un concepto, es lógico que también a nosotros nos cueste asimilarlo. Por otro lado, pensemos que Bolzano ya proponía: "*f* es continua en un *intervalo*" por lo tanto su idea ya era considerar "dominios conexos" para hablar de la continuidad.

Con respecto a no considerar al dominio como una condición necesaria para la definición de función y sólo centrar el estudio en su expresión algebraica, podemos señalar que es un inconveniente que a lo largo de la historia debió ser sorteado ya que, por ejemplo, en el siglo XVIII fue así como se consideraba el concepto de función. Es por esas complicaciones que se plantean en torno a la definición de este concepto que, desde la enseñanza, los docentes debemos apuntar a estas cuestiones que destaquen la importancia del dominio de una función (a la vez que también los otros elementos que entran en juego en su definición, como *codominio* y la *ley de asignación*) para que nuestros alumnos logren sortear posibles obstáculos como, por ejemplo, los planteados en este apartado.

Un problema concreto

Para graficar mejor la situación planteada presentamos la siguiente función: $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Esta es una función que resulta ser continua en todo su dominio y, sin embargo, se puede observar que presenta un “salto” en el valor de la abscisa $x=0$, consecuencia de estar definida sobre un dominio no conexo.



¿Por qué es una “función continua”? En primer lugar porque esta función es continua en cada uno de los puntos de su dominio, a partir de la definición que sostenemos. La continuidad es una propiedad local y se refiere a pensar qué le ocurre a una función en puntos individuales de su dominio (y en sus cercanías). Es claro que la expresión $\frac{1}{x}$ no admite resultado alguno para el valor $x=0$, con lo que este valor es el que “incomoda” en la definición y, por lo tanto, es el que generalmente se quiere estudiar y, de manera incorrecta, se lo señala como un punto de “discontinuidad” de la función.

Una propuesta para el aula

Algunas preguntas que les podemos hacer a los alumnos para estudiar la continuidad de una función aunque la curva de su gráfica no sea arco-conexa podría ser

Actividad I:

a) ¿Es $f:(1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ continua en su dominio? Justificar

b) ¿Es $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ continua en todo su dominio?

Es muy posible que en ambas preguntas los alumnos respondan que sí porque el 0 no es parte del dominio de la función.

Actividad II

1) Es la función $f:(-1,5)\cup(7,12)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ continua en todo su dominio?

Se espera que la respuesta sea que sí. El hecho de proponer una función polinómica se fundamenta en que los alumnos que dan sus primeros pasos en cálculo conocen que éstas no generan problemas de discontinuidad. Esto lleva a que el foco del análisis se ponga estrictamente sobre el dominio no conexo y no ya sobre la expresión que define a la función.

2) $f:(0,1)\cup(3,6)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ¿Lo es? Justificar.

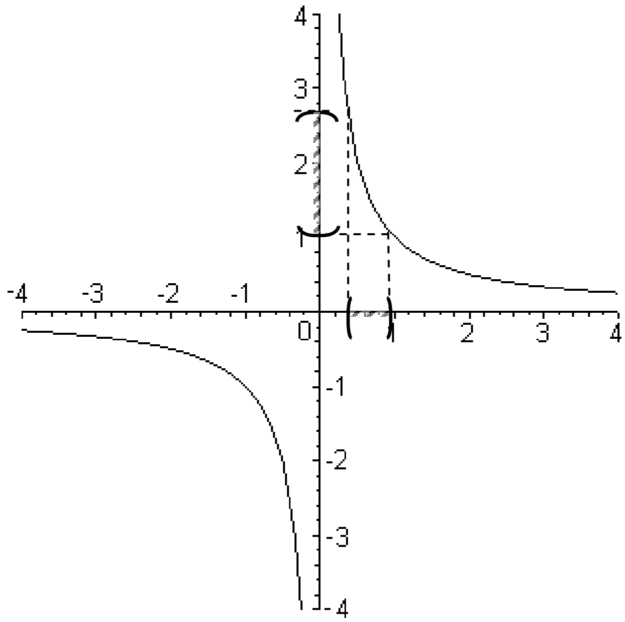
Actividad III

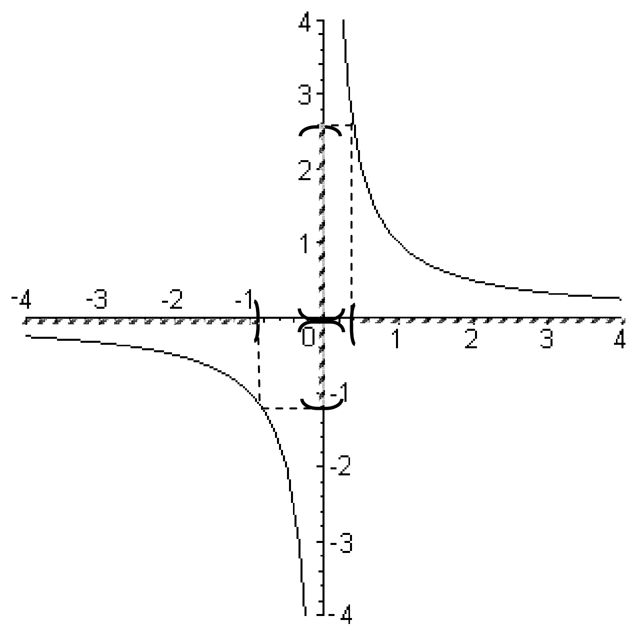
Decidir si $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en todo su dominio. Justificar.

Se espera que los alumnos incorporen en su imagen conceptual la continuidad en un punto como una propiedad local de elementos del dominio, y concluyan que la función efectivamente es continua y que, en definitiva, el estudio de la continuidad en $x=0$ no tiene sentido puesto que éste **no** es un valor del dominio.

Otro argumento que fundamenta la continuidad de esta función en todo su dominio surge de observar que para todo subconjunto abierto V de la imagen (en nuestro caso el conjunto IR-{0}), se verifica que $f^{-1}(\mathrm{V})$ es un conjunto abierto del dominio. Lo que es importante destacar, es que este argumento posiblemente no esté al alcance de los estudiantes del nivel medio, pero que sí podría ser interesante mencionarlo como un resultado válido, que requiere del conocimiento y desarrollo de otros temas que son abordados en cursos de Matemática de niveles superiores. A modo de ejemplo de esta opción, podrían presentarse gráficos como los que se muestran a continuación, en donde se observa lo que representa $f^{-1}(V)$ en los casos en que los abiertos sean $V_1=(1,3)$ y $V_2=(-1,0)\cup(0,3)$, en los cuales resulta:

$f^{-1}(V_1)=(\frac{1}{3},1)$ y $f^{-1}(V_2)=(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$ respectivamente. Estas últimas afirmaciones podrán verificarse o no dependiendo del nivel de desarrollo que se haya alcanzado en el curso en lo que respecta a determinación de imágenes y preimágenes de distintos conjuntos y funciones.





7. A modo de cierre

Un aspecto fundamental de nuestras tareas docentes es la anticipación a las posibles respuestas y a los errores conceptuales que pueden tener los alumnos. Cuando preparamos nuestra planificación de actividades áulicas, tenemos en cuenta aquellos objetos matemáticos que esperamos que nuestros alumnos aprendan. Es nuestra experiencia como docentes la que nos invita a reformular las actividades propuestas, porque observamos en nuestros alumnos errores que podríamos denominar “comunes”. Es justamente esto que motiva a indagar el “por qué” de la reiteración y “resistencia” de estos errores.

Es mi esperanza que la lectura de este trabajo pueda motivar a:

- ✓ Analizar los obstáculos epistemológicos, considerados en el sentido de la definición Bachelard y retomado por Brousseau, presentes en los alumnos, y los propios docentes.
- ✓ Lograr una anticipación de estos obstáculos y otras dificultades y propiciar actividades superadoras que generen, en el alumno, una evolución en su imagen conceptual, para que puedan pulir los objetos matemáticos como entes abstractos y para comprender los ajustes a diferentes contextos en los que éstos tengan alcance.

8. Referencias Bibliográficas

Tall D.O. & Vinner S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity,* Educational Studies in Mathematics, 12 151-169.

Tall, D. O. (1977). *Cognitive conflict and the learning of mathematics*, paper presented to the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, Holland.

Bachelard G. (1972). *La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Brousseau G (1983). *Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des mathématiques.

Sierra, M., González M. y López M. (1997). *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos.* Salamanca, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca (documento inédito).

Muñoz Lencada, M y Román Roy N. (1999). *Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal*. Barcelona: Ediciones UPC

Duval, R; 1996. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173-201.

Duval, R. (2006). “A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 103-131.

Zill, Dennis G.- Wright, Warren S; 2011. *Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas.* Cuarta edición. Mc Graw Hill.