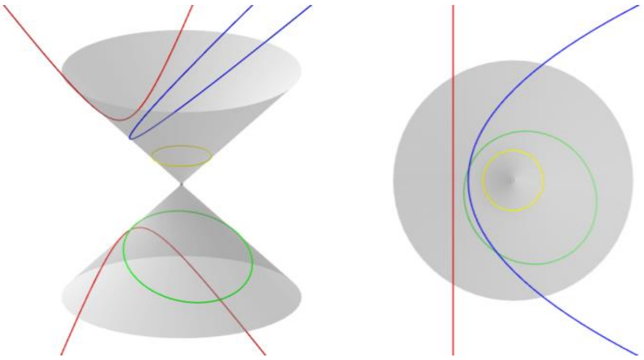


Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico

Autor: Profesor Ricardo Horacio Ramirez

Director: Doctor Marcel David Pochulu

Título al que postula:

Especialista en Didáctica de las Ciencias con Orientación en Matemática

Fecha:

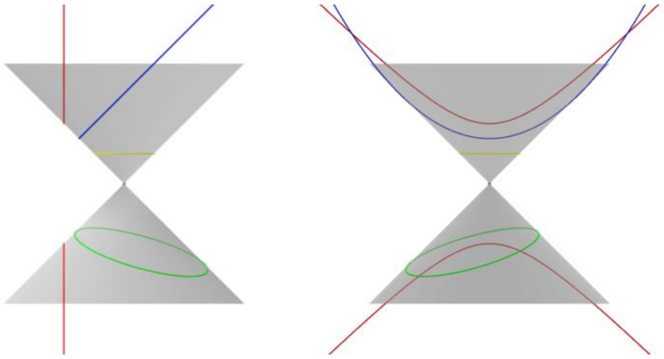
23 de Diciembre de 2013

Carrera:

Especialización en Didáctica de las Ciencias con Orientación en Matemática

Establecimiento:

Universidad Nacional de General Sarmiento



Resumen

En este trabajo proponemos un recorrido histórico-matemático desde los orígenes de las secciones cónicas, mostrando su desarrollo y distintos tratamientos y miradas. Luego, revisamos el abordaje tradicional de las matemáticas pero considerando la introducción de nuevas tecnologías. Por último, realizamos un análisis de una instrucción en un texto escolar para la Educación Secundaria.

Palabras clave

Cónica, Circunferencia, Elipse, Parábola, Hipérbola, Configuración Epistémica, Idoneidad Didáctica.

Summary

We propose a historical and mathematical journey from the origins of the conic sections, showing its development and different treatments and looks. Then, we review the traditional approach of mathematics but consider the introduction of new technologies. Finally, we perform an analysis of a statement in a textbook for secondary education.

Keywords

Conic, Circumference, Ellipse, Parabola, Hyperbola, Epistemic Settings, Suitability Teaching.

Prefacio

En el presente trabajo realizamos un recorrido histórico por las secciones cónicas, desde sus orígenes, pasando por distintos enfoques teóricos y prácticos que fueron utilizados en su tratamiento, tanto, desde lo formalmente matemático hasta lo más intuitivo. Asimismo, presentamos un análisis didáctico de un texto escolar[1] que aborda la enseñanza y aprendizaje de las cónicas, intentando aportar algunas (nuevas) ideas acerca de cómo abordar el tema en la educación secundaria.

Cuando empezamos a realizar este informe, nos preguntamos si realmente es éste el trabajo que queríamos elaborar para dar concluida la Especialización en Didáctica de las Ciencias, con orientación Matemática. En esta búsqueda, tratamos de encontrar un problema, nuevo o viejo, resuelto o no, para decidir si tiene o no solución, intentar resolverlo con nuevos recursos, utilizar distintas estrategias, y mientras tanto, entretenerse y aprender de él.

Luego de varias reflexiones, contradicciones, incertidumbres y otras cuestiones entendimos que sí resultaba un trabajo apropiado.

Todo el trabajo tiene por característica principal el dinamismo, en el sentido de que buscamos mostrar cómo las ideas matemáticas cambian, avanzan, evolucionan, hacen entendible lo que antes no entendíamos, lo difícil se vuelve accesible, la toma de decisiones es cada vez mejor fundamentada y/o refutada.

En particular, el tema de las secciones cónicas, como objeto matemático, nos resulta especialmente interesante, porque está emparentado con uno de los tres problemas clásicos griegos -la duplicación del cubo- que fue tratado durante muchísimos años, tanto por matemáticos profesionales como por aficionados, los cuales aportaron, con sus avances, ideas y propiedades que no fueron advertidas o descubiertas por sus predecesores, y que a su vez, promovieron nuevos puntos de partida e ideas para sus sucesores.

[1] Material distribuido por la Dirección General de Cultura y Educación (DGCyE).

Capítulo 1

Las Cónicas en la Geometría

Introducción

Si nos remontamos unos 2500 años atrás en la historia, a los tiempos de la antigua Grecia, más precisamente al siglo V antes de Cristo (a. C.) nos encontramos con Pericles al mando de Atenas, quien muere en el otoño del año 429 a. C. víctima de la epidemia de peste que asolaba a la ciudad desde el año 433 a. C. y había acabado con la vida de un cuarto de los habitantes de la población. Preocupados por esta peste, y considerando que se trataba de una maldición de los dioses, los atenienses se movilizaron al oráculo de Delfos en busca de una solución a tan terrible mal. La respuesta que obtuvieron por parte del oráculo fue que para contentar a los dioses deberían duplicar el altar de Apolo, dicho altar tenía forma de cubo (Duplicación del cubo, 2013, 15 de mayo).

Fue entonces cuando surgió, con orígenes que entrelazan lo histórico con lo legendario, uno de los problemas clásicos de la matemática: "la duplicación del cubo". Este es un problema que tuvo durante mucho tiempo a muchos hombres preocupados en hallar su solución y del cual se desprende el tema central de este trabajo que es el de las secciones cónicas (Mora, 2010).

Los primeros trabajos sobre cónicas

El primero en abordar el problema de la duplicación del cubo fue Hipócrates[2] de Chíos (470 a. C.-?), un matemático de la época. Logró reducir el problema al de intercalar dos medias geométricas o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma (Boyer, 1987).

Más tarde, fue Menecmo (375 a. C.-325 a. C.), quien estudiando la duplicación del cubo descubrió, al parecer, las secciones cónicas. Fue discípulo de Eudoxio y amigo de Platón.

Menecmo se dio cuenta de que geométricamente, el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos curvas cónicas, que pueden ser dos parábolas, o una parábola y una hipérbola (Mora, 2010).

Hoy contamos con la geometría analítica y con simbología que nos permite expresar esta cuestión en la siguiente versión:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

De allí se obtienen las ecuaciones cuadráticas de las parábolas $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ y de la hipérbola $xy = 2a^2$. Luego $y^3 = 2x^3$, donde y es la medida de la arista del nuevo cubo, y x la del cubo original (ver Ilustración 1).

Por desgracia para Menecmo (y sus sucesores), encontrar el punto de corte de esas dos curvas es un problema que no se puede resolver con regla y compás, como demostró 25 siglos más tarde, el francés P. Wantzel, en 1837.

---

[2] No debemos confundirlo con Hipócrates de Cos, médico al que debemos el juramento hipocrático.

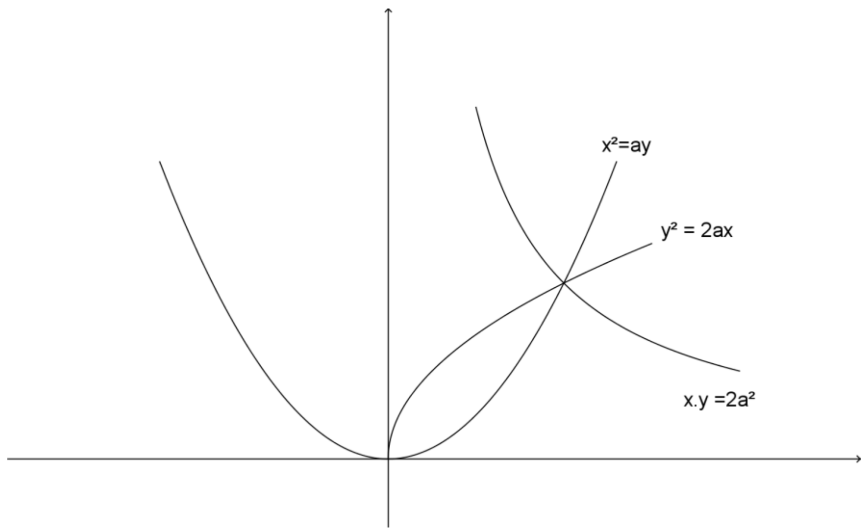


Ilustración 1: Intersección entre parábolas e hipérbola.

Arquitas de Tarento (430 a. C.-360 a. C.), había estudiado el problema de la duplicación del cubo, obteniendo las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie tórica. Así pues, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, es la elipse la curva más habitual en la experiencia, ya que los objetos circulares mirados de forma oblicua, así como la sombra que arrojan son elípticos.

Aristeo, hacia el 330 a. C. también estudió las secciones cónicas. Sus obras, perdidas, trataban sobre los lugares sólidos, y hacía la distinción entre lugares planos, los cuales dan lugar a rectas y círculos; lugares sólidos, aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos; lugares lineales eran otras curvas de orden superior no reducibles a las anteriores como la cuadratriz o la concoide (Mora, 2010).

La segunda obra de interés, también perdida, fue de Euclides (330 a. C.-275 a. C.), en cuatro libros, cuyo contenido debió ser en sus líneas fundamentales el que se encuentra en los cuatro primeros libros de las Cónicas de Apolonio, de quien nos ocuparemos en breve, si bien menos general y menos sistemático.

Apolonio de Pérgamo, el gran geómetra

Quien merece un capítulo aparte es Apolonio de Pérgamo (262 a. C.-180 a. C.). Apolonio fue sin dudas el matemático de la antigüedad que realizó el mayor aporte al tratamiento de las cónicas. A él se le atribuyen los actuales nombres de las curvas, no fueron vocablos nuevos, dado que estos ya se usaban en las obras de Arquímedes pero con otros significados.

Para Apolonio *Elipse* significa deficiencia, en el sentido de que el plano no es paralelo a ninguna de las generatrices del cono al que corta; *Hipérbola* significa exceso (en el lenguaje ordinario una hipérbola es una exageración); y hace referencia a que el plano de corte es paralelo a dos de las generatrices del cono y por último el vocablo *Parábola*, que significa equiparación, en alusión a que el plano que corta al cono es paralelo a una sola generatriz.

El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva.

Los antecesores de Apolonio ocupados en esta ardua tarea, consideraban que las secciones cónicas provenían de la intersección entre un cono recto y un plano perpendicular a la recta generatriz del mismo; así los tres tipos de secciones provenían de conos distintos, según el ángulo de su vértice fuera recto, agudo u obtuso, y para referirse a ellas, las describían por su construcción como la sección entre un plano y un cono acutángulo, rectángulo u obtusángulo respectivamente.

Fue Apolonio en su obra *Las Cónicas* quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Quizás las más importantes son la de reflexión, que proponen que si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos.

También demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada se concentra en el foco. Si se recibe luz de una fuente lejana (como el Sol) con un espejo parabólico, de forma que los rayos incidan paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada se concentra en el foco (Tapia Moreno, 2002).

Una leyenda cuenta que Arquímedes logró incendiar los navíos romanos utilizando grandes espejos parabólicos, en sus intentos por defender a Siracusa.

En la actualidad esta propiedad se utiliza para construir los radares, las antenas de televisión y las cocinas solares. La propiedad análoga, que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje sirve, por ejemplo, para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza, por caso, en los grandes estadios para conseguir una mayor superficie iluminada.

El oscurantismo en las cónicas

El nombre de Hypatia (370-415) significa la más grande. La leyenda de Hypatia de Alejandría nos muestra a una joven, virgen y bella, matemática y filósofa, cuya muerte violenta marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval. Como ocurre con todas las biografías de los matemáticos (y matemáticas) de la antigüedad, se sabe muy poco de su vida, y de su obra se conoce sólo una pequeña parte.

Por esos tiempos, Alejandría atravesaba una gran tensión social, debido a los esclavos y a la iglesia cristiana. Ya en el año 412, Cirilo, un cristiano fanático, arzobispo de Alejandría, estaba enfrentado a Hypatia y un día una multitud fanática, seguidora de Cirilo, asaltó el carruaje de Hypatia. Ella fue brutalmente asesinada, sus restos quemados y sus obras destruidas. Había escrito un tratado sobre la obra de Apolonio. Con la muerte de Hypatia, las secciones cónicas (y la mayor parte de la matemática) fueron olvidadas hasta el siglo XVI. (González Suárez, 2010).

La Geometría Analítica

En el siglo XVI, René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones, dando lugar al surgimiento de la geometría analítica. En este contexto las curvas cónicas se pueden representar a través de ecuaciones de segundo grado mediante dos variables, x e y. La geometría analítica demuestra que toda ecuación de segundo grado corresponde a una cónica[3]. Estas curvas cobran gran importancia en la física, por ejemplo, las propiedades de reflexión, como las mencionadas más arriba, son de gran utilidad en óptica. También Pierre de Fermat (1601-1665), en 1629 abordó la tarea de reconstruir algunas de las demostraciones perdidas de Apolonio relativas a los lugares geométricos; a tal efecto desarrollaría, contemporánea e independientemente de René Descartes un método algebraico para tratar cuestiones de geometría por medio de un sistema de coordenadas.

Seguramente, la aplicación más importante en física, deba atribuirse a Johannes Kepler (1570-1630), quien descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas y que el Sol está en uno de sus focos.

Más tarde Newton (1642-1727) se encargó de demostrar que el movimiento de cualquier cuerpo alrededor de otro, producido por una fuerza gravitatoria es siempre una curva cónica.

Galileo Galilei (1564-1642) se encargó de unificar las cónicas construidas por Apolonio, en particular la parábola, con fenómenos naturales como el movimiento de un proyectil. Con Galileo se inicia la consolidación del concepto de función cuadrática como consecuencia de la relación entre variables y se rompe la percepción de parábola como figura.

En el renacimiento, si la elipse es la curva de Kepler, la parábola será la de Galileo. Él descubrió que cualquier proyectil lanzado al aire describe una trayectoria parabólica. Cónicas para explicar los movimientos, tanto de los cuerpos más próximos a nosotros, a la superficie terrestre como los más alejados en el cielo. Luego, Newton con su ley de gravitación universal y con la demostración de que toda órbita de un objeto celeste es una de las tres cónicas pondrá la frutilla en el postre de las curvas de Apolonio (Hernández, 2002).

En la siguiente sección nos encargaremos del tratamiento de las cónicas desde una mirada matemática.

[3] Demostrado por Jan de Witt (1629-1672).

Reflexiones del Capítulo 1

Muchas veces, cuando nos encauzamos en el estudio de un cierto objeto matemático, avanzamos y retrocedemos constantemente creyendo que hemos encontrado el mejor camino. Algunas veces salimos victoriosos y otras optamos por desistir, sintiéndonos derrotados. Pero también suele ocurrir que otras personas están dedicadas al mismo estudio y presentan un nuevo punto de vista o tratamiento de ese objeto matemático, teniendo en cuenta cuestiones que no fueron consideradas previamente, o que no estaban disponibles por diversas cuestiones (carencia de tiempo, inexistencia de tecnología, ausencia de herramientas teóricas, etc.) y dan nueva luz al tema, abriendo el abanico a un nuevo mundo de interrogantes. Esto ocurrió, por ejemplo, con la aparición del sistema de coordenadas, de la mano de Descartes.

La ocurrencia de tales hechos con objetos matemáticos, nos lleva a pensar y a buscar nuevos interrogantes, explicaciones y aplicaciones de los descubrimientos y creaciones acontecidos y eso es lo maravilloso de la Matemática y su historia que se escribe a diario en nuestras vidas.

La evolución, a través del tiempo, de las secciones cónicas y su tratamiento desde distintos puntos de vista y diferentes enfoques teóricos y prácticos, son una clara muestra de la dinámica que experimentan la Matemática y quienes se ocupan de ella.

Capítulo 2

Una mirada desde la Matemática

La mirada geométrica

Muchas veces oímos y repetimos que la matemática está en todos lados, que las cosas que nos rodean están llenas de Matemática, pero pocas veces las “vemos” realmente.

Por ejemplo, si miramos desde arriba o de frente elementos de uso diario como platos, vasos, monedas, relojes, etcétera, vemos “círculos”, pero si los vemos en perspectiva, de costado, de lado, inclinado, lo que vemos son *elipses*.

Otra forma de “ver” las secciones cónicas es tomando una linterna e iluminando una pared, si la linterna se acerca a unos pocos centímetros veremos un círculo de luz, luego inclinando un poco la linterna, veremos una elipse, esa elipse proviene de cortar el cono (de luz) con un plano (la pared).

En este Capítulo, nos proponemos realizar un recorrido geométrico del tema, aunque aprovechando las ventajas de las aplicaciones de software libre como *Winplot* y *GeoGebra* para redescribir relaciones, propiedades, conceptos y procedimientos.

Para comenzar, efectuamos un trabajo exploratorio, a través de *Winplot*, con el fin de reconocer las condiciones que deben cumplir el cono y el plano para generar cada una de las secciones mencionadas. Para tal fin, manipulamos el software mencionado generando un cono y un plano que lo corte.

Luego, con *GeoGebra*, nos planteamos trazar algunas secciones cónicas, mediante la construcción punto por punto considerando la definición de la sección como lugar geométrico.

Por último, trabajamos con las ecuaciones que describen a las secciones cónicas desde un punto de vista analítico, reconociendo a través de ellas, los puntos característicos de las mismas.

Además de la elipse, se pueden formar otras secciones cónicas, como circunferencias hipérbolas y parábolas, que dependen del ángulo que se forma entre el plano y el eje del cono. El tratamiento de las secciones cónicas puede realizarse desde lo analítico, lo algebraico, lo geométrico, como se sugiere en INFD (2010).

En esta parte del trabajo, nos ocuparemos de las secciones cónicas desde un punto de vista geométrico, especialmente desde lo gráfico en un primer intento de acercamiento, aprovechando algunas herramientas que nos ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs).

Ya hemos dicho que las secciones cónicas provienen de la intersección entre un cono y un plano, el paso siguiente es poder visualizar este hecho, y para ello se puede recurrir al uso, en primer lugar, del software libre *Winplot*, que nos permitirá realizar gráficos en 3 dimensiones de una manera sencilla. Así podremos generar las intersecciones mencionadas para tener una mejor percepción de las mismas, ya que el programa nos permite obtener distintos puntos de vista de los objetos.

Para comenzar generamos un cono (ver Ilustración 2) que cortaremos con distintos planos. Esto, nos permite observar “espacialmente” las posiciones relativas entre el cono y un plano que lo corte.

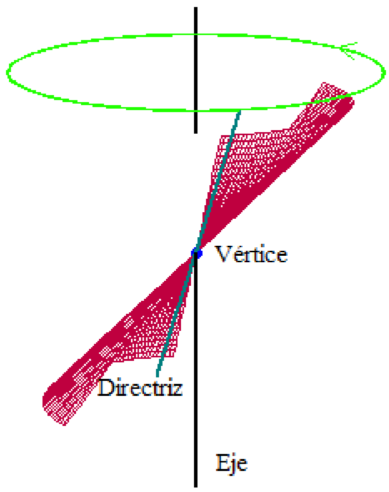


Ilustración 2: Generación del Cono.

Las primeras observaciones surgen de comparar los ángulos que se forman entre plano y el eje del cono, con el ángulo entre la directriz y el mismo eje.

Si el plano es perpendicular al eje del Cono (ver Ilustración 3) la sección cónica resultante es una circunferencia.

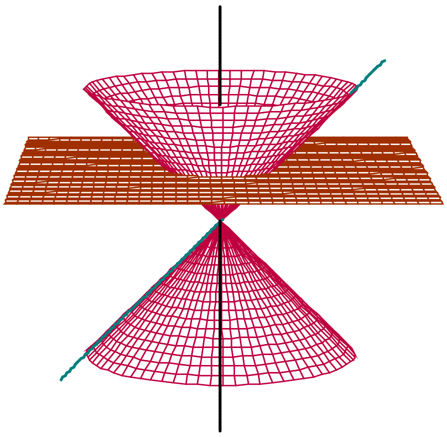


Ilustración 3: Plano perpendicular al eje del Cono.

Si el ángulo entre el plano y el eje del cono es mayor al ángulo entre la directriz y el eje, la cónica es una elipse (ver Ilustración 4).

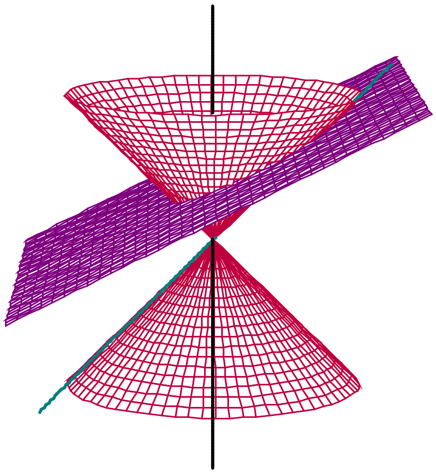


Ilustración 4: Ángulo del plano mayor que el ángulo de la directriz.

Si el ángulo entre el plano y el eje del Cono es congruente al ángulo que forma la directriz con el eje, la sección que se genera es una parábola (ver Ilustración 5).

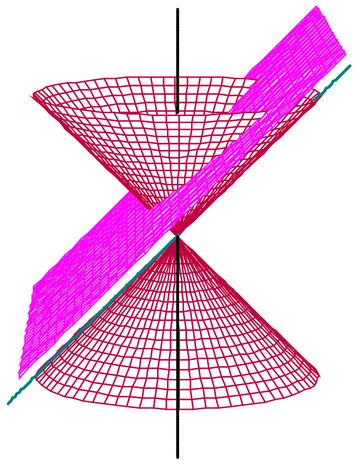


Ilustración 5: Ángulo del plano congruente al ángulo de la directriz.

Si el ángulo entre el plano y el eje del Cono es menor que el ángulo entre la directriz y el eje, el plano corta ambas hojas del Cono y se genera una hipérbola (ver Ilustración 6).

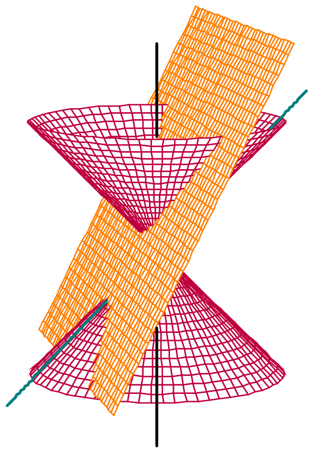


Ilustración 6: Ángulo del plano menor que el ángulo de la directriz.

Otras observaciones pertinentes, aprovechando la disponibilidad del software dinámico, tienen que ver con los “casos degenerados” que surgen cuando el plano pasa por el vértice del cono (ver Ilustración 7), cuando el plano contiene a la directriz (Ilustración 8) y cuando el plano contiene al eje del cono (Ilustración 9).

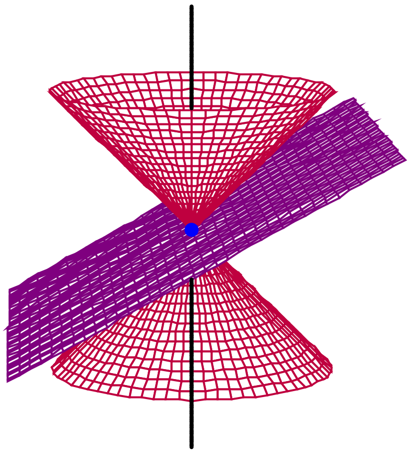


Ilustración 7: Plano que pasa por el vértice del Cono.

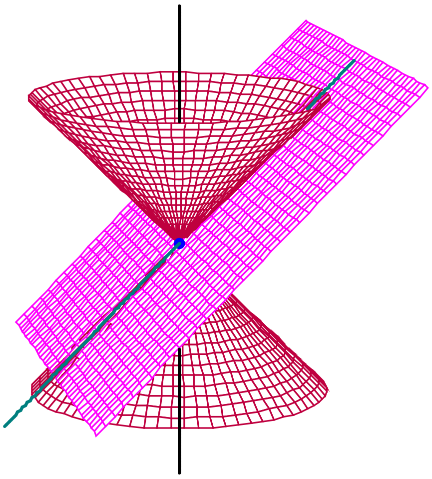


Ilustración 8: Plano que contiene a la directriz.

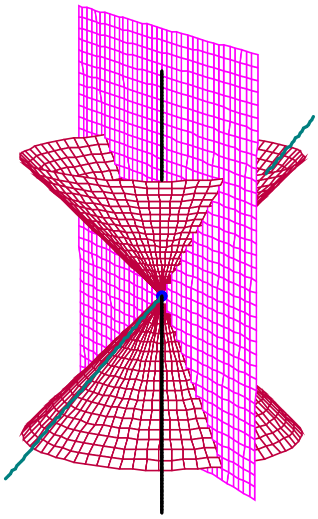


Ilustración 9: Plano que contiene al eje del cono.

Además, también podemos recurrir al uso de software para interpretar algunas respuestas a diversas situaciones-problemas que analíticamente no son claras o bien son difíciles de precisar, como por ejemplo, algunas actividades que presentamos aquí, para mostrar la utilidad y conveniencia de utilizar una herramienta informática. Dichas actividades son tomadas del texto escolar que analizaremos y detallaremos en próximo capítulo.

> Actividad 4.
>
> Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(0; -5)$ y directriz $y = \frac{2}{3}$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta. Actividad extraída de:(Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 172).

La resolución de esta actividad consta de dos partes, por un lado, requiere un tratamiento analítico (encontrar la ecuación) y por otro lado, reconocer si se trata de una función o no. Para responder esto último procedemos gráficamente (Ilustración 10) y la respuesta se hace evidente (ya sabemos que se trata de una parábola, viendo el gráfico podemos afirmar que sí es una función). Para esto, recurrimos al uso del software dinámico, que a su vez nos brinda una respuesta a la cuestión de encontrar la ecuación, a través de la Vista Algebraica.

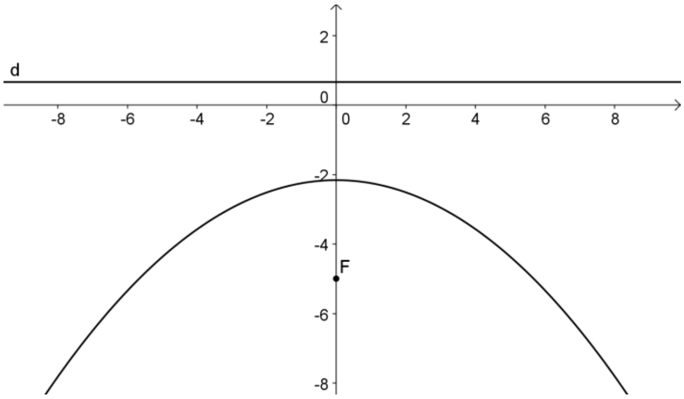


Ilustración 10: Representación de la parábola.

Del mismo modo podemos proceder con las tareas de la Actividad 5 y la Actividad 6,

> Actividad 5.
>
> Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(3; 0)$ y directriz $x = 1$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta. Actividad extraída de:(Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 172).

Otra vez, el apoyo gráfico es fundamental para "ver" si se trata de una función o no (Ilustración 11), y es fácil ver que la respuesta es no.

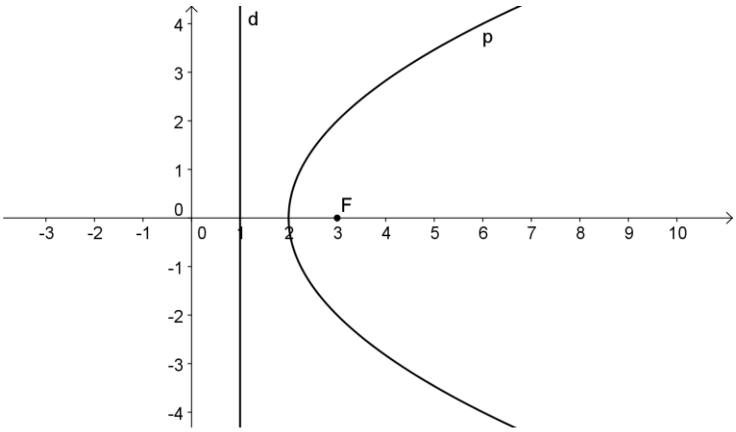


Ilustración 11: Parábola de la Actividad 5.

Una vez más, nos apoyamos en el gráfico para ver la parábola de la Actividad 6

Actividad 6.

a. Encuentren los puntos donde la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$ interseca al eje x y al eje y.
b. Realicen un gráfico aproximado de la parábola.
c. ¿Es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta. Actividad extraída de: (Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 172).

La representación gráfica de esta parábola se ve en la Ilustración 12 y nos permite afirmar que <u>no</u> es una función.

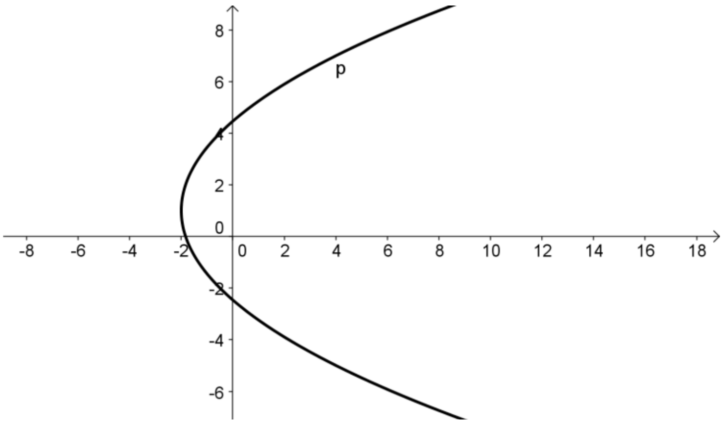


Ilustración 12: Gráfico de la parábola de la Actividad 6.

Del mismo modo podemos ver que las elipses no son funciones, dicho de otro modo, no responden al concepto de función que se adopta en el texto analizado. Esto es notable en la Actividad 10.

Actividad 10.

¿Cuál es el punto de abscisa $7\frac{1}{2}$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$?

Esta relación, ¿resulta ser una función? Expliquen cómo se dieron cuenta. Actividad extraída de:(Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 177).

El gráfico de la elipse es fácil de realizar con el software de geometría dinámica (ver Ilustración 13) y nos permite responder que <u>no</u> es función.

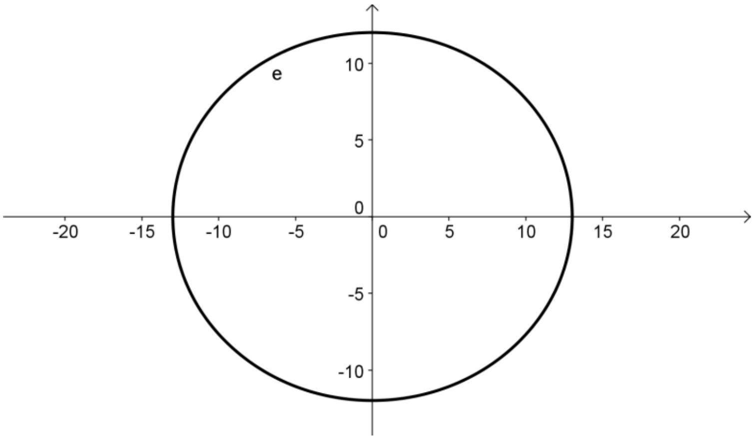


Ilustración 13: Elipse de la Actividad 10.

Además, podemos revisar también otras características y propiedades de las cónicas con el software que de otra manera se torna difícil.

Otra herramienta que nos brinda *GeoGebra* es la Vista CAS (cálculo simbólico), mediante la cual se pueden resolver ecuaciones y problemas de encuentros o intersecciones, como los de la Actividad 6 que mostramos a continuación.

> Actividad 6.
>
> a. Encuentren los puntos donde la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$ interseca al eje x y al eje y.
> b. Realicen un gráfico aproximado de la parábola.
> c. ¿Es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta. Actividad extraída de:(Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 172).

El ítem a. se puede resolver ingresando en la entrada del software la ecuación de la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$, y las ecuaciones de las rectas de los ejes coordenados $x = 0$ e $y = 0$.

Luego usar la herramienta de intersección que resolverá los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 6 \cdot (x+2) \\ x = 0 \end{cases}$$

Que da solución a la intersección de la parábola con el eje x. Y

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 6 \cdot (x+2) \\ y = 0 \end{cases}$$

Que responde a la cuestión de la intersección de la parábola con el eje y.

Además, el mismo software nos brinda el gráfico y nos permite determinar que no se trata de una función, teniendo en cuenta el concepto de función utilizado en el texto analizado en el Capítulo 3 de este trabajo.

Una mirada analítica de las cónicas

Un cono es una superficie que se engendra al hacer girar una recta llamada generatriz alrededor de otra recta fija, llamada eje, manteniendo un punto fijo sobre dicho eje, que será el vértice del cono (Ilustración 14). En este trabajo estudiaremos las secciones cónicas, que son el resultado de la intersección entre un plano y un cono[4]. Dependiendo de la inclinación del plano con respecto al eje del cono, las secciones cónicas tienen distintas características y propiedades y se clasifican en cuatro tipos: Circunferencia, Elipse, Parábola e Hipérbola.

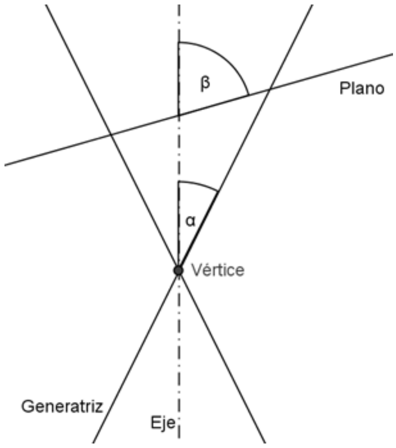


Ilustración 14: Esquema cono-plano

La clasificación anterior corresponde a la forma que toma la intersección entre el cono y el plano, y depende del ángulo que forman el plano y el eje del cono, teniendo en cuenta también el ángulo formado entre el eje y la generatriz. Si cortamos un cono con un plano que no pasa por su vértice, y llamamos α al ángulo que forma el eje del cono con la generatriz del mismo y, llamamos β al ángulo que forma el plano con el eje del cono, podemos clasificar las intersecciones según la relación entre estos ángulos.

- Si $\beta = 90°$ la intersección será una circunferencia.
- Si $\alpha < \beta < 90°$ la intersección será una elipse.
- Si $\alpha = \beta$ la intersección será una parábola.
- Si $\alpha > \beta$ serán las dos ramas de una hipérbola.

Las cuatro secciones cónicas se pueden ver en las siguientes ilustraciones (Ilustración 15, Ilustración 16, Ilustración 17, Ilustración 18).

[4]A lo largo de este trabajo se considerará que el plano no contiene al vértice del cono.

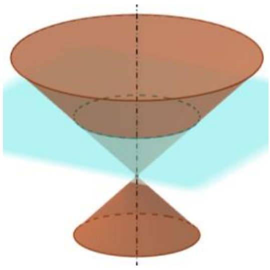


Ilustración 15: Circunferencia.

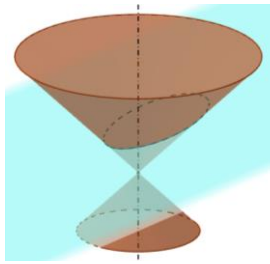


Ilustración 17: Elipse.

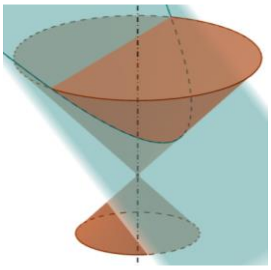


Ilustración 16: Parábola.

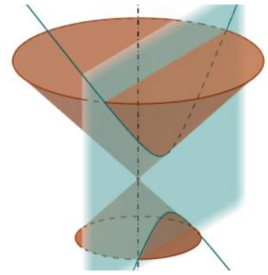


Ilustración 18: Hipérbola.

Las cónicas como lugares geométricos

Muchas formas geométricas son definidas por ciertas características que poseen, o dicho de otro modo, se definen por ciertas condiciones que cumplen sus puntos. De este modo, podemos considerar a cualquier sección cónica como lugar geométrico.

Definidas las cónicas de esta manera, resulta:

La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo (llamado centro). Esto es, los puntos $X = (x, y)$ del plano que están a una distancia fija r (radio) de otro punto c (centro). En símbolos,

$$C: d(X, c) = r$$

La *elipse*, se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos del plano (llamados focos) es constante. Así, la *elipse* E, es el lugar de los puntos $X = (x, y)$ del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante. En símbolos,

$$E: d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a, \text{ siendo } a > d(F_1, F_2)$$

El parámetro a es llamado semieje mayor. En particular, si $F_1 = F_2$, se obtiene una circunferencia de radio a, centrada en el foco.

La *parábola*, tiene por lugar geométrico el conjunto de los puntos $X = (x, y)$ del plano que equidistan de un punto fijo F (llamado foco), y de una recta l(llamada directriz), donde F no es un punto perteneciente a l. En símbolos,

$$P: d(X, F) = d(X, l)$$

La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos $X = (x, y)$ del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2(llamados focos) es constante. En símbolos,

$$H: |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a, \text{ siendo} 0 < a < d(F_1, F_2)$$

Podemos recurrir a otro software libre para dibujar las secciones cónicas. En este caso proponemos usar *GeoGebra* y con el trazaremos algunas cónicas, a partir de la definición anterior como lugar geométrico.

Si se considera el plano de corte y sobre este se trazan los ejes cartesianos X y Y las secciones cónicas pueden interpretarse en dos dimensiones. De este modo, si se trata de encontrar las ecuaciones cartesianas que las describen, resulta:

Circunferencia

1. La circunferencia C está definida por los puntos X para los que $d(X, O) = r$.
   Puesto que ambos miembros de la igualdad son positivos, es equivalente a la igualdad de sus cuadrados $\left(d(X, O)\right)^2 = r^2$ que en coordenadas cartesianas se puede interpretar de la siguiente manera:
   Siendo $X = (x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia y $O = (a, b)$ el centro de la misma, resulta
   $$d(X, O) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
   Entonces
   $$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2$$
   Simplificando
   $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
   De este modo queda definida la ecuación de la circunferencia (Ilustración 19) de radio $r > 0$ y centro $O = (a, b)$.

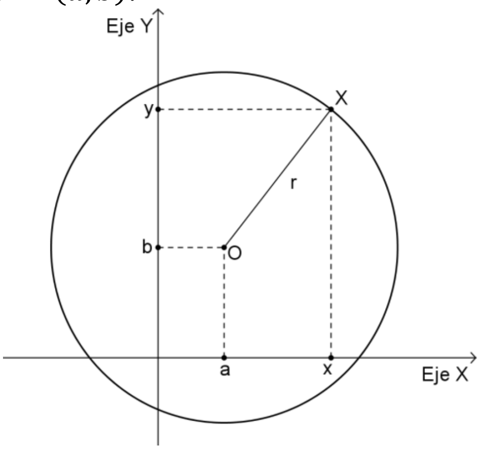


Ilustración 19: Representación de la circunferencia en el plano cartesiano.

   Si la circunferencia está centrada en el origen de coordenadas su ecuación se reduce a
   $$x^2 + y^2 = r^2$$

Elipse

2. La elipse E se define por los puntos X tales que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$.
   Para simplificar los cálculos, se puede considerar como eje OX a la recta que contiene a los focos, y como eje OY a la recta perpendicular que pasa por el punto medio entre los focos. De este modo, resulta que la elipse estará centrada en el origen y los focos serán $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$.
   Entonces, para un punto $X = (x, y)$ de la elipse resulta
   $$d(X, F_1) + d(X, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
   Restando $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ a cada lado de la igualdad
   $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$\left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2$$

Operando

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

Desarrollando

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

Simplificando

$$-2cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2cx$$

Despejando la raíz cuadrada

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

Simplificando y elevando al cuadrado

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=(a^2+cx)^2$$

Operando

$$a^2(x+c)^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

Simplificando, despejando y reagrupando

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $a^2(a^2-c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$$

Llamando $b^2=a^2-c^2(>0)$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que es la ecuación buscada.

La Ilustración 20 nos ayuda a interpretar lo anterior

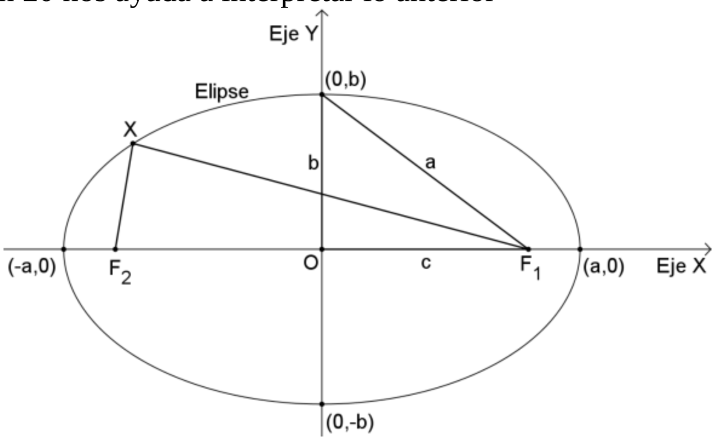


Ilustración 20: Representación de la elipse en el plano cartesiano.

Siguiendo los pasos anteriores, es fácil ver que si la elipse está centrada en un punto (x_0,y_0) distinto del origen, su ecuación será

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Hipérbola

3. La hipérbola está definida por los puntos X para los cuales se verifica que $H{:}\,|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a$ y al igual que en los casos anteriores, se puede expresar en coordenadas cartesianas.

   Como antes, si consideramos como eje OX a la recta que pasa por F_1 y F_2 y como eje OY a la recta perpendicular que pasa por el punto medio entre F_1 y F_2, los focos serán $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$.

   Entonces, si $X=(x,y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, resulta
$$|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$
   Podemos suponer que la diferencia es positiva y quitar las barras de módulo por tratarse de distancias
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
   Despejando una de las raíces
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
   Elevando ambos miembros al cuadrado
$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$
   Desarrollando y simplificando
$$(x-c)^2+\cancel{y^2}=4a^2+(x+c)^2+\cancel{y^2}+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
   Desarrollando y simplificando una vez más
$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx=4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
   Despejando
$$-4cx-4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
   Dividiendo cada término por 4
$$-cx-a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
   Elevando al cuadrado ambos miembros
$$(-cx-a^2)^2=\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$
   Desarrollando
$$c^2x^2+a^4+2a^2cx=a^2(x+c)^2+a^2y^2$$
   Simplificando
$$c^2x^2+a^4+\cancel{2a^2cx}=a^2x^2+a^2c^2+\cancel{2a^2cx}+a^2y^2$$
   Reordenando
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
   Sacando factor común
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$
   Dividiendo miembro a miembro por $a^2(c^2-a^2)$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$
   Llamando $b^2=c^2-a^2$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
   Así encontramos la ecuación de la hipérbola.

   El siguiente dibujo facilita la interpretación de lo anterior (Ilustración 21).

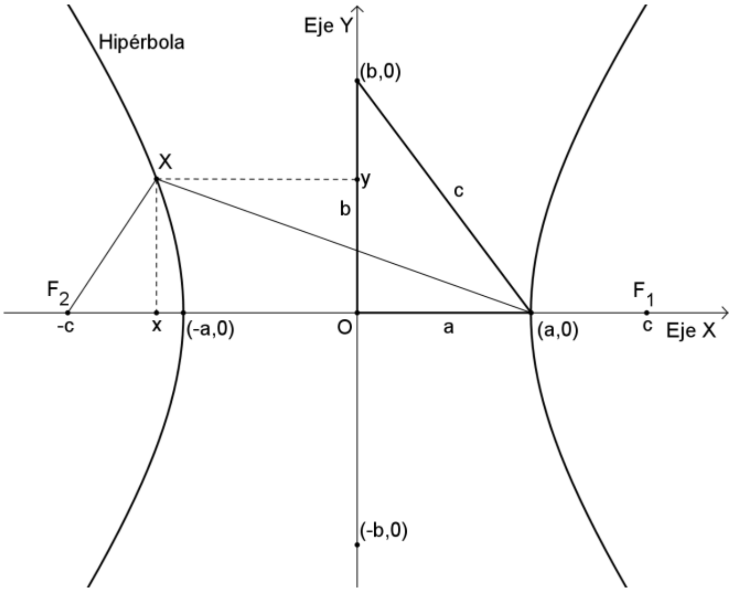


Ilustración 21: Representación de la hipérbola en el plano cartesiano.

Parábola

4. Por último, falta encontrar la ecuación cartesiana de las parábolas,

Podemos considerar que el eje OX contenga al foco F y sea perpendicular a la recta l.

Entonces la ecuación de la recta será $x = -c$ y el foco $F = (c, 0)$

Cualquier punto $X = (x, y)$ de la parábola debe cumplir que $d(X, F) = d(X, l)$

Los puntos de la recta son de la forma $(-c, y)$, entonces

$$d(X, l) = \sqrt{(x + c)^2 + (y - y)^2} = x + c$$

Luego, la igualdad

$$d(X, F) = d(X, l)$$

Será

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$$

Desarrollando y simplificando

$$\cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2cx + y^2 = \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2cx$$

Despejando

$$y^2 = 4cx$$

Llamando $p = 2c$se obtiene la ecuación de la parábola

$$y^2 = 2px$$

Donde p es el parámetro de la parábola e indica la distancia entre el vértice, $O = (0,0)$y la directriz (recta l).

La Ilustración 22 facilita la interpretación gráfica de la situación.

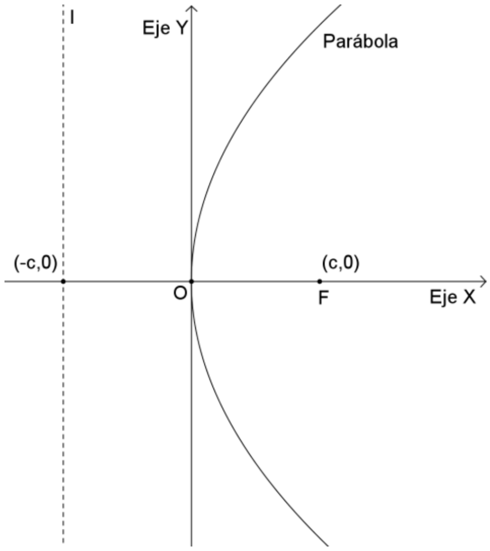


Ilustración 22: Representación de la parábola en el plano cartesiano.

Ecuaciones generales

A partir de la descripción previa podemos forjar las ecuaciones generales que nos permitan manejar las curvas de un modo más algebraico, así:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Dependiendo de los valores que tomen los parámetros $A, B, C, D. E, F$ se tienen las ecuaciones de las diferentes curvas:

Circunferencias: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Desarrollando los cuadrados

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by = r^2$$

Reordenando

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Llamando $D = -2a$, $E = -2b$ y $F = b^2 - c^2$

La ecuación de la circunferencia se transforma en

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Elipses:$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Despejando y desarrollando los cuadrados

$$\frac{x^2 + x_0^2 - 2x_0x}{a^2} = 1 - \frac{y^2 + y_0^2 - 2y_0y}{b^2}$$

Operando y multiplicando todo por a^2b^2

$$b^2x^2 + b^2x_0^2 - 2b^2x_0x = a^2b^2 - a^2y^2 + a^2y_0^2 - 2a^2y_0y$$

Reordenando

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2b^2 - a^2y_0^2 = 0$$

Llamando $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$,$E = 2a^2y_0$ y $F = b^2x_0^2 - a^2b^2 - a^2y_0^2$

La ecuación de la elipse será

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Parábolas:$(y - k)^2 = 2p(x - h)$ o $(x - h)^2 = 2p(y - k)$

Desarrollando cuadrados y despejando

$$y^2 - 2ky + k^2 - 2px + 2ph = 0$$

Reordenando

$$y^2 - 2px - 2ky + (k^2 + 2ph) = 0$$

Siendo $D = -2p$, $E = -2k$,$F = (k^2 + 2ph)$ o $D = -2h$, $E = -2p$, $F = (h^2 + 2pk)$

Resultan

$$\boxed{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0} \text{ o } \boxed{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Hipérbolas:$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Despejando y desarrollando los cuadrados

$$\frac{x^2 + x_0^2 - 2x_0x}{a^2} = 1 + \frac{y^2 + y_0^2 - 2y_0y}{b^2}$$

Operando y multiplicando todo por a^2b^2

$$b^2x^2 + b^2x_0^2 - 2b^2x_0x = a^2b^2 + a^2y^2 + a^2y_0^2 - 2a^2y_0y$$

Reordenando

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2b^2 - a^2y_0^2 = 0$$

Llamando $A = b^2$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$,$E = 2a^2y_0$ y $F = b^2x_0^2 - a^2b^2 - a^2y_0^2$

La ecuación de la hipérbola será

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Las ecuaciones anteriores pueden rescribirse de distintas maneras si se manipulan mediante operaciones algebraicas (factor común, completar cuadrados, etc.):

Formas canónicas

Circunferencias:$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Elipses: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Parábolas: $(x - h)^2 = 2p(y - k)$

Hipérbolas: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

También pueden ser interpretadas en coordenadas polares, vectoriales, paramétricas, racionales, etc. Esto permite tratamientos y aplicaciones más cómodas de las curvas, dependiendo del caso.

Reflexiones del capítulo 2

Con el enfoque que le hemos dado a las secciones cónicas en este Capítulo, intentamos mostrar que la inclusión de nuevos recursos como las TICs, permiten una mejor visualización y construcción de los conceptos tratados. No obstante, cabe aclarar que se conserva el estilo tradicional de mostrar a la Matemática como un conjunto de reglas y procedimientos que inexorablemente deben ser aplicados y aprendidos por los alumnos, y donde hay pocas chances de construir conceptos. La decisión obedeció a respetar el formato de presentación que tradicionalmente tiene en los libros de texto de Matemática, incluyendo sólo la componente referida a nuevos recursos, sin proponer una mejora de su tratamiento didáctico, pues no fue el objetivo del Capítulo.

Al mismo tiempo, debemos recalcar que la inclusión de los nuevos recursos que nos brindan las herramientas informáticas, permite y facilita la exploración y genera un nuevo camino al entendimiento de la Geometría de las cónicas.

Capítulo 3

Análisis didáctico de una unidad temática de un texto escolar

Introducción

Los diseños curriculares para la educación secundaria de la provincia de Buenos Aires contemplan como contenidos mínimos en la enseñanza, entre otros, a los lugares geométricos de las secciones cónicas.

Entre los materiales que el Gobierno de la Provincia de Buenos Aires distribuye en las escuelas a través del Programa Provincial Educativo, por medio de la Dirección General de Cultura y Educación (DGCyE) encontramos el texto que da lugar al presente trabajo.

Elegimos este texto en particular, por ser un material disponible en todas las escuelas de la Provincia de Buenos Aires, se trata del libro ES.5 Matemática. (Carnelli, Itzcovich, Lamela, Novembre, 2007, p. 162-185).Con el análisis realizado en este trabajo pretendemos determinar la idoneidad didáctica que subyace del texto considerado, siguiendo los lineamientos que para tal fin propone el Enfoque Ontológico Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS).

En primer lugar, mostramos y describimos brevemente los elementos analizados en el texto, con el fin de establecer un mejor abordaje del presente trabajo. Al mismo tiempo, presentamos tablas con las que intentamos organizar y sintetizar la recorrida por el análisis didáctico realizado.

Luego, resolvemos las actividades propuestas con el objetivo de determinar su grado de dificultad y la relación con el contenido teórico asociado.

Por último, presentamos una conclusión que sintetiza la labor realizada.

Utilizamos para el análisis didáctico la herramienta Configuración Epistémica/Cognitiva del EOS. Esta herramienta teórica-metodológica facilita el análisis de los conocimientos matemáticos en sus dos facetas, personal e institucional.

Una configuración es una entidad compleja utilizada para construir sistemas conceptuales y teorías. Sus componentes son seis objetos matemáticos primarios, entendiendo a éstos como "todo aquello que se pueda individualizar en Matemática, tal como un símbolo, un concepto una propiedad, una representación, un procedimiento, etcétera" (Pochulu, 2012, p. 66).Los mismos se clasifican en objetos ostensivos (se muestran de forma pública) y no ostensivos (en forma implícita).

Los objetos primarios involucrados en una configuración epistémica son (Pochulu, p. 69):

Situaciones-problema: son todas aquellas actividades intra o extra matemáticas que se ponen en juego a la hora de enseñar.

Conceptos-Definición: hacen referencia a aquellas cuestiones que tienen que ver con descripciones o definiciones.

Proposiciones: propiedades de los conceptos.

Procedimientos: todas aquellas acciones que el alumno o el docente hacen para resolver una situación- problema.

Lenguaje: puede ser gráfico, numérico, simbólico y coloquial.

Argumentos: se refieren a las acciones que tienden a explicar, justificar o dar validez a una solución de un problema, una proposición, un concepto o un procedimiento.

Dichos elementos se entrelazan formando una configuración. La misma puede ser Epistémica cuando hace referencia a redes de objetos matemáticos a nivel institucional, libros de textos (como lo será en nuestro caso), docentes, etc. o Cognitivas cuando apuntan a lo personal, por ejemplo el alumno.

Es importante destacar que cada objeto matemático puede estar compuesto por varios objetos primarios durante el análisis, dada a la red de entramados que ellos forman.

Agregaremos también los procesos que intervienen en la resolución de cada actividad, según el EOS, como por ejemplo: algoritmización, enunciación, simbolización, entre otros.

Las situaciones-problemas

La forma en se abordan las distintas secciones cónicas es a partir de situaciones problemas, en general geométricos, que promueven el "descubrimiento" del lugar geométrico (sección cónica) en cuestión. Así, el abordaje del tema se desarrolla a lo largo de catorce actividades. No observamos, en ninguno de los casos, una situación-problema de aplicación directa de las cónicas, de sus ecuaciones y/o de sus propiedades para la resolución. En todos los casos las situaciones presentadas y resueltas en el texto son exclusivamente geométricas, en el sentido abstracto, aunque su resolución es algebraica y/o analítica. No obstante, se pueden describir o clasificar como vemos en la siguiente tabla (ver Tabla 1).

Tabla 1: Caracterización de las prácticas matemáticas que proponen las situaciones problemas

P	Descripción	Práctica matemática principal
1	Problema gráfico sobre circunferencia	Trazar una circunferencia
2	Problema gráfico sobre parábola	Trazar una parábola
3	Problema algebraico sobre distancias y parábolas	Comparar distancias. Hallar puntos. Generar la ecuación
4	Problema algebraico sobre circunferencia	Generar la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$
		Resolver una cuadrática
5	Problema geométrico sobre circunferencia que generaliza a los anteriores	Generar la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
6	Problema algebraico sobre parábola con eje vertical (como función)	Hallar una ecuación de la parábola
7	Problema algebraico sobre parábola con eje horizontal (que no es función)	Hallar una ecuación de la parábola
8	Problema algebraico sobre parábola con eje vertical (como función)	Hallar una ecuación de la parábola
9	Problema algebraico sobre parábola con eje	Hallar una ecuación de la parábola

	horizontal (que no es función)	
10	Problema gráfico y algebraico sobre elipse	Graficar la elipse
11	Problema geométrico y algebraico sobre elipse	Hallar una ecuación de la elipse
12	Problema geométrico y algebraico sobre hipérbola	Hallar puntos de la hipérbola Hallar una ecuación de la hipérbola Resolver una cuadrática
13	Problema analítico sobre hipérbola (asíntotas)	Definir y hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola
14	Problema para interpretar las cónicas como cortes del cono por un plano	

Lo geométrico se hace presente a lo largo del capítulo y sirve como herramienta para interpretar los problemas y las actividades, como así también para reconocer ciertas características intrínsecas de las curvas que se estudian.

Los conceptos y definiciones involucrados en las actividades

En la presentación del capítulo se anticipa que se estudiarán relaciones entre variables que no siempre resultarán ser funciones, esto se refiere a la forma en que en general estudiamos y definimos las funciones, en la cual para cada valor de abscisa corresponde una única ordenada, y la asignación siempre es de x en y ($y = f(x)$). Asimismo, se puede inferir que se le dará tratamiento, en algunos casos, como funciones, a pesar de que el eje de la unidad sea geométrico y algebraico.

Las definiciones de las secciones cónicas aparecen en el texto, luego de la resolución de las tareas, a modo de generalización. Están hechas en función del lugar que ocupan en el plano cartesiano (como lugar geométrico) y de las características que cumplen sus puntos en términos de distancias en el plano. Surgen en todos los casos de la resolución de algún problema involucrado. Luego, la generalización de la condición de distancia produce la definición de la cónica en cuestión. También se definen los principales elementos de las cónicas que veremos en la siguiente tabla (ver Tabla 2).

Tabla 2: Elementos notables y definición de las secciones cónicas

Definición de la cónica	Elementos definidos	Observaciones
La **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto determinado que se llama **centro** de la circunferencia.	Radio r Centro Ecuaciones	Se distinguen las ecuaciones según esté centrada en el origen $O = (0,0)$ o en punto cualquiera $C = (a, b)$
Una **parábola** es el conjunto de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto F, llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**.	Foco F Vértice V Directriz d Parámetro p Ecuaciones	No son consideradas funciones las parábolas cuyo eje de simetría resulta paralelo al eje x
La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos donde la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.	Focos Centro Distancia focal Diámetro mayor Diámetro menor	Solo se tratan elipses con centro en el origen y focos sobre el eje x
La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano donde la diferencia de las distancias entre un punto y dos puntos fijos es constante.	Focos Centro Eje mayor Eje menor Distancia focal Vértices Asíntotas	Solo se tratan hiperbolas con centro en el origen y focos sobre el eje x Las asíntotas son definidas como $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$

Conceptos previos y emergentes

El principal concepto involucrado en la resolución de los distintos problemas desarrollados y luego en los propuestos, es el de distancias en el plano, ya sea entre dos puntos o entre un punto y una recta. Además, otros conceptos son utilizados como herramientas, como el teorema de Pitágoras, y los conceptos de función, perímetro y límites. Debemos aclarar que el concepto de función considerado en el texto hace referencia a asignaciones del tipo $f(x) = y$, es decir solo considera como función a las relaciones entre las variables x e y y en un solo sentido $x \to y$.

En la Tabla 3 identificamos las secciones cónicas puestas en juego en los problemas desarrollados en el texto y mostramos los conceptos involucrados en su resolución.

Tabla 3: Conceptos involucrados en la resolución de las situaciones problema

<table>
<tr><th rowspan="2">P</th><th rowspan="2">Lugar geométrico</th><th colspan="2">Conceptos involucrados</th></tr>
<tr><th>Previos</th><th>Emergentes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Circunferencia</td><td>Distancia</td><td>Existencia de infinitos puntos equidistantes a uno fijo
Centro
Radio</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Circunferencia</td><td>Distancias en el plano</td><td>Ecuación $x^2 + y^2 = r^2$
Las circunferencias no son funciones[5]</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Circunferencia</td><td>Distancias en el plano</td><td>Ecuación
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Parábola</td><td>Distancia entre un punto y una recta</td><td>Construcción punto por punto</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Parábola</td><td>Coordenadas cartesianas</td><td>Definición y ecuación $y = x^2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Parábola</td><td>Distancias en el plano</td><td>Ecuación $f(x) = ax^2, a = \frac{1}{4}p$
Relación entre la parábola como lugar geométrico y como función</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Parábola</td><td>Distancias en el plano</td><td>Las parábolas con directriz paralela al eje de ordenadas no son funciones[6]</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Parábola</td><td>Distancias en el plano</td><td>Ecuación
$(x - k)^2 = 4p(y - h)$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Parábola</td><td>Distancias en el plano</td><td>Las parábolas con eje paralelo al eje de abscisas no son funciones[7]</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Elipse</td><td>Perímetro</td><td>Ecuación $x + y = 10$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Elipse</td><td>Distancias en el plano
Perímetro
Teorema de Pitágoras</td><td>Definición
Focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$
Distancia focal
Ecuación
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b^2 = a^2 - c^2$</td></tr>
</table>

[5]Aquí se evidencia la definición de función considerada en el texto.

[6]Aquí también se evidencia la definición de función considerada en el texto.

[7]Aquí también se evidencia la definición de función considerada en el texto.

12	Hipérbola	Distancias en el plano	Definición Focos Eje mayor y eje menor Centro Distancia focal Vértices
13	Hipérbola	Distancias en el plano Límites	Asíntotas y sus ecuaciones $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$
14	Cónicas	Cónicas como cortes del cono por un plano	

Las propiedades y proposiciones que involucran las actividades

Las principales propiedades y características de las secciones cónicas presentadas en el texto pasan por la simetría. Otras, como las de reflexión, o las propiedades ópticas no son abordadas. Si bien se definen y se describen los principales elementos de las secciones cónicas, no observamos problemas o situaciones donde se puedan aplicar las cónicas. Sí, hacia el final del capítulo, el último problema sirve para interpretar concretamente la formación de las cónicas como secciones del cono con un plano.

En la Tabla 4 mostramos las propiedades descriptas en el texto analizado, muchas de ellas se hacen notables a partir de la interpretación gráfica de la cónica estudiada. Las propiedades mencionadas aparecen en las generalizaciones que se hacen luego de la resolución de las situaciones-problemas.

Tabla 4: Propiedades de las cónicas

Cónica	Ecuación	Propiedades
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$-r \leq x \leq r$ $-r \leq y \leq r$
	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$a - r \leq x \leq a + r$ $b - r \leq y \leq b + r$
Parábola	$f(x) = ax^2$	$a = \frac{1}{4p}$
	$f(x) = a(x-k)^2 + h$ $(x-k)^2 = 4p(y-h)$	$V = (k, h)$ $F = (k; h + p)$
Elipse	$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$	$F_1 = (c, 0); F_2 = (-c, 0)$ $b^2 = a^2 - c^2$ $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

Hipérbola	$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$	$F_1=(c,0);F_2=(-c,0)$ $d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a$ $y=\frac{b}{a}x;y=-\frac{b}{a}x$

Los argumentos, procedimientos y técnicas involucrados en las actividades

Las actividades propuestas en el texto, como tarea para reforzar los conocimientos adquiridos por los estudiantes, no solo promueven la repetición de los procedimientos realizados en los ejemplos, sino que a su vez abren un poco el juego, dando margen a la generación de nuevas ideas o estrategias a ejecutar por los alumnos, a la vez que suscitan la argumentación de las respuestas. Dichas actividades son diversas y abarcan por completo los ejes desarrollados a lo largo del capítulo.

A continuación presentamos y se resolvemos las actividades propuestas, con el fin de poner en evidencia las acciones, técnicas y procedimientos a desarrollar por los estudiantes al momento de resolverlas (ver Imagen 1).

1. Encuentren las ecuaciones de las siguientes circunferencias:
a. Centro $(-6;8)$ y radio 3.
b. Centro $(1;-1)$ y radio 5.
c. Centro $(0;0)$ y que pasa por el punto $(-2;4)$.
2. a. Encuentren la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 6.
b. Encuentren un punto de la circunferencia que se encuentre en el primer cuadrante y otro que se encuentre en el cuarto cuadrante.
3. Escriban la ecuación de las parábolas que tienen vértice en el origen de coordenadas, eje de simetría en el eje y, y cuyo parámetro es:
a. $p=4$ **b.** $p=\frac{1}{6}$ **c.** $p=\frac{2}{3}$ **d.** $p=5$
4. Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(0;-5)$ y directriz $y=\frac{2}{3}$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.
5. Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(3;0)$ y directriz $x=1$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.
6. a. Encuentren los puntos donde la parábola $(y-1)^2=6\cdot(x+2)$ interseca al eje x y al eje y.
b. Realicen un gráfico aproximado de la parábola.
c. ¿Es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Imagen 1: Actividades propuestas en el texto analizado.

Para continuar, describiremos globalmente los ejercicios y situaciones-problemas planteados con el fin de organizar la lectura de la resolución de los mismos (Tabla 5). Luego, los resolveremos, haciendo notable la tarea que se espera que sea realizada por los alumnos al dar respuesta a las actividades.

Tabla 5: Descripción de las actividades propuestas

Act.	Descripción		
	Práctica matemática propuesta	Datos	Respuesta esperada
1.a	Completar $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	a, b, r	$(x+6)^2+(y-8)^2=9$
1.b	Completar $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	a, b, r	$(x-1)^2+(y+1)^2=25$
1.c	Hallar el radio y completar $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$a, b, (x, y)$	$x^2+y^2=20$
2.a	Completar $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	a, b, r	$x^2+y^2=36$
2.b	Hallar puntos de la circunferencia	Ecuación	$\left(1, \sqrt{35}\right)$ y $\left(1, -\sqrt{35}\right)$
3.a	Completar $(x-k)^2=4p(y-h)$	V, p, eje	$x^2=16\cdot y$
3.b	Completar $(x-k)^2=4p(y-h)$	V, p, eje	$x^2=\frac{8}{3}\cdot y$
3.c	Completar $(x-k)^2=4p(y-h)$	V, p, eje	$x^2=\frac{2}{3}\cdot y$
3.d	Completar $(x-k)^2=4p(y-h)$	V, p, eje	$x^2=20\cdot y$
4	Completar $(x-k)^2=4p(y-h)$ Argumentar	F, d	$x^2=-\frac{34}{3}\cdot\left(y+\frac{13}{6}\right)$
5	Completar $(y-h)^2=4p(x-k)$ Argumentar	F, d	$y^2=4\cdot(x-2)$
6.a	Hallar intersecciones con los ejes	Ecuación	$\left(0; 1+\sqrt{12}\right), \left(0; 1-\sqrt{12}\right)$ $\left(-\frac{11}{6}; 0\right)$
6.b	Graficar la curva	Ecuación	Gráfico
6.c	Argumentar	Ecuación	No

Seguidamente transcribimos y se resolvemos las actividades, indicando al mismo tiempo, cuales son los conceptos (previos y emergentes), procedimientos, estrategias y argumentos involucrados.

Actividad 1. Encuentren las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a. Centro $(-6; 8)$ y radio 3.
b. Centro $(1; -1)$ y radio 5.
c. Centro $(0; 0)$ y que pasa por el punto $(-2; 4)$.

Se trata de un ejercicio en el que se deben completar ecuaciones de la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Con los datos propuestos. Para los ítems a. y b. no se presentan mayores dificultades, su resolución es inmediata, ya que los datos son a, b y r:

a. Centro $(-6;8)$ y radio 3:

Siendo $a=-6$, $b=8$ y $r=3$, resulta

$$(x+6)^2+(y-8)^2=9$$

b. Centro $(1;-1)$ y radio 5:

Siendo $a=1$, $b=-1$ y $r=5$, resulta

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

En el ítem c. el radio no es un dato directo, los datos son el centro de la circunferencia y un punto por donde pasa, por tanto, se necesita hallar el valor del radio, entonces, se pone en juego el cálculo de la distancia entre dos puntos (el centro y el punto por donde pasa la circunferencia), para hallar el radio.

c. Centro $(0;0)$ y que pasa por el punto $(-2;4)$:

Concepto previo: La distancia del centro $(0;0)$ al punto $(-2;4)$ es igual al radio de la circunferencia, dicha distancia se calcula como sigue

Procedimiento:

$$r=d\big((-2;4);(0;0)\big)=\sqrt{(-2-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}$$

Luego, la ecuación de la circunferencia (que tiene centro en el origen) será

$$x^2+y^2=20$$

Actividad 2. a. Encuentren la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 6

Solo difiere del ejercicio anterior en la forma en que se presentan los datos.

Dada la condición de que el centro está en el origen $(0;0)$ y conociendo el radio resulta de inmediato que la ecuación buscada es

$$x^2+y^2=36$$

b. Encuentren un punto de la circunferencia que se encuentre en el primer cuadrante y otro que se encuentre en el cuarto cuadrante.

Para dar solución a este ítem es necesario haber resuelto el anterior, y además invita a quien lo resuelve a manipular la ecuación hallada.

Como concepto emergente para resolver este ejercicio se debe tener en cuenta el recorrido de las variables x e y, que en el caso pedido son $-6\leq x\leq 6$ y $-6\leq y\leq 6$, dado que el centro de la circunferencia se encuentra en el origen de coordenadas y el radio es 6; como se pide encontrar puntos que estén en cierto cuadrante, se puede recurrir al conocimiento previo de los signos de las coordenadas según el cuadrante (Tabla 6).

Tabla 6; Regla de signos

Cuadrante	Signo
I cuadrante	$(+;+)$
II cuadrante	$(-;+)$
III cuadrante	$(-;-)$
IV cuadrante	$(+;-)$

Estrategia:

Se puede dar solución al problema escogiendo un valor para una de las variables, reemplazarla en la ecuación y despejar la otra; luego, como la ecuación resultante se trata de una cuadrática se obtendrán dos valores que servirán como segundas coordenadas de los puntos buscados.

Procedimiento:

Teniendo en cuenta lo dicho, que los puntos en el primer y el cuarto cuadrante tienen primera coordenada positiva, se debe considerar un valor para x tal que $0 < x < 6$.

De esta manera, escogiendo un valor positivo para x, por ejemplo $x = 1$, y reemplazando en la ecuación de la circunferencia resulta

$$1^2 + y^2 = 36$$

Despejando y resolviendo

$$y^2 = 36 - 1 = 35$$

Luego

$$y = \sqrt{35} o\ y = -\sqrt{35}$$

Entonces los puntos de la circunferencia hallados serán $P_1 = (1, \sqrt{35})$ que pertenece al primer cuadrante y $P_2 = (1, -\sqrt{35})$ que pertenece al cuarto cuadrante.

Actividad 3.Escriban la ecuación de las parábolas que tienen vértice en el origen de coordenadas, eje de simetría en el eje y, y cuyo parámetro es:

a. $p = 4$
b. $p = \frac{2}{3}$
c. $p = \frac{1}{6}$
d. $p = 5$

Argumentos:

Los datos del problema indican que se trata de ejercicios en los que se debe completar la ecuación de una parábola de la forma $(x - k)^2 = 4p(y - h)$ considerando como datos las coordenadas del vértice $(k; h)$, el eje de simetría (eje y) y el parámetro (p).

Resulta similar a la actividad 1, en el sentido de completar la ecuación, pero con parábolas.

Procedimiento:

Para resolver estos ejercicios se debe tener en cuenta que el vértice es $v = (0; 0)$ con lo cual $k = 0$ y $h = 0$, y que el eje de simetría es el eje y, luego se completa la ecuación

$$(x-0)^2 = 4\cdot p\cdot (y-0)$$

Y entonces

$$x^2 = 4\cdot p\cdot y$$

Así resulta:

a. $x^2 = 4\cdot 4\cdot y \Rightarrow x^2 = 16\cdot y$
b. $x^2 = 4\cdot \frac{2}{3}\cdot y \Rightarrow x^2 = \frac{8}{3}\cdot y$
c. $x^2 = 4\cdot \frac{1}{6}\cdot y \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}\cdot y$
d. $x^2 = 4\cdot 5\cdot y \Rightarrow x^2 = 20\cdot y$

Actividad 4.Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(0;-5)$ y directriz $y=\frac{2}{3}$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

En este caso, los datos son el foco y la directriz, por lo tanto, el desafío será encontrar una ecuación que describa todos los puntos de la parábola teniendo en cuenta su definición como lugar geométrico, o dicho de otro modo, en términos de distancias. También habrá que tener en cuenta las características de las parábolas para encontrar otros datos que se deducen del enunciado.

Argumentos:

La directriz es perpendicular al eje y, por lo tanto, se puede argumentar que la parábola tiene eje vertical y su gráfico sí es el de una función.

Se busca entonces, como antes, una ecuación de la forma $(x-k)^2 = 4\cdot p\cdot (y-h)$.

La primera coordenada del vértice coincide con el eje de simetría y es la misma que la primera coordenada del foco, siendo en este caso $k=0$.

Como el foco es $(0:-5)$, el eje de simetría es el eje y.

Conceptos:

La distancia entre el vértice y el foco es igual al doble del parámetro $d(F;y) = 2\cdot p$, por lo tanto, $p=\frac{1}{2}\cdot d(F;y)$

Procedimiento:

Como el eje de simetría de la parábola es $x=0$. Para calcular esta distancia se considera el punto $P=\left(0;\frac{2}{3}\right)$, que es la intersección entre la directriz y el eje de la parábola.

$$d(F;y) = d(F;P) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(-5-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{17}{3}$$

Luego

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{3} = \frac{17}{6}$$

Además, las coordenadas del foco son $F=(k;h+p)=(0;-5)$, entonces $h+p=-5$

Despejando y remplazando $h=-5-p=-5-\frac{17}{6}=-\frac{13}{6}$

Así, por todo lo anterior $k = 0$, $h = -\frac{13}{6}$ y $p = \frac{17}{6}$ entonces la ecuación buscada sería

$$(x - 0)^2 = 4 \cdot \frac{17}{6} \cdot \left(y - \left(-\frac{13}{6}\right)\right)$$

$$x^2 = \frac{34}{3} \cdot \left(y + \frac{13}{6}\right)$$

Como los valores de y a tener en cuenta deben ser menores que $-\frac{13}{6}$, ya que, el vértice $V = \left(0; -\frac{13}{6}\right)$ de la parábola está por "debajo" de la directriz, entonces, se trata de encontrar la parábola que tendrá sus ramas hacia abajo, por lo tanto, corrigiendo los signos, la ecuación será

$$x^2 = -\frac{34}{3} \cdot \left(y + \frac{13}{6}\right)$$

Por último, se trata de una función ya que para cada valor de la variable x se obtiene un único valor de la variable y.

Es necesario en esta parte del trabajo, que aclaremos que en el texto no se hace referencia a las parábolas con el vértice por debajo de la directriz, con lo cual la resolución de la actividad anterior podría generar conflictos que requieren la supervisión del docente. Sugerimos la interpretación gráfica para distinguir esta condición de los signos (ver Ilustración 23). Para ello, recurrimos una vez más, al uso del software dinámico, que además, nos brinda el gráfico de la parábola ingresando los datos tal y como aparecen en la situación-problema.

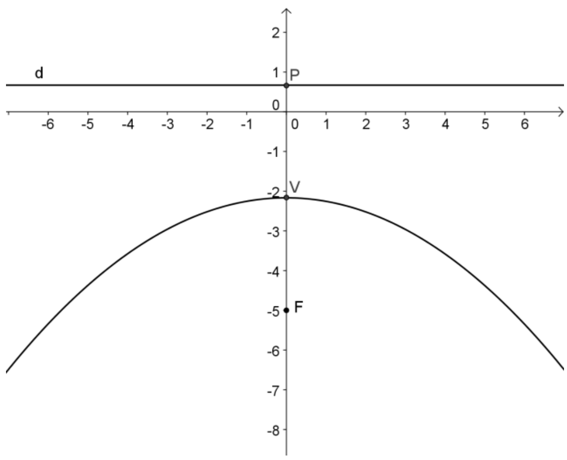


Ilustración 23: Parábola de la Actividad 4.

Actividad 5.

Encuentren la ecuación de la parábola de foco $(3; 0)$ y directriz $x = 1$, ¿es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Este ejercicio es similar al anterior, solo cambia en la orientación de la directriz, la parte algebraica resulta similar.

<u>Argumentos</u>:

El foco de la función es de la forma $F = (p, 0)$, por lo tanto, se observa que la directriz es paralela al eje y, entonces no se trata de una función sino de una parábola con eje de simetría paralelo al eje de abscisas.

Se busca, por ende, una ecuación de la forma $(y-h)^2 = 4 \cdot p \cdot (x-k)$.

En este caso, la segunda coordenada del vértice es la misma que la del foco, entonces será $h = 0$. La distancia entre el vértice y el foco es igual al doble del parámetro $d(F; x) = 2 \cdot p$, por lo tanto, $p = \frac{1}{2} \cdot d(F; x)$

<u>Procedimiento</u>:

Para calcular esta distancia se considera el punto $P = (1; 0)$, intersección entre la recta directriz y el eje de la parábola.

$$d(F; x) = d(F; P) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-0)^2} = 2$$

Luego

$$p = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Además, las coordenadas del foco son $F = (k+p; h) = (3; 0)$, entonces $k + p = 3$

Despejando y remplazando $k = 3 - p = 3 - 2 = 1$

Así, por todo lo anterior $k = 2$, $h = 0$ y $p = 1$ entonces la ecuación buscada será

$$(y-0)^2 = 4 \cdot 1 \cdot (x-2)$$
$$y^2 = 4 \cdot (x-2)$$

En esta ocasión, vemos que no se trata de una función puesto que, se pueden encontrar puntos de la parábola, que tienen la misma abscisa y dos ordenadas distintas. Esto es fácil de observar en el gráfico (ver Ilustración 24).

Por ejemplo, escogiendo $x = 3$, resulta $y^2 = 4 \cdot (3-2)$, luego, despejando $y = 2$ o $y = -2$. Así, se obtienen los puntos $P_1 = (3; 2)$ y $P_2 = (3; -2)$.

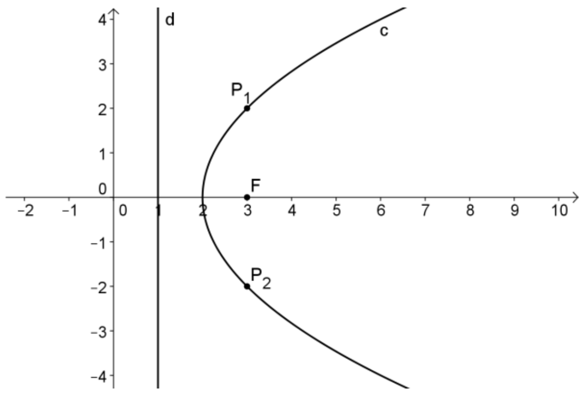


Ilustración 24: Parábola de la Actividad 5.

Actividad 6.

d. Encuentren los puntos donde la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$ interseca al eje x y al eje y.
e. Realicen un gráfico aproximado de la parábola.
f. ¿Es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Este es un problema distinto a todos los tratados anteriormente, que requiere interpretar los puntos de la parábola a partir de su ecuación.

Argumentos:

En el primer inciso se pide hallar los puntos de la parábola que sean de la forma $(0; y)$ y $(x; 0)$ entonces será necesario resolver las ecuaciones que surgen de reemplazar las variables por 0, una a la vez. Así, reemplazando en la ecuación $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$ resulta:

Procedimiento:

Con $x = 0$

$$(y-1)^2 = 6 \cdot (0+2)$$

$$(y-1)^2 = 12$$

$$y - 1 = \sqrt{12} \text{ o } y - 1 = -\sqrt{12}$$

$$y = \sqrt{12} + 1 \text{ o } y = -\sqrt{12} + 1$$

Y con $y = 0$

$$(0-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$$

$$1 = 6 \cdot (x+2)$$

$$\frac{1}{6} - 2 = x$$

$$x = -\frac{11}{6}$$

Luego, los puntos buscados serán $\left(0; 1+\sqrt{12}\right)$, $\left(0; 1-\sqrt{12}\right)$ y $\left(-\frac{11}{6}; 0\right)$

Para realizar un gráfico aproximado se pueden tener en cuenta los puntos obtenidos en el ítem anterior.

Propiedades:

Las coordenadas del vértice se pueden conseguir fácilmente a partir de la ecuación de la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$. Tenemos entonces $V = (-2; 1)$. Y el gráfico será el que observamos en la Ilustración 25:

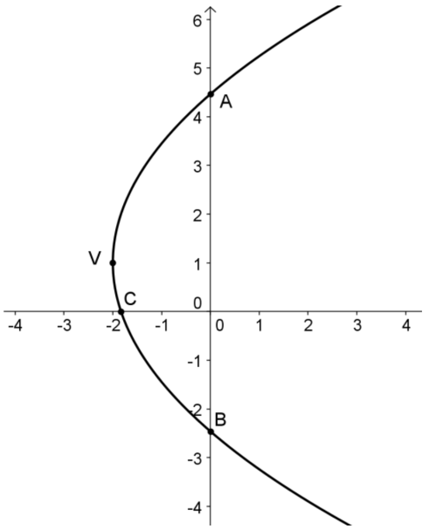


Ilustración 25: Parábola de la Actividad 6.

En el gráfico se observan los puntos obtenidos anteriormente siendo:

El vértice $V = (-2;1)$

Las intersecciones con el eje y $A = \left(0;1+\sqrt{12}\right)$ y $B = \left(0;1-\sqrt{12}\right)$

Y la intersección con el eje x $C = \left(-\frac{11}{6};0\right)$

Por último, se pide determinar si se trata o no de una función, en este caso, la respuesta es no, y los argumentos para fundamentar esto son varios, por un lado, se puede contar con el gráfico realizado (Ilustración 25), por otro lado, se puede recurrir al hecho de que los puntos A y B antes hallados, tienen la misma abscisa y dos valores distintos de ordenada.

Análisis de las (nuevas) actividades propuestas

Seguidamente, en el texto, se retoma la parte teórica para presentar otras nuevas secciones cónicas, la elipse y la hipérbola, y siguiendo con el formato se proponen las siguientes actividades (Imagen 2).

7. a. Encuentren la ecuación de una elipse con focos en $(-\frac{1}{2};0)$ y $(\frac{1}{2};0)$.

b. Indiquen dos puntos de esta elipse que se encuentren en el tercer cuadrante.

c. ¿Cuántas elipses cumplen esa condición? ¿Por qué?

8. Encuentren la ecuación de la elipse que tiene centro en el origen de coordenadas, su semidiámetro en el eje *x* es igual a 4 y su semidiámetro en el eje *y* es igual a 2.

9. Encuentren los focos de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{15}=1$.

10. ¿Cuál es el punto de abscisa $7\frac{1}{2}$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$? Esta relación, ¿resulta ser una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Imagen 2: Actividades propuestas.

En la Tabla 7 describimos las actividades propuestas sobre elipses.

Tabla 7: Descripción de las actividades propuestas

Act.	Descripción		
	Objetivos	Datos	Respuesta
7.a	Hallar la ecuación de una elipse	Focos	$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$
7.b	Hallar puntos de la elipse	Elipse	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$
7.c	Argumentar	Teoría	Infinitas
8	Hallar la ecuación de una elipse	Centro Semidiámetros	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
9	Hallar los focos	Ecuación	$F_1=(0;-3)$y$F_2=(0;3)$
10	Hallar un punto de la elipse	Ecuación	$\left(7\frac{1}{2};9{,}8\right)$ y $\left(7\frac{1}{2};-9{,}8\right)$

Como antes, transcribimos y resolvemos las actividades.

Actividad 7.

a. Encuentren la ecuación de una elipse con focos en $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ y $\left(\frac{1}{2};0\right)$.
b. Indiquen dos puntos de esta elipse que se encuentren en el tercer cuadrante.
c. Cuantas elipses cumplen esa condición.

Argumentos:

El primer ítem de este ejercicio propone encontrar la ecuación de una elipse conociendo sus focos, con esos datos podemos conocer la distancia focal y el centro de la elipse, sin embargo, nada se puede decir a priori, acerca de los parámetros a y b de la ecuación buscada que es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $c=\frac{1}{2}$ y la condición $b^2=a^2-c^2$, habrá que "elegir" un valor arbitrario para a, y determinar b^2, usando la condición $b^2=a^2-c^2$.

Procedimiento:

Si se elige $a=1$ resulta

$$a^2=1, b^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

De este modo, se encuentra la ecuación

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Luego, en el segundo ítem se pide indicar dos puntos de la ecuación hallada que estén en el tercer cuadrante, para ello deben tenerse en cuenta los signos de las coordenadas según el cuadrante que ocupan, como se vio en el ejercicio 2.b de la sección anterior. En esta oportunidad se buscarán dos de los puntos de la elipse, cuyas coordenadas sean ambas negativas.

Procedimiento:

Para encontrar dichos puntos se puede despejar x de la ecuación y elegir un valor para y

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Y considerando que el valor hallado debe ser negativo será

$$x = -\sqrt{1 - \frac{4y^2}{3}}$$

Solo falta tener en cuenta que $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ para poder considerar la raíz cuadrada.

Así, con $y = -\frac{1}{2}$ resulta $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ y con $y = -\frac{3}{4}$ queda $x = -\frac{1}{2}$ y los puntos serán

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{1}{2}\right) \text{y} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$$

Por último, el tercer ítem se puede responder teniendo en cuenta lo realizado ya que la cantidad de elipses que se pueden encontrar es infinita, porque dependen del valor elegido para a en el punto 7.a.

Actividad 8. Encuentren la ecuación de la elipse que tiene centro en el origen de coordenadas, su semidiámetro en el eje x es igual a 4 y su semidiámetro en el eje y es igual a 2.

Argumentos:

Esta actividad se resuelve fácilmente teniendo presente las últimas definiciones presentadas para la elipse. Entonces, la ecuación buscada será la que resulte al considerar $a = 4$ y $b = 2$, esto es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Actividad 9. Encuentren los focos de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{15} = 1$$

La resolución de esta actividad se puede realizar teniendo presente la última definición presentada de la elipse, y la relación entre los parámetros a, b y c que es $b^2 = a^2 - c^2$.

Entonces serán

$$a^2 = 24, b^2 = 15$$

Reemplazando y despejando

$$c^2 = 24 - 15$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros

$$c = \sqrt{9}$$

Por lo tanto, $c = 3$ y los focos serán

$$F_1 = (0; -3) \text{y} F_2 = (0; 3)$$

Actividad 10. ¿Cuál es el punto de abscisa $7\frac{1}{2}$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$?

Esta relación, ¿resulta ser una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Esta actividad consta de dos preguntas, la primera se responde fácilmente, mediante una operación algebraica, la segunda requiere una reflexión más elaborada que pone en juego una vez más, el concepto de función, y promueve la argumentación.

Con lo dicho, para averiguar cuál es el punto buscado se considera $x = 7\frac{1}{2}$ y se despeja la coordenada y, así de

$$\frac{\left(7\frac{1}{2}\right)^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

Despejando y operando

$$\frac{y^2}{144} = 1 - \frac{225}{676}$$

Luego,

$$y^2 = 144 \cdot \frac{451}{676}$$

Resulta,

$$|y| = \sqrt{\frac{16236}{169}} \cong 9,8$$

Por lo tanto, los puntos de la elipse cuya abscisa es $x = 7\frac{1}{2}$ son $\left(7\frac{1}{2}; 9,8\right)$ y $\left(7\frac{1}{2}; -9,8\right)$
Con esto último, entonces se puede afirmar que no se trata de una función ya que existen dos puntos con la misma abscisa y dos ordenadas distintas.

Las actividades anteriores cierran la sección de las elipses y siguiendo se presentan las hipérbolas a través de un único problema, y luego otro muestra las asíntotas y sus ecuaciones.

Procedimientos

Los procedimientos involucrados en la resolución de los diversos problemas recurren constantemente al uso de los registros gráfico y algebraico, para representar la situación, de este modo la interpretación gráfica genera un acercamiento más apropiado y eficiente hacia la resolución, así como también, el registro algebraico permite modelizar las situaciones desarrolladas. En la tabla siguiente se muestran los procedimientos involucrados distinguidos como interpretación a priori y desarrollo secundario (ver Tabla 8). Cabe destacar, que en todos los casos las actividades resueltas en el texto, presentan un procedimiento para su resolución pero en ningún caso cierran la posibilidad de utilizar otro, al distinguir lo que se hace como un modo o una manera posible de realizar la tarea, es decir, dejan abierta la posibilidad de interpretar y resolver el contenido por otras vías.

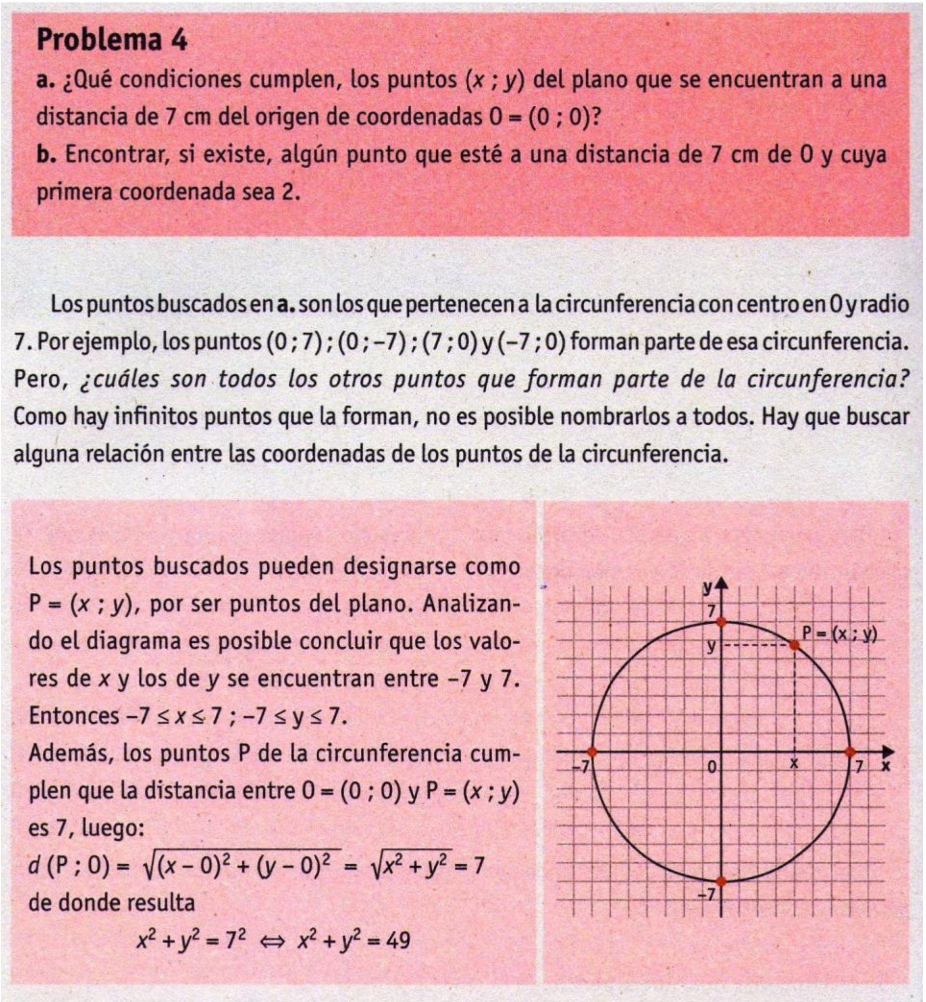
Tabla 8: Procedimientos incluidos en la resolución

Problema	Interpretación	Desarrollo
1	Medición de distancias	Trazado de una circunferencia
4.a	Interpretación gráfica	Desarrollo algebraico
4.b	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
5	Interpretación gráfica	desarrollo algebraico
2	Interpretación gráfica	Trazado punto por punto
3.a	Interpretación gráfica	Desarrollo algebraico
3.b	Trazado punto por punto	Desarrollo algebraico
6	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
7	Interpretación gráfica	Desarrollo algebraico
8	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
9	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
10	Interpretación gráfica	Desarrollo gráfico
11	Interpretación geométrica	Desarrollo algebraico
12.a	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
12.b	Interpretación algebraica	Desarrollo algebraico
12.c	Interpretación algebraica	Desarrollo gráfico
13	Interpretación analítica	Desarrollo algebraico
14.a	Interpretación geométrica	Desarrollo geométrico

14.b	Interpretación geométrica	Desarrollo geométrico

Elementos lingüísticos presentes en las actividades

Los elementos lingüísticos presentes en el texto analizado son de naturaleza verbal, simbólica y/o gráfica. La mayoría de las actividades resueltas en el texto, involucran algún registro gráfico de la situación, que permite interpretar fácilmente las definiciones y propiedades; a su vez, algunas situaciones se resuelven cambiando de registro. Por ejemplo, en la resolución del ***Problema 4***, partiendo del dibujo (registro gráfico) se llega a la ecuación (registro simbólico) de la circunferencia (Imagen 3).



Problema 4

a. ¿Qué condiciones cumplen, los puntos $(x\ ;\ y)$ del plano que se encuentran a una distancia de 7 cm del origen de coordenadas $0 = (0\ ;\ 0)$?

b. Encontrar, si existe, algún punto que esté a una distancia de 7 cm de 0 y cuya primera coordenada sea 2.

Los puntos buscados en **a.** son los que pertenecen a la circunferencia con centro en 0 y radio 7. Por ejemplo, los puntos $(0\ ;\ 7)$; $(0\ ;\ -7)$; $(7\ ;\ 0)$ y $(-7\ ;\ 0)$ forman parte de esa circunferencia. Pero, *¿cuáles son todos los otros puntos que forman parte de la circunferencia?* Como hay infinitos puntos que la forman, no es posible nombrarlos a todos. Hay que buscar alguna relación entre las coordenadas de los puntos de la circunferencia.

Los puntos buscados pueden designarse como $P = (x\ ;\ y)$, por ser puntos del plano. Analizando el diagrama es posible concluir que los valores de x y los de y se encuentran entre -7 y 7. Entonces $-7 \leq x \leq 7$; $-7 \leq y \leq 7$.

Además, los puntos P de la circunferencia cumplen que la distancia entre $0 = (0\ ;\ 0)$ y $P = (x\ ;\ y)$ es 7, luego:

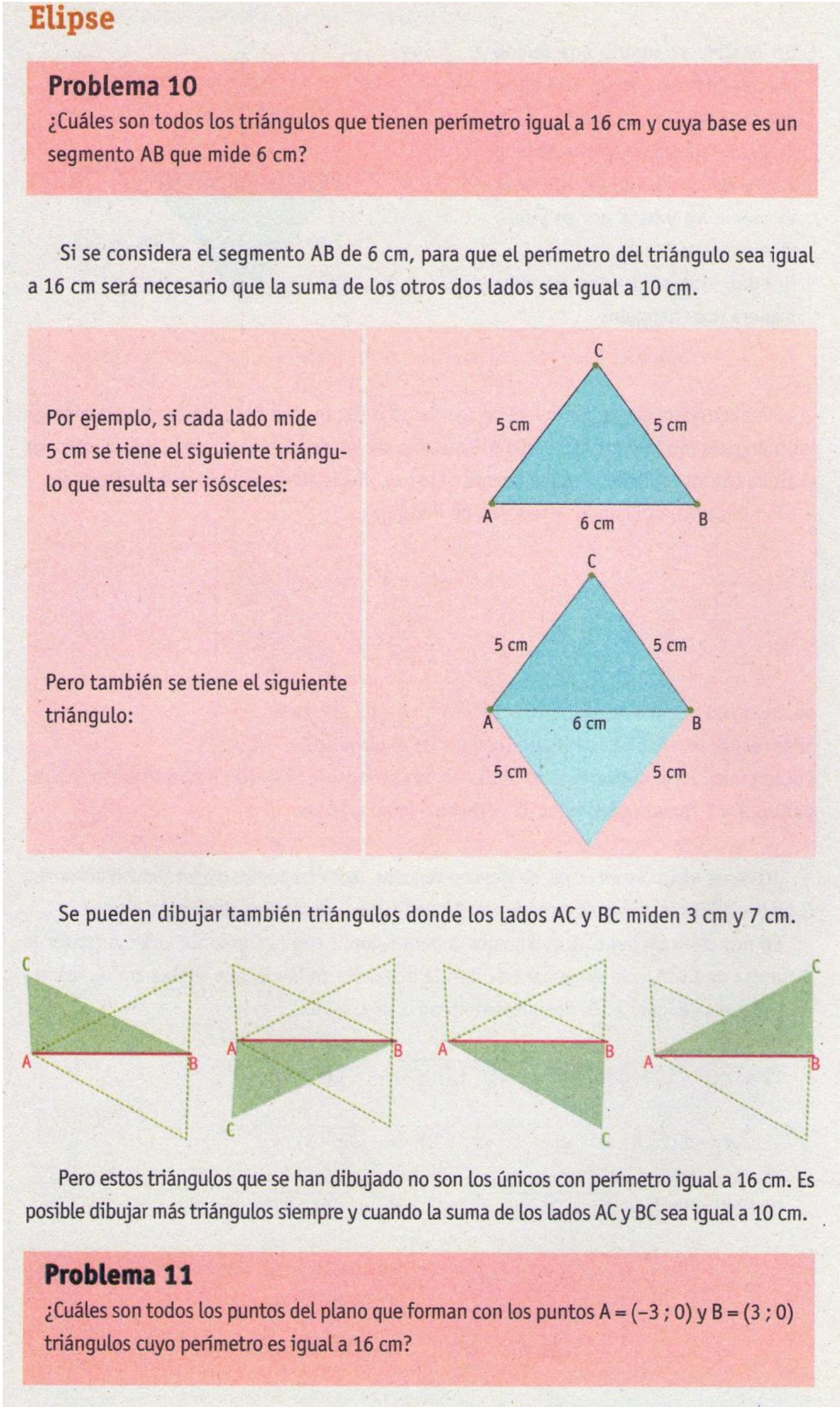
$$d\,(P\ ;\ 0) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 7$$

de donde resulta

$$x^2 + y^2 = 7^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 49$$

Imagen 3 Problema 4 y su resolución.

También observamos en el ***Problema 10*** que se recurre al registro gráfico y se observan varios de los triángulos que le dan solución, y en el ***Problema 11*** se generaliza el anterior al tiempo que se confina al plano cartesiano y, de este modo, se traduce a un problema e distancias en el plano (Imagen 4) cuya resolución es casi exclusivamente algebraica. La manipulación algebraica da lugar a la ecuación de la elipse y a su definición.



Elipse

Problema 10

¿Cuáles son todos los triángulos que tienen perímetro igual a 16 cm y cuya base es un segmento AB que mide 6 cm?

Si se considera el segmento AB de 6 cm, para que el perímetro del triángulo sea igual a 16 cm será necesario que la suma de los otros dos lados sea igual a 10 cm.

Por ejemplo, si cada lado mide 5 cm se tiene el siguiente triángulo que resulta ser isósceles:

Pero también se tiene el siguiente triángulo:

Se pueden dibujar también triángulos donde los lados AC y BC miden 3 cm y 7 cm.

Pero estos triángulos que se han dibujado no son los únicos con perímetro igual a 16 cm. Es posible dibujar más triángulos siempre y cuando la suma de los lados AC y BC sea igual a 10 cm.

Problema 11

¿Cuáles son todos los puntos del plano que forman con los puntos A = (−3 ; 0) y B = (3 ; 0) triángulos cuyo perímetro es igual a 16 cm?

Imagen 4: Problemas 10 y 11.

Las definiciones de las cónicas y sus elementos, están dadas como lugar geométrico, y en un modo más algebraico se utilizan las ecuaciones cartesianas de las mismas.

Los problemas resueltos en el texto que no utilizan los tres tipos de registros son pocos y los detallamos en la Tabla 9.

Tabla 9: Tipos de registros.

Actividad	Verbal	Simbólico	Gráfico
6	Si	Si	No
8	Si	Si	No
13	Si	Si	No
14	Si	No	Si

El primero de ellos es el ***Problema 6*** que se resuelve algebraicamente, al igual que el ***Problema 8***y el ***Problema 13***. Por último, el ***Problema 14*** que es distinto a los anteriores y pretende una interpretación "cotidiana" de las cónicas, ya que propone "ver" las intersecciones entre un cono y un plano (Imagen 5).

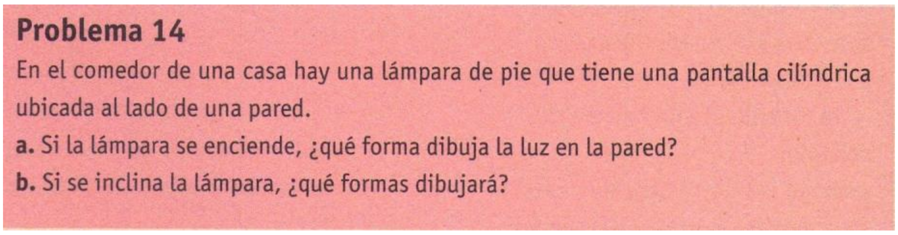

Problema 14
En el comedor de una casa hay una lámpara de pie que tiene una pantalla cilíndrica ubicada al lado de una pared.
a. Si la lámpara se enciende, ¿qué forma dibuja la luz en la pared?
b. Si se inclina la lámpara, ¿qué formas dibujará?

Imagen 5: Problema 14.

Idoneidad didáctica de la unidad referida a cónicas

Según el EOS "es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados" (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.1).

La idoneidad didáctica se describe a través de seis perfiles que el EOS define para tal fin. Cada uno de estos perfiles posee distintos elementos en su composición y a su vez estos cuentan con su propia caracterización. En la Tabla 10, se define cada uno de estos perfiles y se presenta la evidencia que se observa en el texto analizado.

Tabla 10: Perfiles de la idoneidad didáctica.

Perfil	Evidencias	Valoración
"Idoneidad epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia." (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.2).	Los problemas desarrollados en el texto son abstractos. No se observan problemas contextualizados. El lenguaje utilizado es moderadamente técnico. Las definiciones son formales y provienen de la generalización. Los argumentos se basan en las propiedades y los datos.	Media
"Idoneidad cognitiva: Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad	Los conocimientos previos puestos en juego, pasan principalmente por la noción de distancias. Las adaptaciones curriculares y la evaluación del nivel	Media

de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.” (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.2).	de aprendizaje se satisfacen.	
“Idoneidad mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.” (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.3).	La realización de gráficos y la manipulación de las expresiones y ecuaciones que describen las cónicas estudiadas permiten una mejor y mayor comprensión.	Alta
“Idoneidad emocional: Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.” (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.3).	Ninguno de estos componentes puede observarse en este trabajo por tratarse de actitudes, comportamientos, intereses, necesidades, etc. de los estudiantes.	Baja
“Idoneidad interaccional: Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.” (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.4).	La interacción entre personas no puede observarse a través de este trabajo. La secuencia de actividades propuesta favorece la autonomía.	Media
“Idoneidad ecológica: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.” (Godino, Batanero, Font y Wilhelmi, 2007, p.4).	Los conceptos desarrollados y la forma en que se implementan están en total relación y correspondencia con los lineamientos de los diseños curriculares. La propuesta de actividades promueve la investigación.	Alta

Reflexiones del capítulo 3

La tarea desarrollada en este trabajo nos permitió, tal como pretendíamos, calificar la idoneidad didáctica del texto considerado. Tanto la identificación de los objetos matemáticos, como la utilización de tablas y la resolución de las situaciones-problemas, junto con sus respectivos análisis, nos facilitaron determinar la idoneidad didáctica con mayor objetividad.

El uso de distintos registros o elementos lingüísticos (gráfico, simbólico, verbal) y su combinación permiten un mejor abordaje y entendimiento de las tareas propuestas.

La mirada desde el EOS parece compleja, sin embargo, se simplifica con el uso de sus herramientas, en nuestro caso, la Configuración Epistémica/Cognitiva que ya describimos al comienzo del capítulo.

Conclusiones generales

Como resultado de la labor realizada, hemos presentado un breve recorrido por la Historia de las Secciones Cónicas en las Matemáticas, desde sus orígenes. Su evolución en tiempos y malos (Oscurantismo) y buenos (Renacimiento) y mostrando siempre, como la inclusión de nuevas herramientas, promueven dicho avance, ya sea en el siglo XV con Descartes y sus coordenadas o en la actualidad con las TICs

Dejamos claro que el dinamismo de la Matemática y la curiosidad de quienes la estudiamos y desarrollamos, incentivan el avance mencionado.

Entendimos que un tratamiento más tradicional o clásico que innovador, pero con la inserción de nuevas herramientas como el software de geometría dinámica promueven un mejor entendimiento y construcción de conceptos, a la vez que invitan a la exploración, en busca de propiedades y características singulares de cada cónica o de sus elementos.

El análisis realizado nos permite arribar a las siguientes conclusiones generales:

- El abordaje de las secciones cónicas como lugar geométrico resulta apropiado para el nivel educativo en el que se pretende desarrollar teniendo en cuenta las indicaciones propuestas en los Diseños Curriculares.(Bracchi y Paulozzo, 2011).
- Las actividades propuestas promueven la exploración por parte de los alumnos para encontrar otras propiedades de las secciones cónicas, como también permiten afianzar los conocimientos adquiridos durante la lección. Esto se logra, por ejemplo en las actividades2 (Imagen 6), 6 (Imagen 7: Actividad 6.) y 7 (Imagen 8).

2. a. Encuentren la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 6.
b. Encuentren un punto de la circunferencia que se encuentre en el primer cuadrante y otro que se encuentre en el cuarto cuadrante.

Imagen 6: Actividad 2.

6. a. Encuentren los puntos donde la parábola $(y-1)^2 = 6 \cdot (x+2)$ interseca al eje x y al eje y.
b. Realicen un gráfico aproximado de la parábola.
c. ¿Es una función? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Imagen 7: Actividad 6.

7. a. Encuentren la ecuación de una elipse con focos en $(-\frac{1}{2} ; 0)$ y $(\frac{1}{2} ; 0)$.
b. Indiquen dos puntos de esta elipse que se encuentren en el tercer cuadrante.
c. ¿Cuántas elipses cumplen esa condición? ¿Por qué?

Imagen 8: Actividad 7.

- La utilización de las TICs en la resolución de problemas geométricos (y analíticos) facilita la interpretación y afianza la relación del estudiante con el conocimiento. Por ejemplo, en la resolución de la actividad 4 (Imagen 1) recurrimos a la interpretación gráfica de la situación y nos permitió establecer los signos de las constantes involucradas (Ilustración 23).
- Es notable como el tratamiento fluye constantemente de lo algebraico a lo gráfico o geométrico y viceversa. Esto se hace evidente en las situaciones-problema resueltos a lo largo del capítulo, como por ejemplo en el ***Problema 1***

(Imagen 9) o en el ***Problema 3*** (Imagen 10).Esto hace que en el desarrollo de la lección sea considerable la múltiple interpretación que puede darse a las secciones cónicas.

Problema 1

Si A es un punto en el plano. Dibujar todos los puntos que se encuentran a 5 cm de distancia del punto A.

Imagen 9: Problema 1

Problema 3

a. Hallar las coordenadas de tres puntos en el plano que se encuentren a igual distancia del punto $F = (0 ; \frac{1}{4})$ y de la recta *d*, de ecuación $y = -\frac{1}{4}$.

b. ¿Cuáles son *todos* los puntos que se encuentran a igual distancia del punto $F = (0 ; \frac{1}{4})$ y de la recta $y = -\frac{1}{4}$?

Imagen 10: Problema 3

Para terminar, cabe aclarar que en el texto analizado, se ha dejado de lado el tratamiento de algunas de las cónicas centradas en un punto cualquiera (distinto del origen de coordenadas), así como también, la utilización de las mismas y sus ecuaciones como herramientas para resolver problemas contextualizados o de aplicación. Esto último, si bien queda pendiente en el texto puede desarrollarse en alguna planificación de los últimos cursos de matemática de la educación secundaria, sobre todo teniendo en cuenta que actualmente se dispone de herramientas informáticas sencillas y accesibles, y con ello se facilita mucho el tratamiento de las secciones cónicas desde lo visual.

Referencias bibliográficas

Carnelli, G., Itzcovich, H., Lamela, C., Novembre, A. (2007). Cónicas. En G. Carnelli et al. *Matemática ES5* (pp. 162-185), La Plata: Editorial Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Boyer, C. (1987). Historia de las Matemáticas. Madrid: Alianza Universidad. Recuperado el 27 de marzo de 2013, de http://www.dmae.upct.es/~pepemar/conicas/general/historia.htm

Dirección General de Cultura y Educación. (2011).*Diseño Curricular para la Educación Secundaria. Matemática-Ciclo Superior*. La Plata: Editorial Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Duplicación del cubo. (2013, 15 de mayo). En *Wikipedia, la enciclopedia libre*. Recuperado el 20 de mayo de 2013 a las 10:45 de http://es.wikipedia.org/wiki/Duplicaci%C3%B3n_del_cubo.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Recuperado el 30 de diciembre de 2012 de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

González Suárez, A (2010). *Hipatia: otra hija del Nilo*. Devenires XI, 16-31. Recuperado el 16 de mayo de 2013 de http://filos.umich.mx/Devenires/Devenires-22/p16-31.pdf

Hernández, V. (2002). *La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio?Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*, *32-45*. Recuperado el 18 de mayo de 2013 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf.

INFD. (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores de nivel secundario de matemáticas*. Buenos Aires: Instituto Nacional de Formación Docente. Recuperado el 26 de abril de 2013 de http://repositorio.educacion.gov.ar:8080/dspace/handle/123456789/96928

Mora, J. (2010). *Duplicación cubo*. Recuperado el 26 de marzo de 2013 desde http://matematicas.uclm.es/itacr/web_matematicas/trabajos/257/Duplicacion_cubo.pdf

Pérez Bernal, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas/A proposal for teaching and learning for the construction and application of conics*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia.

Pérez Gutiérrez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica/Study of the applications of the conical ones happened by the modeling from an analytical vision* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia.

Pérez Sanz, A. (2005).*Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores*. Recuperado el 25 de marzo de 2013 de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/

Tapia Moreno, F. (2002) *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*. Recuperado el 26 de marzo de 2013 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf