

*“Secciones Cónicas: un estudio  
epistemológico y el análisis de su  
tratamiento en los libros de texto”*

**Javier Ignacio Lugo**

Director: Lic. Gustavo Fabián Carnelli

*Memoria presentada para optar por el título de  
Especialista en Didáctica de las Ciencias con  
orientación en Matemática.*

Marzo de 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO  
Instituto del Desarrollo Humano  
*Especialización en Didáctica de las Ciencias con orientación en  
Matemática.*

## Resumen

En este trabajo llevamos a cabo un análisis de las propuestas que se realizan en dos libros de texto del nivel superior (universitario, terciario) sobre las Secciones Cónicas. Realizamos un recorrido histórico sobre algunos aspectos de la evolución de estas curvas y, a su vez, elaboramos un desarrollo epistemológico en donde demostramos la equivalencia entre la definición clásica, es decir, la curva entendida como sección de un cono recto, y aquella en donde se considera la razón de distancias y la excentricidad, noción que se toma como eje transversal de este trabajo. Para el análisis, consideramos algunas de las herramientas que brinda el Enfoque Ontosemiótico (EOS) en relación con la elaboración de un significado de referencia que nos permita disponer de elementos para realizar una valoración de la idoneidad epistémica de las dos propuestas. Para ello, elaboramos las configuraciones epistémicas correspondientes a cada texto y las contrastamos con la configuración epistémica de referencia, construida previamente a partir del desarrollo epistemológico. El análisis que presentamos permite que lo realizado sirva al docente como insumo para el diseño de una propuesta de enseñanza de las Secciones Cónicas que resulte distinta de las formas clásicas, usuales en los libros de texto.

**Palabras clave:** *Secciones Cónicas, Enfoque Ontosemiótico, Enseñanza de la Matemática.*

## Abstract

In this work we carry out an analysis of the proposals that take place in two books of university and upper level about Conic Sections. We conduct a chronological work of some aspects of the evolution of these curves and, in turn, elaborate an epistemological development where we prove the equivalence between the historical definition, that is, the curve defined as a straight cone section, and that one where it is considered the ratio of distances, involving the eccentricity, notion that is taken as a central focus of the work. For the analysis, we consider some of the tools provided by the Onto-semiotic Approach (EOS) related with the elaboration of a reference meaning that allows us to get elements to evaluate the epistemic suitability of the two proposals. To do so, we elaborate the epistemic configurations for each book and contrast them with the reference epistemic configuration, previously constructed from the epistemological development. The analysis undertaken allows this work to be useful for teachers as input for the design of a proposal teaching about Conic Sections different from the usual, classical forms in books.

**Keywords:** *Conic Sections, Onto-semiotic Approach, Teaching Mathematics.*

## Agradecimientos

*A mi familia por su apoyo y aliento incondicionales.*

*A mi Director Lic. Gustavo Carnelli por su dedicación y colaboración.*

*A la Dra. Marcela Falsetti por su consideración y confianza.*

*A los docentes de la Especialización, en especial a la Dra. Mabel Rodríguez por su constante y cálido acompañamiento.*

*A mis compañeros de la Especialización por hacer de éste un camino en compañía.*

*A la Universidad Nacional de General Sarmiento por brindar la posibilidad de realizar esta carrera.*

## Índice

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>Sobre el Enfoque Ontosemiótico</b>	<b>6</b>
<b>Breve recorrido histórico-epistemológico de las secciones cónicas</b>	<b>8</b>
Menecmo . . . . .	8
Aristeo, Euclides y Arquímedes . . . . .	8
Apolonio . . . . .	9
Pappus . . . . .	12
Fermat y Descartes . . . . .	13
Hamilton, Quetelet, Dandelin y Morton . . . . .	13
Hacia una nueva definición . . . . .	15
<b>Configuración Epistémica de referencia</b>	<b>40</b>
<b>Análisis de los libros de texto</b>	<b>46</b>
Configuración epistémica en los libros de texto . . . . .	47
Noriega (1991). <i>Cálculo diferencial e integral</i> . . . . .	47
Carvajal (2000). <i>Complementos de trigonometría y geometría Analítica</i> . . . . .	49
Valoración de la Idoneidad Epistémica . . . . .	51
<b>Consideraciones Finales</b>	<b>62</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>64</b>
<b>Anexo</b>	<b>67</b>



## Introducción

Las secciones cónicas siguen conservando un lugar importante en la enseñanza de la Matemática, tanto en el nivel superior (universitario, terciario) como en el secundario, tal como se puede observar si se consultan programas de asignaturas de Geometría Analítica y los diseños curriculares del nivel medio.

En los trabajos y desarrollos iniciales sobre este tema, los matemáticos se referían a las secciones cónicas como las curvas determinadas por la intersección entre un cono y un plano. Sin embargo, en los tratamientos dados por la enseñanza, encontramos con frecuencia que, a pesar de que se enuncian como *secciones cónicas*, el cono sólo aparece en la introducción de las curvas y rápidamente el trabajo se realiza únicamente sobre el plano y las secciones cónicas como tales no son relevantes para los desarrollos propuestos sobre estas curvas.

La noción de excentricidad es relevante aquí ya que puede tomársela como eje transversal para pensar a las distintas secciones cónicas bajo una misma definición. Por lo tanto, con ella se puede reflexionar sobre un desarrollo del tema que se aleje de las formas más tradicionales señaladas anteriormente.

En este trabajo nos interesa analizar las propuestas que realizan los libros de texto del nivel superior para el tema *Secciones Cónicas* y que podrían ser tomadas como insumo para su enseñanza en las aulas. Para realizar este análisis, consideramos algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Desde el EOS, un análisis didáctico consta de diferentes niveles (Godino, Font y Wilhelmi, 2008). Debido a los alcances de este trabajo, contemplamos la elaboración de las configuraciones de objetos matemáticos y la valoración de la idoneidad epistémica, pues son aquellos que más se ajustan a los intereses del estudio. Como parte de ello, realizamos un análisis histórico-epistemológico de las cónicas y elaboramos una configuración epistémica de referencia que nos permitirá evaluar las propuestas formuladas por los libros de texto (Godino y Font, 2007).

Para esta aproximación al conocimiento sobre tratamiento que dan al tema los libros de texto, tomamos dos manuales de uso corriente en el nivel superior, centrándonos en el capítulo o apartado relativo a las Secciones Cónicas. En la realización del análisis, consideramos como insumo directo para la enseñanza aquello que se presenta y desarrolla en estos libros, descartando las particularidades e intereses propios que ellos tienen. Entendemos que el tipo de análisis que aquí realizamos aporta a la reflexión sobre la enseñanza de las secciones cónicas y, en particular, provee herramientas para el diseño de una propuesta de enseñanza del tema.

En una sección del trabajo, describimos aquellos constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico en los que sustentamos el análisis. Si bien el interés de este trabajo no es realizar una exposición de los elementos teóricos que componen el EOS, esta descripción pretende manifestar las razones de por qué se utilizan dichos constructos teóricos y, al mismo tiempo, anticipar cómo se ponen en diálogo a lo largo del trabajo y cómo son utilizados para el análisis didáctico posterior.

Luego proponemos un breve recorrido histórico sobre las secciones cónicas. Aunque estas han sido abordadas por diferentes matemáticos y en diferentes momentos de la Historia de la Matemática, tomamos aquí los aportes que resultan significativos para los intereses de este trabajo. En particular, se considera el tratamiento inicial de las secciones, como curvas determinadas en un cono recto, la concepción como lugar geométrico, el pasaje del tratamiento sintético hacia el analítico y los trabajos de Apolonio, Dandelin y Descartes, entre otros.

Como parte del desarrollo epistemológico se establece la equivalencia entre la definición clásica de las secciones cónicas, es decir, las curvas determinadas por la intersección entre un cono recto y un plano, y la definición que contempla la noción de excentricidad, es decir, aquella

en donde se considera la razón entre distancias de los puntos de la curva a un punto y recta fijos. Una vez establecida esta equivalencia, es posible deducir las propiedades métricas que satisfacen estas curvas mediante un tratamiento estereométrico. Este aspecto no se contempla en un desarrollo más tradicional, donde las propiedades métricas de la elipse e hipérbola se utilizan a modo de definición.

Algunas demostraciones de ciertos resultados teóricos, alternativas a las que se realizan en la sección del desarrollo epistemológico son presentadas como un anexo, al final de trabajo.

## Sobre el Enfoque Ontosemiótico

En este trabajo utilizamos algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) que nos permiten analizar el proceso de instrucción que se desarrolla en un libro de texto matemático. Una de ellas es el constructo *configuración epistémica* (Font y Godino, 2006). Sobre ello, Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) sostienen que:

La identificación de configuraciones epistémicas permite el análisis comparativo de libros de texto, por cuanto determinan una referencia para identificar ausencias y presencias relevantes para la introducción o desarrollo de una noción matemática. Con otras palabras, permiten un análisis de la *idoneidad epistémica* de procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales basados en dichos libros de texto. (p. 68)

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) señalan, desde un punto de vista centrado en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, que la descripción de las configuraciones epistémicas debería ser un objetivo de todo análisis epistemológico que se realice sobre una noción matemática.

En este trabajo se lleva a cabo un análisis de libros de texto tomando como referencia una configuración epistémica diseñada en función del estudio epistémico e histórico que se muestra en las siguientes secciones. Las configuraciones epistémicas se definen “como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los **sistemas** de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.” (Godino y Font, 2007, p. 4).

Nos proponemos disponer de una configuración epistémica para cada uno de los textos elegidos. Para ello necesitamos conformar en primer lugar, el *significado de referencia* de nuestro objeto matemático. Acorde a Godino, Batanero y Font (2009) el significado referencial es aquel sistema de prácticas al que se alude en la elaboración del significado pretendido de un objeto matemático, siendo éste el sistema de prácticas que se incluyen en la planificación del proceso de estudio. Según Pochulu (2011) es posible establecer el significado de referencia de un objeto matemático mediante un estudio que involucre aspectos históricos y epistemológicos y, al mismo tiempo, contemple los diferentes contextos donde dicho objeto resulta útil. Para el autor es necesario contemplar los seis elementos que, al relacionarse, forman diversas configuraciones epistémicas: lenguaje, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. A continuación se describen cada uno de ellos acorde a lo expuesto por Font y Godino (2006) y Godino, Batanero y Font (2009):

- **Lenguaje:** términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que se presentan en diferentes registros.
- **Situaciones-problemas:** actividades, ejercicios, tareas o aplicaciones intra y extra matemáticas.
- **Conceptos-definiciones:** construcciones o elementos introducidos a través de definiciones o descripciones sobre un objeto.
- **Proposiciones:** enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- **Procedimientos:** algoritmos, técnicas de cálculo, operaciones descritas, estrategias de resolución, modos de realizar determinadas acciones.
- **Argumentos:** enunciados y razonamientos usados para justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos.

Para Font y Godino (2006), estos elementos resultan útiles en la descripción de las características de textos matemáticos pues proveen información sobre cómo se estructuran. Con el objetivo de construir nuestro significado de referencia sobre las secciones cónicas y, al mismo tiempo, determinar una configuración epistémica que pueda utilizarse como referente para el análisis de los libros de texto, hemos considerado como base los trabajos de Font y Godino (2006), Godino, Contreras y Font (2006), Contreras y García (2011) y Reina, Wilhelmi y Lasa (2012).

En las próximas secciones se realiza un tratamiento que, según lo expuesto en los párrafos anteriores, nos permitía elaborar o establecer el significado de referencia del concepto *secciones cónicas*. Para ello, se presenta una caracterización acorde con los elementos de una configuración epistémica.

Por otra parte, según el EOS es posible valorar la adecuación de un proceso educativo, a lo que se refieren como idoneidad didáctica del proceso. Esto es, cuan adecuado, eficaz o *idóneo* resulta ser el proceso de instrucción matemático. Para realizar esta valoración se “requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión valorada.” (Godino, Contreras y Font, 2006, p.4). En particular, la idoneidad didáctica refiere a una articulación coherente entre seis componentes, llamadas idoneidades parciales: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2011).

Font, Planas y Godino (2010) señalan que conseguir una sola idoneidad parcial resulta simple y que lo difícil radica en conseguir una presencia equilibrada de todas ellas. En nuestro caso, sólo nos concentraremos en el análisis de la idoneidad epistémica en el proceso de instrucción de libros de texto. Sabemos que valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción admite una mayor complejidad (pues involucra el resto de las idoneidades parciales) pero creemos que el tratamiento que hacemos en este trabajo podría servir como punto de inicio para lograr dicha valoración. En este sentido, Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) señalan que para “valorar la idoneidad epistémica (...) de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*) es necesario establecer primero el significado de referencia que sirva de comparación”(p. 10).

El tipo de análisis que **se realiza** aquí refiere a dos de los cinco niveles de análisis que pueden aplicarse a un proceso de estudio matemático (Godino, Font y Wilhelmi, 2008). A modo de referencia hemos considerado algunos de los trabajos desarrollados desde el EOS. Entre ellos, Godino, Font y Wilhelmi (2006), Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi (2006), Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) y Godino, Font y Wilhelmi (2008).

Según Godino, Contreras y Font (2006) “la didáctica de las matemáticas tiene que afrontar además el reto de la ingeniería didáctica, entendida como la disciplina que orienta el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática” (p. 27). En este sentido, Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) sostienen que para construir una ingeniería didáctica son necesarias, a modo referencial, las configuraciones epistémicas. Por otra parte, refiriéndose al diseño de programas influyentes en la formación de los futuros profesores, Font y Godino (2006) señalan que el análisis crítico de los textos y la evaluación de su adecuación debería formar parte importante de dicha formación.

## Breve recorrido histórico-epistemológico de las secciones cónicas

En este apartado se realiza un recorrido histórico en torno a la definición de las secciones cónicas. No es el objetivo de este trabajo ser un compendio de todo el desarrollo realizado en referencia a las cónicas, ya que ellas fueron estudiadas por diferentes matemáticos a lo largo de la historia. Es por ello que se ha decidido seleccionar aquellos aspectos que resulten relevantes a los intereses del trabajo. Nos referiremos a los inicios de las secciones como curvas en un cono recto, a la concepción como lugar geométrico, a la evolución en el tratamiento sintético hacia un tratamiento analítico y al trabajo de Apolonio, Dandelin y Descartes, entre otros.

### Menecmo

Aunque son diferentes los autores que otorgan a Menecmo (aproximadamente 380-320 a.C.) la vanguardia de las secciones cónicas, Coolidge (1968) señala que esta vinculación que se le otorga en relación con el origen de estas curvas no implica, en realidad, que él haya sido el primer matemático en trabajar con este tópico, sino quizás, el primero sobre el cual se tiene registro. Efectivamente, Boyer (1968) menciona que se presume que Menecmo, aproximadamente en el año 350 a.C., tuvo un acercamiento a estas curvas en la búsqueda de la solución al llamado *Problema Deliano* o más conocido como *Problema de la duplicación del cubo*, que consiste en construir usando regla no graduada y compás un cubo cuyo volumen sea igual al doble de un cubo dado. En este sentido, González Urbaneja (2007) explica que la parábola, hipérbola y elipse fueron conocidas como la Triada de Menecmo, lo que indica fuertemente la asociación de Menecmo con el origen de estas curvas. Sin embargo, Boyer (1968), Coolidge (1968) y Heath (1921) señalan que la solución al problema de la duplicación del cubo de Menecmo fue sólo mediante la parábola y la hipérbola rectangular, sin trabajar con la elipse.

### Aristeo, Euclides y Arquímedes

Según Coolidge (1968), Aristeo (370-300 a.C.) resulta ser el siguiente matemático en trabajar y escribir al respecto de las secciones cónicas, en un trabajo titulado *Solid Loci* compuesto por cinco libros. En ellos se refería a la elipse, la parábola y al hipérbola como *sección del cono de ángulo agudo*, *sección del cono de ángulo recto* y *sección del cono de ángulo obtuso* respectivamente (Pappus, 1933, citado en Coolidge, 1968). Heath (1896) y Boyer (1968) señalan que los geómetras griegos realizaron una categorización de las curvas conocidas hasta el momento. El primer grupo, llamado *plane loci* estaba conformado por las rectas y circunferencias; el segundo grupo, nombrado *solid loci* comprendía todas las secciones cónicas; y el tercer grupo, llamado *linear loci*, que comprendía todos los tipos de curvas que no fuesen rectas, circunferencias o secciones cónicas. El primero de los grupos corresponde con lo que actualmente denominaríamos lugar geométrico, esto es, aquellas curvas del plano que pueden definirse a través de condiciones métricas dadas sobre sus puntos. Según Boyer (1968), el hecho que las cónicas no pertenecieran al primer grupo permite comprender que sólo eran descritas estereométricamente, es decir, desde un trabajo con figuras en el espacio y no sobre el plano.

El trabajo de Euclides (325-265 a.C.) con las secciones cónicas estuvo precedido por Aristeo. Según Pappus (1933, citado en Coolidge, 1968), Euclides escribió cuatro libros en relación con las secciones cónicas, que fueron completados por Apolonio (ver sección [Apolonio](#)). Asimismo, el autor sostiene que Euclides reconoció el desarrollo de Aristeo con las cónicas y, sin buscar anticiparlo o construir nuevamente su mismo sistema, trabajó cuanto pudo con estas

curvas a partir de las cónicas de Aristeo. Lo que no puede determinarse a partir de lo dicho por el autor es cuánto del trabajo de Euclides resulta ser original y cuánto recopilación de lo hecho hasta el momento, como sucede con *Los Elementos*.

Boyer (1968) informa que los trabajos de Aristeo y Euclides en relación con las secciones cónicas se han perdido. El autor vincula este hecho al trabajo superior y extensivo que realizó Apolonio con estas curvas, que posiblemente haya opacado todo desarrollo previo.

Por otra parte, Heath (1921) menciona que Arquímedes (287-212 a.C.) consideró muchas de las propiedades de las secciones cónicas trabajadas por Euclides y las asumió sin demostración. Según este autor, ambos consideraron a las cónicas como curvas derivadas de secciones de tres tipos de conos circulares distintos: agudo, recto y obtuso. Sin embargo, tanto Euclides como Arquímedes eran conscientes de que la elipse podía determinarse no sólo como sección de un cono circular agudo, sino también mediante la intersección de planos con los otros tipos de cono. Por ejemplo, Arquímedes sabía que las secciones determinadas en un cono oblicuo por planos que intersecaran a todas las generatrices eran elipses (Heath, 1921). Además, según Coolidge (1968), Arquímedes sabía que era posible determinar cualquier tipo de cónica a partir de cualquier cono que tuviera secciones circulares. Por otra parte, el autor menciona que si bien Arquímedes no publicó todo su conocimiento en relación con las cónicas, sus escritos muestran una muy buena comprensión de estas curvas. Si bien ha trabajado algunos aspectos de las secciones cónicas, Coolidge (1968) y Boyer (1968) afirman que su mayor interés estuvo enfocado hacia la parábola y al trabajo con el cálculo de áreas.

## Apolonio

El trabajo más importante de Apolonio de Perga (262-190 a.C.) resulta ser indudablemente su colección de ocho libros llamada *Las Cónicas*. Según Heath (1921), este trabajo fue reconocido como el tratamiento más importante sobre el tema y citado regularmente por los autores posteriores. Además, resulta tal la asociación del nombre Apolonio con este escrito que es incluso comparable al vínculo Euclides-Elementos (Rey Pastor y Babini, 1985). Según Boyer (1968) *Las Cónicas* de Apolonio es el mejor trabajo realizado en este campo.

Uno de los cambios más importantes propuestos por Apolonio se corresponde con la determinación de las secciones cónicas a partir de un único cono circular. Según Boyer (1968), y como se mencionó en apartados anteriores, antes de Apolonio se determinaban la elipse, la parábola y la hipérbola como secciones de conos circulares de distinto tipo, según si el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso. Sin embargo, el matemático griego mostró que a partir de un mismo cono se pueden obtener las tres secciones, variando el ángulo formado entre el plano de sección y el eje del cono; es decir, Apolonio demostró la independencia del tipo de cono y, además, fue el primer geómetra que mostró que las propiedades de estas curvas se mantienen, independientemente de las características del cono a considerar. En este sentido, Heath (1921) menciona que Apolonio fue el primero en construir las bases de la teoría de las secciones cónicas determinando los tres tipos a partir de cualquier cono circular ya sea recto u oblicuo. Además, se destaca que reemplazó el cono simple (utilizado hasta el momento por sus predecesores) por el cono de *doble hoja*.

Según Boyer (1968), fue Apolonio quien dio por primera vez los nombres de parábola, elipse e hipérbola a estas curvas. El autor menciona que posiblemente Apolonio haya considerado alguna sugerencia de Arquímedes. Sin embargo, los nombres no resultaban originales pues fueron utilizados por los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas mediante la aplicación de áreas (Heath, 1921). En cualquier caso, Apolonio adaptó esta terminología a un nuevo contexto (ver [Proposición 1](#)).



Como se ha mencionado anteriormente, las secciones cónicas fueron consideradas inicialmente desde una concepción estereométrica. Según Coolidge (1968) y Boyer (1968), Apolonio comenzó su estudio con el cono determinando luego los tres tipos de secciones cónicas a partir del tratamiento estereométrico, es decir, derivó las relaciones que satisfacen los puntos de estas curvas. Heath (1896), con uso de notaciones actuales, editó el compendio de *Las Cónicas*, dentro del cual se expone el tratamiento desarrollado por Apolonio. A modo de ejemplo, se muestra a continuación el caso de la parábola, para lo que se necesita de la siguiente definición:

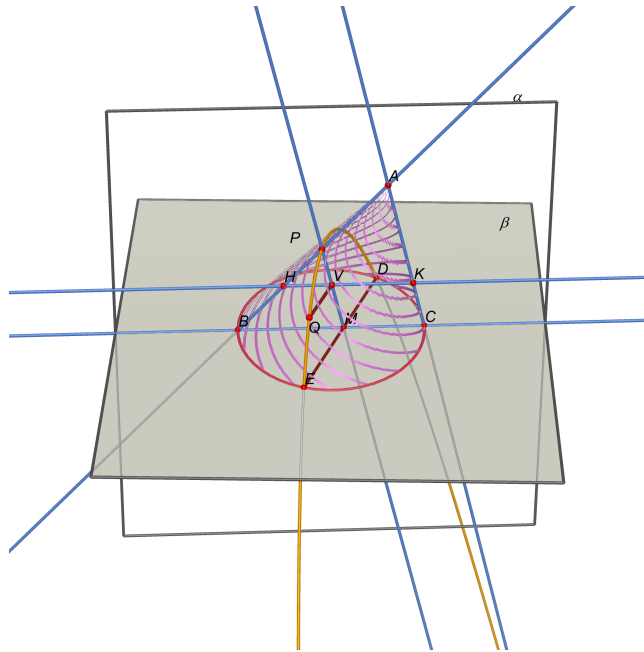
**DEFINICIÓN 1.** Un **diámetro** de una elipse (hipérbola) es una recta que pasa por su centro. Un **diámetro** de una parábola es una recta paralela al eje de simetría.

**PROPOSICIÓN 1.** Dado un cono de vértice  $A$ , sean  $\alpha$  un plano diametral y  $\beta$  un plano perpendicular al eje del cono tales que la intersección entre ellos determina la recta  $BC$ , con  $B$  y  $C$  puntos del cono. Sea  $PM$  diámetro de la sección cónica paralelo al lado  $AC$  del triángulo axial, y sea  $QV$  cualquier segmento perpendicular a  $PM$  tal que  $Q$  pertenece a la cónica y  $V$  a la recta  $PM$ . Sea  $PL$  una recta perpendicular a  $PM$ , siendo  $L$  un punto del plano de sección, tal que  $\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$ , entonces:

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

*Demostración.* Sea  $HK$  la recta paralela a  $BC$  por el punto  $V$  (observemos que la recta  $HK$  está incluida en  $\alpha$ ) y sea  $DE$  una cuerda perpendicular a  $PM$ , incluida en el plano  $\beta$ . Como los triángulos  $ABC$  y  $HPV$  son semejantes, pues  $PM$  y  $AC$  son paralelas por construcción, se tiene que:

$$\frac{HV}{PV} = \frac{BC}{AC} \quad (1)$$



Luego, como la recta  $PV$  es paralela a  $AK$  y considerando a las rectas  $HP$  y  $HV$  transversales, se cumple por el teorema de Tales:

$$\frac{VK}{PA} = \frac{HV}{HP} \quad (2)$$

Por otra parte, como los triángulos  $HPV$  y  $ABC$  son semejantes se deduce que:

$$\frac{HV}{HP} = \frac{BC}{BA} \quad (3)$$

Entonces, por (2) y (3) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{VK}{PA} = \frac{BC}{BA} \quad (4)$$

Entonces, de (1) y (4) se tiene que:

$$\frac{HV}{PV} \cdot \frac{VK}{PA} = \frac{BC^2}{AC \cdot BA}$$

Luego, por hipótesis:

$$\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{PL}{PA}$$

De esto último, deducimos que:

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

□

Además de probar la igualdad  $QV^2 = PL \cdot PV$ , Heath (1896) exhibe cómo Apolonio, en un tratamiento análogo para las secciones restantes, demuestra las relaciones  $QV^2 < PL \cdot PV$  y  $QV^2 > PL \cdot PV$  para la elipse e hipérbola respectivamente. En el primer caso, el valor numérico del cuadrado de  $QV$  es igual al área del rectángulo aplicado; en el segundo caso, es menor; en el tercero, mayor. Estas son las razones por las cuales las curvas recibieron los nombres de parábola, elipse e hipérbola respectivamente (Taylor, 1881).

Por otra parte, Boyer (1968) señala que los desarrollos posteriores de Apolonio se orientaron al tratamiento de las secciones cónicas en el plano, sin remitirse nuevamente al cono:

Después de que Apolonio había derivado desde una consideración estereométrica del cono la relación básica entre lo que hoy llamaríamos las coordenadas en el plano de un punto de la curva (...) derivó otras propiedades a partir las ecuaciones del plano sin hacer referencia al cono. (p. 165)<sup>1</sup>

Si bien el trabajo de Apolonio con las secciones cónicas fue notable, existen algunos aspectos que no han sido trabajados por él, o al menos no han sido registrados como tales. Boyer (1968) señala que *Las Cónicas* de Apolonio resultó un trabajo de gran profundidad y desarrollo, pero también indica que se omiten algunas propiedades que resultan fundamentales, como por ejemplo la propiedad que relaciona el foco y directriz de una cónica (ver Teorema 1). Asimismo, el autor sostiene que no hubo un concepto numérico que pueda asociarse con la noción actual de excentricidad en los trabajos de Apolonio ni tampoco en aquellos de los geómetras que realizaron un tratamiento de las secciones cónicas previamente. En este sentido, Coolidge (1968) sostiene que no podemos asegurar que Apolonio haya escrito todo lo que él conocía sobre las cónicas en sus libros y también refiere, a modo de ejemplo, a que en el trabajo de Apolonio no existe mención alguna al foco de la parábola ni tampoco a la directriz de una sección cónica. Otro aspecto que, según el autor, también fue omitido en este compendio fue la determinación de una sección cónica a partir de cinco puntos (no alineados de a tres). Aunque no se afirma que estas exclusiones refieran a una incompletitud en el trabajo de Apolonio, Boyer (1968) menciona que quizás se deban a que estas cuestiones fueron tratadas en algún trabajo de menor envergadura, ya sea del propio Apolonio o de algún otro autor.

<sup>1</sup>After apolonio had derived from a stereometric consideration of the cone the basic relationship between what we should now call the plane coordinates of a point on the curve (...) he derived further properties from the plane equations without reference to the cone. (Boyer, 1968, p. 165)



Los diferentes autores que hemos mencionado intentan describir con precisión el contenido de cada uno de los libros que conforman *Las Cónicas*. En general, señalan que Apolonio trabajó a lo largo de sus libros en diferentes aspectos de las secciones cónicas: problemas de construcción, estudio de asíntotas, tangentes y diámetros conjugados, intersección entre dos cónicas y cantidad de puntos determinados, estudio de las normales a una cónica, estudio de cónicas semejantes y cónicas congruentes, entre otras.

Según Heath (1921) los primeros cuatro libros de Apolonio resultaron ser una introducción a los elementos de las cónicas a través de definiciones o proposiciones fundamentales por su generalidad o aplicación. Según el autor, Apolonio mismo señaló que sólo una pequeña parte de su trabajo podía catalogarse de original.

## Pappus

Según Coolidge (1968) el trabajo de Pappus (290-350 d.C.) a lo largo de sus ocho libros en la llamada *Mathematical Collection*<sup>2</sup> resultó ser una explicación y discusión de la Matemática griega conocida hasta su época. Podríamos decir entonces que Pappus fue en mayor medida un compilador, aunque el autor sostiene que resulta imposible establecer una distinción entre la producción original de Pappus y los trabajos previos. A pesar de esta situación de incertidumbre, Rey Pastor y Babini (1985) sostienen que la primera mención del foco de la parábola y de las directrices de las secciones cónicas se debe a Pappus “así como la definición de éstas mediante la razón constante entre las distancias a un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz)” (p. 140). Según Heath (1921), Pappus enuncia este resultado como *lemma to Euclid’s Surface-Loci*, que es el siguiente:

**TEOREMA 1.** *El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón entre las distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es constante, es una sección cónica. Si la razón es igual a la unidad la sección será una parábola, si la razón es menor a la unidad será una elipse y si es mayor una hipérbola.*

Por otra parte, en el libro VII de la *Colección* se presenta un problema que posteriormente se divulgó bajo el nombre de *Problema de Pappus* y cuya solución dio origen al desarrollo de la Geometría analítica. Según Cajori (1894), éste fue trabajado posteriormente por Descartes y por Newton. Este problema también es conocido como el *problema de las cuatro rectas* o el *lugar de las tres o cuatro rectas*. Independientemente del nombre bajo el cual se lo mencione, los lugares geométricos que resultan de la solución a este problema son secciones cónicas. Según Boyer (1968), la primera versión del problema, circunscripto a la consideración de sólo tres o cuatro rectas, se remite a la época de Euclides. Además, el autor menciona que Apolonio también trabajó en su solución, y lo hizo de forma meticulosa y detallada, mediante argumentos sintéticos. Sin embargo, el reconocimiento a Pappus está en que logró generalizar este problema al considerar su análogo para  $n$  rectas, con  $n > 4$ .

En Ostermann & Wanner (2012) se propone el *Problema de Pappus* en términos actuales para facilitar la comprensión del problema. A continuación se enuncia para el caso de cuatro rectas:

*Problema de las cuatro rectas (Problema de Pappus para  $n = 4$ )*

Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  cuatro rectas coplanares. Determinar el conjunto de puntos  $P$  tales que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , donde  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  y  $PD$  son las distancias del punto  $P$  a las rectas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  respectivamente.

<sup>2</sup> *Colección Matemática* o simplemente *Colección*.

## Fermat y Descartes

Son dos los matemáticos que podrían considerarse los padres de la Geometría analítica. Según Coolidge (1968) hay autores que acreditan esta invención a Descartes (la visión mayoritariamente extendida) y algunos otros que le han dado el crédito a Fermat. No obstante e independientemente de esta discusión, no quedan dudas sobre el hecho que ambos han realizado aportes al desarrollo de las secciones cónicas desde de la Geometría analítica. Por un lado, el autor indica que uno de los problemas principales a los cuales se abocó Fermat fue a la búsqueda o identificación de qué tipo de lugar geométrico queda determinado mediante una ecuación de primer o segundo grado. En este sentido, Coolidge (1968) comenta que el método por el cual se lograba dicha identificación refiere a un cambio de coordenadas de forma tal de obtener una ecuación más familiar. Por otra parte, Fermat determinó que cualquier ecuación de segundo grado representaba o una sección cónica o un par de rectas. Asimismo, estudió la solución de las ecuaciones de grado tres y cuatro en términos de la intersección de dos cónicas.

Como se mencionó en el párrafo anterior, el otro matemático al cual se le da crédito por la invención de la Geometría analítica fue René Descartes. Coolidge (1968) afirma que él sólo se interesó de forma secundaria por las secciones cónicas. Aún así, la técnica utilizada por Descartes fue muy superior a la de Fermat. El autor menciona que su contacto más cercano con las secciones cónicas estuvo en la solución de Descartes al *Problema de Pappus*. Además, Boyer (1968) explica que a partir de este problema, Descartes derivó la ecuación general de una sección cónica por el origen de coordenadas. El autor indica que Descartes dio condiciones sobre los coeficientes de esta ecuación para que la sección fuera una parábola, hipérbola, elipse o incluso una recta. Asimismo señala que, aunque Descartes sabía que era posible modificar la elección de los ejes así como también el origen del sistema de referencia de forma tal de obtener una ecuación en la forma más simple posible (ecuación canónica), no realiza ningún tratamiento al respecto.

## Hamilton, Quetelet, Dandelin y Morton

Según Taylor (1881), Hamilton (1805-1856) probó algunas propiedades importantes en relación con las secciones cónicas. En este apartado sólo presentaremos algunas de ellas, que serán enunciadas, discutidas, y demostradas en la próxima sección de este trabajo. Nos resulta importante referirnos aquí a quien las haya deducido por primera vez:

- La determinación de la directriz como intersección entre el plano de sección y el plano perpendicular al eje del cono por el centro de la esfera focal<sup>3</sup>.
- La distancia de un punto  $P$  cualquiera de la sección cónica al foco es igual a la distancia entre  $P$  y el punto determinado por la intersección entre la esfera focal (ver [definición 9](#)) y la generatriz por  $P$ <sup>4</sup>.

Además, Taylor (1881) menciona que Hamilton probó que el foco de una sección cónica se determina como la intersección entre la esfera focal y el plano de sección aunque no lo enunció en referencia a esos objetos (ver desarrollo posterior a la [definición 8](#)).

Por otra parte, Taylor (1881) menciona que Quetelet (1796-1874) demostró, entre otros resultados, que la suma de las distancias del vértice del cono a los vértices de la elipse es igual a la distancia entre los focos.

<sup>3</sup>Ver desarrollo previo a la [definición 11](#).

<sup>4</sup>Ver [Proposición 2](#).

Según Taylor (1881), Dandelin (1794-1847) demostró la misma relación que Quetelet, aunque lo hizo mediante la introducción de las esferas focales, lo que le permite determinar el foco de las secciones. Además, el autor señala que ni Quetelet ni Dandelin refieren a las directrices de una cónica, sino que fue Morton (1803-1865) quien realizó una determinación completa del foco y de las directrices por medio de las esferas focales. El autor menciona que posiblemente Morton no estuviera familiarizado con los trabajos de Quetelet y Dandelin.

En Morton (1830), el autor muestra cómo se deducen varias propiedades de las secciones cónicas mediante un tratamiento sintético en el espacio. Asimismo, demuestra la proposición que enuncia que la razón de distancias de los puntos de una sección cónica al foco y a la directriz respectiva se mantiene constante. El enunciado original se muestra a continuación:

**PROP. 21.**

***In every conic section APQ, if in the right cone of which it is a section there be inscribed a sphere which touches the plane of the conic section in a point S, and the conical surface in a circle, the plane of which is produced to cut the plane of the conic section in a straight line RX; the distances SP and PR of any point P in the conic section from the point S, and the straight line RX, shall be to one another in a constant ratio.\****

Ésta es la misma proposición ya enunciada y demostrada por Pappus. Sin embargo, la utilización de las esferas focales en la demostración permite que resulte más simple que la anterior.

En función de esta proposición, Morton (1830) deduce una serie de corolarios, entre los que se mencionan los siguientes:

- la suma (diferencia) de las distancias de los puntos de una elipse (hipérbola) a los focos es igual a la distancia entre los vértices principales.
- para la elipse, la razón de distancias es menor que 1; para la hipérbola, mayor que 1 y para la parábola, igual a 1.

## Hacia una nueva definición

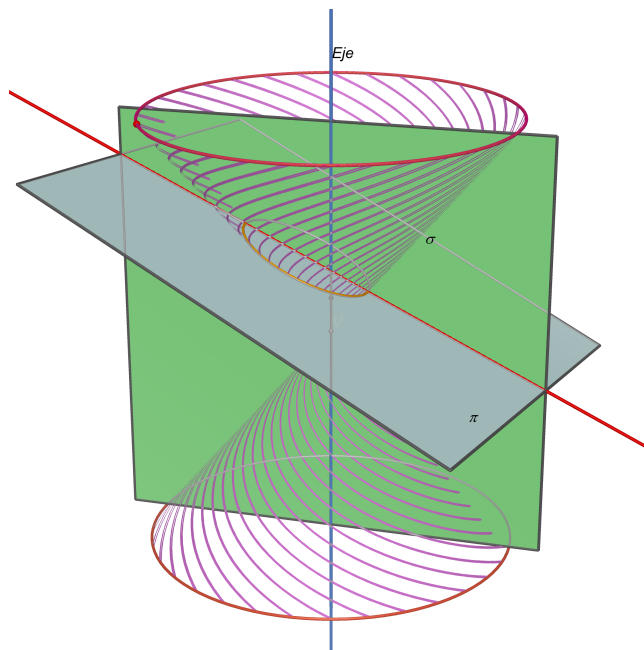
En esta sección se muestra la equivalencia entre la definición histórica de sección cónica y la definición como lugar geométrico. Para ello, se consideran a modo de referencia el libro<sup>5</sup> *Curso de Geometría Métrica* (Vol. II) de Puig Adam y se complementa y profundiza el desarrollo que allí se propone mediante una serie de resultados que aportan a la completitud en la demostración de dicha equivalencia. Estos resultados han sido demostrados utilizando herramientas, técnicas y argumentos propios de la Geometría sintética, Geometría analítica y Álgebra lineal de manera tal de evidenciar una interrelación y complementariedad entre los distintos abordajes. Asimismo, se utilizan los libros<sup>6</sup> *Geometría elemental* de Pogorélov Aleksei y *Álgebra y geometría* de Hernández Eugenio para validar algunos resultados menores que se utilizan.

A partir del tratamiento expuesto en las secciones anteriores enunciamos la definición de sección cónica:

**DEFINICIÓN 2.** Se llama **sección cónica** a toda curva determinada por la intersección entre un cono recto de doble hoja y un plano que no contiene a su vértice, llamado plano de sección.

Consideremos un cono recto de doble hoja y un plano de sección que llamamos  $\pi$ . Como se detalló en la sección dedicada a Apolonio, según el ángulo formado entre el plano  $\pi$  y el eje del cono, queda determinada en la intersección anterior una elipse, una parábola o una hipérbola. Sea  $\alpha$  el ángulo formado entre el eje del cono y una de sus generatrices y  $\beta$  el ángulo formado por el eje del cono y el plano  $\pi$ . Si  $\alpha < \beta$  la curva es una elipse, si  $\alpha = \beta$  será una parábola y si  $\alpha > \beta$  una hipérbola.

Por otra parte, sea  $\sigma$  el plano que contiene al vértice del cono y cuyos vectores generadores son el normal del plano  $\pi$  y el director del eje del cono. Los planos  $\sigma$  y  $\pi$  son perpendiculares<sup>7</sup>, porque por construcción resulta que  $\pi$  es perpendicular a una recta del plano  $\sigma$ . Obsevemos que  $\sigma$  será plano de simetría de la sección cónica determinada, en particular el eje de simetría será la recta determinada por la intersección de los planos  $\sigma$  y  $\pi$ :



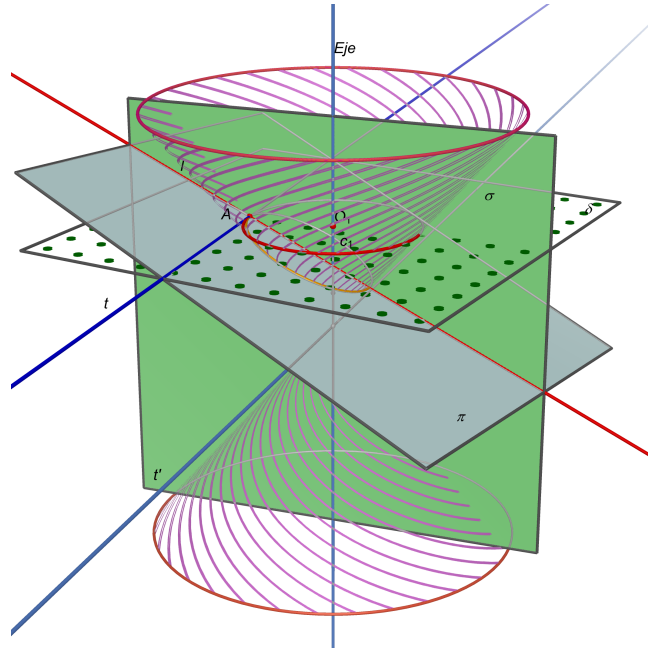
<sup>5</sup>Ver Referencias Bibliográficas.

<sup>6</sup>Ibídem.

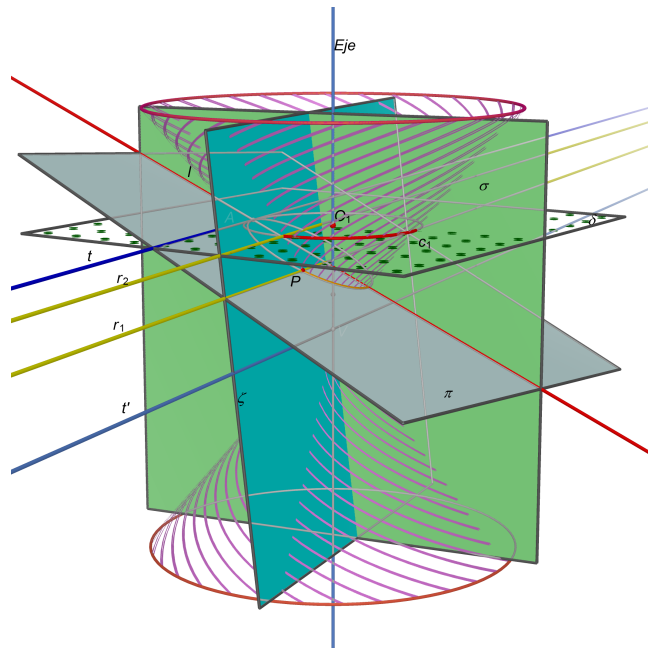
<sup>7</sup>Ver Teorema 20.8 en Pogorélov (1974).

**LEMA 1.** Sea  $l$  la recta determinada por la intersección de los planos  $\sigma$  y  $\pi$ , entonces  $l$  es eje de simetría de la sección cónica.

*Demostración.* Si  $A$  es el punto determinado por la intersección entre la recta  $l$  y la sección cónica, consideremos el plano perpendicular al eje del cono por  $A$ , al que llamaremos  $\delta$ . Sean  $c_1$  la circunferencia determinada por la intersección entre el cono y  $\delta$ ,  $O_1$  su centro,  $t$  la recta determinada por la intersección entre los planos  $\delta$  y  $\pi$ , y  $t'$  la recta paralela a  $t$  por  $V$ .



Si  $P$  es un punto cualquiera de la sección cónica, consideramos el plano  $\zeta$  que contiene a la recta  $t'$  y al punto  $P$ . En la intersección entre los planos  $\zeta$  y  $\pi$  se determina la recta  $r_1$ , asimismo se determina  $r_2$ , en la intersección entre  $\zeta$  y  $\delta$ .



Observamos que la recta  $t'$  es paralela a las rectas  $r_1$  y  $r_2$ . Para demostrarlo, son necesarias las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 3. Una recta y un plano se llaman **paralelos** si no tienen puntos en común.

DEFINICIÓN 4. Dos rectas se dicen **paralelas** si están contenidas en un mismo plano y no tienen puntos en común.

DEFINICIÓN 5. Vamos a decir que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a toda recta incluida en él.

Como  $t'$  es paralela a la recta  $t$ , resulta también paralela<sup>8</sup> a los planos  $\pi$  y  $\delta$ , ya que  $t$  está contenida en ambos planos. Asimismo, la recta  $t'$  no se interseca con las rectas  $r_1$  y  $r_2$ , pues  $r_1$  está contenida en  $\pi$  y  $r_2$  en  $\delta$  y por la definición 3,  $t'$  no tiene puntos en común con dichos planos. Además, las rectas  $t'$  y  $r_1$  pertenecen a un mismo plano, que es  $\zeta$ ; análogamente para  $t'$  y  $r_2$ . Luego, por la definición 4 se deduce que  $t'$  es paralela a las rectas  $r_1$  y  $r_2$  y, por lo tanto, las rectas  $r_1$  y  $r_2$  son paralelas<sup>9</sup>, por ser ambas paralelas a una misma recta. Es decir:

$$t' \parallel r_1 \quad (5)$$

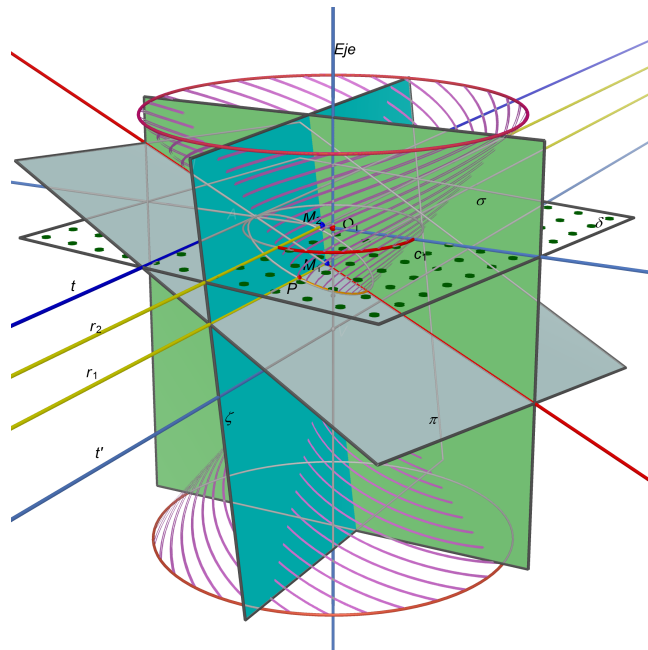
$$t' \parallel r_2 \quad (6)$$

$$r_1 \parallel r_2 \quad (7)$$

Como  $t \parallel t'$  se tiene también que:

$$t \parallel r_1 \quad (8)$$

Asimismo,  $r_1$  y  $l$  están contenidas en el plano  $\pi$  pero no son paralelas, pues las rectas  $t$  y  $l$  se intersecan en el punto  $A$ , entonces existe  $M_1$  punto de intersección entre  $r_1$  y  $l$ . De manera similar se demuestra que existe  $M_2$  punto determinado por la intersección entre  $r_2$  y la recta  $AO_1$ .



Además, por construcción el plano  $\delta$  es perpendicular al eje del cono, entonces  $\delta$  y  $\sigma$  son perpendiculares<sup>10</sup>, ya que el plano  $\delta$  es perpendicular a una recta contenida en  $\sigma$ . Como el plano  $\sigma$  también es perpendicular<sup>11</sup> al plano  $\pi$  se tiene que la recta  $t$  (recta de intersección

<sup>8</sup>Ver Teorema 19.3 en Pogorélov (1974).

<sup>9</sup>Ver Teorema 19.2 en Pogorélov (1974).

<sup>10</sup>Ver Teorema 20.8 en Pogorélov (1974).

<sup>11</sup>Ver desarrollo previo al lema 1.

entre los planos  $\delta$  y  $\pi$ ) resulta perpendicular<sup>12</sup> al plano  $\sigma$  y, por lo tanto según la definición 5,  $t$  es perpendicular a las rectas  $AM_1$  y  $AM_2$  contenidas en él. Es decir,

$$t' \perp AM_1 \quad (9)$$

$$t' \perp AM_2 \quad (10)$$

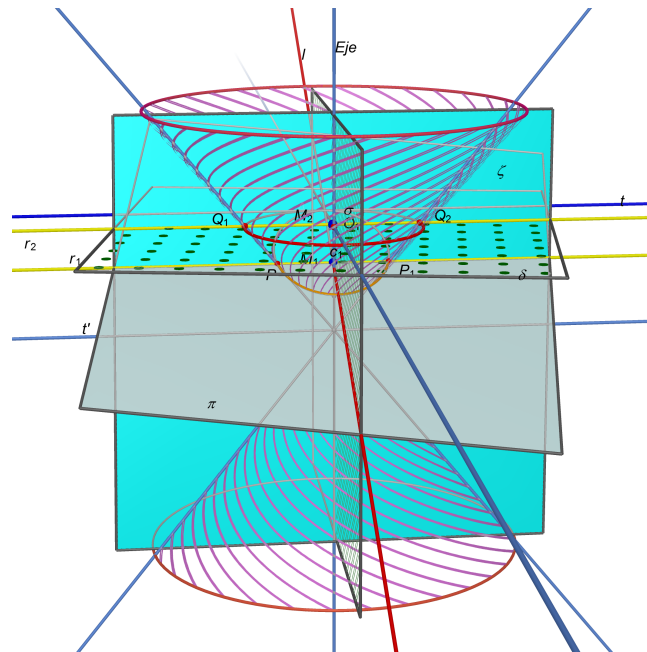
Luego, de las igualdades (5), (6), (9) y (10) se deduce que:

$$r_1 \perp AM_1 \quad (11)$$

$$r_2 \perp AM_2 \quad (12)$$

Sean  $\overline{Q_1Q_2}$  el segmento determinado por la intersección de la recta  $r_2$  y la circunferencia  $c_1$  y  $\overline{PP_1}$  el segmento determinado por la intersección de la recta  $r_1$  y la sección cónica. Como  $\overline{Q_1Q_2}$  es perpendicular a la recta  $AM_2$  (ver igualdad (12)), el punto  $M_2$  resulta ser su punto medio<sup>13</sup>, es decir:

$$2Q_2M_2 = Q_2Q_1 \quad (13)$$



Por otro lado, observemos que las rectas  $PQ_1$  y  $P_1Q_2$  son generatrices del cono:

Como  $VP$  es una generatriz del cono, la recta  $VP$  interseca a la circunferencia  $c_1$ . Asimismo, el punto determinado por la intersección entre  $VP$  y  $c_1$  pertenece a la intersección entre los planos  $\zeta$  y  $\delta$  (pues  $VP \subset \zeta$  y  $c_1 \subset \delta$ ), es decir, pertenece a la recta  $r_2$  y, por lo tanto, debe ser el punto  $Q_1$ . Luego, la recta  $PQ_1$  es una generatriz del cono. Análogamente, se demuestra que la recta  $P_1Q_2$  también es una generatriz.

Por último, demostraremos que el punto  $M_1$  es punto medio del segmento  $\overline{PP_1}$ :

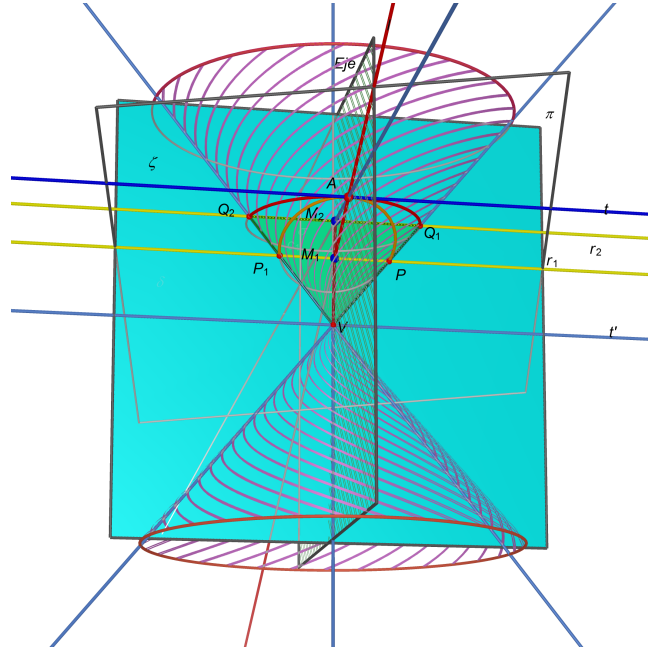
Como  $Q_1Q_2$  es paralela a  $PP_1$  (ver igualdad (7)), se deduce que los siguientes pares de triángulos son semejantes:

1.  $P_1VP$  y  $Q_2VQ_1$
2.  $P_1VM_1$  y  $Q_2VM_2$

<sup>12</sup>Ver Teorema 20.10 en Pogorélov (1974).

<sup>13</sup>A partir del Teorema de Pitágoras se demuestra la congruencia de los triángulos  $Q_1O_1M_2$  y  $Q_2O_1M_2$ .





De 1 se deduce que:

$$\frac{P_1P}{Q_2Q_1} = \frac{VP_1}{VQ_2} \quad (14)$$

De 2 se tiene que:

$$\frac{P_1M_1}{Q_2M_2} = \frac{VP_1}{VQ_2} \quad (15)$$

Luego, de (14) y (15) se tiene que:

$$\frac{P_1P}{Q_2Q_1} = \frac{P_1M_1}{Q_2M_2} \Rightarrow \frac{P_1P}{P_1M_1} = \frac{Q_2Q_1}{Q_2M_2} \quad (16)$$

Luego, a partir de (13) y (16) se concluye que:

$$2P_1M_1 = P_1P$$

Es decir, el punto  $M_1$  es punto medio del segmento  $\overline{PP_1}$ .  $\square$

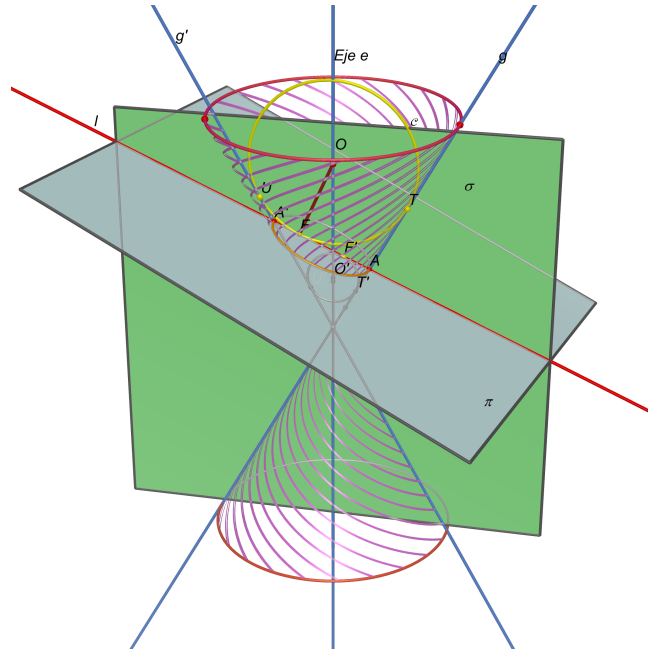
En el desarrollo que sigue, asumimos que el origen de cualquier sistema de referencia en  $\mathbb{R}^3$  será el vértice del cono, que llamaremos  $V$ .

Sean  $g$  y  $g'$  las directrices determinadas por la intersección del cono con el plano  $\sigma$ . Consideremos las circunferencias  $c$  y  $c'$  interiores a la superficie cónica de forma tal que resulten tangentes a las rectas  $g$ ,  $g'$  y  $l$ , de lo que se deduce que  $c$  y  $c'$  están incluidas en  $\sigma$ . Llamaremos  $F$  y  $F'$  a los puntos de intersección de  $l$  con  $c$  y  $c'$  respectivamente.

Sean  $O$  y  $O'$  los centros de las circunferencias  $c$  y  $c'$ , afirmamos que  $O$  y  $O'$  están contenidos en el eje del cono (al que llamaremos  $e$ ). En efecto, puesto que  $e$  es bisectriz<sup>14</sup> del ángulo formado por  $g$  y  $g'$ , cualquiera de los puntos contenidos en el eje son los únicos que equidistan de dichas generatrices (por definición de bisectriz). Luego, como el punto  $O$  equidista de  $g$  y  $g'$  debe pertenecer a la recta  $e$ . Análogamente se demuestra que el punto  $O'$  también pertenece a la recta  $e$ .

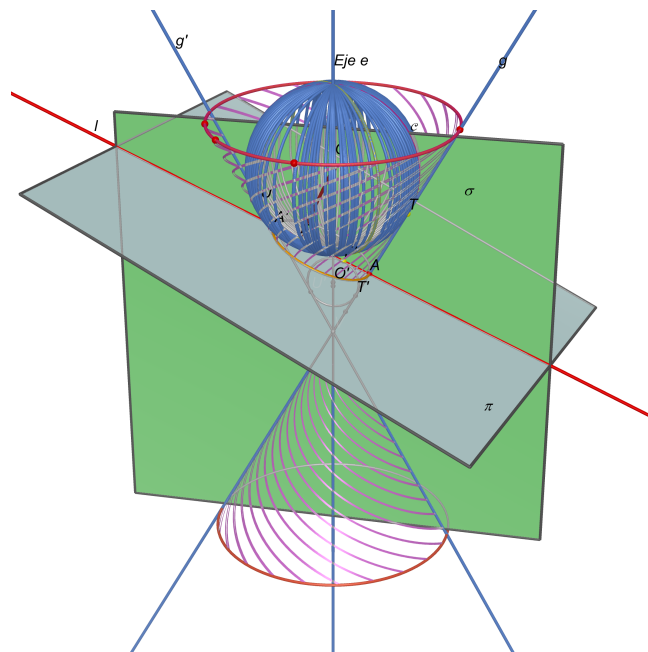
<sup>14</sup>Se deduce del hecho que el ángulo formado entre una generatriz cualquiera y el eje del cono es el mismo.





**DEFINICIÓN 6.** Una **esfera de radio**  $r$  es el lugar de los puntos del espacio cuya distancia a un punto fijo  $O$  llamado centro es a lo sumo  $r$ . Al conjunto de puntos de la esfera cuya distancia al centro es igual a  $r$  se lo llama **superficie esférica**.

Observemos que si se rota alrededor de  $e$  la circunferencia  $c$  queda determinada una superficie esférica que resulta ser tangente a la superficie cónica, siendo la curva de intersección una nueva circunferencia.



Veamos que cada una de las afirmaciones anteriores resulta cierta. Efectivamente, sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , donde  $v_3$  es un vector director de la recta  $e$  y  $v_1$  y  $v_2$  vectores directores del plano perpendicular a  $e$  por  $V$ , que llamaremos  $\lambda$ . Sea  $R$  la rotación en el espacio de ángulo  $\theta$  al rededor de la recta  $e$  en la base  $B$ , de esta manera resulta que la recta  $e$  es invariante respecto a  $R$ , en particular cada punto del eje lo es:

*Demostración.* La matriz de la rotación  $R$  asociada a la base  $B$  es:

$$MR_{BB} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $v$  es un punto de la recta, entonces  $[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Luego,

$$T[v]_B = MR_{BB} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

De lo que se deduce que:

$$T(v) = v, \quad \forall v \in e$$

□

Luego, la imagen de  $O$  por la rotación al rededor de  $e$  es  $O$ . Es decir,  $R(O) = O$ . Como  $R$  es un movimiento<sup>15</sup>, conserva las distancias entre los puntos. Por lo tanto, si  $Q$  es un punto de la circunferencia  $c$  y  $Q'$  su imagen por  $R$  se tiene que:

$$\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{R(O)R(Q)}\| = \|\overrightarrow{OQ'}\|$$

Luego, por la [definición 6](#) se deduce que la imagen de  $c$  por  $R$  para  $0 \leq \theta < 2\pi$  es una superficie esférica con centro en  $O$ , a la que llamaremos  $\mathcal{E}$ . Si  $P \in \mathcal{E}$  podemos determinar la *esfera* de centro en  $O$  y radio  $OP$ , que llamaremos  $\mathcal{S}$ . Análogamente, se determina una esfera  $\mathcal{S}'$  a partir de la rotación de la circunferencia  $c'$  al rededor de  $e$ .

Queda por demostrar que las superficies esférica y cónica son tangentes a lo largo de una circunferencia. Para ello, recordemos que la circunferencia  $c$  resulta ser tangente a las generatrices  $g$  y  $g'$ , llamemos  $T$  y  $U$  a los puntos de intersección respectivos. Observemos en primer lugar que el segmento  $\overline{TU}$  es perpendicular a la recta  $e$ .

Efectivamente, consideremos el cuadrilátero  $OTVU$ , sabemos que  $TO = OU$  pues  $T$  y  $U$  pertenecen a  $c$ . Entonces el triángulo  $TOU$  es isósceles y se deduce que:

$$\angle OTU = \angle OUT \tag{17}$$

Además, como  $OT$  es perpendicular a  $g$  y  $OU$  a  $g'$  se tiene que:

$$\angle OTV = \angle OUV = 1R \tag{18}$$

Luego, de las igualdades (17) y (18) se concluye que  $\angle VTU = \angle VUT$ , lo que implica que el triángulo  $VTU$  es isósceles. Luego,

$$TV = UV \tag{19}$$

Por otra parte, si llamamos  $W$  al punto de intersección entre  $TU$  y  $VO$  y comparamos los triángulos  $VWT$  y  $VWU$  se tiene que:

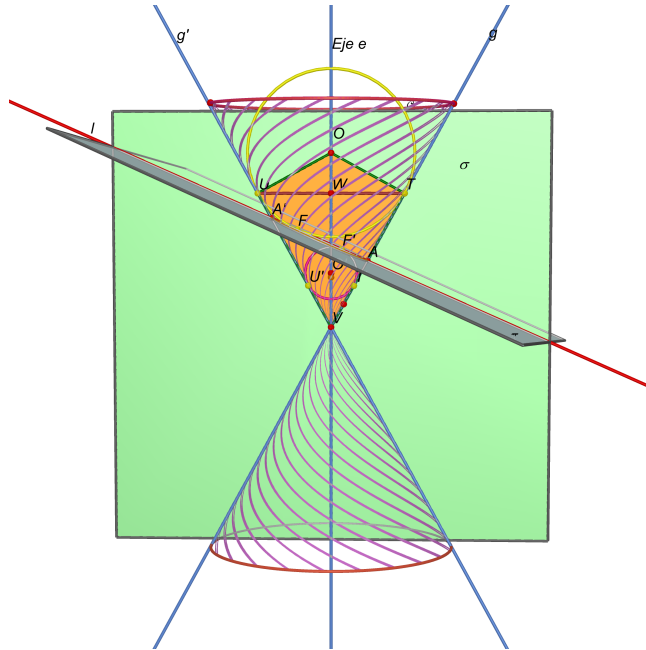
$$\begin{aligned} TV &= VU \text{ por (19)} \\ \angle TVW &= \angle UVW \text{ por ser } e \text{ bisectriz de } \angle TVU \\ \overline{VW} &\text{ lado compartido} \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Ver Definición 2 en Hernández (1994, p. 429).

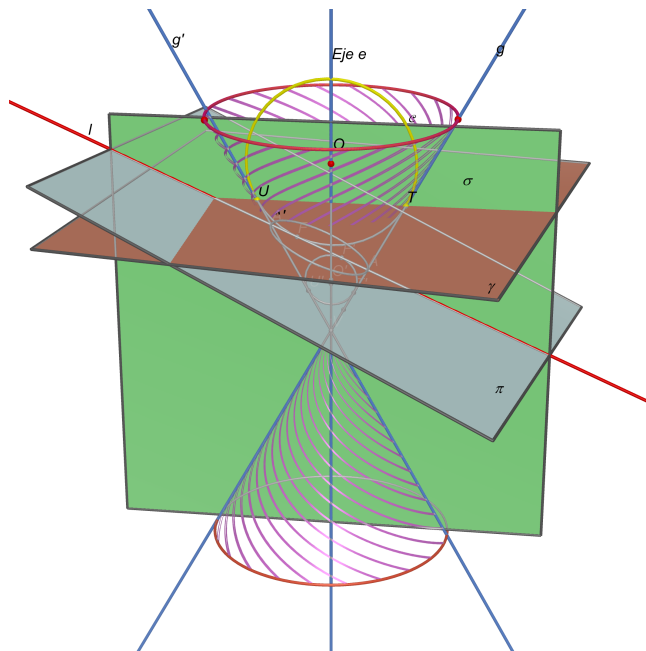
Luego, los triángulos  $VWT$  y  $VWU$  son congruentes, y por lo tanto  $\angle TWV = \angle UWV$ . Además, como estos ángulos son adyacentes por construcción, deducimos que:

$$\angle TWV = 1R = \angle UWV$$

□



Por lo tanto, como la recta  $TU$  es perpendicular a la recta  $e$ , los puntos  $T$  y  $U$  pertenecen a un mismo plano perpendicular al eje del cono, que llamaremos  $\gamma$ .



Demostraremos que cualquier imagen de  $T$  y de  $U$  por la rotación  $R$  definida anteriormente<sup>16</sup> también pertenece a  $\gamma$ . Esto es, probaremos el siguiente resultado:

<sup>16</sup> $R$  es la rotación de  $\mathbb{R}^3$  en base  $B$  de ángulo  $\theta$  al rededor de la recta  $e$ .

**LEMA 2.** Si  $T'$  es la imagen de  $T$  por  $R$ , entonces  $T'$  pertenece al plano  $\gamma$  perpendicular al eje del cono por  $T$ .

*Demostración.* Sabemos que la matriz de la rotación  $R$  asociada a la base  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  es:

$$MR_{BB} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, si  $[T]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$  y  $[T']_B = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{pmatrix}$  se tiene que:

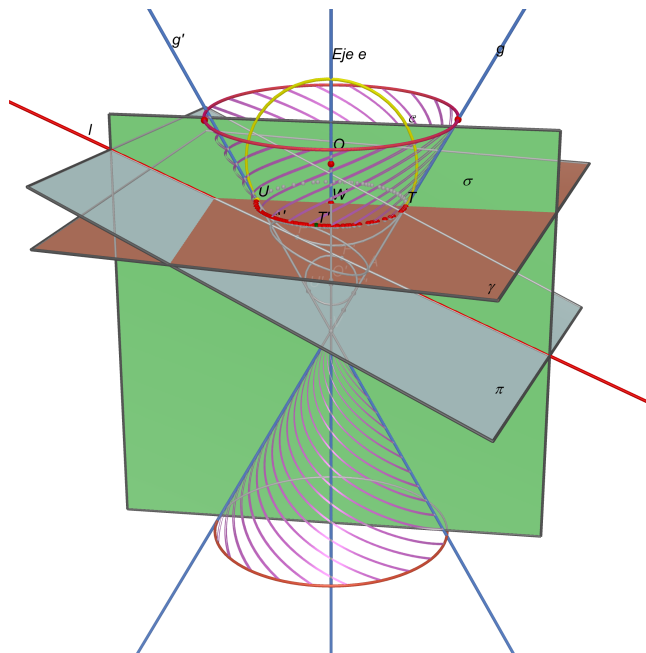
$$MR_{BB} \cdot [T]_B = [T']_B$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} t'_1 &= t_1 \cos\theta - t_2 \sin\theta \\ t'_2 &= t_1 \sin\theta + t_2 \cos\theta \\ t'_3 &= t_3 \end{aligned}$$

En particular, como  $t'_3 = t_3$  y la base  $B$  es ortonormal (en particular ortogonal), se infiere que los puntos  $T$  y  $T'$  se encuentran en un mismo plano perpendicular a la recta  $e$ . Además, por la unicidad del plano perpendicular a una recta por un punto que no le pertenece<sup>17</sup>, se deduce que  $T'$  pertenece a  $\gamma$ .  $\square$

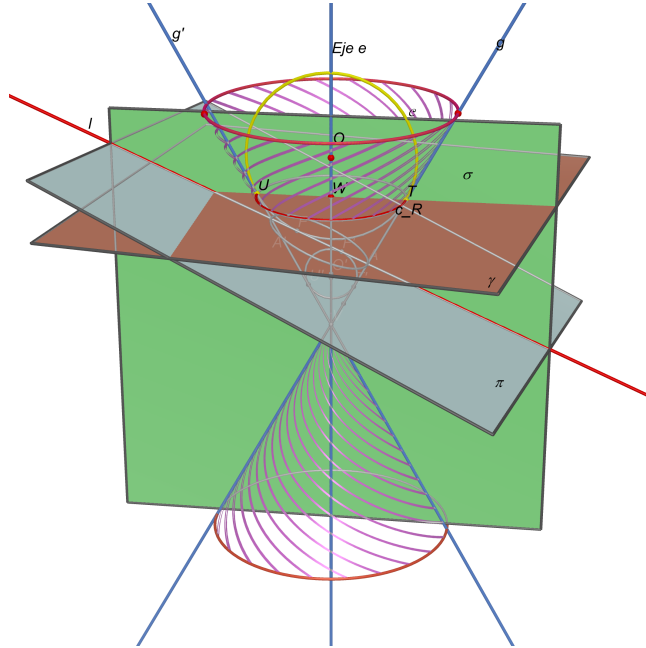


<sup>17</sup>Ver Teorema 20.6 en Pogorélov (1974).

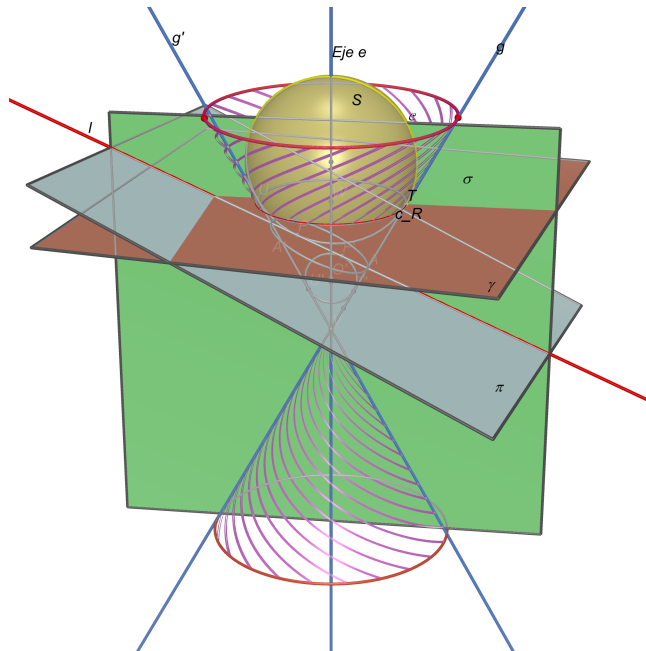
Por otra parte, recordemos que cada punto de la recta  $e$  es invariante respecto a  $R$ , en particular se tiene que  $R(W) = W$ , y como  $R$  es un movimiento sabemos que conserva distancias, por lo tanto:

$$\|\overrightarrow{WT}\| = \|\overrightarrow{R(W)R(T)}\| = \|\overrightarrow{WT'}\|$$

Luego, se deduce que la imagen de  $T$  por  $R$  para  $0 \leq \theta < 2\pi$  es una circunferencia con centro en  $W$  incluida en  $\gamma$ , a la que llamaremos  $c_R$ .



Falta demostrar que  $c_R$  resulta ser la curva de intersección entre la esfera  $\mathcal{S}$  y el cono<sup>18</sup>.



Para ello, alcanza con demostrar el siguiente resultado:

<sup>18</sup>Por cuestiones de simplicidad nos referiremos a las superficies esférica y cónica como esfera y cono respectivamente

**LEMA 3.** Para cualquier punto  $Z$  perteneciente a la circunferencia  $c_R$  se tiene que la recta  $VZ$  es una generatriz del cono.

*Demostración.* Sea  $Z \in d$ , entonces existe  $\theta \in [0; 2\pi)$  tal que si  $R$  es la rotación sobre la recta  $e$  de ángulo  $\theta$ ,  $R(T) = Z$ . Luego,

$$\|\overrightarrow{WT}\| = \|\overrightarrow{R(W)R(T)}\| = \|\overrightarrow{WZ}\| \quad (20)$$

Además, por el lema 2, sabemos que  $T$  y  $Z$  pertenecen al plano  $\gamma$  y entonces:

$$\angle VWT = 1R = \angle VWZ \quad (21)$$

Luego, observamos que el segmento  $\overline{VW}$  resulta ser un lado que comparten los triángulos  $VWT$  y  $VWZ$  y por lo tanto, usando las igualdades (20) y (21) se deduce que estos triángulos son congruentes (por el criterio de congruencia *Lado-lado-lado*). En particular, se tiene que  $\angle WVT = \angle WVZ$ , de lo que deducimos que  $\angle VWZ = \alpha$  y por lo tanto, la recta  $VW$  es generatriz del cono. □

A partir de un desarrollo análogo al anterior es posible probar que la esfera  $\mathcal{S}'$  resulta ser tangente al cono. La cuya curva de intersección resulta ser una circunferencia incluida en un plano perpendicular al eje del cono.

Con lo trabajado hasta el momento se ha demostrado el siguiente resultado:

**LEMA 4.** La curva de intersección entre la esfera  $\mathcal{S}$  y el plano  $\gamma$  es la circunferencia  $c_R$ .

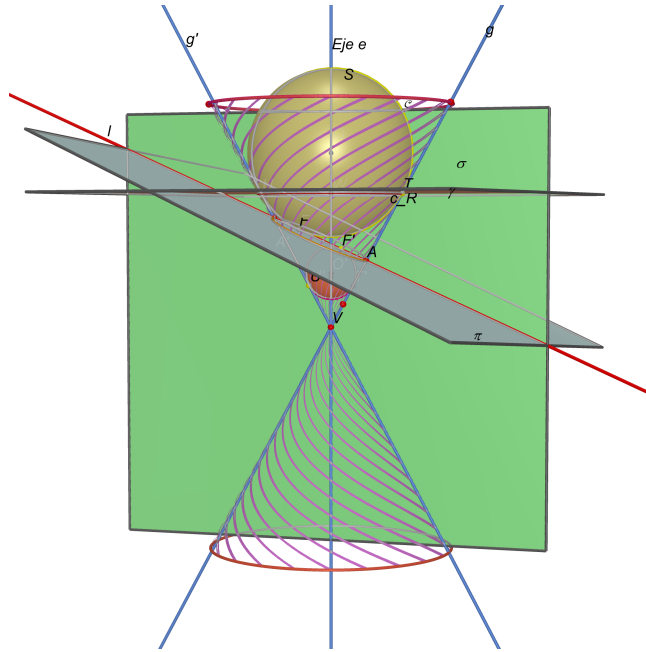
Para continuar, se necesitan las siguientes definiciones:

**DEFINICIÓN 7.** Dada una esfera de centro  $O$ , un punto  $P$  sobre la superficie esférica y una recta  $r$  que contiene a  $P$ . Si  $r$  es perpendicular al radio  $\overline{OP}$  se dice que es **tangente** a la esfera en  $P$ .

**DEFINICIÓN 8.** Dada una esfera de centro  $O$  y  $P$  punto de su superficie. Un plano se dice **tangente a la esfera en  $P$**  si es perpendicular al radio  $\overline{OP}$ .

Recordemos que la recta  $l$  es tangente a la circunferencia  $c$  en el punto  $F$  y por lo tanto resulta que  $l$  es perpendicular al radio  $OF$ . Además, como  $OF$  resulta ser radio de la esfera  $\mathcal{S}$ , de la definición 7 se deduce que la recta  $l$  es perpendicular a  $\mathcal{S}$ . Sea  $l'$  una recta incluida en el plano  $\pi$  que contiene al punto  $F$ . Afirmamos que  $l'$  es tangente a la circunferencia  $c$  en el punto  $F$ . En efecto, supongamos que existe otro punto  $I$ , distinto de  $F$ , determinado por la intersección entre  $l'$  y  $c$ . Como  $I \in c$  se deduce que  $I \in \sigma$ , además, como  $I \in l'$  se tiene que  $I \in \pi$ . Entonces,  $I$  pertenece a la intersección de los planos  $\sigma$  y  $\pi$  y por lo tanto, pertenece a la recta  $l$ . Hemos llegado a una contradicción puesto que  $l$  es tangente a  $c$ . Luego,  $l'$  es tangente a  $c$  en  $F$  y por lo tanto, resulta ser perpendicular al radio  $\overline{OF}$ . Por otra parte, sabemos que el segmento  $\overline{OF}$  es perpendicular a dos rectas incluidas en el plano  $\pi$  ( $l$  y  $l'$ ), entonces resulta que la recta  $OF$  es perpendicular a  $\pi$ <sup>19</sup>. Lo que implica, según la definición 8 que  $\pi$  es tangente a la esfera en  $\mathcal{S}$  en el punto  $F$ .

<sup>19</sup>Ver Teorema 20.3 en Pogorélov (1974).

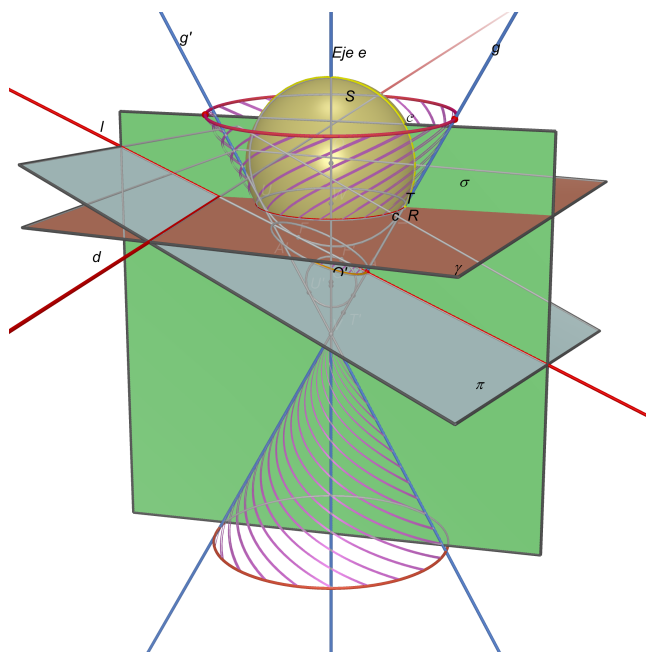


Análogamente, se prueba que la esfera  $S'$  resulta ser tangente al plano  $\pi$  en el punto  $F'$ .

DEFINICIÓN 9. El plano  $\pi$  se lo llama **plano de sección** y a las esferas  $S$  y  $S'$  **esferas de Dandelin**.

DEFINICIÓN 10. Se llaman **focos** de una elipse a los puntos determinados por la intersección entre el plano de sección y las esferas de Dandelin.

DEFINICIÓN 11. La recta determinada por la intersección entre los planos  $\pi$  y  $\gamma$  se llama **directriz** respecto del foco  $F$ .



Observamos que cada una de las directrices resulta ser perpendicular a la recta  $l$ :

LEMA 5. Sea  $d$  la directriz respecto del foco  $F$ , entonces  $d$  es perpendicular a la recta  $l$ .

*Demostración.* Como el eje del cono es perpendicular al plano  $\gamma$ , según la [definición 5](#) también es perpendicular a la directriz, por ser  $d$  una recta incluida en él. Además, la directriz es perpendicular al vector normal al plano  $\pi$ , pues  $d$  también está incluida en dicho plano. Entonces, la directriz es perpendicular a dos rectas del plano  $\gamma$  y por lo tanto, resulta perpendicular a él. Luego, por la [definición 5](#) la directriz  $d$  es perpendicular a toda recta del plano  $\gamma$ , en particular a la recta  $l$ .  $\square$

A continuación probaremos algunos resultados que serán utilizados posteriormente para demostrar el teorema más importante que trabajaremos en esta sección. Comenzamos con las siguientes definiciones:

**DEFINICIÓN 12.** Sean  $\alpha$  un plano,  $A$  un punto que le pertenece y  $AB$  una recta que no se encuentra incluida en el plano  $\alpha$  ni es perpendicular a él. Si  $B'$  el punto determinado por la intersección entre el plano  $\alpha$  y la recta perpendicular a  $\alpha$  por el punto  $B$ , la recta  $AB'$  se llama **proyección de la recta  $AB$  sobre  $\alpha$** .

**DEFINICIÓN 13.** Sea  $\alpha$  un plano, " $a$ " una recta secante al plano y " $a_\alpha$ " la proyección de la recta " $a$ " sobre el plano  $\alpha$ . Se llama **ángulo entre el plano  $\alpha$  y la recta  $a$** , al ángulo entre las rectas  $a$  y  $a_\alpha$ .

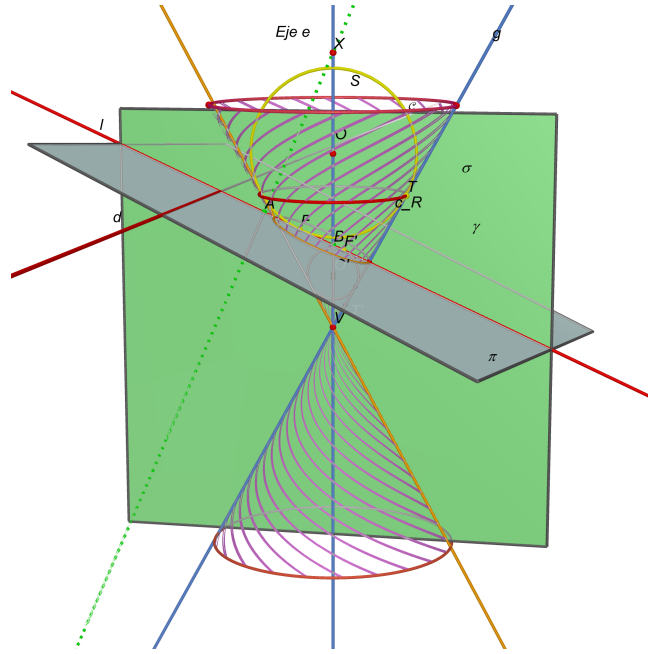
**LEMA 6.** El ángulo entre el eje del cono (recta  $e$ ) y el plano  $\pi$  es el ángulo entre la recta  $e$  y la recta  $l$ . Es decir, el ángulo entre las rectas  $e$  y  $l$  es  $\alpha$ .

*Demostración.* En vistas de la [definición 13](#), mostraremos que la recta  $l$  es la proyección de la recta  $e$  sobre el plano  $\pi$ .

Efectivamente, recordemos que como  $\sigma$  incluye al vector normal del plano  $\pi$  se deduce que estos planos son perpendiculares, porque  $\pi$  es perpendicular a una recta del plano  $\sigma$ . Entonces, cualquier recta perpendicular al plano  $\pi$  resulta paralela a  $\sigma$  o está contenida en dicho plano<sup>20</sup>. Consideremos un punto  $X$  cualquiera del eje del cono, como este punto pertenece a la recta  $e$ , incluida en el plano  $\sigma$ , también está contenido en  $\sigma$ . Tracemos la recta perpendicular al plano  $\pi$  por  $X$  y llamemos  $A$  al punto determinado por la intersección de esta recta con el plano. Luego, como la recta  $XA$  es perpendicular a  $\pi$  y  $X \in \sigma$ , entonces  $XA$  está contenida en el plano  $\sigma$ . Sea  $B$  el punto determinado por la intersección entre el eje y  $\pi$ . Por construcción, la recta  $AB$  es la proyección de la recta  $e$  sobre  $\pi$  (ver [definición 12](#)). Además, como los puntos  $A$  y  $B$  pertenecen ambos a los planos  $\pi$  y  $\sigma$  se deduce que la recta  $AB$  también está incluida en dichos planos y por lo tanto en su intersección, es decir,  $A \in l$  y  $B \in l$ . Luego, la recta  $AB$  es la recta  $l$ . Esto es, la recta  $l$  es la proyección de la recta  $e$  sobre el plano  $\pi$ .

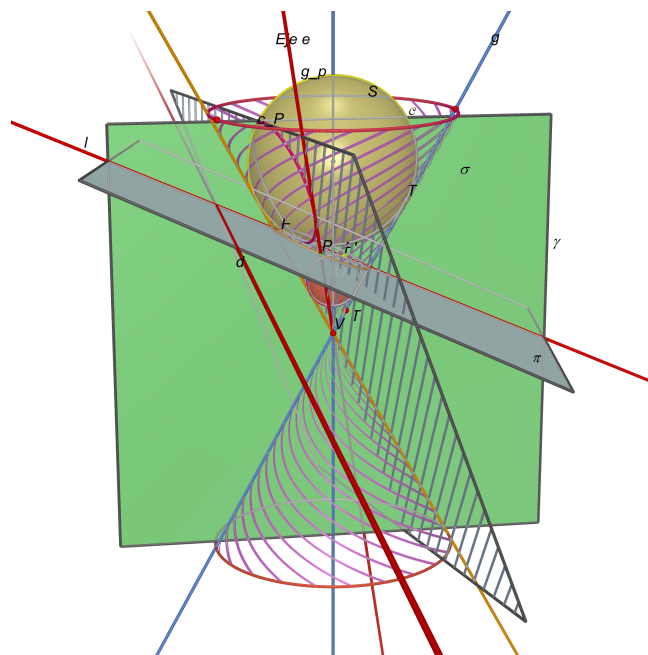
<sup>20</sup>Ver Teorema 20.9 en Pogorélov (1974).





□

**DEFINICIÓN 14.** Sea  $P$  un punto de la sección cónica, llamaremos  $g_P$  a la generatriz del cono que contiene al punto  $P$ . Por otra parte, llamaremos  $c_P$  a la circunferencia determinada por la intersección entre el plano que incluye a  $g_P$  y al punto  $F$  con la esfera  $S$ .



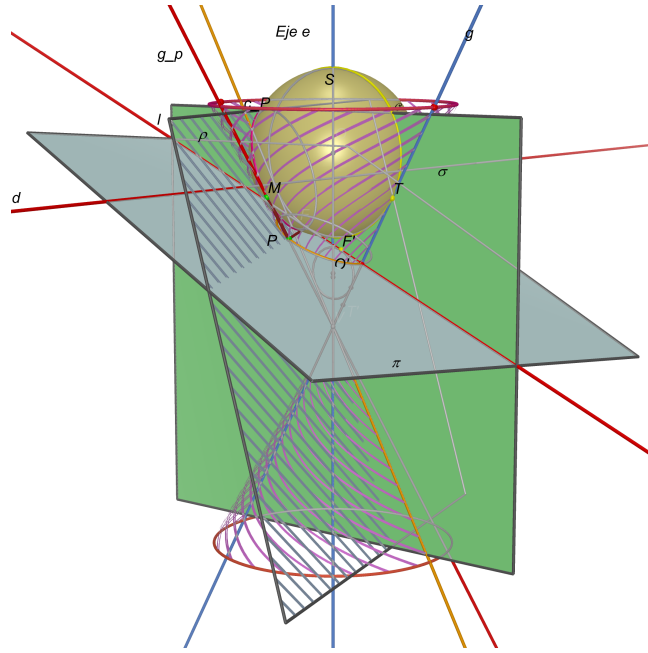
Luego de lo trabajado hasta el momento estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 2.** Sean  $P$  un punto de la sección cónica y  $M$  el punto determinado por la intersección entre  $g_P$  y la circunferencia  $c_P$ , entonces  $PM = PF$ .

A continuación se realizará una demostración del resultado anterior utilizando argumentos propios de Geometría sintética. En la sección **Anexo** se exhiben dos demostraciones más de

esta proposición, una mediante argumentos de Álgebra lineal y otra a partir de argumentos de Geometría analítica.

*Demostración.* Sea  $\rho$  el plano que contiene a  $g_P$  y a  $F$ . En la intersección de la esfera  $S$  y  $\rho$  se determina la circunferencia  $c_P$ . Resulta evidente, por construcción, que los puntos  $F$  y  $M$  pertenecen a esta circunferencia.



Sea  $O$  el centro de la circunferencia  $c_P$ , entonces  $OM = OF$  por ser  $M$  y  $F$  puntos de la circunferencia. Como la recta  $PF$  está incluida en el plano  $\pi$ , resulta ser tangente a la esfera  $S$  en  $F$  (Recordar que el plano  $\pi$  es tangente a  $S$  en  $F$ ), además como la circunferencia  $c_P$  está incluida en  $S$  se deduce que la recta  $PF$  también es tangente a  $c_P$  en  $F$ . De existir otro punto de intersección entre  $PF$  y  $c_P$  distinto de  $F$ , dicho punto pertenecería a  $S$  y, por lo tanto la esfera y la recta  $PF$  no serían tangentes. Luego, la recta  $PF$  es tangente a  $c_P$  en  $F$ , entonces la recta  $PF$  es perpendicular al radio  $OF$ . Es decir,

$$\angle PFO = 1R \quad (22)$$

Por otra parte, como  $M$  pertenece a  $c_P$  también pertenece a  $S$ . Además, como  $M$  está incluido en  $c_P$ , y por ser  $g_P$  tangente a la esfera, se deduce que  $M$  es el punto determinado por la intersección entre  $S$  y  $g_P$ . Análogamente al caso anterior, deducimos que la recta  $g_P$  es tangente a la circunferencia  $c_P$  en  $M$ . Esto implica que la recta  $PM$  es perpendicular al radio  $OM$ . Es decir,

$$\angle PMO = 1R \quad (23)$$

Por otra parte, al considerar el triángulo  $MOF$  observamos que es isósceles. Entonces,

$$\angle MFO = \angle FMO \quad (24)$$

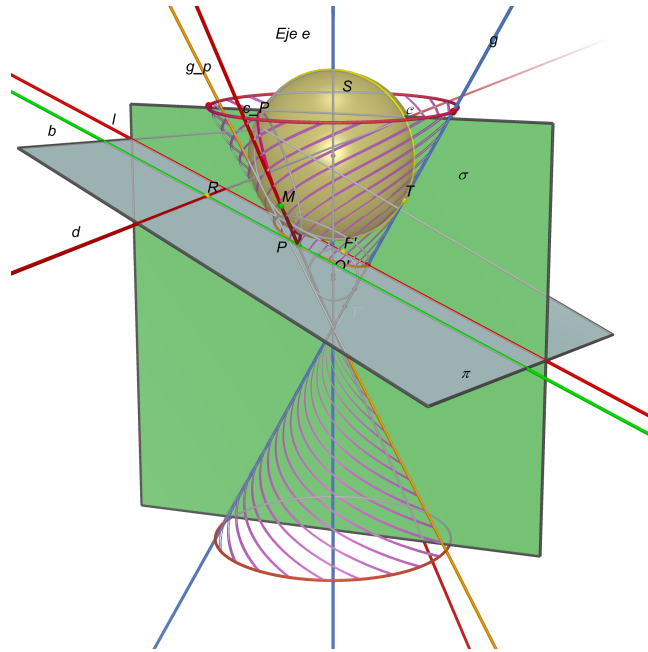
Luego, como  $\angle PMO = \angle PMF + \angle FMO$  y  $\angle PFO = \angle PFM + \angle MFO$ , por (22), (23) y (24) se tiene que  $\angle PMF = \angle PFM$ . Luego, el triángulo  $MPF$  es isósceles, entonces

$$PM = PF$$

□

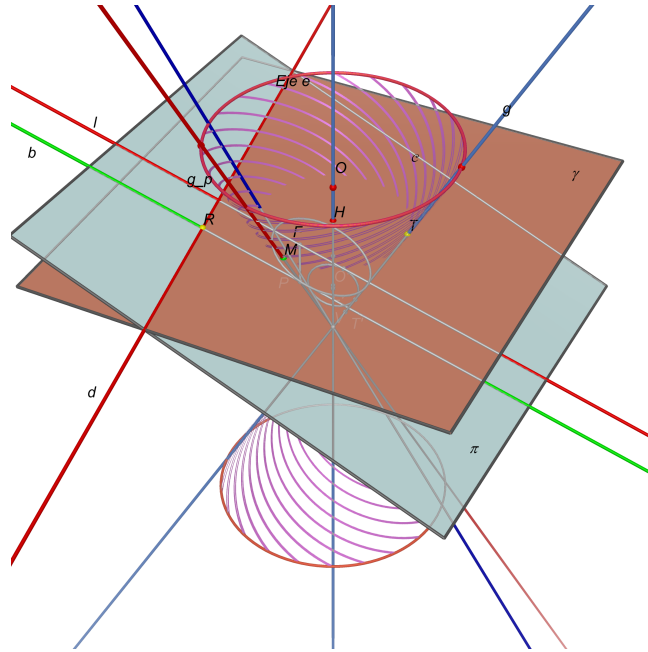
Análogamente al desarrollo planteado en la [Proposición 2](#), para aquellos casos donde existe  $F'$  podemos considerar la circunferencia  $c'_P$  determinada por la intersección de la esfera  $S'$  y el plano que incluye a la generatriz  $g_P$  y al punto  $F'$  y demostrar que si  $N$  es el punto determinado por la intersección entre  $g_P$  y la circunferencia  $c'_P$ , entonces  $PN = PF'$

Consideremos la recta que contiene al punto  $P$  y que es perpendicular a la directriz  $d$ , a la que llamaremos  $b$ . Sea  $R$  el punto determinado por la intersección entre  $b$  y  $d$ . Puesto que los puntos  $P$  y  $R$  pertenecen al plano  $\pi$ , la recta  $b$  está incluida en  $\pi$ . Afirmamos que la recta  $b$  es paralela a la recta  $l$ . Efectivamente, como las rectas  $b$  y  $l$  resultan perpendiculares a la directriz  $d$  (recordar [lema 5](#)) y ambas se encuentran incluidas en  $\pi$ , se deduce que son paralelas.

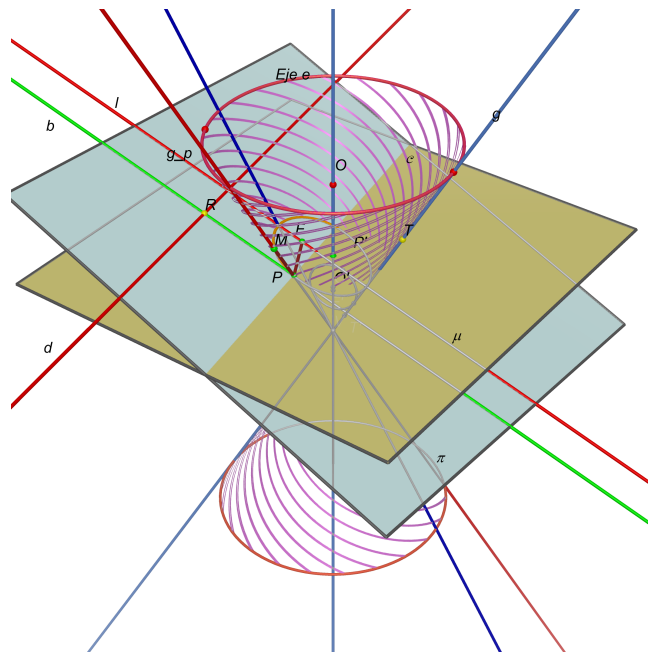


**DEFINICIÓN 15.** Sean  $a$  una recta,  $B$  un punto que no le pertenece y  $\alpha$  el plano perpendicular a la recta  $a$  por el punto  $B$ . El punto  $B'$  determinado por la intersección entre el plano  $\alpha$  y la recta  $a$  se llama **proyección del punto  $B$  sobre la recta  $a$** .

Como se mencionó anteriormente, el punto  $M$  resulta determinado por la intersección entre la esfera  $S$  y la generatriz  $g_P$  (ver la versión geométrica en la demostración de la [Proposición 2](#)). Luego, por el [lema 3](#) deducimos que el punto  $M$  pertenece a la circunferencia  $c_R$  y por el [lema 4](#) concluimos que el punto  $M$  se encuentra en el plano  $\gamma$ . Entonces, a partir de la [definición 15](#) y como los puntos  $M$  y  $R$  pertenecen al plano  $\gamma$ , perpendicular al eje del cono, deducimos que la proyección de los puntos  $M$  y  $R$  sobre el eje es la misma y queda determinada por la intersección entre el plano  $\gamma$  y la recta  $e$ . Llamemos  $H$  a dicho punto.



Sea  $\mu$  el plano perpendicular al eje del cono (recta  $e$ ) por  $P$ , llamemos  $P'$  al punto determinado por la intersección entre  $\mu$  y  $e$ . Luego, según la [definición 15](#)  $P'$  resulta ser la proyección del punto  $P$  sobre el eje.



Como la generatriz que contiene al punto  $P$  ( $g_P$ ) y el eje del cono se intersecan en el vértice ( $V$ ), existe un plano que los incluye. Consideremos en este plano el triángulo  $MHV$ , rectángulo en  $H$  por ser este punto la proyección de  $M$  sobre el eje del cono. Por construcción, el punto  $P$  pertenece al segmento  $\overline{MV}$ , el punto  $P'$  pertenece a  $\overline{HV}$  y los segmentos  $\overline{MH}$  y  $\overline{PP'}$  son paralelos (por ser  $H$  y  $P'$  las proyecciones de  $M$  y  $P$  respectivamente). Luego, el triángulo  $PP'V$  es rectángulo en  $P'$ . Recordando que el ángulo formado entre  $g_P$  y  $e$  es  $\alpha$ , se tiene que:

$$\cos(\alpha) = \frac{P'V}{PV} \tag{25}$$

Además, por el Teorema de Thales se deduce que:

$$\frac{P'V}{PV} = \frac{P'H}{PM} \tag{26}$$

Luego, de (25) y (26) se concluye que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{P'H}{PM} \\ PM \cdot \cos(\alpha) &= P'H \end{aligned}$$

Además, como  $PM = PF$  (ver Proposición 2), se cumple que:

$$PF \cdot \cos(\alpha) = P'H \tag{27}$$

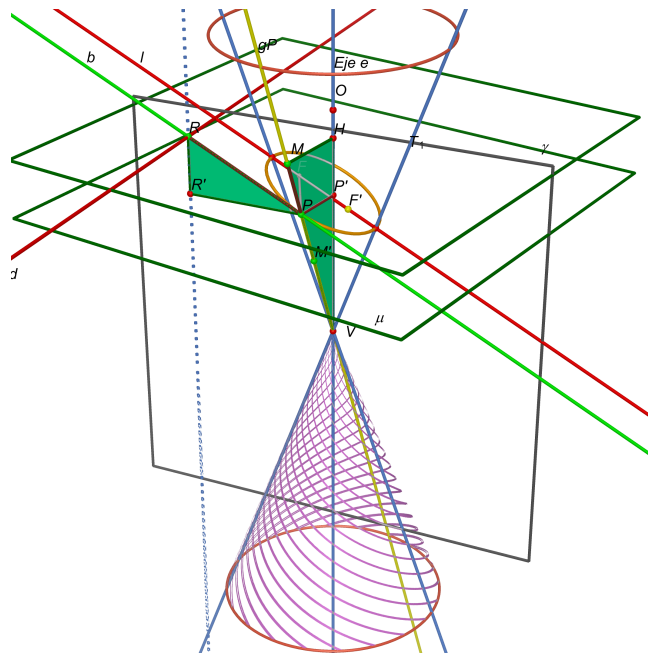
Por otra parte, sea  $\overline{PR'}$  la proyección del segmento  $\overline{PR}$  sobre el plano  $\mu$ . De esta manera, la recta  $RR'$  es perpendicular al plano  $\mu$  y, por lo tanto, resulta paralela al eje del cono. Además, como la recta  $l$  es paralela a la recta  $PR$  se deduce que el ángulo entre las rectas  $RR'$  y  $PR$  es el mismo que aquel determinado por el eje del cono y la recta  $l$ . Recordemos que dicho ángulo es  $\beta$  (ver lema 6). Luego, el ángulo  $\angle PRR' = \beta$ . Además, como el triángulo  $RR'P$  es rectángulo en  $R'$  se tiene que:

$$\cos(\beta) = \frac{RR'}{PR}$$

Como  $RR' = P'H$  por ser segmentos de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos<sup>21</sup> (puesto que  $\gamma$  y  $\mu$  son perpendiculares al eje del cono) se deduce que:

$$\cos(\beta) = \frac{P'H}{PR}$$

$$PR \cdot \cos(\beta) = P'H \tag{28}$$



<sup>21</sup>Ver Teorema 19.8 en Pogorélov (1974).

Luego, de las igualdades (27) y (28) se tiene que:

$$PF \cdot \cos(\alpha) = PR \cdot \cos(\beta)$$

$$\frac{PF}{PR} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \quad (29)$$

Podemos caracterizar el cociente anterior según la sección cónica que se considere:

**LEMA 7.** Como  $\alpha$  y  $\beta$  son fijos, pues sólo dependen del cono y del plano  $\pi$ , se deduce que el cociente  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$  se mantiene constante para una misma cónica. Además, como  $0 < \alpha < \pi/2$  y  $0 < \beta < \pi/2$ , se tiene lo siguiente:

- Si  $\alpha < \beta$  (elipse) se deduce que  $0 < \cos(\beta) < \cos(\alpha)$ , luego  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} < 1$
- Si  $\alpha > \beta$  (hipérbola) se deduce que  $0 < \cos(\alpha) < \cos(\beta)$ , luego  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} > 1$
- Si  $\alpha = \beta$  (parábola) se deduce que  $0 < \cos(\alpha) = \cos(\beta)$ , luego  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = 1$

**DEFINICIÓN 16.** El cociente  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$  se llama **excentricidad** y se lo nota con la letra  $\varepsilon$ . Esto es,

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \varepsilon$$

Luego, por la igualdad (29) se deduce que:

$$\frac{PF}{PR} = \varepsilon$$

Resumimos la información que se infiere a partir de la definición anterior y del lema 7:

- En una *elipse*  $0 < \varepsilon < 1$
- En una *hipérbola*  $\varepsilon > 1$
- En una *parábola*  $\varepsilon = 1$

Con el tratamiento desarrollado anteriormente se ha demostrado el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.** Sea  $\mathcal{C}$  una sección cónica de foco  $F$  y directriz respectiva  $d$ , entonces existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que para todo punto  $P \in \mathcal{C}$ :

$$\frac{d(P, F)}{d(P, d)} = \varepsilon$$

En la sección **Anexo** se exhibe un desarrollo diferente al anterior para demostrar que el cociente entre las distancias de todo punto de la sección cónica al foco y a la directriz se mantiene constante.

Para establecer una nueva definición de las secciones cónicas es necesario demostrar que el enunciado recíproco al que se presenta en el Teorema 2 también es válido. Esto es, necesitamos demostrar el siguiente resultado:

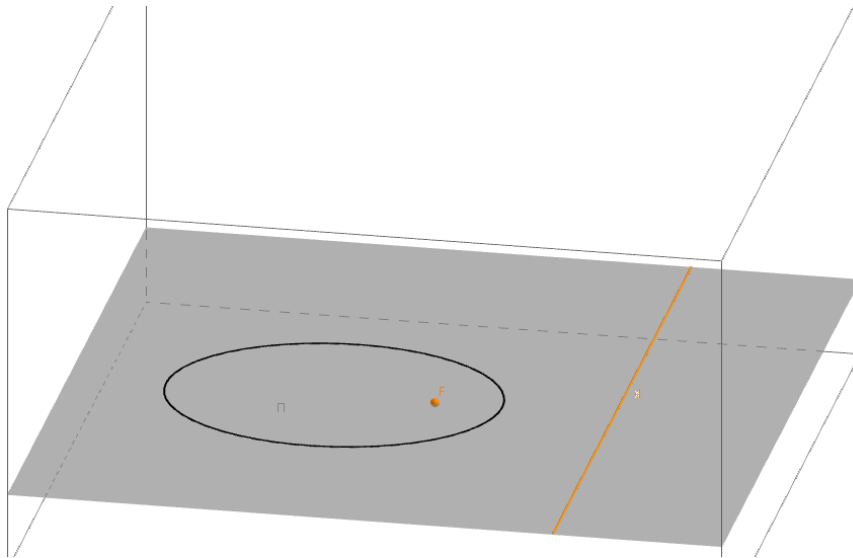
**TEOREMA 3.** Sean  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , con  $\varepsilon > 0$ ,  $\pi$  un plano,  $d$  una recta contenida en él y  $F \in \pi$  un punto que no pertenece a dicha recta. Entonces, el conjunto de puntos  $P$  del plano  $\pi$  tales que  $\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = \varepsilon$  es una sección cónica.

Antes de la demostración son necesarias las siguientes definiciones:

**DEFINICIÓN 17.** Se llama **plano diametral** de una esfera, a todo plano que contiene a su centro.

**DEFINICIÓN 18.** Se llama **círculo máximo** a toda sección de la esfera determinada entre ella y un plano diametral. La circunferencia correspondiente a un círculo máximo se denomina **circunferencia máxima**

*Demostración.* Sean  $d$  una recta,  $F$  un punto que no le pertenece y  $\pi$  el plano que los contiene. Sea  $\varepsilon$  un número positivo, consideremos el conjunto de puntos del plano  $\pi$  cuya razón de distancias al punto  $F$  y a la recta  $d$  es  $\varepsilon$ .

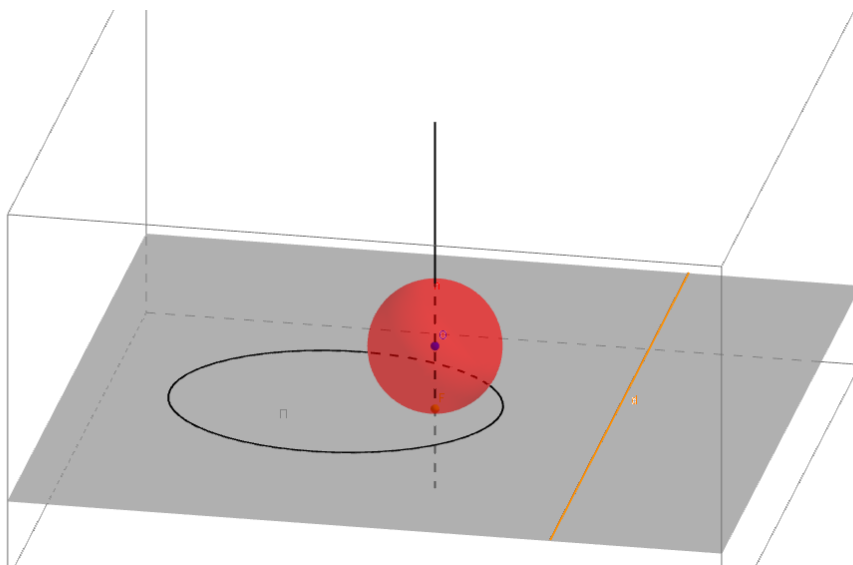


Observemos que el conjunto anterior no es un conjunto vacío. Sea  $R$  el punto determinado por la intersección entre  $d$  y la recta perpendicular a  $d$  por  $F$ . Si  $P$  es un punto del segmento  $\overline{PR}$  que cumple que  $d(P, F) = \varepsilon \cdot d(P, R)$  y considerando que  $d(P, F) + d(P, R) = d(F, R)$  se deduce que:

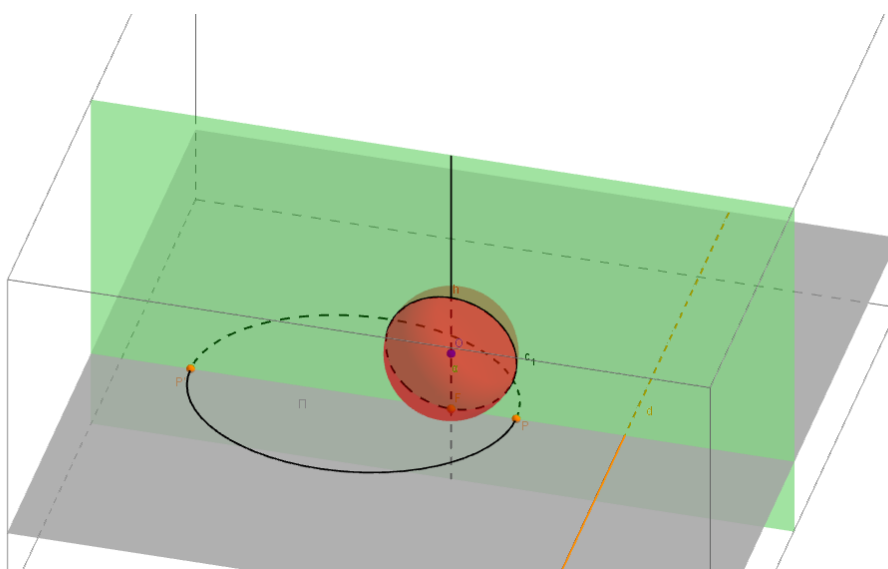
$$\begin{aligned} d(P, F) &= \varepsilon \cdot (d(F, R) - d(P, F)) \\ d(P, F) &= \frac{\varepsilon \cdot d(F, R)}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

Recíprocamente si  $P$  es un punto del segmento  $\overline{PR}$  que cumple que  $d(P, F) = \frac{\varepsilon \cdot d(F, R)}{1 + \varepsilon}$  es fácil ver que  $d(P, F) = \varepsilon \cdot d(P, R)$ . Luego, un punto que cumpla lo pedido es aquel determinado por la intersección entre el segmento  $\overline{FR}$  y la circunferencia con centro en  $F$  y radio  $\frac{\varepsilon \cdot d(F, R)}{1 + \varepsilon}$ .

Sea  $O$  un punto de la recta perpendicular a  $\pi$  por  $F$  y sea  $\mathcal{S}$  una esfera arbitraria de centro  $O$  y radio  $OF$ . Por **definición 8** se deduce que la esfera  $\mathcal{S}$  es tangente al plano  $\pi$  en el punto  $F$ .



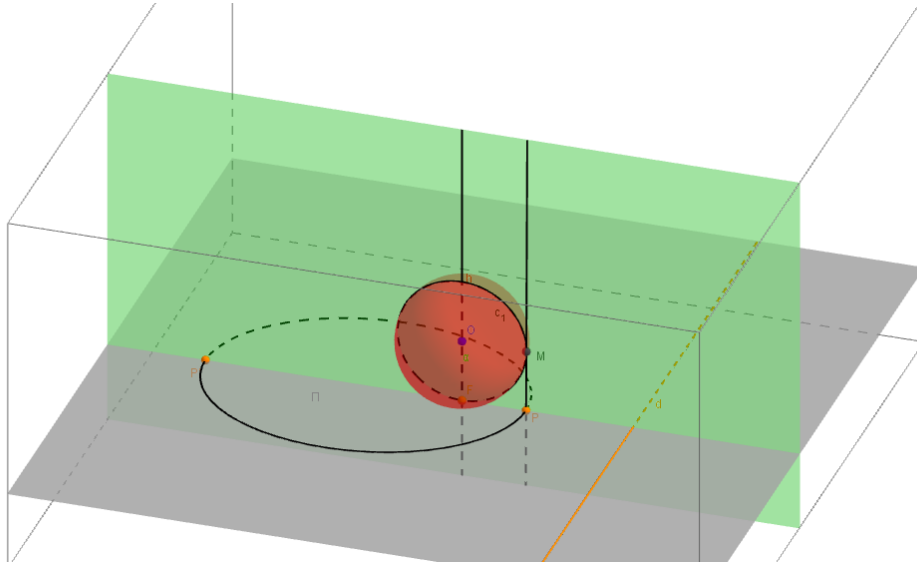
Sean  $P$  el punto descrito anteriormente y  $\alpha$  el plano diametral que contiene a los puntos  $P$  y  $P'$ , siendo  $P'$  el simétrico de  $P$  respecto del centro de la cónica. Sea  $C_1$  la circunferencia máxima determinada por la intersección entre  $\mathcal{S}$  y el plano  $\alpha$ .



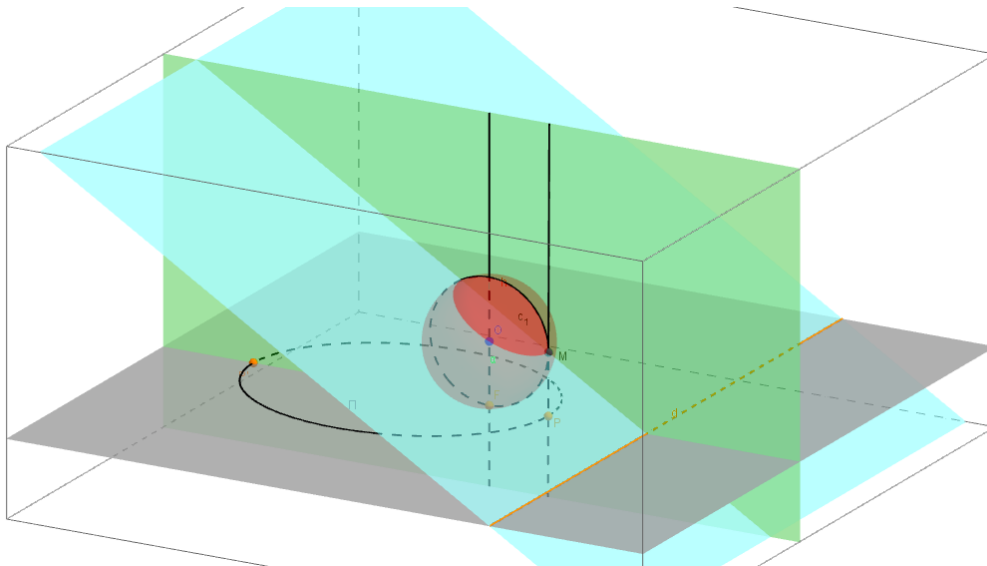
Consideremos el punto  $M$  sobre  $C_1$  de tal manera que la recta  $PM$  resulta ser tangente<sup>22</sup> a  $C_1$ . Luego, por la [definición 7](#) la recta  $PM$  es tangente a  $\mathcal{S}$ .

<sup>22</sup>Esta recta existe porque es la tangente a una circunferencia por un punto en un plano, en este caso  $\alpha$





Sea  $\gamma$  el plano que contiene a la recta  $d$  y al punto  $M$ . Observemos que el plano  $\gamma$  resulta ser secante a la esfera  $\mathcal{S}$ :

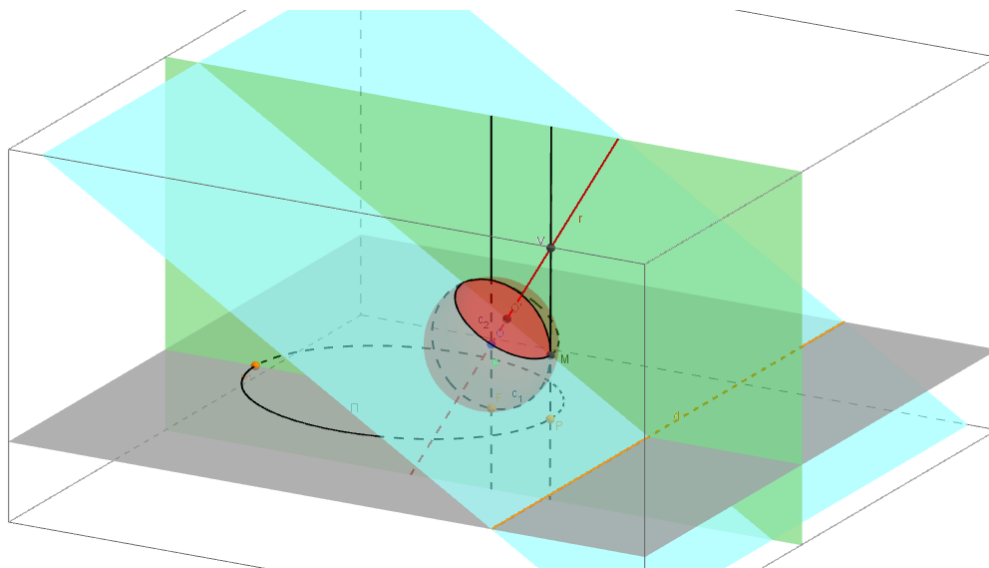


Supongamos que  $\gamma$  es tangente a la esfera  $\mathcal{S}$ , entonces por la [definición 8](#) resulta ser perpendicular a la recta  $OM$ , así como también lo es la recta  $PM$ . Por otra parte, consideremos el plano  $\theta$  que contiene a los puntos  $O$ ,  $M$  y  $P$ . Los planos  $\gamma$  y  $\theta$  se intersecan en una recta  $r$  (pues  $M$  es punto común a ambos) que por la [definición 5](#) es perpendicular a la recta  $OM$ . Además como  $PM$  no está contenida en  $\gamma$  (pues  $P$  no pertenece a  $d$  por hipótesis<sup>23</sup>) la rectas  $r$  y  $PM$  son distintas. De lo que se deduce que en el plano  $\theta$  se tienen dos rectas perpendiculares a la recta  $OM$  por un mismo punto,  $M$ , lo que es un absurdo. Luego, el plano  $\gamma$  es secante a la esfera  $\mathcal{S}$ .

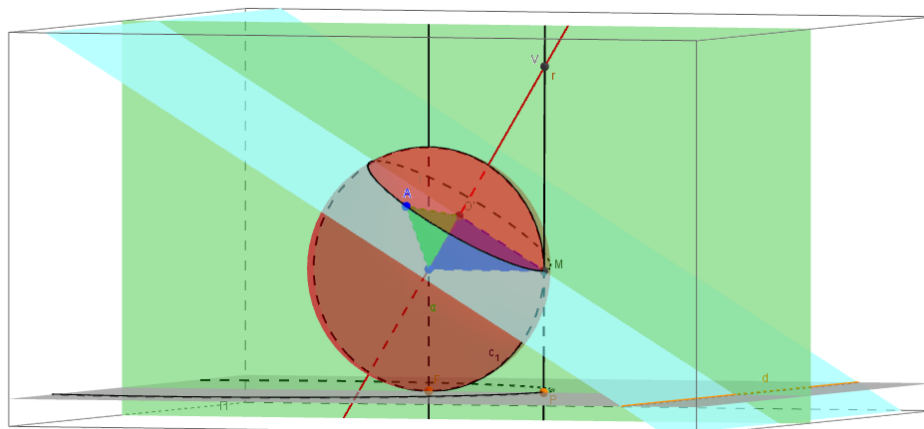
Sean  $\mathcal{C}_2$  la circunferencia<sup>24</sup> determinada por la intersección entre  $\gamma$  y  $\mathcal{S}$ ,  $O'$  su centro y  $V$  el punto determinado por la intersección entre la recta  $PM$  y la recta perpendicular a  $\gamma$  por  $O'$ , que llamaremos  $r$ .

<sup>23</sup> Además por construcción la intersección entre los planos  $\pi$  y  $\gamma$  es la recta  $d$ .

<sup>24</sup> En caso de ser una circunferencia diametral se consideraría otra esfera.



Consideremos el cono que se determina a partir de la circunferencia  $C_2$  y del punto  $V$ . Observemos que el cono resulta tangente a la esfera  $S$  a lo largo de la circunferencia  $C_2$ :  
 Si  $A \in C_2$ , los triángulos  $AO'O$  y  $MO'O$  son congruentes por el criterio *lado-ángulo-lado*:

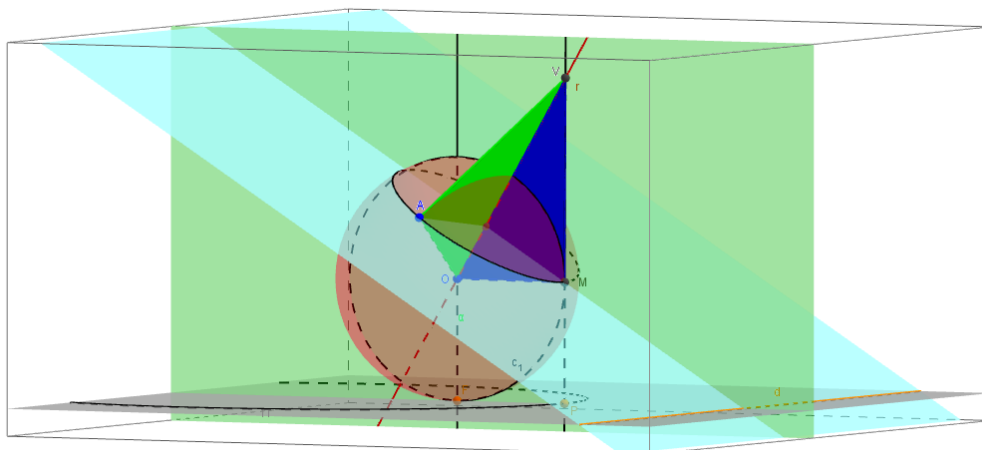


$O'O$  es lado compartido  
 $\angle AO'O = \angle MO'O$ , porque  $\gamma$  es perpendicular a  $r$   
 $AO' = MO'$ , por ser radios de la circunferencia  $C_2$

En particular,

$$\angle O'OA = \angle O'OM \tag{30}$$

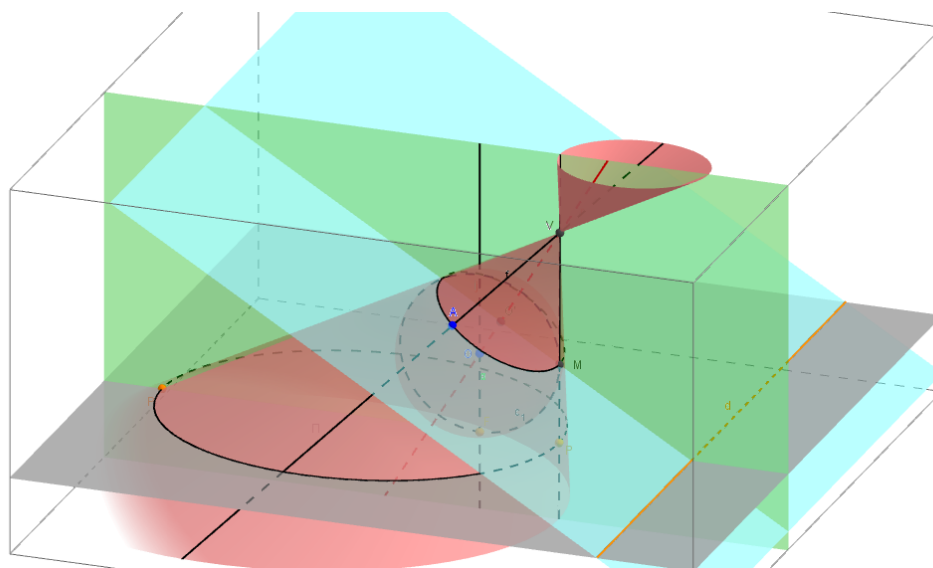
Por otra parte, si comparamos los triángulos  $VOA$  y  $VOM$  se tiene que:



$$OP = OA, \text{ porque } A \text{ y } M \text{ son puntos de la esfera } \mathcal{S} \tag{31}$$

$$OV \text{ es un lado común a ambos} \tag{32}$$

Luego, de las igualdades (30), (31) y (32) se deduce que los triángulos  $VOA$  y  $VOM$  son congruentes, en particular  $\angle VMO = \angle VAO$ . Además, como  $\angle VMO = 1R$  por ser  $MV$  tangente a  $\mathcal{S}$  se concluye que la recta  $AV$  también es tangente a  $\mathcal{S}$  en  $A$ . Por lo tanto, el cono determinado a partir de la circunferencia  $\mathcal{C}_2$  y del punto  $V$  es tangente a  $\mathcal{S}$  a lo largo de la circunferencia  $\mathcal{C}_2$ .



Como se ha demostrado anteriormente<sup>25</sup>, en la intersección del cono con el plano  $\alpha$  se determina una sección cónica cuyos puntos, incluido  $P$ , satisfacen que el cociente entre las distancias de los puntos al foco y a la directriz es constante.

Observemos que estos son los únicos puntos que satisfacen la condición anterior:

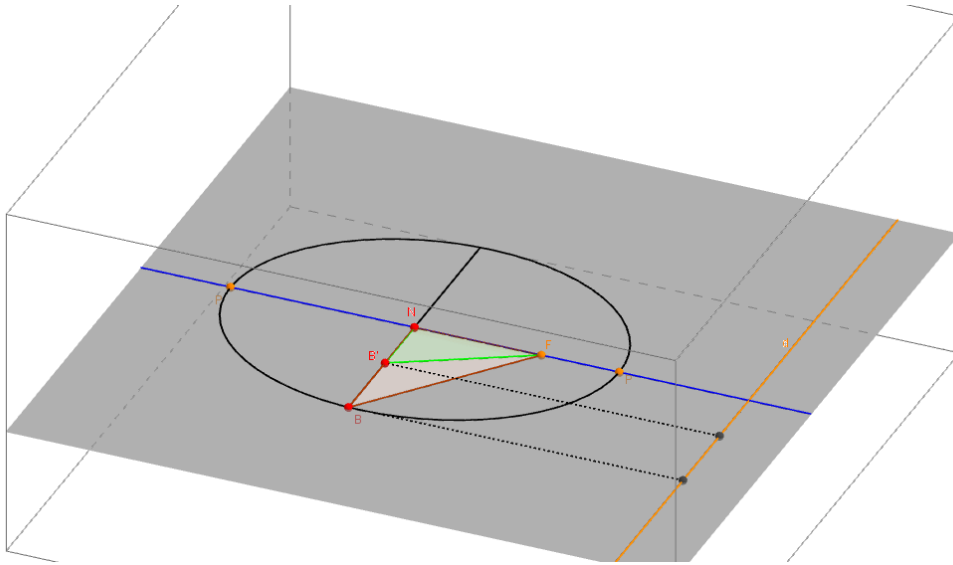
Si  $B$  es un punto de la sección cónica que no es vértice, consideremos la cuerda  $h$  paralela a la directriz  $d$  por  $B$ . Sea  $B'$  un punto de la cuerda distinto de sus extremos. Como  $h$  es paralela a  $d$  se tiene que

$$d(B', d) = d(B, d) \tag{33}$$

---

<sup>25</sup>Ver Teorema 2.

Por otra parte, si  $N$  es el punto determinado por la intersección entre  $h$  y el eje focal de la sección se tiene que los triángulos  $BNF$  y  $B'NF$  son rectángulos, donde  $\overline{NF}$  es un lado común a ambos y  $B'N < BN$ , por construcción.



Luego, por Teorema de Pitágoras se deduce que  $B'F < BF$ , es decir:

$$d(B', F) < d(B, F) \quad (34)$$

Luego, a partir de (33) y (34) se concluye que:

$$\frac{d(B', F)}{d(B', d)} < \varepsilon$$

Análogamente se demuestra que los puntos que están en la recta perpendicular al eje focal por  $B$  y que no pertenecen a la cuerda correspondiente satisfacen que:

$$\frac{d(B', F)}{d(B', d)} > \varepsilon$$

□

A partir de los teoremas 2 y 3 es posible redefinir a las secciones cónicas de la siguiente manera:

**DEFINICIÓN 19.** Se llama **sección cónica** al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de distancias a un punto fijo, llamado **foco**, y a una recta fija, llamada **directriz**, es constante,  $\varepsilon$ .

- En una elipse  $0 < \varepsilon < 1$
- En una hipérbola  $\varepsilon > 1$
- En una parábola  $\varepsilon = 1$

## Configuración Epistémica de referencia

En esta sección se exhibe la configuración epistémica de referencia (CER) de las secciones cónicas que se elaboró, por un lado, considerando el desarrollo que se presenta en las secciones anteriores del trabajo y, por otra parte, a partir del tratamiento propuesto en los siguientes libros:

- Hernández, E. (1994). *Álgebra y Geometría*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana S.A.
- Rey Pastor J., Santaló, L. A. y Balanzat, M. (1969). *Geometría Analítica*. Buenos Aires: Kapelusz
- Puig, A. (1986). *Curso de Geometría Métrica* (Vol. II). Madrid: Euler Editorial S.A.

La razón por la cual hemos considerado los libros de Rey Pastor y Puig se debe a la trayectoria de ambos matemáticos y, a su vez, por su interés en la formación en Matemática y Geometría. Además, Rey Pastor tuvo una gran injerencia en la Matemática argentina. Por otra parte, el de Hernández resulta ser un libro que sin abandonar la rigurosidad algebraica, hace hincapié en los conceptos geométricos con mayor profundidad que otros libros de Álgebra lineal y Geometría analítica.

Se destaca que el orden establecido en la presentación de cada uno de los elementos no presupone necesariamente el orden en su tratamiento:

### Conceptos-Definiciones

Conceptos	Descripción
<b>Cono</b>	Determinación del <i>cono</i> a partir de una circunferencia y un punto que no pertenece al plano que la contiene.
	Clasificación del cono, en particular el <i>cono recto</i> .
	Determinación de un <i>cono recto doble</i> a partir de la rotación de una recta alrededor de otra que resulta secante a la primera.
<b>Sección cónica</b>	Descripción de cómo obtener la <i>circunferencia</i> , <i>elipse</i> , <i>hipérbola</i> y <i>parábola</i> a partir de la intersección de un cono doble con un plano, explicitando el ángulo determinado entre el plano de sección y el eje del cono
	Presentación de las definiciones tridimensionales de cada una de las secciones cónicas en función del plano de sección.
	Presentación, de forma independiente, de las definiciones de cada una de las secciones como lugares geométricos del plano.
	Presentación de la definición unificada de sección cónica como lugar geométrico del plano cuya razón entre las distancias a una recta fija y a un punto fijo es constante.
<b>Elementos propios de las secciones cónicas</b>	Descripción de cuáles son las <i>distancias focal</i> , <i>principal</i> y <i>secundaria</i> (así como también las <i>semidistancias</i> asociadas) y los <i>vértices</i> principales y secundarios en la elipse y en la hipérbola. Descripción del <i>parámetro</i> de una parábola y de las <i>asíntotas</i> de una hipérbola.
<b>Excentricidad</b>	Definición de la <i>excentricidad</i> como el cociente de la <i>semidistancia focal</i> y la <i>semidistancia principal</i> .
	Definición de la <i>excentricidad</i> como la razón entre las distancias de los puntos de la cónica a un punto fijo y a una recta fija.

---

<b>Directriz</b>	Definición de la <i>directriz</i> correspondiente a un foco para cada una de las secciones cónicas.
<b>Foco</b>	Definición del <i>foco</i> de una sección cónica atendiendo a la unicidad en el caso de la parábola y a la dualidad para el caso de la elipse y la hipérbola.
<b>Invariantes</b>	Definición de los <i>invariantes</i> de una ecuación de segundo grado.

## Proposiciones

<b>Proposiciones</b>
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos $A$ de un plano cuya suma de las distancias de $A$ a dos puntos fijos y distintos, llamados focos, $F_1$ y $F_2$ , es constante.
Sea una elipse de focos $F_1$ y $F_2$ , para todo punto $A$ de la elipse se tiene que $\ \overrightarrow{AF_1}\  + \ \overrightarrow{AF_2}\  = 2a$ , siendo $a$ la semidistancia principal.
Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P$ de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos y distintos, llamados focos, $F_1$ y $F_2$ , es constante en valor absoluto.
Sea una hipérbola de focos $F_1$ y $F_2$ , para todo punto $A$ de la hipérbola se tiene que $\ \overrightarrow{AF_1}\  - \ \overrightarrow{AF_2}\  = \pm 2a$ , siendo $a$ la semidistancia principal.
Dada una sección cónica no degenerada contenida en el plano $\alpha$ , existe siempre un punto $F$ , llamado <i>foco</i> y una recta $l$ llamada <i>directriz</i> , incluidos en $\alpha$ , y un número $\varepsilon > 0$ tal que todo punto $P$ de la cónica satisface:
$\ \overrightarrow{PF}\  = \varepsilon d(P, l)$
Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , $\varepsilon > 0$ , $d$ una recta y $F$ un punto que no está contenido en esa recta. El lugar geométrico de los puntos del plano tales que $\ \overrightarrow{PF}\  = \varepsilon d(P, l)$ es una sección cónica.
En el plano, toda sección cónica queda determinada mediante una ecuación de segundo grado del tipo:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
En el plano, cinco puntos no alineados de a tres definen una única sección cónica (no degenerada).
La recta tangente en un punto $P$ de una parábola forma ángulos iguales con la recta paralela al eje de simetría por $P$ y la recta que contiene a $P$ y al foco.
Una recta tangente a una elipse (hipérbola) en un punto $P$ forma ángulos iguales con las rectas que contienen a $P$ y a cada uno de los focos.
La ecuación de una sección cónica es de la forma <sup>26</sup>
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math>, si y sólo si es una elipse.</li> <li>▪ <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math>, si y sólo si es una hipérbola. En este caso las ecuaciones de las asíntotas son <math>y = \frac{b}{a}x</math> o <math>y = -\frac{b}{a}x</math>.</li> <li>▪ <math>y^2 = 2px</math>, si y sólo si es una parábola.</li> </ul>

<sup>26</sup>Si lo ejes coordenados son los intrínsecos de la sección y su centro es el origen del sistema de coordenadas.

## Procedimientos

Procedimientos	Descripción
Hallar la ecuación canónica de las secciones cónicas	Mostrar cómo se puede obtener la ecuación canónica que describe la curva a partir de la proposición que indica las condiciones métricas sobre la elipse (o sobre la hipérbola). Análogamente para la parábola, a partir de la proposición que la define como lugar geométrico.
	Determinar la ecuación de una sección cónica a partir de las condiciones dadas.
Clasificación de la sección cónica	A partir de la ecuación general de una sección cónica determinar si se trata de una hipérbola, elipse o parábola mediante el análisis de la matriz de coeficientes cuadráticos. Exhibir cómo obtener la ecuación canónica mediante matrices de cambios de coordenadas.
	A partir del análisis de los <i>invariantes</i> de la ecuación general de una sección cónica determinar si se trata de una hipérbola, elipse o parábola.
Determinación de los elementos de una sección cónica	Determinar el foco, directriz, excentricidad, asíntotas (hipérbola), centro, distancias principal, secundaria y focal a partir de la ecuación general.
Uso de definiciones	Utilizar la definición de elipse, hipérbola, parábola, excentricidad o de algún otro concepto afín en la resolución de una situación.
Transformación de ecuaciones	Uso de técnicas algebraicas para transformar una ecuación en otra equivalente.

## Argumentos

Tipo de Argumentos	Descripción
Deductivos	Se desarrollan deducciones en las demostraciones que se presentan de las <i>proposiciones</i> . Asimismo, los <i>procedimientos</i> se presentan también mediante deducciones.
Explicativos	Las <i>proposiciones</i> y los <i>procedimientos</i> son acompañados de explicaciones que permiten una mejor comprensión de lo expuesto.
Ejemplificativos	Se presentan ejemplos de los <i>procedimientos</i> utilizados que permite una mejor comprensión de lo expuesto.



## Lenguaje

Tipo de Lenguaje	Descripción
Verbal	En las <i>proposiciones, procedimientos y definiciones</i> .
Simbólico	Los significantes matemáticos que se utilizan en las <i>definiciones, proposiciones</i> y los <i>procedimientos</i> .
Gráfico	Dibujo o boceto en el cual se representa el tipo de sección cónica en función del valor de la excentricidad.
	Gráficos en el plano cartesiano de las distintas secciones cónicas, exponiendo los ejes (principal y secundario) y sus vectores directores, los focos (único en el caso de la parábola), las asíntotas (hipérbola) y cualquier otro elemento característico.
	Representación gráfica de las secciones cónicas en el espacio como forma de descripción sobre el tipo de sección obtenida en función del plano de sección. Implementación en demostraciones con el fin de visualizar los objetos sobre los cuales se establecen las relaciones.

## Situaciones

Tipo de Situación	Descripción
Establecer relaciones	<i>Entre los elementos de una sección cónica:</i> vincular la excentricidad, $\varepsilon$ , con la posición de uno de los focos (elipse o hipérbola), la longitud de uno de los semiejes, la posición de las asíntotas (hipérbola), o algún otro elemento principal.
	<i>Entre los objetos matemáticos:</i> vincular las definiciones, procedimientos, proposiciones, etc., en relación a la excentricidad.
	<i>De caracterización:</i> entre las secciones cónicas que tienen igual excentricidad.
Demostrar algún enunciado	Demostrar algunas propiedades relacionadas a las secciones cónicas.
	Caracterizar a las secciones cónicas según condiciones.
Hallar la ecuación de una sección cónica	Encontrar la ecuación de la sección cónica que satisface condiciones dadas.
Realizar un estudio de las secciones cónicas	<i>Completo:</i> Dada la ecuación general de una sección cónica, indicar el tipo, hallar la ecuación canónica, el centro, los ejes intrínsecos, los vértice/s, foco/s, excentricidad, etc.
	<i>Parcial:</i> Dada la ecuación general de una sección cónica, determinar algunas de las características anteriores.
Uso de parámetros	Determinar el tipo de sección cónica en función de parámetros que definen los diferentes coeficientes en la ecuación general.
	Interpretar los parámetros de una sección cónica (para representarla gráficamente o para obtener otros elementos).
Construcción de secciones cónicas	Determinar la sección cónica a partir de condiciones métricas.
Aplicación	Situaciones que refieren a aplicaciones de las secciones cónicas a otras áreas como por ejemplo, Física o Astronomía.

Representación gráfica	Situaciones que requieran graficar en el plano una sección cónica a partir de condiciones dadas.
	Determinar la ecuación de una sección cónica a partir de su representación gráfica.

## Análisis de los libros de texto

En esta sección nos abocaremos al análisis de dos libros de texto que hemos clasificado como *manuales*. Entendemos por *manual* aquel libro que presenta las siguientes características:

- Se percibe que tiene por finalidad acompañar al estudiante en el proceso de aprendizaje
- Contiene ejercicios y actividades sugeridas acorde con los desarrollos teóricos.
- Podría ser utilizado por un profesor con sus alumnos de modo que acompañe o complementamente el dictado de las clases.
- Se evidencia el proceso de transposición didáctica en su elaboración (Chevallard, 1997).

Los libros que hemos considerado para el análisis son:

- ◇ Noriega, R. J.(1991). *Cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Docencia.
- ◇ Carvajal, L. (2000). *Complementos de trigonometría y geometría Analítica*. Buenos Aires.

En primer lugar consideramos el libro Ricardo Noriega, titulado *Cálculo Diferencial e Integral*. Este libro se basa en la experiencia del autor en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad de Buenos Aires. Fue diseñado para ser utilizado en la materia Análisis 1 de la FCEyN. El autor menciona que esta materia presenta alumnos de diferentes orientaciones. Por un lado, alumnos de carreras de Matemática y, por otra parte, estudiantes de carreras afines a la Matemática.

Por otra parte, se considera el libro de Leonor Carvajal titulado *Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica*. Este libro fue diseñado para su utilización en institutos terciarios de formación docente, en particular, en materias que abarquen contenidos de Trigonometría Plana y de Geometría Analítica.

Para el estudio de los materiales hemos establecido algunas categorías que permiten orientar la descripción inicial de los textos:

- Inclusión del concepto de excentricidad:
  - Forma de introducción
    - Se pretende ver en cómo emerge la noción de excentricidad en el desarrollo de los contenidos.
  - Pertinencia o relevancia en el texto
    - Identificar qué lugar ocupar está noción en vínculo con el resto de los conceptos a desarrollar.
- Inclusión y tipo de actividades propuestas

En los diferentes capítulos del libro de Noriega se desarrolla la exposición precisa y concreta de los diferentes contenidos que se desea trabajar, acompañado de ejercicios y actividades que permiten profundizar en los conocimientos tratados en el capítulo. Por otro lado, no se presentan ejemplos de ejercicios resueltos que orienten un modo de operar o trabajar.

La excentricidad se presenta en el párrafo llamado *Forma General de las Cónicas* como el cociente entre las longitudes  $c$  y  $a$ . Sólo se menciona qué es y cuál es el valor según la sección cónica sea una elipse, hipérbola o parábola.

Por su parte, en el libro de Carvajal sólo se trabajan con secciones cónicas con centro en el origen del sistema de referencia y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, asumiendo implícitamente que para cualquier otra configuración es posible redefinir los ejes y el origen del sistema de referencia.

La excentricidad se presenta en los apartados dedicados a la elipse y a la hipérbola. En ambos casos, es definida como el cociente entre la semidistancia focal y la semidistancia principal. Por otra parte, se retoma la noción de excentricidad referida a la astronomía. Aunque pareciera ser que la excentricidad ocupa un rol secundario en el tratamiento desarrollado, pues no aparece presente en los procedimientos que se explican a lo largo del capítulo.

## Configuración epistémica en los libros de texto

En esta sección se utilizan algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) que nos permite analizar cada uno de los libros de texto considerados.

Según Font y Godino (2006) las características de la configuración epistémica permiten considerarla tanto en referencia a una unidad completa como así también aplicada sólo a una sección más específica. En este sentido, hemos elaborado las configuraciones epistémicas presentes en los dos libros de texto en relación con la noción de excentricidad (CE1 y CE2). Luego, para realizar una valoración de la idoneidad epistémica, las contrastamos con la CER realizada anteriormente, tal como indican Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006).

### CE1 - Noriega (1991). Cálculo diferencial e integral

#### DEFINICIONES

- *Excentricidad*
  - Cociente entre la semidistancia focal y la semidistancia principal
  - Cociente entre las distancias de cualquier punto de la sección cónica al foco y a la directriz
- Foco
- Directriz
- Distancia de un punto a una recta

#### LENGUAJE

##### *Simbólico*

- Notación de la excentricidad mediante  $e$  y definida como  $e = \frac{c}{a}$
- Condiciones sobre la excentricidad según elipse, hipérbola o parábola respectivamente:  $e < 1, e > 1, e = 1$ .

##### *Gráfico:*

- Se representan la elipse y la hipérbola junto con las distancias de uno de sus puntos al foco y directriz respectiva de manera tal que la ecuación de la directriz sea  $x = \frac{a^2}{c}$  y su foco respectivo sea  $(c, 0)$ . Es decir, la directriz es paralela al *eje y* y el centro de la cónica es el origen de coordenadas..

##### *Verbal:*

- excentricidad.
- elipse, hipérbola, parábola.
- foco
- directriz
- vértice

### *PROPOSICIONES*

- Para toda elipse (hipérbola) existen un punto  $F$  y una recta  $L$  tales que dicha elipse (hipérbola) es exactamente el conjunto de puntos cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a una constante positiva menor que 1 (mayor que 1).

### *SITUACIONES*

- Probar que la proposición anterior, para el caso de la elipse (hipérbola), también se cumple si se considera el otro par foco-directriz.
- Probar la proposición recíproca.
- Hallar la ecuación de una sección cónica conociendo el foco, la directriz respectiva y el valor de la excentricidad.
- Determinar el foco, directriz y excentricidad de las secciones cónicas a partir de su ecuación (simple).

### *PROCEDIMIENTOS*

- Uso de definiciones
  - Distancia de un punto a una recta
  - Distancia entre dos puntos
- Transformación de expresiones algebraicas equivalentes y ecuaciones equivalentes.
- Determinar la ecuación de una sección cónica conociendo el foco, la ecuación de la asíntota respectiva y el valor de la excentricidad.

### *ARGUMENTOS*

#### *Deductivos:*

- En la resolución de las situaciones planteadas.
- En la demostración de las proposiciones.

#### *Explicativos*

- En la demostración de las proposiciones.
- En la resolución de las situaciones planteadas.
- En la deducción del valor de la excentricidad según la sección cónica.

## CE2 - Carvajal (2000). Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica

### DEFINICIONES

#### Excentricidad:

- Cociente entre la semidistancia focal y la semidistancia principal
- Cociente entre las distancias de cualquier punto de la elipse al foco y a la directriz

### LENQUAJE

#### Simbólico:

- Notación de la excentricidad mediante  $e_x$ , definida como  $e_x = \frac{c}{a}$  y como  $\frac{PF}{PM} = e_x$ .
- Ecuaciones de las directrices  $x = \frac{a}{e_x}$  y  $x = -\frac{a}{e_x}$  o  $y = \frac{a}{e_x}$  y  $y = -\frac{a}{e_x}$ .
- Relación entre semidistancias principal y focal según hipérbola o elipse respectivamente:  
 $a < c$  ó  $c < a$
- Condiciones sobre la excentricidad según elipse, hipérbola o parábola respectivamente:  
 $0 < e_x < 1, 1 < e_x, e_x = 1$

#### Gráfico:

- Se representan la elipse y la hipérbola en el plano cartesiano identificando las distancias  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- Se representa la elipse junto con las distancias de uno de sus puntos al foco y directriz respectiva.

#### Verbal:

- |   |                                |
|---|--------------------------------|
| ▪ excentricidad.                                | ▪ cociente.                    |
| ▪ semidistancia focal.                          | ▪ elipse, hipérbola, parábola. |
| ▪ semidiámetro mayor (semidistancia principal). | ▪ foco                         |
|   | ▪ directriz                    |

### PROPOSICIONES

- El cociente entre las distancias de cualquier punto de la elipse al foco y a la directriz es igual a la excentricidad.

### SITUACIONES

- A partir de una ecuación realizar un estudio de la elipse (hipérbola) determinando el valor correspondiente a la excentricidad (entre otros).
- A partir de datos, determinar el valor de la excentricidad de la órbita de un cometa.

- A partir de datos, entre ellos el valor de la excentricidad de la órbita terrestre, determinar la distancia de la Tierra al sol.
- Hallar la ecuación de una elipse y realizar un gráfico de la misma, conociendo el centro, un vértice y el valor de la excentricidad.
- Hallar la ecuación de una elipse y realizar un gráfico de la misma, conociendo un foco, la directriz correspondiente y el valor de la excentricidad.
- Hallar la ecuación de una elipse a partir de condiciones, entre ellas, el valor de la excentricidad.
- Demostrar que si  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ , la ecuación  $5x^2 - 5y^2 = k$  representa a hipérbolas de excentricidad  $\varepsilon = \sqrt{2}$ .
- Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es  $\sqrt{2}$
- Hallar la ecuación canónica de una hipérbola conociendo ciertos datos, entre ellos, la excentricidad.
- Hallar la ecuación general de una hipérbola conociendo ciertos datos, entre ellos, la excentricidad.

### *ARGUMENTOS*

#### *Deductivos:*

- En la resolución de las situaciones planteadas.
- En el enunciado de la proposición “Si  $P$  pertenece a la sección cónica, entonces  $\frac{PF}{PM} = e_x$ ”.

#### *Explicativos*

- En la resolución de las situaciones planteadas.
- En la deducción del valor de la excentricidad según la sección cónica.

### *PROCEDIMIENTOS*

- Uso de definiciones
  - Excentricidad, como cociente entre las semidistancias focal y principal.
  - Distancia entre dos puntos.
- Transformación de expresiones algebraicas equivalentes y ecuaciones equivalentes.
- Determinar la ecuación de una sección cónica.

## Valoración de la Idoneidad Epistémica

En este apartado se analizan las CE1 y CE2 tomando como referencia la CER elaborada de forma tal de poder realizar una valoración sobre la idoneidad epistémica en cuestión respecto de cada libro.

En Noriega (1991) se define la *excentricidad* como el cociente entre las semidistancias focal y principal. Además, de forma implícita también es definida como el cociente entre las distancias de los puntos de la elipse (hipérbola) al foco y directriz respectiva:

**Dada una elipse, existen un punto  $F$  (un foco) y una recta  $L$  tales que dicha elipse es exactamente el conjunto de puntos cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a una constante positiva menor que 1.** (24)

La recta  $L$  en cuestión se denomina *directriz* de la elipse y la constante:

$$e = c/a$$

se denomina *excentricidad* de la elipse. (Esta última es menor que 1 cualquiera sea la elipse, pues en la definición de elipse hemos pedido  $d > 2c$ , o sea  $a > c$ ).

**Dada una hipérbola, existen un punto  $F$  (un foco) y una recta  $L$  tales que dicha hipérbola es exactamente el conjunto de puntos del plano cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a una constante mayor que 1.** (27)

Al igual que antes, la recta  $L$  se llama *directriz* de la hipérbola y la constante:

$$e = c/a$$

se denomina *excentricidad* de la hipérbola (ahora ésta es *mayor* que 1, pues en la definición de hipérbola hemos pedido  $d < 2c$ , o sea  $a < c$ ).

Sin embargo, esta definición para la excentricidad no resulta ser clara, ya que aunque se indica que el cociente entre las distancias de los puntos de la elipse (hipérbola) al punto  $F$  (foco) y directriz respectiva es una constante positiva mayor que 1 (menor que 1), se afirma que dicha constante es  $e = \frac{c}{a}$  llamada *excentricidad*. De esta manera, el uso de la expresión simbólica para mostrar la relación entre la excentricidad y el cociente de las distancias focal y principal pareciera favorecer la lectura de una única definición para la excentricidad, dejando a



cargo del lector el vínculo con la segunda definición y, por lo tanto, la equivalencia entre ellas, lo que permite comprender que se refieren al mismo objeto (Font, 2005).

Por otra parte, las situaciones propuestas en relación con la *excentricidad* son coherentes con el tratamiento realizado en el apartado denominado (*Forma General de las Cónicas*), ya que se retoman los distintos objetos matemáticos que se han expuesto allí (ver CE1). Aun así, al contrastar con los objetos presentes en la CER se observa una ausencia de varios de los que intervienen en el tratamiento con la excentricidad.

No se presentan situaciones de ejercitación ni de aplicación sobre lo trabajado, ni tampoco se proponen situaciones que permitan establecer otro tipo de relaciones entre la excentricidad y el resto de los elementos de una sección cónica. Por ejemplo, estudiar la variación en la posición de uno de los focos según el valor de la excentricidad; caracterizar la sección cónica correspondiente dado un valor específico de la excentricidad; construir la sección cónica a partir de datos, entre ellos el valor de la excentricidad. También, las situaciones propuestas permiten que emerjan o que se utilicen los procedimientos señalados en la CER que se vinculan directamente con la noción de excentricidad: hallar la ecuación de una sección cónica; determinar el foco, directriz y excentricidad de una sección cónica; usar definiciones y uso de técnicas algebraicas para transformar una ecuación en otra equivalente. Es necesario señalar que algunos de estos procedimientos no son trabajados de manera detallada en el texto, o directamente no son utilizados, por ejemplo, como puede observarse en la CE1, no se evocan procedimientos referentes a determinar los elementos de una sección cónica (entre ellos la excentricidad). Por lo tanto, no resulta evidente la posibilidad de que lector pueda recurrir a ellos y volver a utilizarlos en la resolución futura de alguna actividad, pues se necesitaría de una apropiación por parte del estudiante de estos procedimientos, ya que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos (Godino, Batanero y Font, 2003).

Por otra parte, en una de las situaciones de demostración, se establece explícitamente una relación entre la excentricidad y la posición de uno de los focos, aunque dicha relación no emerge de la situación, como se manifiesta en la CER, sino que se presenta a modo de sugerencia de resolución:

### 3

Probar la recíproca de (24), a saber: si  $F$  es un punto cualquiera del plano,  $L$  es una recta que no contiene a  $F$  y  $e$  es un número real positivo *menor que 1*, entonces el conjunto de puntos del plano cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a  $e$ , es una elipse. (SUGERENCIA: elegir los ejes de manera que  $F$  tenga coordenadas  $(e^2, 0)$  y  $L$  tenga ecuación  $x = 1$ ).

También se exhiben otras situaciones que establecen vínculos entre objetos matemáticos de la configuración epistémica. Por ejemplo, en la actividad siguiente se vinculan la proposición enunciada en la CE1, los procedimientos que transforman una ecuación en otra equivalente, y la definición de distancia de un punto a una recta, entre otros:

5

Hallar la ecuación de la cónica tal que:

- ◆ a) su foco es el punto de coordenadas  $(2, 0)$ , su directriz es la recta de ecuación  $x = 4$  y su excentricidad es  $\frac{1}{4}$ .
- ◆ b) su foco es el punto de coordenadas  $(9, 0)$ , su directriz es la recta de ecuación  $x = 4$  y su excentricidad es  $\frac{3}{2}$ .
- ◆ c) su foco es el punto de coordenadas  $(2, 0)$ , su directriz es la recta de ecuación  $x = 4$  y su excentricidad es 1.

Según Godino y Neto (2013) se deben establecer relaciones y conexiones significativas entre los distintos objetos matemáticos. Sin embargo, en la situación anterior esto no sucede, ya que la relación que se plantea parece aludir sólo al vínculo intrínseco que establece la proposición en sí misma. Una relación significativa es, por ejemplo, la que se establece entre dicha proposición y la que enuncia toda sección cónica se representa con una ecuación de la forma  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , puesto que a partir de la primera y mediante el uso de técnicas algebraicas es posible deducir la segunda.

Se presentan situaciones que habilitan la discusión sobre la definición de las secciones cónicas. En particular, es a partir de ellas que es posible caracterizar a las secciones cónicas como el conjunto de puntos cuyo cociente entre las distancias al foco y directriz es constante, ya que permiten trabajar sobre la implicación recíproca a la desarrollada en el apartado:

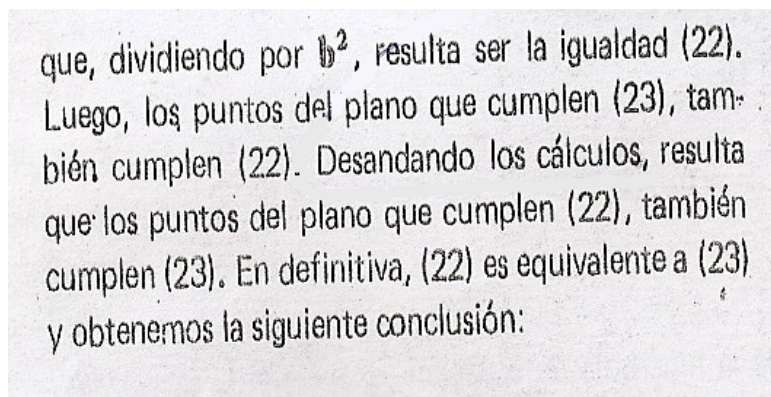
3

Probar la recíproca de (24), a saber: si  $F$  es un punto cualquiera del plano,  $L$  es una recta que no contiene a  $F$  y  $e$  es un número real positivo *menor que 1*, entonces el conjunto de puntos del plano cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a  $e$ , es una elipse. (SUGERENCIA: elegir los ejes de manera que  $F$  tenga coordenadas  $(e^2, 0)$  y  $L$  tenga ecuación  $x = 1$ ).

4

Probar la recíproca de (27), a saber: si  $F$  es un punto cualquiera del plano,  $L$  es una recta que no contiene a  $F$  y  $e$  es un número real *mayor que 1*, entonces el conjunto de puntos del plano cuya distancia a  $F$  dividida por su distancia a  $L$  es igual a  $e$ , es una hipérbola. (SUGERENCIA: la misma que en el ejercicio anterior).

En el desarrollo posterior del texto no se presentan situaciones donde los estudiantes deban construir alguna definición, generar algún procedimiento o incluso cuestionar o discutir sobre alguno de ellos. Esto tampoco sucede en el desarrollo del contenido ya que:



que, dividiendo por  $b^2$ , resulta ser la igualdad (22). Luego, los puntos del plano que cumplen (23), también cumplen (22). Desandando los cálculos, resulta que los puntos del plano que cumplen (22), también cumplen (23). En definitiva, (22) es equivalente a (23) y obtenemos la siguiente conclusión:

Al enunciar que “Desandando los cálculos, resulta que los puntos del plano que cumplen (22), también cumplen (23).” se omite que el *desandar* implica tomar la raíz cuadrada en ambos miembros sin evidenciar por qué las expresiones son positivas, donde se espera que el estudiante reconozca los trinomios cuadrados perfectos de cada miembro. En otras palabras, la afirmación de que dicho procedimiento se puede “desandar” omite la discusión sobre la positividad de las expresiones.

Asimismo, las explicaciones y las demostraciones que se desarrollan parecieran ser claras y adecuadas para estudiantes de un primer curso de Análisis (o Cálculo). Puesto que, como se mencionó anteriormente, los procedimientos utilizados para demostrar la proposición responden a técnicas y algoritmos simples para el nivel en cuestión.

No se presentan situaciones que exijan la interpretación de expresiones matemáticas o de lenguajes específicos, es decir, donde se deban poner en juego la asignación de sentidos sobre los símbolos matemáticos presentes. Tampoco hay situaciones donde los alumnos necesiten validar lo producido, ya que pareciera que lo correcto sólo responde al uso de los procedimientos utilizados en el apartado y, sin embargo, validar implica que se den las razones de por qué dichos procedimientos son correctos manifestando la asignación de sentidos de los objetos matemáticos, que deben corresponderse con los aceptados por la Institución Matemática (Falsetti, Marino y Rodríguez, 2004; Barreiro, Falsetti, Formica, Marino, Mellincovsky, 2009).

Por otra parte, no se evidencia la posibilidad de conversión entre los distintos tipos de lenguaje. Por ejemplo, como se observa en la configuración epistémica elaborada, el lenguaje de tipo gráfico sólo se utiliza para representar en el plano la elipse y la hipérbola junto con las distancias involucradas en las definiciones dadas. En este sentido, no se presentan situaciones donde, por ejemplo, se deba graficar una determinada sección cónica o se requiera hallar la ecuación dado el gráfico.

Por último, aunque algunas situaciones permiten retomar la discusión sobre la definición de sección cónica como lugar geométrico, en general no hay situaciones que habiliten la generación de un nuevo problema de estudio, que podrían categorizarse como de problematización. Creemos que se deberían incluir situaciones-problemas en este libro pues ellas desempeñan un papel central en la Matemática (Godino, 2013).

En Carvajal (2000) la *excentricidad* es definida de dos maneras diferentes. En primer lugar, como el cociente entre las semidistancias focal y principal:

**Excentricidad:** Es el cociente entre la semidistancia focal y el semidiámetro mayor. La simbolizamos  $e_x$ . Luego:

$$e_x = \frac{c}{a}$$

En segundo lugar, como el cociente entre las distancias de los puntos de la cónica al foco y directriz respectiva:

Por definición, el cociente entre las distancias de cualquier punto de la elipse al foco y a la directriz, es igual a la excentricidad.

$$P \in \text{elipse} \Rightarrow \frac{PF}{PM} = e_x$$

Las dos definiciones son enunciadas correctamente y con precisión, aunque no se realiza un tratamiento que permita determinar que las dos sean equivalentes, es decir, que ambas refieren al mismo objeto (Font, 2005). Para ello, sería necesario enunciar y demostrar el teorema que permite unificar las secciones cónicas en una misma definición (ver Teorema 2). Además, la segunda definición se presenta descontextualizada del resto del apartado, pues no se retoma ni se refiere a ella nuevamente. Por el tipo de tratamiento que se desarrolla en el texto esta decisión resulta pertinente, entendiendo que la pertinencia de usar una definición, para un objeto que admite más de una, depende del contexto de aplicación donde ésta se evoque (Wilhelmi, Lacasta y Godino, 2007). Asimismo, se presentan situaciones que ponen en juego la primera de esas definiciones, esto es, que exigen el conocimiento de las relaciones que en se manifiestan en ella. Por ejemplo, en la siguiente actividad se puede recurrir a la definición de *excentricidad* para obtener el valor de la semidistancia principal, que sería necesaria para determinar la ecuación de la elipse correspondiente:

19. Halle la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones:

a. Focos:  $(1; -1)$  y  $(7; -1)$   
Vértices:  $(4 \pm 3\sqrt{2}; -1)$

b. Focos:  $(3; 0)$  y  $(3; 2)$   
Vértices:  $(3; 4)$  y  $(3; -2)$

c. Focos:  $(0; 0)$  y  $(2; 0)$   
 $e_x = \frac{1}{3}$

d. Focos:  $(0; 0)$  y  $(2; 0)$   
Diámetro mayor = 4

En el libro se presentan distintas situaciones que aluden a lo explicitado en la configuración epistémica de referencia. Como puede observarse en la CE2 descrita en la sección anterior hay actividades que remiten a situaciones contextualizadas de aplicación y ejercicios de vínculo con la astronomía, donde la excentricidad da cuenta de la diferencia entre la órbita de un cometa o planeta y una órbita circular.

5. a. La órbita del cometa Kohoutek tiene una anchura de unas 44 unidades astronómicas y una longitud de 3600. (La unidad astronómica : UA es la distancia media de la Tierra al Sol, equivale aproximadamente a 92.600.000 mi). Calcule la excentricidad de la órbita.
- b. La órbita del cometa Halley es una elipse de 36,18 UA de largo por 9,12 UA de ancho. Calcule la excentricidad.

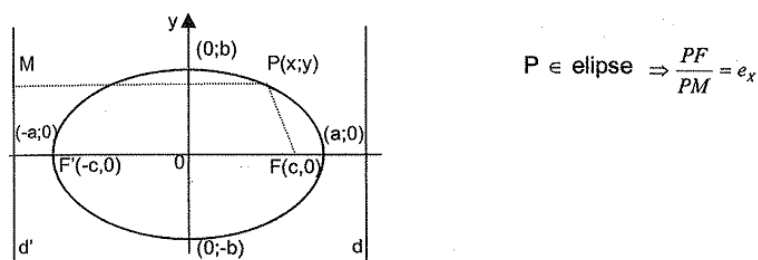
Además, como se describe en la CE2 otras situaciones refieren a una **basta** secuencia de ejercicios en relación con la determinación de la ecuación de una sección cónica conociendo entre sus datos el valor de la excentricidad.



11. Halle la ecuación canónica de la hipérbola en cada uno de los siguientes casos:
- pasa por el punto  $(1;-2)$ , el lado recto mide  $\frac{2}{3}$  y el eje conjugado está sobre el de abscisas.
  - pasa por el punto  $(-2;-1)$ , su excentricidad es  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$  y el eje transversal está sobre el eje de abscisas.
12. Halle y grafique la ecuación de la elipse con centro en  $O'$ , un vértice en  $A$  y excentricidad  $e_x$ .
- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| a. $O' = (2; 1)$<br>$A = (5; 1)$<br>$e_x = \frac{1}{3}$ | b. $O' = (-3; -2)$<br>$A = (-3; 4)$<br>$e_x = \frac{2}{3}$ | c. $O' = (0; 1)$<br>$A = (0; 8)$<br>$e_x = \frac{2}{5}$ | d. $O' = (-2; 0)$<br>$A = (3; 0)$<br>$e_x = \frac{3}{10}$ |
|---|--|---|---|
13. Halle la ecuación general de la hipérbola de centro  $O'$ , focos  $F_1$  y  $F_2$ , vértices  $A_1$  y  $A_2$ , excentricidad  $e_x$  y medida del lado recto  $L_1L_2$ , en cada uno de los siguientes casos:
- |                    |                 |                     |
|--------------------|-----------------|---------------------|
| a. $A_1 = (-1; 3)$ | $A_2 = (3; 3)$  | $e_x = \frac{3}{2}$ |
| b. $O' = (2; -2)$  | $A_1 = (4; -2)$ | $L_1L_2 = 8$        |
| c. $O' = (4; 5)$   | $F_1 = (0; 5)$  | $e_x = 2$           |

Por otra parte, las dos situaciones de demostración que se enuncian (donde la segunda de ellas resulta ser una reformulación y generalización de la primera) remiten al problema de caracterizar las hipérbolas equiláteras en términos de su excentricidad, tal como se detalla en la CER exhibida. A su vez, en el libro no se admite como situación demostrar el enunciado recíproco, es decir, que toda hipérbola de excentricidad  $\varepsilon = \sqrt{2}$  es equilátera. En particular, esta decisión no resulta adecuada en relación con los indicadores de la idoneidad epistémica (Godino, 2011), ya que la demostración de esta última implicación involucra la utilización de procedimientos que se adaptan al nivel al que va dirigido el libro, como por ejemplo la *transformación de ecuaciones equivalentes* que se detalla en la CE2.

En este texto no se enuncia la proposición que establece que el cociente entre las distancias de los puntos de la cónica al foco y a la directriz se mantiene constante. Por lo tanto, no es posible construir la definición que unifique nuevamente las secciones cónicas, y, al mismo tiempo, no se puede establecer la equivalencia entre ella y la definición clásica de sección cónica (Font, 2005). Acorde a la CER elaborada se debería contemplar al menos una de las implicaciones contenidas en esta proposición. En este sentido, se presenta de manera simbólica el enunciado que afirma que el cociente entre las distancias de cualquier punto de la elipse al foco y a la directriz es igual a la excentricidad, aunque no se exhibe ninguna demostración que lo valide, ni tampoco se utilizan argumentos que permitan justificarla. Asimismo, no se menciona si la relación anterior sólo es válida para el caso de la elipse o si se corresponde también con el resto de las secciones cónicas:



Como ya se mencionó, la implicación anterior se expone sin explicación o argumentación

que la justifique. Tampoco se presenta como una situación de demostración que podría quedar a cargo del lector. Sin embargo, **esta** debería ser una situación que se trate en el libro pues permitiría relacionar distintos objetos matemáticos que se detallan en la configuración epistémica de referencia: las definiciones de elipse, hipérbola, parábola, directriz, foco y distancias principal y focal; las propiedades métricas de la elipse e hipérbola; permite demostrar con facilidad que, en el plano, toda sección cónica queda determinada mediante una ecuación de segundo grado de la forma  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Aunque se utilizan diferentes modos de expresión matemática mediante el uso del lenguaje verbal, gráfico y simbólico, pareciera que el recorrido por ellos se realiza siguiendo la secuencia verbal-simbólico-gráfico, sin admitir otro tipo de conversiones entre ellos u otra secuencia en la traducción. Además, esto no se evidencia tampoco en las actividades propuestas en el texto, incluso no se presentan situaciones de interpretación sobre algún tipo de expresión matemática, ya sea en lenguaje verbal, simbólico o gráfico. Según Font (2001) y Font, Godino y D'Amore (2007) se pondría en juego la comprensión de estos objetos matemáticos pues la conversión y la traducción de las representaciones resulta necesario para ello.

En cuanto a los argumentos manifestados en el texto, no se utilizan ejemplos en relación a los procedimientos vinculados a la noción de excentricidad. No obstante, las situaciones planteadas posibilitan que, en su resolución, se utilicen argumentos deductivos, por ejemplo para demostrar algún resultado, o explicaciones que acompañen las deducciones para un mejor entendimiento de lo realizado. Es decir, en las situaciones se brinda la ocasión para que el estudiante valide su producción, ya que debe ser capaz de elaborar razones que le permitan decir si los enunciados propuestos son verdaderos y, mediante las explicaciones, hacer explícito los sentidos de los significantes matemáticos utilizados (Barreiro y otros, 2009).

El tratamiento vinculado a la excentricidad en el desarrollo de los contenidos es muy conciso, y en él no se utilizan ninguno de los procedimientos que se han dispuesto en la configuración epistémica de referencia. Aún así, algunos podrían llegar a emplearse en las situaciones que se presentan al final del capítulo, como se ha especificado en la configuración epistémica de este texto. Hay situaciones que recurren a utilizar la definición de excentricidad como procedimiento. Por ejemplo, en la siguiente actividad:

10. Sabemos que la Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol, el cual ocupa uno de sus focos. Si el semidiámetro mayor de la elipse es de  $1,485 \times 10^8$  km y la excentricidad es, aproximadamente,  $\frac{1}{62}$ , halle la máxima y mínima distancia de la Tierra al Sol.

Si bien en ambos casos se recurre a la definición  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  para hallar uno de los valores pedidos, en el segundo caso no resulta claro si se asume conocido que los puntos pedidos (es decir, las posiciones de la trayectoria para las cuales la Tierra está más cerca y más lejos del Sol) son los vértices principales de la elipse o que esa conjetura, junto con su demostración, quedan a cargo del lector.

En otros casos, no sólo se requiere el uso de las definiciones de excentricidad sino que, además, se debe hallar la ecuación de la elipse correspondiente a partir de los datos que brindan, por lo que será necesario utilizar alguna técnica algebraica que permita transformar la ecuación correspondiente:

12. Halle y grafique la ecuación de la elipse con centro en  $O'$ , un vértice en  $A$  y excentricidad  $e_x$ .

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| a. $O' = (2; 1)$<br>$A = (5; 1)$<br>$e_x = \frac{1}{3}$ | b. $O' = (-3; -2)$<br>$A = (-3; 4)$<br>$e_x = \frac{2}{3}$ | c. $O' = (0; 1)$<br>$A = (0; 8)$<br>$e_x = \frac{2}{5}$ | d. $O' = (-2; 0)$<br>$A = (3; 0)$<br>$e_x = \frac{3}{10}$ |
|---|--|---|---|

13. Halle y grafique la ecuación de la elipse que tiene un foco en  $F$ , excentricidad  $e_x$  y una directriz en  $x = d$ .

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| a. $F = (2; 1)$<br>$e_x = \frac{2}{3}$<br>$x = 5$ | b. $F = (-3; 2)$<br>$e_x = \frac{3}{4}$<br>$x = 3$ | c. $F = (0; -3)$<br>$e_x = \frac{2}{5}$<br>$y = 6$ | d. $F = (3; 0)$<br>$e_x = \frac{4}{7}$<br>$y = 7$ |
|---|--|--|---|

16. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo  $Q$  es la mitad de la correspondiente a la recta  $r$ .

- |                                |   |                                 |
|--------------------------------|---|---------------------------------|
| a. $Q = (4; 0)$<br>$r: x = -2$ | b. $Q = (1; 1)$<br>$r: x = \frac{9}{2}$ | c. $Q = (-3; -1)$<br>$r: y = 4$ |
|--------------------------------|---|---------------------------------|

Por último, destacamos que las situaciones anteriores podrían habilitar la discusión sobre qué procedimientos son necesarios en su resolución, cuáles son las definiciones que se deben poner en juego, así como **también** el uso del lenguaje, e incluso algunas de ellas permitirían generar nuevas proposiciones. Según Godino (2011) esta vinculación entre los diferentes objetos matemáticos resulta necesaria para alcanzar una alta idoneidad epistémica.

Al comparar los libros de texto considerados teniendo en cuenta los análisis anteriores se observa que varios de los objetos relacionados con la excentricidad, dispuestos en la CER elaborada, se manifiestan en ambos. Sin embargo, se presenta una importante diferencia en cuanto al tipo de situaciones que se exhiben.

En el caso de Noriega, y aunque las situaciones resultan ser escasas, se utilizan la mayoría de los objetos matemáticos de la CER. Análogamente para el caso de Carvajal, donde además se presenta una mayor variedad en el tipo de situaciones, logrando un conjunto representativo y articulado. Asimismo, estas situaciones se complementan y, por lo tanto, posibilitan una mayor comprensión de la noción de excentricidad. Es por ello que podemos señalar que la idoneidad epistémica asociada al libro de Carvajal resulta ser mayor que la del libro de Noriega.

A modo de síntesis del análisis realizado en este trabajo exhibimos los siguientes esquemas, que resumen aquellos objetos (en color blanco) que intervienen en cada uno de los textos considerados en relación a la noción de excentricidad según los objetos estipulados en la CER:

**Figura 1:**

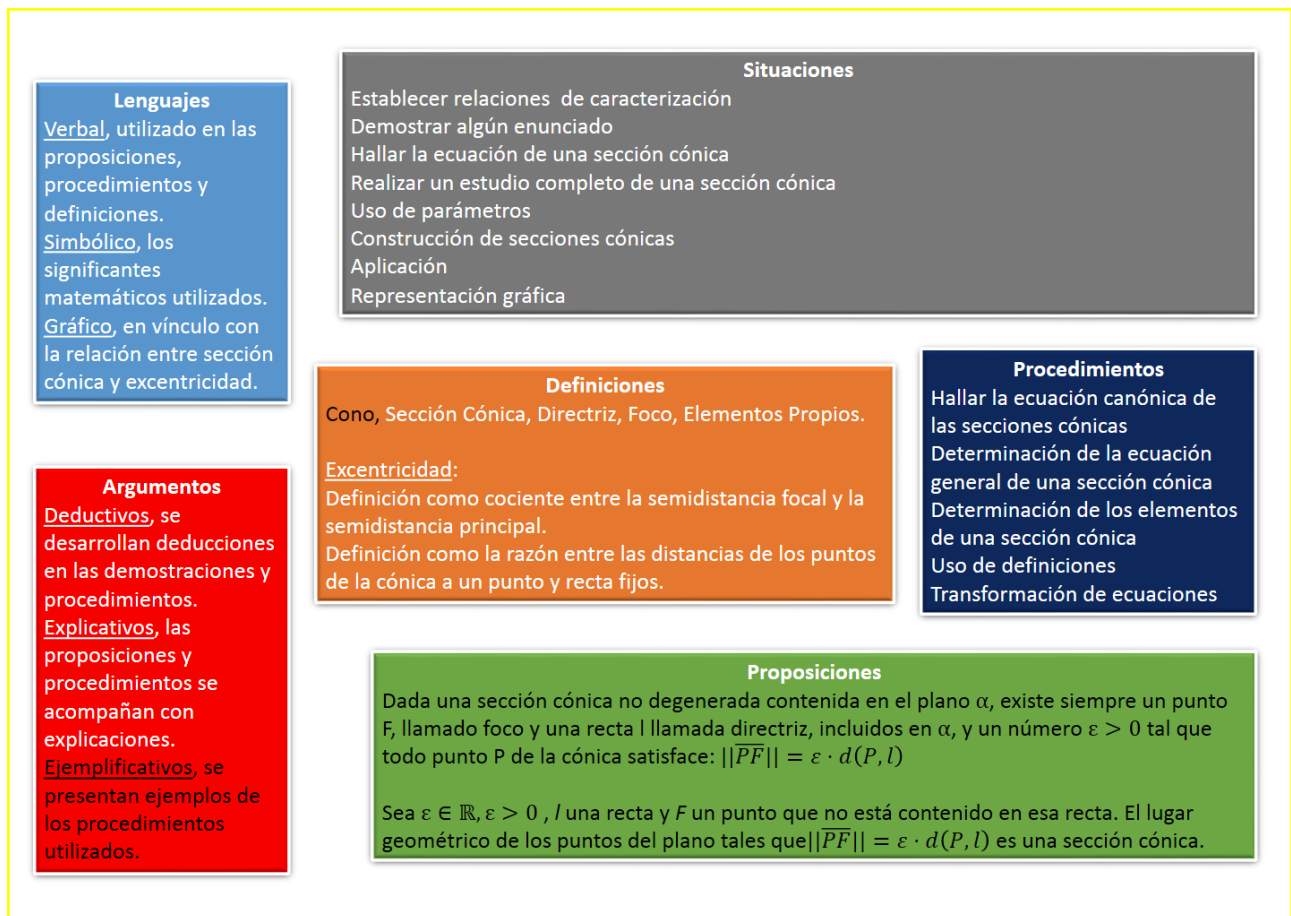
Configuración Epistémica del libro *Cálculo diferencial e integral* de Noriega.





**Figura 2:**

Configuración Epistémica del libro *Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica* de Carvajal.



También, se adjuntan los indicadores utilizados para valorar la idoneidad epistémica en los textos, resaltando en color negro aquellos que han sido identificados:

**Figura 3:**

Idoneidad Epistémica del libro *Cálculo diferencial e integral* de Noriega.

Componentes	Indicadores
Situaciones-Problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica), traducciones y conversiones entre los mismos. Nivel del lenguaje adecuado según a quien se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Conceptos, Proposiciones y procedimientos.	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel dado. Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Las explicaciones y demostraciones son adecuadas al nivel al que se dirigen. Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan que argumentar.
Relaciones	Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí.

**Figura 4:**

Idoneidad Epistémica del libro *Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica* de Carvajal.

<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Situaciones-Problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica), traducciones y conversiones entre los mismos. Nivel del lenguaje adecuado según a quien se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Conceptos, Proposiciones y procedimientos.	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel dado. Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Las explicaciones y demostraciones son adecuadas al nivel al que se dirigen. Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan que argumentar.
Relaciones	Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí.

## Consideraciones Finales

El enfoque propuesto en este trabajo sobre el estudio de las secciones cónicas se centró en la noción de excentricidad y en su rol en la unificación de estas curvas bajo una misma definición. Esta intención se reflejó de manera transversal en cada una de las secciones desarrolladas y particularmente en las distintas configuraciones epistémicas elaboradas (CER, CE1 y CE2). Sin embargo, a partir del recorrido histórico y el desarrollo epistémico elaborados podrían construirse otras configuraciones epistémicas, según los intereses que se persigan. Por ejemplo, alguna configuración epistémica que se aboque únicamente a la Geometría Analítica o a la Geometría Sintética. Al mismo tiempo, no nos propusimos agotar las posibles configuraciones epistémicas asociadas a las secciones cónicas, aun suponiendo que esto sea posible, sino mostrar cómo la elaboración y análisis sobre ellas brinda aportes para la comprensión de las secciones cónicas, entendiendo que “la comprensión de una noción matemática puede tener distintos grados o niveles, que indican la adquisición de ciertos objetos de las configuraciones epistémicas y su relación entre ellos” (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012, p. 89). Sin embargo, sería necesario y, a la vez productivo, la elaboración de distintas configuraciones que permitan profundizar en las relaciones que se establecen entre los objetos matemáticos asociados a las secciones cónicas. Es decir, no sólo es necesario abordar el estudio de las diferentes configuraciones epistémicas sino que, a la vez, se requiere del análisis y articulación entre ellas para la comprensión del concepto *secciones cónicas*.

Según Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) las configuraciones epistémicas constituyen una referencia obligatoria al momento de elaborar una ingeniería didáctica. En este sentido, lo hecho en este trabajo podría servir como insumo para los análisis preliminares de situaciones didácticas en el marco de las ingenierías didácticas, pues entre ellos se encuentra el análisis epistemológico de los contenidos que se contemplan para la enseñanza (Artigue, 1995).

En relación con el análisis de la idoneidad epistémica, se considera que su valoración resulta necesaria para el diseño, implementación y posterior evaluación de dispositivos didácticos donde se pretenda el uso de algún libro de texto, ya sea complementario o no de los procesos de enseñanza y aprendizaje sucedidos en el aula. A su vez, queda en evidencia que la valoración de la idoneidad epistémica es necesaria al diseñar dichos procesos, pero a la vez es insuficiente por sí misma, pues es sólo uno de los elementos que conforman la idoneidad didáctica y la intención es “conseguir una presencia equilibrada de las seis idoneidades parciales” (Font, Planas y Godino, 2010, p. 14). En nuestro caso, las características de este trabajo hicieron que no pudiera cubrirse la valoración de las demás idoneidades, ya que esto requiere del diseño y la puesta en acto de procesos de instrucción. Es por ello que la continuación y, tal vez, completitud del análisis que aquí se ha comenzado puede formar parte de algún trabajo posterior. En particular, lo hecho aquí permite contar con un tipo o ejemplo de aplicación sobre cómo analizar un libro de texto a partir de los indicadores epistémicos establecidos por el EOS

Como se ha mencionado, la propuesta realizada en este trabajo pretendía separarse de las particularidades e intereses propios de los libros de texto y promover el diseño, la implementación y la evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan una mejor comprensión de las secciones cónicas. Además, el análisis sobre las configuraciones epistémicas y sobre la idoneidad epistémica de los procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales en los libros de texto resulta ser una herramienta práctica para el docente, pues le permite realizar un análisis sobre ellos como insumo para el diseño didáctico. En este sentido, Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) sostienen que “el análisis epistemológico de los objetos matemáticos (...) debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemáticas” (p. 21). Aun cuando se requiera de una inversión temporal significativa para atender a este tipo de análisis,

Godino, Font y Wilhelmi (2008) señalan la importancia de introducir en la formación de los profesores de Matemática los criterios para valorar la idoneidad didáctica y, al mismo tiempo, afirman que es necesario que los docentes tengan en cuenta la idoneidad epistémica al planificar su enseñanza.

Lo realizado en este trabajo aporta a la reflexión sobre la enseñanza de las secciones cónicas y, a su vez, brinda herramientas para el diseño de una propuesta de enseñanza del tema que se aleja de las formas clásicas pues se focaliza en la noción de excentricidad como eje transversal. En este sentido, un profesor que decida enseñar las secciones cónicas encuentra en este trabajo un desarrollo que le resulta útil para no rehusar de la definición clásica y, a su vez, para comprender que es posible recuperar los tratamientos iniciales como forma de introducción al trabajo con estas curvas para que el mismo no sea sólo en relación al plano y a una simple mención del cono, sino que pueda contemplar la equivalencia entre estas concepciones.

## Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1994). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Bogotá: Una Empresa Docente.
- Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T., y Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en Matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon*(72), 39-60.
- Cajori, F. (1894). *A History of Mathematics*. New York: Macmillan and Company.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: Del Saber Sabio Al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Contreras, A. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 277-310.
- Coolidge, J. L. (1968). *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. Nueva York: Dover Publication, Inc.
- Falsetti, M., Marino, T. y Rodríguez, M. (2004). *Validación en Matemática en situación de aprendizaje*. Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, Bs. As. Formato CD.
- Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Educational Journal*, 14, 1-35.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 111-128). Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Font, V. Godino, J. D. y D'Amore, B (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Recuperado de [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

- Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.  
Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.  
Recuperado de [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (Diciembre de 2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos.  
Recuperado de [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 131-155.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-49.
- Godino, J. D. y Neto, T. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *UNO*, 63, 69-76.
- González Urbaneja, P. M. (Mayo de 2007). Raíces Históricas y Trascendencia de la Geometría Analítica. *SIGMA*, 30, 205-236.
- Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics* (Vol. II). London: Oxford at the Clarendon Press.
- Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana S.A.
- Morton, P. (1830). *Geometry, Plane, Solid and Spherical, In Six Books: To which is added in an appendix, the theory of projection, so far as it is auxiliary to Geometry*. London: Baldwin and Cradock, Paternoster-Row.
- Osterman, A., & Wanner, G. (2012). *Geometry by Its History*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

- Pogorélov, A. V. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Mir.
- Pochulu, M. D. (2011). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En M. D. Pochulu y M. A. Rodríguez, M. (Comp.), *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 63-89). Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Puig, A. (1986). *Curso de Geometría Métrica* (Vol. II). Madrid: Euler Editorial S.A.
- Reina, L., Wilhelmi, M. R., y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, 24(3), 67-97.
- Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la Matemática* (Vol. I). Barcelona: Gedisa.
- Rey Pastor J., Santaló, L. A. y Balanzat, M. (1969). *Geometría Analítica*. Buenos Aires: Kapelusz
- Taylor, C. (1881). *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*. London: Deighton, Bell & Co.
- Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77-120.

## Anexo

### Proposición 2

A continuación se desarrollan dos demostraciones más de la [Proposición 2](#), como ya se ha mencionado anteriormente una de ellas se realiza desde una mirada analítica y la otra, algebraica. Es necesario señalar que en realidad resultan ser demostraciones más generales que la que ya se ha expuesto previamente pues no se consideran a los puntos  $F$  y  $M$  y a la circunferencia  $c_P$ , sino que se trabaja con dos puntos cualesquiera (salvo excepción que se mencionará) de una circunferencia. Bajo estas condiciones, esta demostración permite considerar la [Proposición 2](#) como un caso particular.

#### Versión Analítica

Por cuestiones de simplicidad, consideraremos que centro del sistema de referencia en el plano  $\rho$  es el centro de la circunferencia  $c_P$  y supondremos que su radio es uno.

Sean  $P = (x_1, y_1)$  y  $Q = (x_2, y_2)$  dos puntos de la circunferencia con centro en el punto  $(0, 0)$  y radio 1, de lo que se deduce que:

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad (35)$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (36)$$

Entonces, si  $x_1 \neq 0$  y  $x_2 \neq 0$  las ecuaciones de las rectas que contienen a los puntos  $P$  y  $O$ , y  $Q$  y  $O$  son  $a : y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$  y  $b : y = \frac{y_2}{x_2} \cdot x$  respectivamente.

Supongamos que  $a$  y  $b$  no son paralelas, es decir,  $\frac{y_1}{x_1} \neq \frac{y_2}{x_2}$  y consideremos las rectas perpendiculares a las anteriores por los puntos  $P$  y  $Q$ :

$$a' : y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot x + y_1 + \frac{x_1^2}{y_1}$$

$$b' : y = -\frac{x_2}{y_2} \cdot x + y_2 + \frac{x_2^2}{y_2}$$

Como  $a$  y  $b$  no son paralelas,  $a'$  y  $b'$  tampoco lo son, ya que  $-\frac{x_1}{y_1} \neq -\frac{x_2}{y_2}$ . Por lo tanto, existe  $I$  punto de intersección entre las dos rectas. Para encontrar sus coordenadas, planteamos que:

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{y_1} \cdot x + y_1 + \frac{x_1^2}{y_1} &= -\frac{x_2}{y_2} \cdot x + y_2 + \frac{x_2^2}{y_2} \\ -\frac{x_1}{y_1} \cdot x + \frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1} &= -\frac{x_2}{y_2} \cdot x + \frac{y_2^2 + x_2^2}{y_2} \end{aligned}$$

Por (35) y (36) se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{y_1} \cdot x + \frac{1}{y_1} &= -\frac{x_2}{y_2} \cdot x + \frac{1}{y_2} \\ x \cdot \left( \frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1} \right) &= \frac{y_1 - y_2}{y_2 \cdot y_1} \\ x \left( \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{y_2 \cdot y_1} \right) &= \frac{y_1 - y_2}{y_2 \cdot y_1} \\ x &= \frac{y_1 - y_2}{y_2 \cdot y_1} \cdot \frac{y_2 \cdot y_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} \\ x &= \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} \end{aligned}$$



Al reemplazar esta última expresión en alguna de las ecuaciones de las rectas  $a'$  o  $b'$  se obtiene que:

$$y = \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}$$

Luego,

$$\text{dist}(P, I) = \sqrt{\left(x_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2}$$

$$\text{dist}(Q, I) = \sqrt{\left(x_2 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2}$$

Queremos ver que  $\text{dist}(P, I) = \text{dist}(Q, I)$ . Para ello, planteamos que:

$$\sqrt{\left(x_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(x_2 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros en la igualdad anterior, obtenemos que:

$$\left(x_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 = \left(x_2 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2 + \left(y_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}\right)\right)^2$$

Luego, si se desarrollan los binomios y se cancelan los términos iguales en ambos miembros:

$$x_1^2 - 2x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} + y_1^2 - 2y_1 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} = x_2^2 - 2x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} + y_2^2 - 2y_2 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}$$

Por (35) y (36) se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 - 2x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} - 2y_1 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} &= 1 - 2x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} - 2y_2 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} \\ -2x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} - 2y_1 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} &= -2x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} - 2y_2 \frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2} \end{aligned}$$

Si multiplicamos ambos miembros por  $(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)$  se tiene que:

$$-2x_1 \cdot (y_1 - y_2) - 2y_1 \cdot (x_2 - x_1) = -2x_2 \cdot (y_1 - y_2) - 2y_2 \cdot (x_2 - x_1)$$

Al expandir las expresiones resulta que:

$$\begin{aligned} -2x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_1y_1 &= -2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_2 + 2x_1y_2 \\ 2x_1y_2 - 2x_2y_1 &= -2x_2y_1 + 2x_1y_2 \end{aligned}$$

Como esta última igualdad es cierta, es posible realizar el camino inverso hasta la primera igualdad para deducir que también es cierta. Luego,  $\text{dist}(P, I) = \text{dist}(Q, I)$

□

### Versión Algebraica

Sea  $W$  el centro de la circunferencia, de manera tal que  $P = W + \overrightarrow{WP}$  y  $Q = W + \overrightarrow{WQ}$ , y sean  $a$  y  $b$  las rectas que contienen a los puntos  $W$  y  $P$ , y  $W$  y  $Q$  respectivamente

Supongamos que  $a$  y  $b$  no son paralelas y consideremos los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  perpendiculares a  $\overrightarrow{WP}$  y  $\overrightarrow{WQ}$  respectivamente. Si  $a' : \lambda_1 \vec{v} + P$  y  $b' : \lambda_2 \vec{w} + Q$ , entonces existe  $I$  punto de intersección entre las rectas  $a'$  y  $b'$ , ya que si  $a$  y  $b$  no son paralelas,  $a'$  y  $b'$  tampoco lo son.

Por definición de norma de un vector se tiene que  $\|\vec{PI}\|^2 = \langle I - P, I - P \rangle$  Como  $I = W + \vec{WI}$  y  $P = W + \vec{WP}$ , la igualdad anterior se puede reescribir de la forma:

$$\|\vec{PI}\|^2 = \langle W + \vec{WI} - (W + \vec{WP}), W + \vec{WI} - (W + \vec{WP}) \rangle = \langle \vec{WI} - \vec{WP}, \vec{WI} - \vec{WP} \rangle$$

Por las propiedades del producto escalar se deduce que

$$\|\vec{PI}\|^2 = \langle \vec{WI}, \vec{WI} \rangle - 2\langle \vec{WI}, \vec{WP} \rangle + \langle \vec{WP}, \vec{WP} \rangle$$

Luego,

$$\|\vec{PI}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - 2\langle \vec{WI}, \vec{WP} \rangle + \|\vec{WP}\|^2 \quad (37)$$

Análogamente, se demuestra que

$$\|\vec{QI}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - 2\langle \vec{WI}, \vec{WQ} \rangle + \|\vec{WQ}\|^2 \quad (38)$$

Por otra parte, se tiene que

$$\langle \vec{WI}, \vec{WP} \rangle = \langle \vec{WP} + \vec{PI}, \vec{WP} \rangle = \langle \vec{WP}, \vec{WP} \rangle + \langle \vec{PI}, \vec{WP} \rangle$$

Como  $\vec{PI}$  es perpendicular a  $\vec{WP}$ , por ser  $I$  punto de la recta  $a'$ , se concluye que

$$\langle \vec{WI}, \vec{WP} \rangle = \|\vec{WP}\|^2$$

De la misma manera, como  $\vec{QI}$  es perpendicular a  $\vec{WQ}$ , por ser  $I$  punto de la recta  $b'$  se tiene que:

$$\langle \vec{WI}, \vec{WQ} \rangle = \|\vec{WQ}\|^2$$

Si reemplazamos estas igualdades en (37) y (38) se tiene que:

$$\|\vec{PI}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - 2\|\vec{WP}\|^2 + \|\vec{WP}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - \|\vec{WP}\|^2 \quad (39)$$

$$\|\vec{QI}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - 2\|\vec{WQ}\|^2 + \|\vec{WQ}\|^2 = \|\vec{WI}\|^2 - \|\vec{WQ}\|^2 \quad (40)$$

Luego, como  $P$  y  $Q$  pertenecen a la misma circunferencia con centro en  $W$  se tiene que  $\|\vec{WP}\| = \|\vec{WQ}\|$  y, por las igualdades (39) y (40) se deduce que:

$$\|\vec{PI}\| = \|\vec{QI}\|$$

□

## Teorema 2

A continuación se muestra una demostración diferente a la exhibida para el [Teorema 2](#).

En primer lugar es necesaria la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 20.** En  $\mathbb{R}^3$ , dado un vector no nulo  $v$  se define la proyección ortogonal de  $w$  sobre la recta por el origen  $L$  generada por  $v$ , notado  $\text{Proy}(w)_L$  al vector:

$$\text{Proy}(w)_L = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

Donde  $\langle, \rangle$  es el producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$ .

Observemos que

$$\left\| \overrightarrow{P'H} \right\| = \left\| \text{Proy} \left( \overrightarrow{VM} \right)_e - \text{Proy} \left( \overrightarrow{VP} \right)_e \right\| \quad (41)$$

Además, la ecuación de la recta  $e$  en la base ortonormal  $B$  es  $e : \lambda \cdot v_3$ , entonces de la [definición 20](#) se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{Proy} \left( \overrightarrow{VM} \right)_e &= \frac{\langle \overrightarrow{VM}, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \cdot v_3 \\ &= \langle \overrightarrow{VM}, v_3 \rangle \cdot v_3 \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Proy} \left( \overrightarrow{VP} \right)_e &= \frac{\langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \cdot v_3 \\ &= \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \cdot v_3 \end{aligned}$$

Luego, si reemplazamos estas igualdades en (41) y recordando que  $\overrightarrow{VM} = \overrightarrow{VP} + \overrightarrow{PM}$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{P'H} \right\| &= \left\| \left( \langle \overrightarrow{VM}, v_3 \rangle - \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \right) \cdot v_3 \right\| \\ &= \left\| \left( \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle + \langle \overrightarrow{PM}, v_3 \rangle - \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \right) \cdot v_3 \right\| \\ &= \left\| \langle \overrightarrow{PM}, v_3 \rangle \cdot v_3 \right\| \\ &= \left| \langle \overrightarrow{PM}, v_3 \rangle \right| \cdot \|v_3\| \end{aligned}$$

Como el ángulo comprendido entre los vectores  $\overrightarrow{PM}$  y  $v_3$  es  $\alpha$ , por ser la recta  $PM$  generatriz del cono y  $v_3$  el vector director de su eje, se tiene que:

$$\left\| \overrightarrow{P'H} \right\| = \left| \left( \cos(\alpha) \cdot \left\| \overrightarrow{PM} \right\| \cdot \|v_3\| \right) \right| \cdot \|v_3\| = |\cos(\alpha)| \cdot \left\| \overrightarrow{PM} \right\| \cdot \|v_3\|^2$$

Además, como  $\|v_3\| = 1$  y  $\cos(\alpha) \geq 0$  (pues  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) se tiene que:

$$\left\| \overrightarrow{P'H} \right\| = \cos(\alpha) \cdot \left\| \overrightarrow{PM} \right\|$$

Luego, por la [Proposición 2](#) deducimos que:

$$\left\| \overrightarrow{P'H} \right\| = \cos(\alpha) \cdot \left\| \overrightarrow{PF} \right\| \quad (42)$$

Por otra parte, por construcción se tiene que:

$$\left\| \overrightarrow{P'H} \right\| = \left\| \text{Proy} \left( \overrightarrow{VR} \right)_e - \text{Proy} \left( \overrightarrow{VP} \right)_e \right\| \quad (43)$$

Luego, como es  $e : \lambda \cdot v_3$  y usando la [definición 20](#) se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{Proy} \left( \overrightarrow{VR} \right)_e &= \frac{\langle \overrightarrow{VR}, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \cdot v_3 \\ &= \langle \overrightarrow{VR}, v_3 \rangle \cdot v_3 \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Proy}(\overrightarrow{VP})_e &= \frac{\langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \cdot v_3 \\ &= \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \cdot v_3 \end{aligned}$$

Luego, si reemplazamos estas igualdades en (43) y recordando que  $\overrightarrow{VR} = \overrightarrow{VP} + \overrightarrow{PR}$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P'H}\| &= \left\| \left( \langle \overrightarrow{VR}, v_3 \rangle - \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \right) \cdot v_3 \right\| \\ &= \left\| \left( \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle + \langle \overrightarrow{PR}, v_3 \rangle - \langle \overrightarrow{VP}, v_3 \rangle \right) \cdot v_3 \right\| \\ &= \left\| \langle \overrightarrow{PR}, v_3 \rangle \cdot v_3 \right\| \\ &= \left| \langle \overrightarrow{PR}, v_3 \rangle \right| \cdot \|v_3\| \end{aligned}$$

Como el ángulo comprendido entre los vectores  $\overrightarrow{PR}$  y  $v_3$  es  $\beta$ , por ser la recta  $PR$  paralela a la recta  $l$  y  $v_3$  el vector director del eje del cono, se tiene que:

$$\|\overrightarrow{P'H}\| = \left| \left( \cos(\beta) \cdot \|\overrightarrow{PR}\| \cdot \|v_3\| \right) \right| \cdot \|v_3\| = |\cos(\beta)| \cdot \|\overrightarrow{PR}\| \cdot \|v_3\|^2$$

Además, como  $\|v_3\| = 1$  y  $\cos(\beta) \geq 0$  (pues  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ) se tiene que:

$$\|\overrightarrow{P'H}\| = \cos(\beta) \cdot \|\overrightarrow{PR}\| \quad (44)$$

Entonces, por las igualdades (42) y (44) deducimos que:

$$\cos(\alpha) \cdot \|\overrightarrow{PF}\| = \cos(\beta) \cdot \|\overrightarrow{PR}\|$$

Luego,

$$\frac{\|\overrightarrow{PF}\|}{\|\overrightarrow{PR}\|} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

□

## Propiedad de la parábola

Heath (1896), con uso de notaciones actuales, editó el compendio de “Las cónicas”, dentro del cual se expone el tratamiento desarrollado por Apolonio. Entre las propiedades que se demuestran, se exhibe la siguiente proposición:

### **Proposition 71.**

**[III. 48.]**

***The focal distances of  $P$  make equal angles with the tangent at that point.***

Debido a que allí sólo se consideran la elipse y la hipérbola, a continuación se pretende enunciar y demostrar esta propiedad para el caso de la parábola:

Sea una  $p$  una parábola con foco en el punto  $F$ , directriz  $d$  y parámetro  $k$ . Sean  $P$  un punto cualquiera de la parábola,  $a$  la recta perpendicular a la directriz por  $P$ ,  $t$  la recta tangente a la curva por  $P$  y  $b$  la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $F$ . Entonces, el ángulo entre las rectas  $a$  y  $t$  es igual al ángulo formado por las rectas  $t$  y  $b$ .

### Demostración Geométrica

Por la definición de parábola (ver [definición 19](#)) se tiene que la distancia de  $P$  a  $F$  es la misma que de  $P$  a  $d$ . Sea  $O$  el punto determinado por la intersección entre  $d$  y la recta perpendicular a ella por  $P$ . Entonces,

$$PO = PF \quad (45)$$

Llamemos  $m$  a la mediatriz del segmento  $\overline{FO}$ , de (45) se deduce que  $P$  pertenece a la recta  $m$ .

Veamos que la mediatriz  $m$  es la recta tangente a la parábola por  $P$ .

Supongamos que  $m$  interseca a la parábola en otro punto  $Q$ , distinto de  $P$ . Por otra parte, consideremos el punto  $T$  determinado por la intersección entre la directriz y la recta perpendicular a ella por  $Q$ . Consideremos el triángulo  $QTO$ , rectángulo en  $T$  por construcción. Resulta entonces que

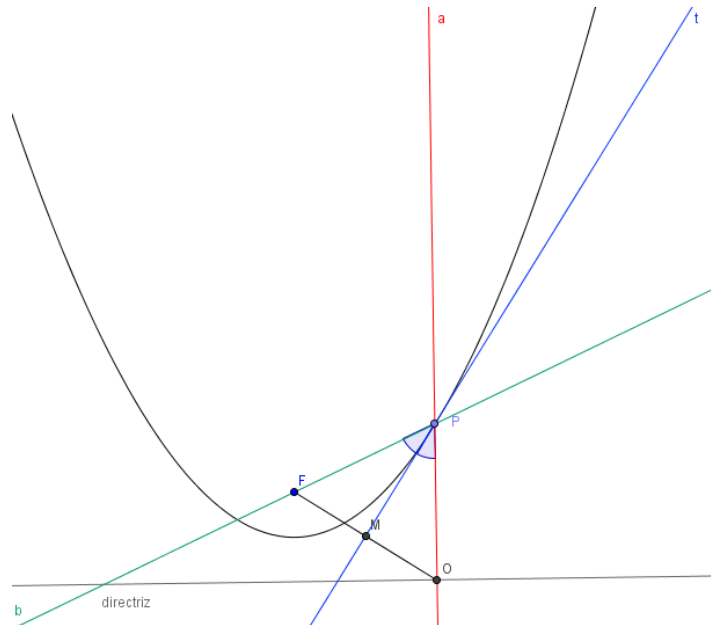
$$QT < QO \quad (46)$$

Por otra parte, se sabe que  $QF = QO$ , por ser  $Q$  punto de la mediatriz del segmento  $FO$ ;  $QF = QT$ , por ser  $Q$  punto de la parábola  $p$ . Luego, se deduce que  $QO = QT$ , lo que contradice (46).

Luego,  $m$  es la recta tangente a la parábola por  $P$ , es decir,  $m = t$ .

Para mostrar que el ángulo formado por las rectas  $a$  y  $t$  es igual al ángulo formado por las rectas  $t$  y  $b$  alcanza con probar que  $t$  es la bisectriz del ángulo  $\angle PFO$ .

Sea  $M$  el punto medio del segmento  $\overline{FP}$ , observemos que  $M$  es un punto de la recta  $t$ . Consideremos los triángulos  $PMF$  y  $PMO$ ,  $PF = PO$ , por ser  $P$  punto de la parábola;  $FM = MO$ , por ser  $M$  punto de  $t$  y  $PM$  es lado común de los dos triángulos. Luego, por criterio de congruencia lado lado, los triángulos  $PMF$  y  $PMO$  son congruentes, en particular  $\angle OPM = \angle FPM$ . De lo que se deduce que la recta  $t$  es la bisectriz del ángulo  $\angle FPO$ .



□

Antes de continuar con la siguiente demostración, necesitamos de un resultado:

LEMA 8. Sean  $L_1 : y = m_1x + b_1$  y  $L_2 : y = m_2x + b_2$  dos rectas distintas y no perpendiculares, es decir,  $m_1 \neq -\frac{1}{m_2}$ . Si  $m_1 > m_2$ , entonces el ángulo  $\alpha$  formado por las rectas  $L_1$  y  $L_2$  es:

$$\arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

### Demostración Analítica

Supongamos, sin pérdida de generalidad que el foco de la parábola es el punto  $F = (\frac{k}{2}, 0)$ , que el punto  $P = (x_0, y_0)$  se encuentra en el primer cuadrante y que  $x_0 > \frac{k}{2}$  (si  $x_0 < \frac{k}{2}$  la demostración es análoga). Luego, la directriz es la recta  $d : x = -\frac{k}{2}$  y la ecuación de la parábola es  $y^2 = 2kx$ .

Como  $P$  está en el primer cuadrante, consideramos, sin pérdida de generalidad, la porción de la parábola definida por  $y = \sqrt{2kx}$  (si  $P$  está en el segundo cuadrante basta con considerar la curva  $y = -\sqrt{2kx}$ )

Sean  $t$  la recta tangente a la curva en  $P$ , cuya ecuación es  $t : y = \frac{k}{\sqrt{2kx_0}}(x - x_0) + y_0$ ,  $b$  la recta que contiene a los puntos  $F$  y  $P$ , de ecuación  $b : y = \frac{y_0}{x_0 - \frac{k}{2}}(x - x_0) + y_0$  y  $a$  la recta perpendicular a la directriz por  $P$ , cuya ecuación es  $a : y = y_0$ .

Queremos ver que el ángulo entre las rectas  $t$  y  $a$ , al que llamaremos  $\alpha$ , es igual al ángulo entre las rectas  $b$  y  $t$ , al que llamaremos  $\beta$ . Para ello alcanza con demostrar que  $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ , pues la función  $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan(x)$  es inyectiva.

Por el lema (8) se sabe que  $\tan(\alpha) = \frac{k}{\sqrt{2kx_0}}$  y  $\tan(\beta) = \frac{\frac{y_0}{x_0 - \frac{k}{2}} - \frac{k}{\sqrt{2kx_0}}}{1 + \frac{k}{\sqrt{2kx_0}} \cdot \frac{y_0}{x_0 - \frac{k}{2}}}$

Supongamos que  $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2kx_0}} &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - \frac{k}{2}} - \frac{k}{\sqrt{2kx_0}}}{1 + \frac{k}{\sqrt{2kx_0}} \cdot \frac{y_0}{x_0 - \frac{k}{2}}} \\ \frac{k}{\sqrt{2kx_0}} &= \frac{\frac{y_0\sqrt{2kx_0} - k(x_0 - \frac{k}{2})}{\sqrt{2kx_0}(x_0 - \frac{k}{2})}}{\frac{\sqrt{2kx_0}(x_0 - \frac{k}{2}) + ky_0}{\sqrt{2kx_0}(x_0 - \frac{k}{2})}} \end{aligned}$$

Como por hipótesis  $x_0 \neq \frac{k}{2}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2kx_0}} &= \frac{y_0\sqrt{2kx_0} - k(x_0 - \frac{k}{2})}{\sqrt{2kx_0}(x_0 - \frac{k}{2}) + ky_0} \\ k \cdot \left[ \sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) + ky_0 \right] &= \sqrt{2kx_0} \left[ y_0\sqrt{2kx_0} - k \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) \right] \\ k \cdot \sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) + k^2y_0 &= y_0\sqrt{2kx_0} - k\sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) \\ 2k\sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) &= y_0\sqrt{2kx_0} - k^2y_0 \\ 2k\sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) &= ky_0(2x_0 - k) \end{aligned}$$

Dividiendo por  $k$  se obtiene:

$$2\sqrt{2kx_0} \left( x_0 - \frac{k}{2} \right) = y_0(2x_0 - k)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$4(2kx_0) \left( x_0 - \frac{k}{2} \right)^2 = y_0^2(2x_0 - k)^2$$

Esta última igualdad es equivalente a:

$$\frac{4(2kx_0)(2x_0 - k)^2}{4} = y_0^2(2x_0 - k)^2$$

$$(2kx_0)(2x_0 - k)^2 = y_0^2(2x_0 - k)^2$$

Nuevamente, como  $x \neq \frac{k}{2}$ , se tiene que:

$$2kx_0 = y_0^2$$

Observamos que esta última igualdad es válida, por ser  $P$  punto de la parábola. Luego, como  $2kx_0 > 0$ ,  $x_0 > \frac{k}{2}$  y  $y_0 > 0$  todas las igualdades anteriores también son válidas (ver \*), en particular:  $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ .

(\*) Dada la igualdad:

$$4(2kx_0) \left(x_0 - \frac{k}{2}\right)^2 = y_0^2(2x_0 - k)^2$$

Como  $2kx_0 > 0$ ,  $x_0 > \frac{k}{2}$  y  $y_0 > 0$  se obtiene que:

$$\sqrt{4(2kx_0) \left(x_0 - \frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{y_0^2(2x_0 - k)^2}$$

Falta demostrar el caso en que  $x_0 = \frac{k}{2}$



□

Para la siguiente demostración necesitamos de dos resultados:

**LEMA 9.** Sea una parábola con foco en el punto  $F$  y de directriz  $d$ . Además, sean  $P$  un punto cualquiera de la parábola,  $t$  la recta tangente a la curva por  $P$ ,  $a$  la recta perpendicular a la  $d$  por  $P$  y  $O$  el punto determinado por la intersección entre la directriz y la recta  $a$ . Entonces, la recta  $t$  es perpendicular a la recta  $FO$ .

**LEMA 10.** Sean  $v$  y  $w$  dos vectores no nulos distintos, entonces  $\langle v, w \rangle = \langle -v, -w \rangle$ .

*Demostración:*

Por propiedades del producto interno se tiene que:

$$\langle -v, -w \rangle = (-1)\langle v, -w \rangle = (-1)(-1)\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle$$

□

**Demostración Algebraica**

Sea  $P$  un punto cualquiera de la parábola,  $a$  la recta perpendicular a la directriz por  $P$ ,  $t$  la recta tangente a la parábola por  $P$ ,  $b$  la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $F$ , y  $O$  el punto determinado por la intersección entre  $a$  y  $t$ . Por ser  $P$  un punto de la parábola se cumple que:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \|\overrightarrow{PO}\| \quad (47)$$

Sean  $Q$  el punto medio del segmento  $\overline{FO}$ ,  $O'$  punto de la recta  $a$  (en la semirrecta opuesta a  $\overrightarrow{PO}$ ) y  $Q'$  punto de la recta  $t$  (en la semirrecta opuesta a  $\overrightarrow{PQ}$ ) tal que:

$$\|O'P\| = \|OP\| \quad (48)$$

$$\|Q'P\| = \|QP\| \quad (49)$$

Luego, se tiene que  $a : X = \lambda\overrightarrow{O'P} + P$ ,  $b : X = \lambda\overrightarrow{PF} + P$  y  $t : X = \lambda\overrightarrow{PQ} + P$  ó  $t : X = \lambda\overrightarrow{Q'P} + P$ .

Por el lema (9) se sabe que

$$\langle \overrightarrow{QO}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \overrightarrow{QF}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$$

Como  $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PQ}$  se deduce que:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle &= \langle \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle \\ \langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ} \rangle - \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle &= \langle \overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PQ} \rangle - \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PQ} \rangle \quad (50)$$

Por otra parte, queremos ver que el ángulo entre las rectas  $a$  y  $t$ , al que llamaremos  $\alpha$ , es igual al ángulo entre las rectas  $b$  y  $y$ , al que llamaremos  $\beta$ . Para ello, alcanza con demostrar que  $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ .

Por la definición de ángulo entre vectores se sabe que  $\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PO}\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|}$  y  $\cos(\beta) = \frac{\langle \overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PF}\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|}$ .

Además, como  $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{PO'}$  y  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PQ'}$  y usando el lema 10 y las igualdades (48) y (49) se deduce que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PO}\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|}$$

Supongamos que  $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ . Se esta manera, se tiene:

$$\frac{\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PO}\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\|\overrightarrow{PF}\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|}$$

Usando las igualdades (47) y (50) se deduce que la igualdad anterior es cierta, entonces todas las anteriores también lo son.



