



DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación
Universitaria (CONEAU). Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

**Tratamiento Específico de Señales Biológico-Cerebrales.
(Métodos y algunos problemas)**

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología
de la Universidad Nacional de General Sarmiento

Autor: Romina Cardo

Director: Dr María Cristina Mariani

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación
Universitaria (CONEAU). Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

FORMULARIO "E"
TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor

**El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades
para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: a**

- a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.
- b) Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria
de la UNGS:

- c) Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación
y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.

- a. Título completo del trabajo de Tesis: *Tratamiento Específico de Señales
Biológico-Cerebrales. (Métodos y algunos problemas)*

- b. Presentado por: Cardo, Andrea Romina

- c. E-mail del autor: rcardo@ungs.edu.ar

- d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología

- e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Instituto de Cien-
cias (ICI), Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS)

- f. Para recibir el título de:

- a) Grado académico que se obtiene: Doctor

- b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología

- g. Fecha de la defensa:

- h. Director de la Tesis: Mariani, María Cristina

- i. Tutor de la Tesis: -

- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Corvalán, Álvaro

- k. Descripción física del trabajo de Tesis:

78 páginas (incluyendo el formulario E), 42 figuras, 5 tablas.

- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: El alcance geográfico de la
presente tesis es internacional mientras se investigue la aplicación de los Métodos
descriptos en ella, para diferentes tipos de señales ya sean biológico-cerebrales
o de otra índole (ver [Car1]).

Evaluated and accredited by the National Commission of Evaluation and Accreditation of Universities (CONEAU). Resolution N° 1178/11. Qualification "B".

m. Topics treated in the Thesis: Specific innovative methods for the processing of certain biological-brain signals (epileptic crisis) according to their multifractal behavior with singularities of rapid oscillation (chirps) using Wavelets Leaders; The mediation of evoked brain potentials (Event Related Potentials, ERPs) with a Kalman Filter.

n. Resúmen en español:

En el **primer capítulo** presentaremos una breve introducción.

En el **segundo capítulo** exhibiremos fundamentos teóricos.

En el **tercer capítulo**, presentaremos un método nuevo que denominamos Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection que superaría todos los inconvenientes, capaz de caracterizar espectros multifractales no-cóncavos en señales biológicas de crisis epilépticas.

El **cuarto capítulo** estará dedicado a considerar críticamente el paradigma de la promediación para el estudio de potenciales evocados cerebrales (Event Related Potentials, ERPs) y proponemos para su análisis un Filtrado de Kalman de las señales, lo que constituye una posible alternativa para estimar las respuestas en las señales correspondientes a ERPs, soslayando la habitualmente alta "signal to noise ratio" (SNR) de estas series.

o. Resúmen en portugués:

No **primeiro capítulo** apresentaremos uma breve introdução.

No **segundo capítulo** exibiremos fundamentos teóricos.

No **terceiro capítulo**, apresentaremos um método novo que denominamos Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection que superaria todos os inconvenientes, capaz de caracterizar espectros multifractais não-côncavos, em sinais biológicos de crises epilépticas.

No **quarto capítulo** estará dedicado a considerar criticamente o paradigma da média para o estudo de potenciais evocados cerebrais (Event Related Potentials, ERPs) e propomos para sua análise um Filtrado de Kalman dos sinais, o que constitui uma possível alternativa para estimar as respostas nos sinais correspondentes a ERPs, atravessando a habitualmente alta "signal to noise ratio" (SNR) desta série.

Evaluated and accredited by the National Commission of Evaluation and Accreditation
Universitaria (CONEAU). Resolution N° 1178/11. Qualification "B".

p. Resumen en inglés:

In the **first chapter** we present a brief introduction.

In the **second chapter** we will present theoretical foundations.

In the **third chapter** we will present a new method called Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection that would overcome all the drawbacks, it is also able to characterize non-concave multifractal spectra in biological signals of epileptic seizures.

In the **fourth chapter** will be devoted to critically consider the averaging paradigm for the study of Potential Related Brain (Event Related Potentials, ERPs) and propose for its analysis a Kalman Filtering of the signals, which is a possible alternative to estimate the responses in the signals corresponding to ERPs, bypassing the usually high signal to noise ratio (SNR) of these series.

q. Aprobado por:

Dr Tamarit, Francisco Antonio
Dr Beccar Varela, María Pía
Dr Jaroszewicz, Sebastián

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). Resolución N° 1178/11. Calificación “B”.

**Tratamiento Específico de Señales Biológico-Cerebrales.
(Métodos y algunos problemas)**

Publicaciones:

• *Non-concave multifractal spectra with wavelet leaders projection of signals with and without chirps*, R. Cardo, A. Corvalán; *Fractals (Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society)* Vol 17, No 3 (2009) 311-322, World Scientific Publishing Company. Honorary Editor: Benoît Mandelbrot. Print ISSN: 0218-348X, Online ISSN: 1793-6543.

• *Heuristics for solving the multiple problem identification of the responses of brain and artificial neural networks in the presence of usual and unusual stimuli by means of Kalman-type filters*, R. Cardo, A. Corvalán; *RMTyA-CIMPA*, Vol 18, No 1, (2011), 49-62, ISSN: 1409-2433.

Aportes Originales:

La presente tesis aporta resultados originales sobre Métodos innovadores para el estudio y tratamiento de ciertas señales temporales biológico cerebrales, pero que pueden ser usados en el análisis de señales de diversos orígenes. A saber, no hay trabajos publicados anteriores a [Car2] que usaran los Wavelet Leaders para el cálculo de espectros multifractales no cóncavos con chirps; y no hay trabajos publicados anteriores a [Car3] que resolvieran el problema de la promediación de PE con pocos trials usando un filtrado Kalman tipo Bayesiano para la experiencia planteada, que no precisa mantener los datos previos, lo que facilita su implementación en sistemas de procesado en tiempo real.

Evaluated and accredited by the National Commission of Evaluation and Accreditation of Universities (CONEAU). Resolution N° 1178/11. Qualification "B".

In the **second chapter**, we will study Hölder Spaces, due to the relevant importance that they have for the estimation of the Multifractal Spectra of the next chapter, and we comment on an open problem related to them.

In the **third chapter** we will present a new method for estimating the spectra mentioned, the Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection, which describes the multifractal behavior with singularities of rapid oscillation (chirps) without the Legendre Transform, which in a surprising way, overcomes all the inconveniences, since it is stable with respect to the oscillating singularities, is capable of characterizing non-concave spectra, and uses the redundancy of the wavelet frames (instead of orthonormal bases of the same) to guarantee a greater stability in the face of translations in the temporal variable.

As an additional advantage it does not require restrictive conditions in the regularity of the wavelet used, and we will show its efficacy in the absence of brain activity with the addition of chirps, since in future work we intend to study methods that recognize and eventually filter chirps that naturally occur in biological signals and for which the presence of the same is not evident a priori, with the objective of predicting epileptic crises.

In the **fourth chapter** we will present a Method for the paradigm of the averaging of the study of evoked potentials (Event Related Potentials, ERPs) with a Kalman Filter, bypassing the usually high "signal to noise ratio" (SNR) of these series.

Its application can help in the taking of decisions that require doing so in real time, such as continuous monitoring of brain functions in administration of anesthetics and surgeries, insanity, etc.

The motivation of the problem arises from various questions that have been presented in the study of signals obtained in the taking of evoked potentials, although it is possible that the methods that are developed have application in the study of other non-linear time series.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Agradecimientos:

Primero a quién es primero en mi vida: A mi Jesús de Nazaret!, sin El no soy nada, Gracias! Gracias! Gracias! por darme ésta segunda oportunidad. Tu dulce Amor me sanó el cuerpo y el alma. Soy tu milagro!

A mi familia que tanto me ayudó en mis tratamientos médicos, gracias!

A mis médicos: mi cirujano, y mi oncólogo, que supo interpretar la enfermedad, para estar hoy acá, en lo que Dios tenía para mí.

Por supuesto a María Cristina Mariani, quién me dijo sí! en mi peor momento, cuando era todo o nada.... fue todo!! Gracias, no sólo por la impresionante profesional que todos sabemos que ella es (ojalá vuelva a nuestro país), sino por ser la increíble persona que jamás pensé descubrir, ella lo hizo realidad, siempre gracias Cristina!!!

Gracias a los Drs Fava, Tamarit, Beccar Varela, Zanette, Cannas y Jaroszewicz por darme una inmensa alegría cada uno al aceptar ser jurados.

Y a mi compañero Álvaro Corvalán, en las buenas, y en las malas (que fueron muchas) siempre salimos adelante a fuerza de mucho trabajo y tesón, gracias! por ayudarme en todos los trámites durante mi larga licencia médica, en todo, siempre estuviste y estás, nuestra amistad es única! gracias!!

A toda mi iglesia, que me volvió a poner de pie! Gracias! llena de personas no perfectas, pero sus vidas son como la mía, una aventura en Jesús nuestro Salvador, para el que trabajamos, estudiamos, vivimos, servimos, y agradecerle es el propósito de nuestras vidas!!

Les deseo las mayores bendiciones a todos uds!!

A mi precioso Tommy!

Graciasssss!!!!!!!!!!

*... Ezequías cayó enfermo de muerte..... y oró a Jehová... Te ruego ... que
hagas memoria de que he andado delante de ti en verdad y con íntegro corazón,
y que he hecho las cosas que te agradan...Y lloró... vino palabra de Jehová....
Yo he oído tu oración, y he visto tus lágrimas; he aquí que yo te sano Y
añadiré a tus días quince años.... y sanó.*

2da Reyes 20: 1-11, La Biblia

Capítulo 1: Introducción

El cerebro es el órgano más desconocido del cuerpo humano, debido a la complejidad y dificultad para estudiar su funcionamiento (ver [Bar], [Li]). Por ello, son grupos multidisciplinarios los que abordan este tipo de investigaciones. Una fuente de información clave sobre la función de las regiones cerebrales, son los efectos del daño a ellas. En este sentido, hemos obtenido resultados originales sobre Métodos Innovadores para el estudio y tratamiento de ciertas señales temporales biológico cerebrales, a saber, EEG de ausencias cerebrales durante una crisis epiléptica, y Potenciales Evocados de tipo sensorial auditivo, considerando críticamente el paradigma de la promediación de los mismos.

Estado del Arte:

El Análisis o Procesamiento de Señales Temporales es un área de estudio en la que se está trabajando actualmente con mucha intensidad (ver [Mar1], [Mar2], [Mar3], [Mar4], [Mar5], [Mar6], [Mar7]).

Podríamos decir que ésta área tuvo su origen en el Siglo XIX con uno de los métodos tradicionales para el estudio de señales, consistente en el empleo de representaciones senoidales, conocido como "Análisis de Fourier", en honor a Joseph Fourier (1768 - 1830) por sus contribuciones a la teoría de representación de funciones como superposiciones ponderadas de senoides. Las series de Fourier básicas se aplican a las señales periódicas (repetitivas) y la transformada de Fourier (o integral de Fourier) que es una simple extensión de las series, a las aperiódicas (no repetitivas).

Los métodos de Fourier tienen amplias aplicaciones más allá de las señales; en la física, la ingeniería y la ciencia en general. Posteriormente, los matemáticos ampliaron la idea de Fourier a funciones no periódicas (u ondas) que cambian en el tiempo, en lugar de repetirse siempre en la misma forma. La mayoría de las ondas del mundo real son de este tipo. Si en vez de senos usamos onditas especiales o wavelets, lo denominamos "Análisis de Fourier no trigonométrico", casi podríamos decir que el estudio de este "Análisis de Fourier no trigonométrico" se debió al físico Werner Heisenberg cuando en 1927 afirmó que la posición y la velocidad de un objeto no se pueden medir exactamente al mismo tiempo, afirmación que se conoce como el "Principio de Incertidumbre de Heisenberg". En términos de procesamiento de señales, esto significa que es imposible conocer de forma simultánea la frecuencia exacta y el momento exacto en que ocurre esta frecuencia en una señal. Para poder conocer la frecuencia, la señal se debe dilatar en el tiempo, o viceversa.

Pierre Laplace nació unos 20 años antes que Fourier, como en el caso de las series de Fourier, la transformada de Laplace ha encontrado una gran aplicación a las señales digitales. Por simple extensión y conveniente interpretación la transformada de Laplace da lugar a la transformada Z, cuyas técnicas de la transformada Z fueron usadas por De Moivre en 1730.

El advenimiento de los computadores digitales trajo consigo un incremento en el uso y aplicación de la transformada Z, la cual forma el pilar básico para la construcción de los filtros digitales.

Estos métodos para procesar señales digitales en tiempo real, tomaron su auge conjuntamente al de la computadora de menor volumen y personales, en 1980 aproximadamente, con el desarrollo de varios programas, entre los que se encuentra el MATLAB, con sus versiones mejoradas.

Hay otros métodos que se usan en el Análisis de señales, como los basados en la Estadística, por ejemplo, estudiando los cambios en las formas que tienen las distribuciones de amplitud de las señales.

En este trabajo trataremos de hacer una presentación ordenada y razonablemente autocontenida de métodos para procesar ciertas señales, y de algunos de los principales problemas que se suscitan, con énfasis en la cuestión funcional y en su aplicación en tiempo real.

Como sin duda ocurrió también con otras áreas que recientemente se han definido como tales, varios de los problemas de los cuáles se ocupa el Procesamiento de Señales han sido estudiados anteriormente desde varios puntos de vista (ver [Ko]). En particular, uno de los problemas centrales, a saber, es el de poder extraer información oculta en las señales registradas, que dependiendo el caso, difiere según la investigación que se quiera realizar. Cada tipo de señal requiere un especial tratamiento según sus características (ver [Ger]). Nosotros mostraremos métodos específicos innovadores para ciertas señales biológico-cerebrales.

El plan de labor es el siguiente:

En el **segundo capítulo** exhibiremos fundamentos teóricos.

En el **tercer capítulo**, nos dedicamos al estudio de métodos de análisis de fluctuación, ya que en los últimos años se han revelado como una interesante herramienta (ver [An], [Le], [Pe]) que caracteriza series de tiempo de diversos orígenes, para analizar cuestiones de transferencia de energía que están ligadas al comportamiento multifractal (ver [Fa2]). Estos métodos, sin embargo, se ven seriamente afectados por un lado cuando hay presencia de singularidades de rápida oscilación (chirps); y por otra parte, al estar formulados en términos de la transformada de Legendre (ver [Fr] y [Ma]), está fuera de su alcance caracterizar fenómenos con espectros no cóncavos que pueden aparecer naturalmente en señales donde se superponen procesos que tienen lugar a escalas diferentes. Si bien hay métodos basados en Wavelets Leaders (e.g. el método de WL de Jaffard 2004, [Jf1], [Jf2], [Jf3], [Jf4].) que pueden soslayar la primera dificultad mencionada, tampoco pueden detectar los mencionados espectros no-cóncavos. Por otro lado, el método del Gradient Modulus Wavelet Projection ([Tu] Turiel 2006, et al), puede proporcionar espectros no-cóncavos pero es sensible a los chirps. Además, en tales circunstancias, el difundido uso de familias de wavelets ortonormales no resulta suficientemente estable como para garantizar la invariancia en el tiempo en términos numéricos.

En este trabajo presentaremos un método nuevo que denominamos **Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection (GMWFLP)** y que superaría todos los inconvenientes mencionados, ya que es estable respecto de las singularidades oscilantes, es capaz de caracterizar espectros no-cóncavos, y utiliza la redundancia (ver [Da] Daubechies 1992) de las frames de wavelets (en lugar de bases ortonormales de las mismas) para garantizar una mayor estabilidad frente a las traslaciones en la variable temporal. Como ventaja adicional no requiere de condiciones restrictivas en la regularidad de la wavelet utilizada, y exhibiremos su eficacia en ausencias cerebrales con el agregado de chirps, ya que en futuros trabajos pretendemos estudiar métodos que reconozcan y eventualmente filtren chirps que naturalmente se encuentren en señales biológicas y para las cuales la presencia de los mismos no sea evidente a priori, con el objetivo de predecir crisis epilépticas.

El **cuarto capítulo** estará dedicado a considerar críticamente el paradigma de la **promediación** para el estudio de potenciales evocados cerebrales (**Event Related Potentials, ERPs**) y proponemos para su análisis un **Filtrado de Kalman** de las señales, lo que constituye una posible alternativa para estimar las respuestas en las señales correspondientes a ERPs, soslayando la habitualmente alta **“signal to noise ratio” (SNR)** de estas series.

Esto proporciona una mejora en la correlación entre las respuestas idealizadas y las reales de trials individuales; permitiendo, luego de un período de aprendizaje sobre cada sujeto concreto, la evaluación automática de los registros de ERPs con alto nivel de significación basados en pocos trials (pruebas), lo que sería conveniente para tomar decisiones basadas en dichas respuestas que precisen aplicaciones que requieran hacerlo en tiempo real, como monitoreo continuo de funciones cerebrales en administración de anestésicos y cirugías, insania, etc.

La motivación del problema surge de diversas cuestiones que se nos han presentado en el estudio de señales obtenidas en la toma de potenciales evocados cerebrales, aunque es posible que los métodos que se desarrollen tengan aplicación en el estudio de otras series de tiempo no lineales.

Confiamos en haber conseguido una presentación coherente, que estimule el interés en continuar las muchas distintas posibles líneas de estudio en esta dinámica área de la matemática computacional.

State of the Art:

The Analysis or Processing of Temporal Signals is an area of study which is currently of great interest (see [Mar1], [Mar2], [Mar3], [Mar4], [Mar5], [Mar6], [Mar7]).

This area had its origin in the 19th century with one of the traditional methods for the study of signals, consisting of the use of sine-wave representations, known as "Fourier Analysis", in honor of Joseph Fourier (1768-1830) for his contributions to the theory of function representation as weighted superimpositions of sinusoid.

The basic Fourier series apply to periodic (repetitive) signals and the Fourier transform (or Fourier integral) which is a simple extension of the series, to aperiodic (non-repetitive).

Fourier methods have broad applications beyond signals processing; in physics, engineering and science in general.

Subsequently, mathematicians extended the idea of Fourier to non-periodic functions (or waves) that change in time, instead of always repeating itself in the same form. Most real-world waves are of this type. For instance instead of sines if we use special waves or wavelets, we call it "non-trigonometric Fourier Analysis".

We can say that the study of these non-periodic waves was due to the physicist Werner Heisenberg when in 1927 he affirmed that the position and velocity of an object cannot be measured exactly at the same time, a statement known as the "Heisenberg Uncertainty Principle".

In terms of signal processing, this means that it is impossible to simultaneously know the exact frequency and the exact moment at which this frequency occurs in a signal. In order to know the frequency, the signal must be delayed in time, or vice versa.

Pierre Laplace was born about 20 years before Fourier, as in the case of the Fourier series, the Laplace transform has great applications to digital signals. By simple extension and convenient interpretation the Laplace transform gives rise to the Z transform, whose techniques of the Z transform were used by De Moivre in 1730.

The advent of digital computers brought with it an increase in the use and application of the Z transform, which forms the basic pillar for the construction of digital filters. In the 1980s these methods to process digital signals in real time, became very popular in conjunction with the use of computer, with the development of several programs, like MATLAB, with its improved versions.

There are other methods that are used in Signal Analysis, such as those based on the Statistical analysis, for example, by studying the changes in the shapes that have the amplitude distributions of the signals.

In this work we will try to make an orderly and reasonably self-contained presentation of methods to process certain signals, and some of the main problems that arise, with emphasis on the functional question and its application in real time.

As has undoubtedly occurred with other areas that have recently been defined as such, several of the problems that Signal Processing deals with have been studied previously from several points of view. In particular, one of the central problems, namely, is to extract hidden information in the recorded signals, which depending on the case, differs according to the research that is to be performed. Each type of signal requires a special treatment according to its characteristics (see [Ger]).

We will show innovative specific methods for certain biological-brain signals.

The work plan is as follows:

In the **second chapter** we will present theoretical foundations.

The **third chapter** will be devoted to methods of fluctuation analysis, since in the last years it has been revealed as an interesting tool (see [An], [Le], [Pe]) that characterizes time series of diverse origins, to analyze issues of energy transfer which are linked to multifractal behavior (see [Fa2]).

These methods, however, are seriously affected on one hand when there are presence of fast oscillation singularities (chirps); and on the other hand, being formulated in terms of the Legendre transform (see [Fr] and [Ma]), it is beyond its scope to characterize phenomena with non-concave spectra that may naturally occur in signals where processes occurring overlap at different scales.

Although there are methods based on Wavelets Leaders (eg the WL method of Jaffard 2004, [Jf1], [Jf2], [Jf3], [Jf4].) that can circumvent the first difficulty mentioned, can not detect non-concave spectra.

On the other hand, the Gradient Modulus Wavelet Projection method ([Tu] Turiel 2006, et al.) provide non-concave spectra but it is sensitive to chirps.

Moreover, in such circumstances, the widespread use of orthonormal wavelet families is not sufficiently stable to guarantee invariance over time in numerical terms.

In this work, we will present a new method called **Gradient Modulus Wavelet Frames Leaders Projection (GMWFLP)** that would overcome all the mentioned drawbacks, since it is stable with respect to oscillating singularities, it is also able to characterize non-concave spectra, and uses redundancy (see [Da] Daubechies 1992) of the wavelet frames (instead of orthonormal bases) to ensure greater stability against the translations in the temporal variable.

As an additional advantage, it does not require restrictive conditions in the regularity of the wavelet used, and we will show its effectiveness in brain absences with the addition of chirps, since in future works we intend to study methods that recognize and eventually, filter chirps that are naturally in biological signals and for which the presence of them is not evident a priori, with the aim of predicting epileptic seizures.

The **fourth chapter** will be devoted to critically consider the averaging paradigm for the study of Potential Related Brain (**Event Related Potentials, ERPs**) and propose for its analysis a **Kalman Filtering** of the signals, which is a possible alternative to estimate the responses in the signals corresponding

to ERPs, bypassing the usually high **signal to noise ratio (SNR)** of these series.

This methodology provides an improvement in the correlation between the idealized and actual responses of individual trials, allowing, after a learning period on each specific subject, the automatic evaluation of the records of ERPs with a high level of significance based on few trials, which would be convenient to make decisions based on such responses that have the need of applications that require real time, such as continuous monitoring of brain functions in the management of anesthesia and surgery, insanity, etc.

The motivation of the problem arises from several questions that have been presented to us in the study of signals obtained by taking into account brain evoked potentials, although it is possible that the methods developed will have applications in the study of other non-linear time series.

We are confident that we have achieved a coherent presentation that stimulates the interest in continuing the many different possible lines of study in this dynamic area of computational mathematics.

Fin del Primer Capítulo.

Capítulo 2: Espacios de Hölder

En este capítulo desarrollaremos un aspecto de los Espacios de Hölder (se puede ver [Jf5], [Jf6] y [Mey]), que sustentan al Formalismo Multifractal necesario para la Estimación numérica de los Espectros Multifractales del siguiente tercer capítulo. Lo haremos de forma especial, teniendo como meta mostrar la discusión y el entorno en el que se encuentra el *Problema Abierto* que mencionamos al final del capítulo, y en el cual seguimos trabajando.

MODULOS de CONTINUIDAD

2.1 INTRODUCCION

Definición 2.1.1:

Dado un α , con $0 < \alpha < 1$, notamos $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones continuas f tal que $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si definimos $\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha}$, entonces:

- $\|\cdot\|_{C^\alpha}$ es una norma, y
- $(C^\alpha(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{C^\alpha})$ es un Espacio de Banach con la mencionada norma, módulo las funciones constantes.

Proposición 2.1.2:

La definición 2.1.1 anterior, puede ser reformulada usando el Módulo de Continuidad $\omega_\infty(f, h) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |y| \leq h}} |f(x + y) - f(x)|$, y el hecho que

$$\sup_{h > 0} \frac{\omega_\infty(f, h)}{h^\alpha} = \|f\|_{C^\alpha}, \text{ resultando: } f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \omega_\infty(f, h) \leq Ch^\alpha.$$

Definición 2.1.3:

Si $1 \leq \alpha < 2$, la definición es similar a la Definición 2.1.1, pero $[\Delta_y f](x) = f(x + y) - f(x)$ es reemplazado por $[\Delta_y^2 f](x) = f(x + 2y) - 2f(x + y) + f(x)$.

El espacio $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ es nuevamente definido por la condición $\omega_\infty(f, h) \leq Ch^\alpha$.

Este espacio resulta un Espacio de Banach, pero ahora los elementos son módulo las funciones afines.

Definición 2.1.4:

Para $N \leq \alpha < N + 1$, será $[\Delta_y f](x)$ reemplazado por la diferencia iterada:

$$[\Delta_y^{N+1} f](x) = f(x + (N + 1)y) - (N + 1)f(x + y) + f(x).$$

Resultando así $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ un Espacio de Banach de funciones, pero ahora los elementos son módulo los polinomios P_N , donde $\text{grado}(P_N) \leq N$.

Definición 2.1.5:

Los espacios $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ (**con el punto**) son llamados **Homogéneos**, pues: si $0 < \lambda < \infty$, y definimos $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, entonces: $\|f_\lambda\|_{C^\alpha} = \lambda^\alpha \cdot \|f\|_{C^\alpha}$, recibiendo así el nombre de **Espacios de Hölder Homogéneos**.

Definición 2.1.6:

Los Espacios de Hölder **NO-Homogéneos** $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ (**sin el punto**), están definidos por la relación: $C^\alpha(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es decir,

$f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$ es un representante acotado de un elemento de $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Con la norma de $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ definida por $\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + \|\dot{f}\|_{\dot{C}^\alpha}$, resulta $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ un Espacio de Banach, pero esta norma **NO** satisface la propiedad de homogeneidad.

Proposición 2.1.7:

Si los espacios mencionados anteriormente están definidos sobre un conjunto compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, entonces: $C^\alpha(\mathbb{K}) = \dot{C}^\alpha(\mathbb{K})$, y allí son idénticos.

En este caso, f_λ no tiene sentido, y la propiedad de homogeneidad se pierde.

Nota 2.1.8:

Ambos espacios $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ y $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ tienen sus ventajas intrínsecas para su uso matemático. La ventaja de $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ es que es un álgebra, es decir:

Si $f, g \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, entonces $fg \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Pero lo anterior NO es cierto para $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$, se puede ver [Jf6].

Además, hay ejemplos en los que el comportamiento *large-scale* (o completamente autosimilar) es importante, y donde es necesario para admitir funciones que no son acotadas en el infinito. Los ejemplos incluyen al movimiento browniano fraccionario, o más generalmente, procesos $\frac{1}{f}$. En otras situaciones, es necesario enfocarse en pequeñas escalas.

2.2 MODULO de CONTINUIDAD en x_0 , versus, UN MODULO de CONTINUIDAD en x_0

Definición 2.2.1:

EL MODULO de CONTINUIDAD en x_0 para f es:

$$\omega(h) = \sup_{|x-x_0| \leq h} |f(x) - P(x-x_0)|,$$

donde P es el único polinomio de grado mínimo que da el menor orden de magnitud para h , con h suficientemente pequeño.

Definición 2.2.2:

UN MODULO de CONTINUIDAD θ en x_0 para f es una función:

$\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ creciente, no idénticamente nula tal que $\theta(0) = 0$, y, $\theta(2|x|) \leq C \cdot \theta(|x|)$

y además, existe un polinomio P tal que $|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \theta(|x - x_0|)$, para alguna constante $C > 0$.

Definición 2.2.3:

Diremos que θ es un MODULO **UNIFORME** de CONTINUIDAD, si es un MODULO de CONTINUIDAD con **la misma constante C , en todo x_0** .

Observación 2.2.3:

Si θ está definida por $\theta(x) = |x|^\alpha$, corresponde a la **Regularidad Hölder**. (ver Capítulo 3 en 3.2, [An], [Da], [Jf3], [Le], etc)

Nota 2.2.4:

Antes de presentar Littlewood-Paley (LP), recordemos informalmente porqué la convolución regulariza:

Si tomamos como ejemplo ilustrador $\phi = \chi_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$, entonces $f * \phi$ lo que hace es dar en cada punto x , el promedio de los valores en el intervalo: $[x - \frac{1}{2}; x + \frac{1}{2}]$.

La idea es que si el gráfico de f es "rugoso", el de $f * \phi$ es "suave".

Es decir, que $f * \phi$ va dando un promedio móvil que "lima" las rugosidades (una especie de *filtro pasa-bajo*).

Si en lugar de convolucionar con $\chi_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$, lo hacemos con las análogas funciones "campanas", resulta también que $f * \phi$ es una especie de promedio progresivo, pero ahora un poco más ponderado (hacia el centro del intervalo).

Si tomamos estas funciones cada vez más altas y de soportes más estrechos, obtenemos promedios cada vez más pesados en x ; y cuando la campana tiende a ∞ (en 0), resulta que: $\phi * f \rightarrow f$ (y por ello las ϕ son aproximantes de la δ).

Para Littlewood-Paley la filosofía es algo distinta, la idea es convolucionar con funciones llamémoslas del tipo LP, como muestra el gráfico de la Figura 2.1:

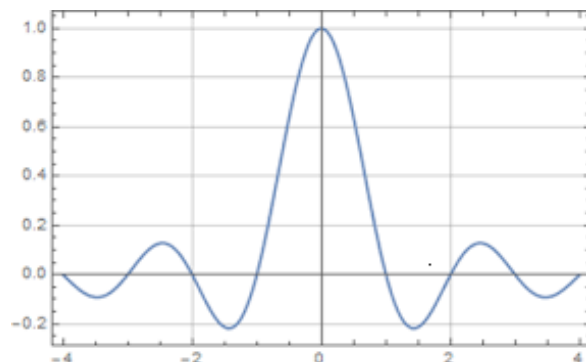


Figura 2.1

Y así, ir ponderando por más y por menos pequeños segmentos a uno y otro lado de x con signos alternados, procediendo de la siguiente forma:

Tomamos $\hat{\varphi}$ una función en la clase de Schwartz, o sea, $\hat{\varphi} \in S$.

Notemos que por lo tanto $\varphi \in S$ porque $\hat{\cdot} : S \rightarrow S$ es isometría.

Con

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\xi) = 1 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \hat{\varphi}(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

por lo tanto, aproximadamente φ es de la forma LP anterior.

La idea es que $\hat{\varphi}$ es parecida a $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, y por lo tanto, φ es del tipo LP por ser $\frac{\text{sen}(k.x)}{x} = \hat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$.

Por lo tanto, $\hat{f} \cdot \hat{\varphi} = \begin{cases} \hat{f} & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$, y, $f * \varphi = \left(\hat{f} \cdot \hat{\varphi} \right)^\vee$, es decir,

que truncamos las frecuencias mayores o iguales que 1 y dejamos intactas las menores o iguales que $\frac{1}{2}$.

Por otra parte, con $\hat{\psi}(\xi) = \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \hat{\varphi}(\xi)$, obtenemos que:

$\hat{\psi} \cdot \hat{f}$ sólo deja pasar (ponderando) las frecuencias de f entre $\frac{1}{2}$ y 2.

Análogamente, $\hat{\psi}(2^{-j} \cdot \xi)$ se **anula** fuera de la banda $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$, pues $\hat{\psi}(2^{-j} \cdot \xi) = \hat{\varphi}(2^{-j-1} \cdot \xi) - \hat{\varphi}(2^{-j} \cdot \xi)$, y sólo vale 1 en $|\xi| = 2^j$.

Si definimos los operadores:

$S_j(f) = f * \varphi(2^{-j} \cdot x)$, porque $\left(\hat{\varphi}(2^{-j} \cdot \xi) \right)^\vee = \varphi(2^{-j} \cdot x)$, o sea:

$$S_j(\hat{f}) = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}(2^{-j} \cdot \xi) = \begin{cases} \hat{f} & \text{si } |\xi| \leq 2^{-j} \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq 2^{-j} \end{cases} \quad (\text{pasa-bajo}).$$

Para luego definir: $\Delta_j(f) = S_{j+1}(f) - S_j(f)$, o sea, $\Delta_j(\hat{f}) = \hat{f} \cdot \hat{\psi}(2^{-j} \cdot \xi)$ (*pasa-banda*), entonces: $S_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots = Id$.

En los resultados de Regularidad y Decaimiento de los Módulos de Continuidad, se usa y necesita *La Nulidad de los Momentos de Ψ* , veámoslo:

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \cdot \Psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^n \cdot \Psi(x) \cdot e^{-2\pi i(x\xi)} dx \Bigg|_{\xi=0},$$

(u otra definición de la Transformada de Fourier, sale igual), luego:

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \cdot \Psi(x) \cdot e^{-2\pi i(x\xi)} dx \Big|_{\xi=0} = (x^n \cdot \hat{\Psi}(x)) (0) = cte.(\hat{\Psi})^{(n)}(0)$$

donde (n) son las derivadas, y, la *cte* depende de la definición de la Transformada de Fourier.

Pero $cte.(\hat{\Psi})^{(n)}(0) = 0$, porque $\hat{\Psi} \equiv 0$ en $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ y, por lo tanto, todas sus derivadas se anulan en 0.

Como en el análisis con wavelets, los momentos nulos es lo que nos va a permitir pasar los términos de Taylor.

2.3 Condiciones para los MODULOS de CONTINUIDAD

Teorema 2.3.1:

(\Rightarrow) Si θ es un **Módulo Uniforme de Continuidad de f** , entonces:
 $\|\Delta_j(f)\|_{\infty} \leq C.\theta(2^{-j})$, para cierto $C > 0$.

(\Leftarrow) Si θ satisface $\|\Delta_j(f)\|_{\infty} \leq C.\theta(2^{-j})$, para cierto $C > 0$, y la condición (\spadesuit); entonces: θ es un **Módulo Uniforme de Continuidad de f** .

La condición (\spadesuit) dice que $\exists N \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vale que:

$$(\spadesuit) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{N \cdot j} \cdot \theta(2^{-j}) \leq C \cdot 2^{N \cdot J} \cdot \theta(2^{-J}) \\ \sum_{j=-\infty}^J 2^{(N+1) \cdot j} \cdot \theta(2^{-j}) \leq C \cdot 2^{(N+1) \cdot J} \cdot \theta(2^{-J}) \end{array} \right.$$

Demostración del Teorema 2.3.1:

En (\Rightarrow):

(para cada $x \Rightarrow \|\cdot\|_{\infty}$), se acota $|\Delta_j(f)(x)|$ usando la definición de Δ_j :
 $|\Delta_j(f)(x)| = \left| \int f(t) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot \psi(2^j \cdot (x-t)) dt \right|$, pero debido a los momentos nulos,
tenemos que: $\left| \int f(t) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot \psi(2^j \cdot (x-t)) dt \right| = \left| \int (f(t) - P(x-t)) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot \psi(2^j \cdot (x-t)) dt \right|$
y lo acotamos:

$\left| \int (f(t) - P(x-t)) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot \psi(2^j \cdot (x-t)) dt \right| \leq C \cdot \int \theta(|x-t|) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot |\psi(2^j \cdot (x-t))| dt$
usando que $\psi \in S$, obtenemos que:

$C \cdot \int \theta(|x-t|) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot |\psi(2^j \cdot (x-t))| dt \leq C \cdot \int \theta\left(\frac{|u|}{2^j}\right) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot \frac{1}{(1+|u|)^M} du$, donde M puede ser elegida arbitrariamente grande, y resulta que vale (\Rightarrow) acotando en los soportes de $\psi(2^{-j} \cdot \xi)$, como sigue:

Separamos el dominio de integración: en el dominio A_{-1} definido por $|t| \leq 1$, y los dominios A_m definidos por $2^m \leq |t| \leq 2^{m+1}$ para $m \in \mathbb{N}$.

La integral sobre el primer dominio A_{-1} , está acotada por $C.\theta(2^{-j})$, debido a que θ es creciente.

La integral sobre A_m está acotada por:

$$\begin{aligned} C. \int_{2^m \leq |t| \leq 2^{m+1}} \theta\left(\frac{|t|}{2^j}\right) \cdot \frac{1}{(1+|t|)^M} dt &\leq C \cdot 2^{n \cdot (m+1)} \int_{\frac{1}{2} \leq |y| \leq 1} \frac{\theta(2^{m+1-j} \cdot |y|)}{(1+2^{(m+1) \cdot |y|})^M} dy \leq \\ &\leq C \cdot 2^{n \cdot (m+1)} \cdot A^{m+1} \int_{\frac{1}{2} \leq |y| \leq 1} \frac{\theta(2^{-j} \cdot |y|)}{(1+2^{(m+1) \cdot |y|})^M} dy \leq C \frac{(2^n \cdot A)^{m+1}}{2^{mM}} \cdot \theta(2^{-j}). \end{aligned}$$

Eligiendo M suficientemente grande tal que $2^M > 2^n \cdot A$; obtenemos lo que queríamos probar.

En (\Leftarrow):

Queremos acotar $|f(x) - P(x - x_0)|$:

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq \sum_{j \leq J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)| + \sum_{j > J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)|$$

donde los $P_j(x - x_0)$ son los polinomios tipo Taylor en término de $\partial^\alpha \Delta_j(f)(x_0)$.

La **clave** es que como vale $\|\Delta_j(f)\|_\infty \leq C \cdot \theta(2^{-j})$, para cierto $C > 0$, podemos usar la Desigualdad de Bernstein (ver [Meyer]), para cualquier α y tenemos:

$$|\partial^\alpha \Delta_j(f)| \leq C \cdot 2^{|\alpha|j} \cdot \theta(2^{-j}).$$

Es decir: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos $P_j(x - x_0) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha \Delta_j f(x_0)$,

y, $P(x - x_0) = \sum_{j \geq 0} P_j(x - x_0)$.

Estas series convergen por la condición (\spadesuit).

Dado x , se define J tal que $2^{-J} \leq |x - x_0| < 2 \cdot 2^{-J}$; entonces:

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq \sum_{j \leq J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)| + \sum_{j > J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)|.$$

Usando el Teorema del Valor Medio, el primer sumando está acotado por:

$$\sum_{j \leq J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)| \leq \sum_{j \leq J} |x - x_0|^{N+1} \sup_{|\alpha|=N+1} \|\partial^\alpha \Delta_j(f)\|_\infty, \text{ luego,}$$

por la aplicación de la Desigualdad de Bernstein mencionada:

$$\sum_{j \leq J} |x - x_0|^{N+1} \sup_{|\alpha|=N+1} \|\partial^\alpha \Delta_j(f)\|_\infty \leq C \cdot 2^{-(N+1) \cdot J} \sum_{j \leq J} 2^{(N+1) \cdot j} \cdot \theta(2^{-j}), \text{ y por}$$

la condición (\spadesuit): $C \cdot 2^{-(N+1) \cdot J} \sum_{j \leq J} 2^{(N+1) \cdot j} \cdot \theta(2^{-j}) \leq C \cdot \theta(2^{-J}) \leq C \cdot \theta(|x - x_0|)$.

El segundo sumando está acotado por:

$$\begin{aligned} \sum_{j > J} |\Delta_j(f)(x) - P_j(x - x_0)| &\leq \sum_{j > J} \left[\|\Delta_j(f)\|_\infty + \sum_{|\alpha| \leq N} |x - x_0|^\alpha \cdot \|\partial^\alpha \Delta_j(f)\|_\infty \right] \leq \\ &\leq \sum_{j > J} \left[\theta(2^{-j}) + \sum_{|\alpha| \leq N} |x - x_0|^\alpha \cdot 2^{|\alpha|j} \cdot \theta(2^{-j}) \right] \leq C \cdot 2^{-NJ} \sum_{j > J} 2^{-Nj} \cdot \theta(2^{-j}) \leq \\ &\leq \theta(|x - x_0|), \text{ usando la condición } (\spadesuit). \end{aligned}$$

Entonces, asumiendo la condición (\spadesuit), el **Módulo Uniforme de Continuidad** de f , puede ser caracterizado usando la Descomposición de Littlewood-Paley.

Observación 2.3.2:

Pero, la condición (\spadesuit), parece arbitraria, veamos su significado para el caso particular si $\theta(x) = x^\alpha$.

Entonces, la condición (\spadesuit) dice que: $\forall J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$(\spadesuit) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{N \cdot j} \cdot 2^{-j \cdot \alpha} \leq C \cdot 2^{N \cdot J} \cdot 2^{-J \cdot \alpha} \\ \sum_{j=-\infty}^J 2^{(N+1) \cdot j} \cdot 2^{-j \cdot \alpha} \leq C \cdot 2^{(N+1) \cdot J} \cdot 2^{-J \cdot \alpha} \end{array} \right.$$

Pero la primer sumatoria es $\sum_{j=J}^{\infty} (2^{N-\alpha})^j$; y la segunda sumatoria, tomando

$l = -j$, es: $\sum_{l=-j}^{\infty} (2^{\alpha-(N+1)})^l$, y como las acotaciones implican la convergencia de estas geométricas, debe ser: $N - \alpha < 0$, y $\alpha - (N + 1) < 0$, es decir:

$$\alpha - 1 < N < \alpha$$

requiriendo que:

$$\alpha \notin \mathbb{Z}$$

y en ese caso, tomando $N = [\alpha]$, las series valen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{N \cdot j} \cdot 2^{-j \cdot \alpha} = (2^{N-\alpha})^J \cdot \frac{1}{1+2^{N-\alpha}} = C \cdot 2^{N \cdot J} \cdot 2^{-J \cdot \alpha} \quad (\text{con } C = \frac{1}{1+2^{N-\alpha}}) \\ \sum_{j=-\infty}^J 2^{(N+1) \cdot j} \cdot 2^{-j \cdot \alpha} = 2^{(\alpha-(N+1)) \cdot (-J)} \cdot \frac{1}{1+2^{\alpha-(N+1)}} = C \cdot 2^{(N+1) \cdot J} \cdot 2^{-J \cdot \alpha} \quad (\text{con } C = \frac{1}{1+2^{\alpha-(N+1)}}) \end{array} \right.$$

De hecho, para $\alpha \in \mathbb{Z}$ hay contraejemplos (ver [Jf5]).

Reescribiendo la condición (\spadesuit) en general (dividiendo por $2^{N \cdot J}$ y por $2^{(N+1) \cdot J}$ respectivamente), obtenemos:

$$(\spadesuit) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{N \cdot (j-J)} \cdot \theta(2^{-j}) \leq C \cdot \theta(2^{-J}) \\ \sum_{j=-\infty}^J 2^{(N+1) \cdot (j-J)} \cdot \theta(2^{-j}) \leq C \cdot \theta(2^{-J}) \end{array} \right.$$

Cambiando los subíndices $\begin{cases} i = j - J \\ i = -(j - J) \end{cases}$ respectivamente, obtenemos que

$\forall J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$(\spadesuit) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{\infty} (2^N)^i \cdot \theta\left(\frac{2^{-J}}{2^i}\right) \leq C \cdot \theta(2^{-J}) \\ \sum_{i=0}^J \frac{1}{(2^{N+1})^i} \cdot \theta(2^i \cdot 2^{-J}) \leq C \cdot \theta(2^{-J}) \end{array} \right.$$

Lo que nos dice, que los valores de θ en cada potencia de 2, es comparable al promedio ponderado sobre las potencias de 2 más pequeñas, por un lado; y las más grandes, por otro.

Veamos un ejemplo:

Si $N = 3$, para $J = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} \theta(1) + 8.\theta(\frac{1}{2}) + 8^2.\theta(\frac{1}{4}) + 8^3.\theta(\frac{1}{8}) + 8^4.\theta(\frac{1}{16}) + \dots \leq C.\theta(1) \\ \theta(1) + \frac{1}{16}.\theta(2) + \frac{1}{16^2}.\theta(4) + \frac{1}{16^3}.\theta(8) + \frac{1}{16^4}.\theta(16) + \dots \leq C.\theta(1) \end{cases}$$

idem para $J = 5$ tenemos:

$$\begin{cases} \theta(\frac{1}{32}) + 8.\theta(\frac{1}{64}) + 8^2.\theta(\frac{1}{128}) + 8^3.\theta(\frac{1}{256}) + 8^4.\theta(\frac{1}{512}) + \dots \leq C.\theta(\frac{1}{32}) \\ \theta(\frac{1}{32}) + \frac{1}{16}.\theta(\frac{1}{16}) + \frac{1}{16^2}.\theta(\frac{1}{8}) + \frac{1}{16^3}.\theta(\frac{1}{4}) + \frac{1}{16^4}.\theta(\frac{1}{2}) + \dots \leq C.\theta(\frac{1}{32}) \end{cases}$$

Si analizamos la convergencia:

En el primer caso: $\theta(\frac{1}{2^n})$ debería ser parecido a $\frac{1}{8^n}.a_n$ (con $\sum a_n$ convergente).

En el segundo caso: $\theta(2^n)$ debería ser no mayor que $16^n.b_n$ (con $\sum a_n$ convergente).

De cualquier manera, lo anterior sugiere que si $\theta(2^n) \approx (2^n)^\alpha$ (en este caso $3 < \alpha < 4$) se garantiza la convergencia.

2.4 Espíritu de la CARACTERIZACION de los MODULOS de CONTINUIDAD UNIFORME:

"Si θ tiene un comportamiento comparable al de $|x|^\alpha$, y si esa condición es Uniforme, como guía pensemos en que θ es $|x|^\alpha$ sólo para situarnos, es decir que $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$; entonces el supremo de las oscilaciones de la banda de frecuencia $[2^{j-1}, 2^{j+1}]$ (centrada en 2^j) es menor o igual que $\theta(2^{-j})$, o sea, $2^{-j.\alpha}$ (para nuestro ejemplo guía)".

Veamos algunos Casos Particulares:

- Si $\alpha = 1$ la frecuencia 2^j es más o menos tan pequeña como 2^{-j} , como vemos en la Tabla 2.2:

Frecuencia	$\sup \ \Delta_j(f)\ $
1	$C.1$
2	$C.\frac{1}{2}$
4	$C.\frac{1}{4}$
8	$C.\frac{1}{8}$
16	$C.\frac{1}{16}$

Tabla 2.2

Las oscilaciones decrecen al mismo ritmo que las frecuencias.

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$ la frecuencia 2^j es más o menos tan pequeña como $2^{-\frac{1}{2} \cdot j}$, como vemos en la Tabla 2.3:

Frecuencia	$\sup \ \Delta_j(f)\ $
1	$C \cdot 1$
2	$C \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
4	$C \cdot \frac{1}{2}$
8	$C \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$
16	$C \cdot \frac{1}{4}$

Tabla 2.3

Las oscilaciones decrecen a menor ritmo que las frecuencias.

- Si $\alpha = 3$ la frecuencia 2^j es más o menos tan pequeña como $2^{-3 \cdot j}$, como vemos en la Tabla 2.4:

Frecuencia	$\sup \ \Delta_j(f)\ $
1	$C \cdot 1$
2	$C \cdot \frac{1}{8}$
4	$C \cdot \frac{1}{64}$
8	$C \cdot \frac{1}{512}$
16	$C \cdot \frac{1}{2048}$

Tabla 2.4

Las oscilaciones decrecen a mayor ritmo que las frecuencias.

Ahora, miremos los **Módulos de Continuidad Puntuales**:

Nuevamente, una condición de Módulo de Continuidad (en x_0) es **más fuerte** que una desigualdad para el decaimiento de las altas frecuencias (y hace falta que θ sea de orden comparable al de $|\cdot|^\alpha$ para la recíproca).

Teorema 2.4.1:

(\Rightarrow) Si θ es un **Módulo de Continuidad en x_0 de f** , entonces:
 $|\Delta_j f(x)| \leq C \cdot |\theta(2^{-j}) + \theta(|x - x_0|)|$, para cierto $C > 0$.

(\Leftarrow) Si θ satisface $|\Delta_j f(x)| \leq C \cdot |\theta(2^{-j}) + \theta(|x - x_0|)|$, para cierto $C > 0$,
 y si $\exists \omega$ un **Módulo Uniforme de Continuidad** de f ; y tanto θ como ω
 cumplen la condición (\spadesuit); entonces: $\exists P$ polinomio tal que:
 $|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \inf_{j \geq j_0} ((j - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \omega(2^{-j}))$.

Aclaración: El ínfimo es sobre los j mayores o iguales que j_0 , donde j_0 es el exponente tal que $2^{-j_0} \leq |x - x_0| < 2^{-j_0+1}$, o sea, $j_0 = \lceil \log_{\frac{1}{2}}(|x - x_0|) \rceil$ donde $\lceil \cdot \rceil$ denota Parte Entera.

Observación 2.4.2:

La desigualdad $|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \inf_{J \geq j_0} ((J - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \omega(2^{-J}))$ es más débil que si θ es un **Módulo de Continuidad en x_0 de f** ; pues si θ fuera un **Módulo de Continuidad en x_0 de f** , teníamos que:

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \theta(|x - x_0|).$$

Pero, como: $(j - j_0) \in \mathbb{N}$ luego $(j - j_0) \geq 1$ y además $\omega(2^{-j}) \geq 0$ obtenemos:

$$C \cdot \theta(|x - x_0|) \leq C \cdot ((j - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \omega(2^{-j})), \text{ luego:}$$

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \theta(|x - x_0|) \leq C \cdot ((j - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \omega(2^{-j})).$$

Antes de la demostración del Teorema 2.4.1, veamos:

Nota 2.4.3:

θ un **Módulo de Continuidad en x_0 de f** , cumple que:

1) $\theta(a) \leq \theta(2a)$ por ser θ creciente; y, además se pide en la definición de Módulo de Continuidad:

$$2) \theta(2a) \leq C \cdot \theta(a) \text{ claramente } C > 1.$$

Es decir: $\theta(a) \leq \theta(2a) \leq C \cdot \theta(a)$ claramente $C > 1$.

La condición $\theta(a) \leq \theta(2a) \leq C \cdot \theta(a), \forall a > 0$ permite acotar la tasa de crecimiento de $\theta(\cdot)$ (es no mayor que una geométrica):

$$\theta(2a) \leq C \cdot \theta(a) \Rightarrow \theta(4a) \leq C \cdot \theta(2a) \leq C^2 \cdot \theta(a) \Rightarrow \dots \theta(2^n a) \leq C^n \cdot \theta(a).$$

Una **Consecuencia trivial** que añadimos es que:

$$\theta(a + b) \leq C \cdot (\theta(a) + \theta(b))$$

En efecto: suponiendo $a \leq b$ (sinó, sale intercambiando a y b) tenemos:

$$\theta(a + b) = \theta(2 \cdot (\frac{a+b}{2})) \leq C \cdot \theta(\frac{a+b}{2}) \leq C \cdot \theta(b) \leq C \cdot (\theta(b) + \theta(a)).$$

Ahora sí haremos la demostración del Teorema 2.4.1:

Veamos (\Rightarrow) del Teorema 2.4.1:

Suponemos que θ es un Módulo de Continuidad de f , como vale la misma cuenta del Teorema 2.3.1 para **Módulo Uniforme de Continuidad de f** , tenemos: $|\Delta_j(f)(x)| = 2^{n \cdot j} \left| \int (f(t) - P(t - x_0)) \cdot \psi(2^j \cdot (x - t)) dt \right|$ obteniendo que: $|\Delta_j(f)(x)| \leq C \cdot \int \theta(|t - x_0|) \cdot 2^{n \cdot j} \cdot |\psi(2^j \cdot (x - t))| dt$, y acotando:

$$2^{n \cdot j} \left| \int (f(t) - P(t - x_0)) \cdot \psi(2^j \cdot (x - t)) dt \right| \leq C \cdot \int \theta(|t - x_0|) \cdot \frac{2^{n \cdot j}}{(1 + |2^j \cdot (t - x)|)^M} dt.$$

Pero: $C \cdot \int \theta(|t - x_0|) \cdot \frac{2^{n \cdot j}}{(1 + |2^j \cdot (t - x)|)^M} dt \leq C \cdot \int \theta\left(\left|\frac{y}{2^j} + x - x_0\right|\right) \cdot \frac{1}{(1 + |y|)^M} dt$, ya que: $\theta(|t - x_0|) = \theta(|t - x + x - x_0|) \leq cte.(\theta(|t - x|) + \theta(|x - x_0|))$, por la Consecuencia trivial: $\theta(a + b) \leq C \cdot (\theta(a) + \theta(b))$ que mencionamos en la Nota 2.4.3, haciendo la sustitución $t - x = \frac{y}{2^j}$, la misma del Teorema 2.3.1 para **Módulo Uniforme de Continuidad de f** , obtenemos:

$$|\Delta_j(f)(x)| \leq cte.(\theta(2^{-j}) + \theta(|x - x_0|)), \text{ que es lo que queríamos probar.}$$

Veamos (\Leftarrow) del Teorema 2.4.1:

Supongamos por simplicidad que $N = 0$ (el N de la condición (\spadesuit)) para θ y ω : (Con $N \neq 0$ la idea es la misma, ajustando las cuentas)

Como $N = 0$, el θ es de orden menor que 1 (recordemos que si $\theta(\cdot) = |\cdot|^\alpha$ luego $N = [\alpha]$) entonces N también da el orden del polinomio P , luego P es constante y $P \equiv f(x_0)$, y acotamos: $|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j(f)(x) - \Delta_j(f)(x_0)|$.

La suma para $j \geq J$ está acotada por $C \cdot \sum_J^{+\infty} \omega(2^{-j}) \leq C \cdot \omega(2^{-J})$.

La suma para $j_0 \leq j \leq J$ está acotada por:

$$(J - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \sum_{j=j_0}^J \theta(2^{-j}) \leq (J - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + C \cdot \theta(2^{-j_0}).$$

Y la suma para $j < J$ está acotada por:

$$|x - x_0| \cdot \sum_{-\infty}^{j_0} 2^j [\theta(|x - x_0|) + \theta(2^{-j})] \leq C \cdot |x - x_0| \cdot 2^{j_0} \cdot (\theta(|x - x_0|) + C \cdot \theta(2^{-j_0})).$$

Luego vale lo que queríamos probar:

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C \cdot \inf_{j \geq j_0} ((j - j_0) \cdot \theta(|x - x_0|) + \omega(2^{-j})).$$

Comentario 2.4.4:

Es todavía un *Problema Abierto*, si (\spadesuit), es la condición Necesaria y Suficiente para la Caracterización de los Módulos Uniformes de Continuidad mediante el decaimiento de los $\|\Delta_j(f)\|_\infty$.

Fin del Segundo Capítulo.

Capítulo 3: Análisis Multifractal de Ausencias Cerebrales con Chirps

3.1 INTRODUCCION

Se puede aproximar el espectro multifractal mediante el método de los Wavelets Leaders (WL), de Stephane Jaffard (2004), ver [Jf3].

Otra aproximación al espectro multifractal es la propuesta por el método Gradient Modulus Wavelet Projection (GMWP) que describen Turiel et al (2006), ver [Tu].

En éste capítulo estimaremos mediante un método nuevo, la irregularidad de series temporales artificiales y de EEG de crisis epilépticas correspondientes a ausencias cerebrales con chirps (señal mixta), obtendremos el espectro multifractal de la precrisis (la primera de las tres etapas de una ausencia cerebral) asociado a los exponentes Hölder puntuales de la señal; mediante GMWFLP, que como ventaja adicional no requiere de condiciones restrictivas en la regularidad de la wavelet utilizada, y exhibiremos su eficacia en las señales mencionadas.

Pretendemos estudiar la eficiencia de los citados métodos para reconocer y eventualmente filtrar chirps que naturalmente se encuentren en señales biológicas, con el objetivo de predecir crisis epilépticas.

3.2 MULTIFRACTALIDAD Y EXPONENTES HÖLDER

El punto de partida para analizar señales irregulares es la *regularidad Hölder*, expresada en el *espectro de singularidades*.

Este espectro describe las propiedades fractales de la señal dada.

Sea $f(x)$ una función continua. Para cualquier número no entero $\alpha > 0$, $f(x) \in C_{x_0}^\alpha$, *clase Lipschitz puntual*, si existe una constante $c > 0$ tal que cerca del punto x_0 se verifica $|f(x) - P(x - x_0)| \leq c|x - x_0|^\alpha$ donde P es un polinomio de grado menor o igual que la parte entera de α .

Introducimos el *exponente Hölder puntual* de f en x_0 , que notaremos $h_f(x_0)$ y definiremos $h_f(x_0) := \sup_{\alpha} (f \in C_{x_0}^\alpha)$.

Los exponentes Hölder pueden variar punto a punto dando estructuras muy complejas para la señal dada.

Entonces, la descripción natural de estas estructuras es la distribución de los exponentes en el rango de regularidad.

Más precisamente, podemos considerar *las dimensiones* de los conjuntos de puntos que tienen el mismo exponente Hölder.

Ya que estos conjuntos en general tienen medida de Lebesgue cero, las *medidas fractales* son la herramienta apropiada.

El *espectro de singularidades Hölder* $d(\alpha)$ está definido como la medida Hausdorff del conjunto de puntos x_0 que tienen exponente Hölder $h_f(x_0) = \alpha$. Es decir: la medida Hausdorff de $E_\alpha = \{x_0/h_f(x_0) = \alpha\}$.

Entonces, el problema principal es estimar el espectro de singularidades a partir de los valores de datos.

Son necesarias hipótesis adicionales o un marco más específico.

En éste sentido, el método más usual está basado en el llamado *formalismo multifractal*.

Esto esencialmente consiste en una *función de estructura* propuesta, $F_q(l)$ dando estimaciones globales acerca de la regularidad de la señal en función de una semi-norma de parámetro q y el parámetro de escala l , suponiéndolos relacionados con el comportamiento puntual en la forma:

$$d(\alpha) = \inf_q (q\alpha - h(q) + 1)$$

para una función cóncava h , que verifica:

$$F_q(l) \sim |l|^{h(q)}$$

Un espectro multifractal "típico" (cóncavo) calculado por los métodos MF-DFA o Wavelets Leaders (ver 3.3) es de la forma que muestra la Figura 3.1:

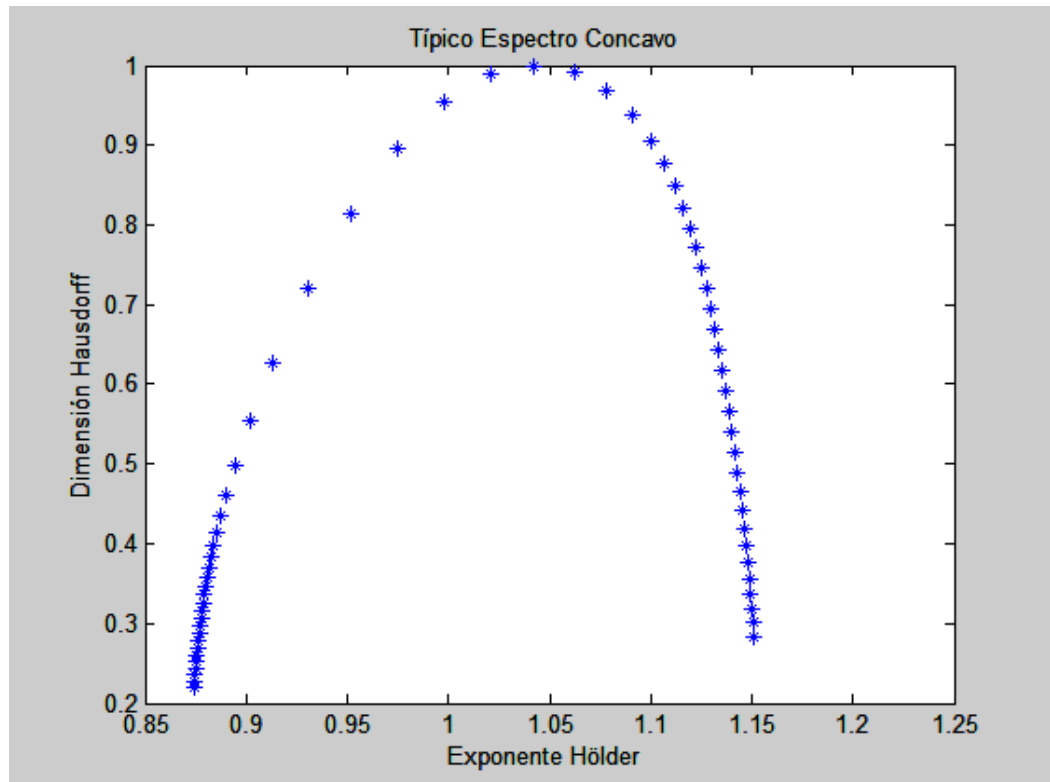


Figura 3.1

3.3 EL MÉTODO DE LOS LÍDERES WAVELET: (con la TRANSFORMADA DE LEGENDRE)

Hasta los últimos años el principal método basado en wavelets para estimar el espectro multifractal era la Wavelet Transform Módulo Máxima (WTMM), por lo general preferido sobre el Wavelet Integral Transform Method y también sobre los métodos basados en los q -módulos de continuidad porque al menos en los casos de auto-similaridad y auto-similaridad estadística podemos asegurar teóricamente que el Formalismo Multifractal basado en las wavelets proporciona el espectro correcto.

Sin embargo el método mencionado no está libre de críticas: Para la serie del movimiento Browniano fraccionario la parte del espectro correspondiente a la regularidad más alta (que es obtenido de los valores negativos de q) es subestimado (ver, por ejemplo [Jf3] u [Os]). Parece que la fuente de este problema proviene del hecho que WTMM en realidad captura el espectro de exponente débil, que coincide con el exponente Hölder en muchos casos, pero no siempre.

Una propuesta interesante que vence la mayoría de los problemas de ambos métodos es el empleo de los Líderes Wavelet:

Las Wavelets son herramientas naturales en el análisis multifractal, por al menos tres razones.

Primero, el concepto de auto-similaridad está implícito en la construcción de la base de wavelets $\{\Psi_{j,k}\}$ que definimos debajo.

Segundo, los coeficientes wavelet proveen una descomposición tiempo-escala de la función (o señal) f , de ahí, que las propiedades de escalamiento de una función implicarán las propiedades de escalamiento de sus coeficientes wavelets.

Finalmente, el exponente Hölder puntual $h_f(x)$ de cualquier función continua f alrededor de un punto x puede ser calculado mediante las estimaciones del tamaño de sus coeficientes wavelets $c_{j,k}$ asociados con f .

Entonces, ellas son herramientas eficientes para analizar comportamientos locales.

Stéphane Jaffard desarrolló un método (ver [Jf3]) para la caracterización wavelet del exponente Hölder puntual, y la relación entre la regularidad Hölder y la oscilación local.

Dió una nueva formulación de éste criterio en términos del supremo local de los coeficientes wavelet que él llamó *The Wavelet Leaders (WL)*, preparando el camino para el nuevo formalismo multifractal y puede ser resumido como sigue:

1) Para cualquier par $(j, k) \in N \times Z$, con $I_{j,k}$ denotamos el intervalo diádico $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$.

Entonces, si $x \in R$, $\forall j \geq 1$, existe un único entero $k_{j,x}$ tal que $x \in I_{j,k_{j,x}}$.

2) Consideremos una wavelet $\Psi \in C^\infty(R)$ que sea una función en la clase de Schwartz, como la construida en [Meyer], entonces el conjunto de funciones $\{\Psi_{j,k} = \Psi(2^j \cdot -k)\}_{(j,k) \in Z^2}$ forma una base wavelet *ortogonal* (bwo) de $L^2(R)$.

3) También, sea $f \in C^\epsilon(R)$ para algún $\epsilon > 0$, y escribámosla en la bwo:

$$f = \sum_{j,k \in Z} c_{j,k} \Psi_{j,k} \quad \text{WL1}$$

donde $c_{j,k}$ es el coeficiente wavelet de f definido por:

$$c_{j,k} := c_{j,k}(f) = 2^j \int_R f(t) \Psi_{j,k}(t) dt \quad \text{WL2}$$

4) Para cualquier par $(j, k) \in N \times Z$, introducimos el Líder Wavelet $L_{j,k}$ asociado con f y Ψ :

$$L_{j,k} := \sup_{j' \geq j, k' 2^{-j'} \in I_{j,k}} |c_{j',k'}| \quad \text{WL3}$$

Entonces, cualquier punto $x_0 \in R$ y cualquier escala $j \geq 0$ pueden ser asociadas al coeficiente:

$$L_j(x_0) := \sup_{|k-k_{j,x}| \leq 1} L_{j,k} \quad \text{WL4}$$

5) Un teorema acerca del exponente Hölder puntual, (ver en [Jf3]) afirma que:

$$h_f(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(L_j(x_0))}{\log(2^{-j})} \quad \text{WL5}$$

6) Recordemos que la transformada de Legendre de una función $\varphi : q \in R \mapsto \varphi(q)$ es la aplicación $\varphi^* : h \in R \mapsto \varphi^*(h) \in R \cup \{-\infty\}$ definida por

$$\varphi^*(h) = \inf_{q \in R} (qh - \varphi(q)) \quad \text{WL6}$$

7) Para cualquier función $f \in L^2(R)$ representada en la bwo como mencionamos antes, podemos introducir la función de escala

$\xi_f : p \in R \mapsto \xi_f(p)$ asociada con f , dada por

$$\xi_f(p) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{-1}{j} \log \sum_{k \in Z}^* |L_{j,k}|^p \quad \text{WL7}$$

donde $*$ significa que la suma es tomada sobre los k tales que $|L_{j,k}|$ es no nulo. Así, para cada $j \geq 1$ la función $p \mapsto \sum_{k \in Z}^* |L_{j,k}|^p$ es log-convexa y no-creciente cuando j es suficientemente grande, la aplicación ξ_f es concava y no-decreciente sobre R (por ser el límite inferior de funciones cóncavas no-decrecientes).

8) Frisch y Parisi propusieron (ver [Fr]) una fórmula que relaciona el espectro multifractal de una función f con ciertas cantidades promediadas provenientes de f , genéricamente referida como la conjetura Frisch-Parisi; esta fórmula puede ser reformulada, si llamamos $d_f(h)$ a la *dimensión Hausdorff* del conjunto $E_h^f := \{x : h_f(x) = h\}$, como:

$$d_f(h) = \inf_{p>0} (ph - \eta_f(p)) = (\eta_f)^*(h) \quad \text{WL8}$$

9) La aplicación $\eta_f : p \in R \mapsto R \cup \{-\infty\}$ es una función conveniente libre de energía asociada con f . Entonces, Jaffard estableció (Jaffard 2004 [JF3]) que: la función de escala ξ_f depende solamente de f , NO de Ψ , y si f satisface el formalismo multifractal en el exponente $h > 0$, $\eta_f = \xi_f$.

10) Finalmente, construimos el Espectro Multifractal Hausdorff de f definido por

$$d_f : h \mapsto d_f(h) = \dim(E_h^f) = (\xi_f)^*(h) \quad \text{WL9}$$

3.4 ESTIMACIÓN HÖLDER MEDIANTE LOS LÍDERES WAVELET:

Los exponentes Hölder puntuales de una función pueden estimarse estudiando el decaimiento de los líderes wavelet en el cono de influencia de cada punto. En efecto, ya forma parte del folklore en la caracterización de espacios de funciones mediante el uso de la transformada wavelet que puede obtenerse la siguiente acotación para los coeficientes wavelet de f , si $f \in C^\alpha(x_0)$:

$$|c_{jk}| \leq C 2^{-\alpha j} (1 + |2^j x_0 - k|)^\alpha$$

para alguna constante C , y con una recíproca algo más débil (aparece un factor de decaimiento logarítmico involucrado).

En esta línea, bajo hipótesis bastante generales es posible obtener el exponente Hölder puntual si uno asume que esencialmente

$$|c_{jk}| \approx K 2^{-H_f(x_0)j}$$

Así obtenemos: $\log_2 |c_{jk}| \approx \log_2 K - H_f(x_0)j$, y entonces:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 |c_{jk}|}{-j} = H_f(x_0).$$

Lo cierto es que éste procedimiento adolece de inconvenientes cuando la señal presenta chirps.

El hecho es que, en caso de una singularidad en tiempo-frecuencia incluso intervalos reducidos precisan de constantes K grandes cuyo valor no puede ser desestimado incluso al llegar a la escala máxima que admita la discretización, y ello introduce inestabilidades en estas estimaciones.

Por otro lado, al considerar sólo a los líderes wavelet se unifican las acotaciones en todos los intervalos del cono de influencia, que alude también a los intervalos contiguos al de x_0 en cada escala.

Así se reducen las perturbaciones introducidas por las oscilaciones lo que permite formular la desigualdad $|L_{jk}| \leq C2^{-\alpha j}$ de la ley de decaimiento sin el esquivo factor que involucra las traslaciones.

Una extrapolación al límite para estimar: $H_f(x_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 |L_{jk}|}{-j}$ nos debería proporcionar una estimación fiel de los exponentes Hölder puntuales que resulte poco sensible a la presencia de chirps en la misma.

3.5 MARCOS o "FRAMES":

Recientemente la teoría de marcos ha mostrado ser muy importante en numerosas aplicaciones en tecnología digital, especialmente en transmisión de información.

La redundancia de las descomposiciones en marcos permite recuperar los datos en situaciones de pérdida de información.

Definición 3.5.1: Dado H un espacio de Hilbert separable; una sucesión $(v_i) \subset H$ se dice un MARCO de H , si existen constantes positivas A y B con $0 < A \leq B < +\infty$ tales que:

$$A \cdot \|w\|^2 \leq \sum_i |\langle w, v_i \rangle|^2 \leq B \cdot \|w\|^2, \forall w \in H.$$

Las constantes A y B óptimas, se denominan las "**cotas del marco**".

Si $A = B$ el marco se dice **AJUSTADO**.

Proposición 3.5.2: Sea $\{f_n\}$ un marco ajustado con constante 1. Entonces: $\|f_n\| \leq 1, \forall n$ y además: $\|f_n\| = 1, \forall n \Leftrightarrow \{f_n\}$ es *ortonormal*.

3.6 GRADIENT MODULUS WAVELET FRAMES LEADERS PROJECTION METHOD (GMWFLP):

(sin la TRANSFORMADA DE LEGENDRE)

Este método combina el uso de los wavelet leaders con una idea interesante de Antonio Turiel et al. (ver [Tu]).

Consiste esencialmente en estimar directamente el espectro multifractal a partir de un histograma de los exponentes Hölder deducidos extrapolando el comportamiento de los coeficientes wavelet, el llamado Gradient Modulus Wavelet Projection (GMWP).

En [Tu] se usa un histograma para estimar la densidad $\rho(\alpha)$ de los exponentes Hölder α a partir de los valores para la escala más pequeña j considerando:

$$c_{j,k} := c_{j,k}(f) = 2^j \int_R f(t) \Psi_{j,k}(t) dt \text{ para } \varepsilon_0 = 2^{-j_0} \approx 0.$$

Los $\Psi_{j,k}$ usados en [Tu] no tienen que constituir una base de L^2 ni tener momentos nulos, ya que la idea es considerar cómo varían las proyecciones de la señal contra una familia de funciones que cambian la escala (lo que apunta a estimar los α de las singularidades de tipo cuspidal).

La primera observación que surge es la posibilidad de mejorar las estimaciones extrapolando al límite en lugar de quedarnos con el menor valor de la escala.

En segundo término ocurre que las proyecciones contra una familia de funciones parametrizada según la escala no tiene que necesariamente ser comparable con potencias de $|x - x_0|^\alpha$ ya que para hacerlo es preciso considerar que si $\Psi_{j,k}$ tiene primer momento nulo resulta:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t_0) \Psi_{j,k}(t) dt = 0$$

luego:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t_0)) \Psi_{j,k}(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t_0)| |\Psi_{j,k}(t)| dt \simeq \int_{\mathbb{R}} |t - t_0|^{H_f(t_0)} |\Psi_{j,k}(t)| dt.$$

A partir de lo anterior, y de una condición sobre el decaimiento de $\int_{\mathbb{R}} |\Psi_{j,k}(t)| dt$ se obtiene la desigualdad $|L_{jk}| \leq C2^{-\alpha j}$, si $0 < H_f(t_0) < 1$. Si $H_f(t_0) > 1$ buscamos condiciones para que esencialmente $|f(t) - P(t - t_0)| \simeq |t - t_0|^{H_f(t_0)}$, donde $P(t - t_0)$ es un polinomio (de Taylor) en potencias de $(t - t_0)$, y para ello se requiere que $\int_{\mathbb{R}} t^k \Psi_{j,k}(t) dt = 0$ para $k \leq gr(P)$.

Es decir que no se ve manera de soslayar el requerimiento de que la wavelet tenga momentos nulos hasta por lo menos el $\sup_{t \in Sop(f)} \{H_f(t)\}$ ver [Jf3].

En tercer término hace falta definir con mayor precisión la función $\rho(\alpha)$ de densidad de α -singularidades [Du], [Jf5].

Por otro lado, al tratar con el comportamiento de los coeficientes wavelet c_{jk} se asume implícitamente que todas las singularidades son cuspidales, descartando la presencia de chirps.

Nuestra propuesta consiste en cambio en hacer una estimación con un método directo semejante al mencionado pero basado en el comportamiento de los líderes wavelet L_{jk} en lugar de los c_{jk} de manera de preservar la estabilidad frente a las singularidades oscilantes.

No hace falta asumir una presunta concavidad del espectro que podría no ser tal.

Llamaremos entonces para abreviar GMWFLP (Gradient Modulus Wavelet Frames Leader Projection) al algoritmo de estimación directa con líderes wavelet:

Estimamos los exponentes Hölder puntuales extrapolando al límite $j = N, \frac{N}{2}, \frac{N}{2^2}, \dots, \frac{N}{2^{\log_2 N}} \rightarrow 0$, y obtenemos $H_f(x_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 |L_{jk}|}{-j}$.

Estimamos la densidad $\rho(\alpha)$: en teoría $\rho(\alpha)$ es la función de densidad, es decir la derivada de la función de probabilidad F tal que

$$F(\alpha) = P(x \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \rho(t) dt, \text{ es decir:}$$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \frac{d(F(\alpha))}{d\alpha} = \frac{d\left(\int_{-\infty}^{\alpha} \rho(t) dt\right)}{d\alpha} = \frac{d(P(x \leq \alpha))}{d\alpha} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(x \leq \alpha + \varepsilon) - P(x \leq \alpha - \varepsilon)}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Así tomamos encajes de intervalos de mallas tan finas como admita la máxima resolución alrededor de cada α de una partición de $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ (obtenido del punto anterior) contando la proporción de puntos del total en que el exponente Hölder está en cada intervalo.

$$\text{En éste sentido: } \rho(\alpha) \approx \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\# \text{ de puntos con } \alpha - \varepsilon \leq H_f(x) \leq \alpha + \varepsilon}{\# \text{ total de puntos de la serie}} \right).$$

Obtenemos la dimensión estimada de cada α (de la partición):

$\dim(E_\alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} 1 - \frac{\log\left(\frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha_1)}\right)}{\log(r)}$, donde r son los radios de los intervalos de los encajes.

Esta última idea supone que como el intervalo del dominio de la serie tiene dimensión 1, entonces el E_{α_1} de mayor densidad debe tener dimensión 1. Por otro lado, a nivel de las pequeñas escalas ($r \approx 0$) la igualdad aproximada:

$\dim(E_\alpha) \approx 1 - \frac{\log\left(\frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha_1)}\right)}{\log(r)} = \dim(E_{\alpha_1}) - \log_r\left(\frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha_1)}\right)$ es equivalente a

$$r^{\dim(E_\alpha)} \approx \frac{r^{\dim(E_{\alpha_1})}}{\frac{\rho(\alpha)}{\rho(\alpha_1)}}, \text{ y a su vez a } \frac{\rho(\alpha_1)}{\rho(\alpha)} \approx \frac{r^{\dim(E_\alpha)}}{r^{\dim(E_{\alpha_1})}} \text{ (lo que es de esperar)}$$

de cualquier definición razonable de dimensión, piénsese por ejemplo para dimensiones 1 y 3, y un $r = 0.1$, es de esperar que la densidad mayor respecto de la menor sea de $\frac{1000}{10} = 100 = \frac{0.1^1}{0.1^3}$.

Queremos señalar que: Aunque a nuestro juicio el GMWFLP es preferible sobre el GMWP ambos métodos sólo difieren en la manera de estimar los exponentes Hölder puntuales y luego siguen un esquema común, a saber:

Discretización del intervalo $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$:

$$\alpha_{\min} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = \alpha_{\max}.$$

Evaluación aproximada de la función de densidad de los exponentes Hölder puntuales en los nodos de la partición: $\rho(\alpha_i)$.

Estimación de las dimensiones de los conjuntos de cada exponente Hölder puntual: $\dim(E_{\alpha_i})$.

3.7 FRAMES DE WAVELETS versus WAVELETS ORTOGONALES EN EL CALCULO de ESPECTROS MULTIFRACTALES:

La convergencia de los exponentes Hölder a partir del decaimiento de los coeficientes (o líderes) wavelet puede ser lenta en ocasiones dependiendo de la ubicación de los puntos respecto del reticulado sobre el que se generó la base, exigiendo a veces una discretización superior a la disponible. (Ver [Da] pags 301 y subsiguientes).

El uso de frames, permite una mayor independencia de la localización del punto respecto de la malla debido a que la redundancia permite superar en la mayoría de los casos este problema, porque que la posición de un punto esté mal condicionada simultáneamente respecto de varias funciones de la familia cuyos soportes se superpongan, es mucho más improbable.

Para testear la eficiencia de la estimación de los exponentes Hölder, a partir de los cuales se obtienen los espectros multifractales, calculados a partir del decaimiento de los líderes de los coeficientes en una frame de wavelets, y contrastarla con las estimaciones obtenidas con los líderes wavelet de familias ortogonales, generamos funciones de Weierstrass (muestreadas con frecuencia 2^{-12} Hz) como muestra la Figura 3.2 cada una con exponente de Hölder constante entre 0 y 1, y calculamos con cada método el exponente de Hölder puntual (que debería ser fijo en teoría a lo largo de los $2^{12} = 4096$ datos de la serie).

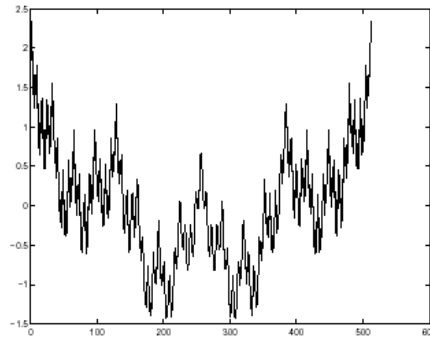


Figura 3.2

La desviación estandar de la serie de exponentes Hölder ideal es 0 (ya que se trata de funciones monohölder [Jf3]), de modo que consideramos como criterio de mejor estimación el menor valor de la desviación estandar de las series de exponentes puntuales.

Como se exhibe en la Tabla 3.3, las desviaciones conseguidas mediante una frame de wavelets (de constante de frame igual a 2, es decir de doble redundancia) obtenida superponiendo las familias *sym4* y *db8* de Daubechies **es menor**

o igual en todos los casos que las desviaciones de los resultados conseguidos con distintas familias ortogonales tomadas como referencia (en la Tabla 3.3 corresponden a las bases de wavelets *sym4* y *db8*).

Exponente Hölder de la función de Weierstrass	Estimación GMWFLP (sym4-db8) de los Exponentes	Primera Estimación (sym4) Ortogonal de los Exponentes	Segunda Estimación (db8) Ortogonal de los Exponentes
0.1	0.0311	0.0347	0.0411
0.3	0.0360	0.0360	0.0403
0.5	0.0347	0.0440	0.0431
0.7	0.0346	0.0437	0.0578
0.9	0.0393	0.0419	0.0659

Tabla 3.3

En promedio la desviación con las frames es un 12% menor que con la familia 1 y un 27% menor que con la familia 2, lo que constituye una evidencia a favor de la mejor fidelidad esperada de la estimación con el GMWFLP para computar la regularidad Hölder puntual, y de allí el espectro multifractal.

3.8 TESTS con CASCADAS BINOMIALES CON y SIN CHIRPS, y SERIES de ESPECTROS NO-CÓNCAVOS formadas por CASCADAS INTERCALADAS:

La performance de ambos métodos fue comparada en primer lugar en cascadas binomiales, cuyo comportamiento multifractal es conocido, para los valores del parámetro a (que enseguida describiremos) con a desde 0.52 hasta 0.98 (con paso 0.01) donde los valores admisibles de a corresponden a $0.5 < a < 1$ (no se tomaron valores demasiado próximos a 0.5 y 1 para evitar que los errores numéricos comenzaran a afectar las estimaciones).

En los gráficos que veremos se ilustra el caso $a = 0.75$, pero los resultados son muy similares para todos los valores de a en el rango descripto.

Una cascada binomial unilateral de longitud $2^\omega : x(k)$ con $k = 1 \dots 2^\omega$ se obtiene tomando $x(k) = a^{\phi(k-1)} (1-a)^{\omega-\phi(k-1)}$ donde $\phi(s)$ es el número de dígitos iguales a 1 en la expansión binaria del número s (y donde, cómo mencionamos, $a \in (0.5; 1)$).

Si por ejemplo $s = 27 = (11011)_2$ tenemos que $\phi(s) = 4$ (ver [Kan]).

En los ejemplos tomamos cascadas simétricas de longitud $2^{\omega+1}$, reflejando las cascadas de derecha a izquierda.

No es difícil probar que el espectro multifractal es, para $h \neq 1$:

$$d_f(h) = \frac{-\log_2(a^h + (1-a)^h)}{(h-1)}.$$

En la Figura 3.7, se ilustra el caso $a = 0.75$ (en series de longitud 2^{13}) y en la Figura 3.10 su espectro multifractal estimado con ambos métodos (pero los resultados son muy similares para todos los valores de a en el rango descripto).

En la Figura 3.8, observaremos el gráfico de una serie obtenida a partir de la respectiva cascada agregándole aditivamente una secuencia de 8 chirps de la forma: $Cte * (1 - t^2)^2 |t|^{0.5} Ch(t)$ donde $Ch(t)$ es una función cuya frecuencia aumenta desde frecuencia 0 a frecuencia 80 cuando $|t|$ va desde 1 a 0 y tiene una traza convexa en el plano tiempo-frecuencia; y su respectivo espectro multifractal en la Figura 3.11.

Como se ve en la Figura 3.10 y en la Figura 3.11, los espectros usando WL y usando GMWFLP no se ven casi afectados por la presencia de chirps, lo cual es teóricamente esperable, ya que los chirps mencionados tienen regularidad C^∞ en casi todo punto. Sin embargo, es el uso de los líderes wavelet lo que garantiza estos deseables resultados, ya que la gran mayoría de los métodos en uso (basados en coeficientes wavelet o q -módulos de continuidad) se ven notablemente alterados por la presencia de chirps.

A continuación exhibimos en la Figura 3.4 el gráfico del chirp utilizado, y en la Figura 3.5 el gráfico de la respectiva secuencia de 8 chirps:

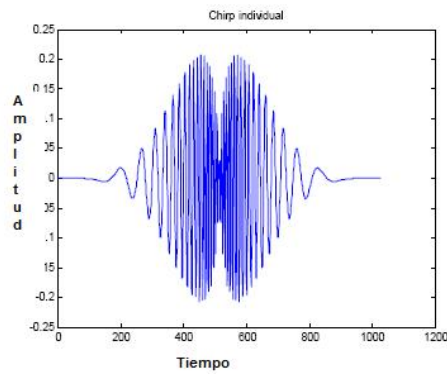


Figura 3.4

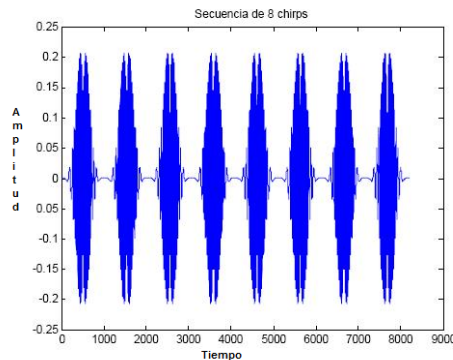


Figura 3.5

3.9 Una DISCUSIÓN sobre ESPECTROS NO-CÓNCAVOS:

Como vimos, si bien la mayoría de los métodos en uso utilizan una cantidad de hipótesis acerca de las funciones o señales con las que trata, hipótesis genéricamente conocidas como formalismos multifractales proporcionan **siempre** (salvo errores numéricos), espectros multifractales cóncavos (debido a que se apoyan en la Transformada de Legendre, lo que necesita una presunción de concavidad; pero no todas las señales o funciones tienen espectros realmente cóncavos).

En muchos casos el espectro debe ser efectivamente **no cóncavo**, y los métodos que usan formalismos multifractales sólo obtienen en el mejor de los casos su envolvente, o son del todo erróneos.

Ejemplo Teórico:

Veamos de construir un espectro no cóncavo (es decir, una señal s que lo tenga) de una manera un tanto sintética:

(a) Tomamos una señal f con un espectro cóncavo, por ejemplo una serie binomial $x(k) = a^{\phi(k-1)}(1-a)^{\omega-\phi(k-1)}$ de $N = 2^\omega$ números k con $k = 1, \dots, N$ y tomando un a adecuado, cuyos exponentes Hölder se encuentren en el intervalo $[0.4, 2.2]$ y digamos que el $sop(f) = [0, 1]$, ésto podemos obtenerlo siempre (ver [Kan]).

(b) Construimos una señal que tenga el mismo espectro desplazado en dos unidades, o sea, sus exponentes Hölder se encuentran en el intervalo $[2.4, 4.2]$, y digamos soportada en $[1, 2]$, que siempre es posible, pues basta componer con una traslación. Pero, ¿puede obtenerse realmente un corrimiento en el espectro?

Sí, pues, como por definición, $d(\alpha) = \dim(E_\alpha) = \dim\{x/H_f(x) = \alpha\}$, sólo hace falta encontrar g tal que $\forall x \in [0, 1]$ valga que $H_g(x) = H_f(x) + 2$, ¿es posible hallar g ?

Sí, porque como $H_f(x)$ es una función de exponentes Hölder es entonces límite inferior de funciones continuas y luego, $H_f(x) + 2$ es límite inferior de funciones continuas también y, (ver [An]), puede siempre construirse una función con una función de exponentes Hölder prescriptos, por una función que sea límite inferior de funciones continuas, y entonces:

$$\dim(E_{\alpha+2}(g)) = \dim(\{x/H_f(x) + 2 = \alpha + 2\}) = \dim(\{x/H_f(x) = \alpha\}) = \dim(E_\alpha).$$

(c) Llamamos $t(x) = g(x - 1)$ y resulta que $sop(t) = [1, 2]$ y $t(x)$ tiene sus exponentes Hölder en el intervalo $(2.4, 4.2)$.

(d) Ahora definimos $s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ t(x) & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$ y como los exponentes Hölder son disjuntos (la dimensión (no medida) es no aditiva), resulta que:

si $\alpha \in [0.4, 2.2]$ entonces $\dim(E_\alpha) = \dim(\{x/H_s(x) = \alpha\}) = \dim(\{x/H_f(x) = \alpha\})$
si $\alpha \in [2.4, 4.2]$ entonces $\dim(E_\alpha) = \dim(\{x/H_s(x) = \alpha\}) = \dim(\{x/H_t(x) = \alpha\})$
entonces el espectro de $s(x)$ es no cóncavo siendo su gráfico el que mostramos en la Figura 3.6:

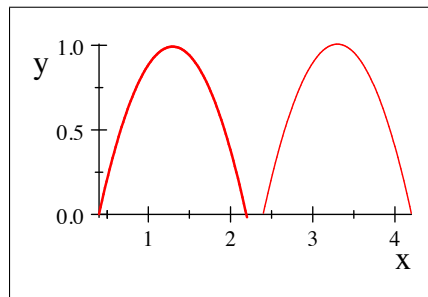


Figura 3.6

Después de este ejemplo teórico, volvamos a las estimaciones numéricas del espectro:

En la Figura 3.9 se estudia una serie obtenida de la siguiente manera: Se calcula una cascada binomial como mencionamos anteriormente mostrada en las Figuras 3.7 y 3.8, se genera una serie cuya regularidad en cada abscisa es igual al del respectivo punto de la cascada pero aumentado en cierto valor fijo (en nuestro caso es $\frac{4}{3}$, pero se obtienen resultados análogos con otros valores, lo suficientemente grandes).

Finalmente se genera una nueva serie, intercalando tramos (pequeños pero no despreciables) de la cascada y de la serie obtenida aumentando la regularidad de la cascada.

Como las dimensiones no se ven afectadas, claramente el espectro resulta no-cóncavo (la línea roja continua graficada en la Figura 3.12). El método de los WL, al basarse en la transformada de Legendre sólo puede capturar (aproximadamente) la cápsula cóncava del espectro real (la parábola aproximada dada por los asteriscos azules), y por su parte, el GMWFLP no tiene la limitación de la concavidad, y el espectro estimado (círculos verdes) sigue bastante ajustadamente al espectro teórico.

Veamos las Series y sus respectivos Espectros Multifractales:

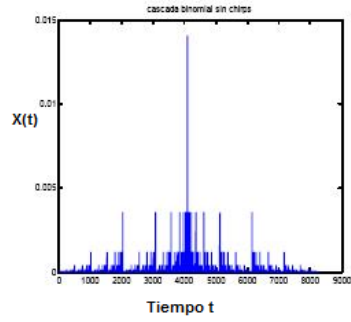


Figura 3.7

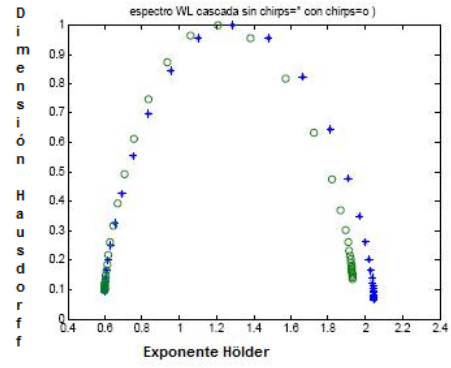


Figura 3.10

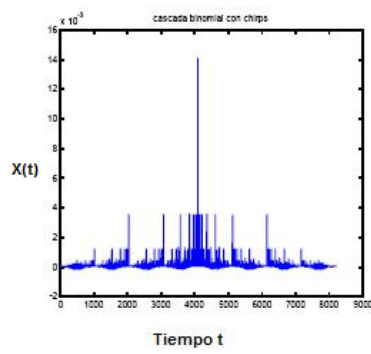


Figura 3.8

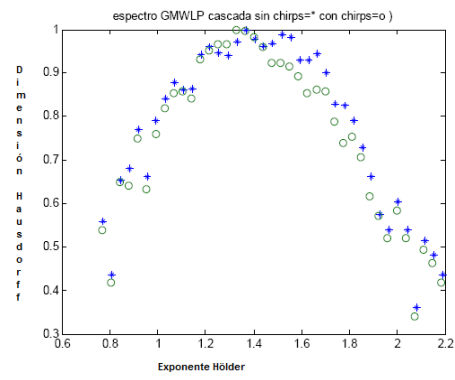


Figura 3.11

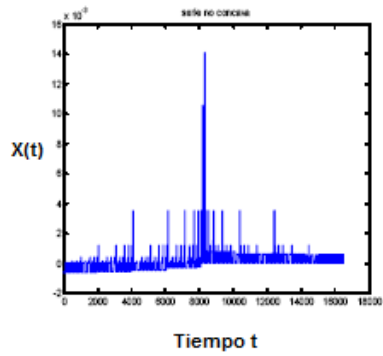


Figura 3.9

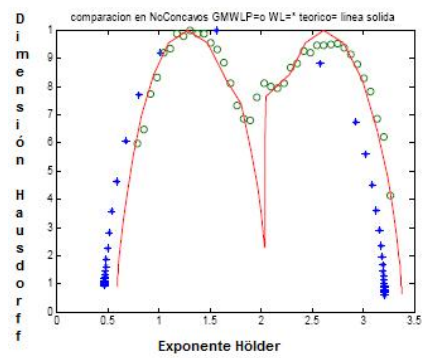


Figura 3.12

3.10 EJEMPLO DE SERIES BIOLÓGICAS: EEG DE UNA AUSENCIA CEREBRAL:

Un tipo de crisis principalmente generalizada de epilepsia según la Liga Internacional Contra la Epilepsia son las ausencias o el pequeño mal, consistentes en una interrupción abrupta de conciencia con parálisis temporal física, pero sin pérdida del equilibrio ni caídas, y con el mantenimiento de funciones involuntarias físicas. Las ausencias no crean, en general, un problema para los pacientes. Después de unos segundos bruscamente reestablecen la actividad previa, quedando un período negro.

Las tres etapas de una señal de EEG correspondiente a una ausencia cerebral son: la pre-tesis, la tesis y la post-tesis, como se muestra en la figura 3.13

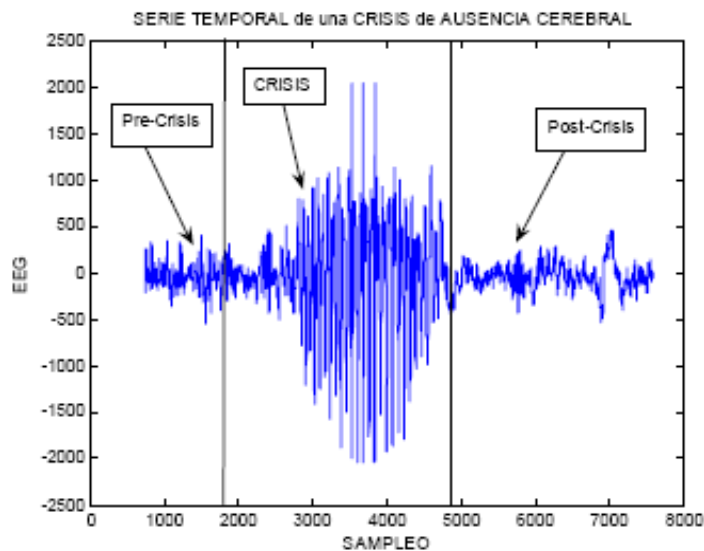


Figura 3.13

Como se muestra en la figura 3.14, los canales O1 y O2 son medidos sobre la región occipital, los canales P3 y P4 sobre la región parietal, los canales T3, T4, T5 y T6 sobre la región temporal, C3 y C4 sobre la región central, y F1, F2, F3, F4, F7 y F8 sobre la región frontal.

Las muestras fueron obtenidas cada $1/256$ segundos, y durante un tiempo total de $T = 30$ segundos aproximadamente. La señal anterior fue proporcionada por el canal 9 (CH9) destacado en la figura 3.14.

Construimos la secuencia de chirps modulados con los que perturbaremos la señal, usando el software Matlab 7.0 y sus versiones posteriores.

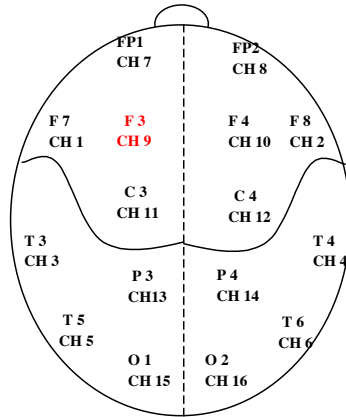


Figura 3.14

Tomamos el chirp base, cuya fórmula es $Ch(t) = \cos(f_0 + \frac{(f_1-f_0)}{t_1^2}.t^2)$ donde f_0 es la frecuencia inicial (en este caso 0), f_1 la frecuencia final (en este caso 2^6) y t_1 es el lapso de tiempo entre ambas frecuencias medidas en Hertz, exhibimos en la Figura 3.15 el mencionado chirp base:

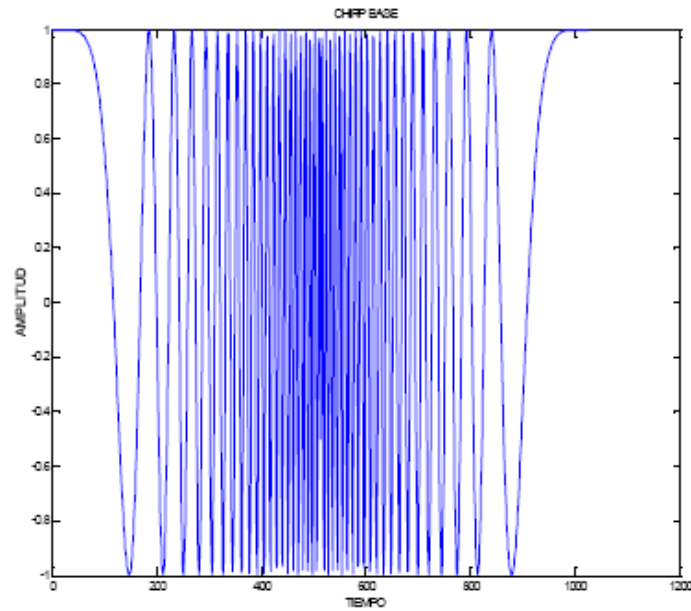


Figura 3.15

Mientras que la función moduladora es $FM(t) = e^{-20t^2} (1 - e^{-20t^2})^{\frac{1}{2}}$, siendo su gráfico el que exhibimos en la Figura 3.16:

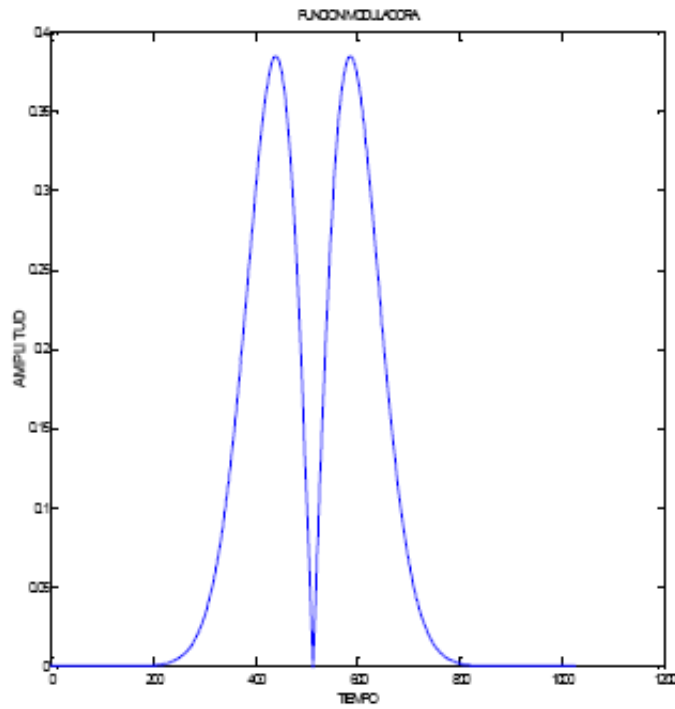


Figura 3.16

Obteniendo el chirp modulado dado por $ChM(t) = FM(t) \cdot Ch(t)$ que mostramos en la Figura 3.17:

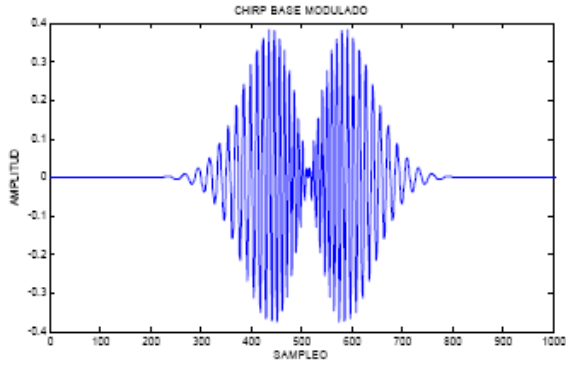


Figura 3.17

Perturbamos las señales agregando una secuencia de 6 chirps modulados como muestra la Figura 3.18, con baja amplitud en la señal de EEG, teniendo los chirps la forma que muestra la Figura 3.17:

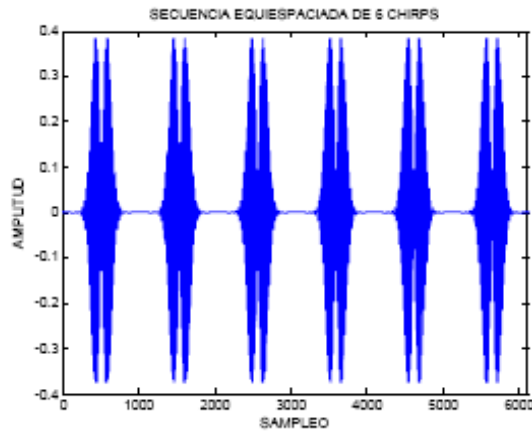


Figura 3.18

Cocluyendo que la simple observación del gráfico no permite distinguir la perturbación.

3.11 PROBLEMA:

Graficamos en las Figuras 3.19, 3.20 y 3.21 las señales de EEG a ser testeadas (ver [Car]), cuya longitud es $N=18432$, de un ataque epiléptico correspondiente a ausencias cerebrales con frecuencia de muestreo de 102.4 hz.

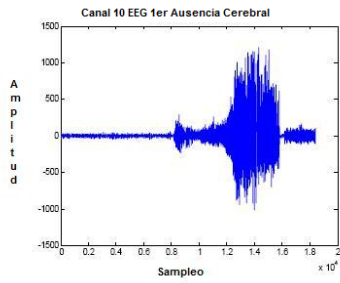


Figura 3.19

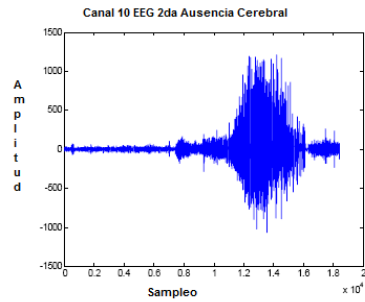


Figura 3.20

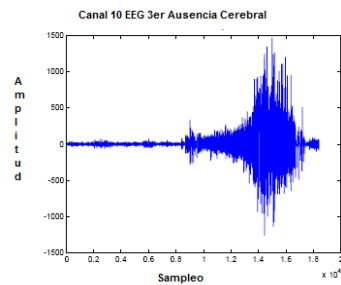


Figura 3.21

Nos interesa estudiar la parte del EEG previo a que la crisis se haga evidente, o sea, las Figuras 3.22, 3.23 y 3.24, para analizar la dinámica, y eventualmente prevenirla, en dichos tramos interactúan las actividades eléctricas de distintos

grupos de neuronas que están en diferentes fases, y con rangos de regularidad bien diferenciados lo que haría verosímil que el espectro sea No Cóncavo, en las Figuras 3.25, 3.26 y 3.27 respectivamente.

Por lo tanto parece adecuado analizarlo con el GMWFLP:

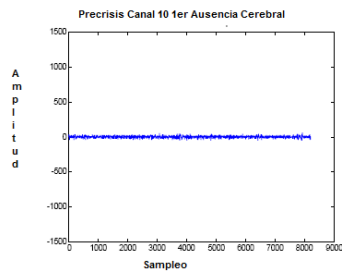


Figura 3.22

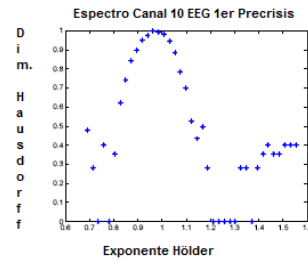


Figura 3.25

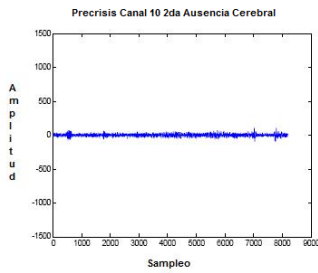


Figura 3.23

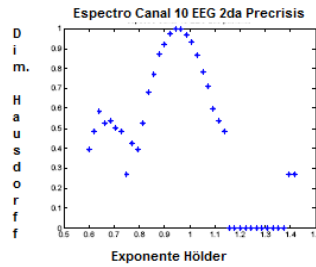


Figura 3.26

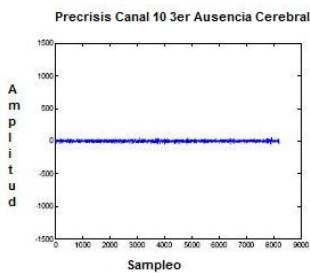


Figura 3.24

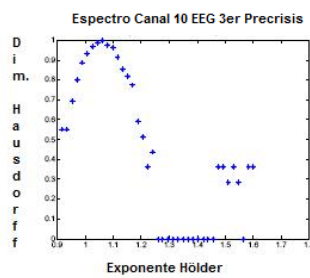


Figura 3.27

Concluyendo que efectivamente cada uno de los espectros multifractales es NO CÓNCAVO.

3.12 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

Ninguno de los algoritmos para calcular el espectro multifractal requiere una gran cantidad de recursos (ni los que consideramos aquí, ni cualquier otro conocido por nosotros) entonces dejaremos cualquier consideración sobre la asignación de memoria y desbordamientos de pilas y nos centraremos en estudiar la cuestión sobre el tiempo de ejecución.

Haciendo correr cualquier implementación precisa y razonable de los WL o el GMWFLP nos convencerá que éstos métodos son más rápidos que por ejemplo, el Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, que es de orden $O(N^2)$, mientras para los WL como para el GMWFLP la etapa más larga es la del propio cómputo de los coeficientes wavelet, que es de orden $O(N \log N)$, con una constante proporcional a la cantidad de nodos necesarios para representar la wavelet ortonormal requerida, que está relacionado con el número de momentos nulos necesarios para cancelar los polinomios con grado hasta la parte entera de la máxima regularidad Hölder de las señales.

En la práctica no encontramos regularidad Hölder mayor que 4 y las wavelet de Daubechies de orden 4 (como *db4* ó *sym4*) son suficientes (usamos *sym4* en los ejemplos con $4.4 - 1 = 15$ nodos).

Si quisiéramos analizar series especialmente suaves podríamos tomar *dbN* ó *symN* con $4N - 1$ nodos pero, en cualquier caso, no parece en absoluto necesario tomar N mayor que 8 (y 63 nodos).

Los WL o el GMWFLP necesitan unas $5N$ comparaciones de números de doble precisión, $O(N)$ sumas o diferencias y $O(N)$ productos adicionales, pero esto no incrementa el orden de estos métodos.

Resumiendo, tenemos para los ejemplos estudiados (cuya longitud es de 2^{13} ó 2^{14}) que los métodos de WL y de GMWFLP deberían ser aproximadamente $\frac{10}{15} \log_2(2^{13}) = 8.667$ ó $\frac{10}{15} \log_2(2^{14}) = 9.333$, es decir unas 9 veces más rápidos, lo que está de acuerdo con los ensayos experimentales que realizamos en la práctica.

Nota: Las señales analizadas en este capítulo son las usadas en [Car] como se mencionó oportunamente, provenientes del Centre of Excellence in Bioinformatics de Australia, en la persona del Dr W. Hyslop y el Dr R.L.L. Smith, formando parte The Australian EEG database.

Fin del Tercer Capítulo.

Capítulo 4: Filtrados Kalman de Señales de Potenciales Evocados

TESTS de CONTRASTACION versus DATOS SUBROGADOS

4.1 INTRODUCCION

Nuevas técnicas de imagen y señales permiten vigilar la función cerebral en las personas vivas. Ellas han abierto mundos de conocimiento acerca de la función cerebral normal y cómo cambia con la edad o con las enfermedades.

Una de estas técnicas se llama **tomografía por emisión de positrones**, o **TEP** de exploración (**PET**, sigla en inglés).

La TEP mide el flujo sanguíneo y metabolismo de la glucosa en todo el cerebro.

Cuando las células nerviosas de una región del cerebro se activan, el flujo sanguíneo y el metabolismo aumentan en esas regiones.

Estos aumentos se ven generalmente como colores rojos y amarillos en una TEP.

Las sombras azules y negras indican una disminución o falta de actividad dentro de una región cerebral.

Esencialmente, una TEP produce un “mapa” del cerebro activo.

Las exploraciones de la TEP se usan para ver lo que sucede en el cerebro cuando una persona realiza una actividad física o mental, descansa, duerme o sueña.

También se pueden inyectar productos químicos marcados con un rastreador que se encenderá durante las PET.

Estos rastreadores pueden seguir la actividad de los productos químicos cerebrales, por ejemplo los neurotransmisores como la dopamina y la serotonina.

Algunos de estos neurotransmisores se alteran con la edad, enfermedades y medicamentos.

Otra de las técnicas son los **Potenciales Evocados**, los que serán de nuestro interés y de ellos nos ocuparemos; ya que desde el descubrimiento en 1875 por Caton de la existencia de potenciales eléctricos en la corteza cerebral, y la posterior demostración por Berger en 1927 de que es posible registrar tal actividad eléctrica por medio de técnicas no invasivas, basadas fundamentalmente en el electroencefalograma (EEG), sucesivos desarrollos tecnológicos y experimentales han permitido profundizar en el significado funcional de tales Potenciales Eléctricos (ver [Go], [Gev]).

4.1.1.POTENCIALES EVOCADOS: Generalidades:

Los potenciales evocados cerebrales (PEs) consisten en fluctuaciones en el voltaje en uno o más electrodos ubicados en la cabeza que se producen a continuación de la realización de sucesos sensoriales, motores o cognitivos, de origen exógeno o endógeno.

En efecto, se ha observado que tras la presentación de un determinado tipo de estímulo (o eventualmente la ausencia de un estímulo esperado) se producen cambios mensurables en la actividad eléctrica que se puede registrar en el cráneo, cambios que adoptan la forma de picos o valles y se supone que nos informan acerca de los procesos cerebrales y cognitivos que subyacen.

Llamamos **componente** de un PE a una porción del registro de la actividad eléctrica cerebral, sensible a una manipulación experimental concreta, que se considera un reflejo de un proceso particular o de un grupo de procesos. En este sentido, un componente puede ser tanto un único pico como una secuencia de picos (ver [Col]).

En cuanto al sustrato fisiológico de los PES, se sabe que la actividad eléctrica registrada en el cuero cabelludo es la suma de los potenciales post-sinápticos generados por la despolarización e hiperpolarización de las células cerebrales.

Un ejemplo de su aplicación: se ha correlacionado negativamente con el nivel de inteligencia, es decir, las personas con un cociente de inteligencia alto suelen presentar PE de latencia más corta.

4.1.2 POTENCIALES EVOCADOS: Clasificación:

Se clasifican en 2 tipos:

- 1) **SENSORIALES (auditivos (Bera),Visuales,etc), y**
- 2) **COGNITIVOS (P300)**

Si bien estamos tratando también con potenciales cognitivos, las señales a las que específicamente se refiere el problema son de tipo sensorial auditivo.

Los potenciales evocados auditivos de tronco cerebral (BERA, por: brainstem evoked responses audiometry o audiometría por respuestas evocadas del tronco cerebral), consisten en la obtención de una serie de ondas, que nos indican la transmisión a través del nervio auditivo desde la cóclea hasta el cerebro.

Agradecemos a ADVANTEK S.A. por el software "AUDISCAN" usado en los PE que muestra la siguiente Figura 4.1:



Figura 4.1

La mecánica de la prueba es similar a la de un electrocardiograma o encefalograma, aunque en el caso del BERA, al paciente se le colocan una serie de electrodos en la región central y detrás de cada oreja y se le presenta un sonido (una secuencia de sonidos, realmente) por medio de unos auriculares, y el paso del mismo por distintas etapas del nervio acústico hasta el cerebro.

Los electrodos se colocan en el cuero cabelludo y en los pabellones auditivos, pegándose con pasta conductora y colodion. Hay que limpiar el área de registro para evitar interferencias y resistencias elevadas, como en el caso del EEG. Los potenciales cognitivos requieren la colocación de todos los electrodos de EEG, generalmente con un casco.

Los registros obtenidos de los electrodos se filtran y los valores pueden graficarse mediante una serie de ondas (I, II, III, IV, V, etc.) indicadas en la Figura 4.2, que se producen a un determinado tiempo estandarizado (dentro de ciertos márgenes) dependiendo del estado de la función acústica.

El PEA está constituido por ondas características que están bien definidas en sus diferentes etapas, algunas de las cuales se muestran en la figura 4.2:

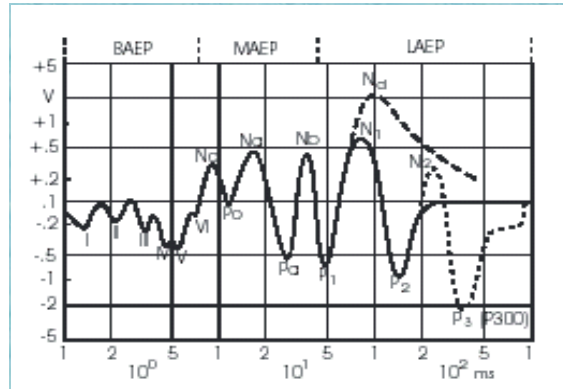


Figura 4.2

El primer grupo se presenta durante los primeros 10 ms después del estímulo y se conoce como PE de latencia corta o potencial auditivo de tallo cerebral (BAEP: Brainstem Auditory Evoked Potential) en el que se aprecian claramente seis puntos máximos (I, II, III, IV, V y VI) que se indican en la Figura 4.2.

Posteriormente se observa la respuesta auditiva de latencia media (MAEP: Middle Auditory Evoked Potential), donde destacan los máximos No, Na, Nb, Po y Pa.

Por último se tiene la respuesta tardía o de latencia larga (LAEP: Late Auditory Evoked Potential), donde aparecen los máximos P1, P2, P3, N1, N2 y N3.

Las precauciones y riesgos son las mismas de la electroencefalografía. Aunque son técnicas seguras e inocuas hay que conocer la posibilidad de problemas con los electrodos, y las molestias de los estímulos.

No requieren preparación ni son molestas, pero son largas y pueden cansar al paciente.

En ocasiones los estímulos eléctricos necesarios para los PEs pueden molestar, por la sensación de calambre o dolor.

4.2 POTENCIALES EVOCADOS: Sus Características Definitivas:

Donchin, Ritter y McCallum (ver [Do]) indican que un componente se define por una combinación de su polaridad, latencia, topografía y sensibilidad a las características de la manipulación experimental, cabe destacar que las características primera y tercera recogen información sobre la fuente fisiológica, mientras que las otras dos se refieren a la función psicológica (ver [Nu]).

1) POLARIDAD: es una propiedad de las moléculas que representa la desigualdad de las cargas eléctricas en la misma. Los componentes pueden ser de dos tipos: positivos o negativos.

En este sentido, denominaremos P a los componentes con polaridad positiva, y N a los que tengan polaridad negativa.

2) LATENCIA: ésta suele medirse tomando el tiempo en milisegundos desde la presentación del estímulo hasta la aparición del pico o del valle; esto es, hasta el punto de máxima o mínima amplitud dentro de una ventana de latencia concreta. Así, por ejemplo, el componente N400 es una onda negativa que presenta un pico aproximadamente a los 400 milisegundos después de la presentación del estímulo.

3) TOPOGRAFÍA: consiste en la distribución en el cuero cabelludo. El registro de la actividad eléctrica se realiza en varias localizaciones, lo que nos permite, entre otras cosas, detectar si existe un lugar en concreto donde aparece un determinado componente y si hay diferencias hemisféricas.

No obstante, debemos tener muy en cuenta lo siguiente: las fluctuaciones en el voltaje recogidas con un electrodo sobre el cuero cabelludo no han de tomarse como actividad originada por el tejido cerebral directamente subyacente a esa localización, es decir, que la topografía sobre el cuero cabelludo no suministra un mapa de la localización neuronal. De hecho, la actividad generada en un área concreta del cerebro puede haberse registrado en una localización situada a una considerable distancia de su generador.

4) SENSIBILIDAD: sensibilidad respecto de una determinada manipulación experimental. Este es el criterio más difícil, puesto que existen componentes bastante inespecíficos. El caso más notorio es el de la familia de los P300s, ondas que aparecen utilizando sucesos muy diversos.

4.3 Porqué es importante IDENTIFICAR la SEÑAL de FONDO?

Tanto los potenciales evocados sensoriales (sean auditivos, visuales, motores, etcétera) o los cognitivos, se manifiestan efectivamente mediante una respuesta eléctrica (los sensoriales tienen típicamente un tiempo de latencia del orden de 1 a 10 milisegundos mientras que los cognitivos lo tienen en el rango de 200 a 900 milisegundos).

Sin embargo esta respuesta se suele asumir que tiene un rango entre los 1 y 20 microvoltios (μV), contra las oscilaciones de magnitud de entre 50 y 100 microvoltios de la actividad eléctrica no evocada. Como consecuencia la relación señal a ruido (**SNR**) parece ser **prohibitivamente baja**.

El procedimiento usual consiste entonces en realizar **promediaciones** sobre un gran número de ensayos (frecuentemente cientos o miles de ensayos)

La presunción estandar es que de esa manera se cancelan las fluctuaciones, y de esta manera el resultado de dicho promedio es la respuesta evocada.

Por otra parte la diferencia entre la señal y los promedios constituirían el ruido que estaba sobrepuesto a la señal merced a la actividad cerebral no asociada a los eventos.

El resultado de las promediaciones es lo que habitualmente se evalúa para el diagnóstico del paciente, y sobre lo que se predica la posición y características de las ondas rotuladas como I, II, III, IV, V, etc. indicadas en la Figura 4.2.

Este protocolo está justificado ante todo empíricamente por su éxito en el estudio de diversas patologías, que en muchos casos pueden ser confirmadas mediante otros tipos de estudios.

Sin embargo es interesante reconsiderar este análisis por varios motivos:

Por un lado en muchos casos el tiempo de espera que supone realizar centenares o millares de ensayos es indeseable. Incluso a veces, y en especial en los cognitivos, debido a su mayor latencia, es casi intolerable.

Cabe considerar también la incomodidad del paciente, la eventual urgencia, en particular teniendo en cuenta un posible uso de evaluación de la función cerebral durante cirugía o post-quirúrgica (si pudiera), eludiendo las promediaciones excesivas, hacerse la diagnosis en tiempo real.

En este sentido, tenemos algunos resultados, acerca de la posibilidad de realizar una variante no-lineal de un filtro de Kalman sobre un número pequeño de ensayos (de 10 a 60 aproximadamente) obteniendo resultados aparentemente por lo menos tan fiables como los que se obtienen habitualmente sobre cientos o miles de ensayos.

Por otra parte, hay varias razones en contra de la interpretación habitual acerca de la contribución de la actividad cerebral, evocada y no evocada, a los promedios, y a la supuesta componente de ruido en estas series: Miremos primero la cuestión del supuesto ruido residual.

4.4 PROBLEMA de las PROMEDIACIONES: Posibles utilidades de poder extraer información con pocos trials:

La hipótesis nula aducida para apoyar esta técnica es que la actividad eléctrica no asociada a los ERPs variará aleatoriamente con esperanza 0, y que al promediar una gran cantidad de trials los promedios tenderán (de acuerdo a la Ley de los Grandes Números) al valor esperado que correspondería a la respuesta del potencial evocado.

En tal caso, restando de dichas señales el promedio, el cual presuntamente corresponde al valor real de los potenciales evocados, debería obtenerse una serie de valores correspondiente a una realización de un proceso estocástico estacionario dado por una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas y equidistribuidas (o en el peor de los casos, a un proceso de Markov de orden n , con n no mayor a la más baja frecuencia no nula correspondiente al filtro pasabanda asociado a la conversión A/D que se use al tomar el EEG).

Teniendo en cuenta ello la función de autocorrelación de tales señales debería valer 1 en tiempo 0 y debería corresponder a una sucesión de variables con distribución $N(0, \frac{1}{L})$, donde L es la longitud de la serie considerada.

Una hipótesis explicativa supone que la respuesta evocada real tiene picos de mayor amplitud y menor longitud que las promediaciones.

Debido a las fluctuaciones aleatorias en la latencia e intensidad, las promediaciones no sólo cancelarían las contribuciones de la actividad no evocada sino que además suavizarían y extenderían las ondas de las respuestas evocadas.

Veamos en la Figura 4.3 un ejemplo sintético:

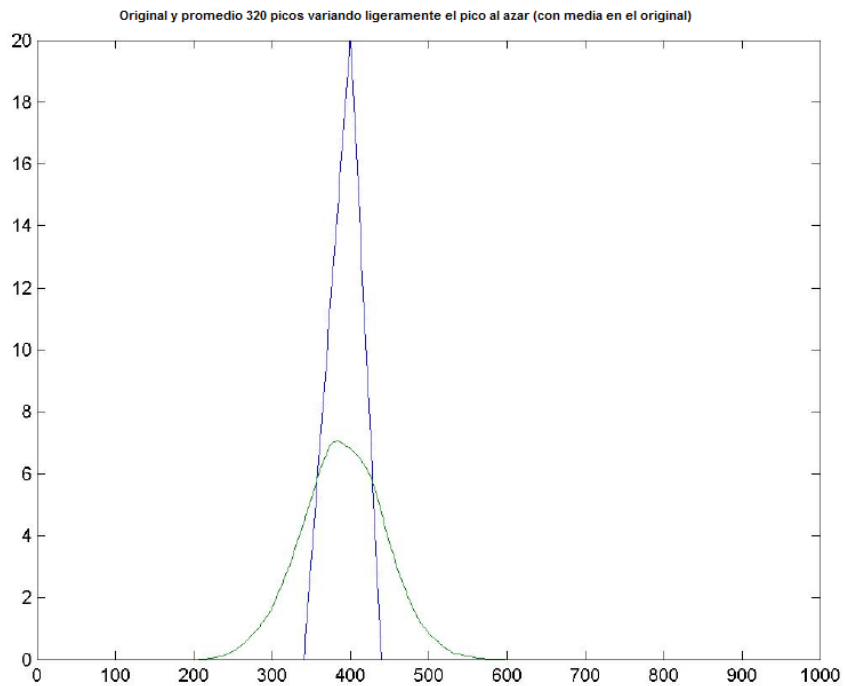


Figura 4.3

Un hecho que apoyaría esta hipótesis, es que algunos ensayos, que exhibimos en las Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9, tienen un esquema de ondas semejante (visto con indulgencia) al de las promediaciones que exhibimos en la Figura 4.4, pero con amplitud mayor:

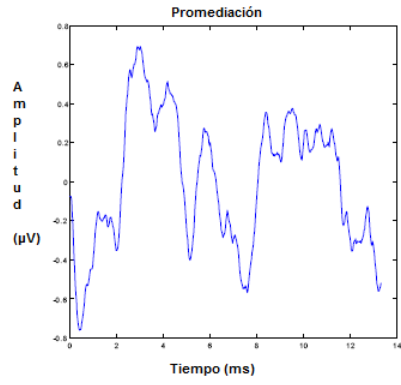


Figura 4.4

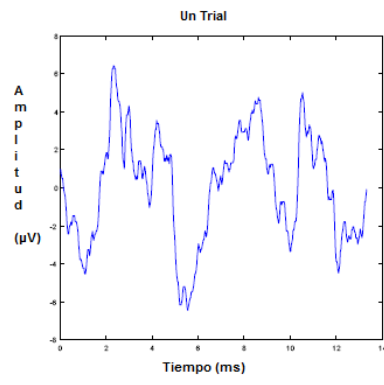


Figura 4.5

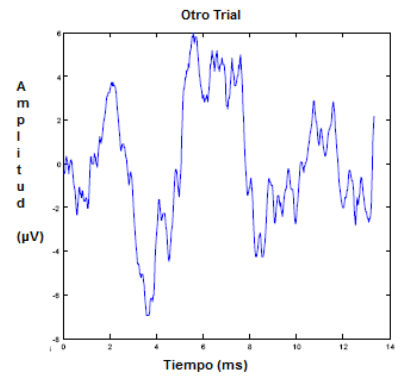


Figura 4.6

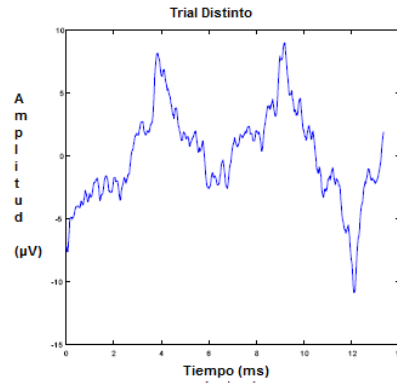


Figura 4.7

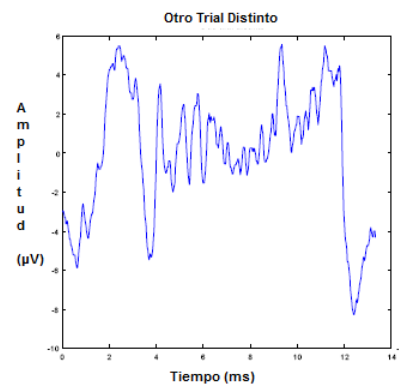


Figura 4.8

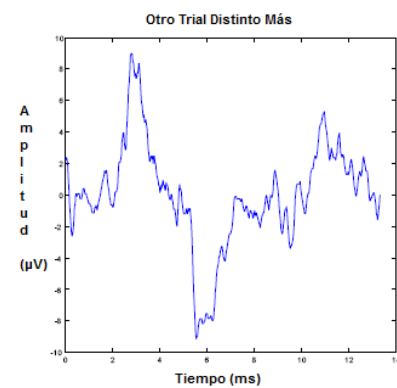


Figura 4.9

Pasemos entonces a la cuestión de la caracterización de las señales:

De una fuente compleja, como el cerebro, uno puede esperar ya sea series que puedan ajustarse adecuadamente a modelos lineales como series con marcadas características de no-linealidad.

Una técnica útil para decidir la cuestión de la linealidad o no-linealidad es el *Método de Datos Subrogados*, ver [Th].

Para la generación de datos subrogados procedemos a considerar la transformada de Fourier de la serie de valores reales $y(t)$, que denotaremos

$$Y(\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\theta(\omega)}.$$

Se perturban las fases $\theta(\omega)$ aleatoriamente pero manteniendo la simetría, es decir se sortean sólo las frecuencias positivas y se toma consecuentemente las negativas de modo que $Y(\omega) = Y(-\omega)$.

Así la antitransformada de la nueva Y obtenida será una serie de valores reales (recortando las pequeñas componentes imaginarias que aparezcan por errores de discretización), $\tilde{y}(t)$ que tendrá el mismo espectro de potencias y la misma función de autocorrelación que y (por el teorema de Wiener-Khinchin).

Pero cualquier relación no-lineal entre los puntos habrá sido aleatorizada.

Cualquier test que tenga los mismos resultados en los datos originales y los subrogados solo será sensible a la estructura lineal de los datos.

Además, como la representación general con un modelo lineal ARMA puede en teoría obtenerse directamente a partir de la función de autocorrelación (a partir de las ecuaciones de Yule-Walker, aunque en la práctica la estimación numérica del orden y de los parámetros requieran distintos procedimientos recursivos).

Un comportamiento disímil entre los datos subrogados y la serie original indicaría que no es posible representar adecuadamente las series mediante un modelo lineal, a pesar de la similitud aparente de las series originales y subrogadas (ver [Sc]).

Veamos como ejemplo la serie original en la Figura 4.10 y los datos subrogados en la Figura 4.11:

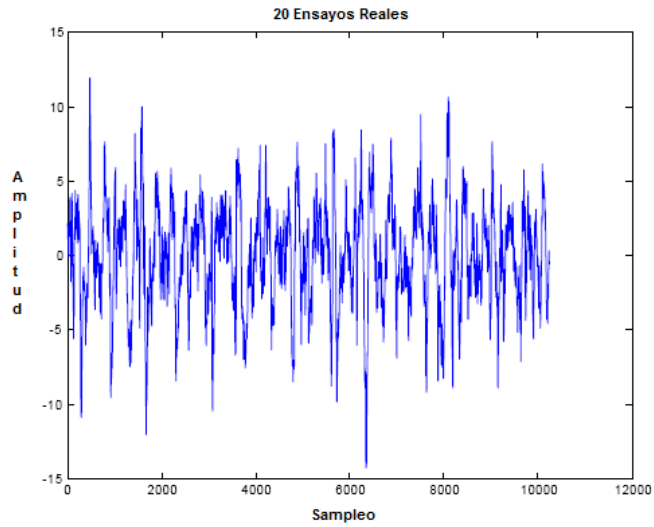


Figura 4.10

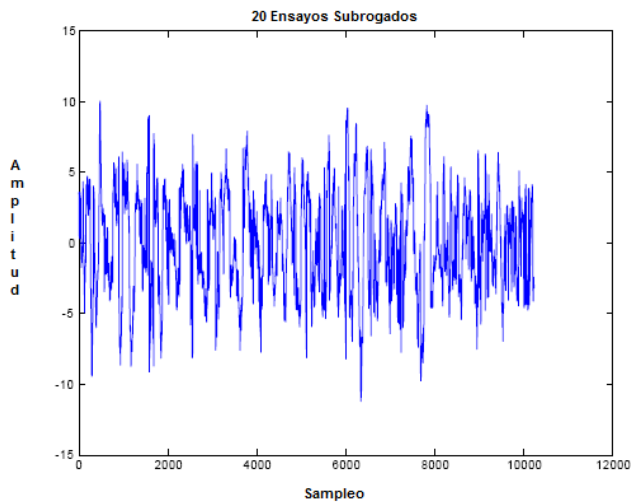


Figura 4.11

Una primera cuestión que se observó es que las respectivas promediaciones muestran una correlación positiva considerablemente más alta para las series de PE que para las series subrogadas (se entiende que las promediaciones de cada serie con los ensayos de las mismas), lo cual es muy afortunado.

La correlación es de alrededor de un 70 % para las series de PE (ya sea para las promediaciones de todos los ensayos o para promedios de algunas decenas de ensayos tratados con una versión no-lineal de un filtro de Kalman bayesiano) y de menos de un 60 % para las series subrogadas y sus respectivas promediaciones.

De allí que la distribución de ensayos de Bernoulli de una probabilidad de obtener más del 50 % de éxitos sobre 30 ensayos con probabilidad superior al 99.3% en el caso de las PE (lo que se propone para validar un test) y de sólo el 90% en el caso subrogado.

Asumiendo la no-linealidad se plantea el problema de la elección de algún modelo, preferentemente paramétrico, para intentar su representación.

Un análisis de la dinámica no-lineal ya no puede apoyarse en la función de autocorrelación.

Un sustituto usual en el caso no-lineal lo constituyen las entropías muestrales:

Dado un paso τ , se estima (mediante la densidad de las apariciones) la probabilidad de los valores cercanos a tiras con paso τ .

Sea $\vec{y}_\tau = (y(t), y(t - \tau), y(t - 2\tau), y(t - 3\tau), \dots, y(t - (d - 1)\tau))$, y sea $p_d = p(\vec{y}_\tau)$ (donde d es tan largo como permita la longitud de la serie, debe serlo bastante para que tenga verosimilitud) y se calcula la entropía: $\sum p_d(\vec{y}_\tau) \ln(p_d(\vec{y}_\tau)^{-1})$.

En caso de no haber correlaciones de largo alcance significativas, la entropía debería ser aditiva entre tiras de valores lo suficientemente apartadas para garantizar la independencia. Sin embargo los resultados obtenidos no son consistentes con esa idea. La tabla 4.12 que sigue muestra algunos ejemplos típicos:

Entropía A	Entropía B	Entropía (A,B)
2.7153	2.8438	3.0930
2.7819	2.7213	3.0845
2.6227	2.6538	2.9292

Tabla 4.12

Puede suponerse entonces la posibilidad de que haya correlaciones de considerable alcance que provoquen la no-aditividad. Sin embargo, podría recuperarse eventualmente la aditividad suponiendo que la dinámica de estas series es no-extensiva. (ver [Tsa] Mandelbrot law: *Cervantes's Don Quijote*, al conocer al Dr Tsallis en la METIBI 2008: 2do Simposio Regional de Mecánica Estadística, Teoría de la Información y Biofísica, La Falda, Pcia. de Córdoba, Argentina)

Es posible definir operaciones sobre conjuntos numéricos (que eventualmente pueden inyectarse en los reales, denotados \mathbb{R}_q) con operaciones definidas de manera de que se recupere la aditividad.

Resumidamente, llamaremos $\mathbb{R}_q = \left(\frac{-1}{1-q}, +\infty\right)$, o según notaremos $(-\infty_q, +\infty_q)$ al conjunto $\left(\frac{-1}{1-q}, +\infty\right)$ dotado de las siguientes operaciones que hacen de él un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 1: $(\mathbb{R}_q, \oplus_q, \odot_q)$ donde $\oplus_q : \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_q \rightarrow \mathbb{R}_q$, y $\odot_q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_q \rightarrow \mathbb{R}_q$.
Y donde además valga que: $a \oplus_q b \xrightarrow{q \rightarrow 1} a + b$, y donde $\lambda \odot_q b \xrightarrow{q \rightarrow 1} \lambda \cdot b$

Se puede verificar lo pretendido definiendo:

$$a \oplus_q b := a + b + (1 - q) ab$$

$$\lambda \odot_q a = \frac{(E_q(a))^\lambda - 1}{1 - q}, \text{ donde } E_q(a) := (1 + (1 - q)a).$$

Nótese que los elementos neutros $0_q = 0$, $1_q = 1$ y los opuestos $\ominus_q a = -1 \odot_q a$, $\forall a \in \mathbb{R}_q$.

Las estructuras descriptas pueden enriquecerse con diversas definiciones de métricas, medida, diferenciabilidad, etc.

Entre otras cosas se define además una función q -logaritmo:

$$\ln_q(\cdot) : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_q \text{ dada por: } \ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}.$$

Un subanillo de q -enteros:

$$n_q = n \odot_q 1 = \frac{(E_q(1))^n - 1}{1 - q} = 1 + (2 - q) + (2 - q)^2 + \dots + (2 - q)^{n-1}.$$

Una q -entropía: $S(A) = \sum_{i \in N_A} p_i \cdot \ln_q(p_i^{-1})$. Para $q = 1$ (claramente $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ tenemos la definición usual: $\sum_{i \in N_A} p_i \cdot \ln(p_i^{-1})$)

Extendiendo la definición para sistemas dinámicos no-lineales (de repulsores del tipo cookie-cutter, o atractores obtenidos a partir de IFS: Sistemas Iterados de Funciones (ver [Fal], [Fa2])) tenemos la q -entropía definida por:

$h_q(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i \in I_k} p_i \cdot \ln_q(p_i^{-1})$, donde $\bigcup_{i \in I_k} X_i$ es el pre-fractal correspondiente al repulsor de f , el inverso del IFS.

Esto es posiblemente útil como modelo de sistemas reales donde la entropía muestral sea no-extensiva (pero quizás sí q -extensiva [Tsa]).

Es posible probar que el límite en la definición de la q -entropía de tales sistemas dinámicos siempre existe.

Esto sugiere la posibilidad de tratar de representar las series a partir de un modelo no-lineal pero al menos q -lineal, es decir con variables que se muevan en \mathbb{R}_q .

Desde luego, hay varias maneras de plantearlo.

Una posibilidad es suponer que los valores de la serie están en \mathbb{R}_q .

Esto puede verse que equivale a una transformación a veces usada sobre las series de tiempo para su análisis (las transformaciones de Box-Cox).

Otra idea posible es suponer que el muestreo corresponde a intervalos q -equiespaciados (asumiendo que la regresión de las respuestas no es pareja en el tiempo, por ejemplo, quizás, por la saturación local de iones en los espacios intersinápticos).

Teniendo en cuenta esa idea, podemos aprovechar las definiciones naturales de q -traslaciones, q -dilataciones y q -enteros para definir átomos (wavelets) para aplicaciones de \mathbb{R}_q en \mathbb{R} , a ser utilizadas en el análisis de tiempo-frecuencia (tiempo-escala) de las series.

A partir de la medida de \mathbb{R}_q puede definirse el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_q}$ de funciones de cuadrado sumable: $L^2(\mathbb{R}_q, \mathbb{R})$.

Luego se elegirá $\psi \in L^2(\mathbb{R}_q, \mathbb{R})$ de modo que definiendo:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi((2^j \odot_q x) \ominus_q k) \text{ se pueda asegurar que } \forall f \in L^2(\mathbb{R}_q, \mathbb{R}), \\ \exists (a_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) : f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{jk} \cdot \psi_{jk}(x).$$

Realmente, ya que $J : (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \oplus_q, \odot_q)$, dada por $J(x) = \ln_q(e^x)$ (J transporta las operaciones), y su inversa $J^{-1} : (\mathbb{R}_q, \oplus_q, \odot_q) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$ resultan isomorfismos para las estructuras mencionadas, tales wavelets podrían definirse pidiendo que $\psi \circ J$ sea una wavelet de $L^2(\mathbb{R})$ ya que:

$$\psi((2^j \odot_q x) \ominus_q k) = \psi \circ J \circ J^{-1}((2^j \odot_q x) \ominus_q k) = (\psi \circ J)(2^j x - k).$$

4.5 FILTROS TIPO KALMAN PARA PROCESAMIENTO DE SEÑALES DE P.E.

El filtro de Kalman es un algoritmo de procesamiento de datos recursivo que incorpora toda la información que se le suministra para determinar el filtrado (ver [Kal1] y [Kal2]).

Como es recursivo de 1er orden no precisa mantener los datos previos, lo que facilita su implementación en sistemas de procesado en tiempo real.

En el caso del modelo lineal el Kalman es óptimo (minimiza el E.C.M.)

En los casos no-lineales no siempre puede garantizarse la optimalidad (y proporcionar un filtro alternativo), aunque de todas maneras el filtro de Kalman suele tener un desempeño bastante bueno si la no-linealidad no es excesiva.

Esto se debe probablemente al esquema que incorpora la corrección de los pronósticos teniendo en cuenta los errores de predicción a posteriori.

Dados un vector de estado oculto $X(t)$, y un vector observable $Y(t)$, tales que:

$$X(t) = A(t-1) * X(t-1) + \eta(t) \\ Y(t) = B(t) * X(t) + \varepsilon(t)$$

Aquí: $A(t)$ y $B(t)$ son matrices de transición y $\eta(t)$ y $\varepsilon(t)$ ruidos aditivos.

El filtro de Kalman opera a partir de un valor inicial supuesto para $X(1)$ (por ejemplo $B(1)^{-1}Y(1)$) y debe conocerse para todo t (o proponerse para todo t) las matrices $A(t)$, $B(t)$, y las matrices de covarianza de $\eta(t)$ y $\varepsilon(t)$.

A partir de allí en el paso t se hace una estimación a priori de $y(t+1)$ y de $x(t+1)$, que denotaremos $\hat{y}(t+1/t)$ y $\hat{x}(t+1/t)$, se observa el verdadero valor de $y(t+1)$ y se hace una nueva estimación corregida (a posteriori) de $x(t+1)$, que denotaremos $\hat{x}(t+1/t+1)$.

Además se actualizan las matrices que se usan para estimar las ganancias de y y respecto de x y las de transición de los errores de medición y estimación.

En nuestra implementación, hemos agregado la posibilidad de incorporar una componente de tipo Bayesiano, realizando un promedio ponderado móvil de los resultados con una señal patrón ideal que se espera, aproximadamente, de las señales de potenciales evocados (que se va reforzando o debilitando a partir de la evidencia que se va obteniendo progresivamente).

Armemos un esquema:

Las matrices A_{t-1} y B_t son las que vinculan la variable observable y la oculta:

$$\begin{aligned}x_{t+1/t} &= A_{t-1}.x_{t/t} \\ y_{t/t-1} &= B_t.x_{t/t-1}\end{aligned}$$

Las matrices E son las matrices de covarianza de error cometido:

$E_{1/0}$ es una estimación inicial (usualmente nula) y luego se actualiza iterativamente:

$$\begin{aligned}E_{t/t} &= (I - K_t.B_t).E_{t/t-1} \\ E_{t+1/t} &= A_t.E_{t/t}.A_t^T + N_t^x \\ K_t &= E_{t/t-1}.B_t^T.(B_t.E_{t/t-1}.B_t^T + N_t^y)^{-1}\end{aligned}$$

es la clave.

Se designa como la matriz de ganancia de Kalman, y se define de esta manera para cumplir: $E_{t/t} = \langle (x_t - x_{t/t})(x_t - x_{t/t})^T \rangle$

Las matrices N_t^x y N_t^y son las matrices de covarianza de los ruidos aleatorios η_t y ϵ_t .

El esquema es el que mostramos en la siguiente Figura 4.13:

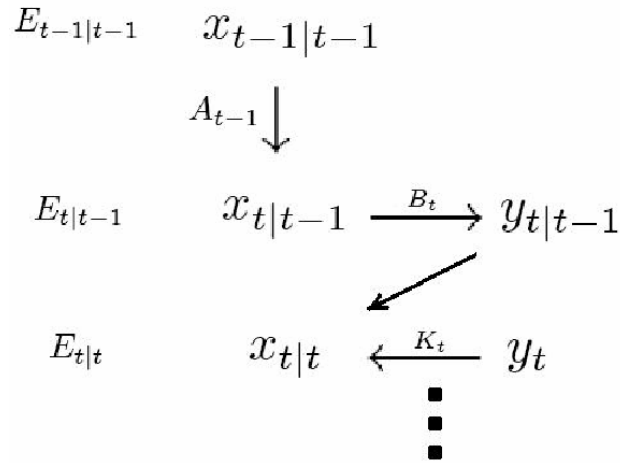


Figura 4.13

Nosotros, como tenemos los datos segmentados en trials, incorporamos una variante "Bayesiana" de la estimación Kalman de los potenciales evocados, ya que vamos aplicando el filtro a los distintos trials (esperando necesitar pocos) que se van incorporando a nuestros datos, y después vamos construyendo nuestra estimación de la respuesta usando una ponderación entre la respuesta estimada por las etapas previas y cada nuevo trial que se mide.

4.6 Resultados parciales de nuestra experiencia, aún limitada, con ejemplos reales

Hemos realizado algunos ensayos sobre casos reales con resultados promisorios, pero aún parciales por lo que preferimos postergar la exposición de algunos detalles hasta que la evidencia sea suficiente.

Esencialmente los ensayos discurren como sigue:

Se prepara el sujeto como en una medición de potenciales evocados cognitivos, 16 electrodos en posiciones habituales, aunque por ahora sólo hemos trabajado con las mediciones de los canales centrales Fz, Pz y Cz; en un ambiente aislado, sin estímulos visuales notorios, sin ruidos exteriores y con auriculares (se le explica previamente al sujeto la naturaleza del experimento, cabe realizar la comparación en los resultados con sujetos que desconozcan esto, aunque aún está pendiente), se mide al principio, como referencia, por algunos segundos sin sonido, y a continuación el sujeto escucha, frase a frase, una corta historia.

Por ahora, se trabaja con una pequeña batería de historias (sujeta a futura ampliación), de las cuáles sólo algunas de ellas tienen, en alguna parte del nudo del discurso, una frase incongruente con la línea narrativa que hay hasta ese punto.

También, aparte, a fines de una eventual correlación, se hace un estudio de P300 odd-ball habitual, con estímulos sonoros frecuentes e infrecuentes.

Según los resultados obtenidos con los sujetos analizados hasta ahora, las señales filtradas con Kalman (una versión localmente lineal que hemos desarrollado teniendo en cuenta una base de datos de test que hemos considerado previamente de forma independiente), sugiere que incluso pequeñas cantidades de promediaciones de las señales filtradas de aquellos tramos correspondientes a los 2.5 segundos posteriores a la emisión de cada frase proporciona resultados apreciablemente distintos según si la frase es coherente o no con la línea narrativa, en períodos de latencia de alrededor de los 600 milisegundos a los 1400 milisegundos, registrándose una “mismatch negativity” en el caso de que la frase sea inconsistente con el discursos previo.

A continuación, algunos gráficos obtenidos de las experiencias realizadas en tal sentido.

En la Figura 4.14 exhibimos en forma sincronizada la señal (en color azul) y las frases (en color verde, con marcas cortas para las frases coherentes y marcas largas para las frases no-coherentes):

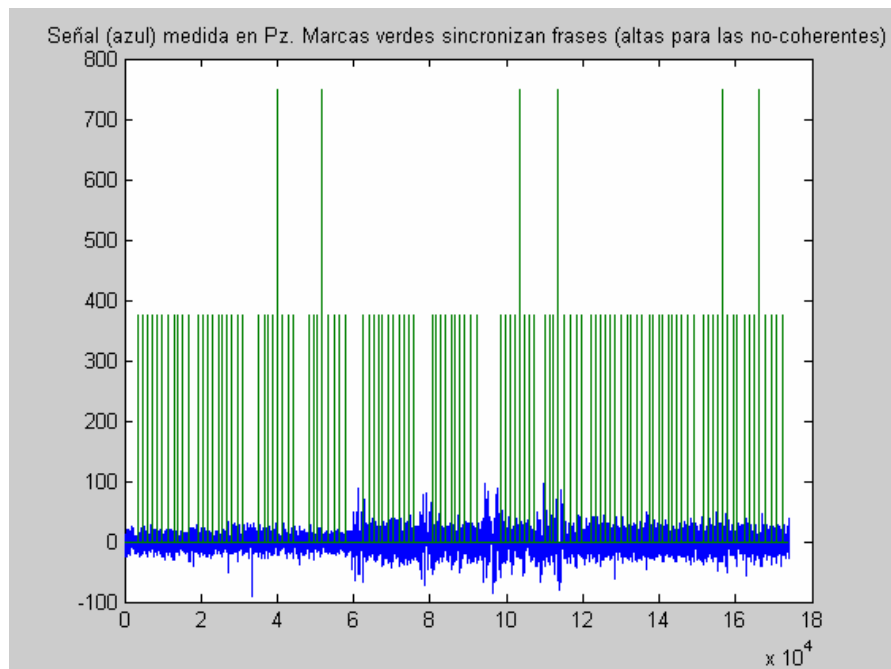


Figura 4.14

En la Figura 4.15 exhibimos la respuesta (filtrada) tras el estímulo de frases no-coherentes:

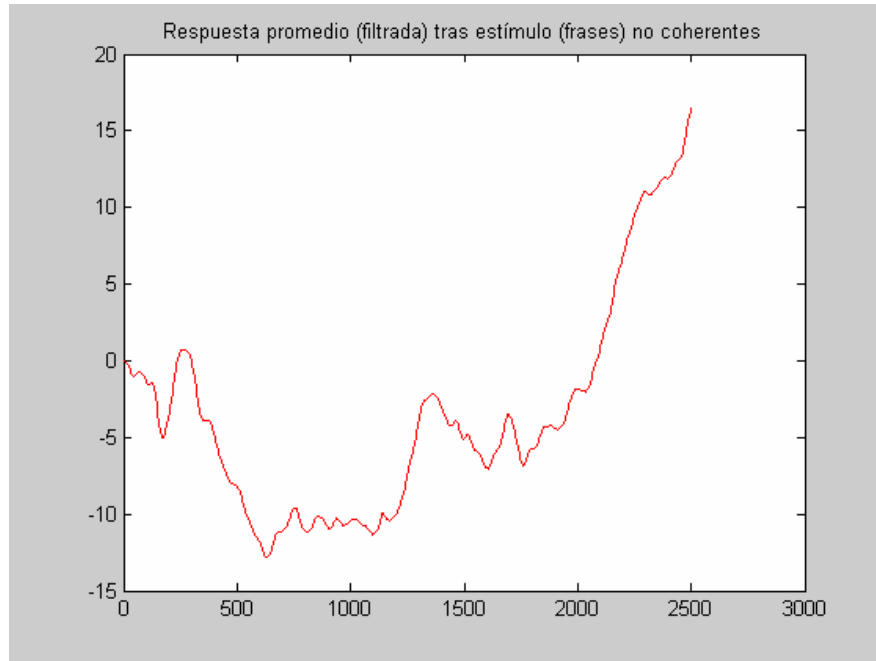


Figura 4.15

Evidenciándose una “mismatch negativity” en el caso de que la frase sea inconsistente con el discursos previo.

Tengamos en cuenta que es difícil precisar el tipo de modelo estocástico que siguen las señales eléctricas de los electrodos involucrados en los PE, y la evidencia parece apuntar a que los modelos lineales ofrecen ajustes mediocres.

En particular, si bien no tratamos de modelar la función de distribución de la fuente de ruido (y en particular no damos por sentado que sea ni siquiera aproximadamente normal), pero sugerimos el tratamiento de la misma con *filtros tipo Kalman* porque al ser filtros de "estimación a priori-corrección-estimación a posteriori" suelen proporcionar prestaciones aceptables, incluso en casos no normales.

Además, realizando un número modesto de promediaciones, el ruido promediado se va normalizando, y el filtro rápidamente provee respuestas muy promisorias, a nuestro juicio.

En la Figura 4.16 exhibimos a modo comparativo, promedios de conjuntos de seis frases coherentes (en color azul) y no-coherentes (en color rojo):

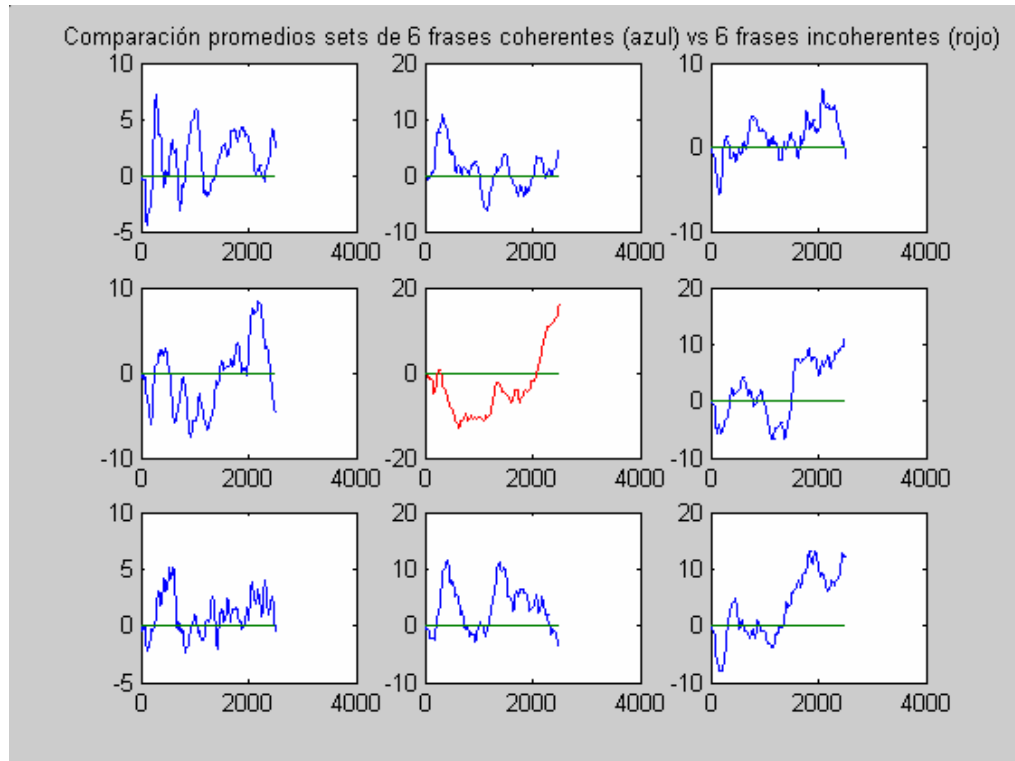


Figura 4.16

Destacándose en el centro la “mismatch negativity” en el caso de que la frase sea inconsistente con el discursos previo, como afirmamos anterioremente.

Agradecemos a FLENI (Fundación para la Lucha contra las Enfermedades Neurológicas de la Infancia), en la persona del Dr Horacio García por proporcionarnos el acceso a los Potenciales Evocados que su personal registró usando el software "AUDISCAN" desarrollado por la empresa Advantek S.A. como mencionamos anteriormente, permitiéndonos presenciar dichos registros.

Fin del Cuarto Capítulo.

Capítulo 5: Conclusiones

5.1 CONCLUSIONES acerca del CAPÍTULO 2:

El análisis y la construcción del Formalismo Multifractal que permite la Estimación numérica de los Espectros Multifractales desarrollados en el tercer capítulo, es posible gracias a que esa teoría está soportada en los Espacios de Hölder, de allí la importancia que estos espacios tienen para los mencionados resultados, se puede ver [An], [Ar], [Da] pág 299, [Jf1], [Jf2], [Jf3], [Jf4], [Jf5], [Jf7], [Jf8], [Jf9], [Mak], [Te], [To], [Ve], [Wen], [Xu].

En relación a lo expuesto acerca de los Módulos de Continuidad, Yves Meyer & Stéphane Jaffard señalan como *Problema Abierto* si la condición (\spadesuit), es la condición Necesaria y Suficiente para la Caracterización de los Módulos Uniformes de Continuidad mediante el decaimiento de los $\|\Delta_j(f)\|_\infty$ (ver [Jf5]).

Muchos otros aspectos hacen a la gran importancia que los Espacios de Hölder tienen, en sí mismos, topológicamente, su caracterización térmica (semi-grupos del calor y de Poisson) y demás, pero quisimos exponer una de sus aristas más conectada con la presente tesis por lo mencionado anteriormente; aunque también lo son para otro tipo de espacios como los de Besov y los espacios de Sobolev (ver [Jf5]), y sus múltiples aplicaciones, a modo de ejemplo también se puede ver [Ta] 2017, [Kok] 2016, [Sh].

5.2 CONCLUSIONES acerca del CAPÍTULO 3:

- Además de las ventajosas consideraciones mencionadas en 3.12 acerca de la Complejidad Computacional, destacamos que:
- Los exponentes Hölder de cada etapa de la señal son indicadores significativos de los distintos comportamientos de la irregularidad de la serie, lo que sugiere considerarlos para distinguir las etapas de la misma.
- Los ensayos realizados anteriormente sugieren que efectivamente el GMWFLP es preferible para analizar las series de EEG sin perder información relevante que resulta difusa por los métodos que usan la Transformada de Legendre, ya que no permite visualizar espectros No-Cóncavos.
- Respecto a esta cuestión, según Arnaud Durand: (ver [Du]), se puede ver que funciones obtenidas a partir de coeficientes wavelet correlacionados por cadenas de Markov en el toro tienen espectro aleatorios no cóncavos, y series con singularidades oscilantes en casi todo punto del toro.

- Al disponer de una señal discreta para el análisis cada método estima el espectro introduciendo hipótesis acerca del comportamiento de los valores no muestreados. En el caso de los métodos que usan la Transformada de Legendre la concavidad de la función de escala equivale a una presunción de autosimilaridad cuanto menos aproximada en todas las escalas.
- Por su parte el GMWFLP asume que se puede estimar razonablemente la distribución de los exponentes Hölder a partir de un histograma lo suficientemente fino, lo que asume que la función de exponentes Hölder tiene no sólo variación acotada, sino que el diámetro de la partición considerada es lo suficientemente pequeño respecto de esa variación como para estimar la densidad con una precisión razonable.
- Los chirps incorporados, a pesar de tener una amplitud considerable, no afectan de manera decisiva la función de exponentes Hölder, y que podemos obtener a partir de la señal mixta conclusiones similares respecto de las que se obtienen a partir de la señal original tanto con el método de los Líderes Wavelet y la transformada de Legendre como con el método directo (GMWFLP) a partir de la función de densidad de los exponentes Hölder calculados usando el comportamiento asintótico de los Líderes Wavelet.
- Tal hecho es alentador, ya que la señal de EEG durante una crisis de ausencia es susceptible de contener chirps propios, por lo que es una característica deseable de los métodos de estimación de exponentes que los resultados no se vean demasiado afectados por los mismos.
- Por último indiquemos que en señales generadas artificialmente, como cascadas binomiales o escaleras de Cantor generalizadas las hipótesis se satisfacen y los métodos proporcionan espectros semejantes (y también lo hacen para dichas señales + la incorporación de chirps).
- En cambio, en señales de origen experimental los espectros calculados por unos u otros métodos difieren considerablemente en ciertas señales; tal diferencia es verosímil ya que, por ejemplo, en las señales empíricas de EEG no podemos asegurar que necesariamente respondan a una función autosimilar o aproximadamente autosimilar.

Para concluir, si bien posterior a nuestro trabajo [Car2] llegaron los p-leaders (ver [Jf10] y [Jf11]) y demás (también ver [Kle] y [Kle1]), no hay trabajos publicados anteriores a [Car2] que usaran los WL para el cálculo de espectros multifractales no cóncavos con chirps, y tuvo que pasar casi una década para que el mismo Stéphane Jaffard et al (ver [Jf12]), en este año 2018 que transcurre publicara "*Una Generalización del Formalismo Multifractal para la Estimación de Espectros Multifractales No-Cóncavos*", reafirmando lo acertado de nuestro análisis en este tercer capítulo. Hay otra variedad de técnicas y perspectivas del Análisis de Fourier basados en los métodos introducidos por Calderón y Zygmund para el mencionado análisis (ver [Dou], [Car5], [Car6]).

5.3 CONCLUSIONES acerca del CAPÍTULO 4:

Resumimos nuestro Análisis General del Problema:

Los esquemas de acción del cerebro, y en particular, el tipo y magnitud del feed-back con un subsistema determinado (un presunto *Subsistema de Verificación de Coherencia Narrativa*, SVCN) varía dependiendo de la situación, ver [Car4]. Nosotros tratamos, con simplificaciones, la situación en que un sujeto, en un medio que supone (dentro de lo posible) un nivel moderado bajo de impresiones perceptivas, incluyendo a las internas (individuo tranquilo en ambiente ídem, sin olores, mirando un fondo fijo, escuchando por auriculares, etc) trata de determinar la coherencia de una frase en un contexto narrativo, y nosotros analizamos las repercusiones observables en términos de magnitud de deflexión de voltaje en un electrodo, teniendo en cuenta como hipótesis que la contribución, en cierto intervalo de latencia, del reconocimiento o no de la coherencia narrativa es mensurable, pero va inmersa en la contribución global de una red mayor (el cerebro), presuntamente incorrelacionada con la coherencia, pero de varianza mayor cuya influencia no puede ser despreciada. El cerebro recibe una serie de datos sonoros (estímulo físico), y una cantidad de otros inputs, externos, internos y propios.

Después de cierto tiempo (real: quizás 500 mseg) una parte de los outputs del cerebro corresponde a un input para el SVCN (frase a discernir, estímulo lógico). A partir de allí, se trata de ver si la subred evoluciona hacia alguno de sus imprints, mientras el cerebro hace otras cosas. Naturalmente hay una retroalimentación, pero en términos de influencia global del SVCN sobre el cerebro; y especialmente sobre la actividad eléctrica total del resto del cerebro, cabe suponer verosímilmente que podría despreciarse. La cuestión es que en un electrodo determinado se registraría la actividad continua de cierta suma ponderada de parte de la red cerebral, desde que ocurre el estímulo físico y antes del procesamiento del estímulo lógico por la SVCN y durante este procesamiento (mientras el resto de la red cerebral evoluciona de forma escasamente correlacionada con la tarea del SVCN). En este sentido, el problema de estimar la contribución eléctrica en cierto electrodo de la respuesta del SVCN, puede verse como una tarea de filtrado de la señal oculta buscada (la respuesta del SVCN), a la cual se suma como ruido la contribución de esa suma ponderada de parte del resto del cerebro, que contribuye en el electrodo en cuestión. Como decimos en 4.6, es difícil precisar el tipo de modelo estocástico que siguen las señales eléctricas de los electrodos, y la evidencia parece apuntar a que los modelos lineales ofrecen ajustes mediocres. En particular, si bien no tratamos de modelar la función de distribución de la fuente de ruido (y en particular no damos por sentado que sea ni siquiera aproximadamente normal), pero sugerimos el tratamiento de la misma con *filtros tipo Kalman*: Al ser filtros de "estimación a priori-corrección-estimación a posteriori" suelen proporcionar prestaciones aceptables, incluso en casos no normales. Además, realizando un número modesto de promediaciones, el ruido promediado se va normalizando, y el filtro rápidamente provee respuestas muy promisorias (ver [Car3]), a nuestro juicio.

Además:

- Los PEs son importantes en enfermedades como neuritis óptica, esclerosis múltiple, sorderas, traumatismos craneales, lesiones de médula espinal o tronco del encéfalo, neuropatías, etc.
- Una alteración de los potenciales va a ayudar a su diagnóstico o a su exclusión.
- Como son ondas **independientes de la voluntad del paciente**, son datos objetivos, concluyentes de lesión o de normalidad, lo que es muy importante para la correlación entre las quejas del enfermo y la lesión real.
- En ocasiones incluso, las alteraciones de las vías preceden a la presencia de síntomas, ayudando al diagnóstico precoz de enfermedades que pueden ser tratables y tratadas con urgencia.
- Los PE son herramientas muy útiles para la diagnosis en la salud humana, por sus características expuestas en esta tesis y su bajo costo monetario, comparado con otras técnicas médico-cerebrales.
- En 4.4 queda pendiente la estimación del parámetro q adecuado, si lo hay, la implementación numérica de lo sugerido y la verificación de si realmente proporciona una herramienta útil para el estudio de éstas u otras series.
- Queda mucho trabajo por delante de equipos interdisciplinarios para avanzar en esta línea de investigación acerca de la importancia de utilizar los PE en aplicaciones de la vida humana en tiempo real.

Para concluir, no hay trabajos publicados anteriores a [Car3] que resolvieran el problema de la promediación de PE con pocos trials usando un filtrado Kalman modificado tipo Bayesiano para la experiencia planteada, siendo un esquema que incorpora la corrección de los pronósticos teniendo en cuenta los errores de predicción a posteriori, no precisando mantener los datos previos, lo que facilita su implementación en sistemas de procesado en tiempo real.

Se puede ver la utilidad de los PE, a modo de ejemplo, en [Mij] 2015, también [Chan] sus implicaciones en el desarrollo de la dislexia, o [Sch].

Fin del Quinto Capítulo.

Aclaración: La implementación de algoritmos para el procesamiento y filtrado de las diferentes señales biológico-cerebrales analizadas en este trabajo fueron realizadas únicamente con el software MATLAB (MATrix LABoratory) usando sus herramientas y paquetes específicos para tal fin, ya que todas las señales nos fueron entregadas en formato de series numéricas temporales, a las que se les implementaron rutinas para estudiar la correlación entre las señales mencionadas y el refinamiento en el tratamiento específico de dichas series, estableciendo patrones y la naturaleza causal de sus características definitorias.

Asimismo, ninguno de los datos experimentales con los cuales se trabaja numéricamente a lo largo de esta tesis fueron adquiridos específicamente para la misma, por lo que en cada caso se menciona su procedencia, Institución y el personal involucrado en su registro.



Fundación para la Lucha contra las Enfermedades
Neurológicas de la Infancia (FLENI)



Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS)

FIN

Bibliografía:

[An] Andersson, Patrik, *Characterization of Pointwise Hölder Regularity*, Applied and Computational Harmonic Analysis (1997), Elsevier, Vol 4, Issue 4, pages 429-443, Article no. HA970219.

[Ar] Arneodo A.; Argoul A.; Muzy J.F.; Tabard M.; Bacry E., *Beyond classical multifractal analysis using wavelets: uncovering a multiplicative process hidden in the geometrical complexity of diffusion limited aggregates*, Fractals, 1: 629–646, 1995.

[Bar] Bar-Yam, Yaneer, *Dynamics of Complex Systems*, Cambridge (Mass), Perseus Press; 1997.

[Car] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro; Figliola, A; Serrano, E, *Wavelet Leaders versus Multifractal Detrended Fluctuation Analysis in EEG time series*, XII RPIC, 2007, ISBN: 978-987-1242-23-8.

[Car1] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Correlation between Multifractal Spectrum based on Wavelet Leaders and T-Wave Alternans*. Computers in Cardiology (2008) Vol 35, 749-752. ISSN: 0276-6574.

[Car2] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Non-concave multifractal spectra with wavelet leaders projection of signals with and without chirps*. Fractals (Complex Geometry, Patterns, and Scaling in Nature and Society) Vol 17, No 3 (2009) 311-322, World Scientific Publishing Company. Print ISSN: 0218-348X, Online ISSN: 1793-6543.

[Car3] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Heuristics for solving the multiple problem identification of the responses of brain and artificial neural networks in the presence of usual and unusual stimuli by means of Kalman-type filters*. RMTyA-CIMPA (2011) 18 (1), 49-62, ISSN: 1409-2433.

[Car4] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Algoritmo Q-Learning aplicado a Potenciales Evocados en Redes Neuronales*, COMPUMAT 2011, Sociedad Cubana de Matemática y Computación, ISBN 978-959-250-658-9.

[Car5] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Stability of certain Systems of Impulsive Differential Equations*. Revista MATUA, Vol III, número 1 (2016), págs 14-19. ISSN: 2389-7422.

[Car6] Cardo, Romina; Corvalán, Álvaro, *Control of Impulsive Biological Systems by Maximal Operators*. Revista MATUA, Vol III, número 2 (2016), págs. 10-18. ISSN: 2389-7422.

[Col] Coles, M., Gratton, G., Fabiani, M., *Event-related brain potentials. Principles of Psychophysiology: Physical, Social and Inferential Elements*, Cambridge University Press, pages 471-498, 1990.

[Chan] Chandrasekaran, B.; Hornickel, J. M.; Skoe, E.; Nicol, T.; Kraus, N., *Context-dependent encoding in the human auditory brainstem relates to hearing speech in noise: implications for developmental dyslexia*, *Neuron* 64, 311–319 (2009).

[Da] Daubechies, Ingrid, *Ten Lectures on Wavelets*, (1992) by the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Montpelier, Vermont.

[Do] Donchin, E., Ritter, W., McCallum, Ch., *Event-Related Brain Potentials in Man*. Elsevier (1978). ISBN: 978-0-12-155150-6.

[Du] Durand, Arnaud, *Random Wavelet Series based on a tree-indexed Markov Chain*, Cornell University Library, October 2007.

[Duo] Duoandikoetxea, Javier, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, (2001) ISBN: 978-0-8218-2172-5.

[Fa1] Falconer, Kenneth, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1990.

[Fa2] Falconer, Kenneth, *Techniques in fractal geometry*, (1997) by John Wiley and Sons Ltd, West Sussex, England.

[Fr] Frisch, Uriel; Parisi, Giorgio, *Fully developed turbulence and intermittency*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi 84-88, North Holland, (1985).

[Ger] Gershenfeld, Neil; *The Nature of Mathematical Modeling*, Cambridge University Press, 2006, ISBN: 0 521 57095 6 hardback.

[Gev] Gevins, A.S. (1987), *Correlation analysis*. In A.S. Gevins & A. Remond (Eds), *Methods of analysis of brain electrical and magnetic signals* (pp 355-403). North Holland: Elsevier.

[Go] Gómez, Carlos; Escera, Carles; Cilveti, Roberto; Polo, M. Dolores; Díaz, Rosa; Portavella, Manuel, *Localización neuroeléctrica de procesos cognitivos*, *Anuario de Psicología*, 1992, número 54, 77-96.

[Jf1] Jaffard, Stéphane, *Some Mathematical Results about the Multifractal Formalism for Functions. Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Part V, 325-361, (1994) edited by Charles Chui, Laura Montefusco and Luigia Puccio, Academic Press Inc, San Diego, California, USA.

[Jf2] Jaffard, Stéphane, *Multifractal formalism for functions*, Parts I and II, SIAM Journal of Mathematical Analysis 28(4), 944-998 July (1997).

[Jf3] Jaffard, Stéphane, *Wavelet techniques in multifractal analysis, fractal geometry and applications*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, Providence, RI, 1-61, (2004).

[Jf4] Jaffard, Stéphane; Lashermes, Bruno; Abry, Patrice, *Wavelet Leaders in multifractal Analysis*, Wavelet Analysis and Applications, T Qian, M. I; Vai, X. Yueheng, Eds., Birkhäuser Verlag, 219-264, Basel, Switzerland, 2006.

[Jf5] Jaffard, Stéphane; Meyer, Yves, *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*, MEMOIRS of the American Mathematical Society, Volume 123, Number 587 (second of 4 numbers), ISSN 0065-92, September 1996.

[Jf6] Jaffard, Stéphane; Meyer, Yves; Ryan, Robert D, *Wavelets: Tools for Science & Technology*, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, book, ISBN 0-8987-448-6, 2001.

[Jf7] Jaffard, Stéphane; Wendt, H.; Roux, S.G.; Abry, P., *Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images*, Signal Processing, vol. 89, Issue 6, pp. 1100–1114, Elsevier, June 2009.

[Jf8] Jaffard, Stéphane; Vedel, Béatrice; Wendt, Herwig; Abry, Patrice, *On the impact of the number of vanishing moments on the dependence structures of compound Poisson motion and fractional Brownian motion in multifractal time*, Dependence in Probability and Statistics, pp 71-101, Springer (2010), ISSN: 0930-0325.

[Jf9] Jaffard, Stéphane; Abry, P.; Wendt, H., *A Bridge Between Geometric Measure Theory and Signal Processing: Multifractal Analysis*, Operator-Related Function Theory and Time-Frequency Analysis, In: Gröchenig K., Lyubarskii Y., Seip K. (eds), Vol 9, pp 1-56, Springer, 2015.

[Jf10] Jaffard, Stéphane; Melot, C; Leonarduzzi, R; Wendt, H; Abry, P; Roux, S.G. and Torres, M.E., “*p*-exponent and *p*-leaders, part i: Negative pointwise regularity.” *Physica A*, vol. 448, pp. 300–318, 2016.

[Jf11] Jaffard, Stéphane; Leonarduzzi, R; Wendt, H; Abry, P; Melot, C, “*Finite resolution effects in p-leader multifractal analysis*,” *IEEE T. Signal Processing*, Vol. 65, No. 13, pp. 3359–3368, 2017.

[Jf12] Jaffard, Stéphane; Leonarduzzi, R; Abry, P; Wendt, H. and Touchette, H., *A Generalized Multifractal Formalism for the Estimation of Nonconcave*

Multifractal Spectra, IEEE Transactions on Signal Processing, vol XX, pp XX, 2018, submitted.

[Kal1] Kalman, R.E., *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Journal of Basic Engineering 82 (1): 35–45, (1960).

[Kal2] Kalman, R.E.; Bucy, R.S., *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*. Journal of Basic Engineering, Maroh., 95-108 (1961).

[Kan] Kantelhardt, J.W.; Zschiegner, S.A.; Koscielny-Bunde, E; Havlin,S.; Bunde,A. and Stanley, H.E., *Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series*. Physica A, 316: 87-114, 2002.

[Kle] Kleyntssens, T.; Esser, C.; Nicolay, S; *A multifractal formalism for non-concave and non-increasing spectra: The leaders profile method*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 43, Issue 2, pages 269-291, September 2017.

[Kle1] Kleyntssens, T., Esser, C., Nicolay, S., *An algorithm for computing non-concave multifractal spectra using the Sv-spaces*, Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation, Volume 56, Pages 526-543, March 2018.

[Kok] Kokilashvili, Vakhtang; Meskhi, Alexander; Rafeiro, Humberto; Samko, Stefan, *Variable Exponent Hölder Spaces, Integral Operators in Non-Standard Function Spaces*, Vol 249, pp 571-604, Part of the Operator Theory: Advances and Applications book series, Springer, 2016.

[Ko] Kolmogorov, A.N., *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 32, 1941.

[Le] Levy-Vehel, Jacques y Legrand, Pierrick, *Hölderian regularity-based image interpolation*. Informe: COMPLEX Team, INRIA Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cedex, France, 1-4, 2006.

[Li] Linden, David E. J., *The P300: Where in the Brain Is It Produced and What Does It Tell Us?*, The Neuroscientist Review, Volume 11, number 6, 2005, ISSN: 1073-8584.

[Mak] Makowiec D.; Dudkowska A.; Galaska R.; Rynkiewicz A., *Multifractal analysis of normal RR heart-interbeat signals in power spectra ranges*, Poland, (2007).

[Ma] Mallat, Stephane, *A wavelet tour of signal processing*, 2nd Edition, American Press, San Diego, USA, 1999.

[Mar1] Mariani, María Cristina; Chen, G.; SenGupta, I.; Jiang, W, *Concentration Problems in for band pass filters in communication theory over disjoint frequency intervals and numerical Solutions*, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 18 (2012), pp. 182-210.

[Mar2] Mariani, María Cristina; Viens, Frederi G. ; Florescu, Ionut, *Handbook of Modeling High-Frequency Data in Finance*, Wiley 2012.

[Mar3] Mariani, María Cristina; Florescu, Ionut ; Sewell, G., *Numerical Solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a Levy market*, Quantitative Finance, Vol. 14, 8 (2014) 1445–1452.

[Mar4] Mariani, María Cristina; Beccar Varela, M.P.; Gonzalez-Huizar, H.; Serpa, L. and Tweneboah, O. K., *Levy Flight and Long-range Correlation Analysis of Earthquakes Magnitudes in Chile*, Pure and Applied Geophysics, Chile 2015, DOI: 10.1007/s00024-016-1334-8, 173, 7 (2016).

[Mar5] Mariani, María Cristina; Beccar Varela, M.P.; Tweneboa, O.K.; Gonzalez Huizar, H., *Use of wavelets techniques to discriminate between explosions and natural earthquakes*, Article in Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 457, pp 42-51, April 2016.

[Mar6] Mariani, María Cristina; Beccar Varela, M.P.; Tweneboa, O.K.; Florescu, I., *Analysis of the Lehman Brothers collapse and the Flash Crash event by applying wavelets methodologies*, Article in Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 474, pp 162-171, January 2017.

[Mar7] Mariani, María Cristina; Gonzalez-Huizar, H. ; Bhuiyan, Md Al Masum and Tweneboah, O. K., *Using Dynamic Fourier Analysis to Discriminate Between Seismic Signals from Natural Earthquakes and Mining Explosions*, AIMS Geosciences, 3(3), pages 438-449, 2017.

[Meyer] Meyer, Yves, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann (1990), ISBN: 2705661255.

[Mey] Meyer, Yves, *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations*, *The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis, Memorial Lectures*, University LECTURE Series Volume 22, American Mathematical Society, ISBN 0-8218-2920-3, Providence, Rhode Island, 2000.

[Mij] Mijares, E.; Báez, I.; Cabrera, L.; Pérez-Abalo, M.C.; Torres-Fortunya, A., *Hearing Screening Using Auditory Steady State Responses Obtained by Simultaneous Air-and Bone-Conduction Stimuli*, Acta Otorrinolaringologica (English Edition), Volume 66, Issue 1, pp 8-15, January–February 2015, Elsevier.

[Nu] Núñez-Peña, M. Isabel; Corral, M. José; Escera, Carles, *Potenciales Evocados cerebrales en el contexto de la investigación psicológica: una actualización*, Anuario de Psicología, 2004, Vol 35, número 1, 3-21.

[Os] Oświecimka, P.; Kwapień, J. and Drożdż, S., *Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures*, Physical Review E, 74, 016103: 8-17, 2006.

[Pe] Peng, C. K.; Buldyrev, S. V.; Goldberger, A. L.; Havlin, S.; Mantegna, R.N.; Simons, M.; Stanley, H.E., *Statistical properties of DNA sequences*, Physica A, 221:180–192, 1995.

[Sc] Schreiber, Thomas; Schmitz, Andreas, *Surrogate time series*, Physica D 142 (2000) 346-382.

[Sch] Scherg, Michael; Vajsar, Jiri; Picton, Terence W., *A Source Analysis of the Late Human Auditory Evoked Potentials*, Journal of Cognitive Neuroscience Volume 1, Issue 4 p.336-355, by the Massachusetts Institute of Technology (2007).

[Sh] Shang, P.; Lu Y.; Kama S., *The application of Hölder exponent to traffic congestion warning* (2006).

[Ta] Tarasenko, A. A.; Karelin, A. A., *On the Relationships Between the Norms of Operators with Endpoint Singularities in Lebesgue and Hölder Spaces with Weight*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 69, No. 3, August, 2017 (Ukrainian Original) Vol. 69, No. 3, Springer, March, 2017.

[Te] Telesca, L.; Lapenna, V.; Macchiato, M., *Multifractal fluctuations in seismic interspike series*, Physica A, 354: 629-640, 2005.

[Th] Theiler, James; Galdrikian, Bryan; Longtin, André; Eubank, Stephen and Farmer, J. Doyné; *Using Surrogate Data to Detect Nonlinearity in Time Series*; Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol. XII, Eds. M. Casdagli & S. Eubank, Addison-Wesley, 1992.

[To] Torrèsani, B., *Analyse continue par ondelettes*, InterÉditions/CNRS Éditions, Paris, 1995.

[Tsa] Tsallis, Constantino, *Nonextensive statistics: Theoretical, experimental and computational evidences and connections*, Brazilian Journal of Physics, Vol 29, Número 1 (marzo 1999), ISSN: 0103-9733.

[Tu] Turiel, Antonio; Pérez-Vicente, Conrad; Grazzini, Jacopo, *Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra on sampled data*:

A comparative study, Journal of Computational Physics archive, Vol 216, Issue 1 (July 2006), 362 - 390.

[Ve] Vetterli, M. ; Kovacevic, J., *Wavelet and Subband Coding*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[Wen] Wendt, H.; Abry, P., *Multifractality tests using bootstrapped wavelet leaders*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 55, No. 10, pp. 4811–4820, 2007.

[Xu] Xu, Y.; Hui, J.; Fermuller, C., *Viewpoint invariant texture description using fractal analysis*, International Journal of Computer Vision, Volume 83, Issue 1, pp 85–100, Springer, June 2009.

Índice:

págs.

Presentación.....	1-8
Capítulo 1: Introducción.....	9-14
Capítulo 2: Espacios de Hölder.....	15-25
Capítulo 3: EEG-Fractals.....	26-46
Capítulo 4: PE-Kalman RMTyA.....	47-64
Capítulo 5: Conclusiones.....	65-70
Bibliografía.....	71-77
Índice.....	78