

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO

Estudios del Juego de las Minorías

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología
de la Universidad Nacional de General Sarmiento

por *Sebastián Diego Guala*

Director: Dr. Gabriel Acosta Rodríguez
Co-Director: Dr. Javier Marengo

30 de agosto de 2010

Índice general

Objetivos y Resultados Obtenidos	2
1. El Juego de las Minorías	6
1.1. El <i>MG</i> como modelo especulativo	6
1.2. Versiones Originales	10
1.3. Versión Analítica	12
2. Aproximaciones Analíticas al MG	17
2.1. Introducción	17
2.2. Puntos Virtuales y Estrategias	22
2.3. Puntos Virtuales y los Agentes	26
2.4. El <i>MG</i> como muestreo del <i>F_SMG</i>	29
2.5. El <i>MG</i> con diferentes reglas de actualización de historias . . .	32
2.6. El <i>DGM</i> y el <i>DFSMG</i>	42
2.7. Una aproximación analítica a la región <i>PTD</i>	44
2.8. El <i>DMG</i> y los períodos de tamaño $2\mathcal{H}$	47
3. Análisis del <i>MG</i> con Agentes Interactuantes	55
3.1. Introducción	55
3.2. El modelo	56
3.3. Dinámica de los agentes interactuantes	57
3.4. La reacción de los agentes no interactuantes	61
4. El <i>MG</i> con Agentes Líderes y Agentes Seguidores	65
4.1. Introducción	65
4.2. El modelo	66
4.3. Resultados	69
A. Descripción de la implementación	75
A.1. Estructura de clases	75
A.2. Descripción de la interfaz	80

Objetivos y Resultados Obtenidos

En esta tesis se estudian diversos aspectos del denominado *Juego de las Minorías (MG)*. En lo referido a aspectos cualitativos del juego, el eje se ha centrado en el rol de las influencias, separándolas en influencias *verticales* y *horizontales*. En el primero de los casos hemos introducido una variante del *MG* en la que los agentes poseen distintos niveles de información y se clasifican en *líderes* o *seguidores*. Los primeros juegan el rol de los gurús de los mercados, manejan información de primera mano y toman sus decisiones en base a la información pública disponible entre sus pares. Por su parte, los seguidores poseen información de segunda mano y su éxito depende de la efectividad de los líderes que ellos pueden consultar. Para este juego encontramos emergencia de cooperación de características similares al del *MG* clásico, e invariancia respecto de la variable reducida $z \sim 2^m/L$, siendo L el número de líderes un parámetro asociado a la memoria de los agentes. Este resultado se halla publicado en [1] y forma parte del Capítulo 4 del presente trabajo. En lo que a influencias horizontales respecta, estudiamos un *MG* presentado en la literatura en [26]. En ese caso todos los agentes poseen el mismo nivel informacional, pero a las reglas usuales del *MG* se le incorpora una nueva ronda de votación en la que los agentes pueden consultar “localmente” a cierto subgrupo de agentes (vecinos con cierta probabilidad) y utilizar esa información extra para tomar una decisión “diferenciadora”. En esta tesis se muestra que los aspectos cualitativos visibles en el juego y reportados en [26] provienen del hecho de que la dinámica de la votación local favorece la formación de clusters de individuos, y en ese sentido el juego puede replicarse modificando el *MG* clásico, e incorporando agentes “pesados” (i.e. agentes cuyo voto vale más que el promedio). Estos resultados fueron publicados en [2] y se encuentran en el Capítulo 3 del presente trabajo. Finalmente en cuanto a los aspectos cuantitativos del *MG* esta tesis incluye diversos resultados en el Capítulo 2 que son motivo de dos trabajos en desarrollo [3] y [4]. En ambos casos se trata de generalizaciones del enfoque

dado en [59]. En efecto, por un lado, en el mencionado trabajo los autores presentan una aproximación analítica para el *MG* basada en una instancia maximal del juego. En particular introducen el *Full Strategy Minority Game FSMG* que es un *MG* en el que todas las estrategias y todos los jugadores posibles participan del juego. En este sentido el *MG* se vuelve una muestra estadística del *FSMG*, y con ese enfoque, en [59] se obtienen excelentes aproximaciones para la varianza reducida para valores pequeños de la variable reducida $z = 2^m/N$. En [3] se muestra que los cálculos pueden simplificarse notablemente. En este sentido proponemos promediar el juego en el tiempo (sobre las iteraciones) en vez de promediarlo sobre los ensembles estadísticos propuestos en [59]. Con esa idea se consiguen aproximaciones simplificadas que además se aplican a juegos más generales (con diferentes reglas de actualización de las historias). Como adelanto mencionemos que la siguiente aproximación

$$\sigma^2/N \sim 1/4 + \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}}(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}})} \left(\frac{\mathcal{H}}{2} \right) \right)^2 N/8$$

para el *MG*, donde $\mathcal{H} = 2^m$, es resultado de este enfoque (Teorema 2.5.1) de la cual se obtiene inmediatamente

$$\sigma^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{4\mathcal{H}\pi}.$$

Además de hacer notar en este trabajo que la aproximación dada en [59] se corresponde con la del juego introducido en [42] y no así con el *MG* estándar. Esta técnica, por otro lado, es propicia para otras variantes del juego como la introducida en [60]. En efecto, por medio de nuestros cálculos mostramos que el *FSMG* permite reencontrar la aproximación obtenida en [60], esto es

$$\sigma^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{8\mathcal{H}\pi}(\log + \gamma)H$$

siendo γ la contante de Euler-Mascheroni (ver Teorema 2.5.2) para una variante del juego con actualización periódica de las historias. Por otro lado, diversas cuestiones relativas al *FSMG* son clarificadas en este trabajo. Por ejemplo demostramos que en realidad la regla de período dos *PTD* no es una hipótesis del *FSMG* sino que se obtiene como consecuencia de su construcción. Más aún, gracias al *FSMG* puede predecirse con un alto grado de precisión la región de validez de la *PTD*. De hecho damos la siguiente expresión analítica, que concuerda altamente con la experimental (ver Figura 1), de la probabilidad de cumplimiento de la *PTD*

$$P_{PTD} \sim 1 - \text{Erf} \left(-\sqrt{\frac{N}{\frac{\mathcal{H}\pi}{2} - 1}} \right)$$

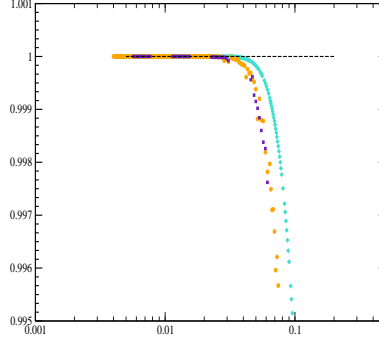


Figura 1: Detalle de la P_{PTD} experimental, con actualización aleatoria de historias en amarillo y estándar en violeta. En celeste la aproximación analítica.

en el Lema 2.7.2. Con respecto a otras características del MG demostramos en [4] que la existencia de cuasiperíodos de tamaño $2k2^m$ frecuentemente reportados en la literatura están altamente ligados a la validez de la PTD . En efecto, se prueba que un MG periódico que cumpla la PTD necesariamente tiene períodos de ese tamaño (ver Teorema 2.8.1). En consecuencia nos preguntamos si es posible hallar un juego de las mismas características que el MG (con comportamiento idéntico) pero que manifieste periodicidad en el mismo rango en el que el MG manifiesta cuasiperiodicidad. La respuesta que hallamos es que es posible, simplemente rompiendo *aleatoriamente* los desempates entre estrategias de los agentes “a priori”, en lugar de hacerlo *aleatoriamente* durante la ejecución. Denominamos MG *determinístico* (DMG) a este juego que posee características similares al MG (ver Figura 2) pero resulta periódico. Por ende, el mencionado Teorema 2.8.1 se aplica entonces y garantizamos los períodos de tamaño $2k2^m$. Más aún, es sabido que los cuasiperíodos de tamaño 22^m (i.e. $k = 1$) son los primeros en aparecer en el MG . Lo que demostramos en el Teorema 2.8.2 es que la existencia de períodos de ese tamaño es equivalente al cumplimiento de la PTD para veces pares e *impares* de aparición de una historia dada. Este fenómeno no ha sido reportado nunca, hasta donde sabemos, probablemente porque la PTD para las veces impares no está acompañada de muchedumbres según mencionaremos más adelante. Estos últimos resultados forman parte del trabajo en preparación [4].

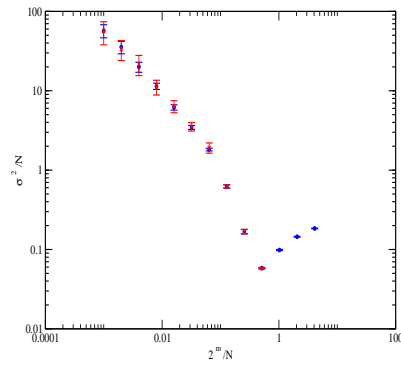


Figura 2: σ^2/N del *MG* estándar (círculos azules) y el *DMG* (cruces rojas) y sus respectivas varianzas para $N = 4001$.

Capítulo 1

El Juego de las Minorías

1.1. El *MG* como modelo especulativo

A partir del trabajo fundacional de Adam Smith, la visión sistémica de la economía y de la sociedad en los últimos dos siglos como objetos de estudio disciplinares, permitió generar el marco teórico que facilitó el planteamiento de modelos de comportamientos socio-económicos. Encontramos entonces a Malthus como paradigma de los modelos sociológicos cientificistas de esas primeras épocas. Con el tiempo, las formalizaciones se hicieron más complejas de la mano de nuevos desarrollos teóricos de estas disciplinas. Dichos desarrollos fueron posibles ya no sólo gracias al avance de las observaciones empíricas, sino también al establecimiento de los datos estadísticos como las curvas de Pareto de distribución de la riqueza. A la vez, el individuo comenzó a tener importancia central en su carácter de unidad mínima de decisión formadora del colectivo socio-económico. Fue así que hacia finales del siglo XIX el uso de las probabilidades y las estadísticas se consolidó como herramienta de análisis de aspectos del comportamiento individual y social. Con la consolidación industrialista de fines del siglo XIX, a la vez que el oro perdía terreno como única referencia de valor, se multiplicó la diversidad de las opciones económicas y financieras en el mundo. Esto llevó a que la formalización de los comportamientos de individuos, conscientes de su participación dentro del colectivo de decisores, adquiriera características cuya complejidad fuera difícil de tratar por métodos netamente analíticos. El trabajo de J. Von Neumann y O. Morgenstern [5] a mediados del siglo XX representó la aparición de este tipo de análisis económico formalizado, bautizado *Teoría de Juegos*.

Algunos años más tarde, el avance de las computadoras permitió el desarrollo acelerado de estas disciplinas basadas en la construcción y simulación compu-

tacional de modelos que por sus características eran difíciles de estudiar en forma analítica. Estos modelos intentan reproducir de manera cualitativa, y en algunos casos cuantitativa, las decisiones económicas y sociales de individuos o agentes en interacción con otros individuos dentro de un determinado conjunto o población. Uno de los objetivos era ver cómo estos individuos influyen y son influidos unos a otros enmarcados dentro de reglas prefijadas que simulan las reglas observables en un ámbito económico o social, en la búsqueda de “decisiones óptimas”. Dentro de un gran paraguas llamado *sistemas complejos* [6], este tipo de modelos muestra de forma paradigmática que los resultados devueltos, en lo referido al comportamiento agregado o emergente del conjunto de individuos, va mucho más allá de la simple suma de sus comportamientos individuales aislados. Esto no significa que el emergente pueda contradecir la suma de los comportamientos individuales, sino que los individuos toman decisiones influenciados por, e influenciando a, sus prójimos. Siendo probable, entonces, que las decisiones que un individuo tomaría en soledad difieran de aquellas que tomaría sabiéndose parte integrante de algún tipo de sociedad, donde el beneficio de las decisiones que tomara dependería también de las decisiones que tomaran los demás individuos.

En este contexto, la teoría de las elecciones económicas o sociales se aplica a situaciones donde los individuos están enfrentados a tomar decisiones asumiendo la falta de información completa sobre cada opción, el desconocimiento de las posibles consecuencias de sus decisiones y la imposibilidad de analizar en forma totalmente racional toda la información disponible. Esta aproximación muchas veces difiere de la teoría económica clásica, la que se centra en la hipótesis de información completa y racionalidad ilimitada, implicando que los agentes tienen un entendimiento completo sobre lo que eligen y sus consecuencias. La validez general o sectorial de estas premisas en el largo y en el corto plazo aún se discute [7, 8]. A menudo se asume que los agentes carentes de información completa intentan tomar en cuenta las elecciones de otros agentes para orientar su propia elección. El proceso de elección se vuelve, así, un proceso social, una “elección social”. Actualmente, los nuevos modelos de dinámica de decisiones han ganado una fuerte presencia en discusiones económicas y sociales. Estos involucran herramientas de mecánica estadística, teoría de grafos, ecuaciones diferenciales, investigación operativa y métodos estocásticos, entre otras áreas. La fiabilidad de los modelos se ensaya mediante simulaciones de la toma de decisiones. En este sentido, algunas teorías establecieron el marco conceptual sobre el que se sentaron las bases de un gran número de modelos computacionales que fueron surgiendo con los años. Uno de los temas que despertó y despierta un gran interés en el comportamiento económico y social es el de las elecciones entre opciones competitivas y cómo funciona el mecanismo de distribución

de participación, no sólo en el mercado de productos y marcas [9] sino incluso hasta candidatos políticos [10].

Los primeros trabajos modernos de base computacional emulaban modelos de decisión inspirados en epidemiología: las elecciones eran binarias, por ejemplo, comprar o no comprar y las condiciones iniciales correspondían a unos pocos compradores que “infectaban” a no compradores. Estos últimos compraban y se volvían capaces de contagiar a otros no compradores. Así, la dinámica agregada (la suma de todas las compras previas) generaba una curva de participación del mercado en función del tiempo. Tales comportamientos son a menudo descritos como “comportamientos de manada” y se les adjudica entre otras cosas la responsabilidad de sostener por largo tiempo las llamadas “burbujas financieras”, así como sus desplomes. Estos mismos comportamientos son aplicados en estudios y estrategias de *Marketing* [11, 12] y en tendencias sociales [13, 14]. En estos casos, el mecanismo individual utilizado para describir las elecciones de los agentes representa un proceso basado en información pública e información privada compartida [15]. Los agentes interactúan en una estructura conectiva que a menudo es un grafo (regular, aleatorio, *small world*, etc.), y cada individuo toma una decisión de acuerdo con la consideración de las opiniones de otros agentes y la propia, que pueden estar combinadas de diversas maneras. Algunos mecanismos de influencias de los vecinos pueden estar basados en encuestas o consejos. En cualquier caso, las elecciones de un individuo pocas veces son independientes de las de los otros. Por ejemplo, cuando la elección involucra la adopción de un estándar tecnológico, tener la misma tecnología que la mayoría puede ser beneficioso.

En general, los agentes económicos siempre fueron modelados actuando en un número variado de formas [22, 23, 16, 24, 25]. La variedad de comportamientos obedece a la necesidad de darle a los agentes una complejidad y un rango de posibles acciones de “exploración inductiva” que nos acerquen a la capacidad de ajustar los patrones característicos cualitativos, observados en los modelos, a aquellos observados en la realidad. Dentro de estas posibilidades, los individuos pueden ser más o menos influyentes o influenciados por otros. Sus decisiones pueden ser más o menos aleatorias, pueden recibir estímulos desde el exterior de la población o permanecer en un sistema cerrado, etc. En general, buscan maximizar un beneficio individual económico (riqueza), social (liderazgo, reconocimiento) o ambos; aunque también han tenido gran auge los modelos cooperativistas, tanto en los que intervienen manifestaciones altruistas en busca de un bien común, como aquellos con agentes competitivos donde la cooperación termina siendo el comportamiento que maximiza los rendimientos individuales [16, 17, 18, 19].

El tipo de racionalidad que se asume en economía, perfecta, lógica, deductiva, es útil para solucionar problemas teóricos. Pero demanda de un comportamiento humano muy difícil de lograr [21, 20]. En este sentido, los humanos usamos métodos de razonamiento característicos que no son deductivos sino inductivos. Reemplazamos la capacidad lógico-deductiva por la capacidad de reconocer patrones. Realizamos deducciones basadas en nuestras hipótesis y nos retroalimentamos con los resultados reforzando, debilitando, rechazando o reemplazando nuestras creencias. Podemos suponer que cuando un agente debe actuar, lo hace de acuerdo a su modelo más creíble (o más beneficioso) hasta ese momento. Una vez que se realizaron las acciones, observa el resultado agregado e individualmente evalúa el desempeño de sus hipótesis propias, generando un proceso de aprendizaje. Esto causa un proceso de histéresis: una hipótesis se sostiene no porque sea la “correcta” (no hay forma de saber eso), sino porque ha funcionado en el pasado y debe acumular fracasos antes de que merezca ser descartada. Podemos considerar esto como un sistema de creencias temporalmente cumplidas. Dentro de este marco: aprendizaje inductivo, especulación, interacción, adaptación, decisión binaria, comportamiento económico; el denominado *Juego de las Minorías (MG)* es un modelo que reúne todas las características descritas y que, por ello, ha despertado gran interés desde su aparición como planteo elemental de este tipo de problemas.

En el *MG* la obtención individual de la mayor cantidad de recursos posibles lleva a un comportamiento de competencia donde “el negocio” está en la diferenciación, en el sentido de ser la minoría la beneficiada, incentivándose un comportamiento de anti-manada.

El juego original consiste básicamente en una población de individuos que deben elegir simultáneamente entre dos opciones posibles. Aquellos que hayan elegido la opción minoritaria son los ganadores del juego. Los agentes toman sus decisiones de acuerdo a un conjunto de reglas o estrategias que cada uno posee evaluando la única información pública disponible que son las opciones que resultaron minoritarias en los últimos juegos, y con la que cada agente aprende sobre la utilidad de sus estrategias.

Desde que Challet y Zhang propusieron el juego [32] hubo un gran número de trabajos relacionados con el tema en los que se abordaba el juego desde varios puntos de vista. De los cientos de trabajos que se publicaron sobre el Juego de las Minorías, algunos se han destacado por el grado de formalización logrado o por las interesantes variantes que incorporan. Mencionaremos algunos de ellos. Zhang [33], Challet et al. [34], Farmer [35], Jefferies et al. [36], Bouchaud et al. [37], Challet y Marsili [38], Marsili [39], comparan la dinámica del juego original y algunas variantes con la propia de los mercados

financieros. Savit et al. [40] proponen gráficos de varianzas que caracterizan las distintas fases del juego y que se volvieron los criterios principales de análisis en adelante. Hart et al. [41] analizan la dinámica del juego desde el punto de vista de las poblaciones minoritarias, los comportamientos antimanadas y su relación con los mercados especulativos.

Paralelamente, surgieron trabajos que analizaban el funcionamiento interno del modelo, no sólo desde su parte emergente. Además, algunos propusieron variantes al juego original que permitían una mayor formalización. Fue así que Cavagna [42] estudió cómo se relacionaba el resultado del juego con la secuencia de instrucciones que recibían los agentes. Autores como Challet, Marsili, Zecchina, Slanina y Zhang [46, 43, 45, 44, 47] propusieron y analizaron una variante de suma cero, formalizable desde la mecánica estadística.

Otro gran número de trabajos fueron publicados con variantes del modelo original hechas con el objeto de mejorar la coordinación de los agentes. Reents et al. [48] incorpora fenómenos estocásticos a las estrategias deterministas, Heimel y De Martino [49] analizan la ergodicidad en la utilización de las reglas con las que se rigen los agentes en sus decisiones en los momentos de máxima coordinación. Por otro lado, otros autores incluyen en el modelo redes de distintas topologías a través de las cuales los agentes compiten y se conectan como forma de optimizar el proceso de auto-organización mediante mecanismos de información e interacción local [26, 27, 28, 29, 30, 31, 50, 51, 52, 53, 54]. Por ejemplo, la información de lo que dice la mejor de sus estrategias es compartida entre algunos agentes y cada uno de ellos coteja cuán buena parece ser *a priori* la jugada que está por hacer y si vale la pena cambiar de jugada, aun en contra de lo que su mejor estrategia recomienda.

Para finalizar digamos que si bien no son numerosos los casos en los que los resultados de los modelos del *MG* son cuantitativamente trasladables a los comportamientos socioeconómicos reales, la posibilidad probada de reconocer patrones generales y características ha hecho que este tipo de modelos ganara gran interés entre los que analizan las decisiones binarias diarias de los individuos.

1.2. Versiones Originales

Originalmente, Schelling [56] planteó en 1978 el problema de muchedumbres y anti-muchedumbres aplicados a ejemplos de tránsito, asistentes a una playa, etc. Exponía allí los mecanismos que utilizaban los agentes involucrados para evitar las muchedumbres. Más tarde, el problema fue “redescubierto” por Brian Arthur [21] inspirado en una situación que observó en un bar llamado *El Farol* en California. Según la anécdota, dicho bar tenía un

espectáculo de música irlandesa los jueves por la noche al que concurrían el propio Arthur y sus compañeros del Santa Fe Institute. El lugar era pequeño y su capacidad máxima era de 60 personas sentadas. De forma que si ellos pensaban que ese día serían más de 60 (incluyéndose) preferían no ir dado que iban a estar incómodos.

Así fue que a Arthur se le ocurrió pensar que cada uno de los, digamos, 100 asistentes habituales al espectáculo tenía el mismo criterio de incomodidad para decidir si concurría o no, agregando el aditamento de que ninguno sabía qué iban a hacer los otros. De esa manera, cada uno podía construirse creencias, patrones, reglas o estrategias que le dijeran si ese jueves debía ir al bar o quedarse en casa, de acuerdo al consejo de aquella de las estrategias que le venía dando mejores resultados predictivos hasta ese momento, es decir, la que más veces había acertado si el número de concurrentes superaría o no los 60. Por ejemplo, algunas estrategias podían ser: “si el jueves pasado fueron más(menos) de 60, este jueves van a ir menos(más)”;

“este jueves irá el promedio de los que fueron los tres últimos jueves”;

“siempre van menos de 60”;

etc. Los asistentes “ganadores” en cada jueves eran los que decidían quedarse en casa suponiendo acertadamente que la concurrencia de ese día superaría las 60 personas o los que decidían ir suponiendo acertadamente que habría sillas para todos. Si bien el armado de dos o tres estrategias de este estilo para los 100 clientes puede resultar caprichoso o sesgado y no dar resultados concluyentes, las primeras simulaciones mostraron evidencias de que la asistencia no seguía una distribución con media 60 y varianza 24, como se esperaría si fuera aleatoria (i.e., una variable binomial $Bi(100,0.6)$), lo que dio el primer indicio de que podría haber algún tipo de coordinación emergente entre los asistentes.

Comportamientos similares a los mencionados en este ejemplo pueden encontrarse en la vida cotidiana. El problema del tránsito automotor es directamente comparable. Todos los días muchos automovilistas deciden por qué calle o autopista acceder a sus destinos, especulando con la saturación de los caminos y utilizando también reglas que tienen en cuenta el clima, huelgas, fines de semana largo, día de la semana, inicio de vacaciones, etc. La elección de destinos turísticos es otro ejemplo. Tanto en salidas vacacionales o escapadas de fin de semana mucha gente prefiere evitar los lugares de descanso demasiado poblados y por lo tanto busca alternativas que considera *a priori* convenientemente tranquilas. Las reglas que utiliza para predecir el “nivel de tranquilidad” del destino son variadas: la publicidad, la experiencia en visitas anteriores, la época del año, el clima, etc.

$m = 3$	Predicción
000	1
001	1
010	0
011	1
100	0
101	0
110	0
111	1

Cuadro 1.1: Ejemplo de estrategias típicas de un agente del MG.

1.3. Versión Analítica

A partir de la idea de El Farol, Challet y Zhang [32] propusieron un modelo abstracto de decisión binaria mediante “aprendizaje” inductivo en el que cada jueves corresponde a una jugada, las decisiones de “ir” o “quedarse” son reemplazadas por 0 y 1 y la división pasa de ser 60-40 a 50-50. Si la minoría es la que iba, el resultado de esa jugada es 0 y es 1 si la minoría se quedaba en casa. Obviamente, los ganadores de cada jugada son los que están en la minoría. Las estrategias se arman como una lista de todos los posibles resultados (lados minoritarios) de las últimas m jugadas, esto es, con todas las posibles combinaciones de 0 y 1 dentro de una cadena de m caracteres, donde m representa la longitud de la “historia”, el “cerebro” o la “memoria” de los agentes. De manera que hay 2^m posibles historias y cada estrategia le asigna a cada historia la predicción 0 o 1 para la próxima jugada. Como ejemplo de una estrategia típica se muestra el Cuadro 1.1.

Así, hay 2^{2^m} estrategias posibles de las que cada agente toma aleatoriamente s estrategias (las posibles repeticiones están permitidas) al principio del juego para usar en sus decisiones a lo largo de éste, con lo que cada agente dispone de un conjunto diferente de estrategias, lo que genera la heterogeneidad de los individuos en el juego. De sus s estrategias, cada agente selecciona una para hacerle caso en la próxima decisión. El método de selección es el siguiente: al final de cada jugada, a aquellas estrategias que han predicho correctamente el lado minoritario (0 o 1) se les otorga un punto (independientemente de que hubieran sido las utilizadas en la decisión o no); para la jugada siguiente, cada agente utiliza aquella estrategia que más puntos recibió (más veces acertó) desde el comienzo del juego o elige al azar entre las que empaten en el mayor puntaje. Normalmente en la bibliografía, a los puntos asignados a las estrategias se los denomina *puntos virtuales* y simplemente *puntos* a

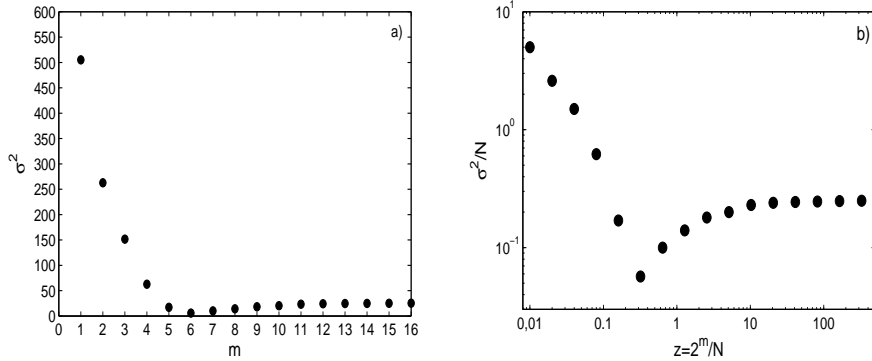


Figura 1.1: Varianza de los votantes de la opción “1” mostrado en distintas escalas, (a) σ^2 vs. m y (b) σ^2/N vs. $2^m/N$. Ambos casos con $N = 101$.

los acumulados por los agentes que utilizan efectivamente una estrategia que predice el lado minoritario de la jugada. Sin embargo, dado que no trataremos la acumulación de puntajes individuales de los agentes, a lo largo de la Tesis por simplicidad nos referiremos indistintamente a los puntos virtuales como “puntos”, salvo que sea aclarada otra cosa. Para comenzar el juego es necesario definir una historia inicial (una de las 2^m posibles) elegida al azar y asignarle aleatoriamente a cada agente s estrategias (tomamos $s = 2$ en nuestro caso) de las 2^{2^m} posibles.

Los resultados más notables de este modelo están relacionados con la coordinación que emerge de los individuos mediante la cual, para ciertos valores de memoria m la varianza de las distribuciones de las decisiones es sensiblemente inferior a la que se obtendría por decisiones aleatorias. Como ejemplo, para una población de $N = 101$ agentes con 2 estrategias cada uno, la varianza σ^2 disminuye a medida que aumenta m , es menor a la que correspondería a decisiones aleatorias ($\sigma_r^2 = N/4$) a partir de $m = 4$, alcanza el mínimo entre $m = 5$ y $m = 6$ y crece acercándose asintóticamente a $N/4$ para $m \rightarrow \infty$, como muestra la Figura 1.1.a.

Al principio del juego, los agentes comienzan eligiendo aleatoriamente en cada jugada la estrategia a seguir entre sus s disponibles ya que todas se inician con el mismo puntaje. A medida que van ganando y perdiendo, las estrategias acumulan puntos que son los que utiliza el agente que las posee para decidir cuál usar en cada momento. De esta manera decimos que el agente está “aprendiendo” inductivamente a jugar [32]. El proceso de selección de los lados pretendidamente minoritarios hecho por los agentes, según las estrategias asignadas, se repite una cantidad T de veces. El modelo original descrito arriba con $N = 101$ agentes tiene un tiempo transitorio de alrededor

de 1000 eventos. Pasado este transitorio, durante el cual los resultados del modelo muestran un comportamiento comparable con decisiones aleatorias, el resultado emergente se estabiliza en otros tipos de comportamiento que pueden ser peores o mejores que el aleatorio, dependiendo del número de estrategias, el tamaño de la población y la longitud de la memoria. Este estado estacionario es el que está relacionado con la coordinación.

En los numerosos trabajos publicados sobre este modelo [55] las poblaciones se toman impares para evitar posibles empates y es costumbre que cada agente elija 2 estrategias, puesto que un mayor número de éstas por individuo no aporta cualitativamente nuevas propiedades cooperativas al modelo sino por el contrario, disminuye la coordinación, el tiempo de aprendizaje de los agentes es mayor y el tiempo real computacional también crece. Paralelamente, en [57, 40], como forma de independizar los resultados del tamaño de la población N , de la memoria m y de la varianza σ^2 se analizan parámetros reducidos como el número de historias posibles por agente $z = 2^m/N$ y la varianza reducida $\mu = \sigma^2/N$. Esta redefinición de los parámetros permite ubicar el mínimo de $\mu \cong 0,2$ en $z_c \cong 0,35$ y $\mu = 1/4$ para $z \rightarrow \infty$, de validez general para todo N , m y σ^2 , con $s = 2$ (Figura 1.1.b).

Comúnmente, en el análisis del juego puede encontrarse que algunos autores dividen el comportamiento observado en la Figura 1.1 en tres regiones [57]: la *región eficiente*, la *región de transición* y la *región ineficiente*. La primera corresponde a la zona de m pequeño, donde $\sigma^2 > N/4$, la segunda abarca la zona entre $\sigma^2 = N/4$ y σ^2 mínimo ($z_c \cong 0,35$ en $m = 6$ y $N = 101$ para la Figura 1.1.a) y el último se desarrolla desde el σ^2 mínimo en adelante. Si bien no pretendemos dar aquí una detallada descripción de cada región, consideramos necesario al menos caracterizarlas brevemente, dado que resultará útil para entender más fácilmente los resultados de los próximos capítulos.

De acuerdo con el trabajo [57], el emergente característico de la región eficiente puede simplificarse de la siguiente manera: para $m = 2$ (esto es, 4 historias posibles) y $s = 2$ se observa que en las ocurrencias impares de una dada historia las desviaciones son pequeñas (la población está relativamente bien distribuida), mientras que en las ocurrencias pares las desviaciones son grandes. La interpretación es que con m pequeño existe la posibilidad de que un agente tenga sus dos estrategias muy parecidas. Digamos como ejemplo que un agente posee dos estrategias cuyas predicciones se diferencian sólo en una de las historias. La primera vez que aparezca esa historia en el juego el puntaje de sus estrategias estará empatado, la elección por una de las dos será aleatoria y una de las estrategias ganará y la otra perderá. Hasta que vuelva a aparecer esa historia, las estrategias del agente acumularán la misma cantidad de puntos puesto que realizan las mismas predicciones y, por lo tanto, ganarán y perderán a la par. La segunda vez que aparezca

esa historia, la estrategia que adivinó en la primera vez matendrá el punto extra que obtuvo la vez anterior y el agente la seguirá. Si el número de agentes en tal situación es grande, habrá un gran grupo que haga lo mismo: los agentes cuyas estrategias difieran sólo en esa historia y hubieran ganado en la ocurrencia anterior se repetirán en su jugada y los que hubieran perdido jugarán ahora con la otra estrategia. Ello ocasionará que muchos jueguen el lado que había resultado minoritario en la ocurrencia impar anterior de la historia. La desviación será grande y la ganadora será ahora la estrategia que había perdido en la ocurrencia impar. Por lo tanto, los puntajes de las estrategias estarán empatados nuevamente y en la tercera ocurrencia (la segunda impar) la elección volverá a ser aleatoria y dará una distribución de la población cercana a la media en cada grupo y el ciclo continúa. Esto es, pequeñas desviaciones de la media en las apariciones impares de una historia (similares a una jugada aleatoria) son seguidas por grandes desviaciones en las pares y el lado minoritario par resulta ser el opuesto al anterior impar. Cualitativamente, esta dinámica de periodo 2 (PTD) persiste mientras haya una probabilidad razonable de que el puntaje relativo entre las dos estrategias de un agente no varíe entre dos ocurrencias sucesivas de una dada historia. En [57] se muestra mediante modelos de *random walk* que este comportamiento es esperable para valores de m relativamente pequeños y se vuelve crecientemente improbable a medida que m aumenta: el número esperado de agentes que vuelven a la misma historia con el puntaje relativo entre estrategias sin modificar respecto de la ocurrencia anterior es de orden $N/(2^m)^{1/2}$. En efecto, si imaginamos un MG con $s = 2$ donde las historias son visitadas con idéntica probabilidad (situación comúnmente denominada ergodicidad), entonces cada historia es visitada cada 2^m jugadas. En consecuencia, para un jugador dado que tiene ambas estrategias empatadas en puntos virtuales en la aparición de una determinada historia, la probabilidad de que en la próxima aparición de esa historia vuelva a tener las estrategias empatadas se corresponde con un *random walk* unidimensional que pase por 0 exactamente 2^m pasos después de haber pasado por 0, esto es $P = \binom{2^m}{2^{m-1}} 2^{-2^m} \sim \sqrt{\frac{2}{2^m \pi}}$ (ver [66]). Por ende, el número esperado de jugadores que tienen empatadas sus estrategias para una dada historia es de $N \sqrt{\frac{2}{2^m \pi}}$.

Dentro de la región de transición la dinámica del periodo 2 es menos probable, ya no es significativo en número las estrategias que mantienen sus puntajes relativos entre ocurrencias pares e impares de una historia. Lo que significa que la probabilidad de que el grupo minoritario en la ocurrencia par de una historia sea el opuesto al de la previa ocurrencia impar ya no es cercana a 1. Dado que la distribución aleatoria binomial (de parámetros N y $1/2$) tiene una desviación del orden de $N^{1/2}$, la dinámica de periodo 2 va a dominar

mientras $N\sqrt{\frac{2}{2^m\pi}} > N^{1/2}$ o $2^m/N \lesssim 0,8$ lo que a la vez nos da idea del orden de magnitud donde se ubica la región de transición entre la región eficiente y la ineficiente.

En el caso de la región ineficiente, debemos considerar que cuando m es grande la dinámica de periodo 2 es poco probable y la distribución aleatoria de estrategias a los agentes representa una pequeña porción de todas las 2^{2^m} posibles estrategias. Los agentes poseen menor información almacenada en sus dos estrategias y por lo tanto tienden más a las decisiones aleatorias entre ambas. Sin embargo, esto no significa que elijan aleatoriamente entre 0 y 1, sino que eligen aleatoriamente entre sus dos estrategias, aunque tendiendo a un comportamiento emergente similar a la elección aleatoria directa del grupo minoritario.

Además de la división en tres regiones expuestas del MG, también es posible realizar otro tipo de división de las etapas del juego [57, 40, 46]. Según la dinámica de las opciones minoritarias, es posible dividir el juego en una fase simétrica y en otra asimétrica. En la primera ($z < z_c$), ambos lados son elegidos por la minoría con igual frecuencia (en promedio, ambos lados reciben la mitad de los agentes). En la segunda ($z > z_c$), en cada una de las posibles historias la minoría toma una de las opciones con más frecuencia que la otra (el promedio es asimétrico). Esta asimetría es conocida en la economía como *arbitraje*. La asimetría está relacionada con la “separación de fase” en la población de agentes: mientras que para $z < z_c$ todos los agentes usan todas sus estrategias, para $z > z_c$ una fracción de los agentes se estabiliza en el uso de solo una de sus estrategias (frozen agents).

Capítulo 2

Aproximaciones Analíticas al MG

2.1. Introducción

Desde la presentación del problema, muchos fueron los intentos por darle un marco formal al juego y por reproducir analíticamente los resultados observados en las simulaciones. Fue así como se propusieron distintas versiones del juego que permitían formalizar todo o parte de éste mediante técnicas de mecánica estadística y vidrios de espín [58, 46, 44, 43]. En este sentido, la mayoría de los trabajos analíticos se realizaron sobre el MG en la región informacionalmente eficiente, donde $z < z_c$.

El objetivo de este capítulo es presentar una aproximación analítica del MG, cuantitativamente válida para la región informacionalmente eficiente, a partir de la versión del Full Strategy Minority Game (FSMG) presentada por Caridi y Ceva [59]. Presentamos una formalización de MG que nos permitirá plantear analíticamente algunos aspectos del juego que además nos permitirán simplificar notablemente los resultados obtenidos en [59], como así también aplicar las mismas ideas a otras variantes del juego, además de permitir un enfoque formal que describa el proceso de rotura de la *PTD*.

Si bien las reglas básicas del MG fueron presentadas en el capítulo anterior, conviene a los efectos del carácter analítico de este capítulo introducir formalmente la notación y definiciones necesarias. De ahora en más, dado un conjunto C , $\#C$ denota el cardinal de dicho conjunto.

Definición 2.1.1 *Dado un m , $2 \leq m \in \mathbb{N}$, llamamos historia a toda cadena de longitud m formada por ceros y unos. Denotamos con $\mathcal{H} = 2^m$ a la cantidad de historias (cadenas) diferentes para un m dado y con $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{h_1, \dots, h_{\mathcal{H}}\}$ el conjunto completo de historias. Notar que $\#\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.*

Definición 2.1.2 Una estrategia del MG es una función del conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ en el conjunto $\{0, 1\}$. Es decir que una estrategia asigna unívocamente una respuesta binaria a cualquier historia dada. Si denotamos con $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ al conjunto de todas las estrategias posibles resulta evidentemente que $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = 2^{\mathcal{L}}$. Usaremos la notación $\mathcal{L} = 2^{\mathcal{H}}$.

Definición 2.1.3 Dado un s , $2 \leq s \in \mathbb{N}$, un jugador o agente del MG es un conjunto de s elementos tomados (con repetición) de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Llamaremos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ al conjunto completo de jugadores posibles diferentes y \mathcal{N} a su cardinal. Si dos jugadores son iguales como conjuntos, entonces diremos que uno es una copia del otro.

Definición 2.1.4 Dado un s , $2 \leq s \in \mathbb{N}$, y un $N \in \mathbb{N}$, una instancia del MG es un conjunto I de N jugadores tomados (con repetición) de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Para cada elemento J del conjunto I se tiene además un arreglo $(v_1, \dots, v_s)_J \in \mathbb{N}_0^s$ que acumula los puntos virtuales sobre cada estrategia y una función de decisión $\mathcal{D} : \mathbb{N}_0^s \rightarrow J$ que determina la estrategia a utilizar como aquella que posee el máximo de los puntos virtuales (si existe un único l tal que $v_l = \max\{v_i, \}_{1 \leq i \leq s}$), o un elemento al azar (uniforme) de entre aquellos que alcanzan el máximo en otro caso.

De aquí en más supondremos que $s = 2$ como en la mayoría de los trabajos presentes en la literatura. Tenemos entonces obviamente,

$$\mathcal{N} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \binom{\mathcal{L}}{2} + \mathcal{L}.$$

En las instancias I del MG generadas aleatoriamente puede suceder que algunos agentes potenciales no participen del juego o que múltiples copias del mismo agente puedan participar. En el FSMG introducido en [59] ambos casos son excluidos. El número de agentes es elegido para ser exactamente \mathcal{N} y una sola versión de cada agente potencial está permitida.

Definición 2.1.5 Definimos el FSMG como la única instancia del MG que verifica $I = \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$.

Como veremos y siguiendo a [59], ciertas simetrías que se presentan sólo parcialmente en el MG, donde las instancias se generan aleatoriamente, pueden ser explotadas en el FSMG (especialmente, la dinámica de periodo dos, PTD) y conducen a resultados teóricos satisfactorios.

Siguiendo la estructura del juego descrita al comienzo de esta tesis definimos.

Definición 2.1.6 Dada una instancia I del MG , una realización o ejecución \mathcal{E} del juego es un par $\mathcal{E} = \{\tilde{h}^0, I\}$. Donde $\tilde{h}^0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ es una historia que llamaremos historia inicial.

Definición 2.1.7 Dada una realización $\mathcal{E} = \{\tilde{h}^0, I\}$, con la secuencia

$$\chi_{\mathcal{E}} = \{\chi_{-m+1}, \dots, \chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots\}$$

donde $\chi_k = 0, 1$, denotamos la cadena de resultados minoritarios obtenidos al ejecutar el juego partiendo de la instancia \mathcal{E} y con

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{\tilde{h}^0, \tilde{h}^1, \dots\},$$

donde $\tilde{h}^t = (\chi_{t-m}, \chi_{t-m+1}, \dots, \chi_t)$, la secuencia de historias. Así $\tilde{h}^k \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ para cualquier k , es decir, $\tilde{h}^t = h_i$ para algún $1 \leq i \leq \mathcal{H}$. Además \tilde{h}^0 , coincide con la historia inicial aleatoria y dadas \tilde{h}^k y \tilde{h}^{k+1} diremos que la primera es predecesora de la segunda, y que la segunda es sucesora de la primera.

Notemos que la información dada por $\chi_{\mathcal{E}}$ es equivalente a la dada por $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ puesto que cada secuencia puede ser reconstruida de otra y que \mathcal{E} **no** determina unívocamente a $\chi_{\mathcal{E}}$ en la versión estándar del MG (pues el juego no es determinístico). Más adelante definiremos una versión determinística simplificada en lo que esto sí ocurre.

Notemos también que en este marco formal una instancia I del MG o aún una realización \mathcal{E} no contiene información acerca del modo en que el juego se llevará a cabo en lo que a las reglas respecta. Es decir, en el capítulo previo se explicó la forma en que los agentes toman las decisiones en base al sistema de puntos virtuales acumulados en sus estrategias. Como nuestro interés consiste en estudiar casos más generales que el previsto en el MG estándar presentamos la siguiente

Definición 2.1.8 Llamaremos regla de actualización RA del juego a una función $RA : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ que en cada paso k del juego indica qué información (historia) es tomada en cuenta por los agentes a la hora de tomar una decisión durante la votación en el paso k . Salvo que resulte relevante no haremos mención a la regla utilizada, pero en caso contrario la denotaremos con un subíndice. Por ejemplo, el MG bajo una regla no estándar RA se denotará MG_{RA} .

Observación 2.1.1 La RA es en el MG estándar la cadena formada con los últimos m resultados del juego (puede por ende pensarse entonces como una historia del conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$). Otras reglas se han introducido en la literatura, si bien volveremos sobre este tema mencionemos que en [42] la RA es

aleatoria (distribución uniforme sobre el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$) y en [60] se propone una actualización periódica que cicla sobre todas las historias disponibles con período \mathcal{H} . Denotaremos MG_{rand} y MG_{per} respectivamente a estas variantes del juego. Mencionemos además que varios resultados de este capítulo no dependen de la RA, por lo que no haremos referencia a la regla correspondiente en esos casos.

Definición 2.1.9 Dado un MG_{RA} , y un paso del juego $k \in \mathbb{N}$, llamaremos historia presente o actual a $RA(k) = h_p^k$ (o h_p si queda claro del contexto cuál es el paso k) a la historia (información) dictada por la regla RA en ese paso. Es decir, que h_p es la historia que usarán los agentes en el paso k para decidir la votación. Finalizada la votación y actualizados los puntos virtuales el juego se halla en el paso $k + 1$, en donde los agentes utilizarán la información h_p^{k+1} .

Como fue mencionado, la PTD implica [57] que en una ocurrencia par de una dada historia el resultado del juego es con *alta probabilidad* el opuesto al obtenido en la previa ocurrencia de esa historia (y por lo tanto, ocurrencia impar). Usaremos $0 \leq P_{PTD} \leq 1$ para denotar dicha probabilidad, más adelante mostramos cómo el FSMG permite dar un valor aproximado para la P_{PTD} . Definimos ahora un caso extremo de la PTD.

Definición 2.1.10 Llamamos *Dinámica Estricta de Periodo Dos (SPTD)*, a la PTD con probabilidad 1. Dicho de otro modo, $P_{PTD} = 1$.

Las SPTD nos servirá para el tratamiento teórico del FSMG. En efecto, vamos a desarrollar el modelo bajo la condición de que se verifica la SPTD, aunque a posteriori demostramos que el FSMG *cumple necesariamente* con la SPTD. Esto permitirá comprender por qué el MG la verifica en el rango informacionalmente eficiente y brinda además un valor analítico para la validez de la PTD. Prestemos atención a la siguiente observación.

Supongamos que tenemos una instancia del FSMG. Surge la siguiente simetría: para una dada historia el número de estrategias que predicen 1 y el número de estrategias que predicen 0 son iguales a $\mathcal{L}/2$. Este hecho permite una significativa simplificación analítica del juego si suponemos que se verifica la SPTD [59]. En efecto: después de una ocurrencia impar de una dada historia, digamos h_k , la mitad de las estrategias consigue un punto virtual, y durante la siguiente ocurrencia de h_k *solo* la otra mitad obtiene un punto (de acuerdo con la SPTD). Así, si quitamos el punto previamente asignado a la primera mitad de las estrategias en lugar de sumar un punto a la segunda mitad, la dinámica del juego permanecerá sin cambios.

Mostramos en la siguiente sección que si la paridad asociada a la aparición de cada historia h_k , $1 \leq k \leq \mathcal{H}$ en una realización \mathcal{E} se registra en un arreglo, entonces la variable que mide la diferencia de los agentes que votan por opciones distintas es función de ese arreglo y puede ser explícitamente evaluada. Por ello definimos:

Definición 2.1.11 *Dada una realización $\mathcal{E} = \{\tilde{h}^0, I\}$, con $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ denotamos la función $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} : \mathbb{N} \times \mathcal{H} \rightarrow \{O, E\}$ que da la paridad de la aparición de cualquier historia en cualquier paso del juego. Así, por ejemplo, $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}(k, h_n) = O$, implica que en el paso k del juego, es decir al momento de la votación k -ésima, la historia $h_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ esta en una ocurrencia impar. En general escribiremos también $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ para denotar la función que da las paridades respectivas en el paso k .*

Observación 2.1.2 *Por ejemplo, si $m = 2$, y $\chi_{\mathcal{E}} = \{0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ (ver Definición 2.1.7) tenemos $\tilde{h}^0 = 00$, $\tilde{h}^1 = 01$, $\tilde{h}^2 = 10$, etc., y al paso $k = 6$, las historias $h_1 = 00$, $h_2 = 01$, $h_3 = 10$ y $h_4 = 11$ han aparecido 1, 3, 2 y 0 veces, respectivamente, y por lo tanto $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^6 = (O, O, E, E)$.*

En [59] estas ideas son desarrolladas con la idea de aproximar σ^2/N , en la región $z \ll z_c$, definiendo estados apropiados y tomando promedios sobre ensembles de los valores $(N_1 - N_0)^2$, donde N_1 y N_0 son los votantes a las opciones 1 y 0, respectivamente. Nosotros veremos que resulta más conveniente promediar en el tiempo en el siguiente sentido: con esa modalidad conseguiremos a) versiones analíticas simplificadas para el juego estándar y b) poder aplicar la técnica a otras versiones del juego. Por otro lado, clarificamos en este trabajo la verdadera naturaleza de los cálculos realizados en [59], mostrando que en realidad son una aproximación del MG introducido en [42] (lo que aquí hemos llamado MG_{rand} , ver Definición 2.1.8), en vez del MG original. Nuestro enfoque conduce a una importante simplificación, que puede ser aplicada además al cálculo de la zona de validez de la PTD y a otras instancias del juego disponibles en la literatura como la propuesta en [60] (el MG_{per}) por ejemplo.

Vamos a definir antes de continuar otra instancia diferente del juego que será de gran utilidad, lo hacemos con la intención de acceder analíticamente a otra cuestión cualitativa del MG presente en la literatura. Esto es, la existencia de cuasiperíodos de longitud $2\mathcal{H}$. Según mencionamos antes supondremos que $s = 2$, pero la instancia se define en general.

Definición 2.1.12 *Dados s , $2 \leq s \in \mathbb{N}$, y un $N \in \mathbb{N}$, una instancia del DMG (MG Determinístico) es un conjunto I de N jugadores tomados (con*

repetición) de \mathcal{S}_N , Para cada elemento J del conjunto I se tiene además un arreglo $(v_1, \dots, v_s)_J \in \mathbb{N}_0^s$ que acumula los puntos virtuales sobre cada estrategia y una función de decisión $\mathcal{D} : \mathbb{N}_0^s \rightarrow J$ que determina la estrategia a utilizar como aquella que posee el máximo de los puntos virtuales (si existe un único l tal que $v_l = \max\{v_i, \}_{1 \leq i \leq s}$), o un elemento determinado en otro caso.

La única diferencia entre el MG y el DMG consiste en que los empates han sido rotos a priori (de hecho lo haremos en la práctica aleatoriamente) durante la asignación de las estrategias a los jugadores. En nuestro caso de interés $s = 2$, y por ende cada jugador posee una estrategia preferida a priori que utilizará en caso de empate entre puntos virtuales de sus dos estrategias (si tuvieramos $s=3$, habría que elegir una estrategia predilecta para cada par de estrategias de cada jugador y otra por si hay triple empate). De este modo, si bien la asignación de las estrategias para un jugador dado y la decisión de cuál de ellas resultará preferida ha sido aleatoria, *no es aleatorio* el desarrollo del juego ya que los desempates son determinísticos (de allí el nombre DMG).

Definición 2.1.13 Como hicimos para el MG , se define análogamente DMG_{RA} , por lo que hablaremos del DMG_{rand} o DMG_{per} , etc.

Notablemente el enfoque analítico que se desarrolla adelante prevee que el DMG debería comportarse esencialmente igual al MG , a pesar de que de esta forma el juego es *completamente determinístico*. Veremos a través de simulaciones que en efecto esto es así y demostraremos que ciertos aspectos cualitativos presentes en el MG aparecen en forma “pura” en el DMG . En particular el comportamiento cuasiperiódico varias veces observado en el MG [61] se vuelve periódico en el DMG . Terminamos la sección con la siguiente

Definición 2.1.14 Definimos el $DFSMG$ ($FSMG$ Determinístico) como una instancia del DMG que verifica que $I = \mathcal{S}_N$, donde cada jugador tiene una estrategia predilecta seleccionada aleatoriamente.

Observación 2.1.3 Formalmente no hay un único $DFSMG$, contrariamente al $FSMG$, debido a la existencia de estrategias predilectas.

2.2. Puntos Virtuales y Estrategias

Durante esta sección y la siguiente nos restringimos al $FSMG$. Con \tilde{o} nos vamos a referir a un resultado posible del juego (i.e. $\tilde{o} = 0, 1$) y con $\sim \tilde{o}$ al resultado contrario.

Definición 2.2.1 Para una dada historia $h_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, el subconjunto de estrategias en $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ que predice cierto resultado \tilde{o} queda definido como $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \tilde{o}}$. También, dadas historias $h_{k_1}, h_{k_2} \dots h_{k_l}$ y resultados $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_l$ definimos el conjunto

$$\mathcal{F}_{h_{k_1}, \dots, h_{k_l}}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_l) = \mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_{k_1} \rightarrow \tilde{o}_1} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_{k_2} \rightarrow \tilde{o}_2} \cdots \cap \mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_{k_l} \rightarrow \tilde{o}_l}$$

es decir, el conjunto de estrategias que predicen el resultado \tilde{o}_i para la historia h_{k_i} con $1 \leq i \leq l$. Resumiremos la notación con $\mathcal{F}_{h_{k_1}, \dots, h_{k_l}}$ cuando el conjunto $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_l$ esté claro en el contexto.

Claramente $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow 1} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow 0} = \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$, y $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow 1} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow 0} = \mathcal{L}/2$. De igual manera definimos,

Definición 2.2.2 Dado un $l \in \mathbb{N}_0$, con $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, l}$ denotamos el conjunto de estrategias con l puntos virtuales.

Definición 2.2.3 Dado un $l \in \mathbb{N}_0$, y dada una historia h_k , denotamos con $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \tilde{o}, l}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \sim \tilde{o}, l}$) el conjunto de estrategias con l puntos virtuales que preciden \tilde{o} para h_k (resp. $\sim \tilde{o}$ para h_k).

Consideremos una realización arbitraria \mathcal{E} del FSMG, y su secuencia de historias $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$. Supongamos que en el paso t obtenemos la primera (y por lo tanto impar) ocurrencia de alguna historia h_k , es decir $\tilde{h}^t = h_k$. Entonces, las $\mathcal{L}/2$ estrategias $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \chi_{t+1}}$ son premiadas con un punto virtual. Supongamos ahora que en otro paso t' , $t' > t$, sucede la segunda ocurrencia (y por lo tanto par) de la historia h_k , es decir $\tilde{h}^{t'} = h_k$, entonces el SPTD implica que $\chi_{t+1} \simeq \chi_{t'+1}$, y por lo tanto exactamente la otra mitad $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \sim \chi_{t'+1}}$ es premiada. Para un dado agente, puede suceder que tenga ambas estrategias pertenezcan al mismo conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \chi_{t+1}}$ o $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_k \rightarrow \sim \chi_{t+1}}$, o una estrategia en cada uno. En ambos casos, la diferencia de puntos virtuales entre sus estrategias debido a la ocurrencia de la historia h_k suma cero después de la ocurrencia par. Por lo tanto, como ya hemos mencionado y siguiendo a [59], si modificamos la regla usual de los puntos asignados, premiando con un punto aquellas estrategias que predicen exitosamente el lado minoritario en las ocurrencias impares de las historias y quitándole un punto a las que pierden en las pares la dinámica del juego sería la misma que en el MG. Sin embargo, es fácil ver que con nuestra regla de asignación de puntos la cantidad de puntos virtuales acumulada por una estrategia, en cualquier momento, varía entre 0 y $2^m = \mathcal{H}$ (es decir, el número de historias). Así, una estrategia podría alcanzar los 2^m puntos si se suceden consecutivamente las ocurrencias impares de todas las historias y acierta el lado minoritario en todos los casos.

Para un dado arreglo de paridad $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ (ver Definición 2.1.11) correspondiente al paso k de un dado \mathcal{E} , podemos obtener fácilmente el número de estrategias con exactamente l puntos virtuales $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}$. En particular, consideremos $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$, y fijemos $0 \leq n_e, n_o \leq \mathcal{H}$ como el número de ocurrencias pares e impares guardadas en $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ (notemos que $n_o = \mathcal{H} - n_e$). Evaluemos primero el caso $n_e = \mathcal{H}$ (sucede por ejemplo en el paso $k = 0$). Entonces ninguna estrategia tiene puntos virtuales debido a que solo durante las ocurrencias impares las estrategias obtienen puntos, esto es, $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},0} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$, y $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},i} = 0$ para $1 \leq i \leq \mathcal{H}$. Por otro lado si $n_e = \mathcal{H} - 1$, existe solamente una historia, digamos h_1 , en alguna ocurrencia impar y las estrategias sólo pudieron haber acumulado un punto virtual después de la ocurrencia de esta historia. Pero ahora, sin importar el resultado \tilde{o} del juego (sea $\tilde{o} = 0$ o $\tilde{o} = 1$) después de esa ocurrencia impar de h_1 tenemos que las estrategias pertenecientes a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_1 \rightarrow \tilde{o}}$ obtuvieron exactamente un punto virtual, y aquellas en el complemento $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_1 \rightarrow \sim \tilde{o}}$ obtuvieron exactamente 0 puntos. Así, $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},0} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L},1} = \mathcal{L}/2$, y $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},i} = 0$ para $2 \leq i \leq \mathcal{H}$. En el caso general para números de paridad n_o y n_e observamos que el máximo número de puntos virtuales para una dada estrategia está acotado por n_o , puesto que las ocurrencias pares no suman puntos.

Sea $0 \leq l \leq n_o$, y sean $h_{k_1}, \dots, h_{k_{n_o}}$ las estrategias en ocurrencia impares y $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_{n_o}$ el resultado después de la ocurrencia de cada h_{k_i} . El número $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}$ puede ser fácilmente evaluado notando que una estrategia tiene exactamente l puntos si ha predicho exitosamente el resultado (ganó un punto virtual) en l iteraciones de las n_o ocurrencias impares, y fracasado en predecir el resto de las $n_o - l$ veces. Por ejemplo, si una estrategia pertenece a

$$\mathcal{F}_{h_{k_1}, \dots, h_{k_l}}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_l)$$

ha predicho exitosamente el resultado l veces. Si además pertenece a

$$\mathcal{F}_{h_{l+1}, \dots, h_{k_{n_o}}}(\sim \tilde{o}_{l+1}, \dots, \sim \tilde{o}_{n_o})$$

ha fracasado en la predicción de los resultados $n_o - l$ veces. Así, las estrategias que pertenecen a la intersección de ambos conjuntos

$$\mathcal{F}_{h_{k_1}, \dots, h_l, h_{l+1}, \dots, h_{k_{n_o}}}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \dots, \tilde{o}_l, \dots, \sim \tilde{o}_{l+1}, \dots, \sim \tilde{o}_{n_o})$$

tienen exactamente l puntos. Podemos obtener entonces que

$$\#\mathcal{F}_{h_{k_1}, \dots, h_l, h_{l+1}, \dots, h_{k_{n_o}}} = \mathcal{L}/2^{n_o}$$

ya que solamente $\mathcal{L}/2$ pertenece a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_{k_1} \rightarrow \tilde{o}_1}$ y de aquellas estrategias solamente la mitad predice exitosamente el resultado \tilde{o}_2 de la historia h_{k_2} , es

decir $\#(\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_{k_1} \rightarrow \tilde{o}_1} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{L},h_{k_2} \rightarrow \tilde{o}_2}) = \mathcal{L}/2^2$, y así hasta tener el número $\mathcal{L}/2^l$ de estrategias que han predicho exitosamente $\tilde{o}_1, \dots, \tilde{o}_l$, pero de este conjunto exactamente la mitad falló en predecir \tilde{o}_{l+1} (predice $\sim \tilde{o}_{l+1}$) y así siguiendo. En nuestro argumento hemos supuesto que las historias que habían acumulado puntos eran exactamente h_{k_1}, \dots, h_{k_l} , naturalmente hay que contar los casos en que es otro el conjunto de l historias, de las disponibles n_o en ocurrencia impar, que ha acumulado los puntos. Puesto que hay $\binom{n_o}{l}$ formas de seleccionar l historias del conjunto $\{h_{k_1}, \dots, h_{k_{n_o}}\}$ de historias en alguna ocurrencia impar, obtenemos entonces el siguiente

Lema 2.2.1 *Sea \mathcal{E} una instancia del MG, consideremos la función de paridades $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ en un paso k del juego, y sea $0 \leq n_o \leq \mathcal{H}$ la cantidad de historias en ocurrencia impar (i.e. $\#\{h \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h) = \mathcal{O}\}$), entonces para $0 \leq l \leq n_o$ tenemos*

$$\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},l} = \binom{n_o}{l} \mathcal{L}/2^{n_o}. \quad (2.1)$$

Es importante destacar lo siguiente: para una dada historia h , y un dado arreglo de paridad \mathcal{P} (con $n_o + n_e = \mathcal{H}$), el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}$ puede descomponerse como $\mathcal{S}_{\mathcal{L},l} = \mathcal{S}_{\mathcal{L},h \rightarrow \tilde{o},l} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{L},h \rightarrow \sim \tilde{o},l}$. Si estos conjuntos son del mismo tamaño o no, depende de la paridad de la historia h . Para comprender mejor el resultado siguiente pensemos en se han jugado exactamente k pasos del juego. Sea $\tilde{h}^k = h_p$ la historia actual (resultado de la ejecución del paso k), lo que pretendemos hacer en breve es hacer predicciones acerca de la ejecución del paso $k + 1$, para ello tenemos que estudiar los puntajes de las estrategias en el paso k . Notemos que si la historia actual h_p está en una ocurrencia *impar* entonces en el paso k lo estaba en una *par* (h_p es el resultado de la ejecución k), o sea $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h_p) = E$ y si h_p está en una aparición *par* entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h_p) = \mathcal{O}$.

Lema 2.2.2 *Sea \mathcal{E} una instancia del MG, consideremos la función de paridades $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ en un paso k del juego, y sea $0 \leq n_o \leq \mathcal{H}$ la cantidad de historias en ocurrencia impar (i.e. $\#\{h \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h) = \mathcal{O}\}$), entonces para $0 \leq l \leq n_o$ tenemos que*

1. *Si una historia h esta en ocurrencia par (i.e. $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h) = E$) entonces*

$$\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_o \rightarrow \tilde{o},l} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_o \rightarrow \sim \tilde{o},l} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}/2 = \binom{n_o}{l} \mathcal{L}/2^{n_o+1}. \quad (2.2)$$

donde h_o es la subsiguiente ocurrencia impar de h .

2. Si una historia h esta en ocurrencia impar (i.e. $P_{\mathcal{E}}^k(h) = O$) entonces, si llamamos \tilde{o} al resultado del juego en la aparición previa de la historia tenemos que

$$\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \tilde{o},l} = \binom{n_o - 1}{l - 1} \mathcal{L} / 2^{n_o} \quad (2.3)$$

$$\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \sim \tilde{o},l} = \binom{n_o - 1}{l} \mathcal{L} / 2^{n_o}. \quad (2.4)$$

donde h_e es la subsiguiente ocurrencia par de h .

Dem. Si h está en una ocurrencia par podemos aplicar el mismo argumento usado en (2.1) para el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_o \rightarrow \tilde{o}}$ (o $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_o \rightarrow \sim \tilde{o}}$) en lugar de $\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}$ y obtener (2.2).

La situación es diferente si tomamos una dada historia h en alguna ocurrencia impar. Los cardinales de los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \tilde{o},l}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \sim \tilde{o},l}$ *no pueden* ser iguales. Como después de la última ocurrencia de h el resultado del juego fue \tilde{o} entonces las estrategias que pertenecen a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \tilde{o}}$ tienen al menos un punto virtual, de manera que aquellas con l puntos han predicho exitosamente el resultado exactamente $l - 1$ veces de las $n_o - 1$ posibles veces (el resto de historias en ocurrencia impar) que es lo que dice precisamente (2.3). Por su parte, aquellas que pertenecen a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \sim \tilde{o}}$ han predicho exitosamente el resultado exactamente l veces de las $n_o - 1$ veces posibles lo que da (2.4). Obviamente, una vez más $\#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \tilde{o},l} + \#\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_e \rightarrow \sim \tilde{o},l} = \#\mathcal{S}_{\mathcal{L},l}$, lo que viene de la identidad $\binom{n_o - 1}{l - 1} + \binom{n_o - 1}{l} = \binom{n_o}{l}$. \square

2.3. Puntos Virtuales y los Agentes

Definamos como \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_0 (resp. N_1, N_0) al número de agentes que elige 1 y 0, respectivamente en el FSMG (resp. MG). Además, con $N_{\tilde{o}}$ y $N_{\sim \tilde{o}}$ representamos el número de agentes que eligen la opción \tilde{o} o la opción opuesta $\sim \tilde{o}$. Cuando se necesite, la dependencia sobre la iteración k será explícitamente representada por $\mathcal{N}_{\tilde{o}}^k$ y $\mathcal{N}_{\sim \tilde{o}}^k$.

Particularicemos sobre los \mathcal{N} agentes del FSMG. Para una dada \mathcal{E} , en un dado paso k del juego consideramos la historia actual h_p (ver Definición 2.1.9) y la función de paridad $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$. Llamamos agentes *indecisos* a aquellos con ambas estrategias igualmente puntuadas y tal que ambas predicen lados opuestos para la historia actual; esto es, una estrategia pertenece a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_p \rightarrow \tilde{o}}$ y la otra a $\mathcal{S}_{\mathcal{L},h_p \rightarrow \sim \tilde{o}}$. El número de agentes indecisos es definido como \mathcal{N}_u . Además, los agentes *decididos* son los restantes, y tenemos $\mathcal{N}_d = \mathcal{N} - \mathcal{N}_u$.

También introducimos el número de agentes decididos e indecisos que eligen la opción \tilde{o} como $\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}}$ y $\mathcal{N}_{u_{\tilde{o}}}$, respectivamente. Claramente, tenemos

$$\mathcal{N}_{\tilde{o}} = \mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}} + \mathcal{N}_{u_{\tilde{o}}}$$

y

$$\mathcal{N}_{\sim\tilde{o}} = \mathcal{N}_{d_{\sim\tilde{o}}} + \mathcal{N}_{u_{\sim\tilde{o}}}.$$

Supongamos ahora que para $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ tenemos n_e^k y n_o^k historias en ocurrencias pares e impares, respectivamente. Quitamos la k de n_o y n_e por simplicidad. Primero asumimos que la historia actual h_p está por aparecer en una ocurrencia impar (es decir que en el paso k su paridad es E , lo que equivale a $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h_p) = E$, y por ende cuando los agentes la utilicen en la votación del paso k la verán en una aparición impar y por ende $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{k+1}(h_p) = O$). \mathcal{N}_u puede ser fácilmente calculado notando que los agentes indecisos tienen, para cada l , una estrategia de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}, l}$ y una de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \sim\tilde{o}, l}$. El número total de agentes en esta situación es

$$\mathcal{N}_u = \sum_{l=0}^{n_o} \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}, l} \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \sim\tilde{o}, l}$$

y puede ser evaluado de (2.2), teniendo en cuenta que si la historia h_p presente sucede en una vez impar, entonces en $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k$ figura en una ocurrencia par $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^k(h_p) = E$.

$$\mathcal{N}_u = \mathcal{L}^2 / 2^{2n_o+2} \sum_{l=0}^{n_o} \binom{n_o}{l}^2 = \mathcal{L}^2 / 2^{2n_o+2} \binom{2n_o}{n_o} \quad (2.5)$$

Por otro lado, los agentes decididos que eligen \tilde{o} para la historia actual tienen o bien dos estrategias, que pueden tener predicciones repetidas, de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}}$ o una de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}, l}$ y otra de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \sim\tilde{o}, j}$ con $l > j$. Entonces, $\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}}$ puede evaluarse como

$$\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}} = \binom{\#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}}}{2} + \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}} + \sum_{l=1}^{n_o} \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \tilde{o}, l} \left(\sum_{j=0}^{l-1} \#\mathcal{S}_{\mathcal{L}, h_p \rightarrow \sim\tilde{o}, j} \right)$$

y de (2.2)

$$\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}} = \binom{\mathcal{L}/2}{2} + \mathcal{L}/2 + \mathcal{L}^2 / 2^{2n_o+2} \sum_{l=1}^{n_o} \binom{n_o}{l} \left(\sum_{j=0}^{l-1} \binom{n_o}{j} \right) \quad (2.6)$$

es fácil verificar que $\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}} = \mathcal{N}_{d_{\sim\tilde{o}}}$, así si h_p está por aparecer en una ocurrencia impar

$$\mathcal{N}_{d_{\tilde{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\tilde{o}}} = 0 \quad \mathcal{N}_u = \mathcal{L}^2 / 2^{2n_o+2} \binom{2n_o}{n_o}. \quad (2.7)$$

Asumimos ahora que la historia actual está por aparecer en una ocurrencia par. Con argumentos similares usados para la ocurrencia impar, tenemos

$$\mathcal{N}_u = \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \sum_{l=1}^{n_o-1} \binom{n_o-1}{l-1} \binom{n_o-1}{l} = \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \binom{2(n_o-1)}{n_o} \quad (2.8)$$

y de (2.3), (2.4), obtenemos

$$\mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} = \binom{\mathcal{L}/2}{2} + \mathcal{L}/2 + \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \left(\sum_{l=1}^{n_o} \binom{n_o-1}{l-1} \left(\sum_{j=0}^{l-1} \binom{n_o-1}{j} \right) \right) \quad (2.9)$$

y

$$\mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} = \binom{\mathcal{L}/2}{2} + \mathcal{L}/2 + \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \left(\sum_{l=1}^{n_o-1} \binom{n_o-1}{l} \left(\sum_{j=1}^{l-1} \binom{n_o-1}{j-1} \right) \right) \quad (2.10)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} = \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \left(\binom{2(n_o-1)}{n_o-1} + \binom{2(n_o-1)}{n_o} \right) \quad (2.11)$$

lo que puede ser simplificado como

$$\mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} = \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \binom{2n_o-1}{n_o}$$

y entonces si la historia actual h_p está por aparecer en una ocurrencia par tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} &= \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \binom{2n_o-1}{n_o} \\ \mathcal{N}_u &= \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \binom{2(n_o-1)}{n_o} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La Ecuación (2.12) muestra que el FSMG verifica necesariamente el SPTD. De hecho, las ecuaciones (2.3) y (2.4) fueron obtenidas bajo la asunción de que \bar{o} era el resultado del juego durante la última ocurrencia (impar) de la historia actual. Por otro lado (2.12) muestra que $\mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} > \mathcal{N}_u$. En particular, de las ecuaciones (2.11) y (2.8) fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{N}_{d_{\bar{o}}} - \mathcal{N}_{d_{\sim\bar{o}}} - \mathcal{N}_u = \mathcal{L}^2/2^{2n_o} \binom{2(n_o-1)}{n_o-1} > 0$$

y entonces no importa el lado al que los agentes indecisos vayan, el lado minoritario será $\sim \tilde{o}$. Por un lado podría pensarse que este resultado no sorprende pues la deducción se llevo a cabo bajo la hipótesis de *SPTD*, sin embargo, si se ve con detenimiento la deducción se descubre que en realidad esa hipótesis resultó comoda unicamente para trabajar en un paso cualquiera k de una cierta realización. En particular, pudimos suponer que los puntajes virtuales de las estrategias estaban acotados entre 0 y \mathcal{H} , y de ahí avanzar en los cálculos. Por otra parte, imaginemos que para una dada realización \mathcal{E} estudiamos su evolución desde el paso $k = 0$. En ese paso las estrategias poseen todas 0 puntos virtuales. A partir de ese momento, podemos esperar hasta el primer paso k en que una cierta historia h se repite por segunda vez. Evidentemente ese paso verifica $1 \leq k \leq \mathcal{H}$, pues de otro modo ya habría repeticiones. Pero entonces *la primera vez que una historia aparece por segunda vez* necesariamente los puntos virtuales de las estrategias son menores o iguales a \mathcal{H} y por ende *podemos aplicar el argumento que conduce a (2.12)* y obtener que necesariamente se cumple la *PTD* en la primera aparición por segunda vez de una historia. En ese momento los puntos que acumulan la estrategias por esa historia se compensan y podemos aplicar nuevamente el argumento y concluir entonces lo siguiente.

Teorema 2.3.1 *En cualquier realización \mathcal{E} del FSMG se verifica la SPTD*

Observación 2.3.1 *Notemos que el Teorema precedente no depende de la RA utilizada.*

El Teorema 2.3.1 esclarece por qué (como veremos en breve) el *FSMG* da excelentes aproximaciones solamente en la primera parte de la región informacionalmente eficiente del *MG*, y como veremos echará luz sobre el proceso que conduce a la ruptura de la *PTD*. En la próxima sección aplicamos las cuentas desarrolladas al MG_{rand} al DMG_{rand} y al MG_{per} . Nuestra aproximación simplifica la hecha en [59] y está basada en el hecho de que el número $\mathcal{N}_1^k - \mathcal{N}_0^k$ depende solamente del arreglo de paridad \mathcal{P}^k , y por lo tanto para reglas de actualización *RA* que conduzcan a ocurrencias de paridad “típicas” la evaluación de (2.18) y (2.19) puede simplificarse.

2.4. El *MG* como muestreo del *FSMG*

Tomemos una instancia del *MG*, por definición se trata de una muestra al azar de N agentes de los \mathcal{N} disponibles del *FSMG* (con reposición).

Pensemos ahora en una realización del *FSMG* y supongamos que en un paso dado de tiempo k tomamos una muestra de N jugadores. Obtendremos de ese modo $N_{d_{\tilde{o}}}$ agentes decididos a jugar al lado \tilde{o} , $N_{d_{\sim\tilde{o}}}$ decididos al lado $\sim\tilde{o}$, y N_u indecisos

$$N_{d_{\tilde{o}}} + N_{d_{\sim\tilde{o}}} + N_u = N \quad (2.13)$$

Pensando de ese modo, los valores $(N_{d_{\tilde{o}}}, N_{d_{\sim\tilde{o}}}, N_u)$ son resultados de una variable aleatoria (x_1, x_2, x_3) con una distribución multinomial de probabilidades p_1, p_2 y p_3 :

$$p_1 = \frac{N_{d_{\tilde{o}}}}{N} \quad p_2 = \frac{N_{d_{\sim\tilde{o}}}}{N} \quad p_3 = \frac{N_u}{N} \quad (2.14)$$

por lo que

$$P(x_1 = N_{d_{\tilde{o}}}, x_2 = N_{d_{\sim\tilde{o}}}, x_3 = N_u) = \frac{N!}{(N_{d_{\tilde{o}}})! (N_{d_{\sim\tilde{o}}})! (N_u)!} p_1^{N_{d_{\tilde{o}}}} p_2^{N_{d_{\sim\tilde{o}}}} p_3^{N_u} \quad (2.15)$$

En secciones futuras nos va a interesar la variable $N_{\tilde{o}}$ (los agentes que eligen un lado dado). Notemos que en el contexto presente, $N_{\tilde{o}}$ es una variable aleatoria que proviene del experimento de obtener una muestra de la multinomial mencionada arriba, tomar $N_{d_{\tilde{o}}}, N_u$. Luego elegir de los indecisos quienes finalmente votarán \tilde{o} y finalmente sumar ambos resultados. El paso de elegir los indecisos que finalmente votarán \tilde{o} , $N_{u_{\tilde{o}}}$ requiere conocer la distribución de probabilidad de esa variable. Considerando que en el *MG* los indecisos eligen al azar entre sus estrategias (aleatoriamente construidas al comienzo del juego) podemos aproximar esa variable como una $x_{31} \sim Bi(N_u, 1/2)$. Consideremos entonces

$$N_{\tilde{o}} = N_{d_{\tilde{o}}} + N_{u_{\tilde{o}}}$$

que puede verse el resultado de la variable aleatoria $x = x_1 + x_{31}$. Tenemos que

Lema 2.4.1 *Sea \mathcal{E} una realización del *FSMG*. En un paso k de \mathcal{E} se toman N agentes con repetición y se define x el número de agentes que eligen \tilde{o} . Se tiene que la variable aleatoria $x = x_1 + x_{31}$ tiene distribución*

$$x \sim Bi(N, p_1 + p_3/2)$$

Dem. Queremos calcular $P(x = k)$, con $x = x_1 + x_{31}$. Observemos que de (2.15) se tiene

$$P(x_1 = j \cap x_2 = s) = \frac{N!}{j!s!(N-j-s)!} p_1^j p_2^s (1-p_1-p_2)^{N-j-s} \quad (2.16)$$

estando los p_i definidos en (2.14). Por otro lado, sabemos que:

$$p(x_{31} = k - j | x_1 = j \cap x_2 = s) = \binom{N - j - s}{k - j} \left(\frac{1}{2}\right)^{N - j - s} \quad (2.17)$$

puesto que si $x_1 = j$ y $x_2 = s$, debe ser $x_3 = N - j - s$. Escribimos

$$\begin{aligned} P(x = k) &= P(x_1 + x_{31} = k) = \sum_{j=0}^k P(x_1 = j \cap x_{31} = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(x_1 = j \cap x_{31} = k - j \cap (\cup_{s=0}^N x_2 = s)) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^N P(x_1 = j \cap x_{31} = k - j \cap x_2 = s) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^N P(x_1 = j \cap x_2 = s) P(x_{31} = k - j | x_1 = j \cap x_2 = s) \end{aligned}$$

de (2.16) y (2.17) se tiene,

$$P(k) = \sum_{j=0}^k \frac{N! p_1^j}{j!(k-j)!} \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{2}\right)^{N-j} \sum_{s=0}^N \frac{p_2^s}{(N - s - k)! s!} \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{2}\right)^{-s}$$

Multiplicando y dividiendo por $(N - k)!$ y reordenando:

$$P(k) = \sum_{j=0}^k \frac{N! p_1^j}{j!(k-j)!(N-k)!} \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{2}\right)^{N-j} \sum_{s=0}^N \binom{N-k}{s} \left(\frac{2p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^s$$

Usando la formula del binomio

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^N \binom{N-k}{s} \left(\frac{2p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^s &= \left(1 + \frac{2p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^{N-k} \\ &= \left(\frac{1 - p_1 + p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^{N-k} \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}
P(k) &= \sum_{j=0}^k \frac{N! p_1^j}{j!(k-j)!(N-k)!} \left(\frac{1-p_1-p_2}{2} \right)^{N-j} \left(\frac{1-p_1+p_2}{1-p_1-p_2} \right)^{N-k} \\
&= \frac{N!}{(N-k)!k!} \frac{(1-p_1+p_2)^{N-k}}{2^N} \sum_{j=0}^k \frac{p_1^j}{j!(k-j)!} (1-p_1-p_2)^{k-j} 2^j k! \\
&= \frac{N!}{(N-k)!k!} \frac{(1-p_1+p_2)^{N-k}}{2^N} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (2p_1)^j (1-p_1-p_2)^{k-j}
\end{aligned}$$

Usando nuevamente la fórmula del binomio

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (2p_1)^j (1-p_1-p_2)^{k-j} = (p_1 + 1 - p_2)^k$$

tenemos

$$P(k) = \left(\frac{1}{2} \right)^N \binom{N}{k} (1-p_1+p_2)^{N-k} (1+p_1-p_2)^k$$

Que podemos reescribir como:

$$P(k) = \binom{N}{k} \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right)^k \left(1 - \left(p_1 + \frac{p_3}{2} \right) \right)^{N-k}$$

es decir una binomial con parámetros N y $p_1 + \frac{p_3}{2}$. \square

2.5. El MG con diferentes reglas de actualización de historias

Supongamos que en lugar de jugar al MG utilizando la historia actualizada que corresponde de acuerdo al lado minoritario del paso anterior, utilizamos una historia elegida aleatoriamente a cada iteración, en ese caso obtendremos una realización del MG_{rand} . En [42] se propone por primera vez el MG_{rand} , y como resultado de las similitudes cualitativas entre el MG y el MG_{rand} se propuso en ese artículo que la memoria era irrelevante para la dinámica del juego. Casi inmediatamente [62, 63], se dieron argumentos teóricos que proponían lo contrario. Varios años mas tarde [64], se desarrollaron grandes simulaciones numéricas que muestran que efectivamente σ^2/N difiere substancialmente entre el MG y el MG_{rand} en la fase simétrica. También en

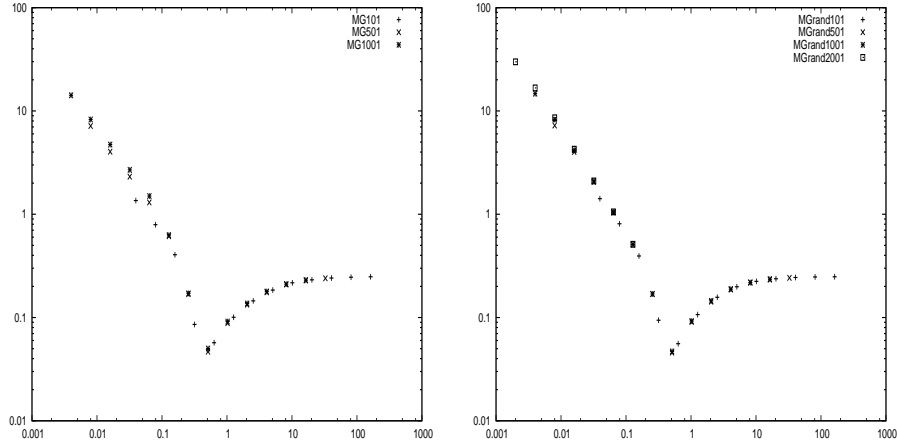


Figura 2.1: σ^2/L como función de $z = 2^m/L$, MG común derecha y MG_{rand} izquierda, se observa la invariancia respecto de z en el MG_{rand} para todas las fases.

[64] se muestra computacionalmente que el comportamiento de σ^2/N depende de N en el MG (echando por tierra la invariancia respecto de la variable $z = \frac{2^m}{N}$) para valores de $z < 0, 1$, pero que sin embargo MG_{rand} sí rescala con z . En nuestras simulaciones verificamos ambas cosas (ver Figura 2.1)

Para una dada realización \mathcal{E} del MG y un lado minoritario \tilde{o} , escribimos

$$\sigma_{\mathcal{E},MG}^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (N_{\tilde{o}}^k - N/2)^2 \quad (2.18)$$

y promediando sobre una familia de diferentes realizaciones $\{\mathcal{E}_i\}_{1 \leq i \leq I}$

$$\sigma_{MG}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sigma_{\mathcal{E}_i,MG}^2 \quad (2.19)$$

Nuestro primer propósito es mostrar que utilizando los resultados de las secciones previas, σ_{MG}^2 puede ser fácilmente aproximado en el MG_{rand} durante la validez de la PTD .

Estamos interesados entonces en

$$\sigma^2 = E(N_{\tilde{o}} - N/2)^2 \quad (2.20)$$

donde el valor esperado está tomado sobre todos los pasos de todas las realizaciones \mathcal{E} (notemos que distintas RA puede conducir a realizaciones cualitativamente diferentes). Como hemos visto en la Sección 2.3 la variables $\mathcal{N}_{d\tilde{o}}$ (o

$\mathcal{N}_{d\sim\delta}$) y \mathcal{N}_u pueden escribirse en términos de la función de paridad \mathcal{P} únicamente (con expresiones distinguidas para veces pares e impares de aparición de la historia presente). Por otro lado, en la sección previa vimos en el Lema 2.4.1 que N_{δ} podía verse como la muestra de una x , $x \sim Bi(N, p_1 + p_3/2)$. Como las p_i dependen de $\mathcal{N}_{d\delta}$ (o $\mathcal{N}_{d\sim\delta}$) y \mathcal{N}_u (ver (2.14) entonces en aquellas instancias del MG con reglas RA que conduzcan a paridades “típicas”, (2.20) podría obtenerse promediando sobre estas paridades. Si bien la cuenta “correcta” requeriría conocer la función de distribución exacta de paridades, nosotros veremos para el caso MG_{rand} que alcanza con evaluar en la paridad promedio (ver Observación 2.5.2).

Para aclarar esto, notemos que estamos listos para evaluar (2.20) de (2.7), en ocurrencias pares de la historia actual, y de (2.12) en ocurrencias impares. De esta forma (2.18), y así (2.19) pueden ser evaluadas por medio del arreglo de paridad solamente. Aquí es donde entra en juego la RA bajo consideración. En particular, notemos que para la regla de actualización aleatoria de la historia (es decir para el MG_{rand}), tenemos que en una dada realización del juego \mathcal{E} esperamos en promedio para cualquier tiempo k , que $n_o^k = n_e^k$ (es decir, habrá tantas historias en aparición impar como las que haya en aparición par) ya que la probabilidad de una dada historia de estar en aparición par o impar es $1/2$. Obtenemos entonces, para un dado cerebro m , que $n_o = n_e = 2^{m-1} = \mathcal{H}/2$. Así pues, en promedio, para evaluar (2.20) en el MG_{rand} deberíamos usar la mitad de los pasos (2.7) y (2.12) la otra mitad, siempre con $n_o = \mathcal{H}/2$ en ambos casos. Para hacer este cálculo escribimos

$$\sigma_{MG_{rand}}^2 = \frac{1}{2}E_e(N_{\delta} - N/2)^2 + \frac{1}{2}E_o(N_{\delta} - N/2)^2 \quad (2.21)$$

para distinguir ambas contribuciones. Por un lado, en las veces impares

$$E_o(N_{\delta} - N/2)^2 = Var(N_{\delta} - N/2) + (E(N_{\delta} - N/2))^2 = N/4 \quad (2.22)$$

en efecto, de (2.7) tenemos que $N_{\delta} = N_{\sim\delta}$, de donde $p_1 = p_2$ (ver (2.14)) de allí, debido a que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ resulta $p_1 + p_3/2 = 1/2$, y del Lema 2.4.1, $N_{\delta} \sim x \sim Bi(N, 1/2)$ por lo que $Var(N_{\delta} - N/2) = N/4$, $E(N_{\delta} - N/2) = 0$. Por su parte,

$$\begin{aligned} E_e(N_{\delta} - N/2)^2 &= Var(N_{\delta} - N/2) + (E(N_{\delta} - N/2))^2 \\ &= N(1 - (p_1 - p_2)^2)/4 + N^2(p_1 - p_2)^2/4 \\ &= N(1/4 + (p_1 - p_2)^2(N - 1)/4) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde, en la segunda igualdad, el primer término es la varianza de la $Bi(N, p_1 + p_3/2)$, escribiendo $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, y el segundo se obtiene de notar que

$E(N_{\bar{o}}) = N(p_1 + p_3/2)$, escribiendo la diferencia en las variables p_1 y p_2 . Por lo tanto, obteniendo de (2.12) la expresión de $\mathcal{N}_{\bar{o}} - \mathcal{N}_{\sim\bar{o}}$ con $n_o = \mathcal{H}/2$ y usando (2.14) tenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{\mathcal{L}^2}{2^{\mathcal{H}}} \binom{\mathcal{H}-1}{\mathcal{H}/2} / \mathcal{N} = \frac{\mathcal{L}^2}{2^{\mathcal{H}+1}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} / \mathcal{N}$$

como $\mathcal{N} = \binom{\mathcal{L}}{2} + \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)/2$, y $\mathcal{L} = 2^{\mathcal{H}}$, se sigue

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2^{\mathcal{H}}(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}})} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2}. \quad (2.24)$$

Finalmente, (2.21), (2.22) y (2.24) junto con la identidad previa demuestran el siguiente

Teorema 2.5.1 *Consideremos el MG_{rand} con N agentes. Tenemos que la varianza reducida es*

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N = 1/4 + \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}}(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}})} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \right)^2 (N-1)/8$$

como $N \gg 1$, podemos decir reescribiendo lo anterior

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim 1/4 + \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}}(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}})} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \right)^2 N/8$$

que para el caso $2^{\mathcal{H}} = 2^{2^m} \gg 1$ se escribe

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim 1/4 + \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \right)^2 N/8$$

y usando la conocida aproximación (ver p.ej. [66] pag. 180) $\frac{1}{2^{\mathcal{H}}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\mathcal{H}\pi}}$, obtenemos la forma simplificada

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{4\mathcal{H}\pi}$$

Observación 2.5.1 *Notar que la expresión $\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{4\mathcal{H}\pi}$ indica que la varianza reducida $\sigma_{MG_{rand}}^2/N$ es función (salvo mayor orden) de la variable reducida $z = \frac{2^m}{N}$, pues $\mathcal{H} = 2^m$, lo que acuerda con la invariancia del MG_{rand} mencionada previamente.*

Notemos que durante la demostración del Teorema 2.5.1 puede observarse la varianza reducida de las veces pares e impares de aparición de las historias, en particular durante las veces impares la varianza reducida es $\frac{1}{4}$. Un hecho conocido en la literatura y observable experimentalmente (ver Figura 2.2).

Observación 2.5.2 Limitación del modelo I *Como hemos mencionado la aproximación se hace en los vectores de paridad promedio para los que $n_o = \mathcal{H}/2$, en realidad la cuenta completa es factible aunque no se obtienen mejoras significativas. En efecto, puede verse que la probabilidad de hallarse en un vector de paridad con n_o dado es precisamente $\binom{\mathcal{H}}{n_o} 2^{-\mathcal{H}}$ (pues cada historia está en ocurrencia par o impar con probabilidad $1/2$, en ese caso se pueden repetir los argumentos del teorema previo para arribar a que*

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim 1/4 + \frac{\sum_{1 \leq n_o \leq \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2^{2n_o}} \binom{2n_o}{n_o} \right)^2 \binom{\mathcal{H}}{n_o}}{2^{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}}\right)^2} (N-1)/8$$

Observación 2.5.3 Limitación del modelo II *Despreciando las contribuciones de los indecisos en veces pares e impares, i.e. tomando*

$$\sigma_{MG_{rand}}^2/N \sim \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{1}{2^{\mathcal{H}}}\right)} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \right)^2 (N-1)/4$$

se obtiene una mejor aproximación que con la cuenta completa. Ignoramos la razón de esto pero en [59] el rescale se hace de tal modo que todas esas contribuciones desaparecen (en nuestra cuenta no vemos como eliminarlas). En la Figura 2.5 puede observarse esto.

Como otro ejemplo dentro de la PTD, examinamos también la regla de actualización dada por [60], esto es MG_{per} . En este caso la actualización de la historia sigue un patrón periódico, cubriendo todas las posibles historias $h_1, \dots, h_{\mathcal{H}}$ (esto es $RA^k(h_i) = h_{i+1}$ módulo \mathcal{H}). Esta regla es introducida en [60] para evaluar la longitud efectiva de las historias en el MG . Para efectuar los cálculos observemos que por construcción de la RA tendremos que una historia dada cualquiera estará con probabilidad $1/2$ en una aparición par o impar. La diferencia respecto del MG_{rand} es que ahora n_o cicla desde 0 a \mathcal{H} . Volvemos entonces a interesarnos en (2.20), pero en vez de la descomposición (2.21) consideramos que por construcción de la RA tenemos que, digamos, la historia h_i es visitada dos veces por ciclo, y en la aparición impar de la historia actual se tiene que $n_o = i - 1$ mientras que en la aparición par $n_o = \mathcal{H} - i + 1$. Es decir que en las apariciones de la historia h_i podemos escribir

$$E_i(N_{\bar{o}} - N/2)^2 = 1/2 E_{i,e,n_o=\mathcal{H}-i+1} (N_{\bar{o}} - N/2)^2 + 1/2 E_{i,o,n_o=i-1} (N_{\bar{o}} - N/2)^2$$

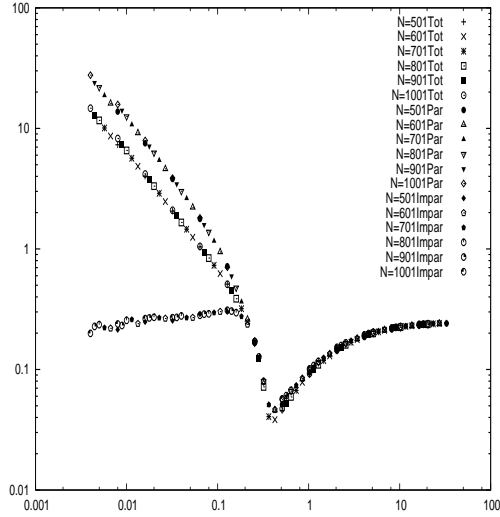


Figura 2.2: σ^2/N experimental del MG_{rand} , distintos N discriminando apariciones pares e impares de las historias.

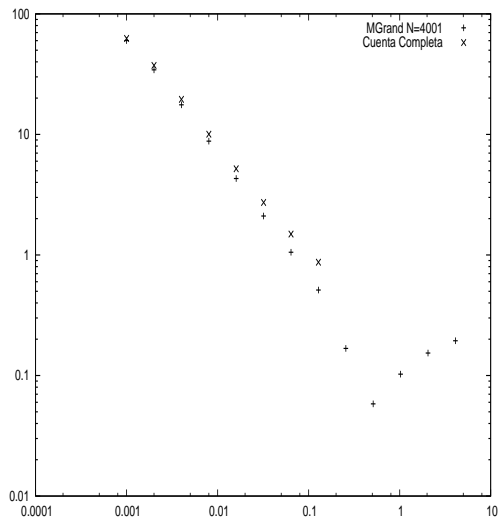


Figura 2.3: σ^2/N experimental del MG_{rand} con $N = 4001$ y el cuenta completa (i.e. primera identidad del Teorema 2.5.1).

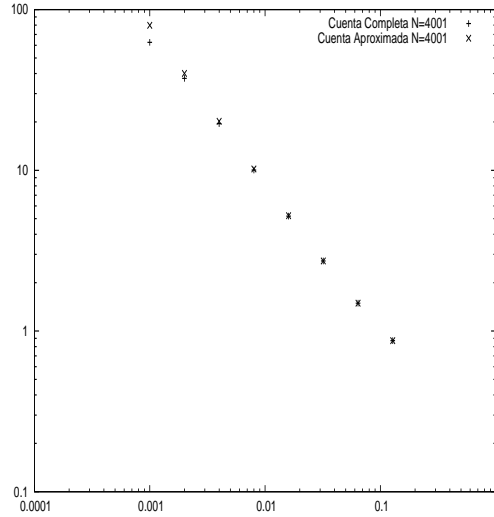


Figura 2.4: Comparación del σ^2/N aproximado por la primera y última identidad del Teorema 2.5.1. Se pone un único $N = 4001$ debido a la invariancia respecto de la variable reducida $z \sim 2^m/N$.

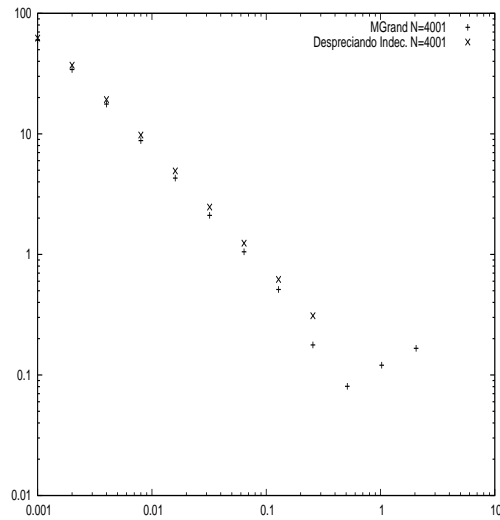


Figura 2.5: Comparación del σ^2/N aproximando al despreciar las contribuciones de N_u .

donde, en $E_{i,e,n_o=\mathcal{H}-i+1}$ se indica por el subíndice que estamos considerando la historia h_i en una aparición par de la historia actual y con un vector de paridad para el cual $n_o = \mathcal{H} - i + 1$ y análogamente en $E_{i,o,n_o=i-1}$. Sumando sobre todas las historias

$$\sigma_{per}^2 = \frac{1}{2\mathcal{H}} \left(\sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} E_{i,e,n_o=\mathcal{H}-i+1} + \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} E_{i,o,n_o=i-1} \right) \quad (2.25)$$

donde dividimos por el número de historias \mathcal{H} y obviamente los valores esperados son tomados sobre la variable $(N_{\delta} - N/2)^2$ pero no lo escribimos para acortar la notación. Una vez más en las veces impares y como hicimos en (2.22), de (2.7) tenemos que $N_{\delta} = N_{\sim\delta}$, de donde $p_1 = p_2$ (ver (2.14)), y de allí N_{δ} resulta $Bi(N, 1/2)$, independientemente del n_o , por lo que

$$E_{i,o,n_o=i-1} = N/4$$

y por ende

$$\sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} E_{i,o,n_o=i-1} = \mathcal{H}N/4$$

en cambio, para las apariciones pares, con (2.12) y (2.14) obtenemos

$$p_{1n_o} - p_{2n_o} = \frac{\mathcal{L}^2}{2^{2n_o}} \binom{2n_o - 1}{n_o} / \mathcal{N} = \frac{\mathcal{L}^2}{2^{2n_o+1}} \binom{2n_o}{n_o} / \mathcal{N}$$

y desde (2.22), para n_o genérico, tenemos en las veces pares

$$E_{i,e,n_o} = N(1/4 + \left(\frac{\mathcal{L}^2}{2^{2n_o+1}} \binom{2n_o}{n_o} / \mathcal{N} \right)^2 (N - 1)/4)$$

tenemos ahora que reemplazar $n_o = \mathcal{H} - i + 1$ y sumar con $i = 1 \dots \mathcal{H}$, por conveniencia tomamos $n_o = i$ y sumamos de $i = 1 \dots \mathcal{H}$

$$\sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} E_{i,e,n_o=i} = N\mathcal{H}/4 + N(N - 1)/4 \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} \left(\frac{\mathcal{L}^2}{2^{2i+1}} \binom{2i}{i} / \mathcal{N} \right)^2$$

por lo que podemos enunciar a partir de (2.25)

Teorema 2.5.2 *Consideremos el MG_{per} con N agentes. Tenemos que la varianza reducida es*

$$\sigma_{MG_{per}}^2 / N = 1/4 + \frac{(N - 1) \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} \left(\frac{\mathcal{L}^2}{2^{2i}} \binom{2i}{i} / \mathcal{N} \right)^2}{32\mathcal{H}}$$

considerando que $\mathcal{L} = 2^{\mathcal{H}}$ y $\mathcal{N} = \binom{\mathcal{L}}{2} + \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)/2$ se tiene

$$\sigma_{MG_{per}}^2/N = 1/4 + \frac{(N-1) \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i}\right)^2}{8\mathcal{H}(1+2^{-\mathcal{H}})^2}$$

como $N \gg 1$, podemos decir reescribiendo lo anterior

$$\sigma_{MG_{per}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i}\right)^2}{8\mathcal{H}(1+2^{-\mathcal{H}})^2}$$

que para el caso $2^{\mathcal{H}} = 2^{2^m} \gg 1$ se escribe

$$\sigma_{MG_{per}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i}\right)^2}{8\mathcal{H}}$$

y usando la conocida aproximación (ver p.ej. [66] pag. 180) $\frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \sim \sqrt{\frac{1}{i\pi}}$, obtenemos la forma simplificada

$$\sigma_{MG_{per}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{H}} 1/i}{8\mathcal{H}\pi}$$

que puede aproximarse una vez más

$$\sigma_{MG_{per}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{8\mathcal{H}\pi} (\log \mathcal{H} + \gamma) \mathcal{H},$$

con $\gamma = 0,57\dots$ la constante de Euler-Mascheroni.

Observación 2.5.4 En la última aproximación utilizamos el hecho de que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq M} 1/i - \log(M) \rightarrow \gamma$$

Observación 2.5.5 Notar del teorema previo que la aproximación $\sigma_{MG_{per}}^2/N \sim 1/4 + \frac{N}{8\mathcal{H}\pi} \log \mathcal{H}$ indica que la varianza reducida de este juego no es solo función de la variable reducida $z = \frac{2^m}{N}$ en acuerdo con las simulaciones.

En las Figuras 2.6 y 2.7 se ven comparaciones del experimental MG_{per} y las aproximaciones del Teorema previo.

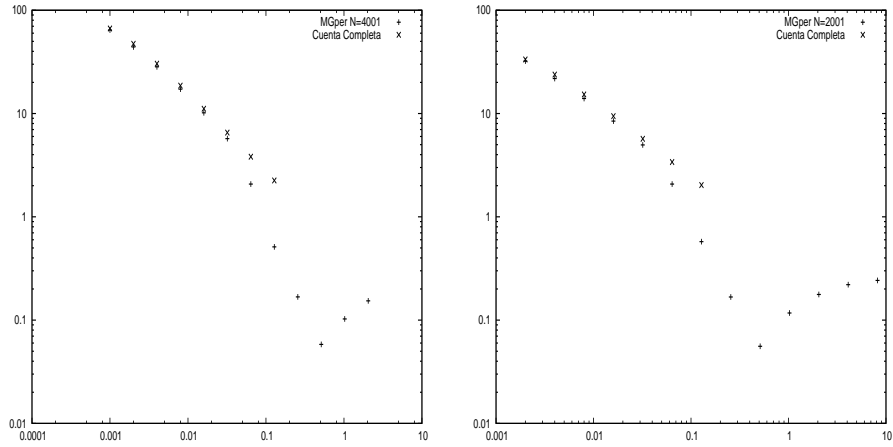


Figura 2.6: σ^2/N experimental del MG_{per} y con la cuenta completa (i.e. primer identidad del Teorema 2.5.2), $N = 4001$ y $N = 2001$.

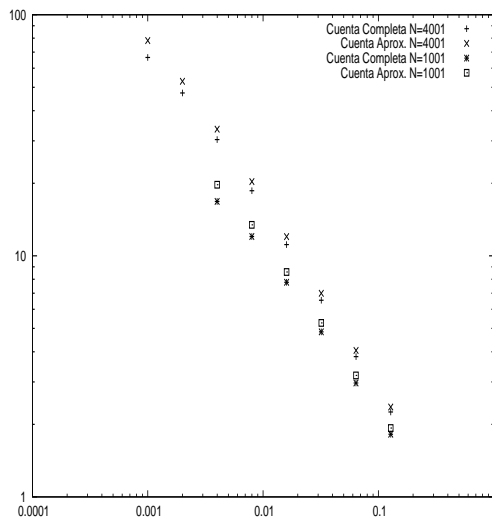


Figura 2.7: σ^2/N aproximado por la cuenta completa y la aproximada, primera y última de las identidades del Teorema 2.5.2, $N = 4001$ y $N = 1001$.

2.6. El DGM y el $DFSMG$

En las Definiciones 2.1.13 y 2.1.14 se introduce el DMG y $DFSMG$. Son la versión estándar y full del MG en la cual los agentes poseen una estrategia predilecta en caso de empate de sus dos estrategias (recordemos que $s = 2$). En este caso también podemos definir para una familia de realizaciones $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$

$$\sigma_{DMG}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sigma_{\mathcal{E}_i, DMG}^2 \quad (2.26)$$

con la salvedad de que debemos promediar además sobre todas las posibles asignaciones de estrategias predilectas. Comentamos este hecho importante pero no lo escribimos en (2.26) para no acrecentar la notación. Hecha esta salvedad observemos que una vez tomada una muestra aleatoria de estrategias predilectas vemos que la dinámica de los indecisos es similar a la que produce el MG estándar. La diferencia es que en este último los indecisos eligen aleatoriamente una de sus estrategias en cada paso pero en los indecisos del DMG todo ocurre como si hubieran hecho lo mismo *al comienzo* del juego. Esto es, eligen por única vez al inicio una entre sus dos estrategias, con probabilidad $1/2$ de ser elegida cada una, mientras que los indecisos del MG hacen esta elección cada vez que sus estrategias se encuentran empatadas. En este sentido todas las cuentas hechas para el MG se aplicarían al DMG como forma de aproximar (2.26) sugiriendo que la dinámica en la primera parte de la fase simétrica debe ser similar en ambas variantes del juego. De hecho, nuestras simulaciones numéricas muestran no solo que esto es correcto sino que el comportamiento de ambos juegos es similar a lo largo de *todas* las fases, y solo hemos notado diferencias importantes en la varianza de la varianza reducida, como se aprecia en la Figura 2.8. En este sentido consideramos interesante al DGM pues reproduce dinámicas similares al MG aún siendo un juego determinístico y admitiendo por lo tanto un tratamiento teórico potencialmente más sencillo. Si bien ciertas características cualitativas de este juego se obtienen a partir de resultados de la sección siguiente, éstas tienen que ver con periodicidades en la sucesión de lados minoritarios. Para ello definimos

Definición 2.6.1 *Dada una realización \mathcal{E} del MG diremos que es periódica si para su secuencia de historias $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ existe un $P \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{k+P}$ para todo $k \geq K$, $k \in \mathbb{N}$. También diremos para abreviar que el juego es periódico y que P es el período si es el menor entero que cumple la condición mencionada.*

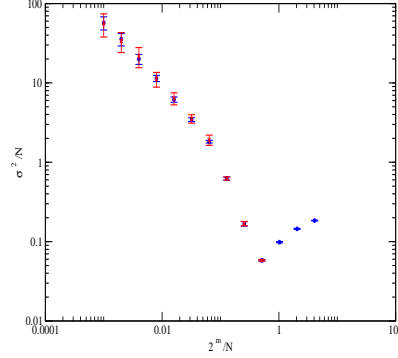


Figura 2.8: σ^2/N del *MG* estándar (círculos) y el *DMG* (cruces) y sus respectivas varianzas para $N = 4001$.

Observemos el siguiente resultado preliminar que involucra al *DFSMG*, recordemos que al no mencionar la *RA* nos referimos implícitamente a la regla estándar.

Teorema 2.6.1 *El DFSMG es periódico.*

Dem. En virtud de que para cualquier realización \mathcal{E} el *FSMG* (y por ende el *DFSMG*) cumple con la *SPTD* (Teorema 2.3.1), tenemos que los puntos virtuales de todas las estrategias se mantienen acotados entre 0 y \mathcal{H} . Tomemos un agente $J \in \text{DFSMG}$, su arreglo de puntos virtuales $(v_1, v_2)_J$ (ver Definición 2.1.13) y su función de decisión $\mathcal{D}(v_1, v_2)_J \rightarrow \{s_J^1, s_J^2\}$. Recordemos que en este caso \mathcal{D} devuelve la estrategia con mayor cantidad de puntos virtuales y si ambas tienen el mismo número de puntos virtuales devuelve una determinada, que podemos suponer, numerandolas adecuadamente, que es s_J^1 . Por otro lado como hemos mencionado la *SPTD* implica que las posibles combinaciones de puntos virtuales en cualquier paso k del juego $(v_1^k, v_2^k)_J$ son finitas (de hecho hay a los sumo $(H + 1)^2$) para todos los jugadores J . Observemos ahora que en la sucesión de historias $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ debe haber al menos una historia $h \in \mathcal{H}$ que aparece infinitas veces (pues $\#\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \infty$), luego habiendo finitas combinaciones de puntos virtuales en cada agente J y finitos agentes (hay \mathcal{N}) tenemos que existen al menos dos pasos $k < l$ en los que la historia presente h_p coincide con h y además para todo jugador J se verifica $(v_1^k, v_2^k)_J = (v_1^l, v_2^l)_J$. De donde $\mathcal{D}(v_1^k, v_2^k)_J = \mathcal{D}(v_1^l, v_2^l)_J$ (pues en caso de empate no hay elección aleatoria) y resulta que todos los agentes *utilizan la misma estrategia* en el paso l que en el paso k por lo que deciden lo mismo en la vez l que en la

vez k de allí el resultado minoritario del juego es el mismo en la vez l que en la vez k (i.e. $\chi_{k+1} = \chi_{l+1}$) por lo que los puntos virtuales de cada estrategia de cada jugador se actualizan idénticamente en la vez l que en la vez k y como $(v_1^k, v_2^k)_J = (v_1^l, v_2^l)_J$, resulta entonces $(v_1^{k+1}, v_2^{k+1})_J = (v_1^{l+1}, v_2^{l+1})_J$. Por otro lado como consideramos el juego estándar la historia presente en el paso $k + 1$ deberá coincidir con la historia presente en el paso $l + 1$ (notar que esto no ocurre con cualquier RA , por ejemplo en el MG_{rand}), y repitiendo el argumento ahora con $(v_1^{k+1}, v_2^{k+1})_J = (v_1^{l+1}, v_2^{l+1})_J$ resulta que $(v_1^{k+2}, v_2^{k+2})_J = (v_1^{l+2}, v_2^{l+2})_J$, y así sucesivamente. Por lo tanto el juego es periódico. \square

Notemos que la demostración del Teorema 2.6.1 solo usa que los puntos virtuales se mantienen acotados (que lo obtuvimos desde la $SPTD$) y que la función de decisión de los agentes \mathcal{D} no es aleatoria en caso de empate (que lo obtuvimos de la versión determinística). Además, el Teorema 2.6.1 demuestra una periodicidad más profunda que la definida en la Definición 2.6.1. En efecto, siguiendo la demostración es fácil ver que resulta periódico el número de agentes que vota un lado dado \tilde{o} , y son exactamente los mismos agentes. Esto que llamaremos *Periodicidad Fuerte* desde luego implica la periodicidad de los lados minoritarios, o sea la periodicidad de la realización \mathcal{E} .

Observación 2.6.1 *En las Figura 2.9 vemos gráficos del número de agentes que vota un lado dado en algunas ejecuciones del DMG donde se ve que el juego presenta Periodicidad Fuerte. Esto como veremos es el resultado de que la SPTD se verifica en la primera parte de la fase simétrica y por ende el Teorema previo se aplica en este caso. Otros detalles acerca del tamaño de los períodos son tratados en la Sección 2.8.*

2.7. Una aproximación analítica a la región PTD

En esta sección veremos cómo aplicar los cálculos hechos sobre el $FSMG$ para determinar la zona de validez de la PTD en el MG . Sabemos que en el $FSMG$ vale la dinámica $SPTD$ siempre (ver Teorema 2.3.1) independientemente del valor de m . Esto es, para cualquier función de paridad \mathcal{P} (es decir, cualquier valor de n_o), siempre que la historia presente h_p se encuentre en una ocurrencia par, y suponiendo que en la ocurrencia anterior el lado minoritario resultó \tilde{o} , vale que:

$$\mathcal{N}_{d\tilde{o}} > \mathcal{N}_u + \mathcal{N}_{d\sim\tilde{o}}.$$

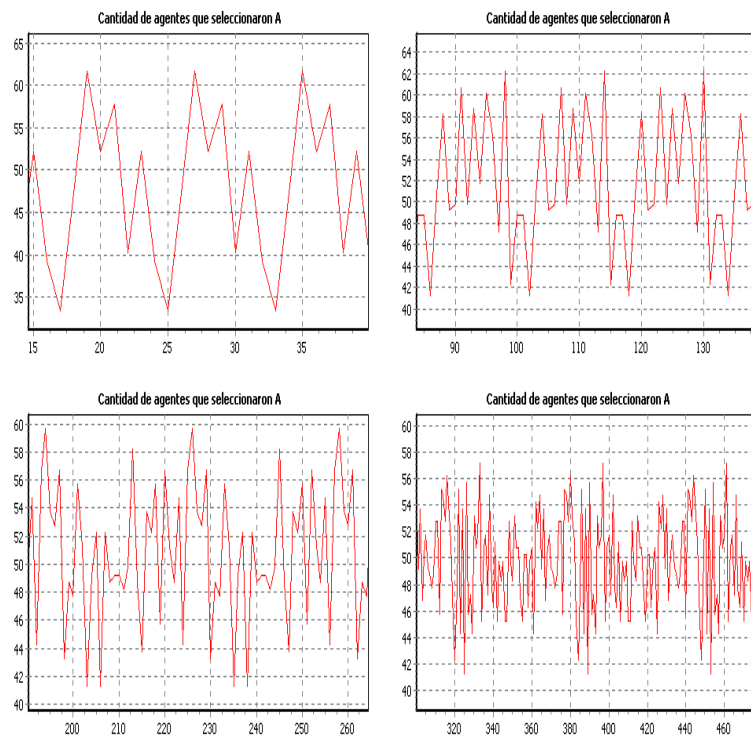


Figura 2.9: Periodicidad Fuerte para el *DMG*: períodos de tamaño 8, 16, 32 y 64 para $N = 201$ jugadores con cerebros 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

Esta desigualdad implica que la mayoría de los agentes irán al lado \tilde{o} , y que entonces, será minoritario esta vez el lado $\sim \tilde{o}$. Es decir, la condición *necesaria y suficiente* para que se cumpla *PTD* en una vez par de ocurrencia de una historia presente h_p (siendo que la vez anterior en que ocurrió la misma historia resultó minoritario el lado \tilde{o}) es evidentemente

$$N_{\tilde{o}} > N_{\sim \tilde{o}} \quad (2.27)$$

y como $N_{\tilde{o}} + N_{\sim \tilde{o}} = N$, lo anterior es equivalente a

$$N_{\tilde{o}} > \frac{N}{2}. \quad (2.28)$$

Pero el Lema 2.4.1 dice que si consideramos el *MG* como un sampleo del *FSMG* la variable aleatoria $x \sim N_{\tilde{o}}$ tiene distribución $Bi(N, p_1 + \frac{p_3}{2})$ con p_i como en (2.14). En consecuencia podemos definir la probabilidad P_{PTD} de que se cumpla la *PTD* como la probabilidad de que se cumpla (2.28). Entonces, si aproximamos la binomial del Lema 2.4.1 con una normal con la misma esperanza y varianza que la binomial, es decir: $N(E(x), Var(x))$, donde

$$E(x) = N(p_1 + p_3/2) = \frac{N(1 + p_1 - p_2)}{2}$$

y

$$Var(x) = N(p_1 + p_3/2)(1 - p_1 - p_3/2) = \frac{N(1 - (p_1 - p_2)^2)}{4}.$$

tenemos

Lema 2.7.1 *Consideremos una instancia del MG con N agentes. Vale la siguiente aproximación de la probabilidad de cumplimiento de la PTD*

$$P_{PTD} \sim 1 - Erf \left(-\frac{\sqrt{N}(p_1 - p_2)}{\sqrt{1 - (p_1 - p_2)^2}} \right)$$

Observación 2.7.1 *Notemos que en el lema anterior deben proveerse las p_i , según (2.14). Esto a su vez se obtiene de (2.8), (2.9) y (2.10) en las veces pares de aparición de la historia presente, por lo tanto el resultado de la aproximación va a depender de la RA que se utilice. Este detalle es importante porque brinda en potencia la posibilidad de estudiar el problema en un juego MG_{RA} cualquiera siempre que podamos conocer las paridades típicas que aparecen en \mathcal{P} .*

La observación precedente implica que podemos particularizar por ejemplo en el MG_{rand} , en particular para esa instancia podemos tomar como antes $n_o = \mathcal{H}/2$ y obtener desde (2.24)

Lema 2.7.2 *Consideremos una instancia del MG_{rand} con N agentes. Vale la siguiente aproximación de la probabilidad de cumplimiento de la PTD*

$$P_{PTD} \sim 1 - Erf \left(\frac{-\sqrt{N} \frac{1}{2^{\mathcal{H}(1+\frac{1}{2\mathcal{H}})}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2^{\mathcal{H}(1+\frac{1}{2\mathcal{H}})}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \right)^2}} \right)$$

o aproximando $1 + \frac{1}{2\mathcal{H}} \sim 1$ y $\frac{1}{2^{\mathcal{H}}} \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{H}/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\mathcal{H}\pi}}$

$$P_{PTD} \sim 1 - Erf \left(-\sqrt{\frac{N}{\frac{\mathcal{H}\pi}{2} - 1}} \right)$$

Notemos en la Figura 2.10 que nuestra aproximación funciona muy bien para predecir el valor aproximado de la variable reducida z en el cual deja de valer la regla. Sin embargo a partir de allí la aproximación se deteriora. Esto se relaciona con diversos factores. En principio nuestros cálculos predicen un valor para la probabilidad de rotura de la PTD *por primera vez*. En efecto, una vez que la regla deja de valer, los puntos virtuales de las estrategias no tienen por qué caer en el rango $0 - \mathcal{H}$ y en consecuencia nuestros cálculos dejan de valer.

2.8. El DMG y los períodos de tamaño $2\mathcal{H}$

En esta sección tratamos el tema de la cuasiperiodicidad de longitud $2k\mathcal{H}$ en el MG . Para ello veremos propiedades abstractas que implican en juegos periódicos la existencia de períodos de longitud $2k\mathcal{H}$. En particular vamos a ver que la $SPTD$ es en esencia la responsable de ese comportamiento implicando en el DMG la existencia de los períodos mencionados y sugiriendo la aparición de quasiperíodos en el MG .

Definición 2.8.1 *Un grafo es un par $G = (V, A)$ donde V representa un conjunto de vértices y A un conjunto de pares no ordenados $\{v, u\}$ de elementos de V llamados aristas del grafo. El grafo se llama dirigido si las aristas son pares ordenados (v, u) (o sea $A \subset V \times V$). Dos vértices v, u son*

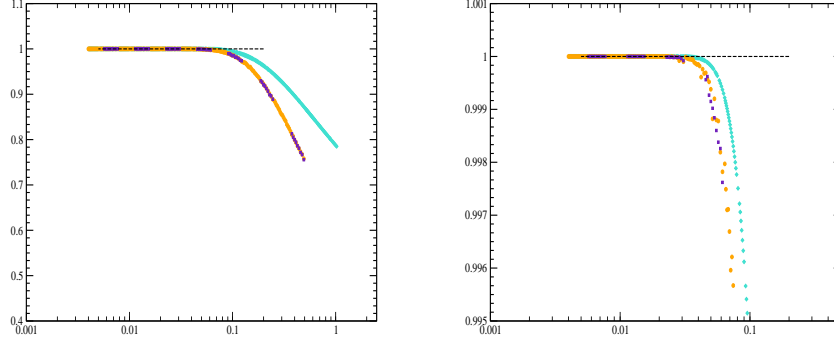


Figura 2.10: (Izquierda) P_{PTD} analítica (celeste) y experimental para el MG_{rand} (amarillo) y el MG (violeta). (Derecha) detalle de la zona de ruptura.

adyacentes si $\{v, u\} \in A$, o en el caso de grafo dirigido si $(v, u) \in A$, o $(u, v) \in A$.

Definición 2.8.2 Un camino en un grafo $G = (V, A)$ es una secuencia de vértices v_1, \dots, v_n tales que $\{v_i, v_{i+1}\}, (v_i, v_{i+1}) \in A$. Si el grafo es dirigido diremos que el camino anterior es de v_1 a v_n .

Definición 2.8.3 Un grafo dirigido $G = (V, A)$ se dice fuertemente conexo si para todo par de vértices $v, u \in V$ existe un camino de v a u y un camino de u a v .

Consideremos el operador $T : \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ definido del siguiente modo, dado $h = a_1 a_2 \dots a_m$, $T(h, b) = a_2 a_3 \dots a_m b$. Es decir, que T da los posibles sucesores de una historia h que aparece en una secuencia $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ (secuencia de historias) de una realización \mathcal{E} del MG (o del DMG) bajo la RA estándar (ver Definición 2.1.7).

Definición 2.8.4 Dado un $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, llamamos grafo del MG al grafo $G = (V, A)$, donde $V = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ (el conjunto de historias correspondiente al tamaño de memoria m) y $A = \{(h, T(h, i)) : h \in V, i = 0, 1\}$.

Notemos que como cualquier secuencia de m bits (historia) puede obtenerse de cualquier otra despues de finitas iteraciones de T tenemos que

Lema 2.8.1 El grafo del MG es fuertemente conexo.

En la literatura la *PTD* fue introducida para las apariciones pares. Previamente hemos definido la *SPTD* también para las historias pares. En breve veremos que ambas definiciones tienen interés también en las historias impares, algo que hasta donde sabemos no ha sido tratado hasta ahora. De ahora en más hablaremos de *SPTD* para historias pares (historias en una aparición par) y *SPTD* para historias impares. Veamos el siguiente resultado.

Lema 2.8.2 *Supongamos que una realización \mathcal{E} del MG verifica la SPTD para historias pares, entonces en la secuencia de historias $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ aparecen todas las historias de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ infinitas veces.*

Dem. Como el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ es infinito, entonces aparece al menos una historia, digamos h infinitas veces. Por ende aparece infinitas veces en apariciones pares e infinitas en impares. En particular se tiene gracias a la *SPTD* que los dos sucesores $T(h, 0)$ y $T(h, 1)$ aparecen también infinitas veces. Repitiendo el argumento con ellos vemos que también lo hacen sus sucesores. Como el conjunto de historias es finito, se sigue el Lema. \square

Creemos que el lema previo basta para probar la ergodicidad de las historias (es decir que en cualquier realización \mathcal{E} aparecen todas las historias la misma cantidad de veces en promedio) pero no tenemos prueba de este hecho. Sin embargo bajo la hipótesis de periodicidad (ver Definición 2.6.1) del juego este resultado resulta verdadero como probamos más adelante.

Vamos a centrarnos ahora en juegos que tiene un resultado periódico ya que esa cualidad implica propiedades interesantes que aparecen en el *MG* estándar. Tenemos el siguiente resultado

Lema 2.8.3 *Supongamos que tenemos un juego periódico, si cumple la SPTD para las historias pares entonces cada historia aparece en el período un número par de veces.*

Dem. Sea h una historia cualquiera (el Lema previo indica que todas aparecen) y sea s el número de veces que aparece en el período. La idea es ver que s no puede ser impar. Para entender el argumento pensemos que $s = 1$. En ese caso tendremos que h tiene distinta paridad de aparición en cada período, luego el lado minoritario posterior a cada aparición debe alternar (por la *SPTD*) lo que contradice la periodicidad. Supongamos entonces que s es impar, $s \geq 3$ (pues $s = 1$ no puede ser como vimos), y sea una vez más h una historia cualquiera que aparece en un período, entonces en el próximo período las apariciones impares se transforman en pares y viceversa (esto es si $h = \tilde{h}^k$ está en aparición impar entonces \tilde{h}^{k+P} está en aparición par). Esto implica cierta alternancia de lados minoritarios en el siguiente sentido: tomemos $h = \tilde{h}^k$ en una aparición impar (si está en una par tomemos la siguiente

o la anterior) y χ_k el resultado minoritario del juego después de haber votado utilizando $h = \tilde{h}^k$ como historia presente h_p . La *SPTD* implica que la próxima vez que aparezca h dentro del período (que será aparición par) digamos \tilde{h}^{k+s} con $s > P$, el resultado de la votación será lo contrario $\chi_{k+s} \sim \chi_k$. Por otro lado como en el próximo período \tilde{h}^{k+P} estará en aparición par, el resultado minoritario será contrario al de su aparición anterior (que fue impar). Por periodicidad lo mismo debe ocurrir entonces para \tilde{h}^k . En consecuencia, cualquiera sea el resultado minoritario χ después de h tendremos que es el contrario al de su aparición siguiente y anterior. Pero esto es imposible, en efecto, si miramos \tilde{h}^k y \tilde{h}^{k+P} deberían tener el mismo resultado minoritario al ser usadas como historia presente (por la periodicidad) y sin embargo por ser s impar hay un número par de apariciones de h entre ambas. La alternancia indica que los resultados minoritarios χ_k y χ_{k+P} son opuestos. Esto prueba el Lema por el absurdo. \square

De hecho podemos decir además,

Lema 2.8.4 (*Ergodicidad del Juego*) *Supongamos que tenemos un juego periódico, entonces si cumple la SPTD para las historias pares todas las historias aparece en el período el mismo número de veces.*

Dem. Sea h la historia que sale más veces en un período (si hay más de una tomamos cualquiera). Sea s la cantidad de veces que sale. Como s es par, debido al Lema previo, escribimos $s = 2 * k$. Llamemos h_{p0} y h_{p1} a sus posibles predecesores, esto es $T(h_{p0}, 0) = T(h_{p1}, 1) = h$, la idea es probar que ambos aparecen también s veces en el período, probado eso el Lema se sigue inmediatamente mirando los predecesores de los predecesores y usando que el grafo del *MG* es fuertemente conexo. Notemos antes de continuar que si una historia cualquiera \tilde{h} aparece en un período \tilde{s} veces precediendo a un lado minoritario χ entonces aparece otras \tilde{s} veces precediendo a $\sim \chi$, pues tomando el período de modo tal que comience en una aparición impar de \tilde{h} vemos que la *SPTD* implica un lado minoritario $\sim \chi$ por cada lado χ . Probemos ahora que tanto h_{p0} como h_{p1} aparecen exactamente s veces. Como h aparece $s = 2k$ veces y sus únicos predecesores son h_{p0} y h_{p1} tenemos, llamando k_0 y k_1 al número de veces que aparecen estas historias precediendo a h , que $k_0 + k_1 = s$ (es importante observar que el argumento contempla el caso en que h se preceda a sí misma). Ahora bien decimos que $k_0 = k_1 = s/2 = k$. En efecto, de otro modo podemos suponer sin perder generalidad que $k_0 > s/2$, pero si nos concentramos en \tilde{h}_{p0} vemos que aparece k_0 veces precediendo a h y por ende a cierto lado minoritario que podemos llamar χ , luego aparece otras k_0 veces precediendo a $\sim \chi$ por lo que \tilde{h}_{p0} aparece al menos $2k_0 > 2k = s$ veces lo cual es absurdo debido que s es el número

mayor de veces que aparece una historia en el período. Así que $k_0 = k_1 = s/2$ y ambos predecesores aparecen s veces. \square

Juntando los lemas previos obtenemos

Teorema 2.8.1 *Supongamos que tenemos un juego periódico, si cumple la SPTD para las historias pares entonces todas las historias del conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ aparecen el mismo número par de veces, y por ende el período P es de la forma $P = k2\mathcal{H} = k2^{m+1}$.*

Más sorprendente es el siguiente resultado que aclara el rol de SPTD en las historias impares con períodos de longitud mínima.

Teorema 2.8.2 *Supongamos que tenemos un juego periódico, si cumple la SPTD para las historias pares entonces: Cumple la SPTD para las historias impares si y solo si el período es $P = 2\mathcal{H} = 2^{m+1}$.*

Dem. Veamos primero que períodos de la forma $P = 2\mathcal{H} = 2^{m+1}$ junto con SPTD para historias pares implican la SPTD para las historias impares. En efecto, como $P = 2\mathcal{H} = 2^{m+1}$, el número de historias es $\mathcal{H} = 2^m$ y todas aparecen el mismo número de veces tenemos que cada historia aparece exactamente 2 veces. Sea h una historia cualquiera y veamos que cumple la SPTD en sus apariciones impares. Para ver que esto es así construyamos el período de modo tal que h aparezca primero en una vez impar y sea χ el resultado minoritario que la sucede. Luego la SPTD para las veces pares implica que la próxima aparición (que es par y está aún dentro del período) es sucedida por el lado minoritario $\sim \chi$, como la próxima aparición de h (nueva impar) difiere exactamente en un período de la original (hay exactamente dos historias por período) debe preceder a χ . En consecuencia los lados minoritarios alternan en cada aparición de h y eso implica que cumple la SPTD para los impares.

Veamos la recíproca: Supongamos que se cumple la SPTD tanto para apariciones impares como pares, en particular ya sabemos por el Teorema anterior que el período es de la forma $P = k2\mathcal{H} = k2^{m+1}$. Veamos que $k = 1$. En efecto, SPTD en pares e impares implica alternancia en los resultados minoritarios precedidos por una historia dada cualquiera h , ya que si después de h el resultado es χ como ese h está en una aparición par o impar resulta que en la próxima aparición el resultado minoritario es $\sim \chi$. Tomemos ahora de un período una historia h que verifique que el número de pasos entre tres apariciones consecutivas sea la menor de todas las historias (si hubiera más de una historia en estas condiciones tomamos cualquiera). Supongamos que $\tilde{h}^k = \tilde{h}^l = \tilde{h}^s = h$ tomadas de la sucesión $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ son esas tres repeticiones con $k < l < s$ y $s - k$ es la menor separación posible entre tres repeticiones de

una historia. Observemos ahora que las historias precedentes de \tilde{h}^l y \tilde{h}^s (es decir, \tilde{h}^{l-1} y \tilde{h}^{s-1}) tienen que ser distintas entre si, ya que de otro modo llamando $\tilde{h} = \tilde{h}^{l-1} = \tilde{h}^{s-1}$ tendríamos que necesariamente habría otra ocurrencia de \tilde{h} entre las anteriores (ya que ninguna historia puede preceder al mismo lado minoritario en dos apariciones consecutivas), pero eso no puede ser pues $k - l$ es la menor separación entre tres repeticiones consecutivas de una historia. Usando el mismo argumento, vemos que la historia precedente a \tilde{h}^k es diferente a la precedente a \tilde{h}^l y por ende *es la misma* que la precedente a \tilde{h}^s . Ahora bien, llamando a esa historia $\tilde{h} = \tilde{h}^{k-1} = \tilde{h}^{s-1}$ vemos que debe aparecer necesariamente otra vez entre los sitios $k - 1$ y $s - 1$ ya que no puede preceder el mismo lado minoritario dos veces consecutivas (observar que el argumento contempla la posibilidad de que $\tilde{h} = h$, ya que de hecho eso podría ocurrir). Por lo tanto aparece exactamente tres veces entre $k - 1$ y $s - 1$ pues más de tres no podría, sino la separación mínima entre tres repeticiones de una misma historia sería menor que $k - l$. En consecuencia: las historias que preceden a h^k y a h^l son iguales, digamos a \tilde{h} y aparecen exactamente tres veces entre $k - 1$ y $l - 1$, esto es \tilde{h} está en las mismas condiciones que h . Repitiendo el argumento con la historia precedente a \tilde{h}^{l-1} vemos que en finitos pasos habremos llegado a la historia \tilde{h}^k , pero observando la construcción resulta que las historias entre la k y la $l - 1$ debe formar un período. En efecto, como $\tilde{h}^k = \tilde{h}^l$ y todas las historias que aparecen en el rango k a $l - 1$ lo hacen exactamente dos veces cada una, luego tenemos que despues de \tilde{h}^l viene la misma historia que despues de \tilde{h}^k , pues en l está la tercera aparición a partir de k de la historia h y debe preceder al mismo lado minoritario que precede a h^k debido a la alternancia de lados minoritarios. En consecuencia $h^{k+1} = h^{l+1}$, ahora como esa nueva historia está exactamente dos veces en el rango $k + 1$ a l , entonces en $l + 1$ está en su tercera aparición y por ende debe ser sucedida por la misma historia que sucede a \tilde{h}^{k+1} , esto es $\tilde{h}^{k+2} = \tilde{h}^{l+2}$ y así sucesivamente. Vemos entonces que las historias entre la k y la $l - 1$ forman un ciclo periódico pero entonces no hay tres apariciones consecutivas de una historia en un mismo período y como los resultados previos indican que todas las historias aparece la misma cantidad de veces deben hacerlo todas exactamente dos veces y por ende $P = 2\mathcal{H}$. \square

Los resultados precedentes son en su mayoría abstractos en el sentido de que extraen consecuencias desde las reglas de período dos y las periodicidades de los lados minoritarios. En este sentido cualquier cadena infinita de lados minoritarios generados a través de cualquier método (no necesariamente un *MG*) deben verificar los resultados mencionados. Para relacionar estos resultados con el *MG* veamos las siguientes observaciones.

Como vimos en el Teorema 2.6.1 y la Observación 2.6.1 resulta que por un lado el *DFSMG* es periódico y lo mismo se observa experimentalmente en

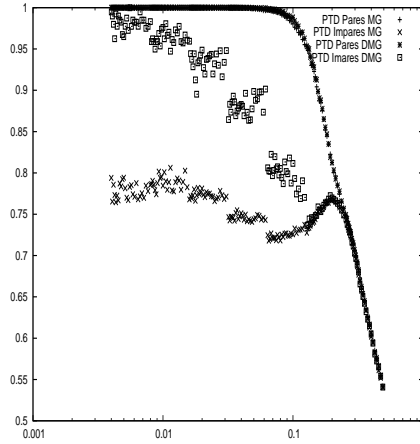


Figura 2.11: P_{PTD} experimental para el MG y el DMG en veces pares e impares. Se observa que para $z \ll 1$ $P_{PTD} \sim 1$ para las veces impares del DMG .

el DMG . La razón en este último caso es que posee funciones de decisión \mathcal{D} determinísticas lo que junto con el resultado del Lema 2.7.2 que sugiere la validez de la $SPTD$ durante la primera parte de la fase simétrica implica la periodicidad. En consecuencia el DMG aplica en las hipótesis de esta sección, esto es, la teoría sugiere la existencia de períodos de tamaño $2k\mathcal{H}$. Esto ocurre efectivamente en los experimentos numéricos como hemos mencionado previamente (ver Figura 2.9).

Para cerebro chico el DMG presenta períodos de tamaño $2\mathcal{H}$, según nuestros resultados eso equivale a la existencia de la $SPTD$ en ocurrencias *impares*. La Figura 2.11 muestra experimentalmente que esto es así. Como vemos, la P_{PTD} experimental comienza en 1 para las veces impares lo que implica la existencia de los citados períodos. Luego disminuye, pero mientras que la $SPTD$ vale para las veces pares continúan existiendo períodos $2k\mathcal{H}$, en acuerdo con la teoría.

Para el MG es un hecho conocido y que hemos tratado previamente que $P_{PTD} \sim 1$ para las veces *pares*. El MG no aplica directamente en los resultados de esta sección debido a que la función de decisión de sus agentes es aleatoria. Sin embargo creemos que el DMG hecha luz sobre los cuasiperíodos del MG puesto que pareciera ser que precisamente la rotura aleatoria de los empates entre las estrategias de los agentes *expulsa* la dinámica de los períodos naturales de tamaño $2k\mathcal{H}$ generando la conocida cuasiperiodicidad. Si bien no tratamos aquí este tema, creemos que en función del N (tamaño

del sampleo del MG desde el $FSMG$) los desvíos de $N_{\delta} - N_{\sim\delta}$ respecto de 0 en las veces impares (ver (2.7)) pueden competir con el tamaño de N_u generando un comportamiento determinístico (o sea, los indecisos no puede competir con los desvíos de la muestra de la diferencia de los decididos) que haga caer momentaneamente al MG dentro de las hipótesis de periodicidad. Si el lapso de tiempo (numero de pasos) esperado de persistencia de estos eventos es del orden de $2k\mathcal{H}$ es de esperar que ciertos períodos sean visibles esporádicamente dando como resultado la cuasiperiodicidad.

Es importante destacar que tanto en los períodos de DMG como en los cuasiperíodos de MG la *PTD de las veces impares no está* acompañada de muchedumbres como se observa en los cálculos de $N_{\delta} - N/2$ de las secciones previas. Creemos que esta cuestión ha facilitado que no se halla observado este comportamiento hasta ahora. Notemos que el propio MG manifiesta en la primera parte de la fase simétrica una probabilidad muy alta $\sim 0,8$ (ver Figura 2.11) de cumplimiento de esa regla.

Capítulo 3

Análisis del *MG* con Agentes Interactuantes

3.1. Introducción

Como primer paso definimos lo que llamamos *influencias horizontales*. Con ellas nos referimos a las que se dan entre agentes comunes. Las opiniones de los demás no son consideradas como provenientes de una “palabra autorizada” o de alguien que tiene mayor o mejor información, sino que se les da la misma relevancia que puede tener la opinión propia. En este caso actúa un efecto de cantidad: la decisión individual depende de las cantidades de individuos que optaron por una u otra opción. Son opiniones recibidas desde una posición de igualdad en la capacidad de tomar decisiones y el número de opiniones escuchadas es importante para realizar la opción individual. Como ejemplo, la decisión de ir a uno u otro comercio, supermercado, restaurante, etc. de acuerdo a las recomendaciones de amigos o familiares. Hacer algo preventivamente por miedo a (o con la esperanza de) que se cumpla un rumor que circula. Las corridas bancarias, la compra compulsiva de dólares a cualquier precio simplemente porque en la casa de cambio hay cola y otros efectos manada. También en publicidad se utiliza para promocionar productos y servicios, apelando a que el consumidor se sienta reflejado e inducido a imitar el comportamiento de consumo publicitado.

Sin embargo, los agentes no siempre desean ir en el sentido del resultado de la encuesta. Esto es, en algunos casos los agentes quieren estimar lo que va a hacer la mayoría, no para imitarlos sino para hacer lo contrario. Para este caso, también son comunes los ejemplos donde las opiniones y acciones de los pares es atendida con el objeto de diferenciarse: la elección del lugar de vacaciones tranquilo, la elección de un vestido para una fiesta, etc. El caso de

compartir información con el objeto de diferenciarse será el que trataremos aquí.

Suponemos que las opiniones son sinceras y sus acciones son verdaderas: un agente realmente dice lo que opina y no miente para obtener ventajas de aquellos que lo encuestan. En este capítulo nos enfocamos en la dinámica del modelo propuesto por I. Caridi and H. Ceva en [26], basado en el MG original, que incluye interacciones locales como un mecanismo para compartir información.

3.2. El modelo

Los N agentes están distribuidos en una grilla cuadrada periodica de $k \times k$ (donde $N = k^2$), y al comienzo del juego, una fracción $p \in [0, 1]$ de ellos elegidos al azar es designada como *agentes interactuantes* (IAs). Por lo tanto, cada IA puede tener de cero a cuatro vecinos IAs en la grilla, los cuales, a su vez, pueden tener otros IAs más como vecinos y dos IAs pueden compartir vecinos IAs. En cada iteración, los agentes siguen las reglas usuales del MG, pero antes de realizar efectivamente la jugada los IAs poseen una oportunidad extra para cambiar sus apuestas, después de conocer lo que sus vecinos IAs harán en ese paso. En este punto, cada IA observa lo que cada uno de sus vecinos IAs jugará de acuerdo con lo que su mejor estrategia aconseja y, después de esta encuesta, cada IA elegirá estar en la minoría del grupo compuesto por sus vecinos interactuantes más él mismo. Así, si la mitad o más de sus vecinos interactuantes (más él) eligen un lado, entonces el IA elegirá el otro, sin importar lo que sugería su mejor estrategia. Si un IA no tiene vecinos IAs, participa como un agente aislado normal que no comparte información privada. Una vez que los IAs han tomado definitivamente su decisión, todos los agentes hacen sus movimientos simultaneamente y el lado minoritario se computa como se explicó en el MG original. Un punto es adjudicado a cada estrategia que acertó el lado minoritario. Pero si un agente gana por haber jugado contra la predicción de su mejor estrategia para evitar la mayoría de su vecindario, entonces no se le asignará ningún punto a la estrategia puesto que ésta indicaba otra cosa. Estas reglas no indican que los IAs jugarán finalmente contra la mayoría de su vecindario de IAs. Imaginemos, por ejemplo, que tenemos un IA, sus cuatro vecinos también son IAs y no hay otros vecinos interactuantes cercanos. Si a cada uno de los cinco agentes su mejor estrategia le indica que tiene que apostar al 1. Entonces, obviamente la minoría de los cinco va a ser la apuesta al 0 y jugarán todos al 0. Con lo cual, terminan jugando lo mismo. La dinámica de este ejemplo

será importante en este capítulo.

I. Caridi y H. Ceva estudian en [26] el comportamiento de la *varianza reducida* σ^2/N de la serie de tiempo del número de agentes que en cada paso juegan el lado 1 (o equivalentemente el 0) para este modelo en términos de la variable de escala usual $z = 2^m/N$ para diferentes valores de interacción p . Los autores obtienen, comparado con el MG, por un lado, una distribución de los recursos mejorada para pequeños valores de p ($\sigma^2/N \cong 0,03$ contra $\sigma^2/N \cong 0,04$ para el MG [57]) y, por otro lado, un valor más pequeño de z para el cual σ^2/N alcanza su mínimo ($z \cong 0,3$ contra $z \cong 0,35$ para el MG [57]). Finalmente, midiendo la entropía del resultado, observan que la evolución de las votaciones cae en una dinámica cíclica para $p > p^*$ con $p^* \sim 0,5$. En este capítulo mostramos que el mecanismo de interacción local presentado en [26] lleva a la formación de grupos de agentes con un comportamiento concertado derivado de la compartición de información, que actúan como grupos de agentes con una estrategia cada uno y similares entre ellas. Este hecho lleva a un mejor entendimiento de la dinámica subyacente, en particular, dando una explicación simple del retroceso del valor de memoria m en el que la varianza reducida llega al mínimo, reportado en [26].

En primer lugar estudiamos la dinámica de votación de IAs, mostrando cómo este comportamiento puede ser replicado mediante agentes de una única estrategia. Luego, exploramos la reacción de los agentes no interactuantes a los efectos globales generados en el juego por los IAs, es decir, cómo afecta su aprendizaje, la velocidad con que aprenden y los beneficios que obtienen de ello entendido como la facilidad con que reconocen los patrones de comportamiento de los IAs y cómo se adaptan a ello de manera eficiente. Para el estudio de este caso trataremos con agentes con $s = 1$ (una estrategia) y $s = 2$ (dos estrategias).

3.3. Dinámica de los agentes interactuantes

Para empezar, definimos el *grafo de interacción* como el grafo $G = (V, E)$, donde el conjunto de vértices V corresponde al conjunto de IAs y dos vértices están unidos por una arista en E si los IAs asociados son vecinos en la grilla. Una componente conexa de G es llamada *grupo* de IAs, y el número de IAs en el grupo es llamado el *tamaño* del grupo. La Figura 3.1 muestra el número promedio de grupos en función de sus tamaños para varios coeficientes p de información local, incluyendo $p = 0, 11$, el coeficiente con el que se logra minimizar la varianza reducida de acuerdo a [26]. Existe un número relativamente alto de grupos de tamaño 2, por lo tanto, nos concentramos en

la dinámica de votaciones para tales grupos.

En un grupo de dos IAs hay dos alternativas de acuerdo a lo que dicen las mejores estrategias de ambos agentes: o bien juegan lo mismo o juegan diferenciados. En el primer caso, si las mejores estrategias correspondientes sugieren el mismo lado, entonces la oportunidad extra de estos IAs los forzará a cambiar sus jugadas. Así, ellos jugarán lo mismo de todas maneras pero las estrategias no sumarán puntos. El puntaje de sus estrategias no cambiará y, por lo tanto, ambos IAs repetirán las mismas estrategias en la próxima jugada. En el segundo caso (esto es, si los dos IAs juegan diferente), no cambiarán sus elecciones iniciales durante la fase de interacción. Entonces, uno de ellos ganará y el otro perderá. La estrategia usada por el IA perdedor no sumará puntos pero la estrategia no usada podría haber predicho correctamente el resultado del juego y conseguirá un punto, lo que puede convertirla en la estrategia preferida del IA.

Esta dinámica fuerza a los dos agentes a jugar con sus estrategias más parecidas: en caso de coincidencia las estrategias no suman puntos, lo que asegura la repetición de ambas estrategias en la próxima jugada. En otras palabras, puesto que cada jugador posee dos estrategias, existen cuatro posibles combinaciones de estas, pero la combinación más repetida será aquella compuesta por las dos estrategias con el número más alto de predicciones coincidentes. Este comportamiento produce más coincidencias entre dos vecinos IAs que las esperadas en una pareja de agentes no interactuantes, puesto que puntúan sus estrategias independientemente. En particular, es esperable que la tasa de cambio de estrategia (el número promedio de pasos en los que un agente cambia de una estrategia a la otra dividido por el total de pasos [32]) sea menor para los IAs en grupos de dos que para jugadores independientes, sin importar el puntaje final. Las simulaciones computacionales confirman este

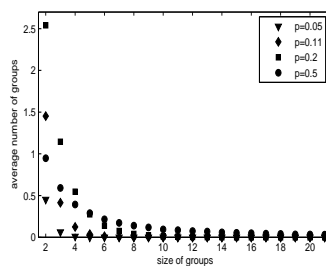


Figura 3.1: Número de grupos de IAs en función de sus tamaños. Los puntos son promedios sobre 10.000 resultados de una grilla periódica de 11×11 .

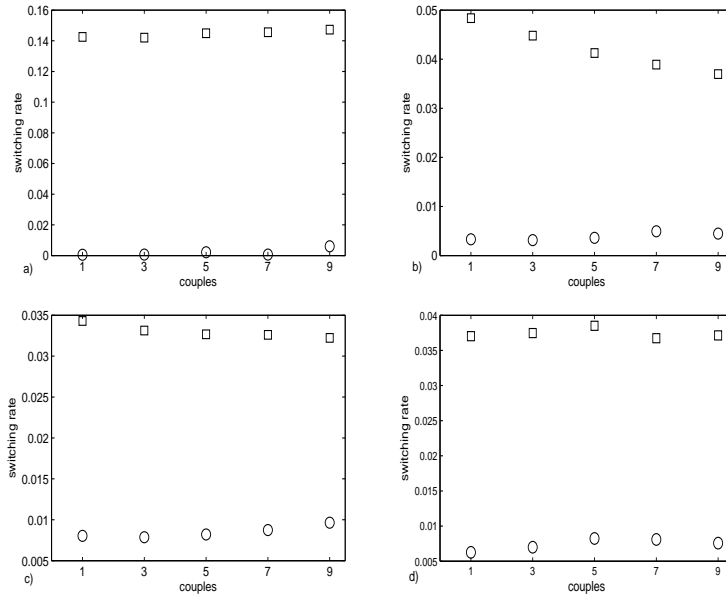


Figura 3.2: Tasa de cambio de estrategia de agentes independientes (\square) y de parejas de IAs (\circ) en función del número de parejas de IAs. Los puntos son promedios sobre 100 resultados de la grilla periódica de 11×11 después de 50.000 iteraciones con a) $m = 2$, b) $m = 5$, c) $m = 8$ y d) $m = 11$.

comportamiento, cuyos resultados se presentan en la Figura 3.2.

Las observaciones previas implican que podemos aproximar una pareja de IAs mediante dos agentes con una única estrategia cada uno, tales que estas dos estrategias coincidan en un cierto número de posiciones. Si $v, w \in \{0, 1\}^{2^m}$ son dos estrategias, definimos mediante $c(v, w)$ el número de posiciones coincidentes entre ellas, es decir, $c(v, w) = 2^m - \text{dist}(v, w)$, donde $\text{dist}(v, w)$ denota la distancia de Hamming entre v y w . Si w_1^i y w_2^i son las dos estrategias del agente i , definimos

$$d(i, j) = \frac{\max\{c(w_1^i, w_1^j), c(w_1^i, w_2^j), c(w_2^i, w_1^j), c(w_2^i, w_2^j)\}}{2^m}.$$

Finalmente, definimos la tasa de similitud como el valor esperado de $d(i, j)$ para los agentes i y j con dos estrategias cada uno aleatoriamente asignadas (ver Cuadro 3.1). La tasa de similitud representa la probabilidad de coincidencias de posición entre las dos estrategias más parecidas de dos agentes cualesquiera. Dado dos grupos de un par estrategias cada uno, la tasa de similitud indica en cuánto se parecen las dos estrategias de distinto grupo que más se parecen.

m	Tasa de similaridad
2	0.742
3	0.677
4	0.627
5	0.591
6	0.565
7	0.544
8	0.532
9	0.523
10	0.516
11	0.512
12	0.508
13	0.504

Cuadro 3.1: Tasas de similaridad de dos estrategias en función de m ; es decir, el número esperado de posiciones coincidentes entre las dos estrategias más parecidas de dos agentes cualesquiera. Los valores se obtuvieron promediando la fracción de coincidencias entre estrategias sobre 10.000 parejas de estrategias generadas aleatoriamente.

Remplazamos, entonces, cada grupo de dos IAs por dos agentes no interactuantes de estrategia única (llamados *agentes probabilísticos*), tal que estas dos estrategias coinciden en cada posición con probabilidad igual a la tasa de similaridad correspondiente. De acuerdo con la discusión previa, este remplazo intenta replicar el comportamiento del grupo interactuante que se presenta en la Figura 3.3. Una comparación de la eficiencia del mecanismo original de [26] con parejas de IAs por un lado y el modelo con parejas de agentes probabilísticos por el otro. Se observa claramente una correlación significativa entre estos dos modelos, implicando que los nuevos agentes probabilísticos modelan apropiadamente el comportamiento de las parejas de IAs en el juego original. Esto muestra que el procedimiento de interacción en [26] puede ser simplemente entendido como un mecanismo para la introducción de patrones de repetición dentro de las estrategias de los agentes designados como IAs.

La discusión previa se aplica a grupos de IAs de tamaño 2 pero, además, puede haber grupos de mayor tamaño. El valor de la tasa de similaridad definida apropiadamente para tales grupos es mucho menor que para los grupos de dos agentes, debido a la creciente dificultad de sincronizar las estrategias para alcanzar jugadas coincidentes. Este hecho, combinado con el pequeño número esperado de grupos con más de dos agentes, implica que los grupos de parejas de IAs son responsables de la mayoría de los efectos presentados

h

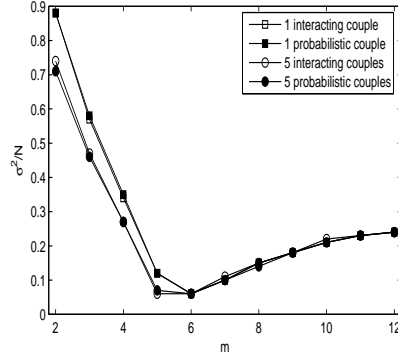


Figura 3.3: Varianza Reducida (σ^2/N) en función de la memoria (m) comparando diferente número de parejas interactuantes con sus equivalentes parejas probabilísticas. Los puntos son promediados sobre 100 resultados de una grilla periódica de 11×11 después de 50.000 iteraciones.

en el juego mediante el mecanismo de interacción local para p pequeño. Con p grande la probabilidad de grupos mayores a dos crece y da dinámica cambia.

3.4. La reacción de los agentes no interactuantes

Estudiamos ahora la reacción de los agentes no interactuantes ante las perturbaciones introducidas al juego por los IAs. Como ya mostramos, los IAs en grupos de dos tienden a jugar con sus estrategias más parecidas. Así, sus estrategias de mejor desempeño harán predicciones coincidentes con alta probabilidad. En este sentido, dado un grupo de IAs, definimos un *cluster* como un subconjunto del grupo cuyos agentes coinciden en sus jugadas con una probabilidad más alta que en subconjuntos de igual tamaño de agentes no interactuantes. Notemos que, debido a las razones dadas previamente, cualquier grupo de dos IAs es también un cluster de dos agentes.

Puesto que los agentes de un cluster tienden a hacer predicciones coincidentes, los clusters generan mayores valores de σ^2/N fácilmente detectados por los demás agentes y, además, esta detección es más fácil a medida que el número de clusters crece. Como los IAs que usaron la oportunidad extra no suman puntos para sus estrategias, más allá de su predicción, la probabili-

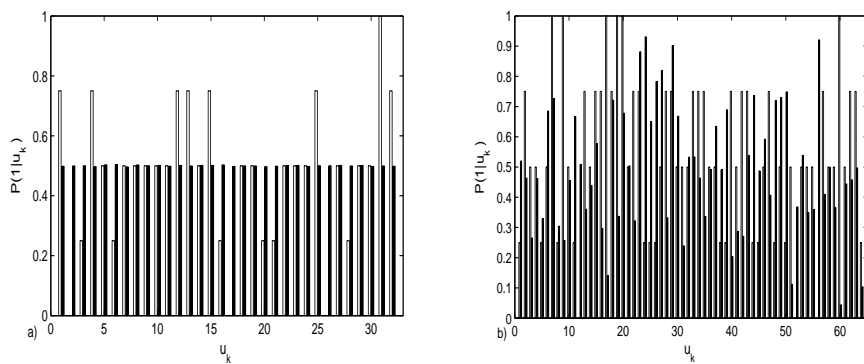


Figura 3.4: a) Histograma de las probabilidades condicionales $P_c(1|u_m)$ (barras blancas) y $P_i(1|u_m)$ (barras negras) con $m = 5$ para 117 agentes no interactuantes de dos estrategias más dos parejas de agentes probabilísticos (los agentes de cada pareja tienen estrategias únicas parecidas). Hay 32 posibles combinaciones de 0 y 1. Los números, escritos en forma binaria, generan la cadena u_m . b) Histograma de la probabilidad condicional $P_c(1|u_m)$ (barras blancas) y $P_i(1|u_m)$ (barras negras) con $m = 6$ para 117 agentes no interactuantes con dos estrategias más dos parejas de agentes probabilísticos. Hay 64 posibles combinaciones de 0 y 1. En ambas figuras, las barras son promedios de sobre 100 resultados en una grilla periódica de 11×11 después de 50.000 iteraciones.

dad de los agentes de un cluster de repetir sus jugadas para dos subsecuentes ocurrencias de una dada historia es mayor que el valor de orden $(2^m)^{-1/2}$, calculado en el Capítulo 2, correspondiente a los agentes no interactuantes. Esto permite a otros agentes reconocer clusters regulares como agentes “pesados”, haciendo que el aprendizaje tome en cuenta a los clusters en cada decisión. Puesto que estas desviaciones se incrementan con el número de clusters, los agentes no interactuantes pueden “leer” el juego (es decir, reconocer patrones de comportamiento), más fácilmente que en el MG. Así, el valor de m que alcanza el mínimo de σ^2/N es menor para este modelo, como se muestra en la Figura 3.3.

El sistema claramente se comporta de una manera cualitativamente diferente para pequeños y grandes m . Para estudiar la dinámica en estos casos extraemos los únicos datos públicamente disponibles de las series de tiempo del juego, es decir, los grupos minoritarios. Con este método utilizado en [57] se estudia la información contenida en las cadenas de elementos consecutivos de las series de tiempo para varias longitudes de m y N . Puesto que las estrategias usan sólo la información contenida en los últimos m pasos del juego, surge la pregunta de cuánta información es accesible para las estrategias. Para esto, los autores consideran la probabilidad condicional $P(1|u_k)$, definida como la probabilidad de que resulte minoritario el 1 dada una determinada historia, u_k , de las 2^m posibles en el juego. Por ejemplo, $P(1|1010)$ es la probabilidad de que 1 sea el grupo minoritario en algún momento, dado que los grupos minoritarios de las cuatro jugadas previas fueron 1, 0, 1, 0, en ese orden; siendo que el juego se está realizando con $m = 4$ y que las estrategias usan sólo la información registrada en cadenas de longitud m al tomar decisiones. El trabajo citado muestra que para longitudes de memoria m menores al correspondiente al σ^2/N mínimo, la probabilidad condicional $P(1|u_k) = 0,5$. Es decir, que ninguna estrategia que juegue con esas longitudes de memoria acumula más puntos de los que acumularía jugando aleatoriamente. Sin embargo, para longitudes de memoria iguales o mayores hay una mayor disponibilidad de información para las estrategias. De hecho, algunos agentes usando sus estrategias acumulan significativamente más puntos que si simplemente hicieran elecciones aleatorias, lo que aparece como el origen del mecanismo de coordinación mediante aprendizaje inductivo.

La detección de los agentes interactuantes por los no interactuantes también puede apreciarse estudiando el resultado del juego. Para esto, evaluamos la probabilidad condicional de jugar 1 para una dada cadena u_k de longitud m cuando parejas de agentes probabilísticos participan del juego. La Figura 3.4.a muestra estos valores $P_i(1|u_k)$ y $P_c(1|u_k)$ para $m = 5$ para agentes no interactuantes y dos parejas de agentes probabilísticos con estrategias únicas parecidas (tasa de similaridad 0,591), respectivamente. El histograma de

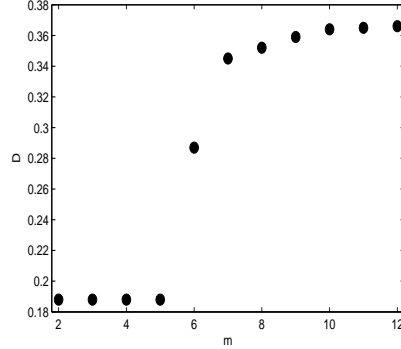


Figura 3.5: Diferencia D entre las probabilidades condicionales $P_c(1|u_k)$ y $P_i(1|u_k)$ en función de m para 117 agentes no interactuantes con dos estrategias más dos parejas de agentes probabilísticos con estrategia única parecida. La transición de fase se observa para $m = 6$. Los puntos son promedios sobre 100 resultados de una grilla periódica de 11×11 después de 50.000 iteraciones.

$P_i(1|u_k)$ es plano para ese valor de m (tal como aparece en [57] para el MG original) mostrando que los clusters no han sido detectados. La Figura 3.4.b muestra los valores de $P_i(1|u_k)$ y $P_c(1|u_k)$ para $m = 6$ (tasa de similitud $0,565$), y ahora los agentes no interactuantes tienden a evitar la predicción hecha por los clusters.

Para medir esta tendencia computamos la distancia promedio entre $P_c(1|u_k)$ y $P_i(1|u_k)$ mediante

$$D = \frac{1}{2^m} \sum_{u_k} |P_i(1|u_k) - P_c(1|u_k)|,$$

y la Figura 3.5 muestra estas mediciones en función de m . Como podemos ver, para $m \leq 5$ el gráfico de $P_i(1|u_k)$ es plano ($P_i(1|u_k) \sim 0,5$) y la diferencia esperada aparece siendo $|P_i(1|u_k) - P_c(1|u_k)| \sim |0,5 - P_c(1|u_k)| \sim 0,188$. Por otro lado, la detección del cluster aparece para $m \geq 6$, como se muestra con mayores distancias promedio para valores crecientes de m .

Capítulo 4

El *MG* con Agentes Líderes y Agentes Seguidores

4.1. Introducción

Inicialmente, definiremos las *influencias verticales* como aquellas que se ejercen desde distintos niveles de decisión. Un agente considera valiosa la decisión u opinión de otro agente que está “más calificado” que él para tomar una decisión, por varios motivos: porque posee más o mejor información, porque está mejor asesorado, porque tiene más experiencia o simplemente porque es más inteligente. Éste es el caso típico que se da con los llamados “gurúes”, referentes o líderes, cuyos comentarios son escuchados atentamente por los agentes “comunes” y tenidos en cuenta al momento de decidir. La influencia de sus comentarios y consejos marca una tendencia. Son opiniones recibidas desde una posición de “autoridad en la materia” y sólo una de estas opiniones es suficiente para realizar la opción individual. Sin embargo, pueden estos gurúes dejar de ser referentes de los comunes por los malos resultados que les significó a estos últimos seguir sus pasos. En ese caso, cada agente común tiene la plena libertad de seguir los consejos de otro referente con el que observa mejores resultados. Suponemos en esta definición que los consejos son sinceros y sus acciones son verdaderas, esto es, un referente realmente dice lo que opina y no miente para obtener ventajas de aquellos que ocasionalmente lo siguen.

Ejemplos de este comportamiento tenemos en muchos lados. Los pequeños inversionistas y especuladores están muy atentos a las opiniones de analistas y a las últimas grandes inversiones privadas o estatales, contando con que están mejor informados y asesorados. También es posible identificar dinámicas similares en el ámbito local dentro de los mercados inmobiliarios con las

apuestas al desarrollo de nuevas urbanizaciones, o urbanizaciones establecidas revalorizadas gracias a inversiones en infraestructura o la instalación de algún servicio público, vial, etc. También es un mecanismo muy utilizado en publicidad, como cuando alguna persona referente recomienda un producto o servicio.

En este capítulo, estudiamos un modelo basado en el original MG introduciendo agentes que actúan como gurúes y otros que intentan imitar sus acciones, ejerciendo lo que hemos definido como influencia vertical, con el objeto de quedar del lado minoritario. Estas reglas establecen un escenario de dos niveles de decisión donde uno de los grupos podría tomar ventaja de ello. El modelo propuesto es comparado entre distintas formas de jugar (presentadas en la siguiente sección), prestando atención al desempeño de cada grupo y al desempeño de la población agregada, así como al surgimiento de la coordinación.

4.2. El modelo

En esta sección, caracterizamos el MG extendido a las dos clases de tomadores de decisión. Asumimos que una de éstas mantiene las instancias características del MG original, presentado en [32] y previamente explicadas (esto es, cada jugador posee s estrategias de predicción binaria y, en cada paso de tiempo, las estrategias que predicen correctamente el resultado ganan un punto). Por el contrario, el otro grupo no tiene estrategias de decisión binaria sino que sus estrategias refieren a jugadores del grupo anterior; aquellas que predigan correctamente alguno de los agentes del primer grupo que acertará el resultado (esto es, aquellas estrategias que indiquen a qué agentes del primer grupo imitar en su jugada) ganará un punto virtual, sin importar si participó de esa jugada o no. Por una cuestión de sencillez, llamamos *líderes* a los agentes del primer grupo y *seguidores* a los del segundo. El Cuadro 4.1 ilustra un ejemplo de dos estrategias típicas para ambos, líderes y seguidores. Bajo estas reglas, algunas configuraciones están prohibidas, por ejemplo, el caso extremo con un único agente del lado de la minoría es posible sólo si el ganador pertenece al grupo de los líderes y ningún seguidor lo imitó en esa jugada, puesto que las decisiones de cualquier seguidor están atadas a las de algún líder y, por lo tanto, no podría haber sólo seguidores en uno de los lados.

Consideremos a los agentes jugando con la misma longitud de memoria m , el mismo valor de elección (la elección de cada agente pesa uno) y el mismo número s de estrategias (tomadas al azar del conjunto que corresponde al

Estrategia de Líder		Estrategia de Seguidor	
$m = 3$	Predicción	$m = 3$	Predicción
000	1	000	líder 02
001	1	001	líder 34
010	0	010	líder 18
011	1	011	líder 55
100	0	100	líder 71
101	0	101	líder 12
110	0	110	líder 09
111	1	111	líder 43

Cuadro 4.1: Ejemplo de estrategias típicas para un líder y un seguidor.

grupo de cada agente) para asumir similar capacidad de razonamiento y enfocándonos en las diferencias entre los grupos generadas a partir del nivel de decisión que cada agente tiene. Tenemos, además, una población total de N jugadores de los cuales L son líderes y F son seguidores. Vale notar que los agentes que cumplen el rol de seguidores deben utilizar reglas más complejas que los líderes (puesto que la columna de predicción no es binaria), a menos que $L \leq 2$. El número total de estrategias disponibles es 2^{2^m} para los líderes, L^{2^m} para los seguidores y hay $N = L + F$ agentes interactuando en el juego simultáneamente.

Tomando en cuenta el premio del juego, la distribución óptima de recursos, desde el punto de vista de social, tiene $(N - 1)/2$ ganadores sin consideración del número de líderes y seguidores que participen de la minoría. Por lo tanto, cuanto menor sea el número de ganadores, mayor será el desperdicio de recursos debido a su ineficiente distribución.

En el MG original, tanto como en mercados financieros, la varianza σ^2 de la división de la población entre las dos opciones es considerada uno de los parámetros más importantes del juego porque mide la forma en que la población está globalmente desperdiciando o desaprovechando los recursos disponibles. Cuanto menor es σ^2 , menor es el desaprovechamiento, la incertidumbre y la volatilidad del mercado. El surgimiento de la coordinación entre agentes en el MG es dado por el hecho de que los agentes colectivamente se comportan de una manera mejor que si actuaran aleatoriamente, en cuyo caso, la varianza sería $\sigma_r^2 = N/4$. De hecho, ya vimos anteriormente que la varianza de los agentes coordinados, incluso en el MG original es $\sigma^2 < \sigma_r^2$ [42, 45, 65, 46]. Sin embargo, cuando algunos jugadores siguen las elecciones de otros, no se supone *a priori* que el juego vaya a comportarse de la forma clásica conocida. Esto no sólo incluye nuevas variables críticas para

considerar sino que además hace necesario redefinir el concepto de “instancia aleatoria” para medir los parámetros de coordinación.

Definimos la instancia aleatoria como sigue: en cada paso, cada seguidor aleatoriamente elige un líder para imitar, y luego cada líder, “arrastrando” su conjunto de seguidores, aleatoriamente elige una de las dos alternativas (0 o 1).

Para ello definamos la variable aleatoria x_i como la jugada (0 o 1) del líder i y como y_i al número de seguidores que en una determinada iteración tiene el líder i . Asumimos que las variables aleatorias son independientes. Tenemos, entonces, que las probabilidades $P(x_i = 1) = P(x_i = 0) = 1/2$ y que la cantidad de agentes que eligen la opción 1 aleatoriamente es $\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1)$. Por lo tanto, su varianza queda definida como

$$\sigma_r^2 = Var \left(\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1) \right) = E \left(\left(\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1) \right)^2 \right) - \left(E \left(\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1) \right) \right)^2$$

o sea

$$\sigma_r^2 = E \left(\left(\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1) \right)^2 \right) - (L/2(F/L + 1))^2$$

pues las $y_i \sim Bi(F, 1/L)$. Pero,

$$E \left(\left(\sum_{i=1}^L x_i(y_i + 1) \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^L E(x_i^2(y_i + 1)^2) + \sum_{i \neq j} E(x_i(y_i + 1)x_j(y_j + 1))$$

Como

$$E(x_i^2(y_i + 1)^2) = 1/2E((y_i + 1)^2) = 1/2(Var(y_i) + (F/L + 1)^2) = 1/2(F/L(1 - 1/L) + (F/L + 1)^2)$$

y

$$E(x_i x_j (y_i + 1)(y_j + 1)) = \frac{1}{4} E((y_i + 1)(y_j + 1))$$

Podemos reescribir el último término como

$$\frac{1}{4} E(y_i y_j + y_i + y_j + 1) = \frac{1}{4} (E(y_i y_j) + E(y_i) + E(y_j) + 1)$$

Sabemos que $E(y_i) = F/L$, por lo que resta encontrar $E(y_i y_j)$.

Dado que y_i y y_j no son independientes tenemos

$$E(y_i y_j) = \sum_{k=0}^F \sum_{l=0}^{F-k} lk P(y_i = l, y_j = k) = \sum_{k=0}^F \sum_{l=0}^{F-k} lk P(y_j = k) P(y_i = l | y_j = k)$$

Asumiendo que la asignación aleatoria de seguidores por líder sigue una distribución binomial tenemos

$$E(y_i y_j) = \sum_{k=0}^F \sum_{l=0}^{F-k} l k \binom{F}{k} \frac{1}{L}^k \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{F-k} \binom{F-k}{l} \left(\frac{1}{L-1}\right)^l \left(1 - \frac{1}{L-1}\right)^{F-k-l}$$

Observando que

$$\sum_{l=0}^{F-k} l \binom{F-k}{l} \left(\frac{1}{L-1}\right)^l \left(1 - \frac{1}{L-1}\right)^{F-k-l} = \frac{F-k}{L-1}$$

reescribimos

$$E(y_i y_j) = \sum_{k=0}^F k \binom{F}{k} \frac{1}{L}^k \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{F-k} \frac{F-k}{L-1}$$

o sea

$$E(y_i y_j) = \frac{F}{L-1} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \sum_{k=0}^{F-1} k \binom{F-1}{k} \frac{1}{L}^k \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{F-1-k}$$

lo cual implica que

$$E(y_i y_j) = \frac{(F-1)F}{L^2}$$

dato que $\sum_{k=0}^{F-1} k \binom{F-1}{k} \frac{1}{L}^k \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{F-1-k} = \frac{F-1}{L}$.

Finalmente, entonces, recopilamos lo obteniendo

$$\sigma_r^2 = \frac{L}{4} \left\{ \left(\frac{F}{L} + 1\right)^2 + \frac{F}{L} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \right\} \quad (4.1)$$

Notemos que si sólo L agentes con peso total F aleatoriamente distribuido entre ellos jugaran el MG, la contribución del promedio ponderado a σ_r^2 sería $(F/L + 1)^2$ y la contribución a la varianza de pesos sería $F/L(1 - 1/L)$.

4.3. Resultados

El objetivo de esta sección es mostrar las posibilidades de coordinación, las ventajas o desventajas de este tipo de estructura social con respecto al desempeño del sistema. Para ello, analizamos el juego organizándolo de tres maneras distintas, donde en cada una tenemos diferentes comportamientos de los seguidores:

- seguidores estratégicos (SF): con seguidores actuando de acuerdo al modelo presentado aquí;
- seguidores fijos (FF): con cada seguidor eligiendo aleatoriamente al comienzo del juego un líder para imitar a lo largo de todo el juego y
- seguidores aleatorios (RF): con cada seguidor eligiendo aleatoriamente para cada paso del juego un nuevo líder para imitar.

Como la varianza mide cuán bien los agentes son capaces de distribuir los recursos, el punto clave es observar a partir de dónde $\sigma^2 < \sigma_r^2$, bajo diferentes condiciones. Para L grande, tenemos $(1 - 1/L) \sim 1$. Entonces, de la ecuación 4.1 obtenemos

$$\sigma_r^2 \sim \frac{L}{4} \{(k+1)^2 + k\}, \quad (4.2)$$

donde $k = F/L$.

Para el MG original (recuperable para el caso particular $k = 0$ o en forma equivalente $N = L$), los mismos resultados aparecen para diferentes valores de m y N convenientemente reescalados mediante los factores de escala $2^m/N$ y σ^2/N que ya fueron considerados [42, 65, 44]. En nuestro modelo, un efecto de escala comparable es obtenido utilizando L en lugar de N , como se infiere de la ecuación 4.2. Puesto que σ_r^2/L sólo depende de k , podemos estudiar instancias donde el comportamiento de los agentes evoluciona para alcanzar la coordinación para diferentes valores de k .

Comparemos la varianza σ^2/L de agentes que eligieron la alternativa 0 como función de $2^m/L$, con $s = 2$, para las tres clases de seguidores presentadas arriba. Las figuras 4.1.a y 4.1.b muestran los resultados para $k = 1$ y $k = 5$, respectivamente. Observamos que, a medida que la información disponible de los agentes crece (esto es, $2^m/L$ crece), σ^2/L tiende al valor de la instancia aleatoria (ecuación 4.2) debido a su dificultad de manejar aquella creciente cantidad de información [32]. Vemos que el mejor desempeño de los agentes (la minimización de σ^2/L) se alcanza cuando los seguidores juegan estratégicamente (SF), en vez de fijos (FF) o aleatorios (RF). Esto significa que ellos colaboran junto con los líderes en mejorar la coordinación cuando también poseen un aprendizaje inductivo. En este sentido, el movimiento aleatorio de seguidores (RF) no permite su proceso de aprendizaje y dificulta el de los líderes, entonces el juego desarrolla su peor desempeño. A pesar de que los tres casos consiguen una coordinación que mejora la instancia aleatoria, el comportamiento SF muestra los niveles de coordinación más elevados. Por lo tanto, lo comparamos al MG original por medio de una escala apropiada de acuerdo a los valores de k . El objetivo es comparar el desempeño del juego para cualquier k con una instancia del MG definida aplicando un peso fijo

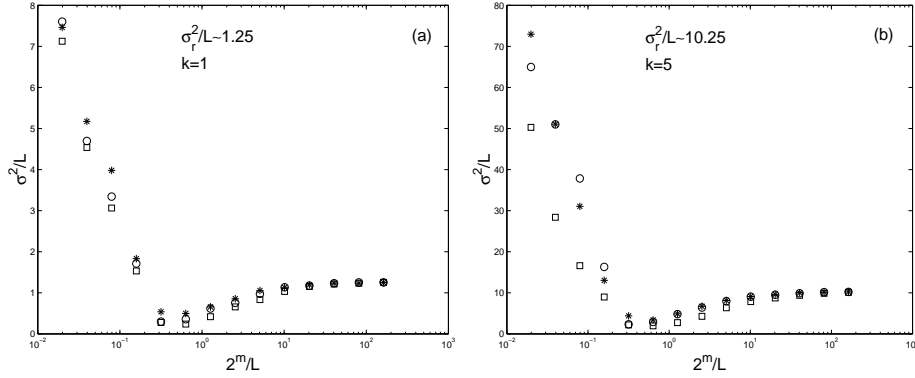


Figura 4.1: σ^2/L en función de $2^m/L$ para comportamientos SF (\square), FF (\circ) y RF ($*$) con (a) $k = 1$ y (b) $k = 5$.

$k + 1$ para cada agente ($k + 1$ corresponde al peso de los seguidores por líder k más el propio líder). En este MG ponderado (WMG), cada agente pesa siempre lo mismo, el “ruido” generado por los seguidores es minimizado y por lo tanto es útil como referencia contra qué comparar.

La varianza σ_r^2 para la instancia aleatoria del WMG está dada por $L/4(k + 1)^2$, por lo que podemos definir un factor de escala $1/\lambda = (k + 1)^2$. Se muestra en la Figura 4.2.a la forma en que la población total genera una coordinación eficiente, para varios valores de k , cuando ambos grupos, líderes y seguidores, aprenden. Esta coordinación resulta ser (alrededor del mínimo σ^2/L) incluso mejor que la instancia WMG, pero empeora más rápidamente a medida que $2^m/L$ crece, tendiendo finalmente a $\lambda\sigma_r^2/L \sim \frac{1}{4}(1 + k/(k + 1)^2)$. Puesto que este valor asintótico es mayor que $1/4$ (para $k > 0$) una varianza similar a aquella del WMG, en la región de máxima coordinación, implica un interesante desarrollo del juego.

Sin embargo, este comportamiento global no conlleva ninguna información acerca de los beneficios de cada grupo. Por ejemplo, la coordinación general podría ser muy mala pero los líderes podrían coordinarse bien dentro de la descoordinación general. En otro caso, la coordinación de los líderes puede aparecer como mala votando una gran mayoría de ellos a un lado, y sin embargo, esa mayoría estar en la minoría de la población total. Considerando este punto, utilizamos la tasa de éxito definido en [32] como la fracción de la población que en una jugada se encuentra del lado minoritario. Idealmente, la tasa de éxito óptima del MG con una población de N individuos es $(N - 1)/2$. Las tasas de éxito promedio de cada grupo son analizadas separadamente. La Figura 4.2.b muestra a los líderes tomando ventaja sobre los seguidores con comportamiento SF, para diferentes valores de k , principalmente debido

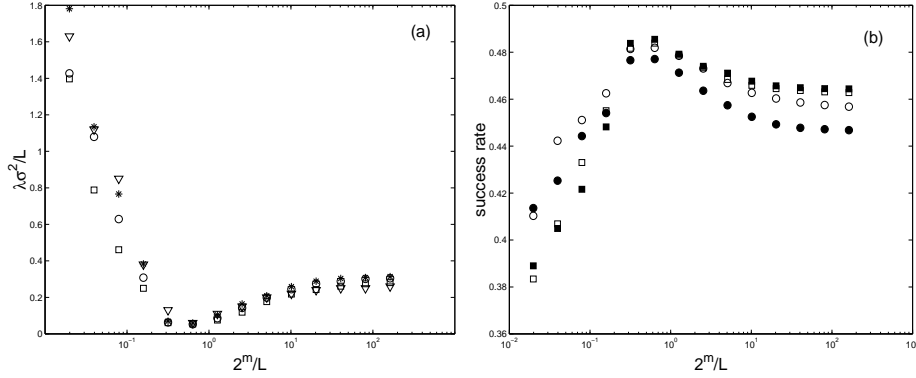


Figura 4.2: (a) Escalado del comportamiento SF para λ correspondiente a $k = 0$ (∇), $k = 1$ ($*$), $k = 2$ (\circ) y $k = 5$ (\square). Notar que $k = 0$ es equivalente al MG original (Ecuación (4.2)). (b) Tasa de éxito de líderes con SF, para $k = 1$ (\blacksquare) y $k = 5$ (\square); y seguidores con comportamiento SF, para $k = 1$ (\bullet) y $k = 5$ (\circ). Notar el cambio de grupo exitoso cuando comienza la coordinación.

al nivel de decisiones que cada grupo toma. Sin embargo, esta ventaja decae con el crecimiento de k , evidenciando la dificultad de los líderes para manejar la opinión de los seguidores. De hecho, esta tendencia puede ser vista en los diferentes comportamientos de los seguidores, como aparece en la Figura 4.3 y 4.4 a través de las tasas de éxito de líderes y seguidores, respectivamente, para $k = 1$ y $k = 5$. Otra importante característica de la Figura 4.2.b aparece para pequeños valores de $2^m/L$, donde $\sigma^2 > \sigma_r^2$. En aquella región de la figura, la tasa de éxito de los seguidores supera a la de los líderes, implicando una transición de fase en $\sigma^2 \sim \sigma_r^2$ ($2^m/L \sim 0,2$), independientemente de k . Vale aclarar que si bien por la misma definición del juego no es posible que la tasa de éxito de la población total sea superior a 0,5, porque la minoría no puede estar formada por más de la mitad de la población, cuando se toman las tasas de éxito de las dos subpoblaciones separadamente es posible que alguna supere el 0,5 dado que la minoría se compone teniendo en cuenta las dos subpoblaciones. Eso indicaría que la mayor parte de los individuos que pertenecen a una de las dos se encuentra dentro de la minoría de la población total.

Aun cuando la coordinación global se comporta similarmente al MG original, existe una desigual distribución de los recursos que beneficia a los líderes. En este sentido, vemos en la Figura 4.2.b que los seguidores con comportamiento SF se aproximan a la tasa de éxito de los líderes sólo en la región de máxima coordinación. En general, los tres comportamientos de los seguidores difie-

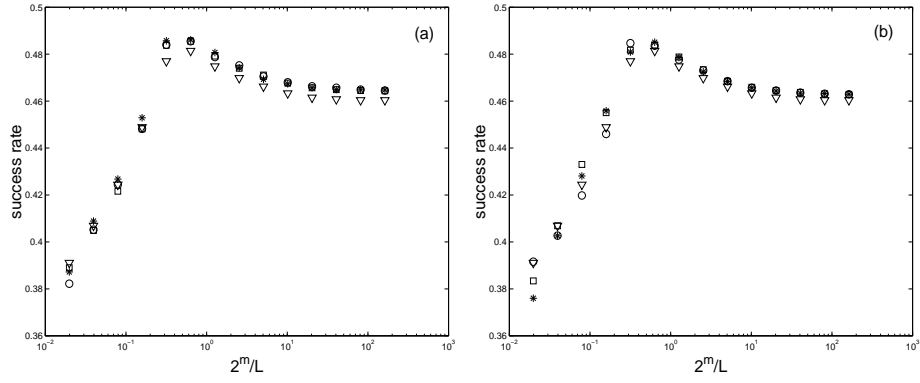


Figura 4.3: Tasa de éxito de líderes para comportamientos SF (\square), FF (\circ) y RF ($*$) con el MG original (∇) como parámetro de comparación para (a) $k = 1$ y (b) $k = 5$.

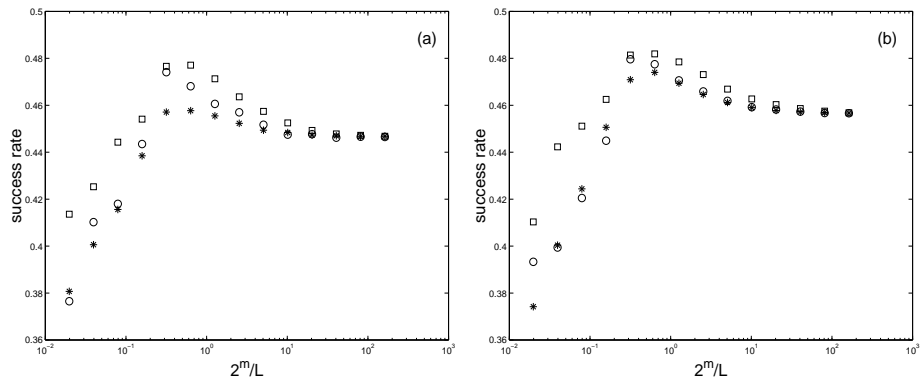


Figura 4.4: Tasa de éxito de seguidores para comportamientos SF (\square), FF (\circ) y RF ($*$) para (a) $k = 1$ y (b) $k = 5$.

ren significativamente del comportamiento de los líderes, siendo comparables sólo con el crecimiento de k . Se ve claramente que el comportamiento RF es la peor forma de jugar porque no sólo genera menores ganancias a los seguidores, sino que también perjudica el juego de los líderes. Sin embargo, a pesar de las diferencias de las tasas de éxito entre los tres comportamientos de los seguidores, no se ve afectada en forma destacable la tasa de éxito de los líderes. De acuerdo con la Figura 4.3, los líderes siempre mejoran su tasa de éxito en comparación a cuando juegan solos pero, como fue mencionado, esa mejora decrece a medida que aumenta k , estabilizándose asintóticamente en el desempeño del MG original. Esto sugiere que, en la región de coordinación, los líderes no toman ganancia extra basados en la incapacidad de aprendizaje de los seguidores, sino en el nivel de decisión y en el valor de k . Como fue mencionado, donde $\sigma^2 < \sigma_r^2$, la tasa de éxito de los líderes tiende a la instancia MG original a medida que crece k , esto es, tiende a la tasa de éxito de la instancia $k = 0$. Por lo tanto, debería existir algún $0 < k < \infty$ donde el desempeño de los líderes es óptimo. Simulaciones complementarias focalizadas muestran que el punto óptimo corresponde a $k = 1$, independientemente de $2^m/L$.

Apéndice A

Descripción de la implementación

La mayoría de los experimentos sobre el juego de minorías reportados en esta tesis fueron realizados con un software implementado específicamente para el presente trabajo. En este Apéndice se describen los detalles técnicos de esta implementación.

A.1. Estructura de clases

La implementación fue realizada en lenguaje C++ utilizando el entorno *Borland C++ Builder 5.0*, con la intención de aprovechar las posibilidades del lenguaje C++ en cuanto a la orientación a objetos. En particular, las capacidades de herencia y polimorfismo de los lenguajes orientados a objetos fueron muy importantes para mantener acotado el volumen de la implementación. Dicha implementación se basa en un núcleo del software diseñado y desarrollado de tal forma que el mismo código permite ejecutar todas las variantes del juego de minorías descritas en esta tesis, por medio de las configuraciones apropiadas. Además de simplificar el esfuerzo destinado a la implementación, esta característica del código permite asegurar que los experimentos destinados a comparar distintas variantes o parametrizaciones del juego se realizan en igualdad estricta de condiciones.

La simulación del juego de minorías se encuentra estructurada alrededor de las clases **Poblacion** y **Agente**. Una instancia de la clase **Poblacion** representa a la población de una instancia del juego, compuesta por un conjunto de agentes no necesariamente homogéneos. Por su parte, la clase **Agente** es una clase abstracta que reúne el comportamiento común a todos los agentes

(incluyendo los agentes interactuantes, que votan en dos fases), y se implementan subclases para especificar los distintos tipos de agentes y estrategias involucrados en el juego. Es importante observar que las estrategias que conforman la base de las decisiones de los agentes también se consideran como subclases apropiadas de **Agente** dentro del juego, dado que esencialmente el comportamiento de una estrategia no difiere del comportamiento de un agente. Esta característica del diseño permite, por ejemplo, implementar fácilmente agentes con una sola estrategia generando como instancia directamente la clase que representa a una estrategia, que en este caso también responde a la interfaz y funcionalidad de un agente. Por otra parte, dado que los agentes mantienen un registro de los puntos que han obtenido en el juego, no es necesario generar código adicional para el registro de los puntos virtuales de las estrategias.

La Figura A.1 muestra el diagrama de clases de la simulación del juego. Cada cuadro corresponde a una clase y, en los casos en los que alguna clase contiene instancias de otras clases, se indica esta situación en la parte inferior del cuadro. Las flechas simples corresponden a la relación “usa a” y las flechas con un triángulo corresponden a la relación “hereda de”. Los recuadros punteados se utilizan para agrupar las clases con un objetivo similar (líderes y seguidores, en este caso), y las flechas con un triángulo que van de un recuadro punteado a una clase especifican que todas las clases incluidas en el recuadro punteado heredan de la clase a la cual apunta la flecha.

Se realiza a continuación una descripción funcional de las clases incluidas en el diagrama de clases de la Figura A.1.

Poblacion. Una instancia de la clase **Poblacion** representa una instancia del juego de minorías, con el conjunto de los agentes que participan en el juego y la información relevante a la ejecución de la simulación. Contiene un arreglo de **Agente** que, debido a los requerimientos del lenguaje C++ en cuanto al polimorfismo, se implementa como un **vector** de punteros a **Agente** (se utilizan las implementaciones estándar de la biblioteca STL para el manejo de listas y arreglos). Durante la construcción de una instancia de **Poblacion**, se construyen en memoria dinámica las instancias de las subclases de **Agente** especificadas por la configuración de la corrida y se agregan a este **vector** los punteros a estas instancias. El tipo de los agentes que se agregan especifica la variante del juego de minorías que se ejecutará. Por ejemplo, si se desea ejecutar una corrida del juego de minorías clásico, entonces solamente se instancian agentes de la clase **Seleccionador**; si se desea ejecutar una corrida con líderes y seguidores, entonces se instancian agentes de la clase

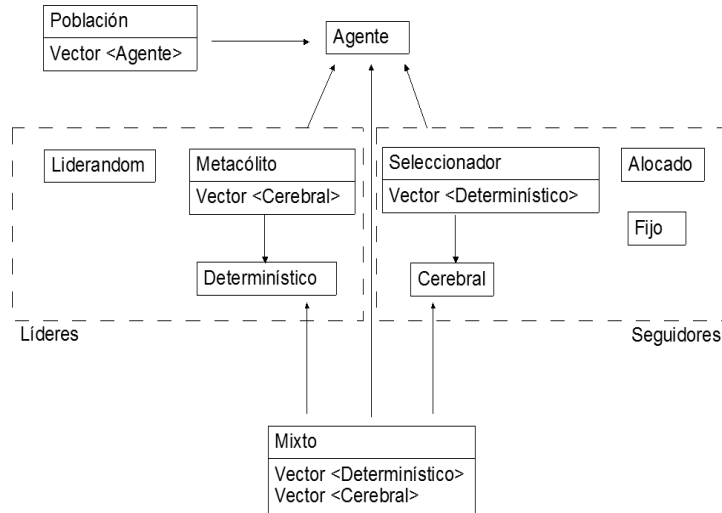


Figura A.1: Diagrama de clases del simulador del juego de minorías.

Seleccionador y de la clase **Metaacolito**, etc.

En caso de que la configuración especifique que se utilizan agentes interactivos, el constructor de **Poblacion** ubica los agentes interactivos en una grilla rectangular y selecciona aleatoriamente a los agentes que serán interactivos, de acuerdo con la probabilidad de que un agente sea interactivo, especificada también en la configuración. Esta grilla no se construye explícitamente, sino que se calcula la posición dentro de la grilla para cada agente de acuerdo con su posición en el arreglo de agentes. Una vez seleccionados los agentes que serán interactivos, se informa a cada agente si es interactivo o no y, en caso de ser interactivo, quiénes son sus vecinos. Este mecanismo permite a los agentes abstraerse de la configuración en forma de grilla, especificando cualquier grafo dirigido como patrón de interacción.

La clase **Poblacion** cuenta con el método **votar()**, que ejecuta una ronda de la simulación. Durante cada ronda, se pide a los agentes que ejecuten las dos fases de votación (fase de selección de voto y fase de interacción). Cada subclase de **Agente** implementa distintos comportamientos en estas dos fases, de acuerdo con las descripciones que se realizan más adelante. Una vez realizada la votación, este método decide cuál es la decisión minoritaria e informa a los agentes el resultado de la votación. Además de este método, la

clase cuenta con métodos para consultar las cantidades de agentes, sus pesos y puntajes.

Agente. La clase **Agente** representa un agente genérico, implementando la funcionalidad común a todos los agentes. Es una clase abstracta, lo cual significa que algunos de los métodos no están implementados y deben implementarse en las subclases, y por este motivo no es posible instanciar esta clase directamente dentro del código. La interfaz principal de **Agente** está dada por los siguientes métodos:

- **void primeraRonda().** En este método se implementa la primera fase de decisión, que corresponde a decidir qué se votará en la próxima votación, en función de la historia del juego y las características del agente. Se llama al método protegido, virtual y abstracto **tomarDecision()** que no se implementa en **Agente** y debe, por lo tanto, implementarse en las subclases con funcionalidad específica de cada tipo de agente.
- **Decision segundaRonda().** Este método retorna la decisión final de la votación, que se implementa por medio del método protegido, virtual y abstracto **tomarDecisionFinal()** que, nuevamente, debe definirse en las subclases.
- **void ganadora(Decision).** Este método permite informarle al agente cuál fue la decisión minoritaria en la ronda anterior, y es utilizado por las subclases de **Agente** cuya decisión se basa en la historia del juego para actualizar la historia. Al finalizar cada ronda de votación, la instancia de **Poblacion** informa a todos sus agentes cuál fue la decisión ganadora mediante este método.

Además de otros métodos de consulta, la clase **Agente** mantiene como datos protegidos la cantidad de rondas del juego, los puntos obtenidos por el agente a lo largo del juego, el peso del agente y, en caso de ser interactivo, una lista de sus vecinos interactivos (informados por la instancia de **Poblacion** al momento de su construcción). Estos datos se actualizan dentro de los métodos implementados en **Agente**, dado que esta funcionalidad es común a todas las versiones de agentes.

Las subclases de **Agente** implementan los distintos tipos de agente que se consideran dentro de la aplicación, y que fueron utilizados a lo largo de este trabajo. Las subclases que se presentan en la Figura A.1 son las siguientes:

Seleccionador. Corresponde a un agente del juego de minorías clásico, o bien a un líder en caso de que se juegue con líderes y seguidores. Como

muestra la figura, cada instancia de **Seleccionador** tiene como dato privado una lista de agentes de la subclase **Deterministico**, que representan las estrategias individuales del agente. La primera fase de votación implica llamar al método **primeraRonda()** de sus sub-agentes (es decir, de sus estrategias), quedándose con la decisión del sub-agente con la mayor cantidad de puntos virtuales. La segunda fase de votación retorna el resultado de la primera fase si el agente no es interactuante, y el resultado minoritario de la compulsa con los vecinos si el agente es interactuante.

Deterministico. Como se mencionó en el párrafo anterior, esta subclase representa a una estrategia individual. El constructor de esta subclase toma como parámetro el tamaño del cerebro y genera aleatoriamente los resultados para cada outcome del juego. La implementación del método **tomarDecision()** sencillamente retorna la indicación de la estrategia de acuerdo con la historia actual del juego. Al igual que todos los agentes no interactuantes, el método **segundaRonda()** por defecto retorna el resultado de la primera fase.

Liderandom. Esta subclase corresponde a un agente que toma una decisión aleatoria en cada ronda, con lo cual la implementación de **tomarDecision()** genera un número aleatorio y retorna con probabilidad 1/2 una de las dos posibles decisiones. Al ser potencialmente un agente interactuante, el método **tomarDecisionFinal()**, que corresponde a la segunda fase de votación, consulta a los agentes interactuantes vecinos para tomar la decisión final.

Metaacolito. Esta subclase corresponde a un agente seguidor, cuyas estrategias informan no la decisión a tomar sino el líder a seguir en cada ronda. Por este motivo, un **Metaacolito** tiene como dato privado una lista de instancias de la subclase **Cerebral**, que responden a esta descripción. La implementación de las dos fases de votación es igual a la clase **Seleccionador**.

Cerebral. Como se mencionó en el párrafo anterior, esta subclase representa a una estrategia individual de un agente seguidor. El constructor de esta subclase toma como parámetro el tamaño del cerebro y genera aleatoriamente el número de líder que se debe seguir para cada outcome del juego. La implementación del método **tomarDecision()** decide a qué líder se debe seguir de acuerdo con el estado actual del juego, y retorna la decisión del líder correspondiente (consultando a la **Poblacion** para obtener la decisión del líder seleccionado). Al igual que todos los agentes no interactuantes, el método **tomarDecisionFinal()** por defecto retorna el resultado de la primera fase.

Alocado. Esta subclase corresponde a un agente seguidor que en cada paso selecciona un líder aleatoriamente y sigue a ese líder, comportamiento que se reimplementa el método `tomarDecision()`. Este tipo de agente no tiene comportamiento interactuante, con lo cual el método `tomarDecisionFinal()` retorna el resultado de la primera fase de votación.

Alocado. Esta subclase corresponde a un agente seguidor que al comienzo del juego selecciona un líder aleatoriamente y sigue a ese líder. El constructor de **Alocado** realiza esta selección, y el método `tomarDecision()` retorna la decisión del líder seleccionado en la construcción. Al igual que con la subclase anterior, este tipo de agente no tiene comportamiento interactuante.

Mixto. Esta subclase corresponde a un agente que tiene tanto estrategias de líder como estrategias de seguidor. Cuenta con un arreglo de **Determinístico** para almacenar las estrategias normales del juego de minorías clásico y con un arreglo de **Cerebral** para almacenar las estrategias de seguidor. El método `tomarDecision()` consulta a todos estos agentes que representan a las estrategias, y selecciona la decisión de la estrategia con la mayor cantidad de puntos virtuales.

A.2. Descripción de la interfaz

En esta sección mostramos algunas características de la interfaz gráfica contruida sobre la base de la implementación recién descrita. En la Figura A.2 aparecen las opciones de configuración de las dos interfaces utilizadas para los trabajos realizados y el listado de simulaciones posibles. En el primer caso, podemos ubicar a líderes y seguidores dentro de celdas grillas más otros libres. Esta opción permite darles a los que están dentro de las grillas la posibilidad de interactuar. Luego se especifica el cerebro m , la cantidad de estrategias s y la probabilidad de interacción p para cada grupo; el número de corridas del juego y las iteraciones por corrida, sobre lo que se promediará la varianza σ^2 . Luego siguen las opciones que permitieron definir los tres tipos de estrategia de los seguidores del Capítulo 4. La segunda interfaz de configuración corresponde a un programa complementario para los agentes interactivos del Capítulo 3. Las opciones son relativamente similares salvo por la posibilidad de incluir algunos agentes con una estrategia y agentes con 2 estrategias con una determinada probabilidad de coincidencias en las predicciones de sus historias. La tercer figura muestra el menú de opciones de simulación (ambas interfaces tienen básicamente las mismas opciones).

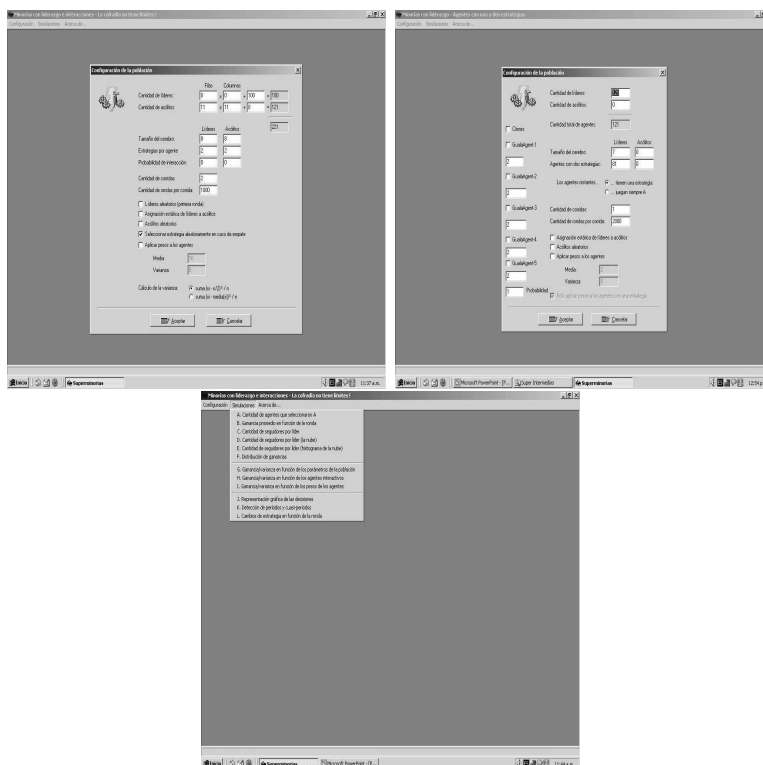


Figura A.2: Interfaces de las dos configuraciones utilizadas para los modelos de líderes y seguidores y de interactuantes y opciones de simulación.

En la Figura A.3 aparecen las cuatro primeras opciones de simulación. Empezamos con la serie de tiempo de los votantes a la opción A, indica entre otras cosas cuántos agentes interactuantes y cuantos aislados hay y el promedio de rondas en los que cada tipo de agente cambió de estrategia. Luego tenemos la ganancia promedio de líderes y seguidores por separado en el tiempo, la serie de tiempo de la cantidad de seguidores por líder (máxima, mínima, promedio y desviación estándar) y el histograma de seguidores por líder.

En la Figura A.4 mostramos tres solapas que nos permiten evaluar cómo se distribuye la ganancia general según las rondas y qué tan buenos son los seguidores para encolumnarse detrás de los líderes de forma de maximizar sus ganancias.

En la Figura A.5 mostramos los gráficos de la varianza según distintos parámetros relacionados con el tamaño de cerebro, las poblaciones, el número de estrategias, la probabilidad de interacción, etc. En las figuras superiores se muestran las configuraciones posibles de la varianza para distintos ejes según

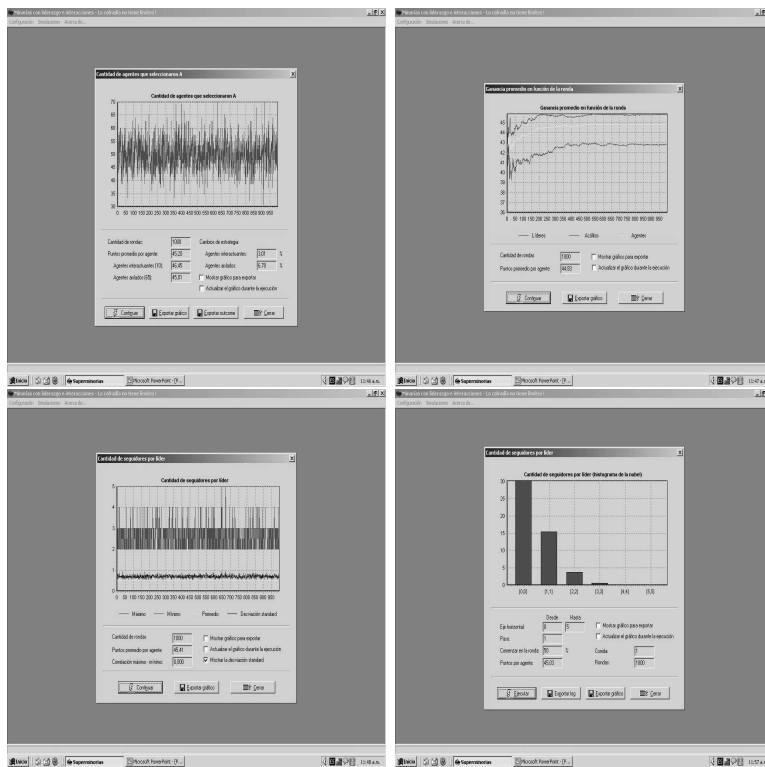


Figura A.3: Simulaciones de serie de tiempo de votantes a A, ganancia de agentes y distribución de líderes por seguidores.

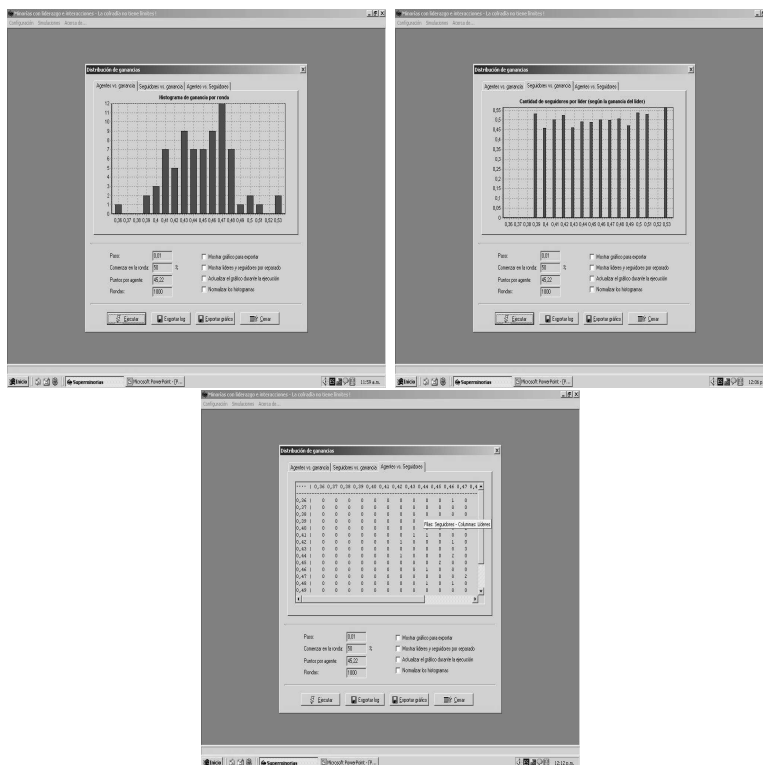


Figura A.4: Efectividad de los seguidores.

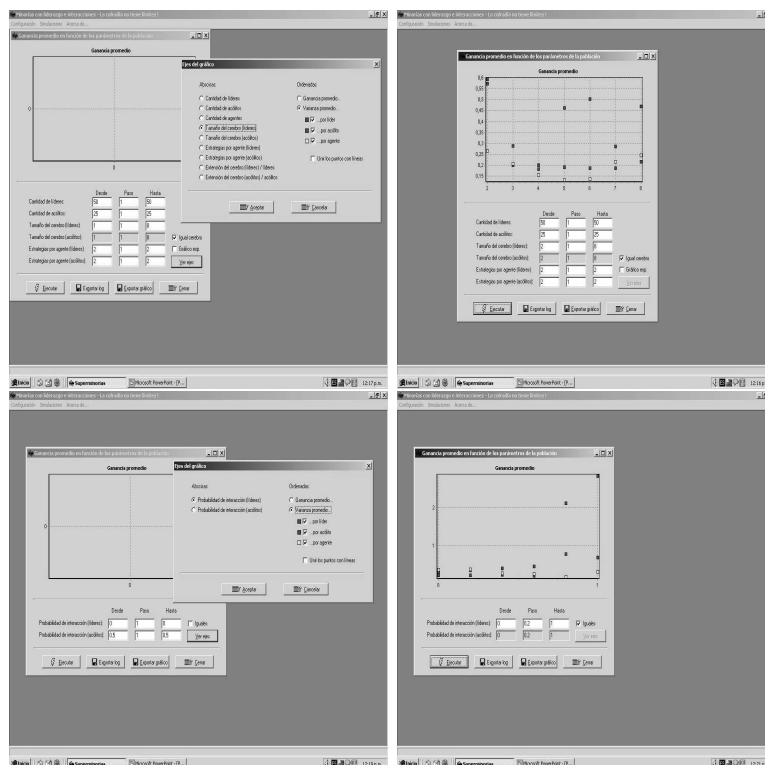


Figura A.5: Varianza en función de diversos parámetros característicos.

los tipos de agente diferenciados. En las inferiores se muestran gráficos similares pero con la posibilidad de variar la probabilidad de interacción dejando fijos los demás parámetros.

En la Figura A.6 muestra gráficos similares a los de la la Figura A.5 pero para valores de ganancia promedio de los agentes.

En la Figura A.7 mostramos primero la grilla de líderes o seguidores que votan A o B en blanco y negro, respectivamente; lo que permite darnos una buena de cómo se forman los patrones espaciales de interacción. Debajo se muestran dos solapas: una con el porcentaje de rondas en que cada grupo de agentes cambió de estrategia (lo que da idea del éxito o fracaso que tienen en el juego) y la otra con la serie de tiempo de votantes a A separado por tipo de agente.

En la Figura A.8 mostramos la probabilidad condicional promedio de que un agente juegue la opción 1 dada una historia h .

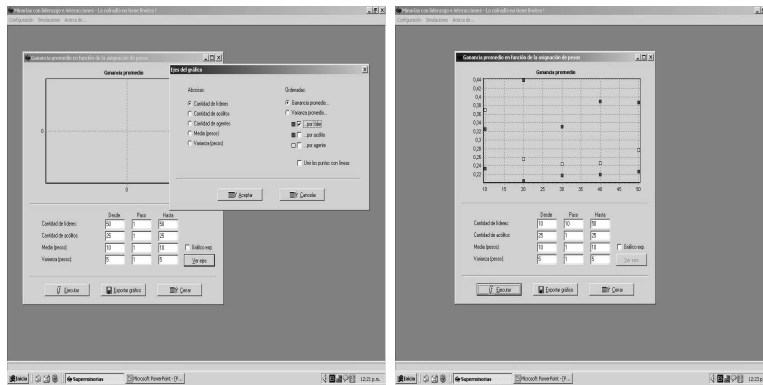


Figura A.6: Ganancia en función de diversos parámetros característicos.

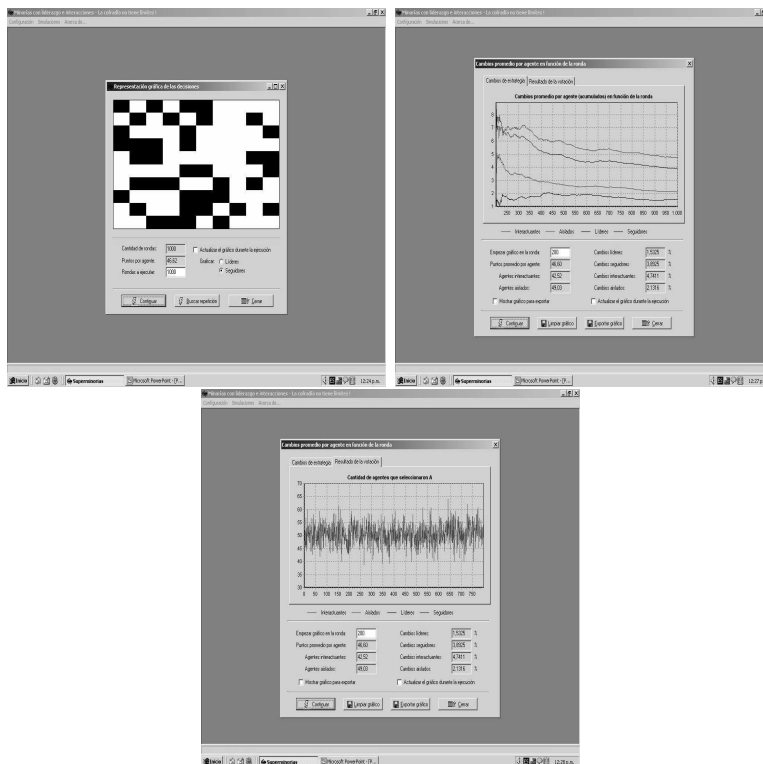


Figura A.7: Grilla de interacción, cambios de estrategia y votaciones por grupo.

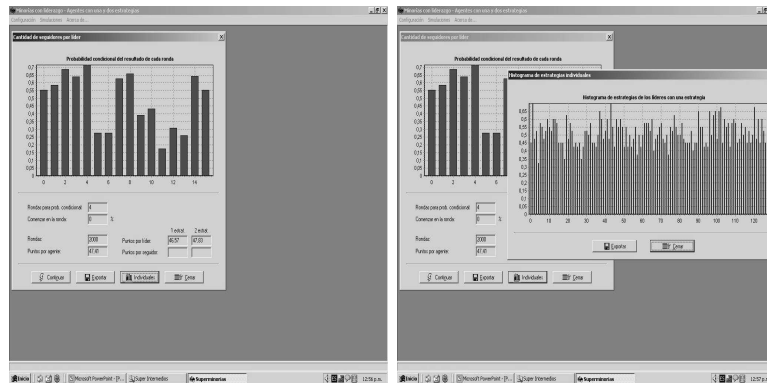


Figura A.8: Probabilidad condicional de las jugadas según las historias.

Agradecimientos

En primer lugar, a Gabriel Acosta. Por la paciencia y la ayuda, especialmente en el último tramo de la elaboración y la escritura de esta tesis, incluso poniendo en riesgo su propia salud. A Javier Marengo e Inés Caridi por todo el apoyo y disposición con los programas, con la escritura de los trabajos, por el entusiasmo y el esfuerzo.

A Romanelli por el empuje al Doctorado y a Inés González Bombal por creer en el empuje de Romanelli.

A mi familia, por todos estos años, por todos los años, por cada vez más años.

Finalmente, a Leti. Por soportar con paciencia y humor mis nervios, ausencias y obsesiones.

Bibliografía

- [1] G. Acosta, S. Guala, J. Marengo, Emergence of cooperation in an evolutionary game with two-level decisions, *Physica A*, **343** (2004) pp. 669-676.
- [2] G. Acosta, S. Guala, J. Marengo, Dynamics of a minority game with an additional layer of interaction, *Physica A*, **387**, Issues 2-3, 567-572 (2008).
- [3] G. Acosta, I. Caridi, S. Guala, J. Marengo *En preparación*.
- [4] G. Acosta, I. Caridi, S. Guala, J. Marengo *En preparación*.
- [5] J. von Neumann y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* Princeton University Press (1944).
- [6] M. Waldrop, *Complexity: the emerging science at the edge of order and chaos*, Penguin Books (1994).
- [7] H. Varian, *Microeconomic Analysis*, 3th Ed., A. Bosch (1992).
- [8] D. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, McGraw Hill (1995).
- [9] R. Akerlof, *Science* **211** (1981) 1390.
- [10] C.F. Acedo, A. Plastino, A.N. Proto, Mass media influence in opinion strategies, *Journal of Math. Soc.* 23, 2 (1998).
- [11] J. Goldenberg, B. Libai, S. Solomon, N. Jan y D. Stauffer, Marketing Percolation, *Physica A* 284, (2000) 335.
- [12] E. McCarthy y W. Perreault, *Basic Marketing: A Global-Managerial Approach*, 13th Ed., McGraw-Hill (1999).

- [13] B. Latané y A. Nowak, Self-Organization Social Systems: Necessary and Sufficuent Conditions for the Emergence of Clustering, Consolidation and Continuing Diversity, *Progress in Communication Sciences*, Barret y Boster (Eds.), (1997).
- [14] H. Föllmer, Random Economies with Many Interacting Agents, *J. of Mathematical Economics*, **1/1** (1974) 51.
- [15] G. Weisbuch y D. Stauffer, Hits and Flops Dynamics, *Int. J. Mod. Physics C* **15** (2000) 569.
- [16] R. Axelrod and W. Hamilton, *Science* **211** (1981) 1390.
- [17] B.A. Huberman y N.S. Glance, Beliefs and cooperations, *Modelling Rational and Moral Agents*, P. Danielson (Ed.), Oxford University Press, (1996)
- [18] B.A. Huberman y N.S. Glance, *The Dynamics of Collective Action*, Computational Economics, 8, 27 (1995)
- [19] N.S. Glance Y B.A. Huberman, The outbreak of cooperation, *Journal of Math. Soc.* 17, 4 (1993).
- [20] B. Arthur, *Economic as an Evolving Complex System II*, Arthur, Durlanf and Lane (Eds.), Addison Wesley (2000).
- [21] B. Arthur, Inductive Reasoning and Bounded Rationality *Am. Econ. Assoc. Papers and Proc.* **84**, 406 (1994).
- [22] V. Eguíluz and M. Zimmermann, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5659.
- [23] M. Zimmermann, V. Eguíluz and M. San Miguel, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Series*, A. Kirman, J. B. Zimmermann (Eds.), Springer, **IX** (2001) 73-86.
- [24] R. D'Hulst and G. Rodgers, *Int. Journal of Applied Finance* 4 (2001).
- [25] R. Cont and J. Bouchaud, *Macroeconomic Dynamics* **4** (2000) 170.
- [26] I. Caridi and H. Ceva, *Physica A* **339** (2004) 574.
- [27] S. Moelbert and P. De Los Rios, *Physica A* **302** (2002) 217.
- [28] E. Burgos, H. Ceva and R. Perazzo, *Physica A* **337** (2004) 635.
- [29] T. Kalinowski, H.-J. Schulz and M. Briese, *Physica A* **277** (2000) 502.

- [30] H.-J. Quan, B.-H. Wang, P.M. Hui and X.-S. Luo, *Physica A* **321** (2003) 300.
- [31] M. Kirley, *Physica A* **361** (2006) 521.
- [32] D.Challet and Y. C. Zhang, *Physica A* **246** (1997) 407.
- [33] Y.C. Zhang, Evolving models of financial market, *Europhys. News* **29** (1998) 51.
- [34] D. Challet, M. Marsili, Y. C. Zhang, Modeling market mechanism with Minority Game, *Physica A* 276, (2000) 284.
- [35] J. D. Farmer, Physicists attempt to scale the ivory towers of finance, *Comput. Sci. Engi.*, Nov/Dec 26 (1999).
- [36] P. Jefferies, M. L. Hart, P. M. Hui, N. F. Johnson, From market games to real-world markets, *Eur. Phys. J. B* 20, (2001) 493.
- [37] J. P. Bouchaud, I. Giardina, M. Mézard, On a universal mechanism for long-range volatility correlations, *Quant. Fin.* 1, (2001) 212.
- [38] D. Challet, M. Marsili, Criticality and market efficiency in a simple realistic model of the stock market, *Phys. Rev. E* 68, (2003) 036132.
- [39] M. Marsili, Market mechanism and expectations in minority and majority games, *Physica A* 299, (2001) 93.
- [40] R. Savit, R. Manuca, R. Riolo, Adaptive competition, market efficiency, and phase transitions, *Phys. Rev. Lett.* **82**, (1999) 2203.
- [41] M. Hart, P. Jefferies, P. M. Hui, N. F. Johnson, Crowd - anticrowd theory of multi-agent market games, *Eur. Phys. J. B* **20**, (2001) 547.
- [42] A. Cavagna, Irrelevance of memory in the Minority Game, *Phys. Rev. E* **59**, (1999) R3783.
- [43] M. Marsili, D. Challet, Continuum time limit and stationary states of the Minority Game. *Phys. Rev. E* **64** (2001) 056138.
- [44] D. Challet, M. Marsili and R. Zecchina, Statistical mechanics of systems with heterogeneous agents: Minority Games, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 1824.
- [45] D. Challet, M. Marsili and R. Zecchina, *Int. Journal of Theoretical and Applied Finance* **3** (2000) 451.

- [46] D. Challet and M. Marsili, Phase transition and symmetry breaking in the minority game, *Phys. Rev. E* **60** (1999) R6271.
- [47] F. Slanina, Y. C. Zhang, Dynamical spin-glass-like behavior in an evolutionary game, *Physica A* **289**, (2001) 290.
- [48] G. Reents, R. Metzler, W. Kinzel, A stochastic strategy for the Minority Game. *Physica A* **299**, (2001) 253.
- [49] J. F. A. Heimel, A. De Martino, Broken ergodicity and memory in the Minority Game, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, L539 - L545; (2001) 208701.
- [50] S. Hod, E. Nakar, Self-segregation versus clustering in the evolutionary minority game, *Phys. Rev. Lett.* **88**, (2002) 238702.
- [51] M. Paczuski, K. E. Bassler, A. Corral, Self-organized networks of competing Boolean agents, *Phys. Rev. Lett.* **84**, (2000) 3185.
- [52] W. Kinzel, R. Metzler, I. Kanter, Dynamics of interacting neural networks, *J. Phys. A: Math Gen.* **33**, (2000) L141.
- [53] J. Wakeling, P. Bak, Intelligent systems in the context of surrounding environment, *Phys. Rev. E.* **64**, (2001) 051920.
- [54] P. Laureti et al., The Interactive Minority Game: a web-based investigation of human market interactions, *Physica A* **331**, (2004) 651.
- [55] D. Challet, M. Marsili, Y.-C. Zhang, *Minority Games* Oxford University Press (2005).
- [56] T. Schelling, *Micromotives and Macrobehavior*, Norton (1978).
- [57] R. Manuca, Y. Li, R. Riolo and R. Savit, *Physica A* **282** (2000) 559.
- [58] D. Challet, Y.C. Zhang, On the minority game: analytical and numerical studies, *Physica A* **256** (1998) 514.
- [59] I. Caridi and H. Ceva, Minority game: a mean-field-like approach, *Physica A* **317** (2002) 574.
- [60] C.-H. Hung, S.-S. Liaw, Effective history length of the minority game, *Physica A* **382** (2007) 129.
- [61] S.-S. Liaw, C. Liu, The quasi-periodic time sequence of the population in the minority game, *Physica A* **351** (2005) 571.

- [62] D. Challet, M. Marsili, Relevance of memory in the minority game, *Phys. Rev. E* **62** (2000) 1862.
- [63] C.-Y. Lee, Is memory in the minority game irrelevant?, *Phys. Rev. E* **64** (2001).
- [64] K.H. Ho, W.C. Man, F.K. Chow, H.F. Chau, Memory is relevant in the symmetric phase of the minority game, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 066120.
- [65] M. de Cara, O. Pla and Y. Guinea, *Int. Journal of Theoretical and Applied Finance* **3** (2000) 463.
- [66] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. 1, Third Ed. 1968.