
DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

La Distancia Geodésica Aplicada en Segmentación de Imágenes de Radar de Apertura Sintética

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencia y
Tecnología de la Universidad Nacional de General Sarmiento

Autor: M.Sc. José Antonio Naranjo Torres

Directora de Tesis: Dra. María Juliana Gambini

Codirector: Dr. Alejandro César Frery

Los Polvorines, Pcia. de Buenos Aires, Septiembre 2016

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor

El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis:

- a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.**
- b)** Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS.
- c)** Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.

1. Título completo del trabajo de Tesis:

La Distancia Geodésica Aplicada en Segmentación de Imágenes de Radar de Apertura Sintética

2. Presentado por (Apellido/s y Nombres completos del autor):

José Antonio Naranjo Torres

3. E-mail del autor: *josenaranjotorres@gmail.com*

4. Estudiante del Posgrado (consignar el nombre completo del Posgrado): **Doctorado en Ciencia y Tecnología**

5. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado (consignar los nombres desarrollados y completos): **Universidad Nacional de General Sarmiento**

6. Para recibir el título de (consignar completo):

a) Grado académico que se obtiene: **Doctor**

b) Nombre del grado académico: **Doctor en Ciencia y Tecnología**

7. Fecha de la defensa: 23/09/2016

8. Director de la Tesis (Apellidos y Nombres):
 - a) Director: **Dra. María Juliana Gambini**
 - b) Co-Director: **Dr. Alejandro César Frery**

9. Descripción física del trabajo de Tesis (cantidad total de páginas, imágenes, planos, videos, archivos digitales, etc.):
 - a) 110 Páginas
 - b) 49 Figuras
 - c) 6 Tablas
 - d) 2 Algoritmos

10. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: *El alcance geográfico es internacional.*

11. Temas tratados en la Tesis (palabras claves): *Interpretación de Imágenes SAR, Distancia Geodésica, Detección de puntos de borde, Segmentación de imágenes SAR.*

Resumen

Los sensores SAR proporcionan imágenes con información que no puede obtenerse por medio de otros sensores, por lo tanto se están convirtiendo en una herramienta cada vez más importante en las aplicaciones de monitoreo ambiental. Esto se debe también al hecho de que este tipo de sensores son activos y por lo tanto no requieren de fuentes externas de iluminación, además son muy resistentes a condiciones atmosféricas adversas. Otro elemento valioso en la formación de este tipo de imágenes es la capacidad de las microondas para penetrar en las superficies, lo cual puede ser de gran utilidad.

Estos datos sufren de una corrupción inherente al método de captura, llamada ruido *speckle*, la cual no puede evitarse y por lo tanto el análisis de este tipo de datos requiere un modelado estadístico. La distribución \mathcal{G}_I^0 es muy útil para este fin, ya que se ha demostrado que puede modelar una amplia variedad de texturas en forma adecuada. Por esta razón, esta distribución fue denominada "modelo universal". Está indexada por tres parámetros: el número de *looks* L , que describe la relación señal-ruido, la textura α , y la escala de γ . El primero se puede suponer constante para toda la imagen y los dos últimos pueden variar localmente.

Por primera vez calculamos la distancia geodésica (DG) entre los modelos \mathcal{G}_I^0 . La DG cuantifica la similaridad entre dos modelos y se puede utilizar como una medida de contraste. Obtenemos expresiones explícitas para los casos de (i) la misma textura diferentes escalas, (ii) la misma escala y textura diferente para $L = \{1, 2\}$. También proporcionamos una expresión general para la misma escala y diferente textura para cualquier valor de L , que se puede resolver numéricamente.

Esta distancia se transforma entonces en un test estadístico con distribución asintótica conocida. Tal estadístico se compara con aquel que fue obtenido a partir de la Distancia Triangular en términos de estabilidad numérica, tiempo de cálculo, errores tipos I y II, y capacidad para identificar bordes entre regiones. En todas las situaciones el estadístico de la DG supera al estadístico de la DT con respecto a todos los criterios considerados.

Con estos resultados, se concluye que la DG es una nueva herramienta útil para el análisis de datos SAR.

Abstract

SAR sensors provide images with complementary information to that provided by other sensors, therefore they are becoming increasingly important in environmental applications. This is also due to the fact that the sensors are active, and thus do not require external sources of illumination, and are barely affected by adverse atmospheric conditions. The ability of the microwaves to penetrate, to some extent, surfaces is also an added value to this kind of imaging.

These data suffer from an inherent corruption, called “speckle noise” that, since cannot be avoided, requires a careful statistical modeling. The \mathcal{G}_I^0 distribution is adequate for this aim, since it has been proven adequate for describing a wide variety of target textures. For this reason, this distribution has been called “Universal Model”. It is indexed by three parameters: the looks L , that describes the signal-to-noise ratio, the texture α , and the scale γ . While the first can be assumed constant for the whole image, the two last may vary from position to position.

We compute for the first time the Geodesic Distance (GD) between \mathcal{G}_I^0 models. The GD quantifies how different two models are, and can be used as a measure of contrast. We obtain explicit expressions for the cases of (i) same texture and different scales, and (ii) same scale and different texture for the $L = 1, 2$ situations. We also provide a general expression for the same scale and different texture case, that can be solved using numerical tools.

This distance is then transformed into a test statistic with known asymptotic distribution. Such statistic is compared with the one obtained from the Triangular Distance in terms of numerical stability, computational time, Types I and II errors, and ability to identify edges. In all situations the GD statistic outperforms the TD statistic with respect to all the criteria considered.

With these results, we conclude that the GD is a new useful tool for the analysis of SAR data.

Sumário

Dados de sensores de radar de abertura sintética (SAR - Synthetic Aperture Radar) são cada vez mais empregados em aplicações que utilizam sensoriamento remoto. Isto se deve às características desses sensores que, por serem ativos não dependem de fontes externas de iluminação e que, por operarem no espectro das microondas, são pouco afetados por condições atmosféricas adversas. A capacidade desse tipo de imageamento penetrar ou até atravessar certas superfícies é um fator adicional para torná-lo atraente.

Os dados de imagens SAR estão contaminados pelo “ruído speckle” que, por ser inerente ao imageamento, não pode ser eliminado e, portanto, precisa ser descrito. A distribuição de probabilidade \mathcal{G}_l^0 é adequada para tal finalidade, já que ela se mostrou um modelo “universal” capaz de descrever uma grande variedade de texturas. Esta distribuição é indexada por três parâmetros: o número de looks L , que mede a relação sinal-ruído, a textura α , e a escala γ . Pode-se supor que o primeiro parâmetro permanece constante sobre toda a imagem, enquanto os dois últimos podem variar de coordenada para coordenada.

Nesta tese de doutorado obtivemos, pela primeira vez na literatura, a Distância Geodésica (DG) entre distribuições \mathcal{G}_l^0 . A DG mede quão diferentes dois modelos estatísticos são e, como isso, pode ser utilizada como uma medida de contraste. Apresentamos formas explícitas para (i) modelos de igual textura e diferente escala, e (ii) modelos de igual escala e diferente textura para os casos $L = 1, 2$. A forma geral da DG entre modelos de diferentes escala e textura, que também é apresentada, pode ser calculada utilizando rotinas de integração numérica.

A DG é, em sequência, transformada em um estatístico de teste com distribuição assintótica conhecida. Este estatístico é comparado com o obtido utilizando a Distância Triangular (DT) observando a estabilidade numérica, o tempo de cômputo, os erros tipo I e II, e a capacidade de identificar bordas entre regiões. Em todas as situações analisadas, e por todos os critérios considerados, a DG teve melhor desempenho que a DT.

Esses resultados sugerem que a DG é uma nova ferramenta com grande potencial de aplicabilidade na análise de imagens SAR.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Jurado

- Dra. Magdalena Lucini
- Dr. Carlos Delrieux
- Dr. Aluísio de Souza Pinheiro

Firma y aclaración del presidente del jurado:

Firma del autor de la tesis:

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Publicaciones:

- Region discrimination in SAR imagery using the geodesic distance between \mathcal{G}_I^0 distributions. Naranjo-Torres, J. and Gambini, J. and Frery, A. C. 2015 IEEE 5th Asia-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar (APSAR), Págs 573 – 577, Sept. 2015. <http://dx.doi.org/10.1109/APSAR.2015.7306274>
- Estimación de Parámetros de la Distribución \mathcal{G}_I^0 Para Interpretación de Imágenes SAR. José Naranjo-Torres y Juliana Gambini. ACTA CIENTÍFICA VENEZOLANA, Vol. 66(3): Págs. 183 – 189, 2015. <http://www.actacientificavenezolana.org.ve/>.

Trabajos Presentados en Congresos:

- Discriminación de Regiones en Imágenes SAR utilizando la Distancia Geodésica. José A. Naranjo Torres, Juliana Gambini y Alejandro Frery, *Segundas Jornadas Interdisciplinarias de Análisis Avanzado de Imágenes y Señales*, Universidad Nacional de General Sarmiento Sarmiento - Departamento de Ingeniería Informática del Instituto Tecnológico de Buenos Aires y la Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 8 y 9 de octubre de 2015, <http://eiffel.itba.edu.ar/jiaais2015/portal.html>
- Segmentación de Imágenes SAR bajo el modelo \mathcal{G}^0 Utilizando Distancias Geodésicas. José A. Naranjo Torres, *Jornada de Investigación de Becarios de Investigación y Tesistas del Instituto de Ciencia*, Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina, 7 de Mayo 2015
- Estimación de Parámetros de la Distribución \mathcal{G}^0 para Interpretación de Imágenes SAR. José A. Naranjo Torres, Juliana Gambini, VIII Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Morrocoy, Venezuela, del 1 al 5 de Diciembre 2014. <http://cnf2014.ivic.gob.ve/>

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Aportes Originales:

- Se calcula la distancia geodésica entre modelos \mathcal{G}_I^0 para tres casos particulares. En todos ellos se considera al parámetro L (número de *looks*) conocido.
- Se presenta una solución numérica para estimar la DG entre muestras generadas con la distribución \mathcal{G}_I^0 , bajo la restricción de media unitaria.
- Se calcula una fórmula cerrada para la DG entre modelos \mathcal{G}_I^0 en condiciones generales, con valores de $L = \{1, 2\}$, para el caso del parámetro de textura conocido y para el caso del parámetro de escala conocido.
- Para valores mayores del número equivalente de *looks* se utilizan soluciones numéricas.
- Se aplican las Distancias Geodésicas a discriminar regiones en imágenes SAR.

Aportes Originales	pág
Distancia Geodésica Cuando $E(z) = 1$	58
Forma General de la Distancia Geodésica para la Distribución \mathcal{G}_I^0	61
Distancia Geodésica para el Parámetro de Escala Conocido	62
Distancia Geodésica para el Parámetro de Textura Conocido	65
Detección de Borde con la Distancia Geodésica Cuando $E(z) = 1$	83
Detección de Bordos en Imágenes Sintéticas con Distribución \mathcal{G}_I^0 para el Parámetro γ Conocido	86
Disimilaridad en Datos Reales con Media Unitaria	96
Disimilaridad en Datos Reales con el Parámetro γ Conocido	97
Detección de Bordos	97

Agradecimientos

Un especial agradecimiento a mi directora Juliana Gambini por su gran apoyo, orientación y ayuda incondicional a lo largo de estos últimos tres años, sin el cual no hubiera logrado culminar esta tesis, y sobre todo por creer en mí.

Al mi codirector Alejandro Frery por su orientación en la consecución de esta tesis.

A toda mi familia por todo su apoyo y continuo aliento para seguir adelante.

Índice general

1. Introducción	21
2. Teledetección - Imágenes de Radar de Apertura Sintética	25
2.1. Teledetección	26
2.2. Fundamentos de la Observación Remota	27
2.2.1. Teledetección Pasiva	27
2.2.2. Teledetección Activa	28
2.2.3. La Radiación Electromagnética	28
2.2.4. El Espectro Electromagnético	29
2.3. Formación de Imágenes de Radar-SAR	32
2.3.1. Polarización	32
2.3.2. Geometría de Adquisición Radar-SAR	35
2.4. Radar de Apertura Sintética - SAR	36
2.5. Número de <i>Looks</i>	37
2.6. El Ruido Speckle	38
2.7. Conclusiones para este Capítulo	39
3. Modelado Estadístico de Imágenes SAR y la Distribución \mathcal{G}_I^0	41
3.1. El Modelo Multiplicativo	43
3.2. El Modelo para el ruido <i>Speckle</i>	44
3.3. Modelo para la Retrodispersión	45
3.4. Modelo del Retorno	46
3.5. La Distribución \mathcal{G}_I^0	46

3.5.1.	Estimador de Máxima Verosimilitud (MV)	48
3.5.2.	Estimación de Parámetros por el Método de los Momentos	49
3.6.	Conclusiones para este Capítulo	52
4.	Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0	53
4.1.	Distancias Estadísticas entre distribuciones de Probabilidad	54
4.2.	Curva Geodésica	55
4.3.	Distancia Geodésica de Rao	56
4.4.	Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0	57
4.4.1.	Distancia Geodésica Cuando $E(z) = 1$	58
4.5.	Forma General de la Distancia Geodésica para la Distribución \mathcal{G}_I^0	61
4.5.1.	Distancia Geodésica para el Parámetro de Escala Conocido	62
4.5.2.	Distancia Geodésica para el Parámetro de Textura Conocido	65
4.6.	Conclusiones para este Capítulo	66
5.	Distancia Triangular y comparación con la Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0	69
5.1.	Distancia Triangular	70
5.2.	Prueba de Hipótesis	71
5.3.	Distribución Asintótica de la Distancia Geodésica	73
5.4.	Distribución Asintótica de la Distancia Triangular	74
5.5.	Prueba de Hipótesis de las Distancias Geodésica y Triangular entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0	75
5.5.1.	Cálculo del p -valor	76
5.6.	Conclusiones para este Capítulo	78
6.	Detección de Bordos en Imágenes SAR Sintéticas utilizando la Distancia Geodésica	81
6.1.	La Dificultad en la Detección de Puntos de Borde en Imágenes SAR	82
6.2.	Detección de Borde con la Distancia Geodésica cuando $E(z) = 1$	83
6.3.	Detección de Bordos en Imágenes Sintéticas con Distribución \mathcal{G}_I^0 para el Parámetro γ Conocido	86

6.4. Conclusiones para este Capítulo	92
7. Detección de puntos de borde entre regiones de Imágenes SAR Reales utilizando la Distancia Geodésica	93
7.1. Datos Reales - Imagen SAR	94
7.2. Estimación del Parámetro $\hat{\alpha}$	96
7.3. Disimilaridad en Datos Reales con Media Unitaria	96
7.4. Disimilaridad en Datos Reales con el Parámetro γ Conocido	97
7.5. Detección de Bordes	97
7.6. Conclusiones para este Capítulo	99
8. Conclusiones	103

Índice de figuras

2.1. Componentes de un sistema de Teledetección [13].	27
2.2. Formas de Teledetección [13].	28
2.3. Esquema de una onda electromagnética [51].	29
2.4. (a) Espectro electromagnético. Se observa la superposición entre los tipos de ondas adyacentes. La vista ampliada de la derecha muestra el espectro de luz visible [51]. (b) Bandas del espectro electromagnético de uso común en la generación de imágenes de radar [19].	30
2.5. Proceso de captura de información [19].	32
2.6. Polarizaciones HV , HH , VV y composición de imagen RGB en una escena agrícola [19].	34
2.7. Geometría del Radar de Apertura Sintética [23].	35
2.8. Ancho de banda expandido sintéticamente [60].	36
2.9. Procesamiento <i>Multilook</i> . Se observa al haz del radar dividido en cinco sub-haces (1 a 5) [19].	37
2.10. Procesamiento <i>multilook</i> [19].	38
2.11. Imagen SAR con ruido <i>Speckle</i> [19].	38
3.1. Diagrama del proceso de modelado paramétrico.	42
3.2. Esquema del retorno Z_I , basado en el modelo multiplicativo.	47
3.3. Representación de la interpretación del parámetro α en la distribución \mathcal{G}_I^0	48
4.1. Curva Geodésica sobre una esfera. Los vectores tangentes a la curva tienen la misma dirección.	55
4.2. Ilustración de los caminos más cortos entre dos puntos. La línea geodésica corresponde a la que se encuentra sobre la superficie.	56

4.3.	Distancia geodésica entre $\mathcal{G}_I^0(-8, 7, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para diferentes valores de L	60
4.4.	Distancia geodésica entre $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para diferentes valores de L	60
4.5.	Distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-14, -2]$ y $L = \{1, 2\}$	63
4.6.	Distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$ $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3, 5, -1]$	64
4.7.	Distancia geodésica para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $s(\alpha_1, \alpha_2)$ $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-14, -2]$ y $L = \{3, 6, 8\}$	64
4.8.	Distancia geodésica para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $s(\alpha, \alpha_2)$ $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3, 5, -1]$. y $L = \{3, 6, 8\}$	65
4.9.	Distancia geodésica para distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma, L)$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 \in [1, 10]$, $\alpha^0 = -2$ y $L = \{1, 2\}$	66
4.10.	Distancia geodésica para distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma, L)$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 \in [1, 20]$, $\alpha^0 = -2$ y $L = \{1, 2\}$	67
5.1.	Distancia triangular entre $\mathcal{G}_I^0(-3, 2, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para $\alpha_2 \in [-4, -2]$ y $L = \{1, 2, 4\}$	71
5.2.	Distancia triangular para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-10, -6]$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y $L = \{1, 2, 3\}$	72
5.3.	Histograma de S_{DG} para $n = 100$, $\alpha = -1, 5$, $\gamma = 1$ y $L = 1$	77
5.4.	Histograma de S_{DT} para $n = 100$, $\alpha = -1, 5$, $\gamma = 1$ y $L = 1$	77
5.5.	p -valores para diferentes tamaños de muestra.	78
6.1.	Densidades de distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$, con diferentes valores de α	82
6.2.	Datos de las distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$, con $\alpha \in \{-2, -3, -4, -5\}$	82
6.3.	Imagen sintética generada con la distribución $\mathcal{G}_I^0(-1, 5, 0, 5, 8)$ (izquierda) y la distribución $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, 8)$ (derecha). En cada paso el parámetro α es estimado usando las muestras: M_1 y M_2	83
6.4.	Distancia geodésica y triangular entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. El máximo de la curva es el punto de transición.	85
6.5.	DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$	85

6.6.	Estadísticos de prueba de la DG y DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. El máximo de la curva es el punto de transición.	86
6.7.	Imagen sintética y esquema del método de detección de borde.	87
6.8.	Curvas poligonales para $L = 1$ de las DG y DT para muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$	89
6.9.	Curvas poligonales para $L = 2$ de las DG y DT para muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$	89
6.10.	Media de las curvas poligonales de estadísticos de prueba en base a las DG y DT entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$ para $L = 1$	90
6.11.	Media de las curvas poligonales de estadísticos de prueba en base a las DG y DT entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$ para $L = 2$	91
6.12.	Distancia geodésica entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3, 1, L)$, con $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	91
6.13.	Distancia triangular entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3, 1, L)$, con $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	92
7.1.	Imagen óptica del área estudio Google Maps https://goo.gl/maps/DCm6fBKcRy32	94
7.2.	Regiones de datos E-SAR usados para el estudio de la disimilaridad.	95
7.3.	Imagen E-SAR de baja resolución.	95
7.4.	Ilustración distancias entre las muestras de datos reales, con la resolución completa y reducida: GD en naranja, y TD en verde.	99
7.5.	Imagen SAR y área seleccionada para el estudio de detección de puntos de borde	100
7.6.	Resultado de la aplicación del método de detección de bordes en datos reales.	101
7.7.	Puntos de borde hallados en la imagen con baja resolución con la DG	101

Capítulo 1

Introducción

El Radar de Apertura Sintética (SAR, Synthetic Aperture Radar) procesa los datos capturados por su antena y con esa información construye imágenes. Las imágenes SAR son de suma importancia porque poseen múltiples aplicaciones en tareas como seguridad, monitoreo del medioambiente, ecología, detección temprana de incendios forestales, detección de talas ilegales, detección de manchas de petróleo en el mar y cartografía, entre otras.

El sistema de captura SAR tiene algunas ventajas frente a otros sistemas de captura utilizados:

- Posee iluminación propia y por lo tanto no necesita luz solar. Así las imágenes pueden tomarse tanto de día como de noche.
- La radiación electromagnética que emite para formar la imagen atraviesa las nubes y este sistema es independiente del clima.

El Radar de Apertura Sintética trabaja con iluminación coherente, lo cual produce en la imagen un ruido llamado ruido *speckle*. Otros sistemas de captura como el de ultrasonido o el de laser también poseen este tipo de ruido. El ruido *speckle* es no aditivo, no gaussiano y es muy difícil de eliminar, por estas razones, la interpretación automática de imágenes SAR, constituye un gran desafío.

Una de las tareas más importantes es la discriminación automática de regiones diferentes dentro de la imagen. Para realizar esto es necesario modelar los datos con distribuciones estadísticas que sean adecuadas para imágenes con ruido *speckle*. En la literatura se han propuesto diversos modelos estadísticos, para estudiar este tipo de problema, dedicados a la clasificación de imágenes [43], detección y reconocimiento de objetos [17] y segmentación [18, 25, 35].

En los últimos años, los datos provenientes de imágenes con ruido *speckle* se han modelado bajo el modelo multiplicativo, una buena elección es la familia de distribuciones \mathcal{G} , propuesta por Frery et al. [22]. Este modelo describe áreas extremadamente texturadas mejor que otras distribuciones utilizadas en la literatura, incluso mejor que la distribución \mathcal{K} [36], que era la utilizada hasta ese momento. En el artículo [27], el autor describe varios modelos estadísticos que pueden aplicarse a este tipo de imágenes, incluyendo el modelo utilizado en este trabajo.

La distribución \mathcal{G}_l^0 pertenece a la familia de distribuciones \mathcal{G} con valores especiales de los parámetros. Permite caracterizar regiones con diferente grado de textura en imágenes SAR monopolarizadas [22]. Depende de tres parámetros: el número equivalente de *looks* L , el cual se considera conocido o sino debe ser estimado para toda la imagen, el parámetro de textura α , y el parámetro de escala γ , los dos últimos pueden variar localmente dentro de la imagen. Una de las características más importantes de la distribución \mathcal{G}_l^0 es que el parámetro α puede interpretarse en términos de la rugosidad o textura de la zona observada, lo cual está relacionado con el número de backscatters por celda de resolución, por lo tanto la estimación de este parámetro cobra especial importancia [24]. En este trabajo se utiliza el estimador de Máxima Verosimilitud para estimar los parámetros, porque estamos interesados en sus propiedades asintóticas.

Las distancias estocásticas y divergencias han sido utilizadas en la literatura para comparar dos o más muestras de datos provenientes de imágenes SAR. Varios autores han utilizado teoría de información para comparar muestras y luego aplicarlas a clasificación [29, 52], detección de bordes [21, 39, 40] y eliminación de ruido *speckle* [54] pero la distancia geodésica hasta el momento no había sido utilizada en imágenes SAR monopolarimétricas.

Por otro lado, la distancia geodésica (DG) es utilizada para medir la diferencia entre dos distribuciones de probabilidad paramétricas. Fue presentada por Rao [45, 46], y ha sido estudiada por muchos autores [2, 38, 58]. Berkane et al. [3] calcularon una fórmula cerrada para la DG entre distribuciones elípticas, pero estas fórmulas todavía no están disponibles para todo par de distribuciones y por lo tanto hay que recurrir a soluciones numéricas. Por ejemplo, en el artículo [47] se calcula numéricamente la DG bajo el modelo Γ .

La DG ha sido utilizada para resolver diversos problemas, incluyendo recuperación de texturas en datos multivariados y clasificación [5, 6, 16]. En estos artículos, los autores calculan una fórmula cerrada entre distribuciones elípticas pero bajo restricciones de los parámetros, incluso para la distribución \mathcal{G}_l^0 polarimétrica.

Esta tesis está inspirada en estos últimos trabajos. Se presenta una solución numérica para estimar la DG entre muestras generadas con la distribución \mathcal{G}_I^0 , bajo la restricción de media unitaria. También se calcula una fórmula cerrada para la DG entre modelos \mathcal{G}_I^0 en condiciones generales, para valores de $L = \{1, 2\}$ y se aplica a discriminar regiones en imágenes SAR. Para valores mayores del número equivalente de *looks* se utilizan soluciones numéricas. Estas expresiones, hasta el momento, no estaban disponibles en la literatura. Así, se presenta una nueva forma de medir la diferencia entre dos regiones dentro de una imagen SAR, que junto con los resultados del artículo de Nascimento et al. [39], provee un conjunto de herramientas de análisis e interpretación automática este tipo de imágenes y constituye el aporte más importante de este trabajo.

Por otro lado, una importante familia de distribuciones estocásticas se deriva de los resultados de Salicru et al. [49], y entre ellas está la Distancia Triangular (DT). Gambini et al. [24] concluyeron que esta distancia, dentro de la clase de distancias $(h-\phi)$ (Hellinger, Bhattacharyya y Rényi), provee los mejores resultados en cuanto a precisión en una gran variedad de situaciones, siempre modelando los datos con la distribución \mathcal{G}_I^0 . Estas distancias fueron estudiadas por Nascimento et al. [39], quienes concluyeron que no existe una expresión analítica cerrada para esta distribución, lo que es una desventaja frente a la utilización de la DG. En este trabajo se presenta una comparación de la DG con la DT para enfatizar la necesidad de utilizar la DG porque mejora el costo computacional.

En los artículos [38, 49], se obtiene la distribución asintótica de los test estadísticos para distancias $(h-\phi)$ y para la distancia geodésica. Estos resultados también los utilizamos para comparar el comportamiento de ambas distancias por medio de test de hipótesis y para hallar puntos de borde entre regiones

Esta tesis está compuesta de la siguiente manera: En el capítulo 2 se introducen los principios de la teledetección, la definición de imagen SAR y el ruido *speckle*. En el capítulo 3 se presenta la distribución \mathcal{G}_I^0 , algunas formas de estimar sus parámetros y la interpretación de los mismos. En el capítulo 4 se calcula la distancia geodésica para la distribución \mathcal{G}_I^0 , con fórmulas cerradas para algunos valores de los parámetros, lo que constituye el aporte más importante de esta tesis. Con el objetivo de que este trabajo sea autocontenido, en el capítulo 5 se realiza una breve explicación de la distancia triangular que se utiliza para comparar con la DG. En los capítulos 6 y 7 se aplica la distancia geodésica a detección de bordes en imágenes sintéticas y reales, respectivamente. Finalmente en el capítulo 8 se extraen conclusiones.

Capítulo 2

Teledetección - Imágenes de Radar de Apertura Sintética

El estudio de la Tierra con el propósito del manejo de recursos, monitoreo de desastres, cartografía y muchas otras aplicaciones, es un proceso que consume tiempo, ya que esa información tradicionalmente proviene de sondeos manuales, y mediciones in-situ. Los instrumentos de detección remota (sensores remotos) pueden contrarrestar este problema debido a que ellos dan una respuesta inmediata y clara de datos, lo que garantiza una medición rápida y adecuada [33].

Entre las técnicas de teledetección por sensado, el Radar de Apertura Sintética es uno de los más importantes sensores activos. Puede detectar la radiación electromagnética emitida o reflejada por los objetos y desempeña un papel importante en la detección y discriminación de objetivos [12].

El SAR es un dispositivo de microondas activo que permite generar imágenes de alta resolución. El mismo emite señales de microondas a intervalos regulares sobre una región de interés, recibe parte de esta energía que es reflejada. Y la gran ventaja del radar sobre los sensores ópticos es la posibilidad de funcionar tanto de día como de noche y la de atravesar las capas de nubes, lo que implica una gran disponibilidad de información [13, 33].

Ahora bien, los dispositivos de captura de imágenes que emplean iluminación coherente introducen ruido *speckle*, como en las imágenes de ultrasonido, laser y SAR [24]. El *speckle* es un ruido multiplicativo proporcional a la intensidad de la señal recibida; es un efecto físico, el cual ocurre cuando luz coherente es reflejada desde una superficie rugosa.

2.1. Teledetección

La teledetección puede definirse como [13, 19]:

Definición 2.1 *Es la ciencia de adquirir información sobre la superficie de la Tierra sin estar realmente en contacto con ella desde sensores instalados en plataformas aerotransportadas o espaciales. Y mediante la detección y grabación de la energía reflejada o emitida, en virtud de la interacción electromagnética existente entre la tierra y el sensor, siendo la fuente de radiación el sol u otra propia del sensor.*

Según esta definición, existe una interacción entre la Tierra y el sensor, esta es energética y puede deberse a la reflexión de la energía solar o de un haz de energía artificial. De esta misma manera es preciso que este haz energético recibido por el sensor sea transmitido a un receptor donde pueda almacenarse y ser interpretado para una aplicación específica [13, 19]. Entonces un sistema de teledetección espacial incluye los siguientes elementos:

- *Fuente de energía:* da origen al flujo energético detectado por el sensor. Puede tratarse de un foco externo al sensor en cuyo caso se llama *teledetección pasiva*, o emitido por el sensor y se llama *teledetección activa*.
- *Cubierta terrestre:* compuesta por vegetación, suelos y construcciones, entre otras, y que de acuerdo a sus características físicas y químicas reciben la energía y la reflejan o emiten de distinta manera.
- *Sistema sensor:* capta la energía y la envía al centro de recepción.
- *Sistema de recepción:* donde se recibe la información, se graba en un formato apropiado (analógico o digital) y se distribuye a los intérpretes.
- *Intérprete:* analiza la información y le da un tratamiento temático y cuantitativo, con el fin de facilitar la evaluación del problema en estudio.
- *Usuario Final:* institución o individuo encargado de analizar el documento resultante de la interpretación y determina las consecuencias y utilidad del documento.

La Figura 2.1 muestra un esquema de estos elementos y la forma en que se relacionan.

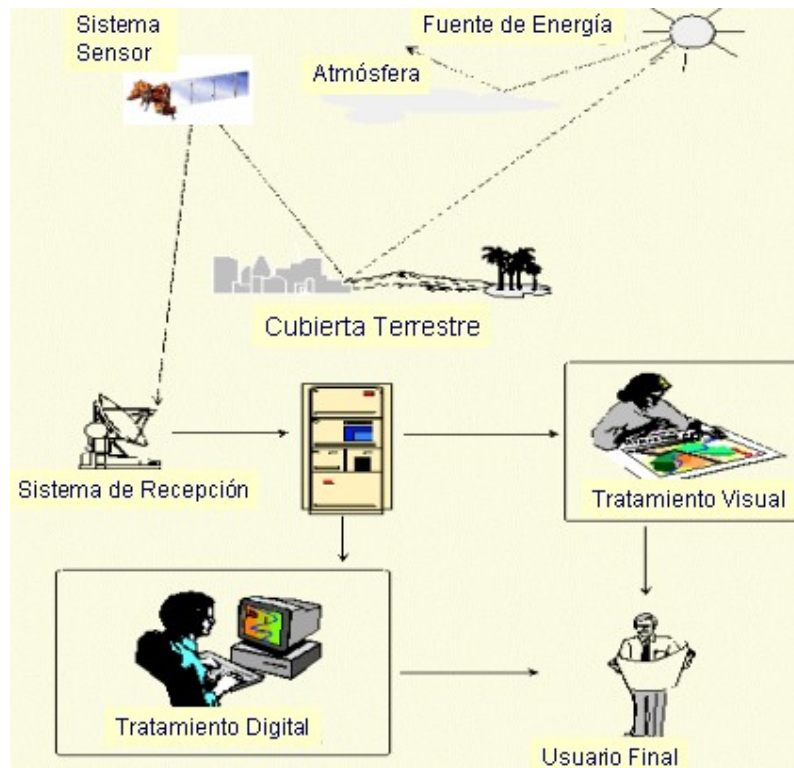


Figura 2.1: Componentes de un sistema de Teledetección [13].

2.2. Fundamentos de la Observación Remota

De acuerdo a lo señalado en la sección anterior, los tres principales elementos de cualquier sistema de teledetección son el sensor, el objeto observado y el flujo energético. Y las tres formas de adquirir la información a partir de un sensor remoto son por (i) *reflexión*, (ii) *emisión* y (iii) *emisión-reflexión*; como se muestra en la Figura 2.2.

2.2.1. Teledetección Pasiva

El sol es una fuente de energía o radiación, y es una fuente muy conveniente de energía para la teledetección. La energía del sol se refleja para longitudes de onda visibles, o bien, es absorbida y luego re-emitada, para las longitudes de onda del infrarrojo térmico [19]. Estos son los casos (i) y (ii) que se observan en la Figura 2.2.

Los Sistemas de teledetección que miden la energía que está disponible de forma natural se denominan *sensores pasivos*. De esta forma, los sensores pasivos sólo se pueden utilizar cuando la energía natural está disponible. El caso (i), sólo tiene lugar durante el tiempo en que el sol está iluminando la Tierra. En el caso (ii), la energía que se emite de forma natural, por ejemplo, infrarrojo térmico, que es absorbida

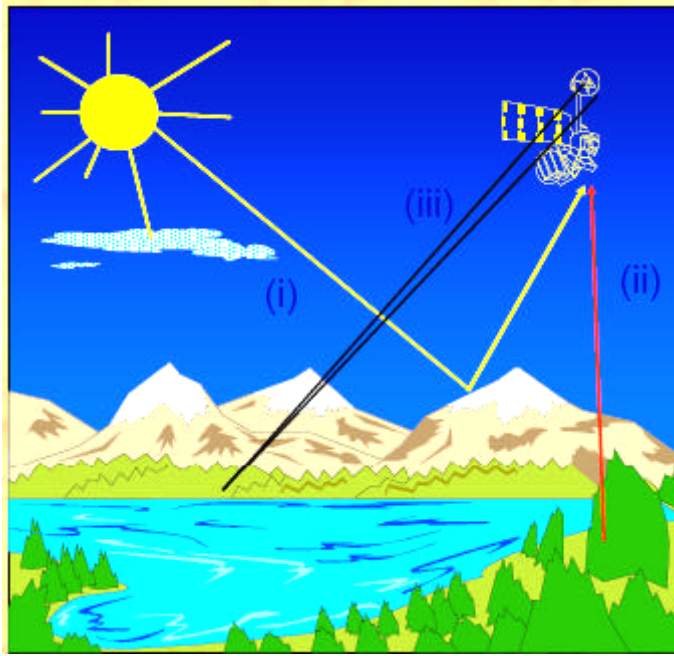


Figura 2.2: Formas de Teledetección [13].

y re-emitada, puede ser detectada durante el día o la noche, siempre y cuando la cantidad de energía sea lo suficientemente grande para ser captada [19].

2.2.2. Teledetección Activa

En este caso (*iii*), el sensor emite una radiación que se dirige hacia el objetivo a ser investigado. La radiación reflejada desde ese objetivo es detectada y medida por el sensor. Los sensores activos presentan ventajas que incluyen la capacidad de obtener mediciones en cualquier momento, independientemente de la hora del día o del clima. Pueden utilizarse para examinar las longitudes de onda que no provee el sol, como las microondas, o para controlar la forma en que se ilumina el objetivo [13, 19].

2.2.3. La Radiación Electromagnética

En todos los casos anteriores, el flujo de energía es una forma de radiación electromagnética. La teoría ondulatoria establece que la energía electromagnética se transmite de un lugar a otro siguiendo un modelo armónico y continuo, a la velocidad de la luz c y conteniendo dos campos de fuerzas ortogonales entre sí: eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} [13, 19], como se observa en la Figura 2.3.

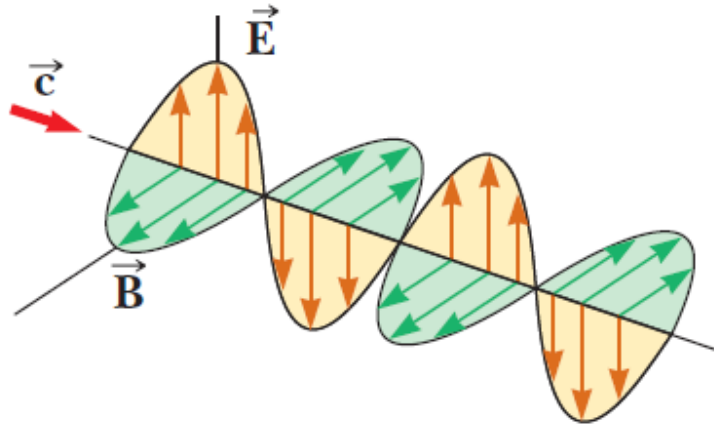


Figura 2.3: Esquema de una onda electromagnética [51].

Dos características importantes de la radiación electromagnética para la comprensión de la teledetección son la *longitud de onda* λ y la *frecuencia* f . La longitud de onda es la longitud de un ciclo de onda, que puede ser medida como la distancia entre crestas de ondas sucesivas. La frecuencia se refiere al número de ciclos que una onda pasa por un punto fijo por unidad de tiempo [19]. La longitud de onda y la frecuencia están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$c = \lambda \cdot f \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad de la luz, λ la longitud de onda y f la frecuencia [13].

De la Ec. (2.1), se observa que λ y f están inversamente relacionadas entre sí. A medida que disminuye λ , mayor es f . Y cuanto mayor sea λ , más baja será la frecuencia. La comprensión de las características de la radiación electromagnética en función de su longitud de onda y la frecuencia es crucial para la comprensión de la información que se extrae de los datos de teledetección [13, 19].

2.2.4. El Espectro Electromagnético

Se puede describir cualquier tipo de energía radiante en función de su longitud de onda o de su frecuencia, de esta manera suelen establecerse una serie de bandas en donde la radiación electromagnética manifiesta un comportamiento similar. Entonces se denomina *Espectro Electromagnético* a la organización de estas bandas de longitud de onda o frecuencia [13], el cual se muestra en la Figura 2.4. El espectro electromagnético se extiende desde las longitudes de onda más cortas (incluyendo gamma y rayos X) hasta las longitudes de onda más largas (como las microondas y ondas de radio) [19].

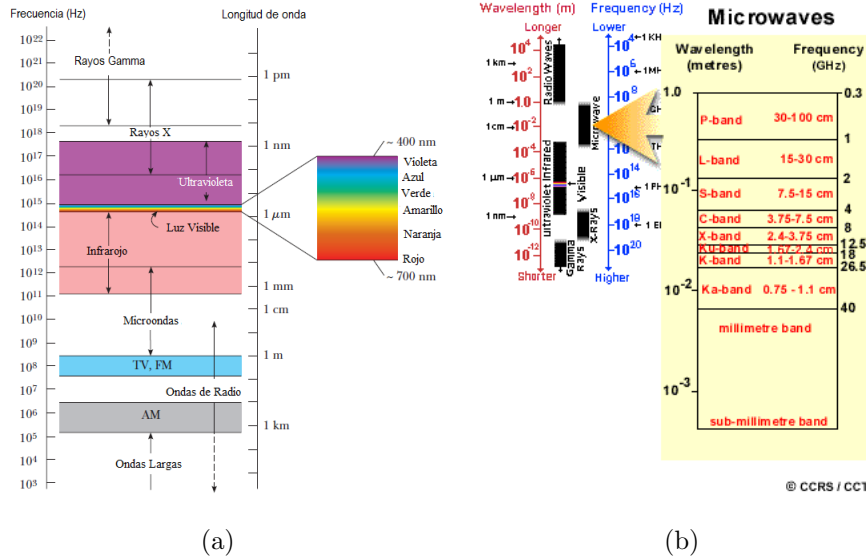


Figura 2.4: (a) Espectro electromagnético. Se observa la superposición entre los tipos de ondas adyacentes. La vista ampliada de la derecha muestra el espectro de luz visible [51]. (b) Bandas del espectro electromagnético de uso común en la generación de imágenes de radar [19].

Según Chuvieco [13], desde el punto de vista de la teledetección, las siguientes longitudes de onda son las más empleadas:

- *Espectro Visible*: es la parte de la espectro electromagnético que el ojo humano puede detectar. La luz con distintas longitudes de onda de la luz visible, corresponden a diferentes colores, van desde el rojo ($\lambda \approx 7 \cdot 10^{-7}m$) al violeta ($\lambda \approx 4 \cdot 10^{-7}m$).
- *Infrarrojo Próximo*: comprendido desde $\lambda \approx 0,7\mu m$ a $\lambda \approx 1,3\mu m$, resulta de especial importancia por su capacidad de discriminar concentraciones de humedad y masas vegetales.
- *Infrarrojo Medio*: contenido entre $\lambda \approx 1,3\mu m$ y $\lambda \approx 8\mu m$, donde se solapan o entremezclan los procesos de reflexión de la luz solar y los de la emisión de radiación de la superficie terrestre.
- *Infrarrojo Lejano o Térmico*: de $\lambda \approx 8\mu m$ a $\lambda \approx 14\mu m$, incluye la sección del espectro terrestre, donde se detecta el calor proveniente de las cubiertas terrestres.
- *Microondas*: desde aproximadamente $\lambda \approx 1mm$ hasta $\lambda \approx 1m$, esto cubre las longitudes de onda más largas utilizadas para la teledetección. Ya que es bastante transparente a las condiciones climáticas.

La región de microondas del espectro tiene varios rangos de longitudes de onda o bandas de uso común en la generación de imágenes de radar, los rangos de valores de éstas se pueden observar en la Figura 2.4 y se pueden describir de la siguiente manera [19]:

- *Bandas Ka, K, y Ku*: longitudes de onda muy cortas utilizadas en los primeros sistemas de radar aerotransportados, pero poco común hoy en día.
- *Banda X*: ampliamente utilizado en sistemas aerotransportados.
- *Banda C*: común en muchos sistemas aerotransportados de investigación (CCRS Convair-580 y la NASA AIRSAR) y sistemas de vehículos espaciales (incluidos ERS-1 y 2 y RADARSAT).
- *Banda S*: usado a bordo del satélite ruso ALMAZ.
- *Banda L*: utilizado a bordo del satélite Norteamericano SEASAT y el japonés JERS-1, así como sistemas aerotransportados de la NASA.
- *Banda P*: longitudes de onda de radar más largas, que se utilizan en el sistema de investigación experimental aerotransportado de la NASA.

Las microondas debido a sus grandes longitudes de onda, tienen propiedades especiales que son importantes para la teledetección. La radiación de microondas puede penetrar a través de la cobertura de nubes, niebla, polvo, que afecta a longitudes de onda ópticas más cortas. Esta propiedad permite la detección de la energía de microondas en casi todas las condiciones climáticas y ambientales [19].

La mayoría de los sensores pasivos de microondas se caracterizan por una baja resolución espacial. Debido a que las longitudes de onda son largas y la energía disponible es bastante baja en comparación con las longitudes de onda ópticas, por lo tanto, los campos de visión tienen que ser grandes para detectar suficiente energía para grabar una señal.

Los sensores de microondas activos tienen su propia fuente de radiación de microondas para iluminar el objetivo. La forma más común de formación de imágenes de sensores de microondas activos es el **RADAR**, que es el acrónimo de **RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging. El sensor transmite una señal de microondas hacia el objetivo y detecta la porción reflejada de la señal, generando imágenes de alta resolución y que son las de interés en esta tesis.

2.3. Formación de Imágenes de Radar-SAR

El Radar se compone fundamentalmente de un transmisor, un receptor, una antena, y un sistema electrónico para procesar y registrar los datos, como se ilustra en la Figura 2.5. Su funcionamiento se puede describir de la siguiente manera [19]:

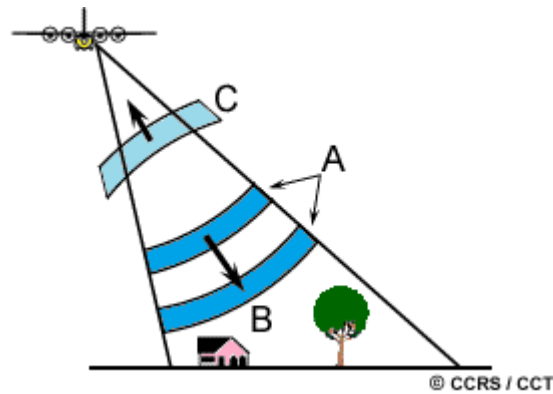


Figura 2.5: Proceso de captura de información [19].

- El transmisor genera ráfagas cortas sucesivas o pulsos de microondas (A) a intervalos regulares, que son enfocados por la antena en un haz (B).
- El haz de radar ilumina la superficie oblicuamente, la cual forma un ángulo recto respecto al movimiento de la plataforma que transporta el radar.
- La antena del sensor recibe una parte de la energía transmitida (C), que es reflejada o retrodispersada por los objetos que son iluminados por el haz de microondas.
- Midiendo el retardo de tiempo entre la transmisión de un pulso y la recepción de la reflexión del mismo desde los diferentes objetivos, se determina su distancia al radar y su ubicación.
- Con el movimiento hacia adelante de la plataforma del sensor, el registro y procesamiento de las señales reflejadas construye una imagen de dos dimensiones de la superficie.

2.3.1. Polarización

Para una onda electromagnética plana (EM), la polarización se refiere al lugar geométrico del vector de campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Mientras que la longitud del vector representa la amplitud de la onda, y

la velocidad de rotación del vector representa la frecuencia de la onda, la polarización se refiere a la orientación y la forma del patrón trazado por el extremo del vector. Los radares están diseñados para transmitir y recibir la radiación EM, ya sea con polarización horizontal (H) o vertical (V). Por lo que, se pueden formar cuatro combinaciones al transmitir y recibir polarizaciones de la siguiente manera [19]:

- HH - para transmisión y recepción horizontal.
- VV - para transmisión y recepción vertical.
- HV - para transmisión horizontal y recepción vertical.
- VH - para la transmisión vertical y recepción horizontal.

Las dos primeras combinaciones se denominan polarizadas debido a que la transmiten y reciben con la misma polarización. Las dos últimas combinaciones se conocen como de polarización cruzada debido a que la polarización de la transmisión y la recepción son opuestas. De esta misma manera los sistemas de radar pueden tener una, dos o las cuatro combinaciones de polarización de transmisión/recepción. En la Tabla 2.1 se presentan algunos ejemplos de sistemas de radar.

Tabla 2.1: Ejemplos de sistemas de radar.

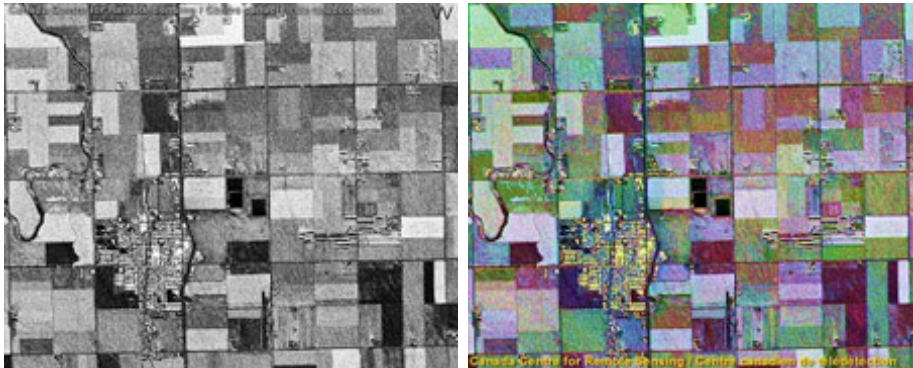
Nombre	Polarización
Monopolarimétrica	HH o VV (o posiblemente HV o VH)
Dual polarizada	HH y HV , VV y VH , o HH y VV
Polarización alterna	HH y HV , alternando con VV y VH
Polarimétrico	HH , VV , HV y VH

Un ejemplo del efecto de la polarización se muestra en la Figura 2.6, donde se observan cuatro imágenes de *Banda C* de un campo de cultivo. La Figura 2.6(a) muestra una imagen con polarización cruzada HV . Las Figuras 2.6(b) y 2.6(c) muestran la imagen polarizada como HH y VV respectivamente, y la Figura 2.6(d) es el resultado de la composición de las tres polarizaciones en una imagen RGB utilizando el método de Pauli [55], el cual transforma un conjunto de imágenes HH , HV , VV en una imagen RGB de la siguiente manera: $R = HH + VV$, $G = HH - VV$ y $B = HV$. Se observa que existen diferencias entre las mismas. Las imágenes de radar capturadas utilizando diferentes combinaciones de polarización y longitud de onda pueden proporcionar información diferente y complementaria sobre los objetivos en la superficie [13, 19, 55].



(a) Polarización cruzada HV .

(b) Polarización HH .



(c) Polarización VV .

(d) Composición de las tres polarizaciones.

Figura 2.6: Polarizaciones HV , HH , VV y composición de imagen RGB en una escena agrícola [19].

2.3.2. Geometría de Adquisición Radar-SAR

La mayoría de los radares aerotransportados que producen imágenes son de vista lateral (SLAR: Side Looking Airbone Radar), dentro de éstos se encuentran dos tipos: radar de apertura real (RAR: Real Aperture Radar) y radar de apertura sintética (SAR: Synthetic Aperture Radar). En la Figura 2.7 puede verse esquemáticamente el radar desplazándose con una velocidad \vec{v} a una altura h sobre la tierra. La dirección de avance se denomina *azimut*, la dirección perpendicular a ésta se denomina *rango* y la dirección perpendicular al plano de la tierra, que representa la altura, se denomina *nadir*. El ancho de la zona iluminada se denomina *swath*. L_x y L_y son las longitudes de la antena en la dirección de la altura y en la dirección azimutal, respectivamente.

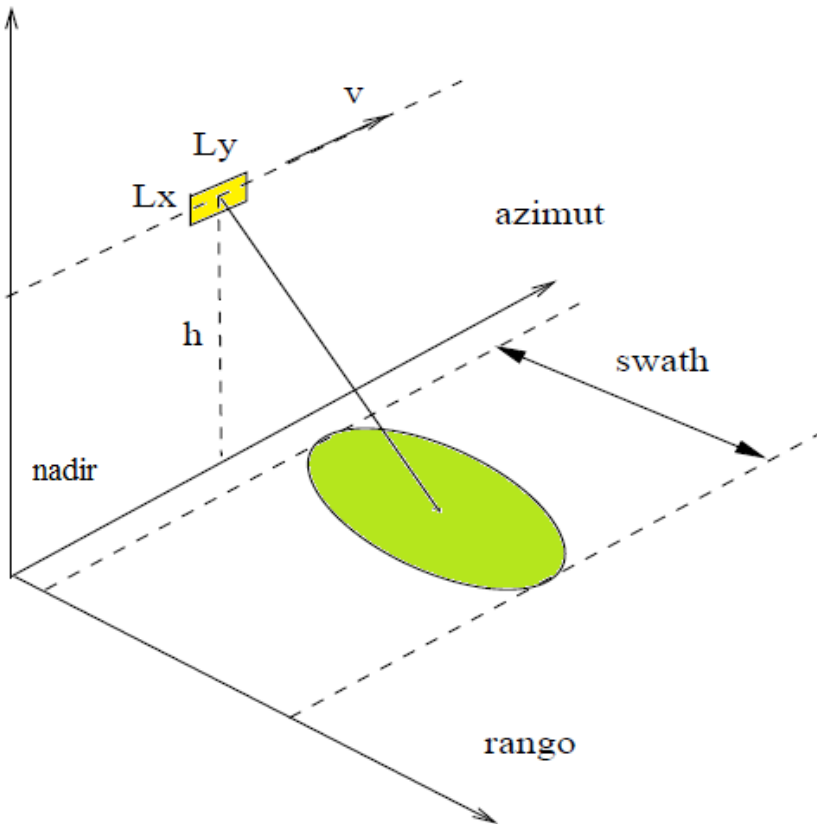


Figura 2.7: Geometría del Radar de Apertura Sintética [23].

La radiación electromagnética emitida está concentrada principalmente en el cono correspondiente al lóbulo central del diagrama de radiación de la antena del radar, la cual, en un instante dado, *ilumina* una zona del terreno, representada en la Figura 2.7 por una elipse. Al desplazarse el radar en la dirección indicada, la zona iluminada se desplaza con él, recorriendo una franja de terreno paralela a su trayectoria.

2.4. Radar de Apertura Sintética - SAR

Para estos sistemas, la resolución está definida por el ancho del haz de la antena y se degrada en proporción a la distancia oblicua. La longitud de la antena tendría que ser aumentada de forma poco realista para lograr resoluciones finas para grandes rangos y longitudes de onda, esta situación la presentan los sistemas de radar a bordo de vehículos espaciales [33].

Para superar esta limitación de tamaño, se realiza un proceso especial de grabación y procesamiento de las ondas durante el desplazamiento de la plataforma y de esta manera simular una antena muy larga y por lo tanto aumentar la resolución.

La Figura 2.8 ilustra el proceso. El objetivo entra dentro del rango de radar y luego los ecos de retrodispersión de cada pulso transmitido comienzan a ser grabados. A medida que la plataforma continúa moviéndose, todos los ecos desde el objetivo a cada pulso se registran durante el tiempo que el objetivo está dentro del haz. El punto en que el objetivo sale del haz del radar, determina la longitud de la antena sintética simulada [19, 60].

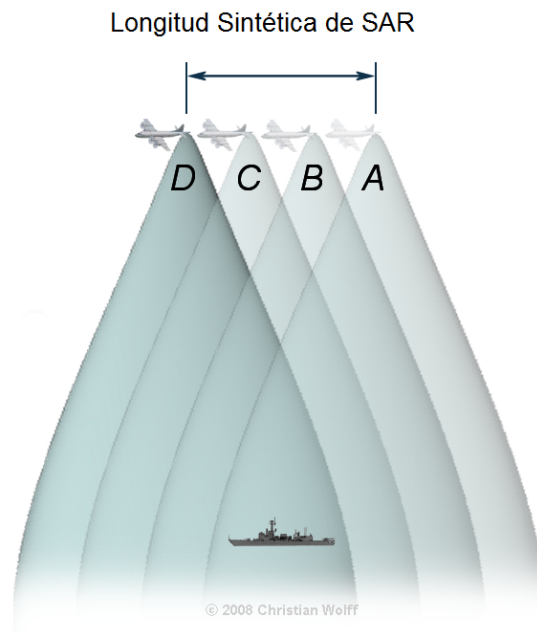


Figura 2.8: Ancho de banda expandido sintéticamente [60].

El ancho del haz expandido, combinado con el aumento del tiempo que el objetivo está dentro del haz a medida que aumenta el alcance sobre el terreno, se equilibran entre sí, de manera que la resolución se mantiene constante a través de todo el barrido. Este método uniforme de conseguir la resolución fina a lo largo de todo el *swath* se llama *Radar de Apertura Sintética* o SAR [19, 33, 60].

2.5. Número de *Looks*

Las imágenes SAR se producen con una apertura sintética grande y por consiguiente, un gran ancho de banda. Durante el procesamiento de la señal SAR cruda, se puede dividir la apertura sintética en varias sub-aperturas independientes como se muestra en la Figura 2.9. Esto se hace dividiendo el ancho de banda Doppler completa en sub-bandas independientes y extrayendo la señal de la banda limitada. Esta señal de banda limitada asociada con una sub-apertura representa un *look* independiente de la escena. Cuando en el proceso no se divide la apertura sintética completa en sub-aperturas la imagen correspondiente ancho de banda completo se conoce como una imagen *singlelook* y corresponde a la resolución más alta posible. De ello se deduce que cada imagen sub-apertura independiente tiene una resolución degradada proporcional al número de sub-aperturas independientes [19, 33, 60].

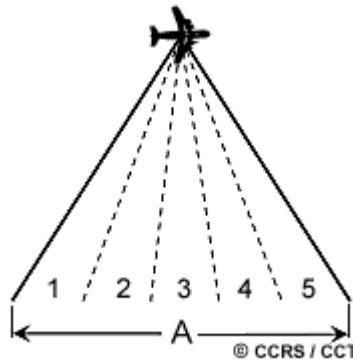


Figura 2.9: Procesamiento *Multilook*. Se observa al haz del radar dividido en cinco sub-haces (1 a 5) [19].

El SAR es un sistema de iluminación coherente, y al igual que otros sistemas de este tipo se caracteriza por la aparición del ruido *speckle*, el cual se define en la sección 2.6. Es un ruido granular que dificulta la interpretación de las imágenes SAR. Por lo cual, es importante reducir el *speckle* antes de la interpretación y análisis de las imágenes SAR. Una de las maneras de lograr esto es realizando un procesamiento *multilook* [19, 33] en el dominio espacial.

El procesamiento *multilook* espacial se realiza promediando las intensidades de un grupo de píxeles en la vecindad de un pixel central, y la sustitución de la intensidad del píxel central por la intensidad media como se muestra en la Figura 2.10. Este proceso se repite sobre toda la imagen. Como resultado del *multilook* espacial de un solo canal, los datos SAR resultantes son datos de intensidad de valor real [19].

Ahora bien, todo procesamiento aplicado a la reducción del *speckle* se realiza a expensas de la resolución, ya que esencialmente suavizan la imagen. Por lo tanto,

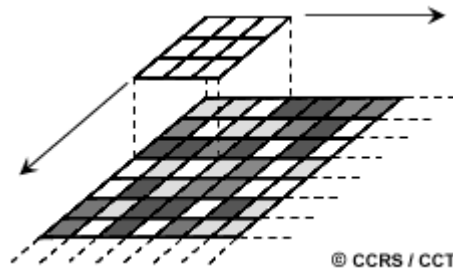


Figura 2.10: Procesamiento *multilook* [19].

la cantidad de reducción del *speckle* debe equilibrarse en función de la aplicación particular que se le da a la imagen SAR y la cantidad de detalle requerido. Si se requiere el detalle fino y alta resolución, poco o ningún tipo de proceso debe aplicarse. Si la aplicación es de interpretación y cartografía a gran escala, las técnicas de reducción del *speckle* son más apropiados [19, 33].

2.6. El Ruido Speckle

La imagen generada por el sistema SAR es afectada por la interferencia de las señales incidente y reflejada por los dispersores y denomina ruido *speckle*. El *speckle* es un ruido que proviene de la adición coherente de los retornos individuales producido por los elementos presentes en cada celda de resolución. Produce que se observe una textura granulada en la imagen, como se observa en la Figura 2.11 [19, 33, 60].



Figura 2.11: Imagen SAR con ruido *Speckle* [19].

2.7. Conclusiones para este Capítulo

En este capítulo se establecen los principios básicos de la teledetección y la generación de imágenes de radar como base para definir el sistema SAR y el proceso *multilook* de adquisición y todas las ventajas que tienen este tipo de imágenes en los estudios de teledetección. Se define el ruido *speckle*, el cual se presenta en este tipo de imágenes. El proceso de formación del ruido *speckle* es aleatorio, por consiguiente las imágenes SAR no pueden ser analizadas con la información presente en un píxel. Y para poder extraer información de una imagen SAR es necesario tener conocimiento sobre las propiedades estadísticas de la misma y basar su análisis en estimaciones estadísticas sobre un conjunto de píxeles de la imagen. Todo lo expuesto plantea la necesidad de modelar las imágenes SAR por medio de distribuciones estadísticas para el estudio, procesamiento, análisis e interpretación de estas imágenes.

Capítulo 3

Modelado Estadístico de Imágenes SAR y la Distribución \mathcal{G}_I^0

El Modelado estadístico de imágenes SAR cumple un rol fundamental en la interpretación de estas imágenes [27]. Los modelos estadísticos han sido ampliamente utilizados para el análisis de los datos SAR porque ofrecen una amplia variedad de aplicaciones, tales como la clasificación de imágenes, segmentación, filtrado y extracción de características [34].

Por otra parte, el conocimiento preciso de las propiedades estadísticas de los datos aportados por las imágenes SAR juega un papel importante en el procesamiento de las imágenes y su comprensión. Estas propiedades se pueden utilizar para discriminar los tipos de suelos entre otras aplicaciones [22]. El modelado estadístico de imágenes SAR posee las siguientes ventajas:

- Lleva a una comprensión profunda de los mecanismos de dispersión del terreno [27, 53].
- Ayuda a establecer los procesos de investigación en la eliminación del ruido *speckle*, detección de bordes, segmentación, detección de objetivos, así como otras aplicaciones [1, 27, 53, 57].
- Se pueden simular imágenes SAR variando los parámetros de ruido, la orientación del objetivo, el ángulo de elevación de la antena desde el objetivo, así como los parámetros pueden ser controlados directamente y modificados según el propósito de la simulación [9, 10, 17, 50].

Según el proceso seguido para la elaboración del modelado estadístico de imágenes SAR, los *modelos estadísticos* se pueden dividir en dos tipos [27]:

Los Modelos No Paramétricos Estos modelos están basados en muestras de imágenes SAR reales y se estima la función de densidad de probabilidad compleja desconocida de estos datos por medio de núcleos (Gaussiano, Epanechnikov, etc.). También, hacen que el proceso de modelado estadístico de imágenes SAR sea más flexible, al no tener que asumir que los datos provenientes de imágenes SAR se comportan según una una distribución estadística dada, y pueden ajustarse a los datos reales con precisión. La idea principal es usar la convolución con núcleos para obtener la estimación de la distribución estadística subyacente. Sin embargo, aunque el modelado no paramétrico tiene una alta precisión en la estimación de la Función de densidad de probabilidad (PDF) consume mucho tiempo de cálculo [27], debido a la gran cantidad de datos y a las operaciones complejas.

Los Modelos Paramétricos El proceso de modelado paramétrico se puede describir como el proceso de selección de una distribución estadística apropiada a partir de varias distribuciones propuestas al inicio de estudio. Los parámetros de estas distribuciones son estimados a partir de muestras de datos de imágenes SAR reales. El proceso consiste en :

1. El análisis de varios modelos de distribución estadística conocidas.
2. Estimación de parámetros: la estimación de los parámetros de las distribuciones propuestas a partir de muestras de datos SAR reales.
3. Pruebas de ajuste: Valoración de la precisión de los modelos dados y su ajuste con los datos reales usando métricas.

Este proceso se ilustra en la Figura 3.1. Los modelos paramétricos se pueden

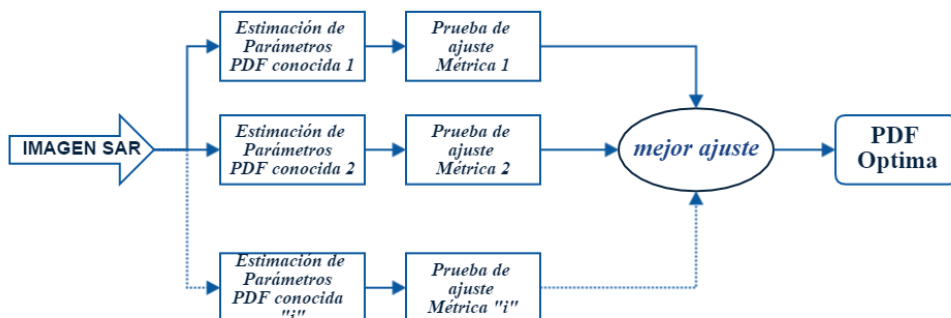


Figura 3.1: Diagrama del proceso de modelado paramétrico.

clasificar en: los *Modelos Empíricos*, obtenidos de distribuciones empíricas, el *Modelo Multiplicativo*, los modelos desarrollados a partir del *Teorema del Límite Central Generalizado*, y los modelos desarrollados mediante otras técnicas tales como: la técnica de la ventana Parzen, redes neuronales artificiales entre otras [27]. Ahora bien, la familia de modelos estadísticos basados en el modelo multiplicativo ha sido y es ampliamente utilizada en el análisis, procesamiento y modelado de imágenes SAR por varios autores [11, 22, 24, 37]. Las imágenes SAR se pueden dividir en regiones poco texturadas (zonas de pastura), regiones texturadas y regiones muy texturadas de acuerdo con su contenido.

En este capítulo se presenta el modelo multiplicativo, se introducen los modelos estadísticos utilizados a lo largo de este trabajo y finalmente se explican el método de máxima verosimilitud y de los momentos para estimar los parámetros de la distribución.

3.1. El Modelo Multiplicativo

El modelo multiplicativo es un modelo matemático muy utilizado para explicar el comportamiento estadístico de los datos provenientes de sistemas de iluminación coherente, como los obtenidos de imágenes SAR. Este modelo asume que las observaciones (píxeles) dentro de este tipo de imágenes son el resultado del producto de dos variables aleatorias independientes que corresponden a *la retrodispersión* y al ruido *speckle*. Por consiguiente, la intensidad observada en una imagen SAR es el resultado de la variable aleatoria definida y modelada bajo el modelo del producto [22, 23]. Se tiene:

$$Z = X.Y \tag{3.1}$$

donde:

- X modela la variabilidad de la retrodispersión del terreno
- Y modela el ruido *speckle*
- Z modela el retorno

En la Ec. (3.1), la retrodispersión se considera real y positiva, mientras que el ruido *speckle* se considera complejo. De esta forma, el retorno corresponde a una variable aleatoria compleja Z . De este formato complejo de representación del retorno, es posible derivar los siguientes formatos de imagen [42]:

- Intensidad $Z_I = \|Z\|^2$

- Amplitud $Z_A = \|Z\| = \sqrt{Z_I}$
- Fase $Z_\phi = \arctan(\Im(Z)/\Re(Z))$, donde $\Im(\bullet)$, $\Re(\bullet)$ denotan parte imaginaria y parte real, respectivamente.

El modelo multiplicativo colabora en el análisis del modelo estadístico de imágenes SAR y por consiguiente es ampliamente utilizado. De estos formatos, los más usuales, son los de intensidad o amplitud. Y en muchos casos, es más fácil derivar las propiedades estadísticas de los datos en formato intensidad. En esta tesis se trabaja con datos provenientes de formato de intensidad.

3.2. El Modelo para el ruido *Speckle*

Bajo el modelo multiplicativo el ruido *speckle* Y , se modela con una distribución normal bivariada, con media cero y matriz de varianza-covarianza Σ , llamando a la variable compleja correspondiente al ruido *speckle* Y_C [30]:

$$Y_C = \begin{pmatrix} Y_r \\ Y_i \end{pmatrix} \sim N \left(\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

donde Y_r y Y_i , son las componente real e imaginaria respectivamente, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Se tienen los formatos de intensidad $Y_I = \|Y_C\|^2$ y de amplitud $Y_A = \|Y_C\| = \sqrt{Y_r^2 + Y_i^2}$.

Ahora bien, las imágenes SAR son generadas por un número de observaciones diferentes del área de estudio, llamadas *looks* por consiguiente, a una imagen SAR obtenida con una sola observación del área se le llama *singlelook*. Y cuando se genera con el promedio de las observaciones se le llama *multilook*. A consecuencia de este proceso, las imágenes *singlelook* son más ruidosas, pero poseen mayor información.

Para datos de intensidad, provenientes de un número L de *looks*, el ruido *speckle* Y_I es el promedio sobre L muestras independientes de $\|Y_C\|^2$, por consiguiente se tiene que Y_I se distribuye con una distribución *Gamma* denotada por:

$$Y_I \sim \Gamma(L, L)$$

Luego, bajo el modelo *multilook*, el ruido *speckle* en formato intensidadm está caracterizado por la función de densidad de la distribución $\Gamma(L, L)$ dada por:

$$f_{Y_I}(y) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} y^{L-1} e^{-Ly}, \quad (3.2)$$

donde $L, y > 0$.

3.3. Modelo para la Retrodispersión

La retrodispersión describe las texturas del objetivo, las cuales dependen de una gran cantidad de factores, ángulo de incidencia, polarización, frecuencia, entre otros, al momento de generar la imagen SAR. Por lo tanto, es posible utilizar diferentes modelos estadísticos para modelarla. Y por medio de X_I es posible identificar diferentes tipos de clases dentro de la imagen, según su textura.

Bajo el modelo multiplicativo, Frery et al. [22] propusieron modelar la retrodispersión X_I con la *Distribución Inversa Gaussiana Generalizada*, denotada por $X_I \sim N^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ y su función de densidad dada por:

$$f_{X_I}(x) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{2K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma})} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\lambda x + \gamma/x)}, \quad x > 0 \quad (3.3)$$

donde K_α es la función de Bessel modificada de tercera clase y orden α , dada por:

$$K_\alpha(\sqrt{ab}) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)} dx \quad (3.4)$$

y el espacio parámetros está dado por:

$$\begin{cases} \gamma > 0 & y & \lambda \geq 0, & \text{si } \alpha < 0 \\ \gamma > 0 & y & \lambda > 0, & \text{si } \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0 & y & \lambda \geq 0, & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Este modelo contiene los casos relevantes para datos de intensidad de la retrodispersión y dependiendo que los parámetros tiendan a diferentes valores, puede obtenerse las siguientes distribuciones:

i.- Una constante β

ii.- La distribución Gamma denotada por $X_I \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, con densidad

$$f_{X_I}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (3.6)$$

iii.- La distribución recíproca de Gamma denotada por $X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$, con densidad

$$f_{X_I}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\gamma^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\gamma/x} \quad x > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0 \quad (3.7)$$

3.4. Modelo del Retorno

La distribución del retorno bajo el modelo multiplicativo para datos de intensidad Z_I , se considera como una variable aleatoria resultante del producto $X_I \cdot Y_I$. Por consiguiente, el modelo para el retorno depende del modelo elegido para el ruido *speckle* Y_I y para la retrodispersión X_I . Siendo $Y_I \sim \Gamma(L, L)$, se tiene que:

- La retrodispersión X_I se considera una constante β . Entonces el retorno se denota por:

$$Z_I \sim \Gamma(L, L/\beta)$$

- Si se considera la retrodispersión $X_I \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, Z_I tendrá una distribución \mathcal{K}_I , que se denota $Z_I \sim \mathcal{K}_I(\alpha, \gamma, L)$, con densidad

$$f_{Z_I}(z) = \frac{2(\sqrt{\lambda L})^{L+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)} z^{\left(\frac{L+\alpha}{2} - 1\right)} K_{L-\alpha}(2\sqrt{\lambda z L}) \quad (3.8)$$

donde $z, \alpha, \lambda, L > 0$

- Si se considera la retrodispersión $X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$, se tiene que la distribución de Z_I es la distribución \mathcal{G}_I^0 , que se describe en la próxima sección.

El esquema de la Figura 3.2 muestra el retorno Z_I como resultado del producto del ruido *speckle* Y_I con las diferentes opciones que puede tomar la retrodispersión X_I .

3.5. La Distribución \mathcal{G}_I^0

Sean X_I y Y_I dos variables aleatorias independientes tales que $X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$ y $Y_I \sim \Gamma(L, L)$ con $-\alpha, \gamma, L > 0$, entonces la variable aleatoria producto $Z_I = X_I \cdot Y_I$ tiene una distribución \mathcal{G}_I^0 , la cual se denota por

$$f_{\mathcal{G}_I^0}(z) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} \cdot \frac{z^{L-1}}{(\gamma + zL)^{L-\alpha}}, \quad (3.9)$$

donde $-\alpha, \gamma, z > 0$ y $L \geq 1$.

Los momentos de orden r estan dados por:

$$E(Z^r) = \left(\frac{\gamma}{L}\right)^r \frac{\Gamma(-\alpha - r)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(L + r)}{\Gamma(L)}. \quad (3.10)$$

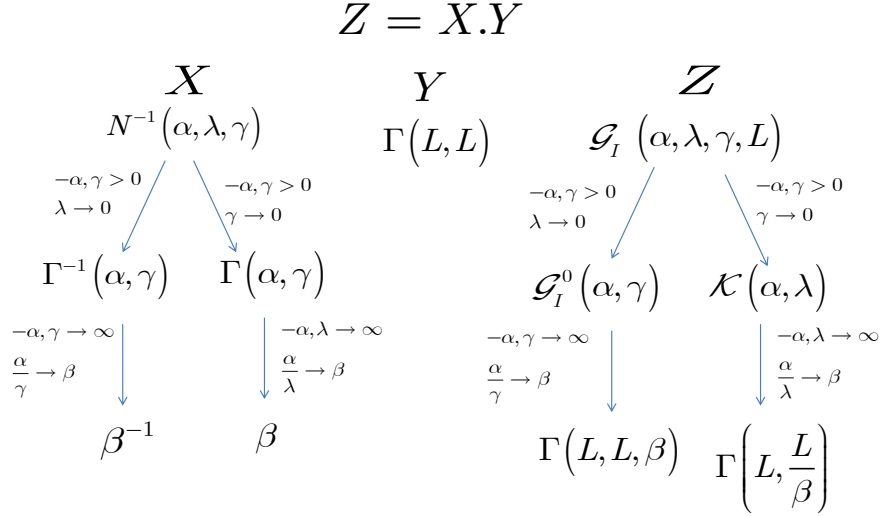


Figura 3.2: Esquema del retorno Z_I , basado en el modelo multiplicativo.

Calculando a partir de la ecuación (3.10) la esperanza y la varianza de la distribución \mathcal{G}_I^0 , se obtiene:

$$\mu = E(z) = -\frac{\gamma}{\alpha + 1} \quad (3.11)$$

$$\sigma^2 = E(z^2) - (E(z))^2 = \frac{\gamma^2(1 - L + \alpha)}{L(\alpha + 1)^2(\alpha + 2)} \quad (3.12)$$

Una de las características más importantes de la distribución \mathcal{G}_I^0 es la interpretación del parámetro α , que está relacionado con la textura del objetivo. Los valores cercanos a cero (por lo general por encima de -3) sugieren zonas de texturas extremas, como las zonas urbanas. A medida que el valor disminuye, indica las regiones con textura moderada ($\alpha \in [-6, -3]$) como las zonas forestales o bosques. Zonas con menos textura, por ejemplo, pastos, producen $\alpha \in (-\infty, -6)$, como se muestra en la Figura 3.3. De esta manera, las diferentes regiones quedan caracterizadas por el parámetro α [22, 23].

El parámetro $\gamma \in \mathbb{R}_+$ es un parámetro de escala, es decir, sea W una variable aleatoria con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, entonces:

$$\frac{1}{\gamma}W \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L). \quad (3.13)$$

Por último, el parámetro L corresponde al número de *looks* con el que se genera la imagen SAR.

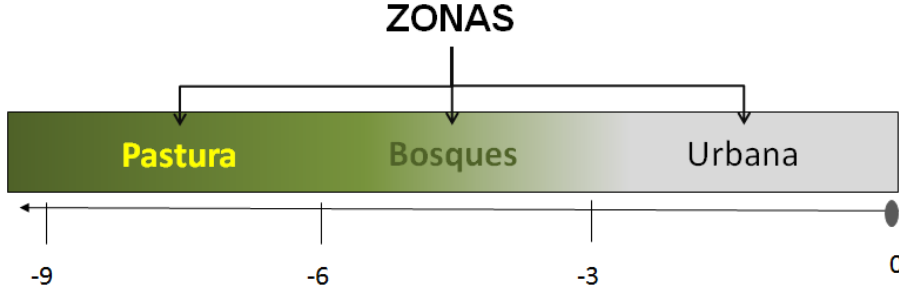


Figura 3.3: Representación de la interpretación del parámetro α en la distribución \mathcal{G}_L^0 .

Una parte muy importante del proceso de trabajo en esta tesis, es estimar los parámetros de la distribución \mathcal{G}_L^0 . A continuación se desarrollan los métodos para estimar los parámetros de *máxima verosimilitud* (MV) y el de los *momentos*.

3.5.1. Estimador de Máxima Verosimilitud (MV)

Dada la muestra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, y suponiendo que estas observaciones son resultados de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\mathcal{G}_L^0(\alpha, \gamma, L)$ con $(\alpha, \gamma) \in \Theta = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ y L conocido, el estimador de máxima verosimilitud de (α, γ) satisface

$$(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \arg \max_{(\alpha, \gamma) \in \Theta} \mathcal{L}(\alpha, \gamma, L, \mathbf{z}),$$

donde \mathcal{L} es la función de verosimilitud bajo la distribución $\mathcal{G}_L^0(\alpha, \gamma, L)$, la cual es:

$$\prod_{i=1}^n \frac{L^L \gamma^{-\alpha} z_i^{L-1} \Gamma(L - \alpha) (\gamma + Lz)^{\alpha-L}}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(L)}$$

tomando logaritmo de la función de verosimilitud se obtiene:

$$-\sum_{i=1}^n \log((\gamma + Lz_i)^{L-\alpha}) + (L-1) \sum_{i=1}^n \log(z_i) + n[-\alpha \log(\gamma) - \log(\Gamma(-\alpha)) + \log(\Gamma(L-\alpha)) + L \log(L) - \log(\Gamma(L))]$$

esto lleva a $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ de manera tal que:

$$n[\Psi^0(-\hat{\alpha}) - \Psi^0(L - \hat{\alpha})] + \sum_{i=1}^n \ln \frac{\hat{\gamma} + Lz_i^2}{\hat{\gamma}} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{-n\hat{\alpha}}{\hat{\gamma}} - (L - \hat{\alpha}) \sum_{i=1}^n (\hat{\gamma} + Lz_i^2)^{-1} = 0, \quad (3.15)$$

donde $\Psi^0(t) = d \ln \Gamma(t)/dt$ es la función digamma. En muchos casos no existe solución explícita para este sistema y se requieren métodos numéricos para resolverlos. En esta tesis se aplica el método de optimización de Broyden- Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Este algoritmo es un método iterativo para resolver problemas de optimización no lineal sin restricciones [7].

3.5.2. Estimación de Parámetros por el Método de los Momentos

Sea (Z_1, Z_2, \dots, Z_N) un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución F . Sea f una función real definida sobre \mathbb{R} tal que $E(|f(Z)|) < \infty$. Entonces $E(|f(Z)|)$ puede ser estimada como:

$$\hat{m}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(z_i) \quad (3.16)$$

En la ecuación (3.16), si la función f es la que hace corresponder $z \mapsto z^r$ con $r > 0$, entonces escribimos \hat{m}_r en lugar de \hat{m}_{z^r} . Los estimadores de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_t$ son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Z_1) (\hat{\theta}_1 \dots \hat{\theta}_t) = \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Z_1^t) (\hat{\theta}_1 \dots \hat{\theta}_t) = \hat{m}_t \end{cases}$$

Para estimar conjuntamente los parámetros α y γ , es posible utilizar los momentos de orden 1 y 2 y también los momentos de orden 1 y 1/2. En ambos casos se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$, que son los valores estimados de los parámetros α y γ respectivamente

Estimación de los parámetros α y γ utilizando los estimadores de los momentos de primer y segundo orden \hat{m}_1 y \hat{m}_2

Sean \hat{m}_1 y \hat{m}_2 los estimadores de los momentos de orden 1 y 2, respectivamente, definidos como

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (3.17)$$

y

$$\widehat{m}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^2 \quad (3.18)$$

donde z_i , con $0 \leq i \leq N$, es una realización de un vector aleatorio de dimensión N , cuyas componentes están distribuidas con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$

De la ecuación (3.10), estos momentos están dados por:

$$\begin{aligned} \widehat{E}(Z) = \widehat{m}_1 &= \frac{\gamma}{L} \cdot \frac{\Gamma(-\alpha - 1)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(L + 1)}{\Gamma(L)} \\ &= \frac{\gamma}{L} \cdot \frac{\Gamma(-\alpha - 1)}{-(\alpha + 1)\Gamma(-\alpha - 1)} \cdot \frac{L\Gamma(L)}{\Gamma(L)} \\ &= -\frac{\gamma}{(\alpha + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{E}(Z^2) = \widehat{m}_2 &= \left(\frac{\gamma}{L}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(-\alpha - 2)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(L + 2)}{\Gamma(L)} \\ &= \left(\frac{\gamma}{L}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma(-\alpha - 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)\Gamma(-\alpha - 2)} \cdot \frac{L(L + 1)\Gamma(L)}{\Gamma(L)} \\ &= \frac{\gamma^2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \cdot \frac{(L + 1)}{L} \end{aligned}$$

Luego, los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son tales que:

$$\hat{\gamma} = -(\hat{\alpha} + 1)\widehat{m}_1 \quad (3.19)$$

y

$$\hat{\gamma} = \left[\frac{\widehat{m}_2 L (\hat{\alpha} + 1) (\hat{\alpha} + 2)}{(L + 1)} \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

e igualándolas se obtiene:

$$-(\hat{\alpha} + 1)\widehat{m}_1 = \left[\frac{m_2 L (\hat{\alpha} + 1) (\hat{\alpha} + 2)}{(L + 1)} \right]^{1/2}$$

reagrupando términos tenemos:

$$\frac{L}{(L + 1)} \cdot (\hat{\alpha} + 1) (\hat{\alpha} + 2) \widehat{m}_2 = \widehat{m}_1^2 (\hat{\alpha} + 1)^2$$

y resolviendo esta ecuación para $\hat{\alpha}$, obtenemos:

$$\hat{\alpha} = \frac{2\kappa - 1}{1 - \kappa} \quad (3.21)$$

donde

$$\kappa = \frac{L}{(L+1)} \cdot \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1^2} \quad (3.22)$$

Y para obtener $\hat{\gamma}$, se sustituye el valor de $\hat{\alpha}$ resultante en la (3.19) o en (3.20). Ahora bien, se debe recordar que $\hat{\alpha} < 0$ y como $\kappa > 0$, entonces, los valores que puede tomar κ deben estar restringidos al intervalo $\kappa \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

Estimación de los parámetros α y γ utilizando los estimadores de los momentos \hat{m}_1 y $\hat{m}_{1/2}$

Sean \hat{m}_1 y $\hat{m}_{1/2}$ los estimadores de los momentos de orden 1 y 1/2, respectivamente, definidos como

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$$

y

$$\hat{m}_{1/2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^{\frac{1}{2}}$$

donde z_i , con $0 \leq i \leq N$, es una realización de un vector aleatorio de dimensión N , cuyas componentes están distribuidas con distribución \mathcal{G}_L^0 .

De la ecuación (3.10), estos momentos están dados por:

$$\hat{m}_1 = -\frac{\hat{\gamma}}{(\hat{\alpha} + 1)}$$

$$\hat{m}_{1/2} = \left(\frac{\hat{\gamma}}{L}\right)^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2)}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \cdot \frac{\Gamma(L + 1/2)}{\Gamma(L)}$$

Realizando el mismo proceso de la sección anterior, despejando $\hat{\gamma}$ de ambas ecuaciones e igualándolas, se obtiene:

$$-(\hat{\alpha} + 1) \cdot \left[\frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2)}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \right]^2 = \frac{L\hat{m}_{1/2}^2}{\hat{m}_1} \cdot \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L + 1/2)} \right]^2$$

Entonces:

$$-(\hat{\alpha} + 1) \cdot \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - 1/2)}{\Gamma^2(-\hat{\alpha})} - \frac{L\hat{m}_1^2}{\hat{m}_1} \cdot \frac{\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L + 1/2)} = 0, -\hat{\alpha} > 1/2 \quad (3.23)$$

$$g(\hat{\alpha}) - \tau = 0 \quad (3.24)$$

donde

$$g(\hat{\alpha}) = -(\hat{\alpha} + 1) \cdot \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - 1/2)}{\Gamma^2(-\hat{\alpha})} \quad (3.25)$$

y

$$\tau = \frac{L\hat{m}_1^2}{\hat{m}_1} \cdot \frac{\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L + 1/2)} \quad (3.26)$$

3.6. Conclusiones para este Capítulo

En este capítulo se muestran los fundamentos del modelado estadístico de los datos provenientes de imágenes SAR, así como los métodos actualmente utilizados como el modelo multiplicativo. Se establecen los modelos estadísticos tanto para el ruido *speckle*, la retrodispersión y el retorno, el cual establece la distribución estadística \mathcal{G}_I^0 que se usa a lo largo de esta tesis. Por último, se estiman los parámetros de la distribución \mathcal{G}_I^0 utilizando los métodos de Máxima Verosimilitud (MV) y el de los momentos. El método de MV para estimar los parámetros se utiliza especialmente durante todo este trabajo, el de los momentos se usa de forma auxiliar, en algunos casos como valor inicial del proceso de calculo numérico del estimador de MV.

Capítulo 4

Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0

El problema de comparar dos o más funciones de probabilidad usando distancias o divergencias, prevalece en el procesamiento y análisis de imágenes. Varios autores emplean medidas de contraste provenientes de la teoría de la información en diversas aplicaciones como clasificación [29, 52], detección de puntos de borde [21, 26, 28, 39, 40] y despeckling [54], pero la distancia geodésica (DG) no ha sido utilizada aún en imágenes monopolarizadas.

La DG puede ser utilizada para medir la diferencia entre dos distribuciones paramétricas. Fue presentada por Rao [45, 46], y desde entonces ha sido estudiada por varios autores [2, 38, 58]. Berkane et al. [3] calculó una forma cerrada para la DG entre distribuciones elípticas, pero como tales formas no están disponibles para cualquier distribución, se tiene que confiar en soluciones numéricas, por ejemplo, en el artículo [47] se calcula la DG entre dos modelos Gamma numéricamente.

La DG se ha utilizado para resolver varios problemas, entre ellos la recuperación de textura multivariada y clasificación de imágenes [5, 6, 16]. En estos artículos los autores calculan una forma cerrada de la DG entre distribuciones elípticas multivariadas bajo ciertas condiciones, incluyendo la distribución polarimétrica $\mathcal{G}_{\text{Pol}}^0$ [20].

Inspirados en estos trabajos, se plantea calcular la DG, entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 para datos SAR monopolarimétricos. Se considera el parámetro L conocido y por consiguiente la distribución \mathcal{G}_I^0 únicamente depende de los parámetros de textura α y de escala γ .

Este capítulo contiene el aporte más importante de este trabajo. Más adelante se utiliza la DG como una medida de contraste y detección de puntos de borde en imágenes SAR.

4.1. Distancias Estadísticas entre distribuciones de Probabilidad

El conocimiento de la distancia estadística en conjunto con sus propiedades constituye un importante instrumento en el análisis de datos. Así por ejemplo, utilizando distancias es posible construir contrastes de hipótesis, estudiar propiedades asintóticas de estimadores de parámetros, comparar estimaciones de parámetros, entre otras aplicaciones [14].

Definición 4.1 Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ el conjunto de objetos y sea δ como una aplicación de $\delta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\delta(\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}$. Entonces δ es una distancia entre distribuciones si cumple algunas de las siguientes propiedades y dependiendo de qué propiedades cumpla se le puede asignar un calificativo [14, 41]:

1. $\delta_{ij} \geq 0$, para $i, j \in [1, 2, \dots, n]$.
2. $\delta_{ij} = 0$ si y sólo si $i = j$.
3. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.
4. $\delta_{ij} \leq \delta_{ik} + \delta_{kj}$.
5. $\delta_{ij} \leq \max\{\delta_{ik}, \delta_{jk}\}$ Desigualdad ultramétrica
6. $\delta_{ij} + \delta_{kl} \leq \max\{\delta_{ik} + \delta_{lj}, \delta_{jl} + \delta_{jk}\}$ Desigualdad aditiva.

Del análisis de las propiedades anteriores, según Cuadras [14] y Oller [41], una distancia debe cumplir por lo menos con las propiedades 1, 2 y 3. Y cuando sólo cumple tales propiedades recibe el nombre de *disimilaridad*.

La medida δ , no siempre cumple con todas las propiedades de las distancias, y dependiendo de cual de las propiedades cumpla se le puede asignar un calificativo [14, 41, 56]. El cuadro 4.1 muestra los calificativos que se asigna a cada una de las distancias de acuerdo a las propiedades que satisfaga.

Las distancias estadísticas juegan un rol fundamental en el análisis de datos en todos los ámbitos de las ciencias. Una de estas distancias es la distancia geodésica (DG) introducida por Rao [45], que tuvo un profundo impacto en la investigación estadística. La DG determina una medida de similaridad entre distribuciones de probabilidad pertenecientes a una misma familia paramétrica.

A continuación se define en primer lugar una curva Geodésica y posteriormente la distancia geodésica de Rao.

Tabla 4.1: Calificativo asignado a las distancias según las propiedades que cumple.

Calificativo	Propiedad					
	1	2	3	4	5	6
Disimilaridad						
Distancia Métrica						
Distancia Ultramétrica						
Distancia Euclídea						
Distancia Aditiva						
Divergencia						

4.2. Curva Geodésica

Una geodésica es una curva que une dos puntos en un espacio curvado, y representa la mínima longitud entre esos puntos, Riley. et al. [48] la definen de la siguiente manera:

Definición 4.2 *Una curva geodésica en el espacio tridimensional real es una línea, que tiene dos propiedades que la definen. Primero, es la curva de longitud más corta entre dos puntos y segundo, es la curva cuyo vector tangente siempre apunta en la misma dirección a lo largo de la línea.*

Esto se puede observar en la Figura 4.1 donde la curva geodésica es la que une los puntos P y Q y los vectores tangentes a la curva \mathbf{V} y \mathbf{W} siempre tienen la misma dirección. La línea que une los dos puntos debe estar sobre la superficie, como se puede ver en la Figura 4.2, donde se muestran dos caminos más cortos entre los puntos A y B . La geodésica es la curva que queda contenida en la superficie.

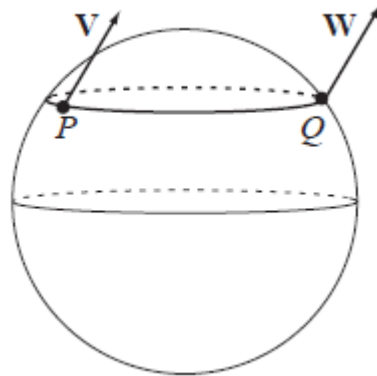


Figura 4.1: Curva Geodésica sobre una esfera. Los vectores tangentes a la curva tienen la misma dirección.

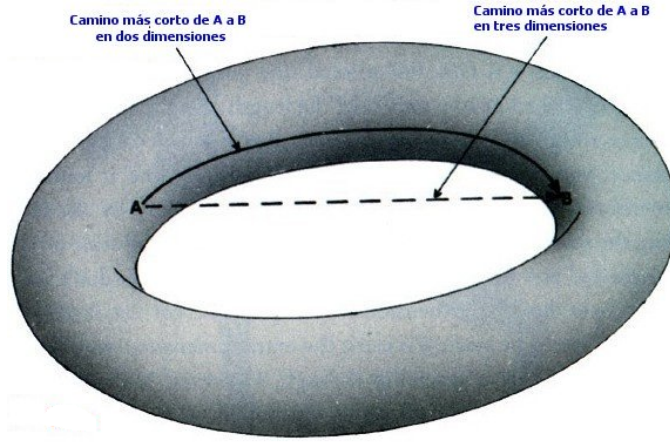


Figura 4.2: Ilustración de los caminos más cortos entre dos puntos. La línea geodésica corresponde a la que se encuentra sobre la superficie.

4.3. Distancia Geodésica de Rao

La distancia geodésica fue introducida por Rao [45, 46] quien la define como:

Definición 4.3 Sea $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ un conjunto de r ($r \geq 1$) parámetros reales en el espacio de parámetros Θ y sea $\{f(z | \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta, z \in \mathcal{Z}\}$, una familia de funciones de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua Z . Si se asume que la familia $\{f(z | \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ satisface las siguientes condiciones de regularidad.

- i.*- El soporte $\{f(z | \boldsymbol{\theta}) > 0, \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ es idéntico para todas las funciones de distribución.
- ii.*- $\int f(z | \boldsymbol{\theta}) dz$ se puede calcular la derivada $f(z | \boldsymbol{\theta})$ dentro del signo de la integral, con respecto a $\boldsymbol{\theta}$.
- iii.*- $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f(z | \boldsymbol{\theta})$ existe para todo $z \in \mathcal{Z}$ y para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$

La (i, j) -ésima coordenada de la matriz de información de Fisher [4] está dada por:

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = E \left(\frac{\partial \ln f(z | \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln f(z | \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (4.1)$$

Y según Rao [45] la métrica cuadrática diferencial positiva es de la forma:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^r g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) d\theta_i d\theta_j \quad (4.2)$$

La Ec. (4.2) es una forma diferencial cuadrática definida positiva basada en los elementos de la matriz de información de Fisher.

A partir de la forma diferencial cuadrática definida positiva dada en la ecuación (4.2) se deriva la distancia entre dos distribuciones correspondientes a dos puntos generales, de la siguiente manera [2, 3, 6]:

Sean dos puntos $\theta_l = (\theta_{1l}, \theta_{2l}, \dots, \theta_{rl})$ ($l = 1, 2$) de Θ .

Sea

$$\theta_i = \theta_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.3)$$

donde t es el parámetro, que denota una curva en Θ uniendo θ_1 y θ_2 . Supongamos que t_1 y t_2 son los valores de t tal que

$$\theta_{il} = \theta_i(t_l) \quad l = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.4)$$

La distancia $s(\theta_1, \theta_2)$, a lo largo de la curva entre $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ está dada por [2]:

$$s(\theta_1, \theta_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^r g_{ij}(\theta) \frac{d\theta_i}{dt} \frac{d\theta_j}{dt}} dt \right| \quad (4.5)$$

La curva que une θ_1 y θ_2 para la cual la distancia $s(\theta_1, \theta_2)$ es la más corta, es la de interés. Tal curva se llama *geodésica*, y es la solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\sum_{i=1}^r g_{ik}(\theta) \frac{d^2\theta^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^r \Gamma_{ij}^k \frac{d\theta^i}{dt} \frac{d\theta^j}{dt} = 0 \quad (4.6)$$

donde Γ_{ij}^k es el símbolo de Christoffel de primera clase y está definido por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}(\theta)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{jk}(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial g_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k} \right) \quad (4.7)$$

Esta es la distancia (Ec. (4.5)) para la geodésica definida por (4.6) and (4.7).

Es importante señalar que para las familias de distribuciones multiparámetro, es muy difícil obtener una expresión explícita de la distancia geodésica [2]. Por consiguiente, se considera reducir la métrica a los casos que se pueda realizar este procedimiento.

4.4. Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0

La distancia geodésica no había sido calculada para la distribución \mathcal{G}_I^0 monoparamétrica en la literatura. Se calcula la distancia geodésica entre modelos \mathcal{G}_I^0 para

tres casos particulares. En todos ellos se considera al parámetro L (número de *looks*) conocido y por consiguiente la distribución \mathcal{G}_I^0 únicamente depende de los parámetros de textura α y de escala γ . Se han obtenido fórmulas cerradas para la distancia, para los valores de $L = \{1, 2\}$, lo que constituye un aporte muy importante de este trabajo.

4.4.1. Distancia Geodésica Cuando $E(z) = 1$

En el caso en que la muestra posea media unitaria, es decir $E(z) = 1$ y dado L el número de *looks* conocido, podemos modelar los datos con una distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma^*, L)$, donde γ^* es tal que $E(z) = 1$, y luego realizar el estudio para datos que tengan la misma media (brillo) pero con diferentes valores del parámetro α . Entonces de la Ec. (3.10) con $r = 1$ se tiene

$$E(z) = -\frac{\gamma}{\alpha + 1} = 1 \quad (4.8)$$

y por lo tanto

$$\gamma^* = -\alpha - 1 \quad (4.9)$$

La función de densidad de probabilidad de la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma^*, L)$ queda de la forma:

$$f_{\mathcal{G}_I^0}^*(z) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{(-\alpha - 1)^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} \cdot \frac{z^{L-1}}{(-\alpha - 1 + zL)^{L-\alpha}}. \quad (4.10)$$

Ahora, calculando la distancia geodésica entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma^*, L)$ como una función de α , haciendo $\theta = \alpha$ y sustituyendo la Ec. (4.10) en las ecuaciones (4.1) y (4.5), se obtiene:

$$g(\alpha) = -E \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \ln f_{\mathcal{G}_I^0}^*(Z | \alpha) \right] \quad (4.11)$$

$$s(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [g(\alpha)]^{1/2} d\alpha \right|. \quad (4.12)$$

Calculando $g(\alpha)$ de la Ec. (4.11) se toma el logaritmo a ambos lados de la Ec. (4.10) y se calcula la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\alpha^2} \ln f_{\mathcal{G}_I^0}^*(z | \alpha) = & \\ & \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)^2} + \frac{2}{-\alpha - 1} \\ & - \psi^{(1)}(-\alpha) + \psi^{(1)}(L - \alpha) \\ & + \frac{L - \alpha}{(-\alpha + Lz - 1)^2} - \frac{2}{-\alpha + Lz - 1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-E \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \ln f_{\mathcal{G}_I^0}^*(z|\alpha) \right] = & \\
& - \int_0^\infty \left[\frac{\alpha}{(-\alpha-1)^2} + \frac{2}{-\alpha-1} \right. \\
& - \psi^{(1)}(-\alpha) + \psi^{(1)}(L-\alpha) \\
& \left. + \frac{L-\alpha}{(-\alpha+Lz-1)^2} - \frac{2}{-\alpha+Lz-1} \right] \cdot f_{\mathcal{G}_I^0}^*(z|\alpha) dz
\end{aligned}$$

reemplazando en la Ec. (4.12), la distancia geodésica entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma^*, L)$ está dada por:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{H(\alpha) - \psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha)} d\alpha \right| \quad (4.13)$$

donde

$$H(\alpha) = - \frac{-4\alpha^3 + 4\alpha - (\alpha+2)L^2 + [\alpha(5\alpha+4) - 2]L}{(\alpha+1)^2(L-\alpha)(L-\alpha+1)} \quad (4.14)$$

donde $\psi^{(1)}(\cdot)$ es la función *trigamma*.

Se puede observar a partir de la Ec. (4.14) que si $\alpha = -1$ entonces $H(\alpha) \rightarrow \infty$, por lo tanto la distancia geodésica en ese punto presenta una singularidad para este caso.

Para obtener la distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma^*, L)$ se resuelve la Ec. (4.13) numéricamente usando un método de integración adaptativo, con una precisión de 10^{-4} , provisto por el lenguaje R versión 3.3 [44].

Con el fin de evaluar el poder discriminatorio entre regiones de imágenes SAR de la Ec. (4.13) se lleva a cabo un ensayo en donde se calcula la distancia geodésica entre dos distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1^*, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$, tomando dos conjuntos de valores para el parámetro de la rugosidad: $\alpha_1 = -8$, con $\alpha_2 \in [-14, -2]$, y $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3, 5, -1, 5]$. Estos valores cubren regiones extremadamente texturadas, muy texturadas y sin textura, modeladas para tres relaciones señal-ruido, variando $L = \{1, 5, 10\}$.

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran la curva que forma la distancia geodésica entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1^*, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para los valores de los parámetros antes mencionados. Es posible observar que, cuanto menor es la diferencia entre α_1 y α_2 , también menor es el valor de $s(\alpha_1, \alpha_2)$, lo cual indica que es posible utilizar esta distancia para discriminar regiones con diferente rugosidad.

Además, se observa que a medida que el número de *looks* L aumenta, la distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ disminuye, para los mismos valores de α_1 y α_2 . La curva es más

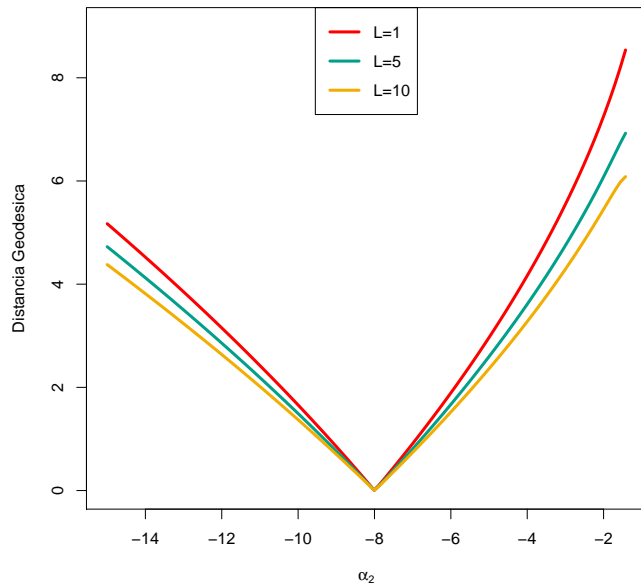


Figura 4.3: Distancia geodésica entre $\mathcal{G}_I^0(-8, 7, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para diferentes valores de L .

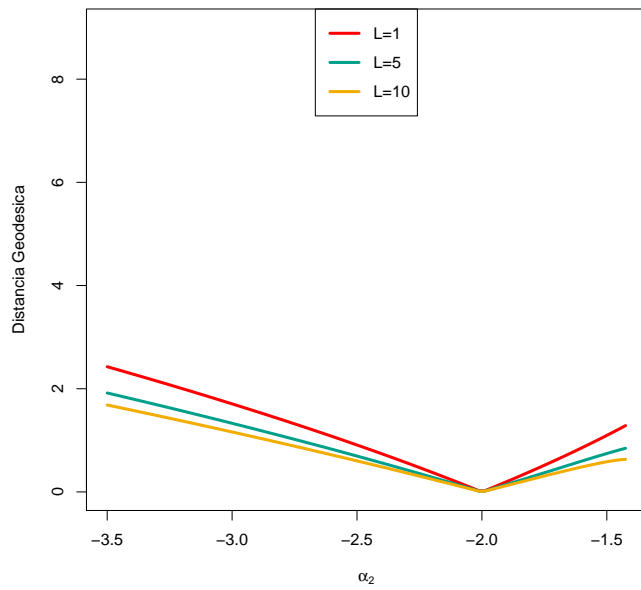


Figura 4.4: Distancia geodésica entre $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para diferentes valores de L .

pronunciada (mayor pendiente) para los valores mayores de α . Esto se debe a que para valores pequeños de L , el parámetro de textura α tiene una mayor influencia en el modelo, causando una alta variabilidad.

4.5. Forma General de la Distancia Geodésica para la Distribución \mathcal{G}_I^0

En esta sección se calcula la forma general de la distancia geodésica para modelos $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$. La distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$ esta dada por la Ec. (3.9). Se determina la matriz de información de Fisher dada por la Ec. (4.1).

Se toma el Logaritmo a ambos lados de la Ec. (3.9)

$$\begin{aligned} \log[f_{\mathcal{G}_I^0}(z)] = & \\ & -\alpha \log(\gamma) - \log \Gamma(-\alpha) + \log \Gamma(L - \alpha) \\ & - (L - \alpha) \log(\gamma + Lz) + (L - 1)(\log z) + L(\log L) - \log \Gamma(L) \end{aligned}$$

se calculan las segundas derivadas parciales con respecto a α y γ , y las derivadas parciales cruzadas

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^2 \log[f_{\mathcal{G}_I^0}(z)] &= \psi^{(1)}(L - \alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) \\ \partial_\gamma^2 \log[f_{\mathcal{G}_I^0}(z)] &= \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{L - \alpha}{(\gamma + Lz)^2} \\ \partial_\gamma \partial_\alpha \log[f_{\mathcal{G}_I^0}(z)] &= \frac{1}{\gamma + Lz} - \frac{1}{\gamma} \\ \partial_\alpha \partial_\gamma \log[f_{\mathcal{G}_I^0}(z)] &= \frac{1}{\gamma + Lz} - \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

donde $\psi^{(1)}(\cdot)$ es la función *trigamma*. Luego se obtiene la esperanza y se construye la matriz de información de Fisher, obteniendo:

$$g(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(-\alpha) - \psi^{(1)}(L - \alpha) & \frac{L}{L\gamma - \alpha\gamma} \\ \frac{L}{L\gamma - \alpha\gamma} & -\frac{L\alpha}{(L - \alpha + 1)\gamma^2} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

La distancia geodésica se obtiene a partir de la métrica cuadrática diferencial positiva dada por la Ec. (4.2) en este caso $d = 2$, tomando $\theta_1 = \alpha$ y $\theta_2 = \gamma \Rightarrow d\theta_1 = d\alpha$ y $d\theta_2 = d\gamma$, entonces queda de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{11}(\alpha, \gamma)d\alpha^2 + (g_{12}(\alpha, \gamma) + g_{21}(\alpha, \gamma))d\alpha d\gamma + g_{22}(\alpha, \gamma)d\gamma^2 \quad (4.16)$$

donde los $g_{ij}(\alpha, \gamma)$ ($i = 1, 2, j = 1, 2$)son los elementos de la matriz de Fisher dados por la Ec. (4.15).

La ecuación (4.16) se resuelve para dos casos diferentes.

4.5.1. Distancia Geodésica para el Parámetro de Escala Conocido

Suponiendo $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma^0$:

$$ds^2 = g_{11}(\alpha, \gamma^0) d\alpha^2$$

Entonces, sustituyendo el término $g_{11}(\alpha, \gamma^0)$ de la matriz de Fisher en la Ec. (4.5), la distancia geodésica en este caso se reduce a:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\psi^{(1)}(-\alpha) - \psi^{(1)}(L - \alpha)]^{1/2} d\alpha \right|. \quad (4.17)$$

Utilizando las propiedades de la función *trigamma* se puede escribir

$$\psi^{(1)}(-\alpha) - \psi^{(1)}(L - \alpha) = \sum_{n=1}^L \frac{1}{(-\alpha + n - 1)^2} \quad (4.18)$$

La Ec. (4.18) permite resolver la Ec. (4.17) para valores específicos de L . En este trabajo se resuelve la ecuación analíticamente para $L = \{1, 2\}$ y numéricamente para $L \geq 3$.

Para $L = 1$: Haciendo $L = 1$ en (4.18) y sustituyendo en (4.17), se obtiene:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{L=1} = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right]^{1/2} d\alpha \right| = |\ln(\alpha_2) - \ln(\alpha_1)|$$

entonces:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{L=1} = \left| \ln \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right| \quad (4.19)$$

La Ec. (4.19) es la distancia geodésica entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 , cuando el parámetro de escala γ^0 es conocido y $L = 1$.

Para $L = 2$: Similarmente se hace para $L = 2$ en (4.18) y sustituyendo en la Ec. (4.17), entonces:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{L=2} = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \right]^{1/2} d\alpha \right|$$

Resolviendo esta integral:

$$s(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{L=2} = \left| \ln \left[\frac{\alpha_1^2(\alpha_2 - 1)^2(\alpha_2 R_2 - 1)((\alpha_1 - 1)R_1 + 1)}{\alpha_2^2(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_1 R_1 - 1)((\alpha_2 - 1)R_2 + 1)} \right] + \sqrt{2} \ln \left[\frac{1 + \alpha_2(R_2 - 2) - \alpha_2^2 R_2}{1 + \alpha_1(R_1 - 2) - \alpha_1^2 R_1} \right] \right| \quad (4.20)$$

con $R_1 = R(\alpha_1)$ y $R_2 = R(\alpha_2)$, donde

$$R(\alpha) = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2\alpha^2}}$$

La Ec. (4.20) es la distancia geodésica entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 , cuando γ^0 es conocido y $L = 2$.

Se evalúan las ecuaciones de las distancias geodésicas para $L = \{1, 2\}$ con los siguientes valores para el parámetro de textura: $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-14, -2]$, y $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3, 5, -1]$. Estos resultados se muestran en las Figuras 4.5 y 4.6, se puede observar un comportamiento cuasi-lineal de los mismos.

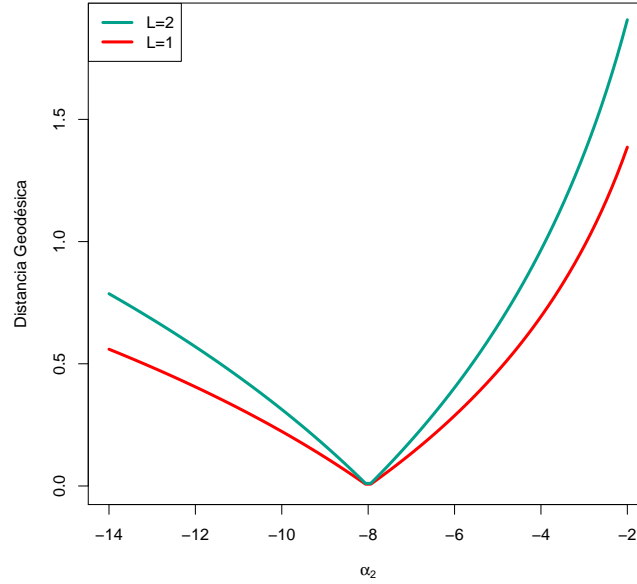


Figura 4.5: Distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-14, -2]$ y $L = \{1, 2\}$.

En este caso se observa que al aumentar L también aumentan los valores de las distancias para los mismos valores de α_1 y α_2 .

Solución Numérica de $s(\alpha_1, \alpha_2)$:

Con el fin de observar el comportamiento de las curvas para valores de L mayores a 2, se realiza el cálculo de la distancia geodésica resolviendo la Ec. (4.17) numéricamente para $L = \{3, 6, 8\}$, con los mismos valores del parámetro α .

Se observa en las Figuras resultantes 4.7 y 4.8, que mantiene un comportamiento similar al que tienen las soluciones analíticas obtenidas para $L = \{1, 2\}$. Estas

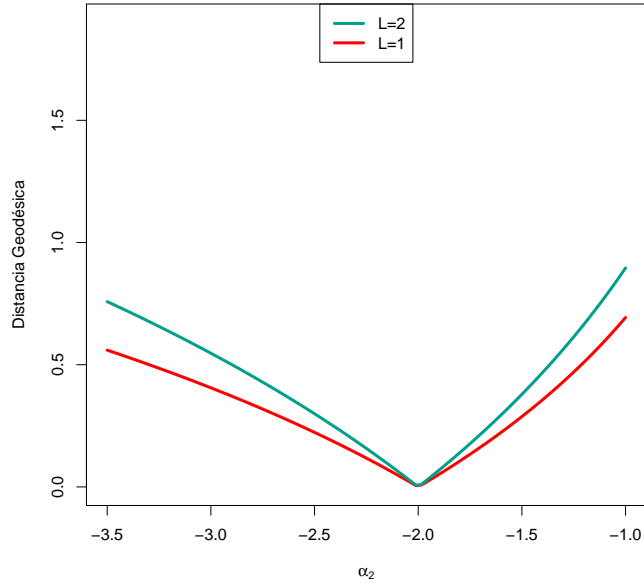


Figura 4.6: Distancia geodésica $s(\alpha_1, \alpha_2)$ entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$ $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3,5, -1]$.

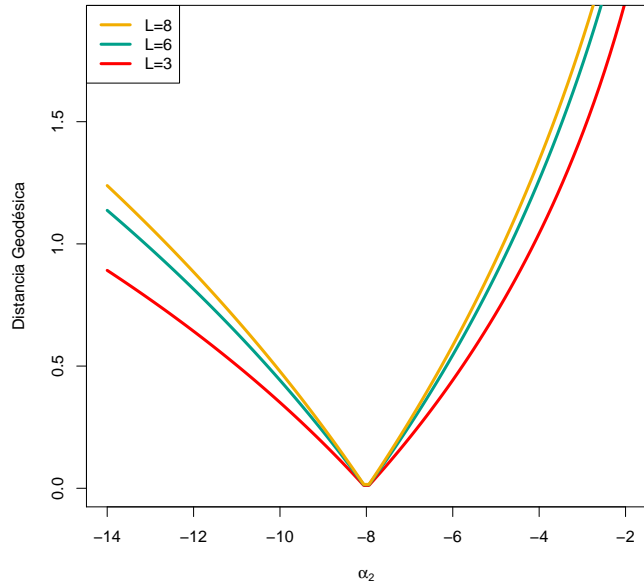


Figura 4.7: Distancia geodésica para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $s(\alpha_1, \alpha_2)$ $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-14, -2]$ y $L = \{3, 6, 8\}$.

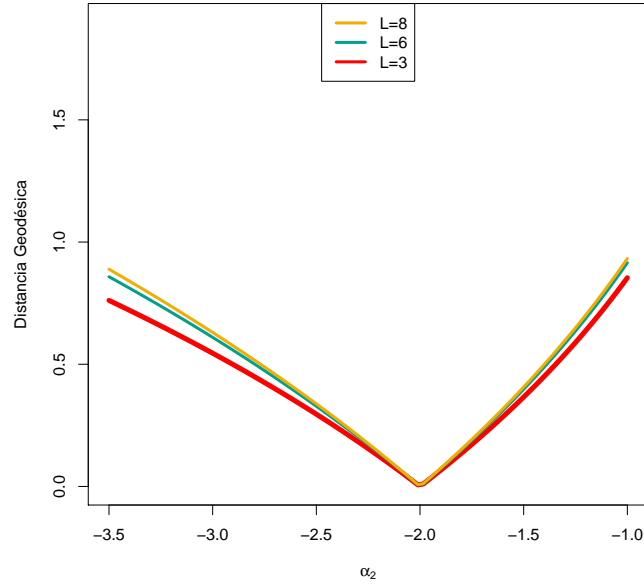


Figura 4.8: Distancia geodésica para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$, $s(\alpha, \alpha_2)$ $\alpha_1 = -2$ con $\alpha_2 \in [-3,5, -1]$. y $L = \{3, 6, 8\}$

soluciones no presentan restricciones con respecto a los posibles valores que puede tomar el parámetro de textura α .

4.5.2. Distancia Geodésica para el Parámetro de Textura Conocido

En esta sección se calcula la distancia geodésica para el caso del parámetro de textura conocido α^0 , entonces de acuerdo al procedimiento de la sección anterior la Ec. (4.16) se reduce a:

$$ds^2 = g_{22}(\alpha^0, \gamma)d\gamma^2$$

sustituyendo $g_{22}(\alpha^0, \gamma)$ de la matriz de Fisher, la distancia geodésica en este caso resulta:

$$s(\gamma_1, \gamma_2) = \left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{-\frac{\alpha^0 L}{(-\alpha^0 + L + 1)\gamma^2}} d\gamma \right| \quad (4.21)$$

Resolviendo la integral, obtenemos:

$$s(\gamma_1, \gamma_2) = \left| \sqrt{-\frac{\alpha^0 L}{-\alpha^0 + L + 1}} (\ln(\gamma_1) - \ln(\gamma_2)) \right|$$

la cual se puede escribir de la siguiente de la manera:

$$s(\gamma_1, \gamma_2) = \left| \sqrt{-\frac{\alpha^0 L}{-\alpha^0 + L + 1} \ln\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)} \right| \quad (4.22)$$

La Ec. (4.22) es la distancia geodésica entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma_1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma_2, L)$, cuando del parámetro de textura α^0 es conocido.

La Figura 4.9 muestra las distancias geodésicas entre modelos $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma, L)$ con $L = \{1, 2\}$, $\alpha^0 = -2$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 \in [1, 10]$. Y la Figura 4.10 muestra las distancias geodésicas entre modelos con $L = \{1, 2\}$, $\alpha^0 = -2$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 \in [1, 20]$. Se destaca que presentan un comportamiento similar al caso en el que el parámetro de escala es conocido, pero de manera invertida, como si se reflejaran en un espejo con respecto al punto donde la distancia se anula.

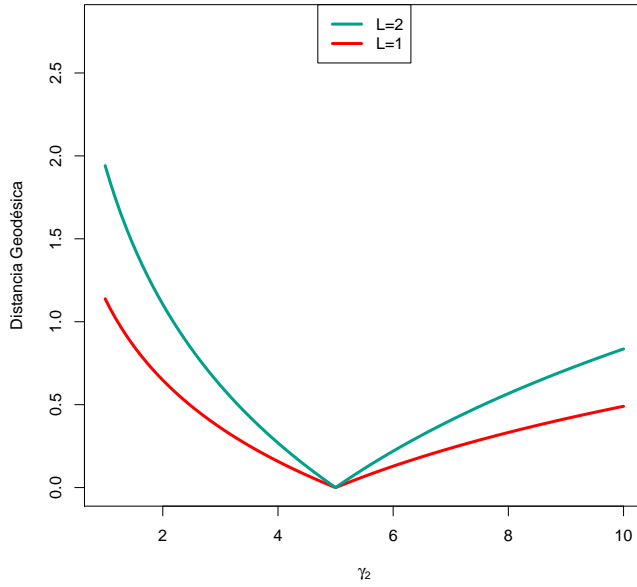


Figura 4.9: Distancia geodésica para distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma, L)$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 \in [1, 10]$, $\alpha^0 = -2$ y $L = \{1, 2\}$.

4.6. Conclusiones para este Capítulo

Se derivan las fórmulas para la distancia geodésica de la distribución \mathcal{G}_I^0 , obteniendo soluciones analíticas para algunos de los casos planteados y en otros casos se plantea la ecuación y se resuelve numéricamente. Así mismo, se realiza el estudio del comportamiento de cada una de las fórmulas halladas de manera gráfica. En todas

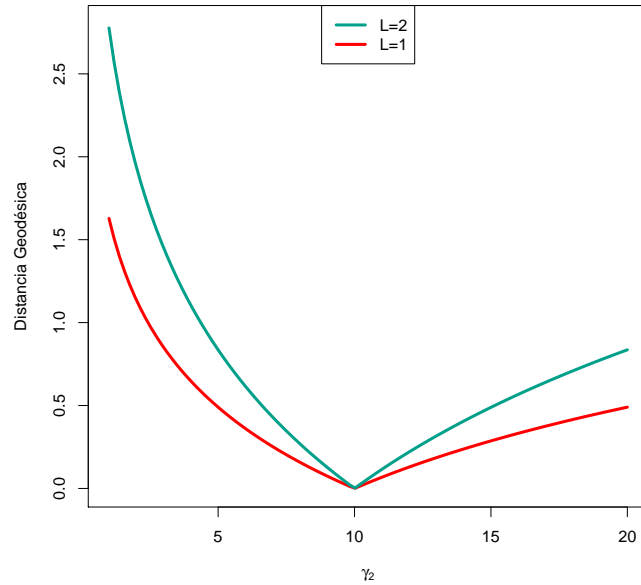


Figura 4.10: Distancia geodésica para distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha^0, \gamma, L)$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 \in [1, 20]$, $\alpha^0 = -2$ y $L = \{1, 2\}$.

las situaciones donde se determina el valor de $s(\alpha_1, \alpha_2)$, es posible observar que, cuanto menor es la diferencia entre α_1 y α_2 , menor es el valor de $s(\alpha_1, \alpha_2)$. Teniendo el mismo comportamiento para el caso en el que se determina la distancia $s(\gamma_1, \gamma_2)$.

Las curvas en todos los casos en los que se estima $s(\alpha_1, \alpha_2)$ son más pronunciadas para valores mayores de α , esto se debe a que el modelo \mathcal{G}_I^0 es más sensible para regiones extremadamente texturadas.

Estas expresiones no estaban previamente disponibles en la literatura. Este nuevo enfoque para medir la separabilidad entre las regiones de datos con ruido *speckle* ofrece una herramienta poderosa para una serie de problemas de procesamiento de imágenes, tales como la detección de puntos de borde y discriminación de regiones.

Capítulo 5

Distancia Triangular y comparación con la Distancia Geodésica entre Distribuciones \mathcal{G}_I^0

La teoría de información ofrece métodos para medir la diferencia entre dos distribuciones de probabilidad, llamados distancias estocásticas. Una familia importante de distancias estocásticas se deriva de los resultados de Salicrú et al. [49], y entre ellas la Distancia Triangular (DT).

Gambini et al. [24] estudiaron el comportamiento de varias distancias $(h-\phi)$ y concluyeron que esta distancia supera a otras de la misma clase de distancias $(h-\phi)$ (Hellinger, Bhattacharyya y Rényi) en una gran variedad de situaciones bajo la distribución \mathcal{G}_I^0 .

Estas distancias fueron estudiadas por Nascimento et al. [39], quien llegó a la conclusión de que no es posible encontrar una expresión analítica para la distribución \mathcal{G}_I^0 , lo que es una ventaja considerable para la distancia geodésica en términos de coste computacional.

La DT y la DG se aplican a las mismas regiones, pero no son comparables. Entonces, se transforman estas distancias en un estadístico con la misma distribución asintótica, con esto, se vuelven comparables, mediante la prueba de hipótesis [49].

Por estas razones, con el fin de comparar los resultados de la aplicación de la DG con otro método en el contexto de la detección de bordes y la discriminación de regiones, se utiliza la Distancia Triangular.

5.1. Distancia Triangular

De los resultados de Salicrú et al. [49] se tiene la siguiente definición:

Definición 5.1 Sean X y Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, cuyas densidades son $f_X(x; \theta_1)$ y $f_Y(x; \theta_2)$, respectivamente, donde θ_1 y θ_2 son los vectores de parámetros. Asumiendo que ambas densidades comparten un soporte común $I \subset \mathbb{R}$, la divergencia $(h-\phi)$, entre f_X y f_Y , esta definida por:

$$D_\phi^h(X, Y) = h \left(\int_I \phi \left(\frac{f_X(x; \theta_1)}{f_Y(x; \theta_2)} \right) f_Y(x; \theta_2) dx \right) \quad (5.1)$$

donde $\phi : (0, \infty) \rightarrow [0, \rightarrow \infty)$ es una función convexa, $h : (0, \infty) \rightarrow [0, \rightarrow \infty)$, es una función estrictamente creciente con $h(0) = 0$, y a las formas indeterminadas se les asigna el valor cero.

Dependiendo de la cuidadosa selección de las funciones h y ϕ , se obtienen algunas de las conocidas medidas de divergencia, como las de Hellinger, Bhattacharyya y Rényi.

Estas divergencias no se pueden considerar como una métrica [8], ya que la desigualdad triangular no siempre se cumple y muchas de ellas no son simétricas. Esto se resuelve definiendo la medida:

$$d_\phi^h(X, Y) = \frac{D_\phi^h(X, Y) + D_\phi^h(Y, X)}{2} \quad (5.2)$$

entonces, una vez simetrizadas a las divergencias se les llama *distancias*.

Se define la distancia triangular (DT) [24, 39, 49]:

Definición 5.2 Sea Ω un espacio medible. Sean f_X y f_Y las densidades de las variables aleatorias X, Y con respecto a un soporte I ; La distancia triangular $d_T(f_X, f_Y)$ entre ellas esta dada por:

$$d_T(f_X, f_Y) = \int_I \frac{(f_X(x) - f_Y(x))^2}{f_X(x) + f_Y(x)} dx. \quad (5.3)$$

Cuando se considera la distancia entre las mismas distribuciones, lo importante son sus parámetros, se resuelve la Ec. (5.3) de la DT entre distribuciones numéricamente, usando un método de integración adaptativo, con una precisión de 10^{-4} , provisto por el lenguaje R versión 3.3. [44], para diferentes valores de los parámetros de la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$.

La Figura 5.1 muestran la curva que forma la distancia triangular entre distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1^*, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para los siguientes valores: $\alpha_1 = -3$,

$\alpha_2 \in [-4, -2]$ y para que la muestra tenga una media unitaria se toma $\gamma^* = -\alpha - 1$ (ver sección 4.4.1), modeladas para relaciones señal-ruido variando $L = \{1, 2, 4\}$.

La Figura 5.2, muestra la DT para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-10, -6]$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y número de *looks* $L = \{1, 2, 3\}$. De esta forma se considera una situación más general de la variación de los parámetros de la distribución \mathcal{G}_I^0 .

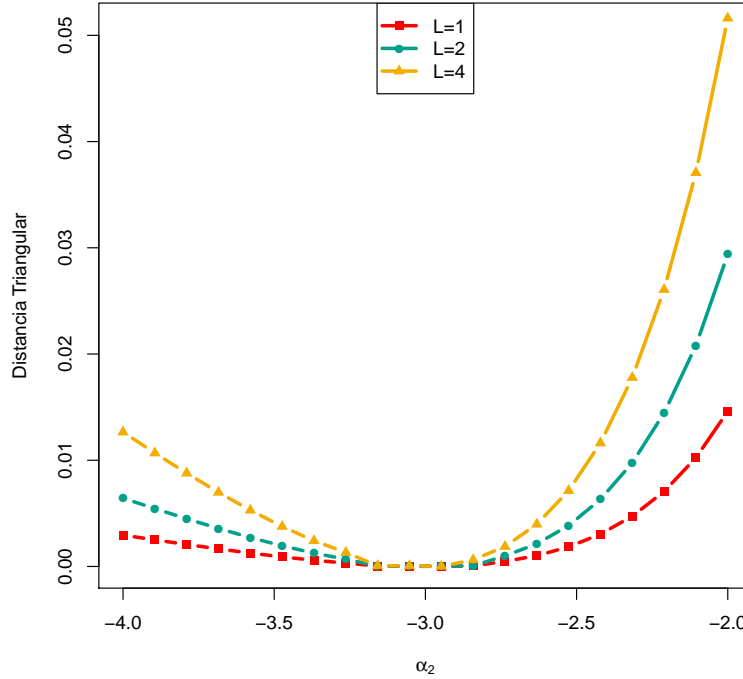


Figura 5.1: Distancia triangular entre $\mathcal{G}_I^0(-3, 2, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$ para $\alpha_2 \in [-4, -2]$ y $L = \{1, 2, 4\}$.

Es posible observar que, a medida que la diferencia entre α_1 y α_2 es menor, también menor es el valor de la DT, lo cual indica que es posible utilizar esta distancia para discriminar regiones con diferente rugosidad en imágenes SAR. También se puede observar en ambas figuras que a medida que aumenta el número de *looks* la DT también aumenta.

5.2. Prueba de Hipótesis

La distancia geodésica es de gran utilidad en la construcción de pruebas de hipótesis estadísticas, en problemas de clasificación [32], el objetivo es determinar si θ_1 y θ_2 del mismo modelo paramétrico, en este caso el contraste de hipótesis se

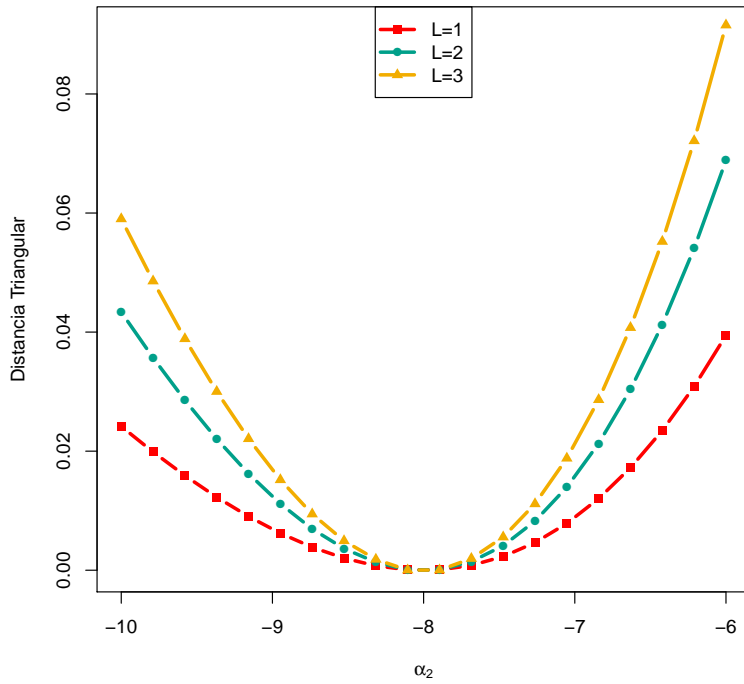


Figura 5.2: Distancia triangular para la distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, $\alpha_1 = -8$ con $\alpha_2 \in [-10, -6]$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y $L = \{1, 2, 3\}$.

plantea de la siguiente manera

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

Entonces se construye el test de hipótesis de la siguiente manera [59]:

Sea una función de densidad $f(z | \theta)$, donde $\theta \in \mathfrak{R}^M$ es el vector de parámetros y las hipótesis:

$$H_0 : \tau(\theta_0) = 0 \qquad H_1 : \tau(\theta_0) \neq 0$$

para una función suave τ

Se asocia la hipótesis nula H_0 al subconjunto de parámetros $\Theta_H \in \Theta$ definido:

$$\Theta_H = \{\theta_0 \in \Theta : \tau(\theta_0) = 0\}.$$

Dada una muestra de tamaño n la distancia geodésica entre el parámetro $\theta_0 \in \Theta_H$ y $\hat{\theta}$, parámetro estimado por el método de máxima verosimilitud (MV), se tiene que:

$$s_H(\hat{\theta}, \theta_0) = \inf \left[s(\hat{\theta}, \theta) : \theta \in \Theta \right]$$

donde el ínfimo \inf siempre existe ya que Θ_H es un conjunto no vacío y $s(\widehat{\theta}, \theta_0)$ es positiva. Y dado un nivel de significancia η se define la región crítica de la prueba de hipótesis:

$$W = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_+^n : s(\widehat{\theta}, \theta_0) > C \right\} \quad (5.4)$$

donde (z_1, z_2, \dots, z_n) es la muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) y C es una constante que depende del nivel de significancia η .

5.3. Distribución Asintótica de la Distancia Geodésica

En los artículos [2, 38] los autores demuestran que la distancia geodésica entre distribuciones de probabilidad tiene la forma:

$$s(\theta_1, \theta_2) = |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \quad (5.5)$$

donde $\varphi(\theta)$ es una función que en muchos casos no tiene una formula cerrada [38].

Y en general, no es posible obtener una distribución exacta del estadístico $s(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$, de manera tal, que se debe utilizar su distribución asintótica [38]. Para esto, se considera la función:

$$s^*(\theta_1, \theta_2) = \phi(|\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)|^2) \quad (5.6)$$

donde ϕ es una función creciente con $\phi(0) = 0$. La hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_0$ se rechaza si o $s^*(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ es mayor que un valor crítico.

Ahora, si $f \in C^i(B)$, es una función real con derivadas parciales continuas de i -ésimo orden en el conjunto B , Menendez et. al. [38] demostraron el siguiente teorema:

Teorema 5.1 *Sea $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ los estimados de MV, de θ_1 y θ_2 , basado en muestras aleatorias independientes de tamaño n y m , respectivamente, donde $m/(m+n) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \lambda \in (0, 1)$. Asumiendo las condiciones de regularidad y suponiendo consistencia del estimador de MV:*

(a) *Si se cumplen las condiciones establecidas en [38].*

$$\left(\frac{nm}{n+m} \right)^{1/2} \left[s^*(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2) - s(\theta_1, \theta_2) \right] \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} N(0, \sigma)^2$$

(b) *Si $\theta_1 = \theta_2$, $\phi'(0) > 0$, $\phi \in C^2[0, \infty)$ y $\varphi \in C^2(\Theta)$, entonces:*

$$\frac{nm}{n+m} \frac{s^*(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)}{\phi'(0)} \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{D} \chi_M^2 \quad (5.7)$$

donde:

“ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ ” denota convergencia en distribución [39, 49].

M es igual a la dimensión del espacio de parámetros [32, 38].

Se tiene del Teorema 5.1, que la distribución asintótica de $s^*(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ es proporcional a una distribución χ^2 cuando $\theta \in \mathbb{R}$. Y el estadístico para la distancia geodésica se puede construir de la manera siguiente:

$$S_{\text{DG}}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{mn}{m+n} s^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (5.8)$$

donde:

$S_{\text{DG}}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$: es el estadístico para la distancia geodésica.

n, m : son los tamaños de las muestras aleatorias.

$s(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$: es la distancia geodésica entre $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.

$\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son los estimadores de MV de θ_1 y θ_2 .

El estadístico de prueba dado por la Ec. (5.8), se utiliza en este trabajo para comparar la DG con la distancia triangular.

5.4. Distribución Asintótica de la Distancia Triangular

En el artículo de Salicrú et al. [49], se establecen varias propiedades de convergencia de las divergencias ($h-\phi$). Bajo condiciones de regularidad dadas en [49], si $\theta_1 = \theta_2$ entonces, cuando $m, n \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$\frac{2mn}{m+n} \frac{D_\phi^h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{h'(0)\phi''(1)} \quad (5.9)$$

es asintóticamente proporcional a una distribución Chi-cuadrado con M grados de libertad donde $\hat{\theta}_1 = (\hat{\theta}_{11}, \dots, \hat{\theta}_{1M})$ y $\hat{\theta}_2 = (\hat{\theta}_{21}, \dots, \hat{\theta}_{2M})$ son los estimadores de MV de θ_1 y θ_2 , de muestras independientes de tamaños m y n , respectivamente [49].

De esta manera, cuando se considera la definición de distancias en términos de las funciones h y ϕ , y aplicando los resultados de la convergencia de las medidas ($h-\phi$) a la distribución χ_M^2 según [49], se demuestra el siguiente Lema:

Lema 5.1 *Manteniendo las condiciones de regularidad propuestas en [49]. Si $\frac{m}{m+n} \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} \lambda \in (0, 1)$, entonces*

$$\frac{2mn}{m+n} \frac{D_\phi^h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{h'(0)\phi''(1)} \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_M^2 \quad (5.10)$$

donde “ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ ” denota convergencia en distribución [39, 49].

Entonces se puede construir a partir del Lema 5.1, la prueba de hipótesis estadística para la hipótesis nula $\theta_1 = \theta_2$. Con el estadístico de prueba de la siguiente manera:

$$S_\phi^h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{2mnv}{m+n} D_\phi^h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (5.11)$$

donde $v = \frac{1}{h'(0)\phi''(1)}$ es una constante [39] y para el caso de la DT $v = 1$.

El nivel de rechazo de la hipótesis nula se establece con la proposición siguiente [39]:

Proposición 5.1 *Si m y n son valores grandes y $S_\phi^h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = s$, entonces la hipótesis nula $\theta_1 = \theta_2$ se puede rechazar al nivel de confianza η si $Pr(\chi_M^2 > s) \leq \eta$.*

5.5. Prueba de Hipótesis de las Distancias Geodésica y Triangular entre Distribuciones

\mathcal{G}_I^0

Hasta ahora, se ha hablado de dos distancias entre modelos \mathcal{G}_I^0 : la DG y la DT. Como tales, no son comparables y no existe interpretación semántica posible de sus valores. Se transforman estas distancias en estadísticos, con la misma distribución asintótica [38, 39, 49], de manera tal que se vuelven comparables y una herramienta para el test de hipótesis.

Se consideran dos muestras aleatorias $X = (x_1, \dots, x_m)$ y $Y = (y_1, \dots, y_n)$ i.i.d. con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1, L_1)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2, L_2)$, respectivamente, con γ y L conocidos, y estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$. Se calculan los estadísticos $S_{DG}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ y $S_{DT}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ dados por:

$$S_{DG}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = \frac{mn}{m+n} s^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2), \quad (5.12)$$

$$S_{DT}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = \frac{2mn}{m+n} d_T(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2). \quad (5.13)$$

Bajo condiciones de regularidad leves (ver [38, 49]), si la hipótesis nula $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$ es válida entonces estos dos estadísticos obedecen una distribución χ_1^2 si $m(m+n)^{-1} \rightarrow \lambda \in (0, 1)$ cuando $m, n \rightarrow \infty$.

Se puede observar que la hipótesis nula es equivalente a probar la hipótesis $s(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = 0$ y $d_T(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = 0$.

Con el objetivo de estudiar la distribución subyacente de los estadísticos, se lleva a cabo una simulación de Monte Carlo de la siguiente manera:

- i.-* Se generan dos muestras del mismo tamaño, $n \in [100, 150, 200, \dots, 1000]$, con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$ para $\alpha = \{-1, 5, -2\}$ y $L = \{1, 2\}$.
- ii.-* Se estima el parámetro α por el método de Máxima Verosimilitud utilizando las muestras.
- iii.-* Se calculan los estadísticos dados por las ecuaciones (5.12) y (5.13).
- iv.-* Se calcula el número de casos para los cuales el estadístico de prueba produce valores mayores que el del valor crítico.
- v.-* Se realizan 5000 replicaciones de este proceso.

Con los datos obtenidos en el proceso anterior se realiza el histograma utilizando el método de Freedman-Diaconis. Luego se ajusta una distribución teórica a la distribución subyacente que provee el histograma, utilizando el paquete provisto por el lenguaje R `fitdistrplus` [15]. El resultado muestra que el mejor ajuste se produce con una distribución $\Gamma(v, \lambda)$, cuyos parámetros se calculan con el método MV. Además se compara con la distribución χ_1^2 .

Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran los histogramas de S_{DG} y S_{DT} respectivamente, para $n = 100$, $\alpha = -1, 5$, $\gamma = 1$ y $L = 1$, la curva Γ de ajuste calculada y la curva de la distribución χ_1^2 . Puede observarse que la distribución para muestras finitas se acerca a la distribución asintótica.

5.5.1. Cálculo del p -valor

Nos interesa conocer el comportamiento de los estadísticos (5.13) y (5.12) para muestras de tamaño finito. Para evaluar esto se estima el p -valor para un nivel de confianza $\eta = 0, 05$, de la siguiente manera:

- i.-* Se generan dos muestras Z_1 y Z_2 con la misma distribución y el mismo tamaño.

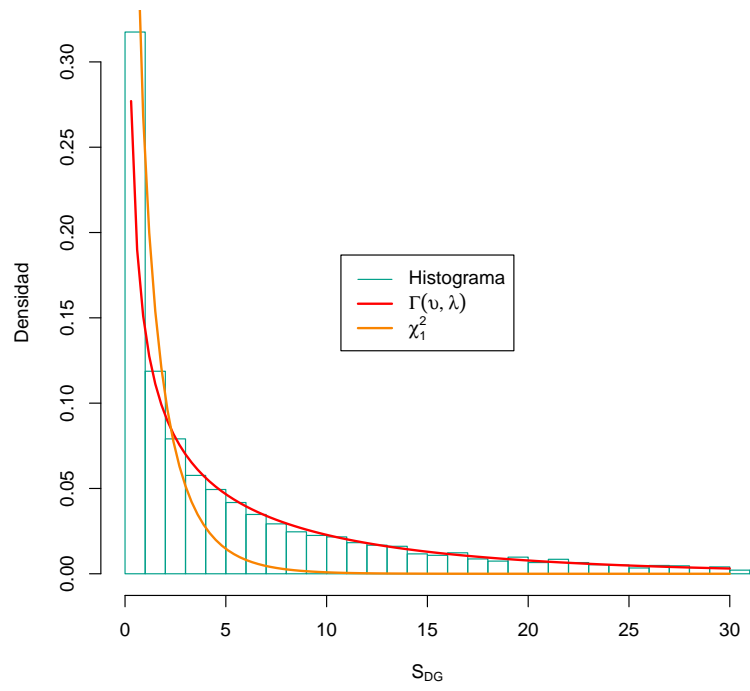


Figura 5.3: Histograma de S_{DG} para $n = 100$, $\alpha = -1, 5$, $\gamma = 1$ y $L = 1$.

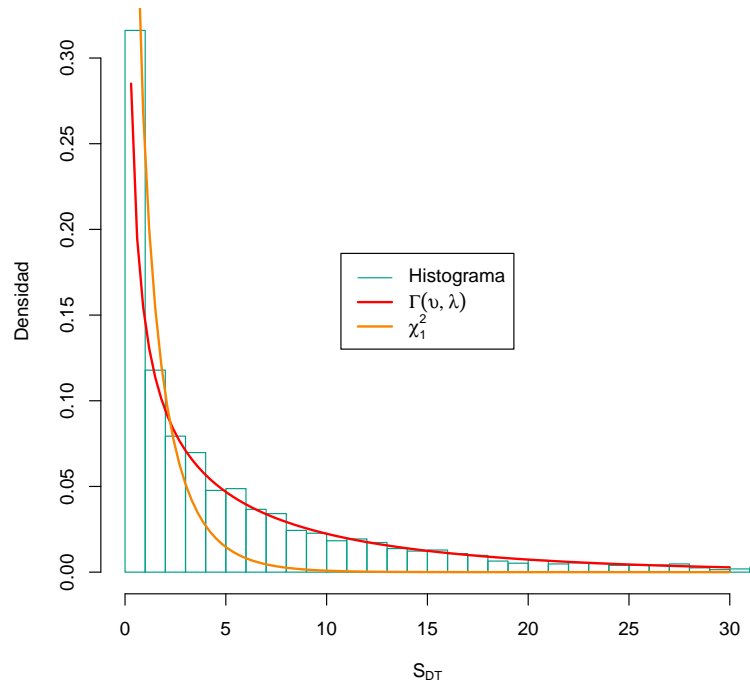


Figura 5.4: Histograma de S_{DT} para $n = 100$, $\alpha = -1, 5$, $\gamma = 1$ y $L = 1$.

- ii.*- Se calcula el valor crítico para $\eta = 0,05$ de la distribución χ_1^2 , el cual es:
 $V_c = 3,841459$.
- iii.*- Se calcula el número de casos para los cuales el estadístico de prueba produce valores mayores que el valor crítico.
- iv.*- Se repite este proceso 5000 veces para diferentes tamaños de muestra.

Los resultados se muestran en la Figura 5.5, donde puede observarse que ambas pruebas tienden a rechazar la hipótesis nula menos de lo esperado, ya que los p -valores empíricos son más grandes que los del nivel de significancia del test, $\eta = 0,05$.

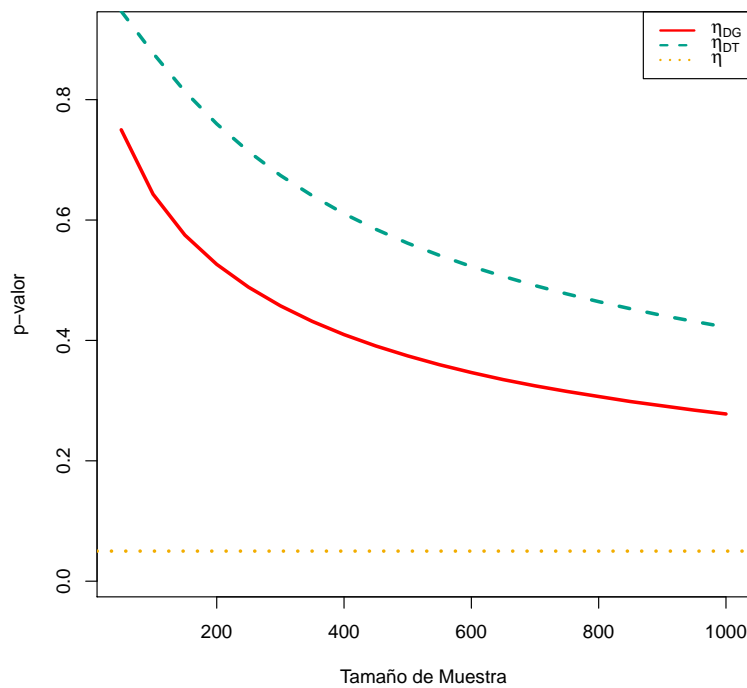


Figura 5.5: p -valores para diferentes tamaños de muestra.

El estadístico basado en la DG, S_{DG} converge más rápido que el que se basa en la DT al valor $\eta = 0,05$.

5.6. Conclusiones para este Capítulo

Se define la distancia triangular, su distribución asintótica, así como el estadístico de prueba en función de la distribución \mathcal{G}_T^0 tanto como para la DT como para la DG.

Se realiza un estudio gráfico de la DT para dos situaciones prácticas. En la primera situación se calcula la DT para el caso en que las muestras tienen media unitaria, y se observa que al aumentar el número de *looks* L , aumenta la DT. Hay que resaltar que este comportamiento es opuesto al que presenta la DG para este mismo caso, en el cual, la DG disminuye a medida que aumenta L . Luego se calcula la DT para el caso general y se observa que tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior y que además, en este caso coincide con el comportamiento de la DG.

Como la DT y la DG no son comparables, Se propone una prueba de hipótesis y un estadístico para poder comparar su comportamiento en distintas situaciones. Esto muestra el potencial de la DG como estadístico de prueba para evaluar y estudiar datos provenientes de imágenes SAR.

Capítulo 6

Detección de Bordes en Imágenes SAR Sintéticas utilizando la Distancia Geodésica

La interpretación automática de imágenes SAR es un reto, ya que tiene múltiples aplicaciones. Uno de los temas más importantes es la discriminación automática de diferentes regiones. El problema de comparar dos o más muestras usando distancias o divergencias, prevalece en el procesamiento y análisis de imágenes. Varios autores emplean medidas de la teoría de la información como contraste entre muestras en la clasificación [29, 52], detección de bordes [21, 39, 40] y despeckling [54] pero, la distancia geodésica (DG) aún no había sido utilizada con este fin.

En los capítulos anteriores de esta tesis se calculó la DG para la distribución \mathcal{G}_I^0 , para tres casos específicos, obteniendo una forma cerrada para algunas condiciones de los parámetros en dos de los casos, derivando las distancias geodésicas entre los modelos que describen varias situaciones prácticas, suponiendo el número de *looks* conocido, para una esperanza unitaria, para texturas iguales y diferentes, y para valores de escala iguales y diferentes. Esta nueva herramienta se aplica en este capítulo a problemas de detección de bordes en imágenes sintéticas.

Además, con el fin de mostrar las ventajas de utilizar la distancia geodésica, se llevan a cabo varios experimentos y una comparación con las distancias estocásticas, específicamente con la distancia triangular (DT), en vista de que, Gambini et al. [24] llegaron a la conclusión de que esta distancia resulta más precisa que otras de la misma clase de distancias (h - ϕ) (Hellinger, Bhattacharyya y Rényi) en una variedad de situaciones bajo la distribución \mathcal{G}_I^0 .

6.1. La Dificultad en la Detección de Puntos de Borde en Imágenes SAR

Discriminar objetivos por su rugosidad es una tarea difícil cuando ésta es la única diferencia entre ellos, tal como se presenta en las Figuras 6.1 y 6.2. La Figura 6.1 muestra las curvas de densidad de probabilidad de la distribución \mathcal{G}_I^0 para diferentes valores de α y para los mismos valores de escala γ y número de *looks*, y la Figura 6.2 muestra los datos generados con estos modelos. Se puede observar en ambas figuras que las densidades y los datos son similares y, por lo tanto, las regiones son difíciles de distinguir.

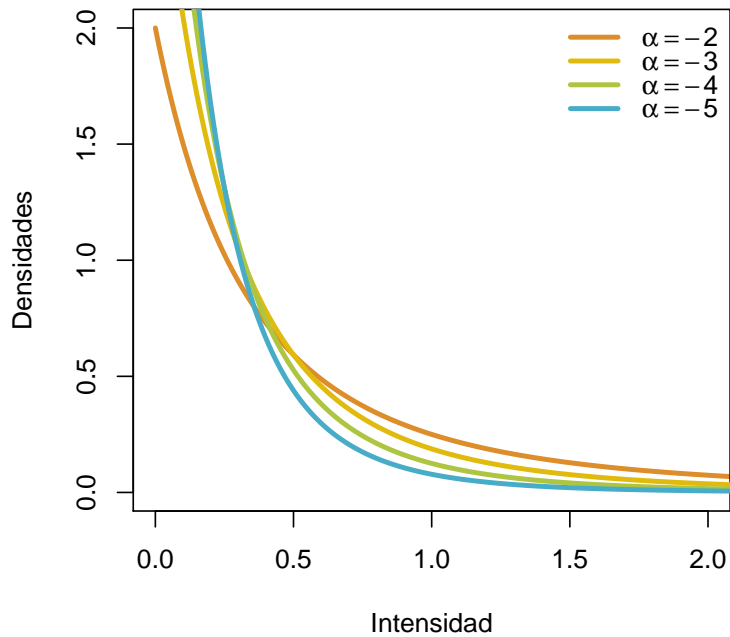


Figura 6.1: Densidades de distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$, con diferentes valores de α

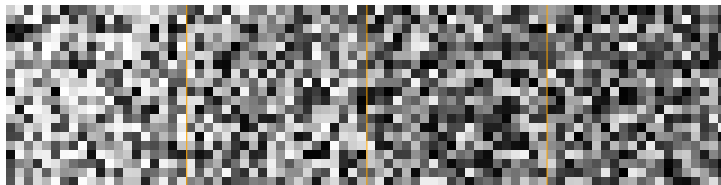


Figura 6.2: Datos de las distribuciones $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$, con $\alpha \in \{-2, -3, -4, -5\}$

Para discriminar dos regiones diferentes dentro de una imagen SAR, se lleva a cabo una serie de pruebas con datos SAR simulados. Se genera una imagen SAR sintética con dos regiones de distinto grado de rugosidad. En primer lugar se aplica al caso específico de la DG entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 cuando $E(z) = 1$ para diferentes valores de L . En segundo lugar utilizando las ecuaciones de la DG cuando el parámetro de escala es conocido para $L = \{1, 2\}$, que son las fórmulas obtenidas de forma cerrada. Este segundo cálculo se realiza en conjunto con la DT, para comparación.

6.2. Detección de Borde con la Distancia Geodésica cuando $E(z) = 1$

La DG cuando $E(z) = 1$ está dada por la Ec. (4.13), la cual se resuelve numéricamente usando un método de integración adaptativo, con una precisión de 10^{-4} , provisto por el lenguaje R.

El proceso se basa en generar una imagen de 7×100 píxeles dividida en dos, la primer mitad posee realizaciones de muestras aleatorias generadas con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1^*, L)$, y la otra mitad con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$, como muestra la Figura 6.3.

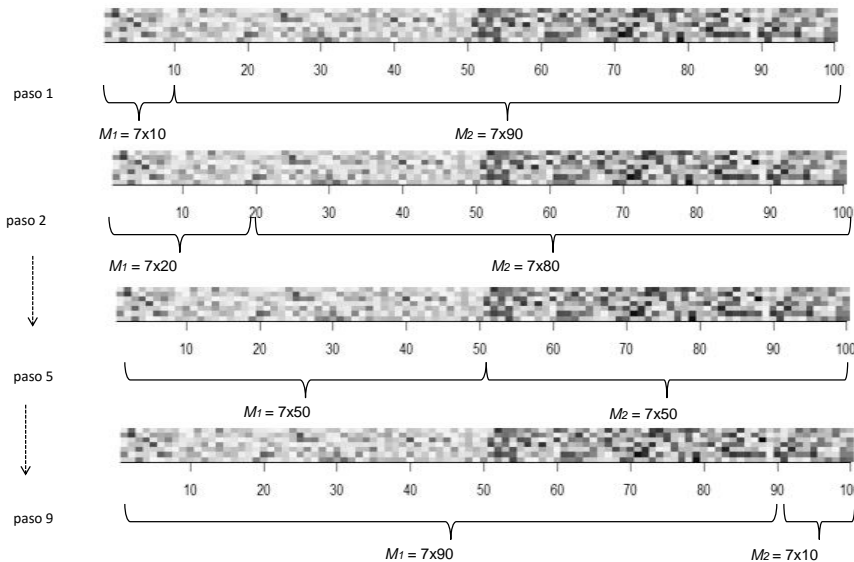


Figura 6.3: Imagen sintética generada con la distribución $\mathcal{G}_I^0(-1, 5, 0, 5, 8)$ (izquierda) y la distribución $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, 8)$ (derecha). En cada paso el parámetro α es estimado usando las muestras: M_1 y M_2 .

El método consiste en estimar α utilizando varias muestras a lo largo de la imagen sintética y calcular la DG para cada valor estimado. En cada replicación se toman dos muestras de la imagen M_1 y M_2 de tamaño $7 \times 10k$ y $7 \times (100 - 10k)$ píxeles, respectivamente, para cada $k = 1, 2, \dots, 9$, en cada paso se estima el parámetro α para las muestras M_1 y M_2 por el método de máxima verosimilitud y luego se calcula la DG entre ese par de muestras. A continuación, se determina la posición del máximo de la DG calculada. Esta posición estima el punto de transición que es el píxel que divide las regiones. Todo este proceso se realiza para 200 replicaciones. El método se esboza en el Algoritmo 1 y la Figura 6.3 ilustra el proceso.

Algoritmo 1 Discriminación de Región a través de la maximización de la distancia geodésica

- 1: Generar una imagen de 7×50 con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1^*, L)$
- 2: Generar una imagen de 7×50 con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2^*, L)$
- 3: Con las dos imágenes anteriores formar una sola imagen de 7×100
- 4: **for** Cada replicación $r = \{1, \dots, 200\}$ **do**
- 5: **for** $k = 1, 2, \dots, 9$ **do**
- 6: Considerar muestras M_1, M_2 de la imagen simulada, de tamaños $7 \times 10k$ píxeles y $7 \times (100 - 10k)$ píxeles, respectivamente.
- 7: Estimar α por máxima verosimilitud en cada muestra, obteniendo $(\hat{\alpha}_1(k), \hat{\alpha}_2(k))$.
- 8: Calcular la DG $s(\hat{\alpha}_1(k), \hat{\alpha}_2(k))$ y la DT.
- 9: **end for**
- 10: Calcular el punto de transición p_T como:

$$p_T = \arg \max_{q_k} s(\hat{\alpha}_1(k), \hat{\alpha}_2(k)), k \in 1, \dots, 9 \quad (6.1)$$

- 11: **end for**

Una vez ejecutado el algoritmo se construyen curvas poligonales con los valores de la DG. El mismo proceso se realiza para la DT, y se comparan los resultados obtenidos.

La Figura 6.4 muestran la DG y la DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-1, 5, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. Se puede observar que el valor máximo de la DG y la DT, para cada L , se encuentra en el punto medio (línea de vertical punteada). Sin embargo, la DT no se observa bien debido a que los valores de la DG son mayores que los de la DT. La DT se muestra en la Figura 6.5 con el propósito de observar su comportamiento por separado. El procedimiento es, por lo tanto, capaz de identificar la posición del punto de transición entre las zonas.

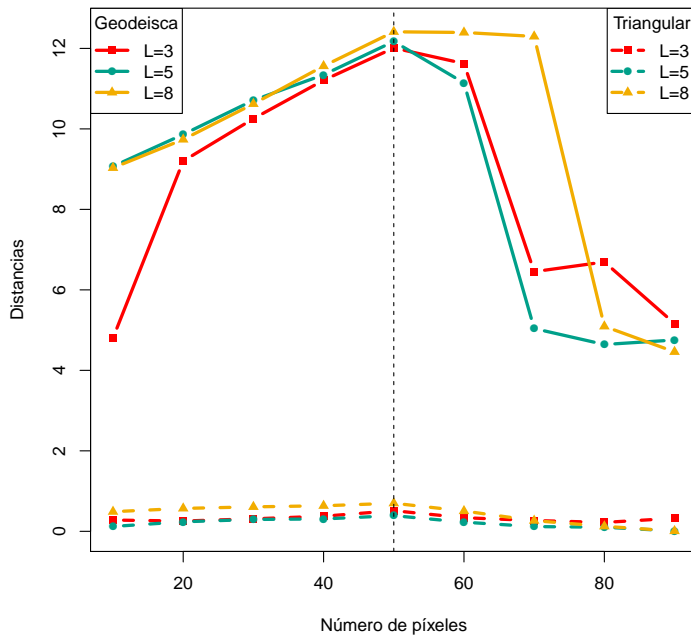


Figura 6.4: Distancia geodésica y triangular entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. El máximo de la curva es el punto de transición.

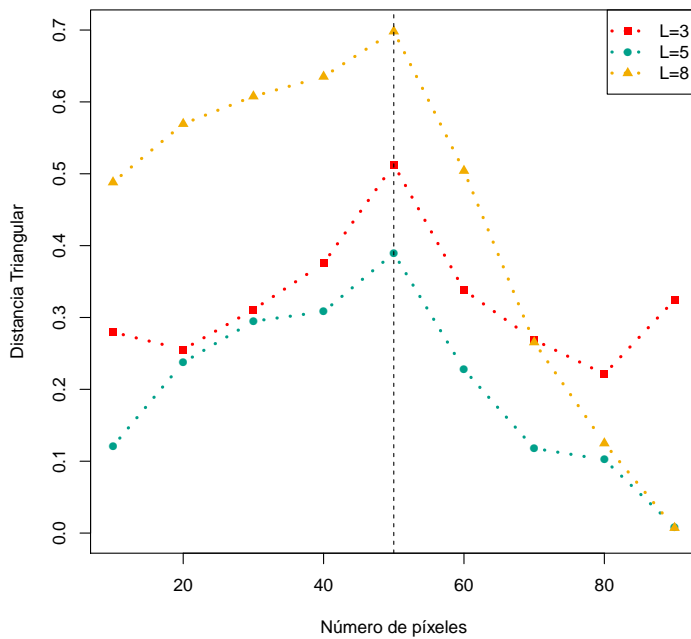


Figura 6.5: DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$.

La Figura 6.6 muestran el estadístico de prueba de la DG y la DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-1, 5, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. Se puede observar que el estadístico basado en la DG se resalta más el borde detectado entre las dos regiones y el basado en la DT, a pesar de que tienen la misma distribución asintótica, la diferencia con el estadístico de la DG se hace mucho mayor, que las diferencias que existen entre las distancias.

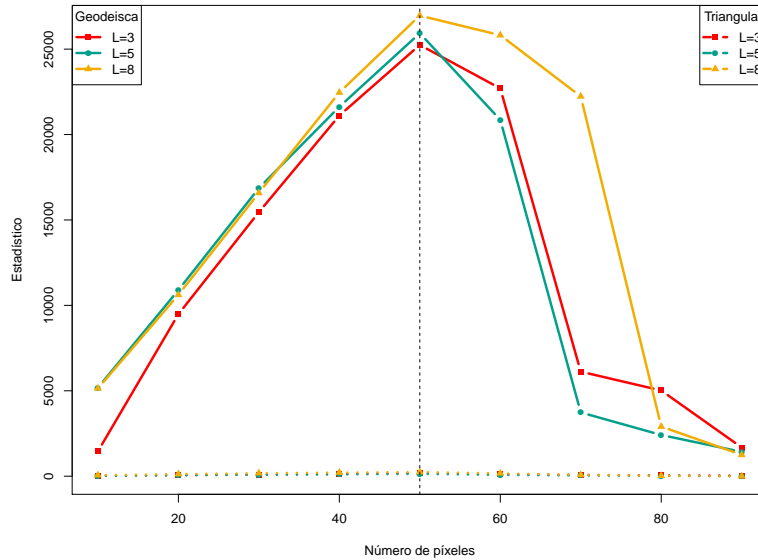


Figura 6.6: Estadísticos de prueba de la DG y DT entre $\mathcal{G}_I^0(-6, 5, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15, 0, 5, L)$ para $L = \{3, 5, 8\}$. El máximo de la curva es el punto de transición.

Los resultados de aplicar el método en este caso a imágenes sintéticas son excelentes, y muestran que el método se puede utilizar para la detección de bordes.

6.3. Detección de Bordes en Imágenes Sintéticas con Distribución \mathcal{G}_I^0 para el Parámetro γ Conocido

En esta sección se realiza un cálculo similar al anterior aplicando la DT y la DG a las mismas regiones pero, como se mencionó anteriormente no son comparables, por lo tanto se trabaja con sus estadísticos dados por las ecuaciones (5.12) y (5.13). El proceso es el siguiente:

Se generan imágenes de datos de 10×10000 píxeles divididas en dos. La primera mitad y la segunda mitad de la imagen poseen realizaciones de muestras aleatorias

con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1, L)$ y con distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2, L)$, respectivamente. Para cada iteración $k = 1, \dots, 19$ se realiza el procedimiento de detección del punto de borde.

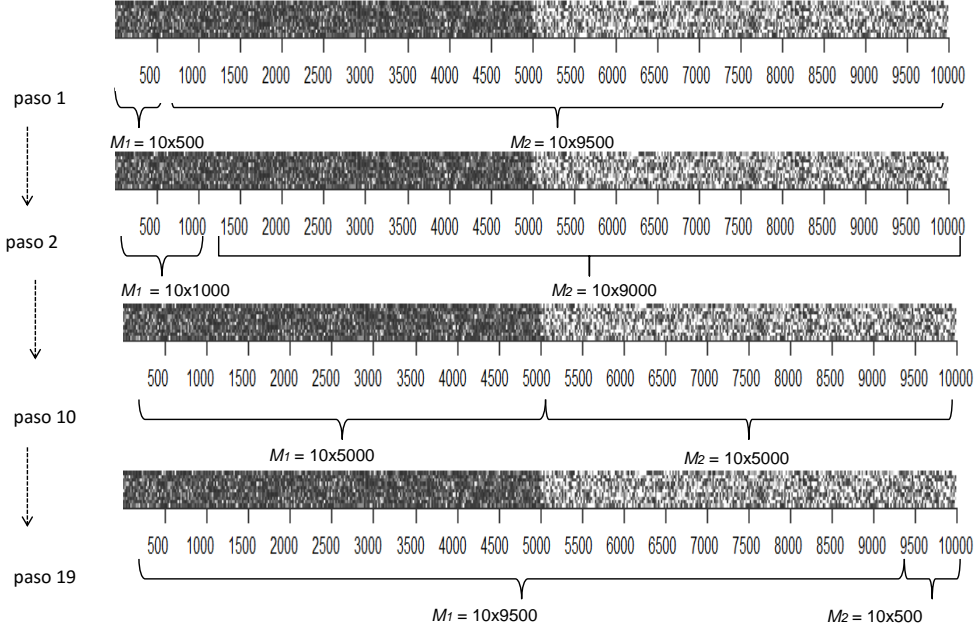


Figura 6.7: Imagen sintética y esquema del método de detección de borde.

Para cada k se toman dos muestras, M_1 y M_2 , de tamaños $10 \times 500k$ y $10 \times (10000 - 500k)$ píxeles, respectivamente. La Figura 6.7 muestra un esquema de estas imágenes.

Cada una de estas dos muestras se utiliza para estimar (α, γ) por MV, obteniendo $(\hat{\alpha}_1(k), \hat{\alpha}_2(k))$ y $(\hat{\gamma}_1(k), \hat{\gamma}_2(k))$. Los datos de cada muestra M_i se dividen por $\hat{\gamma}_i$, $i = 1, 2$, produciendo las muestras de datos M_1^* y M_2^* .

Entonces, las distancias y los tests estadísticos se pueden calcular entre los datos en cada muestra utilizando (4.17) para $L = \{1, 2\}$ y (5.3). Estas distancias se transforman en estadístico de prueba con las ecuaciones (5.12) y (5.13); esta transformación toma en cuenta los diferentes tamaños de muestra usado en cada paso. Ambos estadísticos de prueba tienen la misma distribución asintótica. El método se esboza en el Algoritmo 2. Se observa que con los tests estadísticos también puede crearse una curva poligonal que toma su máximo en el punto de transición.

El procedimiento esbozado en el Algoritmo 2 se repite 1000 veces sobre las imágenes obtenidas con diferentes parámetros de textura y número de *looks*, independientemente.

Algoritmo 2 Estimación de borde mediante la maximización de los estadístico de prueba

- 1: Producir una imagen de 10×10000 píxeles dividida en mitades con datos de $\mathcal{G}_I^0(\alpha_1, \gamma_1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, \gamma_2, L)$.
- 2: **for** $k = 1, 2, \dots, 19$ **do**
- 3: Producir muestras $M_1(k)$ y $M_2(k)$ de tamaños $10 \times 500k$ y $10 \times (10000 - 500k)$ píxeles de cada imagen.
- 4: Estimar (α, γ) por máxima verosimilitud en cada muestra, obteniendo $(\hat{\alpha}_1(k), \hat{\alpha}_2(k))$ y $(\hat{\gamma}_1(k), \hat{\gamma}_2(k))$.
- 5: Dividir los valores en $M_i(k)$ por $\hat{\gamma}_i$, obteniendo $M_i^*(k)$.
- 6: Calcular $(\hat{\alpha}_1^*(k), \hat{\alpha}_2^*(k))$ con los datos escalados.
- 7: Calcular $s(\hat{\alpha}_1^*(k), \hat{\alpha}_2^*(k))$ y $d_T(\hat{\alpha}_1^*(k), \hat{\alpha}_2^*(k))$.
- 8: **end for**
- 9: Calcular las distancias entre los diecinueve pares de muestras: $\mathbf{s} = \{s(\hat{\alpha}_1^*(k), \hat{\alpha}_2^*(k)), 1 \leq k \leq 19\}$ con (4.17), y $\mathbf{d}_T = \{d_T(\hat{\alpha}_1^*(k), \hat{\alpha}_2^*(k)), 1 \leq k \leq 19\}$ con (5.3).
- 10: Transformar distancias en test estadístico con las ecuaciones (5.12) y (5.13); obteniendo los vectores \mathbf{S}_{GD} and \mathbf{S}_{TD} , respectivamente.
- 11: Encontrar los puntos de transición donde se maximizan los estadísticos de prueba:

$$\hat{p}_s = \arg \max_k \mathbf{S}_{GD},$$

$$\hat{p}_T = \arg \max_k \mathbf{S}_{TD}.$$

Se construyen curvas poligonales utilizando los valores de las DG y DT de manera de mostrar el comportamiento de las distancias en el proceso de detección de puntos de borde. Las Figuras 6.8 y 6.9 muestran que en cada curva, la variación más grande corresponde a la posición del punto de transición.

Las Figuras 6.8 y 6.9 también muestran que la DG resulta en valores más altos que la DT. Además se observa, que cuanto menor es el valor del parámetro α más se parecen los valores de la DG y DT. En el caso de no existencia de borde, $\alpha_1 = \alpha_2$, puede observarse que la DG alcanza valores máximos en los extremos. Esto se debe a que en estos espacios de la muestra, una de las estimaciones del parámetro α , se realiza con muy pocos datos y por lo tanto el método de estimación MV no es tan preciso.

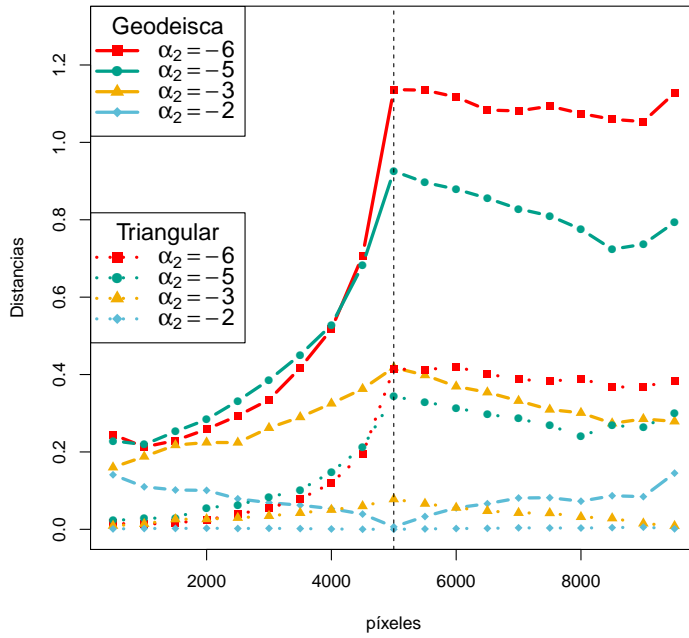


Figura 6.8: Curvas poligonales para $L = 1$ de las DG y DT para muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$.

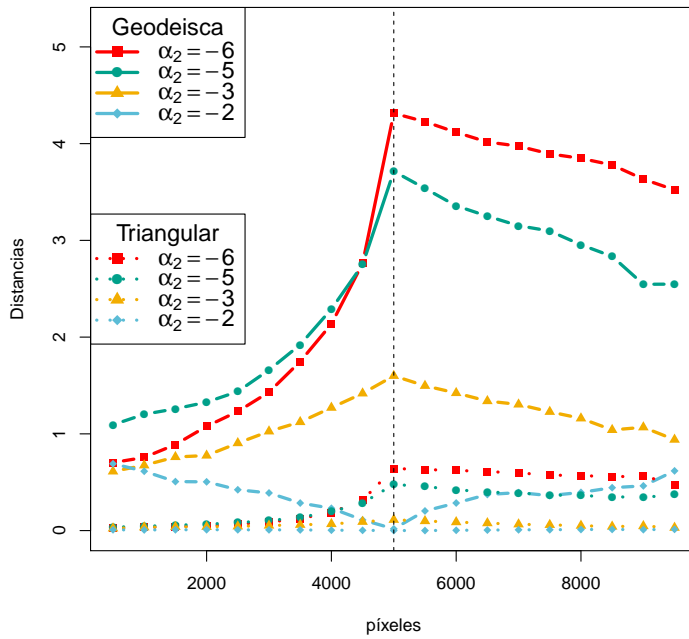


Figura 6.9: Curvas poligonales para $L = 2$ de las DG y DT para muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$.

A continuación, se construyen curvas poligonales utilizando los valores S_{DG} y S_{DT} como puntos de control. Por último, se buscan las posiciones en las que estas curvas tienen el valor máximo.

Las Figuras 6.10 y 6.11 muestra las curvas que representan la media de las curvas poligonales obtenidas por el cálculo de las ecuaciones (5.12) y (5.13), respectivamente.

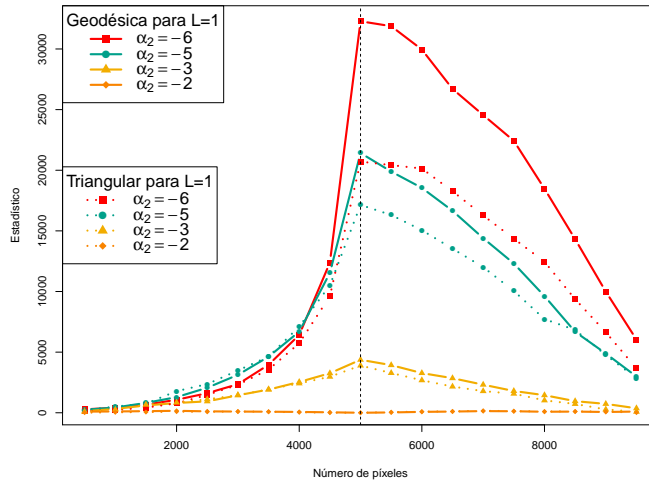


Figura 6.10: Media de las curvas poligonales de estadísticos de prueba en base a las DG y DT entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$ para $L = 1$.

Se puede ver que el punto de transición, que se indica con la línea de puntos vertical, puede estimarse maximizando estas curvas poligonales.

La evidencia proporcionada por el S_{DG} es más concluyente que la procedente de S_{DT} , como puede verse comparando las líneas continuas y de puntos del mismo color. En particular, la DT ofrece poca o ninguna evidencia para encontrar el borde entre $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = -3$ y $L = 2$. Además, cuanto mayor es la diferencia entre α_1 y α_2 , mayor son los valores de los máximos.

También se estudia el caso en que no hay ningún borde, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$. Se observa que las curvas poligonales resultantes no exhiben máximos ya sea global o local que pueden conducir a la identificación errónea de puntos de borde. La propuesta, por lo tanto, no es propensa a producir falsas alarmas.

Las Figuras 6.12 y 6.13 muestran el resultado de aplicar el Algoritmo 2 modificado a una imagen sintética generada con valores del parámetro $\alpha_1 = -2$, $\alpha_1 = -3$ y del parámetro $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, de esta manera se evalúa la robustez de la distancias, variando el valor de L . Las curvas poligonales corresponden a los valores

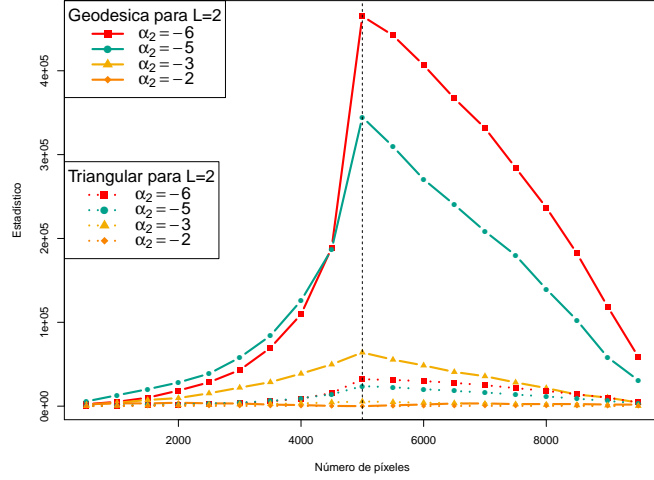


Figura 6.11: Media de las curvas poligonales de estadísticos de prueba en base a las DG y DT entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(\alpha_2, 1, L)$, con $\alpha_2 = \{-2, -3, -5, -6\}$ para $L = 2$.

de la DG y DT, respectivamente. Se puede observar en ambas figuras que, incluso en el caso de la distancia entre $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = -3$, el cual es un caso muy difícil, las distancias se maximizan en el punto medio de la imagen.

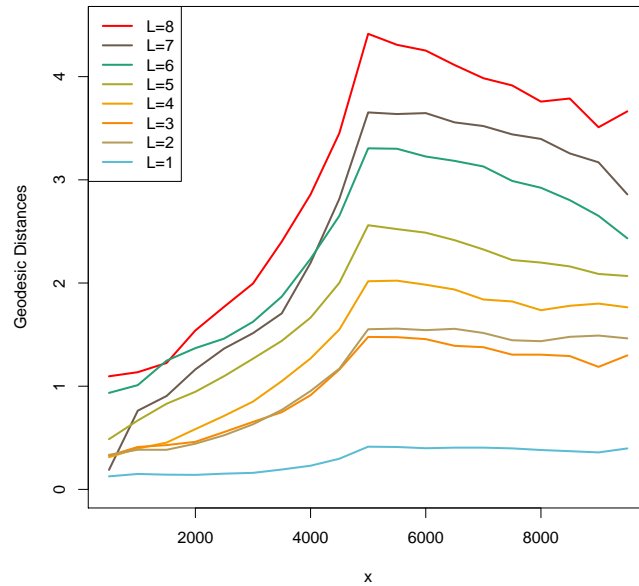


Figura 6.12: Distancia geodésica entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3, 1, L)$, con $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

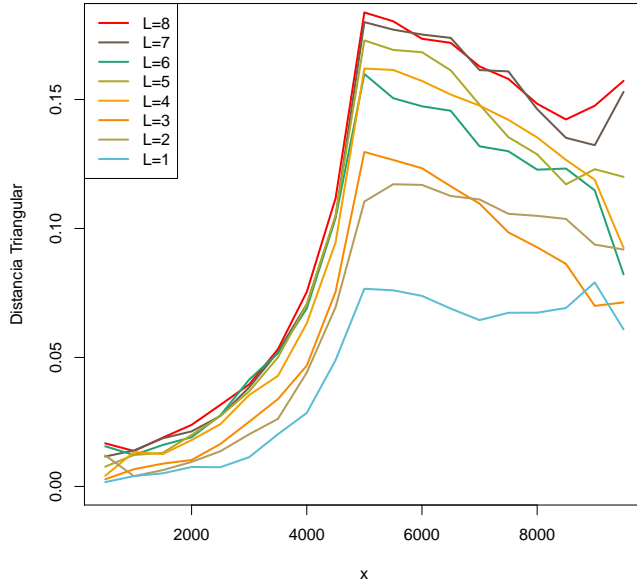


Figura 6.13: Distancia triangular entre muestras con distribuciones $\mathcal{G}_I^0(-2, 1, L)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3, 1, L)$, con $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Los resultados obtenidos utilizando la DG y aquellos obtenidos utilizando la DT son muy similares entre sí. Pero, el coste computacional del cálculo de la DT es mayor al del cálculo de la DG. El tiempo que tarda la DT en realizar el cálculo es 70 veces mayor que el tiempo que tarda la DG.

Se observa que este procedimiento proporciona una estimación robusta y un entendimiento fundamental de la distancia entre los dos muestras. En aplicaciones prácticas, como las discutidas por [26, 28, 40], se debe emplear una estrategia de búsqueda más fina.

6.4. Conclusiones para este Capítulo

Los resultados de aplicar la distancia geodésica para detección de puntos de borde en imágenes sintéticas son excelentes, con un bajo coste computacional y muestran que el método se puede aplicar a detección de bordes, especialmente al utilizar el estadístico basado en la DG en comparación con el basado en la DT.

Se comprueba que el método no se ve afectado con el aumento de L de la imagen SAR sintética. Los resultados muestran, que al utilizar las fórmulas cerradas de la DG, el coste computacional es muy inferior, al compararlo con la DT.

Capítulo 7

Detección de puntos de borde entre regiones de Imágenes SAR Reales utilizando la Distancia Geodésica

Como se mencionó anteriormente el problema de detectar bordes entre regiones con diferente textura sigue siendo uno de los problemas principales a resolver en el estudio de datos provenientes de imágenes SAR.

La DG se ha utilizado para resolver varios problemas de este tipo, entre ellos la recuperación de la textura multivariante y clasificación de regiones dentro de una imagen [5, 6, 16]. En estos artículos, los autores calculan una forma cerrada para la DG entre las distribuciones elípticas multivariadas bajo ciertas condiciones, incluyendo la distribución polarimétrica $\mathcal{G}_{\text{pol}}^0$ [20].

Basado en estos trabajos, y en que se dispone de la DG entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 bajo ciertas condiciones, y su aplicación a la detección de bordes sobre datos provenientes de imágenes SAR sintéticas, son excelentes. En este capítulo se aplica el mismo procedimiento para cuantificar la disimilaridad entre pares de muestras en datos provenientes de imágenes SAR reales y a la detección de puntos de borde.

Se analizan las ventajas del uso de la DG de la distribución \mathcal{G}_I^0 comparando con la DT.

7.1. Datos Reales - Imagen SAR

Los datos reales utilizados para el estudio y cuantificación de la disimilaridad entre regiones provienen de una imagen E-SAR [31] de los alrededores de Múnich. Se emplea la banda L , polarización HH en formato singlelook complejo para producir datos de intensidad. La resolución original es $2.2\text{ m} \times 3.0\text{ m}$ (rango \times azimut).

La Figura 7.1 muestra la imagen óptica obtenida de Google Maps (<https://goo.gl/maps/DCm6fBKcRy32>) del área de estudio y la Figura 7.2 muestra la imagen de E-SAR y las áreas aproximadas de donde se tomaron las cinco muestras utilizadas para estimar los parámetros de la distribución \mathcal{G}_I^0 y posteriormente realizar el cálculo de la DG y el de la DT y los estadísticos S_{DG} y S_{DT} . La muestra A_3 corresponde a una zona urbana mientras las otras corresponden a zonas de bosques y pasturas.

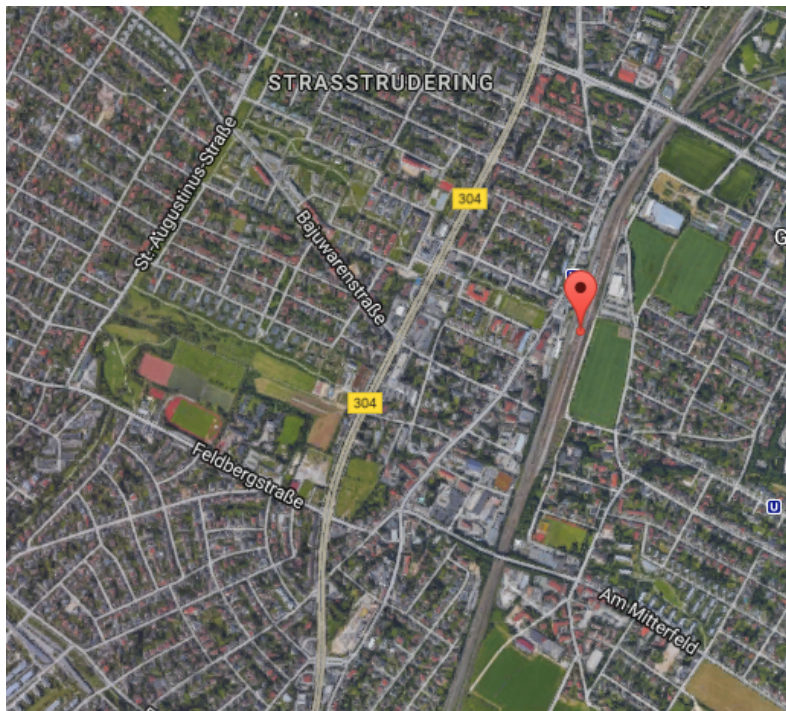


Figura 7.1: Imagen óptica del área estudio Google Maps <https://goo.gl/maps/DCm6fBKcRy32>.

La Figura 7.3 muestra la imagen E-SAR a la cual se le redujo la resolución a $1/4$ de la original mediante un suavizado. Esto se realiza con el fin de estudiar si el método planteado con la DG se ve afectado por la reducción en la resolución de la imagen.

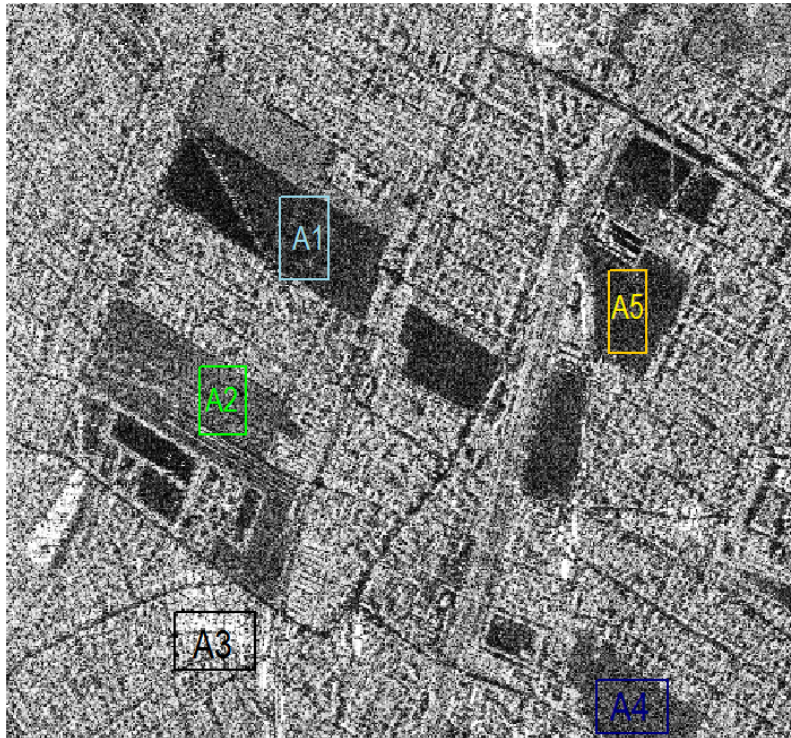


Figura 7.2: Regiones de datos E-SAR usados para el estudio de la disimilaridad.



Figura 7.3: Imagen E-SAR de baja resolución.

7.2. Estimación del Parámetro $\hat{\alpha}$

La Tabla 7.1 muestra el tamaño de cada muestra y las estimaciones de máxima verosimilitud, para la resolución original y la resolución reducida, de las regiones marcadas en la Figura 7.2 y luego en la Figura 7.3. Se observa que los valores estimados de $\hat{\alpha}$ están acorde con el hecho de que los datos de resolución reducida se obtuvieron suavizando las observaciones. Este cambio se refleja en los cambios en las distancias.

Tabla 7.1: Estimados de α en las zonas de estudio.

Muestra	Tamaño	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_{BR}$
A1	1360	-6,09	-11,53
A2	1225	-9,72	-20,00
A3	2088	-1,01	-1,00
A4	1824	-2,75	-4,27
A5	1152	-11,51	-20,00

La zona urbana $A3$ posee el valor más alto del parámetro estimado $\hat{\alpha}$. Se observa también que los valores estimados de $\hat{\alpha}_{BR}$ en zonas de bosques y pasturas disminuyeron considerablemente su valor y la zona correspondiente a $A3$ mantuvo su valor, al corresponder a una zona densamente poblada.

7.3. Disimilaridad en Datos Reales con Media Unitaria

En primer lugar se divide la muestra de datos proveniente de la imagen real por su media para hacer que la media de la muestra sea unitaria. La DG para cuando $E(z) = 1$ está dada por la Ec. (4.13), la cual se resuelve numéricamente, como se ha mencionado anteriormente, pero tiene el limitante de que si $\hat{\alpha} \rightarrow -1$ entonces la $DG \rightarrow \infty$, y no es utilizable en caso de zonas texturadas y muy texturadas. Por este motivo en el cálculo de la DG entre las regiones seleccionadas se excluye el área $A3$.

La Tabla 7.2 muestra los resultados del cálculo de la DG entre las zonas seleccionadas. Se observa, que la DG para las diferentes áreas responde a las características de cada área. Aunque, la DG cuando $E(z) = 1$, se ve limitada a no poder trabajar adecuadamente con zonas extremadamente texturadas.

Tabla 7.2: Distancia Geodésica Cuando $E(z) = 1$.

Resolución	Muestra	A2	A3	A4	A5
Original	A1	3.23	-	4.13	4.22
	A2	0	-	7.37	0.98
	A3		-	-	-
	A4			0	8.35
Reducida	A1	5.31	-	6.63	5.31
	A2	0	-	11.95	0
	A3		-	-	-
	A4			0	11.95

7.4. Disimilaridad en Datos Reales con el Parámetro γ Conocido

Inicialmente se estiman los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ y se realiza la operación $\frac{1}{\gamma}W \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, L)$. La Tabla 7.3 muestra la DG y la DT para los valores estimados $\hat{\alpha}$ por MV, tanto para la imagen original como para la imagen con resolución reducida.

Las distancias cambian en función de $\hat{\alpha}$, pero los valores más alto y más bajo de DG y DT entre las regiones A3 y A5, y las regiones A2 y A5, respectivamente, se mantienen. Estas distancias más grandes y pequeñas corresponden a las zonas con textura muy diferente y a dos áreas suaves, respectivamente. La Figura 7.4 ilustra las distancias DG y DT calculadas entre A1 y las demás regiones, ambas con la resolución completa y la resolución reducida. La DG y DT se representan con naranja y verde, respectivamente. Las líneas más gruesas corresponden a valores más grandes de la distancia.

7.5. Detección de Bordes

Se aplican a la detección de bordes ambas distancias, DG y DT. El proceso de detección de puntos de borde es el siguiente:

1. Se selecciona la sección o banda de la imagen, igualmente espaciadas de lado 3 píxeles.
2. Se selecciona la dimensión de la ventana para realizar el muestreo de la imagen $m \times n$.

Tabla 7.3: Distancia entre modelos para datos reales.

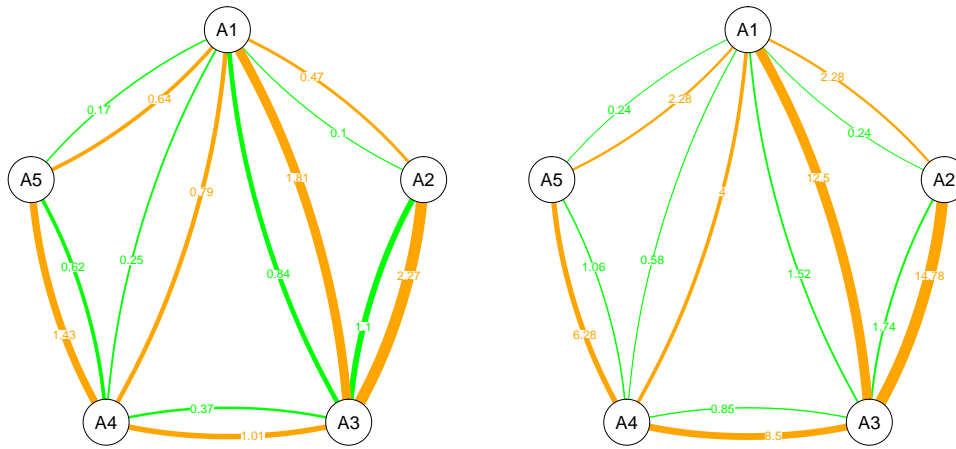
Muestra		A2	A3	A4	A5	
Resolución Original	DG	A1	0,467	1,807	0,794	0,636
		A2	0	2,274	1,261	0,169
		A3		0	1,013	2,443
		A4			0	1,430
	DT	A1	0,097	0,840	0,248	0,170
		A2	0	1,097	0,515	0,014
		A3		0	0,367	1,182
		A4			0	0,617
Resolución Reducida	DG	A1	2,277	12,503	4,004	2,277
		A2	0	14,781	6,282	0
		A3		0	8,498	14,781
		A4			0	6,282
	DT	A1	0,238	1,524	0,584	0,238
		A2	0	1,743	1,061	0
		A3		0	0,854	1,743
		A4			0	1,061

3. Se subdivide en $Alto/n$ franjas la banda inicial.
4. Se aplica el Algoritmo 2 adaptado a las dimensiones de las franjas.
5. Se dibujan los puntos de borde resultantes sobre la imagen.

La sección o banda de la imagen real seleccionada se muestra en la Figura 7.5, tiene dimensiones $Ancho \times Alto = 56 \times 35$.

La Figura 7.6 muestra el resultado de aplicar el método de detector de bordes con la DG y DT. Es notable que ambas, resultan en los mismos puntos de borde, sólo difieren en el tiempo que tomó para su cálculo. Excepto cuando la integral de la DT no converge y por supuesto no retorna resultado alguno. Esto no sucede con la DG para cuando el número de *looks* es $L = \{1, 2\}$, ya que se dispone de una forma cerrada de la misma.

La Tabla 7.4 muestra la cantidad de tiempo que tomó cada método para calcular todos los puntos del borde de la Figura 7.6. El tiempo computacional de la DT es 70 veces mayor que el de la DG. Adicionalmente, si el tamaño de la muestra no es lo suficientemente grande la integral para calcular DT no converge.



(a) Distancias entre los modelos de datos de resolución completa. (b) Distancias entre los modelos de datos de resolución reducida.

Figura 7.4: Ilustración distancias entre las muestras de datos reales, con la resolución completa y reducida: GD en naranja, y TD en verde.

Tabla 7.4: Tiempos en la detección de borde para cada distancia.

Distancia	Tiempo
DG	0,002
DT	0,14

El proceso anterior de detección de puntos de borde se aplica a la misma región con la resolución reducida, calculando unicamente la DG. Se puede ver que dos puntos se desplazan desde el lugar correcto, pero el resultado es aceptable.

7.6. Conclusiones para este Capítulo

El método aplicado a la imagen real muestra que los valores grandes de la DG y DT provienen de áreas de la imagen con diferente rugosidad, pero la DT es menor que la DG, haciendo más difícil la identificación de las diferencias entre las zonas que presentan similitudes. Esto ocurre tanto para la resolución completa como para la resolución reducida de la imagen.

Al aplicar la DG directamente a la detección de puntos de borde no se encuentra diferencia en los puntos que encuentra la DT, la diferencia fundamental se encuentra es el coste computacional, el tiempo de cómputo de la DT es 70 veces superior al de la DG. Además, DT no converge para ciertos tamaños de muestra deteniendo el



Figura 7.5: Imagen SAR y área seleccionada para el estudio de detección de puntos de borde

proceso de detección, lo cual no ocurre con la DG, lo cual es una ventaja considerable para la DG.

Todos los experimentos muestran que el método de detección de bordes propuesto es robusto a la baja resolución de la imagen.

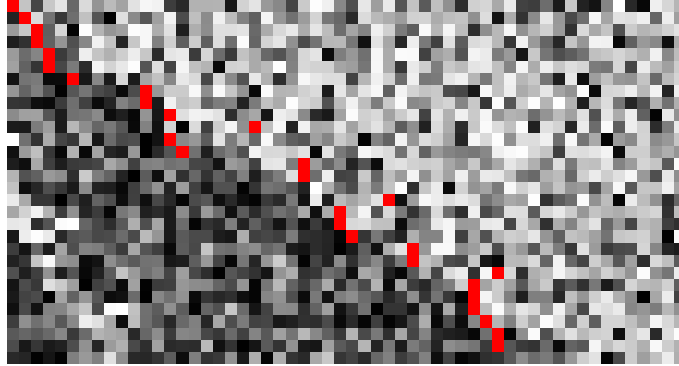


Figura 7.6: Resultado de la aplicación del método de detección de bordes en datos reales.

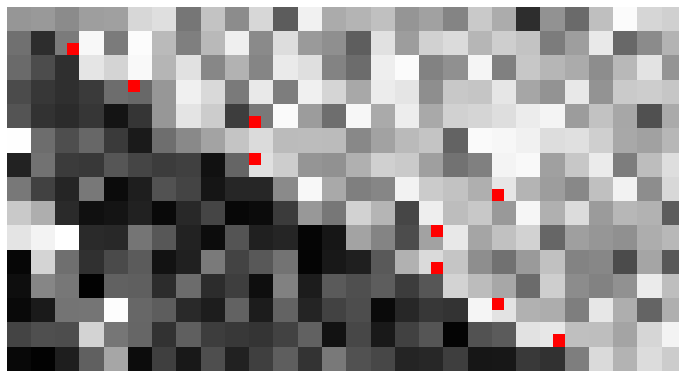


Figura 7.7: Puntos de borde hallados en la imagen con baja resolución con la DG

Capítulo 8

Conclusiones

Esta tesis está dedicada a la obtención de la Distancia Geodésica (DG) entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 , un resultado que llena un vacío en la literatura sobre medidas de contraste para esta distribución. También encara el uso de la DG como una herramienta para la discriminación de regiones y detección de bordes en datos con ruido *speckle*, especialmente los provenientes de imágenes SAR.

Derivamos una fórmula cerrada para la distancia geodésica para los valores de $L = \{1, 2\}$, proporcionamos la expresión general que puede ser utilizada en otros casos, que dependen de la integración numérica. Se calcula la DG entre distribuciones \mathcal{G}_I^0 que describen varias situaciones prácticas, asumiendo el número de *looks* conocido, para los parámetros de textura y escala iguales y diferentes y cuando la esperanza de la distribución es igual a 1.

Los parámetros desconocidos se estiman utilizando el método de máxima verosimilitud, ya que luego utilizamos sus propiedades asintóticas en el cálculo de los estadísticos para la prueba de hipótesis.

Se comparan las distancias geodésica y triangular, con resultados favorables para la primera sobre la segunda.

Se aplica esta nueva herramienta a los problemas de detección de bordes entre regiones con diferente rugosidad y a la cuantificación de la disimilaridad entre pares de muestras, realizando los experimentos en datos reales y sintéticos.

Se realiza un análisis comparativo de la DG con la DT, comparándolas directamente y por medio de la construcción de un estadístico de prueba, y el p -valor. Al igual que su tiempo de cómputo.

Es posible observar que, a medida que se hace menor la diferencia entre α_1 y α_2 , más bajo es el valor de $s(\alpha_1, \alpha_2)$, lo que indica que esta distancia es una característica apropiada para medir el contraste entre regiones.

Los resultados de aplicar el método en imágenes sintéticas son excelentes, muestran que se puede utilizar para la detección de bordes en imágenes reales. Y en mayor medida al utilizar el estadístico basado en la DG en comparación con el basado en la DT. Se comprueba que el método no se ve afectado con el aumento del valor de L . También se muestra que al utilizar las fórmulas cerradas de la DG, el coste computacional es muy inferior, al compararlo con la DT.

Cuando se trata con datos reales, los grandes valores de la DG y DT provienen de áreas de la imagen con diferente rugosidad, pero DT es considerablemente menor que DG, haciendo más difícil la identificación de tales diferencias.

Esto ocurre tanto para la imagen con la resolución completa como para la imagen con la resolución reducida.

La efectividad del uso de la DG no se ve afectada por la resolución, pero para valores superiores a $L = 2$ aumenta el coste computacional para su cálculo ya que se requieren métodos numéricos de integración.

Al aplicar la DG directamente a la detección de puntos de borde en la imagen real no se encuentra diferencia en los puntos que encuentra la DT, la diferencia fundamental se encuentra es el coste computacional. Y que el de la DT es de aproximadamente 70 veces superior al de la DG.

Al calcular la DG utilizando la forma cerrada para $L = \{1, 2\}$ no presenta problemas de convergencia, los cuales se presentan en la DT, para ciertos tamaños de muestra y de número de *looks*, deteniendo el proceso de detección de puntos de borde o de clasificación de regiones.

Se concluye que el cálculo de la distancia geodésica para la distribución \mathcal{G}_I^0 constituye un aporte muy importante en la interpretación automática de imágenes SAR.

Bibliografía

- [1] Marta Mejail y Julio Jacobo Berllés Alejandro Frery, Juliana Gambini. Polarimetric sar image segmentation with b- splines and a new satistical model. *Multidimensional Systems and Signal Processing, Springer*, 21:319–342, 2010.
- [2] C. Atkinson and A. F. S. Mitchell. Rao’s distance measure. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, 43:345–365, 1981.
- [3] M. Berkane, K. Oden, and P. Bentler. Geodesic estimation in elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 63:35–46, 1997.
- [4] O. Besson and Y. I. Abramovich. On the Fisher information matrix for multivariate elliptically contoured distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, 20(11):1130–1133, 2013.
- [5] L. Bombrun, Y. Berthoumieu, N.-E. Lasmar, and Geert Verdoolaege. Multivariate texture retrieval using the geodesic distance between elliptically distributed random variables. In *18th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3637–3640, 2011.
- [6] L. Bombrun, N.-E. Lasmar, Y. Berthoumieu, and G. Verdoolaege. Multivariate texture retrieval using the SIRV representation and the geodesic distance. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 865–868, 2011.
- [7] C. G. Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, 19:577–593, 1965.
- [8] J. Burbea and C. R. Rao. Entropy deifferential metric, distance and divergence measures in probability spaces: A unified approach. *Journal of Multivariate Analysis*, 12:575–596, 1982.
- [9] O. H. Bustos, A. G. Flesia, and A. C. Frery. Simulation of Intensity SAR Images with Specified Correlation Structure. *Applied Signal Processing*, 2000.

- [10] O. H. Bustos, A. C. Frery, and S. Ojeda. Strong Markov Processes in Image Modelling. *Brazilian Journal of Probability and Statistics - REBRAPE*, 1999.
- [11] O. H. Bustos, M. M. Lucini, and A. C. Frery. M-estimators of roughness and scale for GA0-modelled SAR imagery. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2002(1):105–114, 2002.
- [12] J. Cheng, G. Gao, W. Ding, X. Ku, and J. Sun. An improved scheme for parameter estimation of g^0 distribution model in high- resolution sar images. *Progress In Electromagnetics Research*, 134:23–46, 2013.
- [13] E. Chuvieco. *Fundamentos de Teledetección Espacial*. Rialp S.A, 1995.
- [14] C. Cuadras. Distancias estadísticas. *ESTADÍSTICA ESPAÑOLA*, 30(119):295–378, 1989.
- [15] M. L. Delignette-Muller and C. Dutang. fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software*, 64(4), 2015.
- [16] A. D. El Maliani, M. El Hassouni, Y. Berthoumieu, and D. Aboutajdine. Color texture classification method based on a statistical multi-model and geodesic distance. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 25(7):1717–1725, 2014.
- [17] A. Farrouki and M. Barkat. Automatic censoring CFAR detector based on ordered data variability for nonhomogeneous environments. *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, 152(1):43–51, 2005.
- [18] R. Fjørtoft, Y. Delignon, W. Pieczynski, M. Sigelle, and F. Tupin. Unsupervised classification of radar images using hidden Markov chains and hidden Markov random fields. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(3):675–686, 2003.
- [19] Canada Centre for Remote Sensing. Fundamentals of remote sensing. <http://www.nrcan.gc.ca/earth-sciences/geomatics/satellite-imagery-air-photos/satellite-imagery-products/educational-resources/9309>, 2016. Accessed: 2016-06-30.
- [20] C. C. Freitas, A. C. Frery, and A. H. Correia. The polarimetric G distribution for SAR data analysis. *Environmetrics*, 16(1):13–31, 2005.
- [21] A. C. Frery, R. J. Cintra, and A. D. C. Nascimento. Entropy-based statistical analysis of PolSAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 51(6):3733–3743, 2013.

- [22] A. C. Frery, H.-J. Müller, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant’Anna. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(3):648–659, 1997.
- [23] J. Gambini. *Modelos de Segmentación basados en Regiones y Contornos Activos aplicados a Imágenes de SAR*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2006.
- [24] J. Gambini, J. Cassetti, M. Lucini, and A. Frery. Parameter estimation in SAR imagery using stochastic distances and asymmetric kernels. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 8(1):365–375, 2015.
- [25] J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles, and A. Frery. Feature extraction in speckled imagery using dynamic B-spline deformable contours under the \mathcal{G}^0 model. *International Journal of Remote Sensing*, 27(22):5037–5059, 2006.
- [26] J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles, and A. C. Frery. Accuracy of edge detection methods with local information in speckled imagery. *Statistics and Computing*, 18(1):15–26, 2008.
- [27] G. Gao. Statistical modeling of SAR images: A survey. *Sensors*, 10(1):775–795, 2010.
- [28] E. Girón, A. C. Frery, and F. Cribari-Neto. Nonparametric edge detection in speckled imagery. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82:2182–2198, 2012.
- [29] L. Gomez, L. Alvarez, L. Mazorra, and A. C. Frery. Classification of complex Wishart matrices with a diffusion-reaction system guided by stochastic distances. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2056), 2015.
- [30] J. W. Goodman. *Statistical Optics, Pure and Applied Optics*. Wiley, New York, USA, 1985.
- [31] R. Horn. E-SAR: The experimental airborne L/C-band SAR system of DFVLR. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, volume 2, pages 1025–1026. IEEE Press, 1988.
- [32] I. Ilea, L. Bombrun, C. Germain, R. Terebes, and M. Borda. Statistical hypothesis test for robust classification on the space of covariance matrices. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2015*, pages 271–275, 2015.

- [33] S. Khan. *Non-Gaussian Multivariate Probability Models and Parameter Estimation for Polarimetric Synthetic Aperture Radar Data*. PhD thesis, University of Surrey, Guildford, Surrey, GU2 7XH, UK, May 2013. Surrey Space Centre, Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering & Physical Sciences at the University of Surrey.
- [34] S. Khan and R. Guida. On single-look multivariate G distribution for polsar data. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing (J-STARS)*, 5(4):1149–1163, August 2012.
- [35] J.-S. Lee and I. Jurkevich. Segmentation of SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 27(6):674–680, 1989.
- [36] M. Mejail, J. C. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, and O. H. Bustos. Classification of SAR images using a general and tractable multiplicative model. *International Journal of Remote Sensing*, 24(18):3565–3582, 2003.
- [37] Marta Estela Mejail, J. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, and O. H. Bustos. Parametric roughness estimation in amplitude SAR images under the multiplicative model. *Revista de Teledetección*, 13:37–49, 2000.
- [38] M. L. Menendez, D. Morales, L. Pardo, and M. Salicru. Statistical test based on the geodesic distances. *Applied Mathematics Letters*, 8(1):65–69, 1995.
- [39] A. D. C. Nascimento, R. J. Cintra, and A. C. Frery. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48(1):373–385, 2010.
- [40] A. D. C. Nascimento, M. M. Horta, A. C. Frery, and R. J. Cintra. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(2):648–663, 2014.
- [41] J. Oller I Sala. *Utilización de Métricas Riemannianas en el Análisis de datos Multidimensionales y su aplicación a biología*. PhD thesis, Universitat de Barcelona. Departament d’Estadística, 1982.
- [42] L. Pizarro Quiroz. Estimación robusta de parámetros en distribuciones con datos SAR. Master’s thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, Departamento de Informática, Valparaíso - Chile, 2013.
- [43] M. Presa, J. Amores, D. Mata Moya, and J. Bárcena Humanes. Statistical analysis of SAR sea clutter for classification purposes. *Remote Sensing*, 6(10):9379–9411, 2014.

- [44] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016.
- [45] C. R. Rao. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 37:81–91, 1945.
- [46] C. R. Rao. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In S. Kotz and N. L. Johnson, editors, *Breakthroughs in Statistics*, Springer Series in Statistics, pages 235–247. Springer, New York, 1992.
- [47] F. Reverter and J. Oller. Computing the Rao distance for Gamma distributions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157(1):155–167, 2003.
- [48] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, third edition edition, March 2006.
- [49] M. Salicrú, D. Morales, M. L. Menéndez, and L. Pardo. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, 51(2):372–391, 1994.
- [50] M. Schlutz. Synthetic aperture radar imaging simulated in matlab. Master’s thesis, Faculty of the California Polytechnic State University, San Luis Obispo, June 2009.
- [51] R. Serway and J. Jewett. *Physics for Ciencias and Engineers with Modern Physics*. Thomsom Books Cole, 2008.
- [52] W. B. Silva, C. C. Freitas, S. J. S. Sant’Anna, and A. C. Frery. Classification of segments in PolSAR imagery by minimum stochastic distances between Wishart distributions. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 6(3):1263–1273, 2013.
- [53] C. Tison, J.-M. Nicolas, F. Tupin, and H. Maitre. A new statistical model for Markovian classification of urban areas in high-resolution SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(10):2046–2057, 2004.
- [54] L. Torres, S. J. S. Sant’Anna, C. C. Freitas, and A. C. Frery. Speckle reduction in polarimetric SAR imagery with stochastic distances and nonlocal means. *Pattern Recognition*, 47:141–157, 2014.
- [55] S. Uhlmann and S. Kiranyaz. Integrating color features in Polarimetric SAR image classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(4):2197–2216, 2014.

- [56] A. Ullah. Entropy, divergence and distance measures with econometric applications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 49:137–16, 1996.
- [57] G. Vegas-Sanchez-Ferrero, F. Simmross-Wattenberg, M. Martin-Fernandez, C. Palencia-de Lara, and C. Alberola-López. Caracterización de speckle con modelos de cola pesada. In *Congreso Anual de la Sociedad Española de Ingeniería Biomédica (CASEIB)*, San Sebastián, España, 2012. Sociedad Española de Ingeniería Biomédica, Sociedad Española de Ingeniería Biomédica.
- [58] G. Verdoolaege and P. Scheunders. On the geometry of multivariate Generalized Gaussian models. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 43(3):180–193, 2012.
- [59] A. Villarroya and J. Oller. Statistical tests for the inverse gaussian distribution based on rao distance. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002) : The Indian Journal of Statistics*, Volume 55:80–103, 1993.
- [60] Christian Wolff. Radar basics. internet.