

# Selección de técnicas para el diseño de entrevistas a través de las cuales profundizar en el conocimiento sobre heurísticas de estudiantes pre-universitarios

Inés Casetta – Víctor González – Mabel Rodríguez

Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano.  
Gutiérrez y J. L. Suárez, Los Polvorines. Buenos Aires, Argentina

[inescasetta@yahoo.com.ar](mailto:inescasetta@yahoo.com.ar) – [vgonzale@ungs.edu.ar](mailto:vgonzale@ungs.edu.ar) – [mrodri@ungs.edu.ar](mailto:mrodri@ungs.edu.ar)

## Resumen

Distintos enfoques de la Didáctica de la Matemática permiten dar explicaciones a cuestiones que aparecen en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje. Las cualidades del estudio reportado aquí se encuadran dentro de las cuestiones y nociones teóricas que provienen de la Escuela Anglosajona. Ésta pondera, desde sus lineamientos, concepciones que permiten describir los procesos cognitivos que pone de manifiesto el estudiante al momento de resolver una situación que resulte ser un *problema* para él, tales como el uso de *heurísticas* y *aspectos metacognitivos* implícitos y/o explícitos. El presente trabajo forma parte de una investigación en el que se han planteados varios objetivos referidos al estudio de heurísticas, uno de los cuales se refiere a identificar heurísticas que los estudiantes pre-universitarios de la Universidad Nacional de General Sarmiento ponen en juego al momento de resolver problemas. Es importante destacar que para detectar heurísticas consideramos que si el sujeto elevara al plano conciente los procesos de pensamiento que movilizó durante la resolución de un problema (aún cuando no hubiera resuelto correctamente la actividad) y fuera capaz de comunicarlos, o nosotros pudiéramos advertirlos, tendríamos más herramientas para identificar las heurísticas que utiliza. Por esta razón, nos interesa generar condiciones para que el sujeto haga conciente sus procesos de pensamiento y nos los comunique o tengamos la posibilidad de advertirlos. Para ello, necesitamos conocer técnicas para recabar información de los procesos de pensamiento puestos en juego a la hora de resolver problemas.

Basándonos en que la condición de “ser problema” y por lo tanto “las estrategias utilizadas” son *relativas a cada sujeto* –cuestión bien conocida en este enfoque teórico-, hemos determinado que *estaremos adaptando, para cada sujeto, la elección de una o varias técnicas (para realizar la entrevista) que nos permita conocer las heurísticas que éste utiliza*. Por esta razón, debemos tener criterios que nos permitan identificar a priori cuál/es técnica/s de diseño de entrevistas es/son más apropiada/s (en el sentido que nos posibilita acercarnos a conocer las heurísticas que pone en juego) para ser aplicada/s en cada uno de los estudiantes.

Presentamos la forma de seleccionar una muestra intencional conformada por aquellos estudiantes que serán entrevistados y un procedimiento que nos permita seleccionar a priori, para cada sujeto, el tipo de técnica/s con las que se diseñará una entrevista que resulte apropiada para recabar información sobre las *heurísticas espontáneas* que el sujeto dispone al momento de resolver problemas. Además se presentan dos ejemplos del uso del procedimiento para la selección de la técnica y se complementa con los diseños de las entrevistas. Por último, se incluye una breve referencia a cuestiones que surgieron del análisis de los resultados obtenidos a partir de la entrevista realizada a uno de los estudiantes.

Palabras claves: Heurísticas – Metacognición – Diseño de entrevistas

## 1.- Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática al igual que en el de la Ciencia Matemática hay acuerdo en que la *resolución de problemas* es una actividad central en la construcción de los conocimientos matemáticos. De este modo dicha tarea debiera ocupar un lugar privilegiado en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje (pueden verse, entre otros tantos, textos y producciones del NCTM<sup>1</sup>; Santaló, 1990; Polya, 1965). Focalizando en la resolución de problemas por parte del estudiante, existen diversas líneas de estudio que apuntan a conocer y describir los procesos de aprendizaje de la misma. Por caso, existen estudios orientados al análisis de los *errores* que cometen los estudiantes al momento de resolver actividades, considerándose desde este enfoque que el error es parte inseparable del aprendizaje del sujeto,

---

<sup>1</sup> National Council of Teaching Mathematics

(puede verse en Del Puerto, S. et al. 2006) y otros estudios orientados al descubrimiento y clasificación de *heurísticas* que pone en juego el estudiante al momento de resolver un problema. Desde este enfoque, las heurísticas se consideran como un componente necesario para el avance en la resolución de una actividad (puede verse en Marino et al. 2008). El estudio reportado aquí se alinea con este último enfoque. Encuadramos nuestro estudio dentro de la línea teórica de la Escuela Anglosajona de la Didáctica de la Matemática (Problem Solving).

El presente trabajo forma parte de una investigación<sup>2</sup> marco que se desarrolla en el Instituto del Desarrollo Humano de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). El contexto de la misma es la asignatura Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU), curso pre-universitario que es común y obligatorio para todas las carreras de esta Universidad. Destinamos este párrafo para situar al lector en la problemática que estamos abordando. Para ello necesitamos presentar algunos aspectos de la investigación marco, aunque al final de esta sección nos desligamos de ella y planteamos el objetivo de la investigación aquí reportada. En el proyecto citado hay planteados varios objetivos referidos al estudio de heurísticas, uno de los cuales se refiere a identificar heurísticas que los estudiantes ponen en juego al momento de resolver problemas. Para responder a él, deberemos dar respuestas que sean representativas de lo que ocurre en la totalidad de los estudiantes del CAU. Entre las decisiones metodológicas adoptadas, hemos decidido aplicar a la totalidad de los estudiantes un test con problemas, como primera instancia del trabajo de campo. La segunda instancia del trabajo de campo consiste en llevar adelante entrevistas a una muestra intencional de dichos estudiantes, por resultarnos imposible entrevistarlos a todos. Dichas entrevistas tienen la finalidad de complementar la información cognitiva referida a heurísticas disponibles en ellos. Para seleccionar la muestra intencional de aquellos estudiantes que serán entrevistados, decidimos considerar la resolución del test (como se indica en la sección 3.). Para este grupo de sujetos, estamos frente a la tarea de obtener datos de su accionar cognitivo a partir de una entrevista, cuestión compleja por varias razones. Aquí ponemos atención en una de ellas: necesitamos recabar datos de los *distintos sujetos* seleccionados. Por nuestros avances en el proyecto marco, y basándonos en que la condición de “ser problema” y por lo tanto “las estrategias utilizadas” son *relativas a cada sujeto* –cuestión bien conocida en este enfoque teórico-, hemos determinado que *estaremos adaptando, para cada sujeto, la elección de una o varias técnicas (para realizar la entrevista) que nos permita conocer las heurísticas que éste utiliza*. Por esta razón, debemos tener criterios que nos permitan identificar a priori cuál/es técnica/s de diseño de entrevistas es/son más apropiada/s (en el sentido que nos posibilita acercarnos a conocer las heurísticas que pone en juego) para ser aplicada/s en cada uno de los estudiantes.

Por lo aquí expuesto, el objetivo de investigación del trabajo que aquí reportamos es: ***presentar y fundamentar un procedimiento que nos permita seleccionar a priori, para cada sujeto, el tipo de técnica/s con las que se diseñará una entrevista que resulte apropiada para recabar información sobre las heurísticas espontáneas que el sujeto dispone al momento de resolver problemas.***

El trabajo se organiza como sigue: la sección 2. incluye un breve estado del arte y marco teórico, en la sección 3. se presenta y fundamenta el procedimiento para seleccionar el tipo de técnica más apropiada para diseñar una entrevista para cada sujeto, y en la sección 4. se presentan dos ejemplos del uso del procedimiento para la selección de la técnica y se complementa con los diseños de las entrevistas. Por último, cerramos con una sección de consideraciones finales y discusión, en la que se exhiben cuestiones de aplicación y análisis de resultados para uno de los dos casos abordados en la sección 4.

## **2.- Breve descripción del estado del arte y marco teórico**

Distintos enfoques de la Didáctica de la Matemática permiten dar explicaciones a cuestiones que aparecen en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje. Dadas las cualidades del estudio reportado aquí tomamos cuestiones y nociones teóricas que provienen de la Escuela Anglosajona (Polya, 1965; Schoenfeld, 1992; entre otros). Ésta pondera, desde sus lineamientos, concepciones que permiten describir los procesos cognitivos que pone de manifiesto el estudiante al momento de resolver una situación que resulte ser un problema para él, tales como el uso de heurísticas y aspectos metacognitivos implícitos y/o explícitos.

La definición de problema que tomamos para este trabajo es la siguiente:

---

<sup>2</sup> *Un estudio sobre heurísticas a nivel pre-universitario.*

Un problema para un individuo es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato. La misma fue utilizada en Chacón et al. (2009).

Entendemos por *heurísticas* (Polya, 1965) a *las operaciones típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas*. Por un lado, se cuenta con un listado no exhaustivo de heurísticas, como las siguientes: buscar regularidades, hacer una tabla o gráfico, empezar el problema desde atrás, considerar un caso particular, buscar un problema relacionado, resolver un problema similar más sencillo, dividir el problema en partes, variar las condiciones del problema, argumentar por el absurdo, etc. Además, en trabajos como Koichu et al. (2003) y Marino et al. (2008) se han propuesto organizaciones de las heurísticas que ponen de manifiesto el momento –durante la resolución de un problema– en el que ellas son utilizadas y la finalidad de su uso. No incluimos aquí el detalle pues en esta etapa de nuestro trabajo no las necesitamos, pero dejamos la referencia, por si el lector está interesado en esa temática.

Entendemos por *heurísticas espontáneas* a *aquellas heurísticas que el estudiante posee sin una formación previa y/o enseñanza explícita de las mismas*.

Otros antecedentes útiles para este trabajo son avances de nuestro equipo de investigación que nos permiten contar con:

- criterios que nos permiten anticipar que ciertas actividades serán problema para los estudiantes del CAU (Chacón et al., 2009),
- elaboración de una colección de problemas sujetas a los criterios anteriores.
- un estudio realizado con el objetivo de caracterizar heurísticas en el contexto de un *único* curso de Matemática del CAU (Marino et al. 2008)

En este último trabajo se mostró que las resoluciones escritas a problemas no son suficientes para poner de manifiesto la totalidad de heurísticas que un sujeto utiliza. Allí se reporta, a partir de fragmentos de entrevistas personales a propósito de indagar por el uso de cierta heurística (cuya aplicación no era evidente desde la resolución escrita), que los estudiantes han identificado el uso de otras estrategias que no quedaron plasmadas en el papel y que de no haber mantenido el intercambio oral, hubieran pasado desapercibidas por los investigadores. Este antecedente ha sido tomado como punto de partida para la determinación de la metodología de investigación presentada sintéticamente en la sección 1.

Si el sujeto elevara al plano conciente los procesos de pensamiento que movilizó durante la resolución de un problema (aún cuando no hubiera resuelto correctamente la actividad) y fuera capaz de comunicarlos, o nosotros pudiéramos advertirlos, tendríamos más herramientas para identificar las heurísticas que utiliza. Por esta razón, nos interesa generar condiciones para que el sujeto haga conciente sus procesos de pensamiento y nos los comunique o tengamos la posibilidad de advertirlos. Para ello, necesitamos conocer técnicas para recabar información de los procesos de pensamiento puestos en juego a la hora de resolver problemas. Este cuadro contiene una descripción de técnicas con las que se pueden diseñar entrevistas, que se confeccionó a partir de González (2008).

<b>CON VÍNCULO CON UNA TAREA ESPECÍFICA</b>			
<b>Concurrente con la actividad</b>		<b>En forma retrospectiva</b>	
<b>Técnica</b>	<b>Características</b>	<b>Técnica</b>	<b>Características</b>
<i>Interrogatorio auto-reflexivo</i>	Analizar, revisar la actividad cognitiva concurrentemente con la actividad	<i>Recuerdo estimulado</i>	Entrevista mostrando un video propio y estimulando el recuerdo con preguntas.
<i>Pensar en voz alta (introspección)</i>	Existe un modelo para codificar protocolos.	<i>Auto-observación retrospectiva libre</i>	Da a conocer sus experiencias cognitivas mediante un relato libre.
<i>Clínica verbal</i>	Interrogatorio flexible puramente verbal.	<i>Auto-observación retrospectiva</i>	El sujeto analiza su accionar cognitivo objetivamente después de realizar una tarea intelectualmente exigente.
<i>Clínica revisada</i>	Interrogatorio flexible con objetos concretos. Se obtiene información	<i>Cuestionario retrospectivo</i>	Debe aplicarse inmediatamente después de concluida una tarea intelectualmente exigente.

	verbal y manifestaciones de conducta no verbales.		
<b>SIN VÍNCULO CON ALGUNA TAREA ESPECÍFICA</b>			
<b>Técnica</b>	<b>Características</b>		
<i>Hipotética</i>	Se da una tarea que no resuelven, salvo hipotéticamente. Mencionan todo lo que saben, distinto al pensamiento en voz alta que mencionan lo que usan.		
<i>Cuestionario metacognoscitivo</i>	Se graban video y audio de las respuestas al cuestionario. Se aplica antes de la resolución de un problema. Hay una escala de puntuación y un cuestionario.		
<i>Reportes verbales</i>	Respuestas a ítems de entrevistas o cuestionarios post-experimentales.		

**Cuadro 1**

Consideramos que el proceso cognitivo llevado a cabo por el estudiante se plasma en algún tipo de *registro semiótico*. La noción de *registros de representación semiótica* fue estudiada por Duval (1998) y Hitt Espinosa (1997), entre otros. Hitt Espinosa (1997) señala que *muchas veces es el cambio de una forma de representación a otra lo que da la clave y es esencial en la resolución de un problema*. Estamos interesados en considerar los distintos registros de representación en los que el estudiante presenta y/o ordena la información en la resolución de una actividad. Consideramos los registros: verbal (o lengua natural), numérico, gráfico y algebraico. Una heurística referida a esta noción es *elegir una notación efectiva en algún registro de representación semiótica*.

### **3.- Desarrollo**

Brevemente presentamos el contexto de la investigación. El curso de Matemática del CAU tiene diversas modalidades. En una de ellas, la modalidad extendida, se desarrolló la primera parte del trabajo de campo. El curso se dicta en dos encuentros semanales de dos horas cada uno durante seis meses (de abril a octubre). Incluye contenidos de la escuela media (álgebra básica, conjuntos numéricos, geometría básica, funciones elementales) con un tratamiento que pone énfasis en la resolución de problemas y modelización así como en la argumentación. La resolución de problemas es un medio para la enseñanza de los distintos contenidos matemáticos y no se enseñan explícitamente heurísticas, ni los pasos de resolución ni se incluyen reflexiones metacognitivas en un curso típico. Este es un curso numeroso, se inscriben alrededor de 1700 estudiantes por año aunque al momento del trabajo de campo hacia finales de la cursada, la cantidad de estudiantes presentes fue de 700.

A partir de los criterios elaborados en Chacón et al (2009) se diseñaron problemas y en Octubre de 2008 se suministró a la totalidad de los estudiantes un test conteniendo tres de ellos (ver anexo). Fue de carácter individual y domiciliario. La resolución del mismo formó parte de la acreditación de la materia, lo que da cuenta de que los estudiantes estaban obligados académicamente a resolver dichos problemas. Dentro de las pautas referidas a la entrega de la resolución se les solicitó que además de la hoja pasada en limpio, nos debían entregar en hoja aparte todos sus borradores previos. Se les hizo explícita la siguiente declaración “*Anotá todo lo que pienses cuando desarrollas la resolución de cada uno de los problemas, SIN BORRAR NI TACHAR nada. Necesitamos ver todo lo que realizás para hacer la actividad. Si pensaste algo que finalmente decidiste no escribir o no entregar, por favor escribilo en la hoja borrador*”. Además se les anticipó una futura instancia presencial a modo de entrevista para ahondar en su forma de resolución, solicitándole de esta manera información para contactarnos con ellos.

Las resoluciones entregadas fueron analizadas, en una primera instancia, con la finalidad de seleccionar a los estudiantes que entrevistáramos. Éstos son quienes conforman la muestra intencional. Para conformar la muestra decidimos seleccionar aquellos estudiantes que, ante la resolución escrita de problemas, cumplan que sus producciones: I) incluyen “los intentos” previos a la entrega formal y II) ponen en evidencia capacidad para explicitar lo que hace, para probar y descartar posibles estrategias en su resolución, y usan distintos registros semióticos para comunicar parte de su resolución (esté o no matemáticamente correcta, tanto sea en el borrador y/o en la presentación en limpio)

## Procedimiento para seleccionar la técnica (ver cuadro 1) más apropiada para diseñar cada una de las entrevistas

▪ **Paso 1:** decidir si se eligen técnicas con vínculo con una tarea específica o sin vínculo con ella atendiendo al siguiente criterio.

- criterio: si el sujeto tiene poca experiencia en: la resolución de problemas, el reconocimiento de su accionar cognitivo, mantener una reflexión metacognitiva e identificar qué estrategias utiliza, decidimos restringir las técnicas a las que tengan vínculo con la resolución de problemas. En caso contrario, ante sujetos con más experiencia en resolver problemas, más formación matemática, que hayan recibido enseñanza de heurísticas, pasos en la resolución de problemas, etc. se habilita la elección de alguna de las técnicas sin vínculo con la actividad. Consideramos que en este caso, se podrían combinar técnicas con y sin vínculo con la tarea.

▪ **Paso 2:** analizar las resoluciones escritas en términos de heurísticas que han puesto en juego, si esto es claro, o identificar porciones de lo escrito en las que no sea clara la forma de resolver del estudiante (tal vez infiriendo posibles vínculos entre el borrador y la hoja pasada en limpio).

▪ **Paso 3:** utilizar los siguientes criterios generales, que permiten acotar las técnicas con las que diseñar las entrevistas.

- en los casos en los que el análisis de las resoluciones escritas pusiera de manifiesto un amplio repertorio de heurísticas, decidimos no utilizar técnicas que apelen al análisis retrospectivo pues entendemos que hemos comprendido la forma de resolver presentada. En cambio, proponemos utilizar técnicas por las que el estudiante se viera enfrentado a la resolución de un nuevo problema. En estos casos, nos interesa estar presentes mientras el estudiante hace sus razonamientos, busca caminos, explora métodos, etc. entendiendo que esto nos brinda la posibilidad de comprender su forma de pensar e indagar sobre ella libremente.

- si las resoluciones escritas pusieran de manifiesto distintos recursos, pero su uso no nos resulta claro por no comprender con qué finalidad los ha utilizado, acordamos en utilizar las técnicas retrospectivas para poder dilucidar la intención del uso de las distintas estrategias.

## **4. Ejemplos**

Aquí incluimos, a modo de ejemplo, el uso del procedimiento para la selección de la técnica para diseñar la entrevista (pasos 1, 2 y 3) en dos casos. Además complementamos con el diseño de las mismas, y reportamos brevemente, en la sección 5, la aplicación y análisis de resultados para una de ellas.

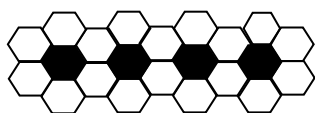
Ambos casos cumplen los requisitos para ser parte de la muestra. Por una cuestión de espacio no incluimos la fundamentación de este hecho, aunque algunas evidencias se infieren a partir de las referencias del test que hemos incluido para explicar la selección de la técnica para cada uno de los estudiantes. Respecto del paso 1 seleccionaremos una técnica con vínculo con la actividad pues nuestros estudiantes, al ser pre-universitarios y sin formación específica en resolución de problemas, cumplen las características que el criterio establece para tomar esta decisión. De este modo, descartamos las técnicas: *hipotética*, *cuestionario metacognoscitivo* y *reportes verbales*.

### Caso 1 - Estudiante “A”

**Paso 1:** Analizamos la resolución de su test (ver test en el anexo) en términos de heurísticas o buscamos identificar porciones de lo escrito en las que no es clara la forma de resolver.

En dos de los tres problemas el estudiante utiliza variedad de registros semióticos en su borrador y es capaz de concatenar su razonamiento estableciendo claramente los pasos que realiza cuando pasa en limpio la entrega. Utiliza diversas heurísticas en ambos problemas, acorde al análisis a priori que teníamos realizado. En la resolución del tercer problema el estudiante explica parcialmente su forma de resolución, quedando confusa parte de la respuesta. Sin embargo, ejemplifica, utiliza el lenguaje natural, separa en casos, etc. A continuación ejemplificamos el análisis realizado en la resolución de uno de los problemas.

**Problema 1.** *En una plaza se quieren poner canteros, rodeándolos con baldosas hexagonales, como se muestra en la figura*



**a)** *¿Cuántas baldosas se necesitarán si se quieren colocar 100 canteros?*

**b)** *¿Cuál es la máxima cantidad de canteros que se pueden armar si se dispone de 620 baldosas?*

A partir de las resoluciones del borrador (figura 1-A) y de la entrega en limpio (figura 2-A), se observa el uso de las siguientes heurísticas: *la utilización de los esquemas para contar*, como

puede verse con las baldosas que rellena con azul al indicar que solo deben agregarse cuatro de ellas por cada cantero, excepto en el primero. El uso de la heurística *elegir una notación efectiva en algún registro de representación semiótica* se advierte al encontrarse el planteo de la expresión simbólica, con aclaraciones coloquiales de los significados de las letras utilizadas, y la aplicación de la expresión para responder la pregunta. También en el planteo de la expresión, podemos considerar a partir del razonamiento de conteo, que apeló a *buscar regularidades*.

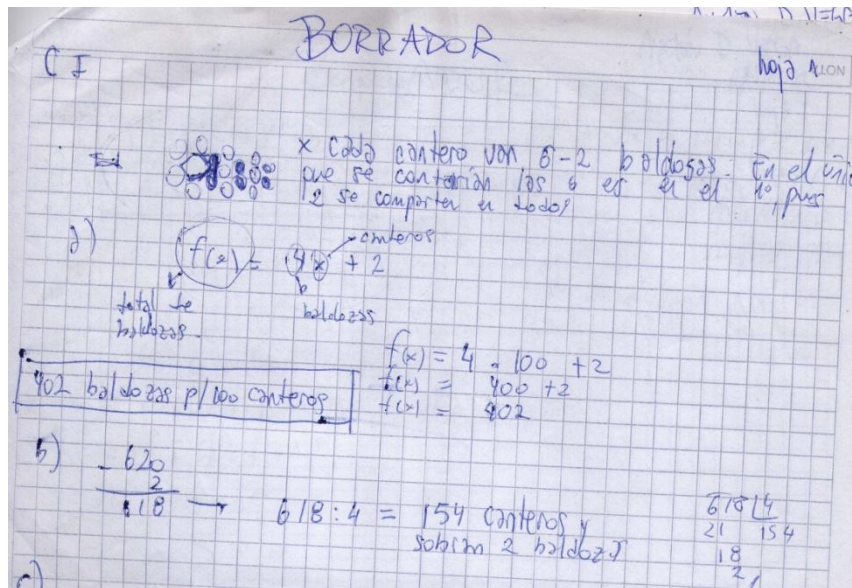


Figura 1-A

En la figura 2-A, se observa que el estudiante incluyó aclaraciones que ponen de manifiesto la comprensión de los métodos utilizados. Cabe resaltar que aquí presenta un parámetro “c” para la cantidad de canteros. Esto posiblemente pueda significar que el estudiante ha advertido un cierto tipo de estructura general, no dependiente del 4 que utilizó para responder, y posiblemente imagine problemas análogos que podrían plantearse con una estructura similar.

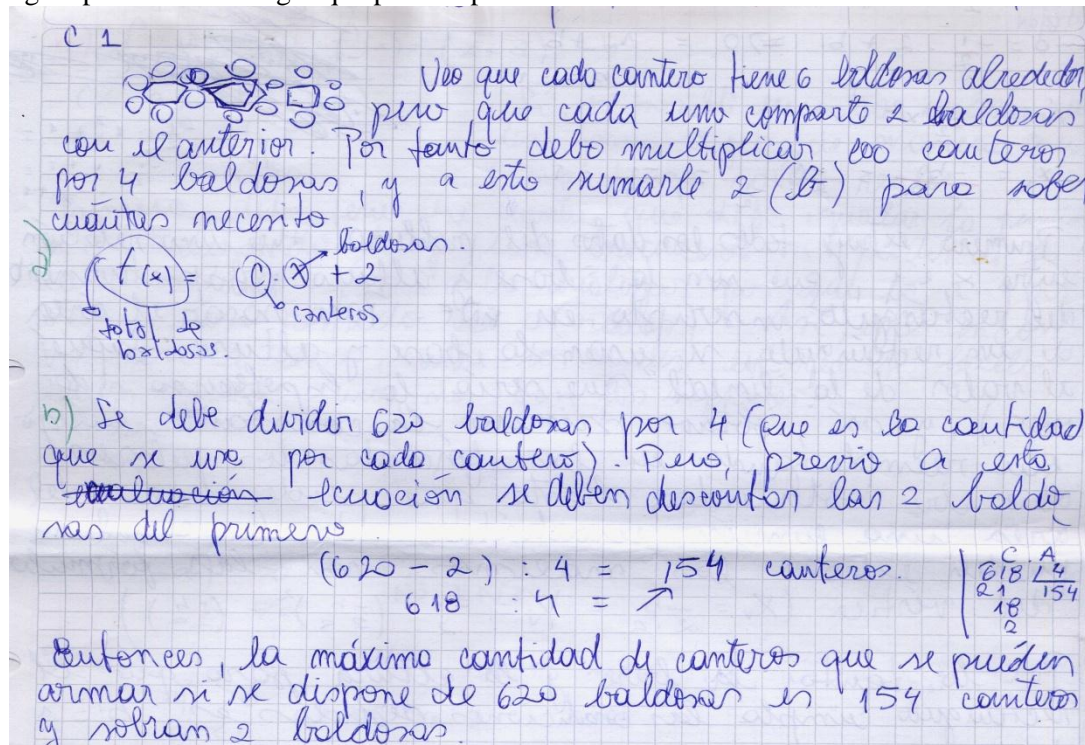


Figura 2-A

Paso 2: tomamos la decisión de qué técnica utilizar

Dos de las tres resoluciones fueron claras y exhibieron variedad de heurísticas. En el otro problema (problema 3 del test, ver anexo), la claridad no estuvo presente, pero sí el uso de heurísticas. Con lo dicho anteriormente, determinamos que la técnica apropiada para diseñar la entrevista es una de las concurrentes con la actividad. Entre las posibles, descartamos el *interrogatorio auto-reflexivo* pues, atendiendo a las características de los estudiantes pre-

universitarios mencionadas antes, no queremos exponerlo a dos tareas complejas simultáneas, como lo son la actividad matemática y la actividad metacognitiva. Por las mismas características de los estudiantes, consideramos adecuado ofrecerle objetos concretos para acercarlo a la actividad con lo que seleccionamos la *clínica revisada*. Además, nos interesó evitar condicionar su razonamiento con nuestras preguntas, razón por la cual la técnica prioritaria seleccionada es la de *pensar en voz alta* y por lo tanto descartamos la *clínica verbal*. De este modo, combinamos dos técnicas teniendo en cuenta minimizar la presencia de las preguntas de la *clínica revisada*. Solo utilizaríamos el interrogatorio flexible en caso de que no se comprendiera el problema. Como anticipamos, incluimos el diseño de la entrevista según la técnica especificada para este estudiante.

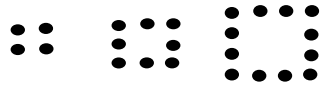
#### Diseño de la entrevista con las técnicas de *pensar en voz alta* y *clínica revisada* para el estudiante "A".

El diseño de la entrevista comienza con el siguiente encabezado:

*Nosotros ahora te invitamos a resolver un problema más, que tal vez te llame la atención realizar. La particularidad que tiene esta entrevista es que necesitamos saber qué es lo que estás pensando durante el tiempo que te ocupe la resolución del problema. Para eso, esperamos que **todo el tiempo** nos vayas diciendo qué es lo que estás pensando. No nos importa tanto si lo que haces está bien o no... sino que la clave está en focalizar lo que estás pensando en cada uno de los pasos de tu razonamiento al resolver la actividad. Por esta razón, si en algún momento te notamos callada, te vamos a preguntar ¿en qué estás pensando? Te lo aclaramos antes porque no queremos que te moleste.*

A continuación incluimos los enunciados planteados en la entrevista. La primera consigna fue la única dada oralmente para que se distienda y se familiarice con la actividad. Las siguientes fueron dadas por escrito y la lectura y comprensión de ellas quedó a cargo del estudiante.

**Consigna oral:** La situación es así, aquí voy a armar una secuencia de figuras, con porotos, de la siguiente manera:



Voy a llevar un registro en este papel de la cantidad de fichas que son usadas por cada figura, contando las fichas una por una. Así es que registro que en la primera figura hay 4 fichas, en la segunda 8, y en la tercera 12. ¿Podrías armar la siguiente figura con los porotos que hay en la mesa (hay 40 porotos en la mesa)? Con las restantes ¿podés armar la siguiente figura de la secuencia?

**Consignas escritas:**

A) ¿Cuántos porotos necesitás para armar la figura que ocupa el octavo lugar? No vale desarmar nada de lo ya hecho.

B) Con 306 porotos ¿podés armar una configuración de la secuencia, sin que te sobre ninguno? ¿Podrías armar una configuración de la secuencia usando la mayor cantidad de porotos posible?

C) Con las restantes ¿es posible armar otra configuración más pequeña?

D) Pensando en general, esto es, supongamos una cantidad arbitraria (una cantidad cualquiera) de porotos, se nos presentan dos posibilidades:

- usamos todos los porotos para armar la configuración

- o nos sobran porotos. Detengamos nuestra atención en este caso ¿con los porotos restantes es posible armar un cuadrado menor? ¿Siempre?

La actividad planteada admite variedad de heurísticas, muchas similares a las que exhibió en la resolución del test sin embargo este problema demanda pensar en un caso general (pregunta D) que propone un desafío adicional.

### Caso 2 - Estudiante "E"

Paso 1: Analizamos la resolución de su test (ver test en el anexo) en términos de heurísticas o buscamos identificar porciones de lo escrito en las que no es clara la forma de resolver.

El estudiante "E" muestra, en la hoja borrador, variedad de intentos, de posibles heurísticas, utilizando distintos registros semióticos. Para la entrega en limpio, selecciona parte del borrador, lo reorganiza y presenta respuestas correctas. Sin embargo, en la parte del borrador que no se comparte con en la entrega en limpio, no se entiende el uso que le dio a algunos elementos, tampoco es evidente en qué orden realizó su intentos ni por qué los descarta para su entrega en limpio. Se da evidencia de esto en el desarrollo del Paso 2 dado que se presenta un extracto del borrador de la estudiante, en el que aparecen anotaciones numéricas sobre las que no sabemos si las realizó previamente a una generalización, si fueron realizadas para chequear una fórmula o simplemente son ejemplos aislados. Además, se exhiben las anotaciones que realiza en un esquema que no corresponden directamente con el enunciado del problema 2 del test, pero sí podría ser considerado como parte de un pensamiento más general en el que el problema pasaría a ser un caso particular de éste. Solo al realizarle la entrevista se logrará determinar la estrategia seguida en dicha resolución.

Paso 2: tomamos la decisión de cuál técnica utilizar

Dado que no contamos con filmaciones del estudiante resolviendo problemas, descartamos el *recuerdo estimulado*. Por la falta de experiencia en llevar adelante reflexión metacognitiva por cuenta propia, acorde a las características de los estudiantes pre-universitarios, descartamos la *auto-observación retrospectiva libre* que exigiría realizar un relato libre. Decidimos no utilizar el *cuestionario retrospectivo* pues teníamos variedad de cuestiones a preguntar de su test y por esa razón no le daríamos una tarea intelectualmente exigente nueva, requerimiento para esta técnica. De este modo, proponemos diseñar la entrevista utilizando la técnica *auto-observación retrospectiva* para que complemente su forma de resolver y aclare las dudas que se nos presentan.

Diseño de la entrevista con la técnica de *auto-observación retrospectiva*.

El diseño de la entrevista comienza con el siguiente encabezado:

*Hemos seleccionado tu test porque es uno de los más claros (además de estar bien resuelto) en cuanto a la resolución de los problemas planteados. Ahora te invitamos a volver a mirar tu resolución porque quisiéramos hacerte algunas preguntas sobre el escrito que realizaste. La idea es poder rescatar de lo realizado más detalles de cómo pensaste, esto es ¿qué habías pensado en cada paso que dejaste por escrito? ¿Qué cosas no dejaste por escrito? Básicamente*



nuestro foco está en ver las estrategias y formas de pensamiento que utilizaste a la hora de resolver ese problema.

A continuación incluimos un extracto del borrador presentado en relación con el problema 2 del test, figura 1-E y 2-E, que son la evidencia que da fundamento al objetivo formulado por el entrevistador y de esta manera a las preguntas que se formularan en la entrevista.

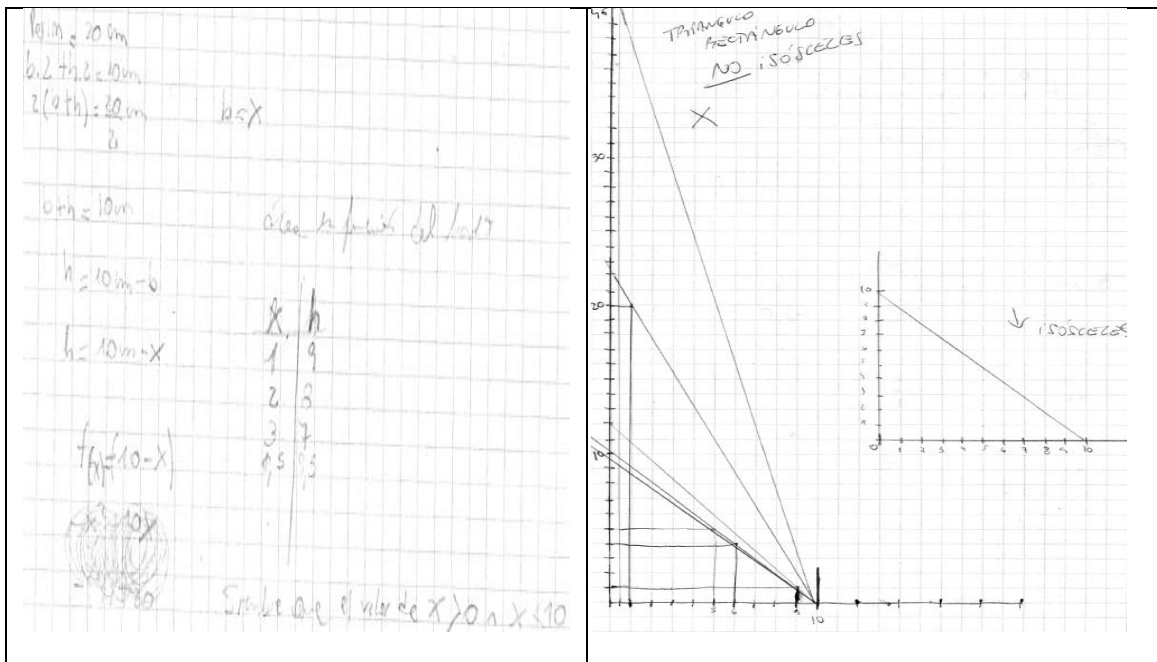


Figura 1-E

Figura 2-E

Con respecto a las figuras 1-E y 2-E, el abordaje en la entrevista que planteamos es el siguiente: *Quisiéramos que enumeres cronológicamente cómo llevaste adelante las distintas etapas de la resolución de esta actividad, desde que hiciste la lectura del enunciado, comenzaste a pensar en el borrador y lo pasaste en limpio. Del borrador nosotros encontramos que usaste: fórmulas (y/o expresiones simbólicas), gráficos, tablas de valores, otro gráfico con anotaciones en otra hoja. ¿Cómo sería la enumeración cronológica? Esto es ¿qué hiciste primero? ¿Y cómo seguiste? ¿Cómo se vinculan en esta secuencia de pasos? El objetivo de las preguntas enunciadas es identificar el orden del uso de los distintos registros de representación, pues suponemos que la secuencia de cambios de registros deriva y/o habilita el uso de alguna heurística.*

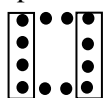
Con respecto a la figura 2-E, el abordaje que planteamos es el que se describe a continuación: *Observá tu respuesta del borrador. Pareciera que dividís en dos casos, ¿es así? ¿Cuáles son y a qué se deben? En uno tenés varios esquemas gráficos y además hacés la mención “triángulo rectángulo no isósceles” y en el otro sólo tenés un esquema gráfico en el que escribís “isósceles”. ¿Para qué los realizaste? Entiendo que uno de tus esquemas sólo es una réplica del que propone el enunciado, ¿pero el otro?, ¿en qué pensabas? Parece que aquí tenés para contarme, ¿hiciste cuentas? Sí parece que hiciste algunos rectángulos dentro de los triángulos, ¿qué te aportó. El objetivo que se persigue aquí es testear si lo que realiza es para chequear la siguiente conjetura: Siempre un triángulo encierra rectángulos cuyo perímetro es fijo; posiblemente formulada luego de la realización de la actividad. También podríamos ver si utiliza la heurística *trabajar hacia atrás* suponiendo que todos los rectángulos tenían el perímetro pedido.*

## **5.- Algunas consideraciones finales y discusión**

Para complementar la presentación, incluimos una breve referencia a cuestiones que surgieron del análisis de los resultados obtenidos a partir de la entrevista realizada al estudiante “A”.

En la resolución del problema de los protos, el estudiante pone en juego las heurísticas *hacer un esquema* con la que se ayuda para contar y *encontrar regularidades*. La primera estrategia la utiliza para cantidades manejables de protos (donde podría contar uno a uno) así como en cantidades con las que abandonaría el intento de hacer un esquema que le permita contar de a uno. Su primera forma de contar (ver esquema 1) fue: señalar que las dos líneas verticales

contienen la totalidad de porotos que se da por lado, reconociendo que lo que le resta para sumar es “dos veces” la cantidad por lado menos dos. Destacamos además, que cambió tres veces la forma de contar permitiéndole esto chequear cuentas particulares realizadas (el uso del esquema 3) y asegurar que la cantidad total de porotos a utilizar en cada configuración debía ser múltiplo de 4 (uso para ello el esquema 2)



Esquema 1



Esquema 2



Esquema 3

Al responder la última pregunta (consigna D), el estudiante utiliza un recurso geométrico –la simetría de la figura– para argumentar que la cantidad de porotos sobrantes debe ser 1, 2 o 3 pues sostiene –haciendo referencia a la figura– “*agrego uno de este lado, uno de este lado, uno de este lado, y uno de este lado. Y otra vez, uno de cada lado. Uno, dos, tres, cuatro. Y me quedarían como mínimo 1 y como máximo 3 porotos*”. Deja entrever, además que en el caso que la figura tuviera forma de triángulo, los restos posibles serían 1 o 2.

Consideramos que la decisión de la técnica utilizada para el diseño de la entrevista para este estudiante fue apropiada pues nos permitió enriquecer el conocimiento previo que teníamos de él al menos en los siguientes aspectos:

- La capacidad de *encontrar regularidades* fue enriquecida por el uso simultáneo de una heurística vinculada con las formas geométricas involucradas.
- Logra verbalizar “problemas análogos” (el ejemplo que da en la entrevista suponiendo una disposición triangular) con la finalidad de ejemplificar su modo de pensar. Entendemos ahora que probablemente cuando en el test utilizó un parámetro (“c” en el problema de las baldosas, ver figura 2-A), estaba razonando de manera análoga a esta.
- En un pasaje de la entrevista se puso de manifiesto que el estudiante no comprendía la pregunta D sino un problema parecido, mucho más complejo, que intentó abordar con una serie de heurísticas que le permitieron dar respuestas parciales. Para esta instancia fue útil haber conjugado la técnica *clínica revisada* junto con *pensar en voz alta*.

Actualmente nos encontramos en la etapa de diseño de cada entrevista para los sujetos de la muestra.

## **Bibliografía**

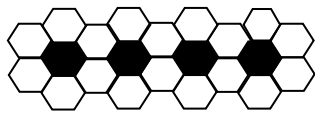
1. Chacón, M.; Farías, S.; González, V.; Poco, A.; (2009). *Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas*, Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática, Universidad Nacional de Luján, Regional Chivilcoy. Formato CD.
2. Del Puerto, S.; Minnaard C.; Seminara S.; (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.
3. Duval, R.; (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201), Grupo Editorial Iberoamérica, México.
4. González, F.; (2009); *Métodos, técnicas y procedimientos para el estudio de procesos de pensamiento*. UPEL, Maracay, Venezuela. Documento interno de trabajo.
5. Hitt Espinosa, F.; (1997). *Sistemas semióticos de representación*. Avance y Perspectiva Vol. 16, pp. 191-196, Cinvestav, México.
6. Koichu, B., Berman, A., Moore, M.; (2003). *Very able students think aloud: An attempt at heuristic microanalysis*. Proceedings of the 3rd International Conference "Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students", University of Rouse, Rouse, pp. 318-325.
7. Marino, T.; Rodríguez, M.; (2008). *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos: análisis de un caso*. Memorias de la II Reunión Pampeana de Educación Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Formato CD.
8. Marino, T.; Rodríguez, M.; *Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario*. Enviado a Paradigma en diciembre de 2008.
9. Polya, G.; (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en 1945]
10. Santaló, L. (1990). *Matemática para no matemáticos*. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España. En *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Parra y Saiz (comps.). Edit. Paidós. 1994.

## Anexo

### TEST ASIGNADO AL ESTUDIANTE "A"

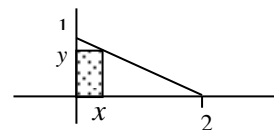
Anotá todo lo que pienses cuando desarrollas la resolución de cada uno de los problemas, SIN BORRAR NI TACHAR nada. Necesitamos ver todo lo que realizás para hacer la actividad. Si pensaste algo que finalmente decidiste no escribir o no entregar, por favor escribilo en la hoja borrador

Problema 1: En una plaza se quieren poner canteros, rodeándolos con baldosas hexagonales, como se muestra en la figura



- ¿Cuántas baldosas se necesitarán si se quieren colocar 100 canteros?
- ¿Cuál es la máxima cantidad de canteros que se pueden armar si se dispone de 620 baldosas?

Problema 2: Dado el triángulo de vértices  $M = (0,0)$ ,  $N = (2,0)$  y  $F = (0,1)$ , para cada valor de  $x$  en el intervalo  $[0,2]$  es posible determinar un rectángulo inscripto en el triángulo  $MNF$ , cuyos lados miden  $x$  e  $y$ , como lo muestra la figura:



Determinar cuál es el mayor rectángulo inscripto en  $MNF$ , es decir el de área máxima, indicando cuáles son los valores de  $x$  e  $y$  correspondientes.

Problema 3: a) Dada la función  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = (x - a)^3 + b$ , ¿es posible determinar valores para  $a$  y  $b$  de manera que  $f$  no tenga raíces reales?

b) Dada la función  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = (x - a)^4 + b$ , ¿es posible encontrar valores para  $a$  y  $b$  de manera que  $f$  no tenga raíces reales?

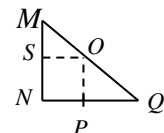
### TEST ASIGNADO AL ESTUDIANTE "E"

Anotá todo lo que pienses cuando desarrollas la resolución de cada uno de los problemas, SIN BORRAR NI TACHAR nada. Necesitamos ver todo lo que realizás para hacer la actividad. Si pensaste algo que finalmente decidiste no escribir o no entregar, por favor escribilo en la hoja borrador

Problema 1: La primera figura tiene 3 lados y 3 picos, la segunda tiene 12 lados y 6 picos, la tercera tiene 48 lados y 18 picos, y así sucesivamente. ¿Cuántos picos tendrá la quinta figura?



Problema 2: Dibujar un triángulo rectángulo isósceles  $MNQ$  en el que el cateto  $NQ$  mida 10 cm. Determinar, si es posible, un punto  $P$  sobre dicho cateto tal que el rectángulo  $NPOS$ , que se muestra en la figura, tenga perímetro 20 cm.



¿Es posible encontrar otros puntos que cumplan las condiciones de  $P$ ? Si es así indicar todos los posibles

Problema 3: Uniendo segmentos que miden  $(1/a)$  cm., donde  $a$  es algún número natural, se quiere armar un segmento que mida 5 cm. ¿Cuántos segmentos que miden  $(1/a)$  cm. se necesitan? (Aclaración: en esta unión los segmentos no se enciman).