

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

Distancia estocástica en el delineado de bordes para la segmentación de imágenes SAR polarimétricas

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la
Universidad Nacional de General Sarmiento

Autor: **Daniel Monferrán**

Director de Tesis: Dr. Andrés Sartarelli

Fecha: 11 de diciembre de 2023

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

Distancia estocástica en el delineado de bordes para la segmentación de imágenes SAR polarimétricas

Publicaciones:

- D. Monferrán, J. Gambini y A. C. Frery, “Evaluación del error en la detección de puntos de borde en imágenes SAR polarimétricas”, XIX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, pp. 389–392, nro. 389, Abr., 2017.
- D. Monferrán, A. Sartarelli, “Estimated edges of points position. Optimized model for polarimetric SAR imagery”, 2018 IEEE Biennial Congress of Argentina, ARGENCON 2018.: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., pp. 6, ISBN 978-1-5386-5032-5, url = <https://doi.org/10.1109/ARGENCON.2018.8646021>, Jun. 2018.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

- D. Monferrán, A. Sartarelli, "Modelo mejorado para la estimación de puntos de borde en imágenes SAR polarimétricas",
XXII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC 2020, El Calafate, Santa Cruz), Red de Universidades con Carreras en Informática, pp. 704–708, ISBN 978-987-3714-82-5, May. 2020.
- D. Monferrán, A. Sartarelli, "Módulo de Detección (MD) en Imágenes SAR Polarimétricas. Síntesis y Fusión de Métodos Usados para Estimar la Posición de Puntos de Borde",
2020 IEEE Biennial Congress of Argentina, ARGENCON 2020.: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.,
doi = 10.1109/argencon49523.2020.9505510,
url = <https://doi.org/10.1109/argencon49523.2020.9505510>, 2020.

Trabajos presentados:

- Workshop 2016. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Jornadas de Investigación del Doctorado en Ciencia y Tecnología. "*Evaluación del Error en la Estimación de Puntos de Borde en Imágenes SAR Polarimétricas*".
D. Monferrán, J. Gambini y A. C. Frery - Argentina - Expositor - Poster - 2016
- WICC 2017. RedUNCI - Instituto Tecnológico de Buenos Aires.
XIX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación. "*Evaluación Del Error en la Estimación de Puntos de Borde en Imágenes SAR Polarimétricas*".
D. Monferrán, J. Gambini y A. C. Frery - Argentina - Expositor - Presentación oral - 2017.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

- 1er Workshop de Sistemas Complejos 2018. Universidad Nacional de General Sarmiento.

Workshop Sistemas Complejos. *"Segmentación en Imágenes SAR Polarimétricas – Modelo Optimizado"*. D. Monferrán, A. Sartarelli - Argentina - Expositor - Presentación oral - 2018.

- ARGENCON 2018. IEEE Biennial Congress of Argentina.

"Estimated edges of points position. Optimized model for polarimetric SAR imagery". D. Monferrán, A. Sartarelli - Argentina - Expositor - Presentación oral - 2018.

- ARGENCON 2020. Congreso Bienal IEEE Sección Argentina.

"Módulo de Detección (MD) en Imágenes SAR Polarimétricas. Síntesis y Fusión de Métodos Usados para Estimar la Posición de Puntos de Borde". D. Monferrán, A. Sartarelli - Argentina - Expositor - Presentación oral - 2020.

- Teledeteccion 2020. Universidad Nacional de General Sarmiento.

Webinario de Sistemas de Radar.

"Nuevo modelo para la segmentación de imágenes SAR polarimétricas". D. Monferrán, A. Sartarelli - Argentina - Expositor - Presentación oral - Moderador - 2020.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

Aportes originales:

Los aportes que se detallan a continuación se ven respaldados por los resultados que se exponen en esta Tesis. Estos resultados muestran el beneficio que ofrece la propuesta de este trabajo al procesamiento digital de las imágenes de radar polarimétrico. Además, mediante un análisis y procesamiento adecuado, esta propuesta puede extenderse más allá de las imágenes PolSAR y ser transversal a otros tipos de imágenes digitales. También da lugar a un posterior revisionismo de métodos y modelos utilizados en el procesamiento de imágenes PolSAR que son alcanzados por el análisis que se hace en esta Tesis. Se detallan por capítulo los aportes más relevantes que se hicieron en este trabajo.

I Capítulo 6.

En este capítulo la originalidad está presente en el criterio con que se eligen las posiciones de los datos para armar las muestras, pudiendo optar por un modelo de selección no supervisada para la elección de diferentes sectores en la imagen de donde se extraen los datos. En el proceso de segmentación, recurriendo para ello al delineado de los bordes de los objetos o regiones, es esperable que un objeto o región quede definido por el delineado de una curva cerrada que representa su perímetro. Con esa primera idea se puede imaginar una entidad, que puede ser una circunferencia, que contengan al objeto o región. Del mismo modo, es esperable que todo diámetro de esa circunferencia toque al menos algún punto de borde de la región u objeto. Entonces, mediante un cambio de escala de la imagen para una conveniente elección del centro y del radio de la circunferencia, es posible que las muestras que se tomen a partir de la selección de segmentos diametrales, puedan develar una posición de borde y que la curva que se dibuje desplazándose desde una posición de borde a la siguiente posición de borde más cercana (sin retroceso) termine delineando el borde del objeto o región.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

II Capítulo 7.

El propósito de esta interfaz no es solamente mostrar el resultado final, es decir el delineado del borde de la región o el objeto en una imagen PolSAR.

La interfaz está fuertemente enfocada al proceso experimental, al trabajo de investigación. Permite por ejemplo, crear imágenes simuladas con diferentes formas y distintas distribuciones de las regiones.

Desde un entorno amable se puede elegir el tipo de imagen sobre la que se va a operar, el modelo de distribución que se va a usar y el modelo de distancia para estimar las posiciones de borde.

La interfaz muestra el sector seleccionado dibujando en color la circunferencia y los diámetros que fueron seleccionados para tomar las muestras.

Se puede ver el resultado de las acciones y decisiones que se toman en las distintas etapas que hace al algoritmo de delineado de bordes en imágenes PolSAR. Un recurso es el color de la circunferencia y de los diámetros, este cambia conforme se avanza en el proceso. Por ejemplo, cuando se toman los datos de cada diámetro, las posiciones de los datos tomados cambian de color en la imagen y se puede inferir si se ejecutó correctamente.

III Capítulo 8.

En este capítulo la originalidad está presente en la conceptualización del modelo matemático y método que se usa para la estimación de posiciones de borde, incorporando propiedades de funciones matemáticas y aplicando esas propiedades a funciones de variable discreta. Esto da lugar a la síntesis de expresiones que se usan para estimar posiciones de borde.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

La aplicación de este proceso de síntesis propuesto en esta Tesis se extiende más allá de su uso en distancias estocásticas o funciones de verosimilitud sobre imágenes PolSAR, es transversal a toda operación donde se utilice un operador de máxima sobre una función.

IV Capítulo 9.

En este capítulo la originalidad está presente en la fusión y síntesis que se hace sobre un conjunto de modelos tradicionalmente usados para estimar posiciones de borde con el objetivo de encontrar un modelo unificador para estimar posiciones de borde. Este nuevo modelo utiliza como recurso uno o más parámetros especialmente seleccionados para estimar las posiciones de borde. Cada uno de estos parámetros tiene un valor que es característico de una determinada región y por lo tanto distinguible o diferenciable en valor para cada región. Este concepto no es exclusivo de imágenes PolSAR y se puede aplicar a todo tipo de imagen en un proceso de segmentación.

V Capítulo 10.

En este capítulo además del uso exclusivo de parámetros característicos de una determinada región para estimar posiciones de borde, se usa un modelo auxiliar denominado modelo ideal. Ese modelo ideal se utiliza para demostrar que es posible estimar una posición de borde con el modelo de distancia propuesto.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

El modelo ideal incluye en sus términos una relación constante, definida por el cociente entre las matrices de covarianzas de las dos regiones de las que se toman los datos para armar la muestra. Esto es aceptable con el modelo de distribución Wishart compleja ampliamente utilizado en imágenes PolSAR, este modelo de distribución considera que cada región es homogénea. Las diferencias que se observan en las curvas del modelo ideal y en las curvas de la nueva distancia son usadas para el análisis de las posiciones estimadas de borde.

Resumen

En líneas generales, el procesamiento digital de imágenes se realiza cumpliendo una serie de etapas que se ejecutan sistemática y secuencialmente. Si la etapa final es la interpretación de la imagen, se puede destacar a “Inteligencia artificial” como un buen recurso para alcanzar esa última etapa.

El uso de computadoras (hardware) y aplicaciones (software) para la interpretación de imágenes es de utilidad si los objetos que componen a dichas imágenes se pueden distinguir. La segmentación como etapa previa a la interpretación se usa para extraer características distintivas de los objetos que componen a la imagen.

El delineado de bordes en los objetos que forman la escena de las imágenes que provee el radar de apertura sintética polarimétrico (PolSAR) se puede usar para identificar a dichos objetos y extraer sus características.

El PolSAR es muy utilizado en teledetección pues se pueden obtener imágenes terrestres remotas de alta resolución. Ejemplo de esto es la constelación de satélites Argentinos SAOCOM 1 que usa este tipo de radar. No obstante, el delineado de bordes en las imágenes de este tipo de radar es un proceso muy difícil, pues estas imágenes que contienen una gran cantidad de información se encuentran contaminadas con ruido speckle.

En la actualidad las imágenes de radar proporcionan valiosa información geográfica. Se pueden responder preguntas fundamentales sobre el clima, los océanos y la atmósfera. Se puede observar: zonas remotas como las del Ártico, la evolución de los bosques, las actividades de deforestación, el aumento del nivel del mar, la erosión costera y la contaminación marina.

Existen sistemas que utilizan la información de las imágenes de radar para evaluar posibles situaciones de peligro ante eventos naturales o antropogénicos. Estos sistemas

deben procesar los datos en el menor tiempo posible y, en caso necesario, emitir una alerta temprana.

Esto ha dado lugar a trabajos de investigación que miden y comparan los tiempos procesamiento de diferentes funciones, cuando se las usa para estimar posiciones de borde de regiones en imágenes de radar.

En esta Tesis se analizan diferentes técnicas para la estimación de la posición de los puntos de borde conjuntamente con la función de distribución Wishart compleja, la cual es ampliamente utilizada en imágenes PolSAR.

Aplicando el modelo de señal en tiempo discreto, se obtienen expresiones analíticas optimizadas que pueden usarse para la estimación de la posición de los puntos de borde con menor tiempo de procesamiento.

Se propone una nueva distancia estocástica que se denota con d_{MD} para la estimación de la posición de puntos de borde en imágenes PolSAR.

Se realiza un gran número de estimaciones de las posiciones de los puntos de borde en imágenes simuladas con el método de Monte Carlo. Se usan diferentes expresiones matemáticas para estimar las posiciones de los puntos de borde, tales como: función de verosimilitud, distancias estocásticas (incluyendo d_{MD}) y entropía. En todos los casos se usa la distribución Wishart compleja como modelo estadístico.

Los resultados se vuelcan en tablas, se muestran los valores asociados a diferentes tiempos consumidos en el procesamiento de datos, a los efectos de exponer en qué medida se reduce el tiempo de procesamiento cuando se usa la nueva expresión matemática de distancia.

En imágenes en escala de grises se muestra el resultado de aplicar el algoritmo para la estimación de la posición de puntos de borde. Cada pixel de la imagen representa una posición de la superficie barrida, y el nivel de gris que se le da a un pixel de la imagen se corresponde con el valor asignado a esa posición en la superficie barrida. Los bordes estimados de la región se delinearán con curvas de color.

Palabras Clave: imagen SAR polarimétrica, distancia estocástica, Wishart, detección de puntos de borde, modelo estadístico, matrices de covarianzas

Abstract

In general terms, digital image processing is carried out by fulfilling a series of stages that are executed systematically and sequentially. If the final stage is the interpretation of the image, “Artificial Intelligence” can be highlighted as a good resource to reach that last stage.

The use of computers (hardware) and applications (software) for image interpretation is useful if the objects that compose such images can be distinguished. Segmentation as a pre-interpretation stage is used to extract distinguishing features from the objects that make up the image.

Edge delineation on the scene-forming objects in images provided by polarimetric synthetic aperture radar (PolSAR) can be used to identify such objects and extract their features.

PolSAR is widely used in remote sensing as high resolution remote ground imagery can be obtained. An example of this is the Argentine SAOCOM 1 satellite constellation that uses this type of radar. However, the delineation of edges in the images of this type of radar is a very difficult process, since these images that contain a large amount of information are contaminated with speckle noise.

Nowadays radar images provide valuable geographic information. Fundamental questions about climate, oceans and atmosphere can be answered. Remote areas such as the Arctic, forest development, deforestation activities, sea level rise, coastal erosion and marine pollution can be observed.

There are systems that use information from radar images to assess potential hazard situations in the face of natural or anthropogenic events. These systems must process the data in the shortest possible time and, if necessary, issue an early warning.

This has led to research work that measures and compares the processing times of different functions when used to estimate edge positions of regions in radar images.

In this Thesis, different techniques for edge point position estimation are analyzed in conjunction with the complex Wishart distribution function, which is widely used in PolSAR images.

By applying the discrete-time signal model, optimized analytical expressions are obtained which can be used for edge point position estimation with less processing time.

A new stochastic distance denoted by d_{MD} is proposed for the position estimation of edge points in PolSAR images.

A large number of estimates of edge point positions in simulated images are performed with the Monte Carlo method. Different mathematical expressions are used to estimate the positions of edge points, such as: likelihood function, stochastic distances (including d_{MD}) and entropy. In all cases the complex Wishart distribution is used as statistical model.

The results are tabulated, the values associated with different times consumed in data processing are shown, in order to expose the extent to which processing time is reduced when using the new mathematical distance expression.

In grayscale images, the result of applying the algorithm for edge point position estimation is shown. Each pixel in the image represents a position on the swept surface, and the gray level given to an image pixel corresponds to the value assigned to that position on the swept surface. The estimated edges of the region are delineated with color curves.

Keywords: polarimetric SAR image, stochastic distance, Wishart, edge point detection, statistical model, covariance matrices.

Dedicado a toda mi familia.

A mis padres, que me dieron siempre lo que necesitaba, amor, apoyo, confianza, estímulo, guía. Por haberme inculcado valores, por estar siempre presentes. Por ser mis referentes, mi pilar. Por sus ejemplos de honestidad, firmeza, perseverancia, amor, tolerancia. ¡Qué claridad y qué esfuerzos realizaron para que yo pudiese formarme profesionalmente!

A mi hijo Julián, a quien amo incondicionalmente.

A mi hermana, noble persona, compañera, amiga, confidente. Con la que seguimos aprendiendo y redefiniendo el concepto de convivencia.

A mi perro Colita, a su espíritu indomable, a su amor incondicional, descansando feliz junto a mí, haciéndome compañía en esas largas noches de papeles borradores y escritos en máquina.

A Cecilia, Zuni, Juan Carlos y Roberto, con mucho cariño, ocupan un lugar importante de mi vida.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a mi Director de Tesis, el profesor Dr. Andrés Sartarelli. Más allá de su su acabado conocimiento en el tema, desde un comienzo aprobó con satisfacción la propuesta. Cabe destacar el clima afable, el grado de aceptación y la confianza que expresó sobre el trabajo de investigación que realizaba, esto sumó una cuota de bienestar durante todo el desarrollo de la Tesis. Agradezco también al Lic. Claudio Fardelli Corropolese, quien me estimuló y orientó en los pasos a seguir para iniciar el doctorado. Al Dr. Javier Marengo por sus oportunos consejos. La Universidad Nacional General Sarmiento instrumenta adecuadamente los medios que hacen posible la formación de doctores, por ello también expreso mi agradecimiento por formar parte de los Investigadores Docentes de esta prestigiosa institución.

Índice general

Formulario “E”	I
Resumen/Abstract	XII
Agradecimientos	XVII
Lista de figuras	XXIII
Lista de tablas	XXIX
Lista de acrónimos	XXXIII
Lista de símbolos	XXXV
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	2
1.2 Objetivos de la Tesis	6
1.3 Estructura de la Tesis	7
2 Marco Teórico	10
2.1 La radiación electromagnética	10
2.1.1 Polarización	11
2.1.2 El espectro electromagnético	13
2.1.3 Cambio de fase y efecto Doppler	14
3 Radar	16
3.1 Teledetección	16
3.1.1 Concepto básico de teledetección	16
3.2 Características del radar	16
3.2.1 Ecuación del radar	18

3.3	<i>RAR</i> . Radar de apertura real	22
3.4	<i>SLAR</i> . Radar de visión lateral	22
3.4.1	Emisión de pulsos sobre la superficie	24
3.4.2	Factores que influyen en la señal de retorno	25
3.4.3	Celda de resolución	39
3.4.4	Corrección radiométrica	39
3.4.5	Resolución en la dirección del <i>rango oblicuo</i>	40
3.4.6	Resolución en la dirección acimut	42
3.5	<i>SAR</i> . Radar de apertura sintética	44
3.5.1	Resolución en la dirección acimut del <i>SAR</i>	46
3.5.2	Modulación de frecuencia <i>chirp</i>	48
3.5.3	Secuencia de señales <i>chirp</i>	51
3.5.4	Frecuencia de batido y distancia <i>R</i>	52
3.5.5	Dirección y velocidad del radar	57
3.5.6	Posición del blanco	62
3.6	<i>PolSAR</i> . Radar de apertura sintética polarimétrico	63
4	Imagen de radar	65
4.1	Imagen <i>SAR</i>	65
4.1.1	Imagen de datos complejos	65
4.1.2	Geometría <i>SAR</i>	66
4.1.3	Formación de imágenes <i>SAR</i>	68
4.1.4	Modos de adquisición	69
4.1.5	Toma de datos <i>SAR</i>	71
4.1.6	El ruido speckle	75
4.1.7	Imagen multi-look	77
4.2	Imágenes en sistema <i>PolSAR</i>	78
4.2.1	Matriz de datos en sistema <i>PolSAR</i>	78
4.2.2	Representación gráfica de los datos	78
4.2.3	Coefficiente de retrodispersión o backscattering	80
4.2.4	Influencia de la polarización	80
4.2.5	Expresiones de la señal de retorno del radar	82
4.2.6	Ruido en la señal de retorno	83

5	Modelos estadísticos en imágenes	86
5.1	Convenciones de notación	86
5.2	Modelo multiplicativo en imágenes <i>SAR</i>	89
5.3	Tipos de distribución de datos <i>SAR</i>	91
5.3.1	Formatos de ruido speckle, retrodispersión y retorno	92
5.4	Tipos de distribución de datos <i>PolSAR</i>	96
5.4.1	Distribución Wishart compleja centrada	96
5.4.2	Formatos de ruido speckle, retrodispersión y retorno	96
6	Segmentación <i>PolSAR</i>	99
6.1	Selección de puntos	99
6.2	Estimador de parámetros	100
6.3	Métodos y recursos	100
6.3.1	Muestra de datos y modelo <i>RDR</i>	101
6.3.2	Partición de la muestra	102
6.3.3	Estimación de la posición de borde	103
6.3.4	Sectores de la imagen y modelo <i>SAM</i>	104
6.3.5	Matrices de covarianzas y número de vistas o looks	105
6.3.6	Número equivalente de looks	107
6.4	Conclusiones	108
7	Interfaz de usuario para imágenes <i>PolSAR</i>	109
7.1	Lenguajes de programación	109
7.1.1	Características del lenguaje Python	110
7.1.2	Uso de objetos en Python	110
7.2	Banco de imágenes	112
7.2.1	Imágenes <i>PolSAR</i> reales	112
7.2.2	Imágenes <i>PolSAR</i> simuladas	113
7.2.3	Creación de una imagen simulada	119
7.3	Selección de una región de interés	120
7.4	Fragmentos de código	125
7.5	Conclusiones	142
8	Modelos optimizados en <i>PolSAR</i>	143
8.1	Métricas generalizadas	143

8.1.1	Distancia semimétrica	143
8.1.2	Distancia métrica	144
8.1.3	Distancia ultramétrica	144
8.2	Distancias como indicadores de disimilitud	144
8.2.1	Distancias en distribuciones de probabilidad	144
8.3	Selección del modelo estadístico	144
8.4	Función de verosimilitud	145
8.4.1	Estimación de la posición del punto de borde	145
8.5	Análisis funcional	145
8.5.1	Optimizador de expresiones <i>OFJ</i>	145
8.6	Resultados	148
8.6.1	Monte Carlo	148
8.6.2	Uso de interfaz	148
8.6.3	Imagen simulada	149
8.7	Imagen <i>PolSAR</i>	149
8.7.1	Tiempos medidos	152
8.8	Conclusiones	152
9	Módulo de detección en <i>PolSAR</i>	155
9.1	Segmentación	155
9.1.1	Delineado del contorno en la imagen	156
9.1.2	Selección de modelo estadístico	156
9.2	Muestra de datos	156
9.2.1	Partición de la muestra	156
9.3	Análisis funcional	156
9.3.1	Matrices de covarianzas y número de vistas o looks	157
9.3.2	Conjunto de datos en una región	157
9.3.3	Matrices de covarianzas de las muestras A y B	158
9.3.4	Relaciones entre las matrices de covarianzas de A y B	159
9.3.5	Análisis del cociente de determinantes de matrices	161
9.3.6	Existencia de máximo en la nueva función	163
9.4	Comparación de modelos	167
9.4.1	Función de verosimilitud	167
9.4.2	Distancias estocásticas	169

9.4.3	Entropía	170
9.5	Resultados	171
9.5.1	Imagen simulada	171
9.5.2	Imagen <i>PolSAR</i>	171
9.5.3	Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos	173
9.5.4	Tiempos medidos	173
9.6	Conclusiones	176
10	Distancia d_{MD} en <i>PolSAR</i>	177
10.0.1	Selección de modelo estadístico	178
10.1	Muestra de datos	178
10.1.1	Partición de la muestra	178
10.2	Recursos	179
10.2.1	Monte Carlo	179
10.2.2	Tipos de imágenes <i>PolSAR</i>	179
10.2.3	Tiempos de procesamiento	179
10.2.4	Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos	180
10.3	Análisis funcional	181
10.3.1	Relaciones entre las matrices de covarianzas de A y B	181
10.3.2	Distancia de MD^0	182
10.3.3	Modelo ideal de d_{MD}	183
10.3.4	Grado de confianza	184
10.4	Resultados	185
10.4.1	Imagen simulada	185
10.4.2	Imagen <i>PolSAR</i>	186
10.4.3	Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos	187
10.4.4	Tiempos medidos	187
10.4.5	Error en la estimación	188
10.4.6	Imágenes	189
10.5	Conclusiones	205
A	Transformada de Fourier de la frecuencia de batido	207
B	Transformación de la función de verosimilitud	209

C Síntesis hacia una misma expresión lineal

215

D Transformación de Σ_{A_j} y Σ_{B_j}

217

Índice de figuras

1.1. Aspecto granular. Ruido speckle. Canal HHVV	5
2.1. Ondas de campo eléctrico y campo magnético	10
2.2. Ondas electromagnéticas oscilando sobre planos de polarización	11
2.3. Elipse de polarización rotada con ángulo de rotación ψ	12
2.4. Onda transversal polarizada linealmente	13
2.5. Onda transversal con polarización elíptica	13
2.6. Ilustración de cambio de fase	14
2.7. Ilustración de Corrimiento Doppler	14
3.1. Detalle de bandas en las que opera el radar (Norma IEEE 521-2013)	17
3.2. Emisión de energía del radar	19
3.3. Iluminación Radar. Visión vertical y visión lateral	23
3.4. Iluminación Radar, franja de terreno	24
3.5. Tipos de retrodispersión	26
3.6. Influencia de la frecuencia en la retrodispersión 1	27
3.7. Influencia de la frecuencia en la retrodispersión 2	27
3.8. Influencia de la frecuencia en la retrodispersión 3	28
3.9. Angulos de incidencia en distintas posiciones	28
3.10. Angulos de incidencia límite del radar. Vista lateral	29
3.11. Emisión de radar desde diferentes alturas	29
3.12. (a, b y c): Diferentes polarizaciones; (d): Método de Pauli	32

3.13. Cte. dieléctrica en función de la humedad	34
3.14. Tipos de coberturas	35
3.15. Influencia de la rugosidad en la retrodispersión	36
3.16. Cuenca Amazónica - tipos de superficie	36
3.17. Distorsiones geométricas	39
3.18. Separación entre emisiones de pulsos radar	40
3.19. Escalado en tiempo y frecuencia	42
3.20. Modelo simple de geometría <i>SLAR</i> . Vista lateral	43
3.21. Haz proyectado por la antena	43
3.22. Radar <i>SAR</i> . Barrido virtual	45
3.23. Radar <i>SAR</i> . Barrido con apertura sintética	46
3.24. Señal - parte real e imaginaria	50
3.25. Fase y pendiente de <i>up-chirp</i>	50
3.26. Tren de señales <i>chirp</i>	51
3.27. Ciclos de envío y recepción	52
3.28. Procesamiento para obtener S_b (diagrama)	53
3.29. Señales moduladas y frecuencia de batido	55
3.30. Respuesta en frecuencia para un único blanco	55
3.31. Señal modulada, corrimiento Doppler	56
3.32. Señal modulada, corrimiento Doppler y frecuencia de batido f_b	56
3.33. Diferentes posiciones del radar en su desplazamiento	57
3.34. Modelo simple de geometría <i>SAR</i> - Posición de p	59
3.35. Desplazamiento de la plataforma visto desde el plano P_{az}	60
3.36. Valores del factor de corrimiento Doppler 1	60
3.37. Valores del factor de corrimiento Doppler 2	61
3.38. Posición del blanco (punto p)	63
3.39. Señales en planos de polarización mutuamente ortogonales	64

4.1. Modelo simple de geometría <i>SAR</i> . Vista general	67
4.2. Franja mapeada	68
4.3. Modos de adquisición de <i>SAR</i>	69
4.4. Modelo simple de geometría <i>SAR</i> - Mapa de reflectancias	72
4.5. <i>SAR</i> - Monitoreo de las olas con radar. European Space Agency	73
4.6. Evaluación de Desastres usando <i>PolSAR</i>	73
4.7. Derrame de petróleo en el Mediterráneo usando <i>PolSAR</i>	74
4.8. <i>SAR</i> - Mapa de inundaciones en Mesopotamia (2016). CONAE	74
4.9. <i>SAR</i> - Herramientas para el mapeo de inundaciones (2015). NASA	75
4.10. <i>SAR</i> - Monitoreo continuo de deformación del terreno - CONICET	75
4.11. Suma de N_s fasores elementales de módulo y fase aleatorias	76
4.12. Datos de la imagen <i>PolSAR</i>	79
4.13. Fenómenos oceanográficos y meteorológicos	79
4.14. Modelo de ruido multiplicativo	84
5.1. Función de distribución Gamma	88
5.2. Función de distribución raíz cuadrada de Gamma	88
5.3. Función de distribución inversa de Gamma	89
5.4. Función de distribución inversa raíz cuadrada de Gamma	89
6.1. Regiones en la imagen y posición de borde	101
6.2. Muestra de datos - rayos	102
6.3. Conjuntos de datos A_j y B_j para una posición de j	103
6.4. Imagen <i>PolSAR</i> seleccionada	104
6.5. Sector seleccionado en una Imagen <i>PolSAR</i>	105
6.6. Selección de tipos de distribución	105
6.7. Posibles tipos de distribución. a.- <i>espiral</i> , b.- <i>lineal</i>	106

7.1. Interfaz de usuario (<i>IdeU</i>)	110
7.2. Matrices de datos complejos de la imagen PolSAR simulada	118
7.3. Panel para crear una imagen sintética PolSAR	119
7.4. Panel de matrices de covarianzas de una Imagen <i>PolSAR</i>	120
7.5. Panel de selección de una imagen <i>PolSAR</i>	120
7.6. Imagen <i>PolSAR</i> seleccionada	121
7.7. Sector seleccionado en una Imagen sintética	121
7.8. Sector seleccionado de una Imagen sintética	122
7.9. Posiciones de los datos de las muestras	122
7.10. Posiciones de borde 1	123
7.11. Sector seleccionado en una Imagen PolSAR	123
7.12. Posiciones de borde 2	124
7.13. Posiciones de borde 3	124
7.14. Posiciones de borde estimadas - fiabilidad	125
8.1. Señales discretas	146
8.2. Imagen <i>PolSAR</i> . Bahía de San Francisco	149
8.3. Puntos de borde. Canal HH. 421×421 píxeles	149
8.4. Sector seleccionado. Bahía de San Francisco. 1024×900 píxeles	150
8.5. Puntos de borde. Canal HH. 363×363 píxeles	150
8.6. Puntos de borde. Canal HH. 363×363 píxeles	150
8.7. Puntos de borde. Canal HH-HV. 341×341 píxeles	151
8.8. Delineado de borde. Canal HH-HV. 341×341 píxeles	151
9.1. Subconjunto de datos	158
9.2. A_j y B_j con $j < P$	159
9.3. A_j y B_j con $j > P$	159
9.4. Detalle de atributos de la imagen 1	160

9.5. Máximos y mínimos en $ \Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} $	160
9.6. Máximos y mínimos en $ \Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} $	160
9.7. A_j y B_j con $ \Sigma_{II} < \Sigma_I $	164
9.8. A_j y B_j con $ \Sigma_{II} < \Sigma_I $	165
9.9. Detalle de atributos de la imagen 4	166
9.10. Detalle de atributos de la imagen 5	167
9.11. Detalle de atributos de la imagen 6	168
9.12. Puntos de borde. Canal HH. 441×441 píxeles	171
9.13. Puntos de borde. Canal VV. 235×235 píxeles	172
9.14. Puntos de borde. Canal HH-HV. 153×153 píxeles	172
9.15. Delineado de borde. Canal HH-HV. 153×153 píxeles	172
9.16. Sector seleccionado. Canal HH. 221×221 píxeles	174
9.17. Puntos de borde. Canal HH. 221×221 píxeles	174
9.18. Puntos de borde. Canal HH. 193×193 píxeles	175
9.19. Sector seleccionado. Canal HH. 225×225 píxeles	175
9.20. Puntos de borde. Canal HH. 225×225 píxeles	175
10.1. Puntos de borde. Canal HH. 283×283 píxeles	186
10.2. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH.	186
10.3. Puntos de borde. Canal HH-HV. 257×257 píxeles	187
10.4. Puntos de borde estimados con d_{MD}	189
10.5. Puntos de borde estimados con d_{MD} . Canal HH	190
10.6. Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$	190
10.7. Puntos de borde estimados con d_{MD} . Canal HH	191
10.8. Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$	191
10.9. Sector seleccionado. Canal HH. 257×257 píxeles	192
10.10. Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$	192

10.11. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 165×165 píxeles	193
10.12. Sector seleccionado. Canal HH. 165×165 píxeles	193
10.13. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 1	194
10.14. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 193×193 píxeles	194
10.15. Sector seleccionado. Canal VV. 193×193 píxeles	195
10.16. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 2	195
10.17. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal VV. 173×173 píxeles	196
10.18. Sector seleccionado. Canal VV. 173×173 píxeles	196
10.19. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 3	197
10.20. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal VV. 275×275 píxeles	197
10.21. Sector seleccionado. Canal HV-VV. 275×275 píxeles	198
10.22. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 4	198
10.23. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 5	199
10.24. Sector seleccionado. Canal HV-VV. 275×275 píxeles	199
10.25. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 163×163 píxeles	200
10.26. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 6	200
10.27. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 185×185 píxeles	201
10.28. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 7	201
10.29. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 217×217 píxeles	202
10.30. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 8	202
10.31. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 161×161 píxeles	203
10.32. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 9	203
10.33. Imagen <i>PolSAR</i> . Canal HH. 171×171 píxeles	204
10.34. Puntos de borde y curvas con nuevo modelo 10	204

Indice de tablas

1.1	Datos de satélites con tecnología <i>SAR</i> a bordo, [8–10]	4
3.1	Bandas y aplicaciones más frecuentes	19
3.2	Tipos de Polarización en sistemas radar	31
3.3	Valores de cte. dieléctrica en diferentes cubiertas de suelo	33
3.4	Valores característicos de <i>RMSH</i>	37
3.5	Criterios para establecer el grado de rugosidad	38
3.6	Datos de iluminación para modo de adquisición STRIPMAP [65]	52
4.1	COSMO-SkyMed. Modos de adquisición del instrumento SAR-2000 [77] . .	71
4.2	SAOCOM-1. Modos de adquisición del <i>SAR</i>	78
8.1	Relación de los tiempos de procesamiento	152
9.1	Relación en tiempos de procesamiento al estimar <i>PPB</i>	173
10.1	Tabla de códigos de color para <i>PPB</i>	185
10.2	Relación en tiempos de procesamiento al estimar <i>PPB</i>	188
10.3	Estadística del error que se produce al estimar <i>PPB</i> sobre 1000 mediciones	188

Índice de código fuente

7.1	Lenguaje R archivo dm08Direc	112
	dm08Direc.R	112
7.2	Lenguaje Python ejemplo 1	113
7.3	Lenguaje Python ejemplo 2	114
7.4	Lenguaje Python archivo imgSyntheticSAR_03 líneas 259 a 282	116
	imgSyntheticSAR_03.py	116
7.5	Lenguaje Python archivo zoneSinteticdmSAR_01 líneas 145 a 182	116
	zoneSinteticdmSAR_01.py	116
7.6	Lenguaje Python archivo wishartdmSAR_01 líneas 12 a 28	117
	wishartdmSAR_01.py	117
7.7	Lenguaje Python archivo wishartdmSAR_01 líneas 35 a 73	117
	wishartdmSAR_01.py	117
7.8	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5203 a 5224	125
	interfazSAR_12.py	125
7.9	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5019 a 5125	126
	interfazSAR_12.py	126
7.10	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5134 a 5151	128
	interfazSAR_12.py	128
7.11	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 2969 a 3009	128
	interfazSAR_12.py	128
7.12	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5833 a 5986	129
	interfazSAR_12.py	129
7.13	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6093 a 6100	132
	interfazSAR_12.py	132
7.14	Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7439 a 7450	132
	interfazSAR_12.py	133

7.15 Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7397 a 7435	133
interfazSAR_12.py	133
7.16 Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 346 a 378	134
elAtrilToImgSAR_02.py	134
7.17 Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 382 a 440	134
elAtrilToImgSAR_02.py	134
7.18 Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6108 a 6158	135
interfazSAR_12.py	136
7.19 Lenguaje Python archivo imgPolarimetSAR_01 líneas 276 a 290	136
imgPolarimetSAR_01.py	137
7.20 Lenguaje Python archivo imgPolarimetSAR_01 líneas 205 a 268	137
imgPolarimetSAR_01.py	137
7.21 Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6632 a 6781	138
interfazSAR_12.py	138
7.22 Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7299 a 7311	141
interfazSAR_12.py	141
7.23 Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7317 a 7344	142
interfazSAR_12.py	142

Acrónimos

	Descripción
<i>CCD</i>	Dispositivo de cargas eléctricas interconectadas (charge-coupled devices)
<i>CL-POL</i>	Polarización compacta
<i>DP</i>	Polarización doble
<i>IdeU</i>	Interfaz de usuario
<i>IPCC</i>	Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático
<i>MD</i>	Módulo de Detección
<i>MLE</i>	Estimador de máxima verosimilitud
<i>MoM</i>	Estimador basado en el método de momentos
<i>OEM</i>	Ondas electromagnéticas
<i>OFJ</i>	Optimizador de $f[j]$
<i>OMM</i>	Organización Meteorológica Mundial
<i>PDF</i>	Función de densidad de probabilidad
<i>PolSAR</i>	Radar de Apertura Sintética polarimétrico (Polarimetric Synthetic Aperture Radar)
<i>PPB</i>	Posición de Puntos de Borde
<i>PRF</i>	Ecos de repetición de pulsos de frecuencia
<i>PRI</i>	Intervalo de repetición de pulsos (Pulse Repetition Interval)
<i>PRT</i>	Tiempo de repetición de pulso
<i>QP</i>	Polarización cuádruple
<i>RADAR</i>	Sistemas RADAR (Radio Detection And Ranging)
<i>radar,</i>	
<i>RAR</i>	Radar de Apertura Real
<i>RDR</i>	Rayos de la rueda

<i>RHS</i>	Lado derecho de la igualdad
<i>RMSH</i>	Valor cuadrático medio en altura (Root Mean Square Height)
<i>SAOCOM</i>	Satélite Argentino de Observación con Microondas
<i>SAR</i>	Radar de Apertura Sintética (Synthetic Aperture Radar)
<i>SL</i>	Vista lateral (Side-Looking)
<i>SLAR</i>	Radar aerotransportado de vista lateral (Side Looking Airborne Radar)
<i>SLC</i>	Complejo de una sola vista (Single Look Complex)
<i>SP</i>	Polarización simple

Símbolos

	Descripción
$[A]$	Operador redondeo a entero más cercano de A
$(A)^*$	Operador conjugada de A
$(A)^t$	Operador traspuesta de A
$(A)^H$	Operador traspuesta conjugada de A
$ A $	Operador determinante de A
A_σ	Matriz de dispersión
A_e	Apertura efectiva de la antena
A_g	Apertura geométrica de la antena
B	Ancho de banda
B_D	Ancho de banda doppler
β	Angulo de mirada
\check{h}	Versor de E en la dirección horizontal
\check{v}	Versor de E en la dirección vertical
c	Velocidad de la luz
δ_{Az}	Resolución en la dirección acimut
δ_{AzSint}	Resolución en la dirección acimut
δ_g	Proyección en tierra de la resolución del rango oblicuo
δ_r	Resolución en la dirección del rango oblicuo
$down - chirp$	Modulación <i>chirp</i> con pendiente negativa
E	Vector campo eléctrico
ϵ	Constante dieléctrica
ϵ_d	Angulo de depresión
f_0	Frecuencia de la señal emitida
f_b	Frecuencia de batido

f_{bm}	Frecuencia de batido media
f_d	Frecuencia de corrimiento Doppler
f_{Dc}	Doppler Centroide
f_R	Tasa Doppler
G	Ganancia de la antena del radar
γ	Angulo rasante
K_a	Eficiencia de la antena radar
k_c	Indice de modulación lineal
L	Número equivalente de Looks
L_a	Longitud de antena de RAR
L_{AS}	Longitud equivalente de antena SAR
L_{Atm}	Pérdidas atmosféricas en las ondas electromagnéticas
L_D	Factores internos de atenuación
L_{ges}	Factor de pérdida de potencia
L_j	Pérdidas de fluctuación durante el reflejo.
λ	Longitud de onda
μ_{Dp}	Factor de corrimiento Doppler
ω_0	Pulsación base
P_τ	Potencia capturada por la antena del radar
P_{min}	Potencia mínima admisible
P_r	Potencia retrodispersada
P_t	Potencia emitida por el radar
$\Pi(\cdot)$	Operador de señal rectangular
$R(\tau), R$	Distancia entre el emisor y el blanco
R_{max}	Rango o distancia máxima admisible
$rect\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$	Pulso de amplitud unitaria de duración τ_0
$S_b(t)$	Señal de batido
$s_e(t)$	Señal emitida
$s_r(t)$	Señal recibida
σ	Coefficiente de retrodispersión
σ_e	Conductividad eléctrica
σ_{ef}	Sección cruzada o sección eficaz del blanco
$\sigma_{f,c}$	Coefficiente de la matriz de dispersión; f: fila; c: columna

σ_p	Reflectancia de un píxel
T_{chirp}	Tiempo de <i>up – chirp</i> o <i>down – chirp</i>
T_i	Tiempo de integración
t_r	Tiempo de retraso de la señal recibida
τ_0	Duración del pulso
τ_{BLIND}	Radar aerotransportado de vista lateral (Side Looking Airborne Radar)
τ_p	Tiempo de duración del pulso emitido por el radar
θ	Angulo de incidencia
θ_{3db}	Ancho angular
θ_a	Ancho del haz proyectado por la antena del radar
θ_{ac}	Angulo acimutal
θ_l	Angulo de incidencia lejano
$\text{tr}(\omega)$	Operador traza de ω
<i>up – chirp</i>	Modulación <i>chirp</i> con pendiente positiva
v_{ac}	Velocidad en la dirección acimutal
v_g	Velocidad de la onda en el medio
v_q	Velocidad relativa del receptor con respecto al medio
v_r	Velocidad radial
v_t	Velocidad tangencial
ρ_{back}	Densidad de potencia en la dirección de retorno el radar
ρ_{dir}	Densidad de Potencia generada por una antena direccional
ρ_{iso}	Densidad de Potencia radiada en forma isotrópica
Z	Imagen que se obtiene de los retornos captados por el SAR
Z_ϕ	Valores de fase de la imagen Z
Z_A	Valores de intensidad de la imagen Z

Capítulo 1

Introducción

En esta introducción se exponen características distintivas de la tecnología Radar, su evolución, su campo de aplicación y por lo mismo, lo significativo y relevante que resulta el aporte que pueda hacerse a esta tecnología.

El uso del radar se inicia en la segunda guerra mundial para la detección y localización de submarinos, luego pasó a formar parte de los sistemas de navegación aérea y marítima.

Otra de las aplicaciones del uso del radar fue como complemento de las fotografías aéreas, pues el uso de microondas en lugar de la luz solar, permite la observación diurna y nocturna de la superficie terrestre sin importar las condiciones climáticas (lluvia, nubes, etc.). Nace entonces el radar de visión lateral “Side Looking Airborne Radar, (*SLAR*)” con aplicaciones en estudios de la superficie terrestre.

Durante el final de los años 60 y principios de los 70 gran parte del mundo fue cubierto por el *SLAR*. Se pueden citar dos ejemplos en América: en Brasil el proyecto Radam, que originalmente cubría una superficie de 4,5 millones de kilómetros cuadrados, fue extendido para cubrir todo el país con una superficie de 8,5 millones de kilómetros cuadrados, más la cobertura del área Amazónica [1] para estudios en Colombia, Ecuador, Perú y Bolivia.

1978. El lanzamiento del SEASAT en 1978 (Radar espacial para la observación de la tierra) cambió la dirección hacia el campo de las microondas para la observación de la superficie de la tierra, que hasta ese momento se realizaba por medio de imágenes ópticas; esta situación fue confirmada con la campaña SAR-580 de la Agencia Espacial Europea durante 1981-1983 [1]. El experimento de “Radar de apertura Sintética, (*SAR*)”, con el Satélite SEASAT, suministró en 1978 las primeras imágenes espaciales de radar. El radar operaba en la banda L (23,5 cm) con un ángulo de observación de 20° y una

resolución de 25 m.

1995. El vehículo Delta II de MacDonnel Douglas colocó la nave espacial Radarsat en órbita en Noviembre de 1995 equipada con tecnología *SAR* y destinado a la exploración de petróleo y gas, minerales y pesca, navegación marítima, agricultura, vegetación, planificación urbana, control del hielo flotante en mares, mapeo de inundaciones, etc. Posee un modo de rayos ajustables que le permite adquirir imágenes con barridos de 50 km a 500 km de ancho.

1.1. Estado del arte

Los diferentes climas presentes en el planeta y las características físicas particulares de cada terreno requieren de sistemas que puedan ver a través de: polvo, humo, niebla o lluvia; con y sin presencia de luz solar. Estos sistemas deben tener la suficiente sensibilidad como para detectar la morfología y el estado en el cual se encuentra el terreno o superficie, que puede ser: líquido, viscoso, húmedo, arenoso o cubierto por vegetación.

Cambios en el nivel del mar han motivado la realización de trabajos dedicados al estudio del desplazamiento de capas de hielo en el Ártico [2, 3]. Se estima que el gran porcentaje de las contribuciones al aumentando del nivel del mar proviene del derretimiento de la capa superficial del Ártico, que se abre camino a través de corrientes que llegan hasta el océano. Estudios realizados sobre los cambios climáticos han dado lugar a hipótesis que pronostican un creciente aumento de tormentas e inundaciones en el planeta como resultado del calentamiento global [4] y existen registros de precipitaciones intensas en Estados Unidos, Canadá, Australia, Japón, Sudáfrica, y Europa.

La OMM realizó un informe muy detallado del estado del clima mundial en 2018 con un pronóstico alarmante, [5]. Este informe incluye una Declaración del Secretario General de las Naciones Unidas, que menciona en forma destacada un documento del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático o “Intergovernmental Panel on Climate Change, (IPCC)”, en el que se detallan como hechos alarmantes, los impactos del calentamiento global.

La reciente tragedia ambiental en Australia (2019 - 2020) es un lamentable suceso que expone concretamente la responsabilidad y la seriedad con que deben analizarse los informes mencionados, así como el rol estratégico y la importancia que reviste el uso

de los sistemas de monitoreo aéreo y satelital.

Del mismo modo, es evidente la creciente necesidad de poder monitorear y detectar en forma temprana este tipo de catástrofes y la tecnología radar da respuesta a esta necesidad. Actualmente se pueden encontrar publicaciones que documentan el desarrollo de esta tecnología, su aplicación en situaciones concretas, el potencial y las ventajas de las imágenes *SAR* [6, 7].

La NASA, desde su centro de investigación y desarrollo Lab JPL (Laboratorio de propulsión a chorro), incorporó el *SAR* por primera vez en el satélite oceanográfico Seasat en 1978; posteriormente derivó en el desarrollo del radar de imágenes espaciales o “Space Imaging Radar, (SIR)”, con las misiones del “space shuttle” en 1981, 1984, 1994. Es decir que, luego del lanzamiento en 1978 del primer satélite *SAR* civil, se continuó con una constelación de satélites equipados con sensores de similares características.

Argentina ha dado un importante paso, incorporándose al grupo de países que desarrollan y explotan esta tecnología. La constelación de “Satélites Argentinos de Observación Con Microondas, (SAOCOM)” es un sistema de dos satélites de observación terrestre de la agencia espacial de Argentina, CONAE. Están equipados con un radar de apertura sintética polarimétrico en banda L de 1,275 GHz y una antena desplegada de $35m^2$, lo que los convierte en la antena más grande de uso civil en el espacio. El lanzamiento del SAOCOM 1A fue realizado el 7 de octubre de 2018 y el SAOCOM 1B fue lanzado el 30 de agosto de 2020. Estos satélites en conjunto con cuatro satélites COSMO-SkyMed equipados con *SAR* de banda X de la agencia espacial italiana (ASI), conforman la constelación “Sistema Italo Argentino de Satélites para la Gestión de Emergencias”, o constelación (SIASGE). El acuerdo firmado en julio de 2005 permite compartir la información obtenida por los satélites argentinos e italianos así como el uso de estaciones terrenas.

Las mantas térmicas que cubren al satélite Argentino, fueron diseñadas y construidas por el Departamento de Aeronáutica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Los paneles solares fueron integrados por el Laboratorio Tandar de la CNEA. El diseño de la antena radar fue realizado por el Instituto Argentino de Radioastronomía, siendo calificada e integrada por VENG. La empresa Ascentio Technologies desarrolló el centro de operaciones del satélite. INVAP fue el contratista principal del proyecto.

Los satélites equipados con sistema *SAR* Polarimétrico usan sensores que operan en diferentes bandas con distintas alternativas de ángulos de incidencia y con polarizaciones

múltiples, eso los hace una herramienta eficaz para la teledetección geofísica.

La Tabla 1.1 enumera algunas de las misiones satelitales civiles, proporciona datos tales como: nombres de los satélites, organización o país responsable, frecuencia o banda en que trabaja, tipos de polarización y año de lanzamiento. El detalle de los tipos de polarización se encuentra en 3.4.2.4, en la tabla 3.2.

Satélites civiles de misiones <i>SAR</i>					
Satélite	Agencia	Banda	Polarización	Inicia	Finaliza
SEASAT	NASA	L	HH	1978	1978
ALMAZ	RSA	S	HH	1991	1992
ERS-1	ESA	C	VV	1991	2000
ERS-2	ESA	C	VV	1995	2011
JERS-1	NASA/NASDA	L	HH	1992	1998
ENVISAT-ASAR	ESA	C	SP, DP	2002	2012
ALOS-PALSAR	JAXA	L	QP	2006	2011
RADARSAT-2	CSA	C	QP	2007	—
TerraSAR-X	DLR	X	QP	2007	—
COSMO-SkyMed 1	ASI	X	QP	2007	—
TanDEM-X	DLR	X	QP	2010	—
Sentinel 1	ESA	C	DP	2013	—
SAOCOM 1A	CONAE	L	SP, DP, QP, CL-POL	2018	—
SAOCOM 1B	CONAE	L	SP, DP, QP, CL-POL	2020	—

Tabla 1.1: Datos de satélites con tecnología *SAR* a bordo, [8–10]

El satélite SAOCOM-1A con polarización completa o full polarimétrico, tiene por objetivo prevenir, monitorear, atenuar y evaluar catástrofes de origen natural y de origen antrópico.

En los sistemas pensados para emitir una alerta temprana, debe ser mínimo el tiempo dedicado al procesamiento de datos para obtener información. Por tal razón es relevante el esfuerzo dedicado al desarrollo de algoritmos y a modelos o expresiones matemáticas que reducen sensiblemente ese tiempo de procesamiento.

Algunos trabajos de investigación, tales como [11], analizan y comparan los tiempos y la precisión de los resultados obtenidos usando diferentes modelos en la estimación de posiciones de borde en las imágenes del *SAR*. Por lo mismo, se hace evidente no sólo la importancia de las imágenes del *SAR*, sino la correcta elección de métodos y modelos que se usan para identificar posiciones en este tipo de imágenes.

Identificar correctamente las posiciones se extiende a la identificación correcta de los objetos de la escena en estas imágenes fuertemente contaminadas con ruido speckle.

Es necesario un algoritmo para la segmentación de los objetos que la componen y esto se puede lograr con un correcto delineado de los bordes de esos objetos.

En este punto cabe destacar lo difícil que resulta la aplicación de técnicas adecuadas de procesamiento en imágenes *SAR* para la correcta estimación de la posición de puntos de bordes que de lugar al delineado, técnicas que difieren sensiblemente de las técnicas a las que se recurre para delinear bordes en imágenes no contaminadas con ruido speckle, como el caso de imágenes contaminadas con ruido aditivo.

El trabajo de esta Tesis se concentra en algoritmos para la estimación de la posición de puntos de borde, teniendo en cuenta no sólo la correcta estimación de esas posiciones, sino el tiempo de procesamiento necesario para esas estimaciones, tiempo que debe ser mínimo en situaciones de “Alerta Temprana”. Ese es un aspecto relevante que motiva el análisis y da lugar al desarrollo de esta Tesis.

Es deseable encontrar un nuevo modelo matemático y un nuevo algoritmo que se ejecute en un tiempo comparativamente menor con respecto a otros algoritmos que se usan con el mismo propósito.

En imágenes *SAR* se requiere de un algoritmo que pueda operar adecuadamente sobre los datos que caracterizan a ese tipo de imágenes, para ello debe adoptarse una distribución que modele adecuadamente esos datos. Los modelos existentes para imágenes *SAR* se apartan fuertemente del modelo Gaussiano aditivo, siguiendo en su gran mayoría un modelo multiplicativo. La Figura 1.1 es un ejemplo de este tipo de imagen contaminada con ruido speckle.



Figura 1.1: Aspecto granular. Ruido speckle. Canal HHVV. Imagen creada con la interfaz **IdeU** desarrollada en esta Tesis

El aspecto granular que puede observarse en la Figura 1.1 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EEUU.) es debido al ruido “speckle”, este ruido es inherente al proceso de formación de la imagen y es característico de imágenes obtenidas con sistemas de iluminación coherente.

El delineado de bordes en este tipo de imágenes es muy difícil y representa un problema de gran complejidad. Los métodos clásicos de procesamiento de imágenes que se usan en la detección de bordes [12–15], o la eliminación de ruido [16–18] resultan ineficientes.

Algunos trabajos de autores han estudiado los métodos clásicos de procesamiento digital de imágenes, adaptándolos para poder usarlos en imágenes *SAR*. Estos métodos utilizan diferentes tipos de detectores de bordes [19–21] y la aplicación de diferentes tipos de filtros [22–24]. Si bien fueron usados con relativo éxito, todos estos métodos tienen en común el análisis de la imagen completa, lo que implica un gran tiempo de procesamiento debido a las grandes dimensiones que pueden poseer las imágenes *SAR*.

Dado que la aplicación de filtros como etapa previa a la segmentación consume un tiempo de procesamiento extra, es deseable poder evitar esta etapa previa. Además, los filtros lineales no son una opción, borronan los bordes existentes en la imagen, no aportan una mejora significativa sobre los píxeles con mucho ruido y tienen el agravante de contaminar la vecindad del pixel con ruido.

En [25–28] se usa un método para reducir el tiempo de procesamiento, ese método estima una cantidad discreta de posiciones de borde, esas posiciones se usan para construir la línea de borde mediante curvas b-spline. No obstante, la estimación de los parámetros que indexa a la función que se usa para estimar las posiciones de borde, requiere de un importante tiempo de procesamiento adicional.

Resulta evidente el beneficio que representa disponer de nuevos algoritmos y modelos matemáticos que conduzcan a una buena segmentación de imágenes *PolSAR* con el menor tiempo de procesamiento posible.

1.2. Objetivos de la Tesis

Esta Tesis está inspirada en el objetivo principal de encontrar nuevas formas de aprovechar las posibilidades que ofrece el volumen de información contenida en las imágenes *PolSAR*.

- Objetivo principal.
 - Por todo lo expuesto en 1.1, resulta evidente la importancia del correcto delineado del borde de los objetos que forman parte de la imagen. Un mal delineado induce a error en los resultados que puedan obtenerse de las etapas posteriores en el procesamiento digital de la imagen.
 - Es por ello que el esfuerzo en esta Tesis se concentra en el uso de modelos que resulten apropiados para un correcto delineado.
 - Por hipótesis, es posible encontrar nuevas expresiones o modelos matemáticos que resulten aptos para un proceso de segmentación en base a un correcto delineado del contorno de los objetos de la imagen.

Planteado el objetivo principal y las razones que lo justifican, se detallan los objetivos específicos de esta Tesis

- Objetivos específicos.
 1. Seleccionar y analizar expresiones algebraicas usadas para estimar la “Posición de Puntos de Borde (*PPB*)” de objetos o regiones en imágenes de *PolSAR* contaminadas con ruido speckle.
 2. Implementar esas expresiones.
 3. Proponer una nueva expresión o modelo matemático.
 4. Implementar ese nuevo modelo.
 5. Analizar y evaluar la precisión al estimar la *PPB* con los diferentes modelos propuestos.
 6. Analizar y evaluar la precisión al estimar la *PPB* con el nuevo modelo.
 7. Comparar el tiempo de procesamiento y la precisión usando los modelos propuestos con el nuevo modelo.

1.3. Estructura de la Tesis

La Tesis está organizada en diez capítulos. A continuación se sintetizan los contenidos de cada capítulo a los efectos de una orientación en la lectura.

1. Contexto de esta Tesis.

■ Capítulo 1.

Esta Tesis se inicia en las secciones que anteceden a la presente con una breve descripción de los motivos que impulsaron el uso del RADAR. En una revisión histórica se describe la evolución de la tecnología radar a la tecnología radar de apertura sintética. Se mencionan algunas características particulares de esa tecnología que hacen de ella una herramienta única para la captura de imágenes bajo ciertas condiciones ambientales en las que otros sistemas de captura fallan.

■ Capítulo 2.

Se hace una breve descripción de temas y conceptos que están presentes en los posteriores capítulos donde se analizan fenómenos físicos de interés que han sido estudiados y modelados matemáticamente.

■ Capítulo 3

Se hace una descripción de las características del radar y los factores que influyen en la respuesta que se obtiene cuando se usa esa tecnología. Se incluye una descripción de *SLAR* y *SAR*.

■ Capítulo 4.

Se hace una descripción detallada de las imágenes *SAR*. Se documenta sobre la presencia de ruido en la imagen y su suavizado mediante el procesamiento multi-look. Se expone brevemente los diferentes modos con que se puede obtener este tipo de imagen. Se hace una descripción del sistema *PolSAR*, objeto de análisis en capítulos posteriores.

■ Capítulo 5.

Se hace una exposición de los estadísticos que pueden usarse en imágenes *SAR* bajo el modelo multiplicativo para describir la distribución de datos correspondientes al ruido speckle, la retrodispersión y el retorno. Se incluye en este capítulo una descripción de la distribución Wishart Compleja, este estadístico se usa en imágenes *PolSAR*.

2. Propuestas de esta Tesis.

■ Capítulo 6.

Se describe detalladamente el modelo *RDR* diseñado para seleccionar los datos que forman las muestras, el modo en que se toman los datos de las muestras y los pasos que realiza el algoritmo para estimar las posiciones de borde en la imagen.

■ Capítulo 7.

Se hace una descripción detallada de la funcionalidad de la interfaz *IdeU* desarrollada en esta Tesis, interfaz usada para el procesamiento de las imágenes *PolSAR* y orientado su desarrollo a los objetivos de la Tesis.

■ Capítulo 8.

Se describe el nuevo método desarrollado en esta Tesis que se denota con *OFJ* y que permite optimizar las expresiones propuestas para la estimación de las posiciones de puntos de borde en imágenes *PolSAR*. Se realizan pruebas mediante el método de Monte Carlo y se exponen los resultados.

■ Capítulo 9.

Se describe en detalle dos nuevos modelos desarrollados para la estimación de las posiciones de puntos de borde en imágenes *PolSAR* que se denotan con MD^0 y MD^1 . Se realizan pruebas mediante el método de Monte Carlo y se exponen los resultados.

■ Capítulo 10.

Se describe en detalle el desarrollo del nuevo modelo de distancia estocástica que se denotan con d_{MD} . Esta distancia se usan para estimar posiciones de puntos de borde en imágenes *PolSAR*. Se desarrolla un modelo ideal de la distancia d_{MD} que se denota con $d_{MD_{ideal}}$. Se analiza las posibilidades del este modelo ideal para ser usado como modelo patrón a los efectos de determinar el grado de confiabilidad de las posiciones de borde estimadas. Se realizan pruebas mediante el método de Monte Carlo y se exponen los resultados.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. La radiación electromagnética

De acuerdo con la teoría del electromagnetismo, las “Ondas Electromagnéticas, (*OEM*)” producidas por cargas en movimiento, son la combinación de ondas de campos eléctricos que se denotan con \vec{E} y campos magnéticos que se denotan con \vec{B} oscilantes y ortogonales entre sí, situados en un plano normal a la dirección de propagación, Figura 2.1.

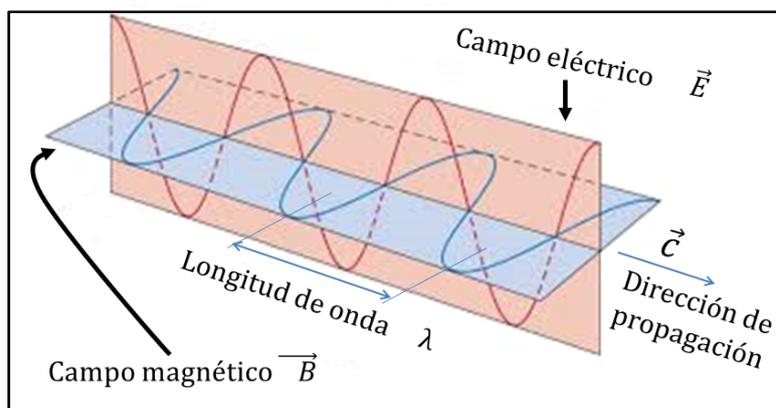


Figura 2.1: Ondas de campo eléctrico y campo magnético, [29]

Dos magnitudes que caracterizan a las ondas electromagnéticas son la frecuencia y la longitud de onda. La frecuencia se refiere al número de ciclos de una onda que pasan por un punto fijo en una unidad de tiempo. La longitud de onda es la longitud de un ciclo de onda, que puede ser medida como la distancia entre crestas de ondas sucesivas, [30].

La siguiente fórmula describe como se relacionan esas magnitudes:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (2.1)$$

c : velocidad de la luz, f : frecuencia y λ : longitud de onda

2.1.1. Polarización

En una onda transversal, como el caso de las OEM, existe una propiedad física que se propaga. Esta propiedad se denota con $\vec{\xi}$ y se encuentra en un plano normal a la dirección de propagación. El comportamiento de $\vec{\xi}$ es lo que da lugar a los distintos tipos de polarización de la onda. Los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} de las OEM tienen componentes sobre un plano normal a la dirección de propagación.

En particular, el campo eléctrico \vec{E} se puede expresar como dos ondas ortogonales entre si desplazándose en la dirección Z.

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(z, t) &= \hat{i}E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ \vec{E}_y(z, t) &= \hat{j}E_{0y} \sin(\omega t - kz + \phi_y)\end{aligned}\quad (2.2)$$

k : desplazamiento en z , ω : velocidad angular o pulsación y ϕ : fase inicial

$\vec{E}_x(z, t)$ y $\vec{E}_y(z, t)$ son ondas que se desplazan en la dirección Z, $\vec{E}_x(z, t)$ vibra en el eje X y $\vec{E}_y(z, t)$ vibra en el eje Y, Figura 2.2

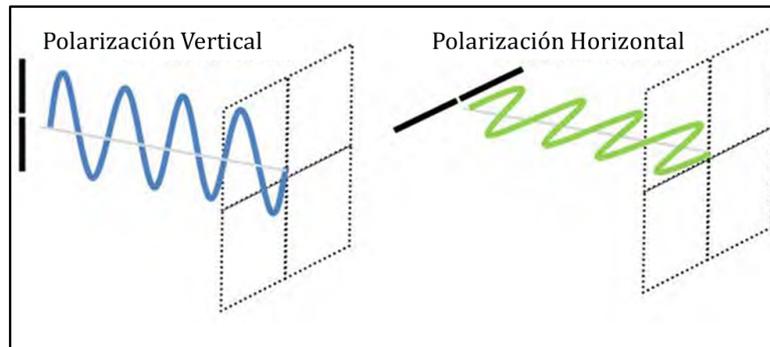


Figura 2.2: Ondas electromagnéticas oscilando sobre planos de polarización, [31]

Con $\kappa = \omega t - kz$ resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{E}_x(z, t)}{\hat{i}E_{0x}} &= \cos(\kappa + \phi_x) = \cos \kappa \cos \phi_x - \sin \kappa \sin \phi_x \\ \frac{\vec{E}_y(z, t)}{\hat{j}E_{0y}} &= \cos(\kappa + \phi_y) = \cos \kappa \cos \phi_y - \sin \kappa \sin \phi_y\end{aligned}\quad (2.3)$$

Con $\phi = \phi_y - \phi_x$ y operando para cancelar κ se llega a esta expresión:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (2.4)$$

La ec. (2.4) es la ecuación de una elipse y muestra el lugar geométrico de los puntos que describe el campo \vec{E} conforme este se propaga como una hélice de sección elíptica. Esto se aplica también para \vec{B} y el sentido de giro puede ser horario o antihorario.

El término $E_x E_y$ indica que la elipse está rotada; en la forma estándar de una elipse el término $E_x E_y$ no está presente. El ángulo formado con respecto al plano XY del sistema de coordenadas es:

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \phi}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (2.5)$$

Si $\psi = 0$ la ec. (2.4) se reescribe como:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1 \quad (2.6)$$

La elipse rotada se ilustra en la Figura 2.3.

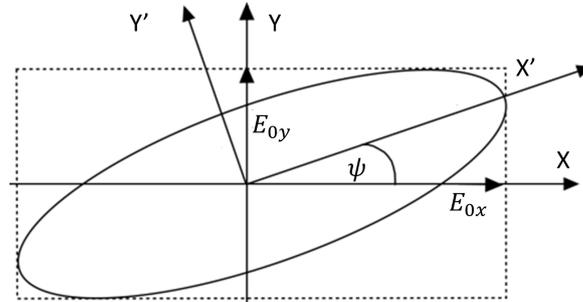


Figura 2.3: Elipse de polarización rotada con ángulo de rotación ψ

X': dirección del eje mayor de la elipse, Y': dirección del eje menor de la elipse

Casos particulares de polarización:

- Si $\phi = \pm n\pi$ la elipse degenera en una recta y se denomina polarización lineal.
- Si E_{0x} y E_{0y} tienen la misma amplitud y además $\phi = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, la elipse se convierte en una circunferencia y se denomina polarización circular.

Las Figuras 2.4 y 2.5 ilustran diferentes tipos de polarización.

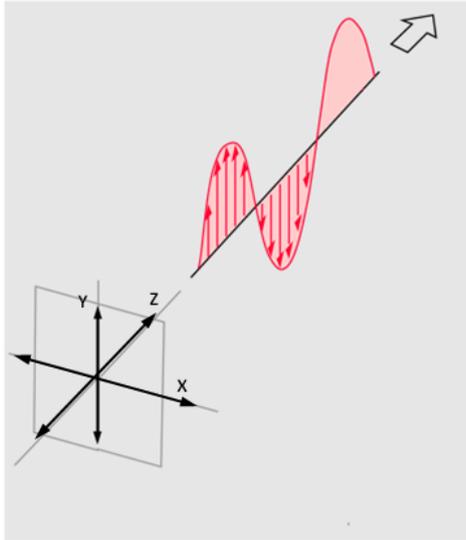


Figura 2.4: Onda transversal polarizada linealmente, [32]

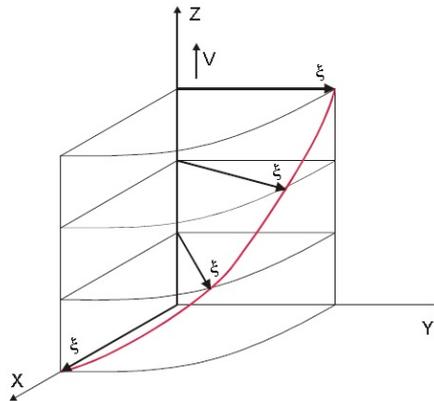


Figura 2.5: Onda transversal con polarización elíptica

2.1.2. El espectro electromagnético

Todo tipo de energía radiante puede clasificarse adecuadamente en función de su longitud de onda o de su frecuencia. Aunque la sucesión de valores de longitud de onda es continua, suelen establecerse una serie de bandas en donde la radiación electromagnética manifiesta un comportamiento similar. La organización de estas bandas de longitudes de onda o frecuencia se denomina espectro electromagnético. El espectro electromagnético se extiende desde las longitudes de onda más cortas (incluyendo rayos gamma y rayos X) hasta las longitudes de onda más largas (como las microondas y ondas de radio).

2.1.3. Cambio de fase y efecto Doppler

- Cambio de fase

La diferencia en la fase entre dos ondas se conoce como el cambio de fase, Figura 2.6.

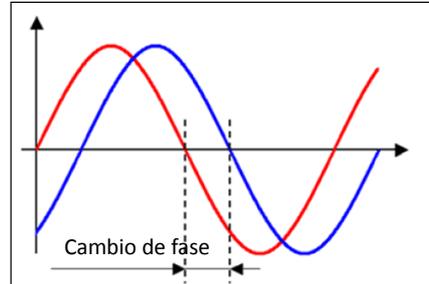


Figura 2.6: Ilustración de cambio de fase

- Efecto Doppler

En el caso de una fuente emisora ubicada a una determinada distancia del receptor, emitiendo una señal que viaja hacia el receptor, el efecto Doppler se describe como: fenómeno en el cual hay un cambio de la frecuencia cuando hay un movimiento relativo entre la fuente de emisión y el receptor. En la Figura 2.7 se ilustra el fenómeno dando un ejemplo en el que la fuente emisora es la locomotora que se desplaza con velocidad \vec{v} y los receptores son R_1 y R_2 . A ese cambio de frecuencia se lo llama corrimiento Doppler y se denota con f_d .

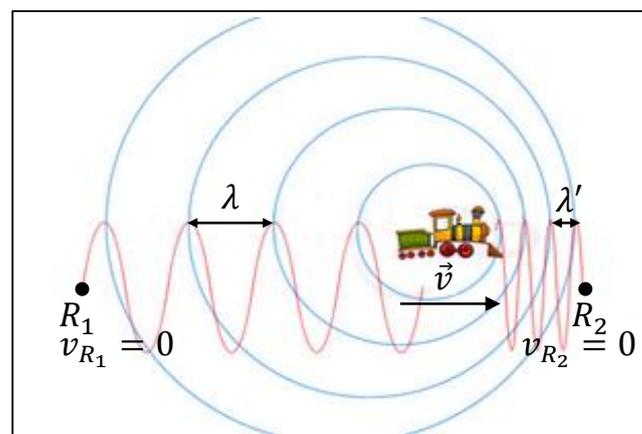


Figura 2.7: Ilustración de Corrimiento Doppler

Este cambio de frecuencia depende de:

- velocidad relativa entre el emisor y el receptor.
- velocidad de la señal emitida.
- frecuencia de la señal emitida.

Siendo f la nueva frecuencia, f_d se expresa como:

$$f_d = f - f_0 \quad (2.7)$$

Cuando el emisor y el receptor se acercan o se alejan con velocidad relativa u , la frecuencia aparente f queda expresada como:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \quad (2.8)$$

c : velocidad de la luz; f_0 : frecuencia de la señal emitida; f_d : corrimiento Doppler; u : velocidad relativa entre el emisor y el receptor, positiva si la distancia se reduce (emisor y receptor se acercan), negativa si la distancia aumenta (emisor y receptor se alejan).

Capítulo 3

Radar

3.1. Teledetección

La palabra teledetección, se utiliza como sinónimo de “remote sensing” (sensado remoto) para describir las observaciones que se hacen de un objeto sin estar en contacto físico con él. Es decir sin contacto entre el sensor y el objeto.

3.1.1. Concepto básico de teledetección

Dependiendo de la fuente de la energía medida, los sensores pueden ser clasificados como sensores pasivos, que registran la energía procedente de una fuente externa o bien sensores activos, cuando emiten energía sobre el objeto y capturan la señal reflejada.

La técnica de teledetección pasiva detecta radiación natural emitida o reflejada por el objeto o área circundante que está siendo observada y es común aprovechar la radiación solar como fuente emisora. Como por ejemplo: fotografía digital, sensores infrarrojos y radiómetros. Posteriormente surge la teledetección activa donde el emisor de ondas es artificial, de modo que puede controlarse la frecuencia de las ondas emitidas y dado que posee su propia fuente emisora puede realizar registros en la oscuridad. Tal es el caso de los RADAR (Radio Detection And Ranging; Sistemas de detección y medición de distancias por radio) [30, 33, 34].

3.2. Características del radar

Los sensores radar, son sensores activos, emiten pulsos electromagnéticos y procesan los ecos devueltos por el blanco o escena para medir distancias, altitudes, velocidades,

etc. El radar es un radiómetro activo de microondas, que trabaja en la región del espectro electromagnético con longitudes de onda entre 1 mm y 100 cm como puede observarse en la Figura 3.1, constituyendo las longitudes de onda más utilizadas en teledetección, [35–37].

Las principal virtud de operar en esta región del espectro es que se puede emitir pulsos electromagnéticos y recibir el eco de esos pulsos independientemente de las condiciones atmosféricas, esto da la posibilidad de recoger información de regiones cubiertas por nubes, situación muy frecuente en zonas tropicales o polares [38].

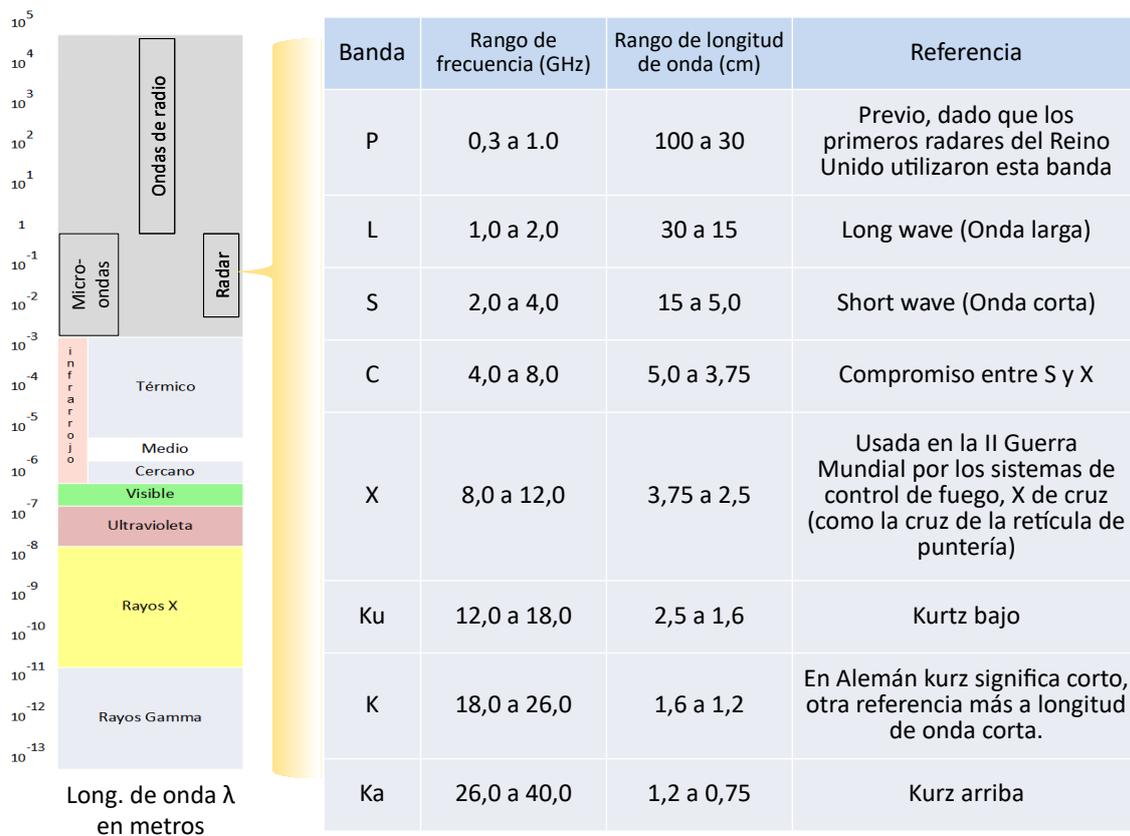


Figura 3.1: Detalle de bandas en las que opera el radar (Norma IEEE 521-2013)

El radar se diseñó inicialmente para medir distancias y detectar a los objetos en movimiento [35]. Orientando la antena en dirección a la superficie a sensor y a su vez ortogonalmente a la dirección de desplazamiento del radar, el sensor es capaz de adquirir una imagen completa de la escena [39].

El proceso de detección que realiza un radar posee las siguientes etapas.

1. Transmisión de un pulso corto en una dirección precisa.

2. Detección de una dirección precisa del eco dispersado y atenuado de un blanco.
3. Medición del tiempo de retardo entre la emisión y la detección.
4. Muestreo con un haz direccionado.

Las siguientes longitudes de onda son las más empleadas en teledetección [30]:

- Microondas: $\lambda \approx 1,0 \text{ m}$ a $\lambda \approx 1,0 \text{ mm}$.
- Infrarrojo Lejano o Térmico: $\lambda \approx 1,0 \text{ mm}$ a $\lambda \approx 10,0 \mu\text{m}$.
- Infrarrojo Medio: $\lambda \approx 10,0 \mu\text{m}$ a $\lambda \approx 2,5 \mu\text{m}$.
- Infrarrojo Próximo o cercano: $\lambda \approx 2,5 \mu\text{m}$ a $\lambda \approx 0,7 \mu\text{m}$, resulta de especial importancia por su capacidad de discriminar concentraciones de humedad y masas vegetales.
- Espectro Visible: corresponde al conjunto de longitudes de onda que la visión humana puede detectar e interpretar como una sensación de color. Estas longitudes de onda van del rojo $\lambda \approx 7,0 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,7 \mu\text{m}$ al violeta $\lambda \approx 4,0 \times 10^{-7} \text{ m} = 0,4 \mu\text{m}$.

El radar trabaja en la zona del espectro electromagnético correspondiente a las microondas. Es casi inmune a las condiciones climáticas adversas dado que opera con longitudes de onda superiores al tamaño habitual de las gotas de agua (0.1 mm), tiene la capacidad de atravesar las nubes y la lluvia [40–42] y puede penetrar en cierta medida la superficie de algunos objetivos.

La Tabla 3.1 muestra un detalle de las aplicaciones más frecuentes, indexadas por las bandas en que opera el radar.

3.2.1. Ecuación del radar

La ecuación del radar relaciona la distancia del radar a un punto R con características de la antena, el objeto y el ambiente, Figura 3.2(a)

Asumiendo que las ondas electromagnéticas se propagan en condiciones ideales (sin dispersión) y que se emite energía de alta frecuencia en forma isotrópica, es decir que se propaga de manera uniforme en todas las direcciones, los diferenciales de área con la misma densidad de energía (niveles equipotenciales) forman en su conjunto esferas imaginarias de radio R y de área $4\pi R^2$ alrededor del emisor o radiador.

Banda	Aplicación
P	Biomasa, humedad del suelo. AIRSAR, AIRMOSS
L	Distancias elevadas, control de tráfico en ruta, agricultura, gestión forestal. Satélite Norteamericano SEASAT, Japonés JERS-1 SAR, ALOS-PALSAR, SAOCOM, ALOS2, SARAT, UAVSAR
S	Vigilancia a distancias intermedias. Control de tráfico en terminales. Condiciones meteorológicas a largas distancias. Satélite Ruso ALMAZ
C	Seguimiento a distancias elevadas. Meteorología, océano, agricultura. RADARSAT-1/2, Sentinel-1, ERS-1/2 SAR, RISAT-1
X	Guía de misiles, meteorología, cartografía de resolución media, radares de superficie aeroportuarios. Seguimiento a distancias cortas. agricultura, océano, Satélites Argentinos SAOCOM 1A y SAOCOM 1B. Satélite de Agencia Espacial Europea ERS-1,2 y Canadiense RADARSAT, TerraSAR-X, COSMO-SkyMed
Ku	Cartografía de alta resolución. Altimetros para satélites, glaciología (mapeo de la cubierta de nieve)

Tabla 3.1: Bandas y aplicaciones más frecuentes, [43]

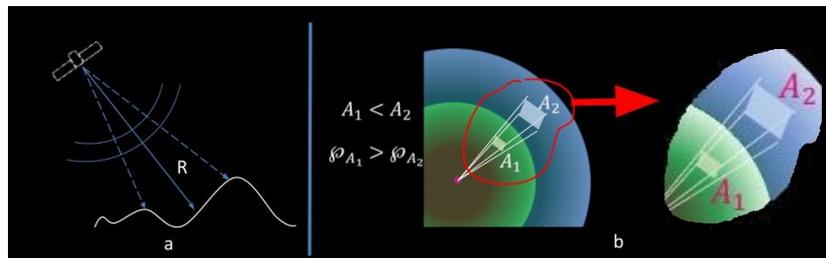


Figura 3.2: Emisión de energía del radar. a.- Ejemplo de operación del radar. b.- Representación de superficies equipotenciales.

En la medida que R aumente, la energía emitida se distribuye sobre superficies esféricas mayores y la densidad de potencia decrece progresivamente con ese aumento de R . Es decir que la densidad de energía en la superficie de una esfera en particular, es inversamente proporcional al cuadrado del radio de esa esfera. En la Figura 3.2(b) se representa esa relación, con φ : densidad de potencia. De [44], en este modelo ideal, la densidad de potencia radiada en forma isotrópica (también denominada densidad de Potencia Omnidireccional) φ_{iso} , a una distancia R del radar (distancia radar - blanco), es igual a la potencia transmitida y escalada por la superficie esférica imaginaria de radio R , y se expresa como:

$$\wp_{iso} = \frac{P_t}{4\pi R^2} \quad (3.1)$$

P_t : potencia transmitida; \wp_{iso} : densidad de potencia omnidireccional ; R : rango o distancia radar - objeto

Siendo que en este modelo, un segmento esférico emite igual radiación en todas las direcciones, si la energía radiada es redistribuida para proporcionar más radiación en la dirección del objeto, esto produce un incremento de la densidad de potencia radiada en esa dirección (densidad de la Potencia Direccional). Este incremento se expresa por medio de un factor llamado ganancia G .

Los sistemas radar emplean antenas que enfocan la energía radiada en una dirección o ángulo definido. El incremento de la densidad de potencia se expresa como producto de la densidad de potencia \wp_{iso} por el factor de ganancia G , de modo que la densidad de potencia de la radiación generada por una antena direccional del radar (densidad de Potencia Direccional) con ganancia G y a una distancia R del objeto queda expresada como:

$$\wp_{dir} = \wp_{iso}G = \frac{P_t}{4\pi R^2}G \quad (3.2)$$

La detección de un objetivo no depende exclusivamente de la densidad de la potencia en la posición del blanco, si no que además, se debe tener en cuenta la cantidad de potencia reflejada desde el blanco hacia el radar. El objeto intercepta una porción de la potencia incidente y la reirradia en múltiples direcciones. La cantidad de potencia que irradia el objeto es proporcional al valor de la sección cruzada o sección eficaz del blanco σ_{ef} . Esta sección σ_{ef} tiene unidades de área, de tal forma que al multiplicarse por la densidad de potencia \wp_{dir} , se obtiene la cantidad de potencia que irradia el objeto sobre una superficie esférica imaginaria de radio R .

La potencia irradiada o reflejada P_r depende entonces de la densidad de la potencia \wp_{dir} y de la sección eficaz del blanco σ_{ef} .

$$P_r = \wp_{dir}\sigma_{ef} = \frac{P_t}{4\pi R^2}G\sigma_{ef} \quad (3.3)$$

La densidad de potencia en la dirección de retorno al radar \wp_{back} , asociada al eco producido por el objeto queda expresada como:

$$\wp_{back} = \frac{P_r}{4\pi R^2} = \frac{P_t G}{4\pi R^2}\sigma_{ef} \frac{1}{4\pi R^2} \quad (3.4)$$

La antena del radar captura una porción de la potencia del eco en función de la densidad de potencia en su entorno \wp_{back} y del área o apertura efectiva de la antena A_e . Esta potencia P_τ queda expresada como:

$$P_\tau = \frac{P_t G}{4\pi R^2} \frac{\sigma_{ef}}{4\pi R^2} A_e = \frac{P_t G \sigma_{ef} A_e}{(4\pi)^2 R^4} \quad (3.5)$$

De [44]

$$A_e = \frac{G\lambda^2}{4\pi} \quad (3.6)$$

De modo que P_τ también puede expresarse como:

$$P_\tau = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_{ef}}{(4\pi)^3 R^4} \quad (3.7)$$

La apertura efectiva de antena A_e no es igual a la apertura geométrica de la antena A_g , se tiene en cuenta las pérdidas de energía que sufre la antena expresadas en término de eficiencia de la antena. La eficiencia de la antena queda expresada por el factor K_a de modo que la apertura efectiva de la antena se puede expresar como $A_e = A_g k_a$. Reemplazando A_e por $A_g k_a$ en la ec. (3.5), la potencia P_τ es:

$$P_\tau = \frac{P_t G \sigma_{ef}}{(4\pi)^2 R^4} A_g K_a \quad (3.8)$$

Siendo R la distancia del radar a un punto, el máximo valor de R o distancia R_{max} a la que un objeto puede ser detectado, ocurre cuando la potencia recibida del eco de la señal P_τ es igual P_{min} . Reemplazando P_τ por P_{min} y R por R_{max} en la ec. (3.5); y despejando R_{max} resulta:

$$R_{max} = \left[\frac{P_t G \sigma_{ef} A_e}{(4\pi)^2 P_{min}} \right]^{1/4} \quad (3.9)$$

Reemplazando A_e de la ec. (3.6) en la ec. (3.9) resulta:

$$R_{max} = \left[\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_{ef}}{(4\pi)^3 P_{min}} \right]^{1/4} \quad (3.10)$$

La potencia recibida más pequeña que puede ser detectada por el radar es llamada P_{min} . Potencias más pequeñas que P_{min} no son tenidas en cuenta pues se confunden con el ruido del receptor.

Las expresiones anteriores surgen de suponer que las ondas electromagnéticas se propagan bajo condiciones ideales. Para acercarse al modelo real, se deben considerar algunas pérdidas y esto se hace incluyendo el factor de pérdida L_{ges} , la expresión es:

$$R_{max} = \left[\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_{ef}}{(4\pi)^3 P_{min} L_{ges}} \right]^{1/4} \quad (3.11)$$

El factor L_{ges} incluye las siguientes pérdidas:

- L_D : factores internos de atenuación tanto en la ruta de transmisión y recepción de la unidad de radar.
- L_j : pérdidas de fluctuación durante el reflejo.
- L_{Atm} : pérdidas atmosféricas durante propagación de las ondas electromagnéticas, hacia y desde el objetivo.

3.3. *RAR*. Radar de apertura real

El desarrollo del radar comenzó en los años 40 en la Segunda Guerra Mundial, usado como dispositivo en el aire y en el mar para la detección de las fuerzas enemigas. Uno de los primeros sistemas fue el “Radar de Apertura Real, (*RAR*)”. Su resolución espacial estaba limitada por el tamaño de la antena utilizada, mientras más grande es la antena mejor es la resolución espacial [45].

El radar envía una señal sobre la superficie y luego de un tiempo recibe el retorno o eco de esa señal. Al momento de enviar una nueva señal, el radar se habrá desplazado una pequeña distancia en su trayectoria y toma una imagen de una franja de terreno ligeramente diferente. Estas franjas secuenciales de terreno se registran una al lado de la otra en la dirección de desplazamiento acimutal y la imagen es una matriz de datos bidimensional.

3.4. *SLAR*. Radar de visión lateral

La plataforma de un *SLAR* se desplaza ubicándose el nadir directamente debajo de la plataforma.

El haz de microondas se transmite oblicuamente en ángulo recto con la dirección de vuelo iluminando una franja. En la Figura 3.3 se ilustra la disposición geométrica de radar-blanco usando un radar con visión vertical (izquierda) y un radar con visión lateral (derecha), la visión lateral evita la ambigüedad que se produce en la visión vertical al momento de determinar la posición del blanco que se está observando a partir del dato $R(\tau)$.

La distancia entre el radar y el blanco se denomina *rango oblicuo* (slant range) y la proyección de esa distancia sobre la superficie de la tierra se denomina *rango en tierra*

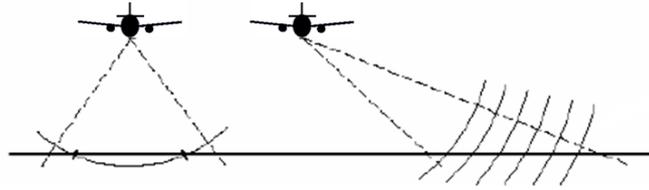


Figura 3.3: Iluminación Radar. Visión vertical y visión lateral, [46]

(ground range). Estos parámetros definen las distancias entre el radar y todo punto de la superficie terrestre que es iluminado por el mismo.

El *rango vertical* se refiere a una distancia perpendicular a la dirección del vuelo mientras que el acimut se refiere a la dirección del vuelo o desplazamiento del radar.

El ancho de la franja se refiere a la franja de la superficie iluminada de la que se recopilan los datos. La extensión longitudinal de la franja queda definida por el desplazamiento de la plataforma sobre la superficie iluminada, mientras que el ancho de la franja se mide en forma perpendicular a la extensión longitudinal de la franja.

El *SLAR* es principalmente un radar de apertura real. Esto requiere una antena suficientemente grande para lograr una resolución angular adecuada.

En la Figura 3.4 se ilustra la franja de terreno delimitada en ancho por dos líneas paralelas a la dirección de vuelo, denominadas *rango oblicuo cercano* y *rango oblicuo lejano*.

La resolución en la dirección perpendicular a la trayectoria de vuelo, está determinada por la duración del pulso, es decir, un pulso más corto da mayor resolución; mientras que la resolución en el acimut o dirección paralela a la dirección de vuelo, está determinada por la longitud de la apertura de la antena, es decir, una apertura más larga ofrece una resolución de acimut más alta.

La Figura 3.4 ilustra una antena de radar de visión lateral que ilumina a la superficie desplazándose a una velocidad v_{ac} a una altura h de la superficie de la Tierra. La zona sombreada representa el área iluminada por la antena. La visión lateral permite la identificación de diferentes puntos comprendidos entre el alcance lejano y el alcance cercano. La imagen se forma con la información que recibe el radar de los ecos que se propagan en la dirección de desplazamiento de la antena.

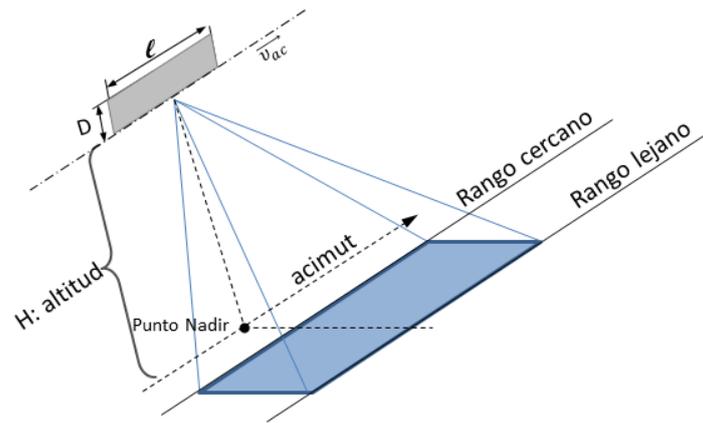


Figura 3.4: Iluminación Radar, franja de terreno

3.4.1. Emisión de pulsos sobre la superficie

Los sensores activos emiten una secuencia de pulsos muy cortos a la tierra con una frecuencia y duración muy precisa y reciben posteriormente el eco debido al impacto de las microondas con los diferentes objetos presentes en la superficie de la tierra. Esta señal de retorno, o eco del radar, es registrado en términos de amplitud y fase de la onda reflejada. La amplitud de la señal está relacionada con los datos registrados de tiempo e intensidad: el tiempo requerido para cubrir dos veces el tramo del objeto a la antena y la intensidad de la energía electromagnética captada después de la interacción entre onda emitida y la materia de la superficie terrestre. Estos dos parámetros, unidos a la fase de la onda que representa una información indirecta de la distancia cubierta por el impulso, permiten identificar la posición del objeto respecto de la antena, y su naturaleza física (forma, posición respecto a la iluminación del radar, características de la reflectividad de la superficie, etc.).

Algunos factores ligados a la naturaleza de la superficie iluminada o dependientes del sistema tecnológico empleado, influyen en la capacidad del objeto de reflejar la energía hacia el sensor, y por lo tanto, determinan diferencias en el valor de la señal de retorno registrada, con la consecuente variación de las características de la imagen producida.

Cada píxel en una imagen de radar corresponde a un área en particular de la superficie iluminada y representa un dato denominado coeficiente de retrodispersión σ , dato que se obtiene de ese área en particular [34]. El coeficiente de retrodispersión σ contiene información detallada del blanco, relacionada con factores tales como la rugosidad del terreno, la geometría del terreno (pendiente), la orientación al ángulo de incidencia del haz o la polarización de la señal. Estos factores introducen una

cierta variabilidad en torno al promedio, que depende básicamente de las características dieléctricas del blanco [38].

Dependiendo de la naturaleza de los objetos en la superficie, el haz puede dispersarse principalmente hacia el exterior o dispersarse dentro del propio objeto (vegetación).

3.4.2. Factores que influyen en la señal de retorno

Para hacer un uso apropiado de los datos contenidos en una imagen de radar, es necesario conocer de qué manera y en qué medida, algunos factores afectan la señal de retorno al radar. Mientras que en teledetección óptica las longitudes de onda son tan cortas que prácticamente toda la energía recibida por la superficie terrestre se refleja, en el caso de teledetección radar las longitudes de onda empleadas son lo suficientemente grandes como para poder penetrar cierto tipo de superficies, de forma que la dispersión será el resultado de la combinación de la dispersión producida por la superficie, por el interior e incluso por capas de material más profundo.

1. **Variables del radar.** Las variables básicas del sensor de un radar que puede operar con señales polarizadas son:
 - Frecuencia del impulso radar.
 - Ángulo de incidencia del radar.
 - Polarización de la señal radar.
2. **Variables de la superficie.** El coeficiente de retrodispersión se ve afectado por:
 - Constante dieléctrica del blanco.
 - Características geométricas del terreno y del blanco en cuestión (rugosidad, orientación, etc.)

3.4.2.1. Tipos de reflexión o retrodispersión

Los principales tipos de reflexión o retrodispersión se pueden clasificar como:

- Reflexión Difusa: se produce cuando la superficie que se observa es rugosa. El grado de rugosidad influye en la intensidad de la señal de retorno.
- Reflexión Especular: se produce cuando la señal de radar interactúa con una superficie “lisa”, esta superficie se comporta como un espejo, es decir la señal

incidente y la señal retrodispersada tienen direcciones opuestas. Por esa razón, la señal de respuesta que recibe el radar es muy baja y se visualiza como tonos oscuros en la imagen.

- **Retrodispersión en volumen:** es el resultado de la interacción con partículas dentro de un medio no-homogéneo. Se produce cuando existen muchas interacciones entre la señal de radar y un medio. La señal retrodispersada dependerá de la densidad del medio, la geometría de los elementos dispersores y las propiedades dieléctricas de los elementos. En este caso, la señal retrodispersada es media, y se ven niveles intermedios de brillo en la imagen radar. Algunos ejemplos de superficies con dispersión en volumen son: copa de árboles, pajonales, cultivos, etc.
- **Dispersión doble rebote:** es el resultado de la interacción de una señal de radar con dos superficies perpendiculares, conocidas como “corner reflector”. Cuando se produce un mecanismo de doble rebote se observa un tono muy brillante en la imagen de radar, ya que la señal retrodispersada es muy fuerte. Algunos ejemplos de elementos que generan doble rebote son: áreas urbanas, tronco de árboles sobre superficies inundadas y barcos en el agua.

La Figura 3.5 ilustra los principales tipos de reflexión o retrodispersión.

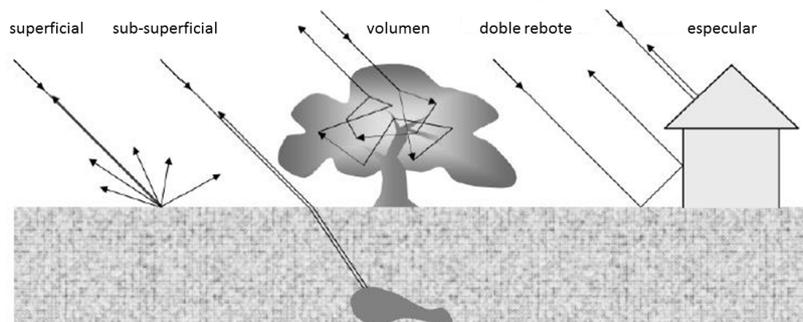


Figura 3.5: Tipos de retrodispersión, [46]

3.4.2.2. Frecuencia del impulso radar

Dependiendo de la frecuencia y polarización de la señal emitida, en ciertas condiciones las *OEM* pueden penetrar la vegetación e incluso suelo seco (arena).

La frecuencia utilizada por el sensor del radar determina el tipo de representación que tendrán los objetos observados en la imagen, esto es debido a que la capacidad de la superficie terrestre para reflejar la energía electromagnética de la señal incidente,

depende de la frecuencia de esa señal. Por lo tanto, dos imágenes radar del mismo territorio que se obtienen usando dos frecuencias diferentes (ver Tabla 3.1) una frecuencia en banda C (4.0 a 8.0 GHz) y la otra frecuencia en banda L (18.0 a 26.0 GHz), presentan diferencias en la representación de una superficie para una rugosidad determinada.

La capacidad de penetración de las ondas de radar aumenta con la disminución de la frecuencia, Figura 3.6.

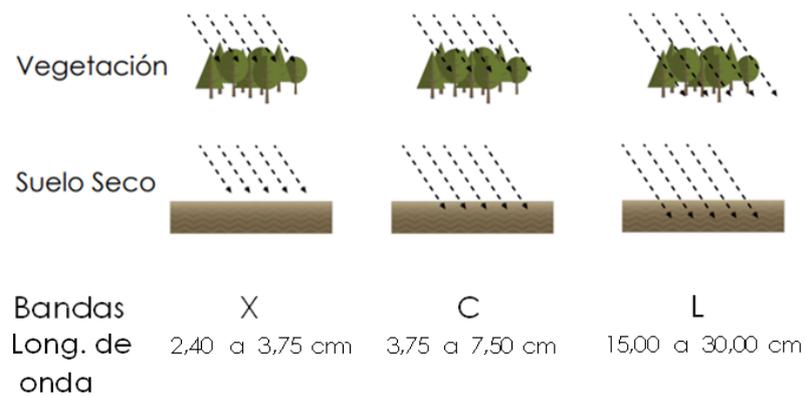


Figura 3.6: Influencia de la frecuencia en la retrodispersión, [47]

En la Figura 3.7 se puede observar un ejemplo de la penetración de la Señal de Radar en Suelos Secos del suroeste de Libia. Las flechas indican posibles sistemas fluviales.

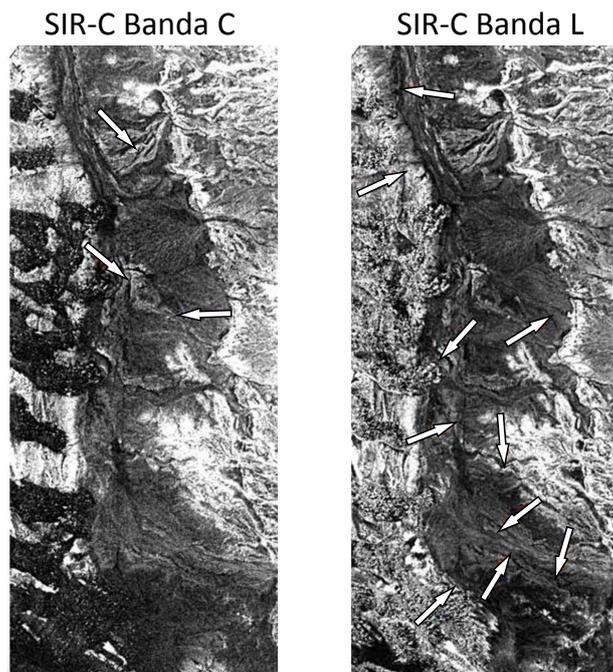


Figura 3.7: Influencia de la frecuencia en la retrodispersión, [47]

La frecuencia utilizada determina la percepción visible que se tendrá de la rugosidad de la superficie observada e influye en el grado de penetración de las ondas en el medio [45]. La banda L es ideal para el estudio de humedales porque la señal penetra a través del dosel arbóreo.

En la Figura 3.8 se muestran las áreas inundadas por debajo de dicho dosel. Las áreas de vegetación inundadas se ven de color blanco.

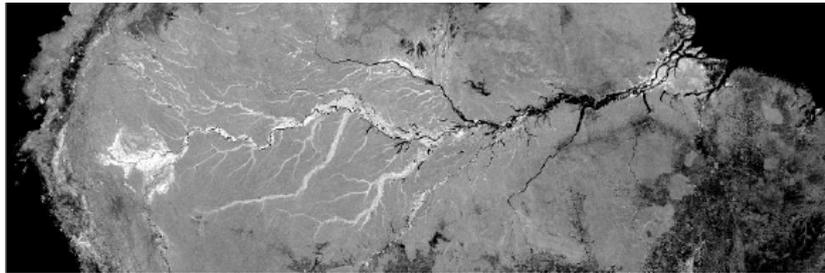


Figura 3.8: Influencia de la frecuencia en la retrodispersión, [47]

3.4.2.3. Ángulo de incidencia del *SLAR*

Es el ángulo con el que incide la radiación sobre la tierra, medido entre la dirección de iluminación del radar y la dirección vertical desde el radar a la superficie del terreno. El relieve tiene una gran influencia sobre la geometría en la formación de las imágenes de radar (se analiza en 3.4.2.8) pues modifica el ángulo local de incidencia, Figura 3.9.

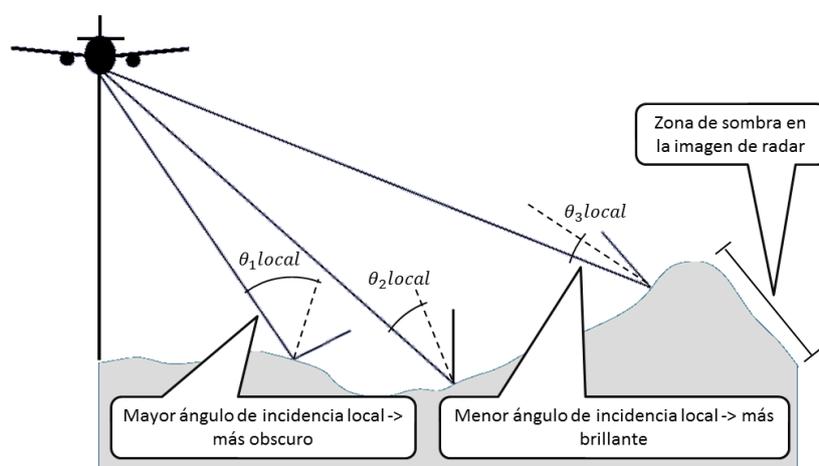


Figura 3.9: Ángulos de incidencia en distintas posiciones

El ángulo de incidencia varía desde el alcance cercano hasta el alcance lejano, lo que a su vez influye en la geometría de la observación, Figura 3.10.

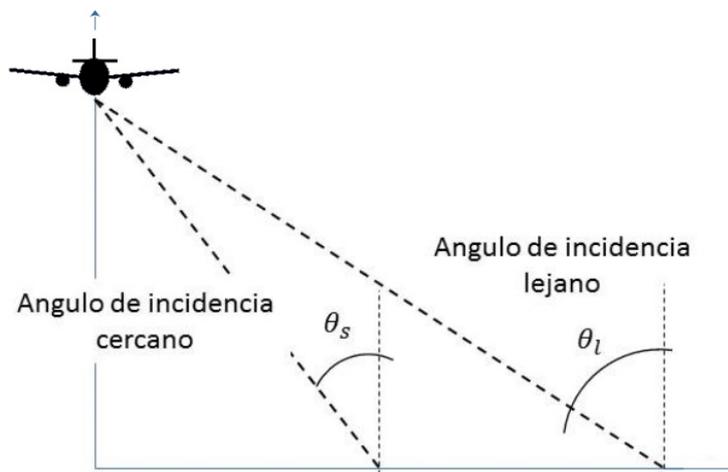


Figura 3.10: Ángulos de incidencia límite del radar. Vista lateral

En el caso de una misma superficie iluminada desde un avión o desde un satélite, el ángulo de incidencia desde el satélite es menor que desde el avión, dado que el satélite está a una mayor altura. Esto conduce a una iluminación más uniforme en imágenes de satélite que en imágenes de avión, Figura 3.11.

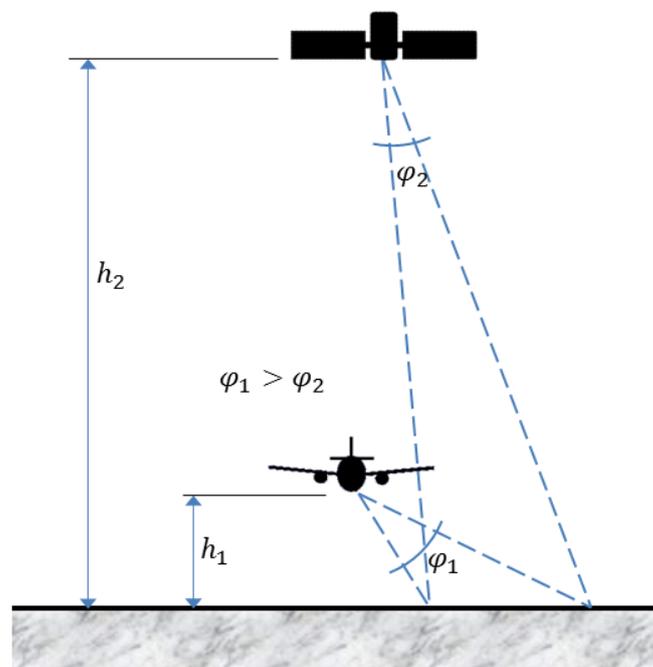


Figura 3.11: Emisión de radar desde diferentes alturas

3.4.2.4. Polarización de la señal radar

Definida la polarización como la orientación según la cual el vector de campo eléctrico de la onda electromagnética oscila en el tiempo, se pueden tener tipos de polarización lineal, circular o elíptica.

En el caso de polarización lineal, si la dirección del vector campo eléctrico es paralela al plano tangente a la superficie de la tierra, se dice que la polarización es horizontal; si es con dirección perpendicular al plano mencionado, se dice que la polarización es vertical.

Al reflejarse la radiación emitida por el radar, esta experimenta en general una rotación del vector campo eléctrico. Se debe decidir si se capta de este vector la componente horizontal, la componente vertical o ambas componentes. Por lo tanto existen 4 posibilidades: HH, HV, VH y VV, donde la primera letra se refiere a la señal emitida y la segunda a la recibida. HH o VV se denominan polarizaciones lineales paralelas (linear polarization). HV o VH se denominan polarizaciones cruzadas (cross polarization). Indistintamente pueden expresarse en mayúscula o minúscula, tal como HH o hh, HV o hv.

Los sistemas radar que están configurados para operar con diferentes tipos de polarización, sea en la emisión como en la recepción, pueden presentar eventuales fenómenos de despolarización de la onda de retorno. Esto se producen debido a las características superficiales y subsuperficiales de los objetos iluminados por el radar.

Los elementos presentes en la escena sensada e iluminados por el radar tienden a despolarizar en modo selectivo la onda recibida, reflejando una intensidad de energía diferente según sea un vector de campo eléctrico con polarización en el plano horizontal o polarización en el plano vertical.

En un escenario natural, las superficies cuasi-especulares como las de agua calma o casi quieta dan lugar a retornos de señales con polarizaciones idénticas a la de las señales emitidas (HH o VV) y estas superficies aparecen como una zona oscura en la imagen del radar.

En cambio, superficies con marcada rugosidad superficial dan lugar a retornos de señales con polarizaciones de tipo HV o VH. En general, estos retornos son más débiles que los de las polarizaciones lineales.

En la tabla 3.2 se muestran algunos ejemplos de polarización en sistemas de radar.

Clasificación de Tipos de polarización	
Descripción	Tipo
Monopolarimétrica	HH o VV o HV o VH
Dual polarizada	HH y HV o VV y VH o HH y VV
Polarización lineal	HH o VV
Polarización cruzada	HV o VH
Simple (SP, del inglés Single Polarization): el sistema emite y recibe en la misma polarización lineal (horizontal-H o vertical-V)	HH o VV
Doble (DP, del inglés Double Polarization): el sistema emite en una polarización lineal y recibe las dos polarizaciones lineales simultáneamente	HH y HV o VV y VH
Cuádruple (QP, del inglés Quad Polarization): el sistema emite alternadamente ambas polarizaciones lineales y las recibe simultáneamente	HH, HV, VH y VV
Polarización Compacta (CL-POL, del inglés Circular Linear Polarization): el sistema transmite una polarización circular (derecha-right o izquierda-left) y recibe dos polarizaciones lineales simultáneamente	right-H y right-V o left-H y left-V

Tabla 3.2: Tipos de Polarización en sistemas radar

Un ejemplo del efecto de la polarización sobre la imagen producida se ve en la Figura 3.12, donde se observan cuatro imágenes obtenidas con tecnología radar operando en banda C y tomando imágenes de un campo de cultivo.

Como ya se mencionó, en imágenes de radar, haciendo uso de diferentes combinaciones de polarización y diferentes longitudes de onda sobre una misma escena, se obtiene información diferente de los objetos que componen dicha escena [30, 48, 49].

Método de Pauli:

El método de Pauli transforma un conjunto de imágenes HH, HV, VV en una imagen RGB, operando de la siguiente forma para obtener las tres matrices R , G y B del modelo RGB, a partir de las matrices HH , HV y VV : $R = (HH + VV)/2$, $G = (|HH - VV|)/2$ y $B = 2 * |HV|$.

En la Figura 3.12(d) se observa el resultado de componer las tres polarizaciones con el método de Pauli para colorear, obteniendo una imagen RGB.

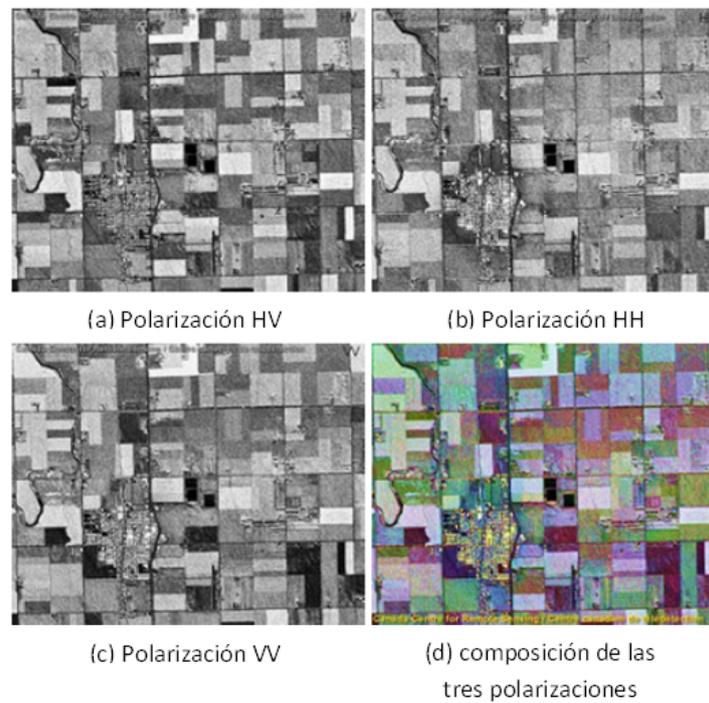


Figura 3.12: (a, b y c): Diferentes polarizaciones; (d): Método de Pauli

3.4.2.5. Constante dieléctrica

El contenido de agua del suelo y la textura del mismo influyen directamente en la constante dieléctrica [50]

Influencia del contenido de humedad superficial:

El contenido de humedad en la superficie, que se puede expresar en términos de constante dieléctrica y se denota con ϵ , modifica significativamente la respuesta a la señal del radar. La constante dieléctrica es un parámetro que mide las propiedades eléctricas de un medio y está relacionada con la permitividad y la “conductividad, (σ_e)”.

Los valores de ϵ del suelo aumentan de modo casi lineal con el aumento del contenido de agua, este aumento de ϵ se traduce en un aumento de la reflectividad de la superficie a la señal del radar. En los elementos más comunes presentes en la superficie terrestre, ϵ varía de 3 a 8 en ausencia de humedad.

En un modelo simplificado y apto para este contexto se considera al *suelo* como un sistema de tres fases que consiste en aire, partículas sólidas y agua, esta última fase se puede encontrar libre o ligada a las partículas del *suelo*. En un medio no homogéneo (tal como el *suelo*), el valor de ϵ es una combinación de valores de las constantes dieléctricas

individuales de sus componentes. Siendo $\epsilon_a \approx 1$ para el aire y $\epsilon_w \approx 80$ para el agua. En la tabla 3.3 se observa que para el caso de arena seca, la constante dieléctrica de ese tipo de *suelo* tiene un valor comprendido entre 3 y 4, relacionado con el “contenido volumétrico de humedad, (M_v)”.

Valores característicos de ϵ y σ_e de materiales geológicos comunes pueden apreciarse en la tabla 3.3

Valores en diferentes cubiertas de suelo				
Material	ϵ	$\sigma_e(mS/m)$	$v(m/ns)$	$a(dB/m)$
Aire	1	0	0.3	0
Agua destilada	80	0.01	0.033	0.002
Agua dulce	80	0.5	0.033	0.1
Agua de mar	80	3000	0.01	1000
Arena seca	3-5	0.01	0.15	0.01
Arena saturada	20-30	0.1-1.0	0.06	0.03-0.3
Caliza	4-8	0.5-2	0.12	0.4-1
Pizarras	5-15	1-100	0.09	1-100
Lodos	5-30	1-100	0.07	1-100
Arcillas	5-40	2-1000	0.06	1-300
Granito	4-6	0.01-1	0.13	0.01-1
Sal seca	5-6	0.01-1	0.13	0.01-1
Hielo	3-4	0.01	0.16	0.01

Tabla 3.3: Constante dieléctrica (ϵ), conductividad (σ_e), velocidad (v) y atenuación (a), [51]

La Figura 3.13 muestra la relación entre la constante dieléctrica y el contenido volumétrico de humedad del suelo para una variedad de tipos de suelo a una frecuencia de 1,4 GHz, (datos obtenidos de [52]).

Se observa una relación casi lineal, excepto en valores bajos de contenidos de humedad. Esta no linealidad para el caso de baja humedad se debe a las interacciones entre las moléculas de agua (que se concentran en la superficie de las partículas que componen el suelo) con las moléculas que componen las partículas. Esta interacción limita la libre rotación de las moléculas de agua con la consiguiente disminución del valor de la constante dieléctrica. A medida que se añade más agua, las moléculas se alejan de la superficie de la partículas y son capaces de moverse libremente, lo que incrementa el valor de la constante dieléctrica del suelo [53]

Influencia de la Textura del suelo:

La dependencia de la constante dieléctrica con la textura del suelo se debe a que, en los distintos tipos de suelos, existen diferencias en el porcentaje de agua ligada a

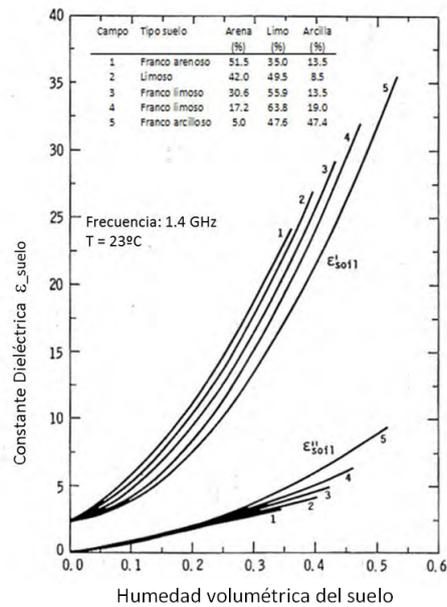


Figura 3.13: Constante dieléctrica en función de la humedad volumétrica del suelo, [52]

las superficies de las partículas. En el caso de los suelos arcillosos las partículas tienen mayores superficies donde adsorber el agua y presentan mayor afinidad de unión con las moléculas de este líquido [54].

Por lo comentado, la constante dieléctrica en los suelos cambia con la textura y es menor a la del agua “libre”.

3.4.2.6. Rugosidad de la superficie

La textura del suelo no sólo influye en los valores de ϵ . La retrodispersión de las ondas electromagnéticas en el suelo, depende también de su rugosidad (la dependencia es más fuerte cuando el tamaño típico de la rugosidad es comparable con la longitud de la onda) La rugosidad superficial del suelo se caracteriza mediante dos parámetros obtenidos de los perfiles unidimensionales que la componen y que describen su componente vertical y horizontal.

Considerando las diferentes bandas con las que puede operar el radar, con longitudes de onda relativamente cortas, una superficie relativamente lisa puede aparecer como rugosa, mientras que esa misma superficie puede comportarse como lisa con longitudes de onda relativamente largas. Este fenómeno lo contempla el criterio de Rayleigh, que considera a una cubierta superficial como rugosa si:

$$RMSH \geq \frac{\lambda}{8} \cos \theta \quad (3.12)$$

Donde $RMSH$ (Root Mean Square Height) es la desviación típica de la altura de la superficie o valor cuadrático medio en altura, λ la longitud de onda de observación y θ el ángulo de incidencia. Esto indica que en la imagen la superficie aparecerá más lisa si se trabaja con longitudes de onda relativamente grandes, y/o con ángulos de incidencia mayores (es decir, observaciones más oblicuas).

$RMSH$ está relacionado con la componente vertical de la rugosidad y describe la variación en elevación de la superficie por encima de un plano arbitrario.

Para estimar el valor de $RMSH$, se toma una muestra con los datos z_i (valores de variación de elevación) de “n” puntos de la superficie sensada. El valor de $RMSH$ se obtiene con la siguiente ecuación:

$$RMSH = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n - 1}} \quad (3.13)$$

Donde:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (3.14)$$

Siendo n : cantidad de datos de la muestra y z_i : elevación, con $i = 1, \dots, n$

En el caso de los suelos agrícolas, la rugosidad superficial se relaciona en forma directa con el tipo de laboreo que se realiza, Figura 3.14.



Figura 3.14: Distintos tipos de coberturas. a: siembra directa, b: arado de reja y vertedera, [55]

En síntesis, la señal de retorno depende de factores relacionados con las características del sensor y las características del suelo. Algunos de esos factores son: la rugosidad y contenido de humedad del terreno, la longitud de onda λ de la señal emitida por el radar y del ángulo de incidencia θ .

Estos factores determinan como una superficie es “vista” por el radar, es decir, lisa o rugosa. Las irregularidades de una superficie pueden aparecer brillantes en banda C y oscuras en banda L [56].

Se puede relacionar a los parámetros λ y θ con la variación altitudinal $RMSH$ de la cubierta [38], Figura 3.15.

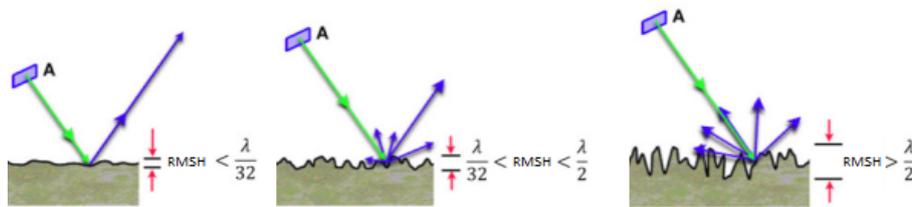


Figura 3.15: Influencia de la rugosidad en la retrodispersión, [57]

Cuanto más áspera es la superficie, más brillante se ve la imagen y cuanto más lisa, más oscura se ve [47]. Se puede ver un ejemplo en la Figura 3.16 (Misión SMAP. Abr. 2015. Banda L. Canal HH. NASA), donde la superficie plana y lisa corresponde a agua y carreteras respectivamente; la superficie áspera corresponde a áreas desforestadas y campos agrícolas; y la superficie con más brillo (por doble rebote) corresponde a vegetación inundada.

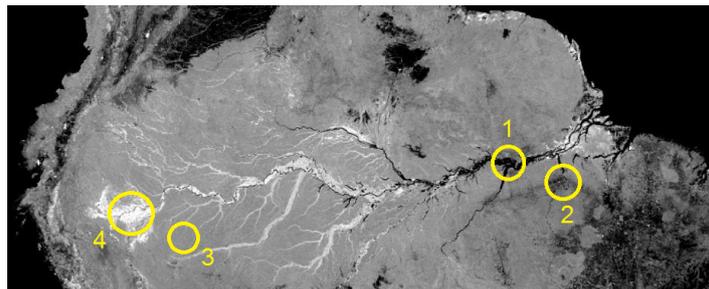


Figura 3.16: Imagen de la Cuenca Amazónica. Tipos de superficie: 1.- agua, carretera; 2.- desforestado, agricultura; 3.- vegetación; 4.- vegetación inundada, [58]

En la tabla 3.4 se muestran valores típicos de $RMSH$ para distintos tipos de laboreo.

Además del criterio de Rayleigh, antes mencionado, existen otros criterios para establecer el grado de rugosidad de una superficie a partir de un valor límite del

Tipo de laboreo	RMSH(cm)
Arado de disco	1.8
Arado de reja y vertedera	3.2
Arado rotativo o rotocultivador	1.5
Cama de siembra	0.6
Cultivador abridor de surco	1.5
Escardadora	1
Fertilizadora incorporadora de líquidos (amoníaco)	1.3
Rastra de disco	1.5
Rastra de disco excéntrica	5
Sembradora	1
Sembradora Lister (sembradora de surco profundo)	2.5
Siembra directa	0.7

Tabla 3.4: Tabla con valores característicos de *RMSH* para distintos tipos de laboreo, [55]

parámetro *RMSH* en función de λ y θ . A continuación se muestra una recopilación de algunos de estos criterios [59, 60]. En la Tabla 3.5 se observa que sólo con el criterio de Ulaby y Dobson (1988) el estado de rugosidad no es función del ángulo de incidencia θ .

3.4.2.7. Geometría del terreno

Las superficies que se orientan de manera tal que la onda retrodispersada define la misma dirección que el sensor (dirección donde es mayor la potencia recibida por el sensor) aparecen más brillantes en una imagen de radar. Las áreas en sombra y que no son iluminadas por el sensor aparecen oscuras. La estructura alineada de calles de ciudad y edificios permite que el pulso de radar incidente rebote en las calles y nuevamente rebote en los edificios, lo que se denomina doble rebote (Double Bounce), retornando al radar y dando una apariencia muy brillante (blanca) en la imagen de radar. Mientras que las carreteras y ferrovías donde no hay edificaciones, como son superficies planas, aparecen oscuras [45].

En la geometría del terreno el ángulo de incidencia local depende de la inclinación local (pendiente) de la superficie iluminada, por lo que su valor influye en forma predominante en el tono de gris de la imagen [61].

Criterio de Rugosidad	Grado de Rugosidad
RAYLEIGH, citado por ELACHI (1988)	Ligeramente rugosa cuando $RMSH < \lambda/8 \cdot \cos \theta$ Para $RMSH > \lambda/8 \cdot \cos \theta$, la superficie es rugosa
FRAUNHOFFER, citado por ULABY et al. (1982)	Lisa cuando $RMSH < \lambda/32 \cdot \cos \theta$ Para $RMSH > \lambda/32 \cdot \cos \theta$, la superficie es rugosa
PEAKE & OLIVER (1971)	Lisa cuando $RMSH < \lambda/25 \cdot \cos \theta$ Para $RMSH > \lambda/4 \cdot \cos \theta$, la superficie es rugosa Intermedia en los demás casos
ULABY d: DOBSON (1988)	Lisa cuando $RMSH < 0,2\lambda/2\pi$ Para $RMSH > \lambda/2\pi$, la superficie es rugosa

Tabla 3.5: Criterios para establecer el grado de rugosidad, [60]

3.4.2.8. Distorsiones geométricas

Como en todos los sistemas de teledetección, la geometría de observación genera distorsiones geométricas en la imagen resultante, especialmente en áreas de montaña o de relieve pronunciado.

Estas distorsiones son conocidas como:

- Acortamiento (foreshortening): aparece en aquellos casos donde las pendientes están orientadas hacia el sensor en el momento de la captura de la imagen. Las laderas aparecen “comprimidas” en la dirección de *rango oblicuo*; en la imagen se ven más cortas de lo que en realidad son [61], Figura 3.17(a).
- Inversión (layover): ocurre cuando las pendientes del terreno son mayores al ángulo de visión del radar, causando que la parte superior e inferior de la pendiente estén invertidas en la imagen del radar [45]. Esto significa que los ecos de la parte superior de un objeto llegan antes que los de su base, Figura 3.17(b).
- Sombra (shadow): la región de la superficie del terreno que no es iluminada por el radar se visualiza de color negro en la imagen, ya que no se recibe señal de retorno en estas regiones. Las sombras siguen el sentido del alcance inclinado, sea por detrás de los objetos que son verticales o que tienen laderas pronunciadas. Estas sombras son un buen indicador de la dirección de iluminación del radar. Debido a que el ángulo de incidencia aumenta desde el alcance cercano al alcance lejano,

el sombreado se hace más pronunciado hacia el alcance lejano, Figura 3.17(c).

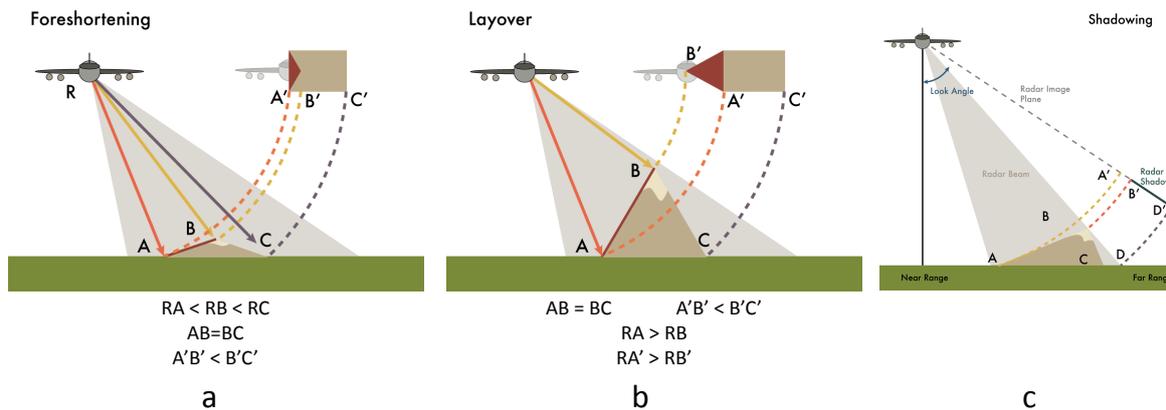


Figura 3.17: Distorsiones geométricas, [58]

3.4.3. Celda de resolución

La calidad de las imágenes producidas por un sensor de radar se mide principalmente por la habilidad de distinguir entre objetos con muy poca separación. Esta habilidad se puede definir en términos de distancia de resolución. La distancia de resolución es la distancia mínima en la imagen de radar, en la que dos dispersores próximos y de igual área pueden ser reconocidos como dispersores individuales. Los dispersores pueden ser objetos independientes o pueden ser partes componentes de un mismo objeto. Esta separación entre los dispersores usualmente se expresa en términos de distancias en la dirección del ancho de barrido d_r y en la dirección acimutal (dirección del vector velocidad de la plataforma sobre la Tierra) d_a [45,61,62]. Con las distancias de resolución se puede hacer una construcción geométrica que represente una porción de la superficie iluminada, denominada celda de resolución.

3.4.4. Corrección radiométrica

Este proceso de calibración consiste en la evaluación de datos y la generación de factores de corrección o calibración. Estos factores se usan para corregir los datos de la imagen, estableciendo una base común para relacionar los datos numéricos de píxeles con el coeficiente de retrodispersión del objeto [34].

En general, se puede definir un procedimiento de calibración radiométrica mediante los siguientes pasos:

- Evaluación de datos de calibración interna.
- Evaluación de datos de calibración externa.
- Generación de factores de corrección.
- Corrección radiométrica de los datos de la imagen.

El factor de corrección depende de:

- El *rango oblicuo* del radar.
- El tamaño de la celda de resolución.
- La ganancia del sistema.

3.4.5. Resolución del radar en la dirección del *rango oblicuo*

La resolución de un radar en la dirección del *rango oblicuo* se define como la habilidad que posee para distinguir entre dos objetos en el mismo rumbo pero a distintas distancias del radar. El grado de esta resolución depende en primer lugar del ancho del pulso emitido, y en segundo lugar del tipo y tamaño de los objetos iluminados.

Para que el radar pueda distinguir dos elementos poco espaciados, sus ecos deben recibirse necesariamente en momentos diferentes. En la parte superior de la Figura 3.18, el tren de pulsos de longitud L_p se acerca a los objetos A y B . La distancia del *rango oblicuo* entre los dos objetos es d .

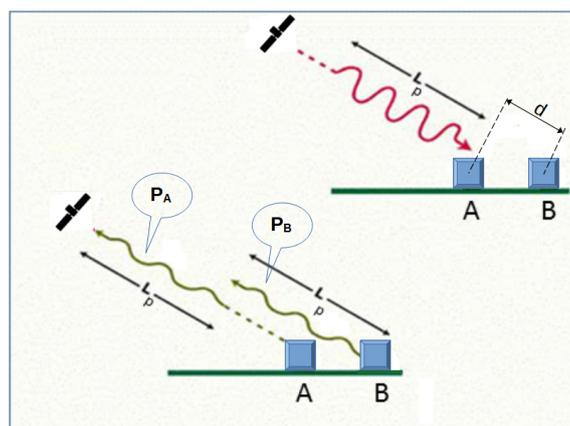


Figura 3.18: Separación entre emisiones de pulsos radar

Los dos objetos de la Figura 3.18 dan lugar a dos ecos distinguibles. En la parte inferior de la misma figura se ilustra el eco P_A de los pulsos proyectados sobre el objeto A (parte de la dispersión en A) y el eco P_B de los pulsos proyectado sobre el objeto B .

Se puede observar que para alcanzar el objetivo y regresar, P_B ha cubierto una distancia adicional $2d$ detrás de P_A , siendo en este ejemplo $2d < L_p$. Debido a esto, el final de P_A y el comienzo de P_B se superponen cuando llegan a la antena.

Consecuentemente, se interpreta que existe un único objeto que se extiende de A a B . Si la distancia d entre A y B fuera ligeramente superior a $L_p/2$, los dos pulsos no se superponen y las dos señales se registran por separado.

Siendo:

t_{iniB} : tiempo de arribo del comienzo del eco del pulso P_B (pulso del blanco más lejano B) y t_{finA} : tiempo en que finaliza el arribo del eco del pulso P_A (pulso del blanco más cercano A)

Si se cumple que t_{iniB} es posterior a t_{finA} , los blancos pueden ser distinguidos por el sistema [34]. En consecuencia, se concluye que la resolución en la dirección del blanco es aproximadamente igual a $L_p/2$, es decir, la mitad de la longitud del pulso. [63]

La resolución del *RAR* en *rango oblicuo* δ_r es:

$$\delta_r = \frac{c\tau_p}{2} \quad (3.15)$$

Siendo c la velocidad de la luz y τ_p tiempo de duración del pulso emitido por el radar.

Además, si el radar emite pulsos de duración τ_p , mientras está transmitiendo no puede recibir ningún eco, la mínima separación entre puntos que puede identificar está limitada por el instante de tiempo en que puede comenzar a registrar los ecos. Esto determina la llamada “distancia ciega, (τ_{BLIND})” del radar, por debajo de la cual éste es inútil. En la ec. (3.15) se observa que a menor duración del pulso mejor resolución. En el caso del *RAR* la duración del pulso es inversamente proporcional al ancho de banda B correspondiente a ese pulso [34]. Esto se relaciona con el mayor número de frecuencias o componentes armónicas (en el espectro de frecuencias) que se necesitan para poder representar a dicho pulso.

En la transformación de Fourier, el Escalado en tiempo y frecuencia se puede expresar como:

$$\mathcal{F} \{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F \left(\frac{\omega}{a} \right) \quad (3.16)$$

Siendo $F(\omega)$ ó $\mathcal{F} \{f(t)\}$ la transformada de Fourier de $f(t)$ Es decir que, si se escala la función en el dominio del tiempo (contracción o expansión), se produce un escalado en sentido contrario en el dominio de la frecuencia. A su vez, la magnitud del espectro en

frecuencia, es multiplicada por la misma constante que produce el escalado en tiempo y frecuencia, Figura 3.19.

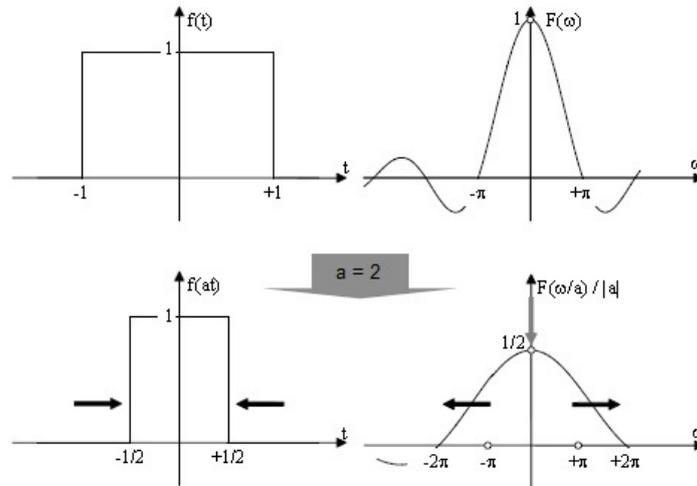


Figura 3.19: Escalado en tiempo y frecuencia

Cuando se contrae la función en el dominio del tiempo se produce un ensanchamiento en el dominio de la frecuencia con la contribución de armónicos de mayor frecuencia. Por lo tanto, la resolución en *rango oblicuo* puede expresarse en función de B como:

$$\delta_r \approx \frac{c}{2B} \quad (3.17)$$

La resolución en tierra se obtiene a partir de la proyección de δ_r sobre la superficie considerando el ángulo de incidencia. La resolución del *SLAR* en *rango oblicuo* esta dada por la siguiente expresión y se ilustra en la Figura 3.20:

$$\delta_g = \frac{\delta_r}{\sin \theta} = \frac{c\tau_p}{2 \sin \theta} = \frac{c\tau_p}{2 \cos \gamma} \quad (3.18)$$

Siendo θ : Angulo de incidencia local, γ : Angulo rasante, δ_r : Resolución de *rango oblicuo*, δ_g : Resolución de *rango en tierra*.

3.4.6. Resolución del radar en la dirección acimut

La resolución en acimut es directamente proporcional al ancho del haz θ_a proyectado por la antena del radar sobre la superficie iluminada. En la dirección del haz, dos blancos son distinguibles si no están ambos contenidos en un mismo haz, en la Figura 3.21 se aprecia cómo crece la zona iluminada con el aumento de R .

- **Ancho del haz:** El radar emite un haz de radiación que distribuye su energía de acuerdo con el patrón de radiación de la antena. Cabe señalar que sólo interesa

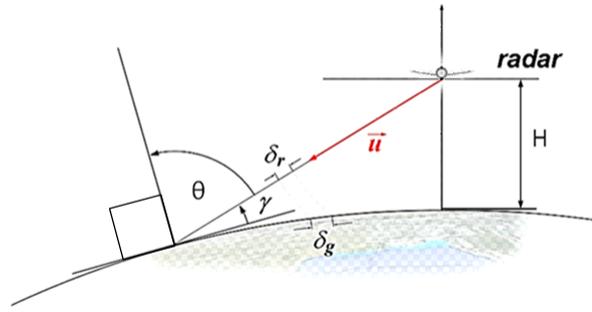


Figura 3.20: Modelo simple de geometría SLAR. Vista lateral

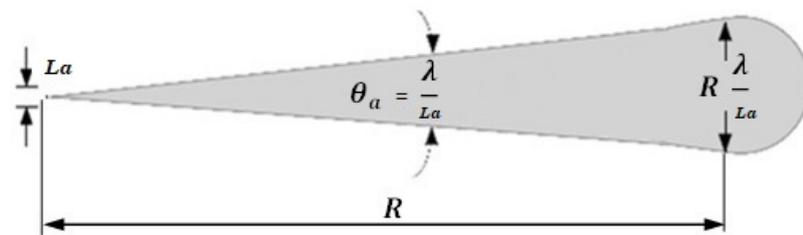


Figura 3.21: Haz proyectado por la antena

la superficie que recibe energía por encima de un determinado nivel de radiación. En consecuencia, se define al ancho angular θ_{3db} que corresponde al ángulo del haz dentro del cual el nivel de radiación no decae en más de 3 db con respecto al valor de radiación máxima.

En una antena de longitud física L_a con $\theta_a \approx \theta_{3db}$, de [35] el ancho del haz proyectado puede expresarse como:

$$\theta_a = \frac{\lambda}{L_a} \quad (3.19)$$

La resolución en acimut es entonces proporcional a la zona iluminada y puede expresarse como:

$$\delta_{Az} = R\theta_a = R\frac{\lambda}{L_a} \quad (3.20)$$

En la ec. (3.20) se observa que la resolución δ_{Az} mejora con la reducción de R y el aumento de L_a . Las dimensiones varían en función del sistema, pero es fácil observar que si se tratase de un satélite o de un avión, se necesitan antenas del orden de kilómetros para mejorar significativamente δ_{Az} .

Por ejemplo, la órbita del Sentinel-1 tiene una altura de 693 Km y la órbita de SAOCOM-1A una altura de 620 km. De acuerdo con la ec. (3.20), un radar *SLAR* ubicado a una distancia R de 620 km del blanco, operando en la banda L de 23,5 cm y con una resolución δ_{Az} de 25 m necesita de una antena con un L_a de:

$$L_a = R \frac{\lambda}{\delta_{Az}} = 620 \text{ km} \frac{23,5 \text{ cm}}{2500 \text{ cm}} = 5,828 \text{ km} \quad (3.21)$$

3.5. *SAR* o radar de apertura sintética

Este sistema radar utiliza el efecto Doppler para discernir el tipo de movimiento relativo entre la fuente y el objeto observado, este recurso se analiza en 3.5.5. En un determinado tiempo y a una determinada distancia de la antena, las contribuciones de cada punto pueden ser distinguidas por el valor del desplazamiento de la frecuencia. El sistema analiza la frecuencia y el tiempo de llegada de los pulsos.

El desarrollo de un *SAR* viene acompañado por los avances en el análisis del uso de frecuencias de corrimiento Doppler. La reflexión de dos blancos fijos con una separación angular con respecto al vector de velocidad puede ser resuelta por el análisis de frecuencias del espectro. Esta característica permite que la resolución en acimut del eco de retorno sea mejorada separando los ecos en grupos basados en su cambio Doppler. En el año 1965 Carl Wiley nombra a esta técnica como “haz Doppler afilado”, pero luego se lo conocerá como Radar de apertura sintética [34].

Distinguir puntos sobre una superficie iluminada por un radar a lo largo de la trayectoria de una plataforma sobre la cual va montado, es difícil con una antena pequeña. Sin embargo, si se va guardando información de amplitud y fase de cada señal reflejada en un determinado punto del terreno y el radar va emitiendo un tren de pulsos sobre cada punto mientras la plataforma se desplaza, entonces será posible combinar los resultados de dichos pulsos. La antena del radar adopta diferentes posiciones mientras este se desplaza en su trayectoria e ilumina a la superficie desde esas posiciones. Los ecos que recibe la antena en cada una de sus posiciones, son procesados matemáticamente para recrear un solo “barrido virtual”, es decir, una única “imagen” de la región de interés.

Para conseguir resolución fina en la dirección acimut, se necesita un ancho de banda de transmisión amplio. Para conseguir esto se debe combinar una secuencia de ecos recibidos para sintetizar una antena larga. Dado que el radar se mueve recolectando

respuestas de dispersores en diferentes tiempos, es equivalente a recolectar respuestas de dispersores en diferentes puntos del espacio. Por ello, al integrar los ecos *SAR* recolectados sobre la distancia recorrida por el radar forma el equivalente de un conjunto de antenas (array) lineal muy largo y una apertura sintética muy larga produce un haz acimutal efectivo muy estrecho.

Normalmente las observaciones se envían a estaciones terrestres y allí se combinan usando técnicas basadas en transformadas de Fourier. El resultado es un “mapa de reflectividad radar”. De esta manera, se obtiene el mismo resultado que si se estuviese operando con una antena mucho más grande y direccional, eso ha dado lugar al término “apertura sintética”.

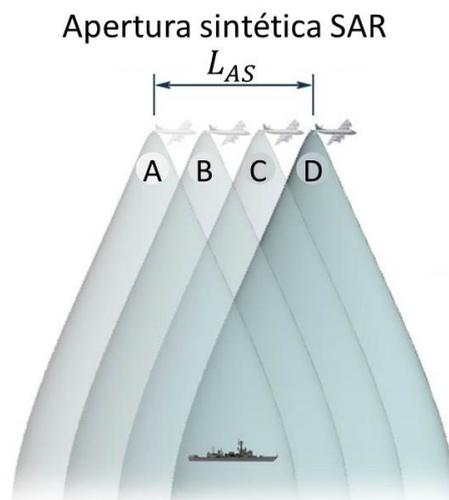


Figura 3.22: Radar *SAR*. Barrido virtual, [64]

En la Figura 3.22 se puede observar la trayectoria de la plataforma y al “Blanco” iluminado por la antena del radar desde diferentes posiciones de la plataforma. Mientras el “Blanco” permanece iluminado, los datos de todos los ecos provenientes del “Blanco” son almacenados. La distancia L_{AS} representa la longitud de la antena simulada o sintetizada.

Mediante un procesamiento adecuado de los datos, se obtiene una resolución en acimut más fina que usando *RAR*, esta resolución depende del largo de la antena sintética y es inversamente proporcional al tamaño de la antena real [35,61], Figura 3.23

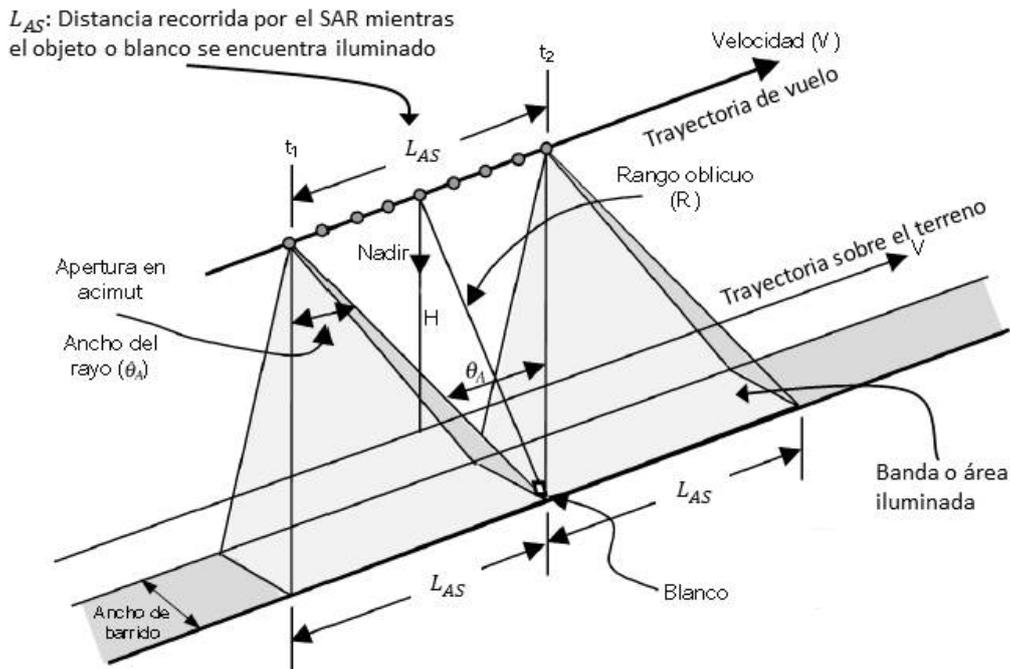


Figura 3.23: Radar SAR. Barrido con apertura sintética, [65]

3.5.1. Resolución en la dirección acimut del SAR

El Radar de Apertura sintética posee la ventaja de que la resolución acimutal es independiente de la distancia, dependiendo únicamente de L_a que es la longitud de la antena real en la dirección acimut y puede ser tan pequeña como $L_a/2$.

La resolución asociada con el ancho del haz azimutal de una antena está expresada en la ec. (3.20) y por lo tanto, para un *rango* dado, una resolución fina se puede obtener operando en una longitud de onda muy corta o empleando una antena muy larga o una combinación de ambos. Debido a la severa atenuación ocasionada por la atmósfera en longitudes de onda cortas, la longitud de onda mínima que es práctica para mapeo en rangos largos es alrededor de 3 cm.

En las aplicaciones en vehículos aéreos la longitud de la antena del radar usualmente se ve limitada por la capacidad de carga del vehículo.

Por ello una antena larga de 3 m y una longitud de onda de 3 cm resultan en una resolución acimut relativamente pobre de 1 km en un *rango* de 100 km. Sin embargo, si el *rango* máximo de interés es razonablemente corto y los requerimientos de resolución no son demasiado demandantes, una antena de tamaño práctico puede dar un haz (real) estrecho para producir resultados adecuados. En *rangos* en el orden de 18km a 20 km, un sistema de radar de vista lateral, teniendo una antena de 5 m de largo operando en

banda X puede dar una resolución adecuada para identificar características tales como derrames de petróleo y barcos pequeños. En un *rango* de 20 km la resolución es de 120 m. Al implementar procesamiento basado en fase, se puede obtener resolución más fina. El tener un tamaño de apertura muy grande produce un haz de antena efectivo enfocado muy estrecho y esto hace posible tener una resolución muy fina en la dirección acimut [66]

En un radar de apertura sintética la antena se traslada para tomar posiciones secuenciales a lo largo de una línea y es posible enfocar cada *rango* por separado mediante el ajuste apropiado de las fases de las señales recibidas. En cada una de estas posiciones se transmite una señal y las señales de radar recibidas en respuesta a esa transmisión se almacenan. Es esencial que el almacenamiento sea tal que se conserven tanto la amplitud como la fase de las señales recibidas.

De [67], la apertura sintética del SAR tiene una resolución más fina en un factor de 2 con respecto a la resolución del RAR para una antena de la misma longitud.

Esta relación se escribe como:

$$\beta_{eff} = \frac{\lambda}{2L_{as}} \quad (3.22)$$

Donde β_{eff} es el ancho de haz efectivo de media potencia y L_{as} es la longitud de la apertura sintética.

Sea L_a la apertura horizontal de la antena física del radar aerotransportado. El ancho del haz horizontal en el *rango* R da el valor máximo para la longitud de apertura sintética que se puede utilizar en ese *rango*, Figura 3.23. Dado que el ancho del haz de dicha antena viene dado por la relación entre la longitud de onda λ y su apertura horizontal L_a , ec. (3.19), la longitud máxima de esta apertura de antena sintética viene dada por:

$$L_{as} = R \frac{\lambda}{L_a} \quad (3.23)$$

La resolución lineal en el acimut δ_{Az} es el producto del ancho efectivo del haz dado por la ec. (3.22) y el *rango* R :

$$\delta_{Az} = \beta_{eff} R \quad (3.24)$$

Si las ecuaciones (3.22) y (3.23) se combinan con la ec. (3.24), se obtiene:

$$\delta_{Az} = \frac{\lambda}{2L_{as}} R = \frac{\lambda R}{2} \frac{L_a}{R\lambda} = \frac{L_a}{2} \quad (3.25)$$

Se notará que la ec. (3.25) indica que la resolución lineal de acimut es independiente tanto del *rango* como de la longitud de onda. Además, el resultado indica que se puede lograr una resolución más fina con aperturas físicas más pequeñas en lugar de más grandes.

También se deduce que los objetos que se encuentran a mayor distancia R del sensor no son capturados con menor resolución, ya que tales objetivos son iluminados con mayores aperturas sintéticas, ec. (3.23).

3.5.2. Modulación de frecuencia *chirp*

Tal como se expresa en 3.4.5, la resolución en *rango* depende de la duración del pulso transmitido τ_p y un pulso corto proporciona mejor resolución [61]. Si bien los pulsos del radar deben ser lo más cortos posible, también es necesario que los pulsos transmitan suficiente energía para permitir la detección de las señales reflejadas. Mientras más corto es el pulso, más baja es la energía transmitida y más pobre la resolución radiométrica. Si el pulso se acorta, se debe aumentar su amplitud para mantener la misma energía total en el pulso. Una limitación es el hecho de que el equipo necesario para transmitir un pulso muy corto y de alta energía es difícil de construir. Por esta razón, la mayoría de los sistemas de radar de largo alcance utilizan la técnica *chirp* que requiere una electrónica más sencilla a bordo de la plataforma. Este método alternativo se basa en la compresión de pulsos mediante modulación de frecuencia [45]. En el caso de la técnica *chirp*, en lugar de un pulso corto con frecuencia constante, se emite un pulso largo con frecuencia modulada y se logra de ese modo un mayor ancho de banda B con respecto a pulsos enviados con la misma duración sin el uso de la técnica *chirp*, como sucede en el caso de los radares convencionales. La modulación de frecuencia lineal *chirp* sirve para conservar la resolución radiométrica y se procesa el eco mediante un filtro adaptado (matched filter) en la construcción de la imagen [39]. La modulación de frecuencia *chirp* o *chirp* lineal, como su nombre lo sugiere, consiste en usar una señal que varíe su frecuencia instantánea en forma lineal con el tiempo. La dependencia entre la frecuencia y el tiempo queda determinada por el índice de modulación lineal. El signo de este índice determina si se usa una pendiente positiva o negativa y suele expresarse como modo *up - chirp* o *down - chirp* respectivamente.

Tipos de señales de modulación.

Para modular en frecuencia se utilizan las siguientes formas de onda.

- Diente de sierra o sawtooth: Puede ser ascendente en tiempo (*up – chirp*) o descendente en tiempo (*down – chirp*)
- Triangular: Puede interpretarse como una combinación de *up – chirp* y *down – chirp*

La frecuencia instantánea $f(t)$ varía con pendiente k_c a lo largo de un periodo de tiempo T_{chirp} .

$$k_c = \frac{\Delta f}{T_{chirp}} \quad (3.26)$$

El tiempo T_{chirp} es igual al periodo de la señal transmitida τ_0 en el caso de modulaciones sawtooth e igual a $\tau_0/2$ para modulaciones triangulares.

Teniendo en cuenta que $t_0 = 0 \Rightarrow \Delta t = t$, la siguiente expresión describe la variación lineal de la frecuencia instantánea con el tiempo:

$$f(t) = f_0 + k_c t \Rightarrow \omega_t = \omega_0 + 2\pi k_c t \quad (3.27)$$

Donde f_0 : frecuencia inicial en t_0 expresada en $1/seg$, k_c : Índice de modulación lineal expresado en $1/seg^2$, $\Delta t = t$: tiempo expresado en seg .

La señal *chirp* emitida se puede expresar como:

$$s_e(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau_0}\right) e^{j\phi} \quad (3.28)$$

Con $\phi = \phi_0 + (\omega_0 t + 2\pi k_c \frac{1}{2} t^2)$, la señal emitida con modulación de frecuencia *chirp* [68] queda expresada como:

$$s_e(t) = A_e \Pi\left(\frac{t}{\tau_0}\right) e^{j\phi_0} e^{j\pi k_c t^2} e^{j\omega_0 t} \quad (3.29)$$

O en banda base:

$$\tilde{s}_e(t) = A_e \Pi\left(\frac{t}{\tau_0}\right) e^{j\phi_0} e^{j\pi k_c t^2} \quad (3.30)$$

Donde $\Pi\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ es un pulso de amplitud unitaria de duración τ_0 y A_e es la amplitud de la señal de entrada.

El pulso *chirp* es modulado por una señal triangular de ancho $2T_{chirp} = \tau_0$, es decir que en el intervalo de tiempo $\tau_0/2 = T_{chirp}$ la señal triangular moduladora cambia el signo de su pendiente. El objetivo de acotar la señal *chirp* con un pulso rectangular de

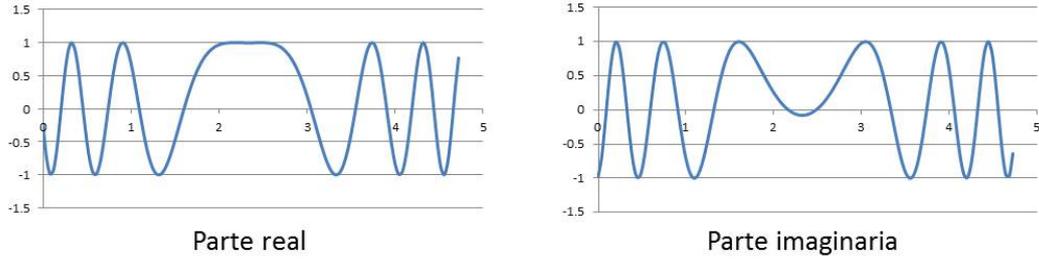


Figura 3.24: Parte Real e Imaginaria de la señal *up - chirp* simulada con Excel.

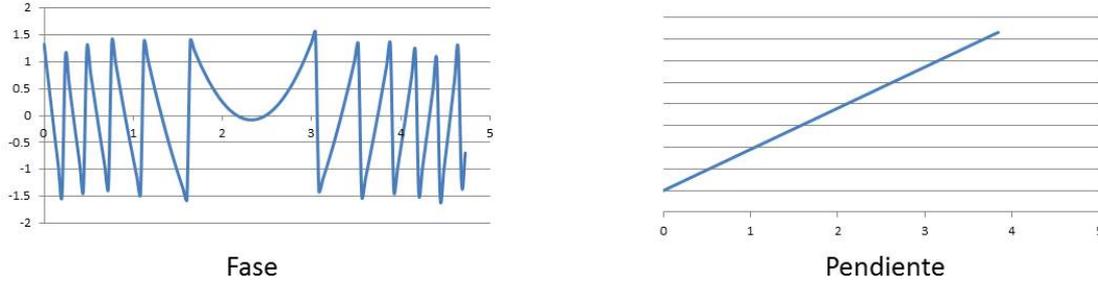


Figura 3.25: Fase y pendiente (Índice de modulación lineal) de la señal *up - chirp* simulada con Excel.

ancho $\tau_0/2$, es usar de toda la señal sólo la parte modulada con pendiente positiva ya que la señal con pendiente negativa añade información redundante. En las Figuras 3.24 y 3.25 se observan gráficos de parámetros del modelo *up - chirp*.

Si se considera $R_o \approx R_i \approx R$, tal que R_o : distancia recorrida por la señal en el trayecto de ida, R_i : distancia recorrida por la señal en el trayecto de vuelta, R : distancia teórica entre el emisor y el blanco; el eco de la señal emitida que llega al sensor, lo hace en un tiempo t_r , que es el retraso que sufre la señal al recorrer dos veces la distancia que hay entre el emisor y el blanco con velocidad c . Este tiempo t_r se puede expresar como:

$$t_r = \frac{2R}{c} \quad (3.31)$$

Y en una primera aproximación, se expresa a la señal recibida como la señal emitida con el desplazamiento t_r en el tiempo:

$$s_r(t) = A_r \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{j\phi_0} e^{j\pi k_c (t - t_r)^2} e^{j\omega_0 (t - t_r)} \quad (3.32)$$

O en banda base:

$$\tilde{s}_r(t) = A_r \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{j\phi_0} e^{j\pi k_c (t - t_r)^2} \quad (3.33)$$

Donde $\Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right)$ es un pulso de amplitud unitaria de duración τ_0 desplazado en tiempo t_r y A_r es la amplitud de la señal recibida.

3.5.3. Secuencia de señales *chirp*

La señal *chirp* es enviada en intervalos de tiempo PRT , tal que $PRT = 1/PRF$, siendo PRF la frecuencia de repetición de esa señal. La Figura 3.26 muestra un tren de *chirp* en modo *up - chirp*, enviados regularmente con intervalo PRT .

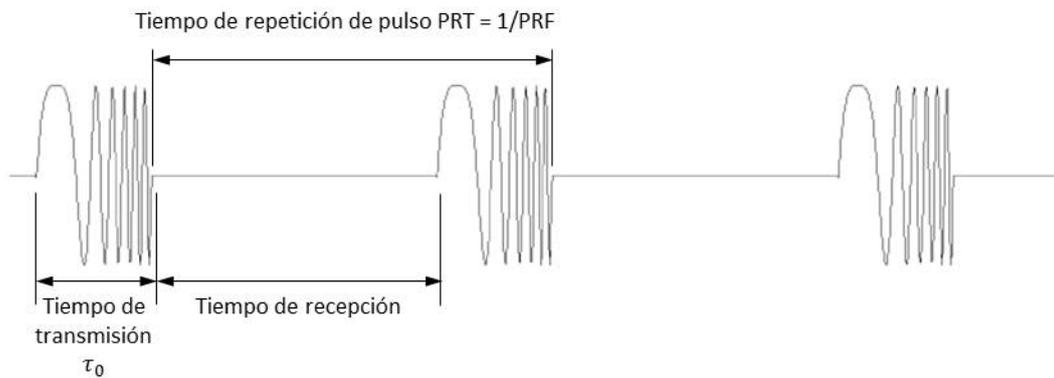


Figura 3.26: Tren de señales *chirp*

El radar puede recibir los ecos de los blancos iluminados con la señal enviada durante el tiempo que no está enviando señal. Es importante que este tiempo inter-pulso sea suficiente para poder recibir los ecos correspondientes a todo el ancho de barrido. Para ello se abre una ventana de muestreo de los ecos, comúnmente denominada *SWT* por sus iniciales en inglés (Sampling Window Time). Esta ventana debe abrirse antes de la recepción del eco del *rango cercano* y cerrarse luego de la recepción del eco del *rango lejano*.

La PRF o su inversa PRT resultan entonces ser parámetros relevantes en el diseño, pues los ecos de la escena deben caer todos dentro de la *SWT* y por lo tanto la PRF no puede ser mayor a un valor que permita recibir los retornos desde el *rango cercano* al lejano. La Figura 3.27 muestra un ciclo de transmisión y recepción de pulsos.

Los ecos muestreados luego de la transmisión de un pulso no se corresponden con el pulso enviado justo antes de la recepción. A los efectos de aclarar este punto, se cita un ejemplo en un modelo simplificado con los datos de configuración de una escena de SAOCOM. [65]

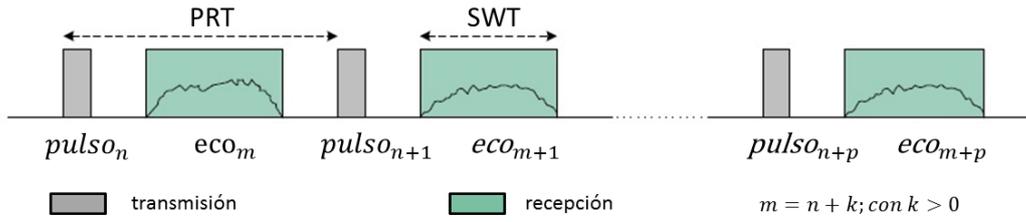


Figura 3.27: Ciclos de envío y recepción, [65]

En la tabla 3.6 se pueden ver algunos parámetros de configuración para el modo de adquisición STRIPMAP utilizando el haz con ángulo θ_i .

Configuración SAOCOM		
Parámetro [unidad]	Símbolo	Valor
Altura de la órbita [km]	H	624.8
PRF [Hz]	PRF	3463.89
Angulo de incidencia nominal [grados]	θ_i	19.8

Tabla 3.6: Datos de iluminación para modo de adquisición STRIPMAP [65]

En un modelo simplificado, se puede estimar la cantidad de pulsos que envía el radar antes de recibir el eco correspondiente al primer pulso enviado.

Con los datos de la tabla 3.6 se puede calcular el tiempo PRT y el *rango* R .

$$PRT = \frac{1}{PRF} = \frac{1}{3463,89} \approx 0,289 \text{ ms} \quad (3.34)$$

Siendo $R = \frac{H}{\cos \theta_i}$, de la ec. (3.31):

$$t_r = \frac{2R}{c} = \frac{2H}{\cos \theta_i c} \approx 4,4 \text{ ms} \quad (3.35)$$

Con esta configuración, transcurren 4,4 ms antes del retorno del eco del primer pulso. La cantidad de pulsos enviados antes de recibir el primer eco:

$$\text{cant pulsos} = \frac{t_r}{PRT} = 15,225 \quad (3.36)$$

Es decir que se enviarán 15 pulsos antes de recibir el eco del primer pulso, el cual será muestreado recién en la ventana de recepción 15.

3.5.4. Frecuencia de batido y distancia R

El sistema radar recibe el eco, lo mezcla y filtra con la señal original (señal de referencia) en un “mezclador” del radar, de manera que a la salida del “mezclador” se

obtiene una señal S_b , que representa la diferencia en frecuencia de las señales mezcladas. Esto se conoce como la técnica de “deramping” que consiste en aplicar el primer paso del filtro adaptado. Un filtro adaptado es un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) que maximiza la relación señal-ruido (SNR), ya que se adapta a la señal. En la Figura 3.28 se puede observar un diagrama en bloque de esta etapa en el procesamiento de la señal. Cuando se recibe el eco, éste es filtrado, amplificado y batido en un mezclador junto a la señal transmitida (señal de referencia), por lo que el mezclador no es más que un bloque que realiza las funciones de un filtro adaptado cuya expresión se muestra en la ec. (3.41). La salida de este bloque proporciona una señal generada gracias a la diferencia de frecuencias $|f_e - f_r|$ asociadas a las señales $s_e(t)$ y $s_r^u(t)$

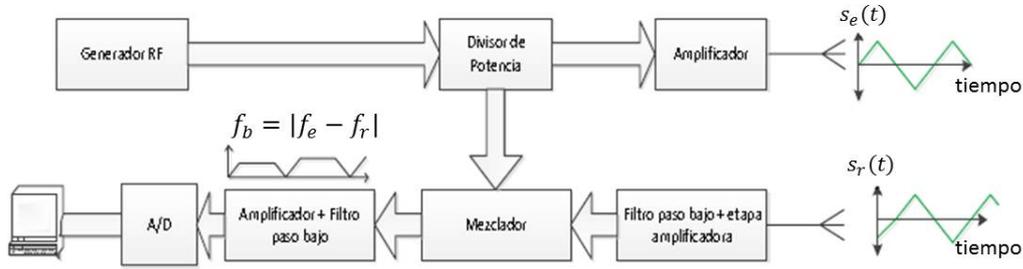


Figura 3.28: Diagrama en bloque del procesamiento para obtener S_b , [69]

El sistema detecta la presencia de una señal a partir de la señal emitida $s_e(t)$ y la señal recibida $s_r(t)$, es por ello que se tiene una copia de la señal emitida al momento de recibir el eco de esa señal. Se obtiene así una nueva señal $S_b(t)$ o señal de batido y la operación que permite obtener $S_b(t)$ se puede expresar como:

$$S_b(t) = s_e(t) \times s_r^u(t) \quad (3.37)$$

De la ec. (3.32) se obtiene la expresión de $s_r^u(t)$, conjugada compleja de $s_r(t)$:

$$s_r^u(t) = A_r \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{-j\phi_0} e^{-j\pi k_c (t - t_r)^2} e^{-j\omega_0 (t - t_r)} \quad (3.38)$$

Definiendo $A_b = A_e A_r$ y reemplazando las ecuaciones (3.29, 3.38) en la ec. (3.37) se obtiene la expresión que define a S_b :

$$S_b(t) = A_b \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{j\phi_0} e^{j\pi k_c t^2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\phi_0} e^{-j\pi k_c (t - t_r)^2} e^{-j\omega_0 (t - t_r)} \quad (3.39)$$

$$S_b(t) = A_b \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{j\pi k_c t^2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\pi k_c (t^2 - 2t_r t + t_r^2)} e^{-j\omega_0 (t - t_r)} \quad (3.40)$$

$$S_b(t) = A_b \Pi \left(\frac{t - t_r}{\tau_0} \right) e^{j\omega_0 t_r} e^{j2\pi k_c t_r t} e^{-j\pi k_c t_r^2} \quad (3.41)$$

El término $e^{j\omega_0 t_r}$ corresponde a la fase lineal que se genera por el retraso del eco, que es proporcional a la distancia recorrida.

$$e^{j\omega_0 t_r} = e^{j2K_0 R} \quad (3.42)$$

El término $e^{-j\pi k_c t_r^2}$ corresponde a un desajuste de fase conocido como “residual video phase, (RVP)”. Se desprecia este término en la medida en que es de valor muy inferior a la fase del eco. Es decir: $RVP \ll \omega_0 t_r$

Debido a que la información reside en la fase de la señal de batido, resulta más sencillo trabajar con la respuesta en frecuencia de la expresión anterior. De esta manera el filtro adaptado al eco recibido puede implementarse mediante la DFT (Discrete Fourier Transform) aunque por eficiencia se implementa mediante una FFT (Fast Fourier Transform) [68, 70].

La diferencia en frecuencias $f_b = f_e - f_r$ radica en el término $e^{j2\pi k_c t_r t}$, que corresponde a la frecuencia o tono de batido (“beating tone”) f_b y puede expresarse como:

$$f_b = f_e - f_r = k_c t_r \quad (3.43)$$

Gracias a la transformada de Fourier se puede pasar la señal al dominio de frecuencia y se obtiene una sinc centrada en la frecuencia de batido. Así pues, pasar la señal al dominio de frecuencia supone extraer la información más cómodamente. En un proceso de manipulación algebraica detallado en el apéndice A, al aplicar la transformada de Fourier en la ec. (3.39), se obtiene la siguiente expresión:

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = k_2 \text{sinc}(\pi\tau_0(f - k_c t_r))$$

Donde $k_2 = k_1 \tau_0$ y $k_1 = A_b e^{j(\omega_0 t_r - \pi k_c t_r^2)}$

La frecuencia de batido f_b asociada a la señal S_b y los desplazamientos de frecuencia se pueden apreciar en la Figura 3.29. De [67], se recupera la forma de la señal S_b . La frecuencia de pico de la sinc ilustrada en la Figura 3.30 corresponde a la frecuencia de batido. Con la correcta conversión, se puede obtener la distancia R a la que se encuentra el blanco.

A partir de las ecuaciones (3.26), (3.31) y (3.43), la siguiente expresión permite extraer la información de la distancia radar-blanco de un objetivo estático iluminado por la señal *chirp*

$$f_b = k_c t_r = \frac{\Delta f}{T_{chirp}} \frac{2R}{c} \quad (3.44)$$

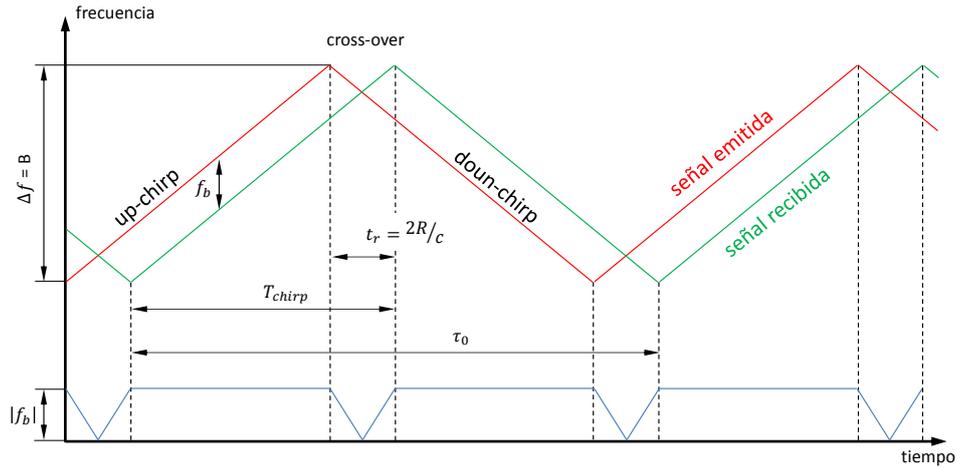


Figura 3.29: Señales moduladas s_e , s_r y frecuencia de batido f_b , (gráfica construida a partir de [71])

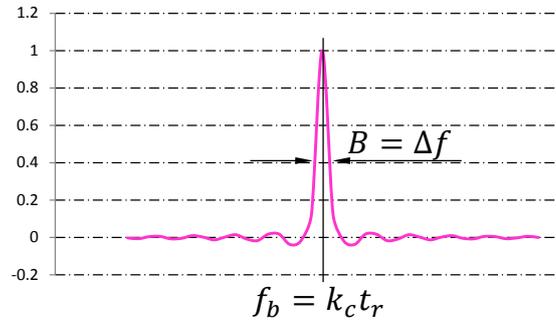


Figura 3.30: Respuesta en frecuencia para un único blanco. Gráfica desarrollada en Excel.

$$R = \frac{cT_{chirp}}{2\Delta f} f_b \tag{3.45}$$

Si existe un desplazamiento entre el radar y el blanco, la señal del eco que recibe el radar presenta además un desplazamiento en frecuencia debido al efecto Doppler, Figura 3.31. Si la distancia radar-blanco se reduce se observa que el valor máximo de frecuencia de la señal recibida (señal recibida 1) es superior al valor máximo de frecuencia de la señal emitida, por el contrario, si la distancia radar-blanco aumenta, se observa que el valor máximo de frecuencia de la señal recibida (señal recibida 2) es inferior al valor máximo de frecuencia de la señal emitida.

La velocidad del blanco se puede conocer aprovechando la información que aporta el efecto Doppler.

El desplazamiento vertical debido al corrimiento Doppler da lugar a dos saltos de

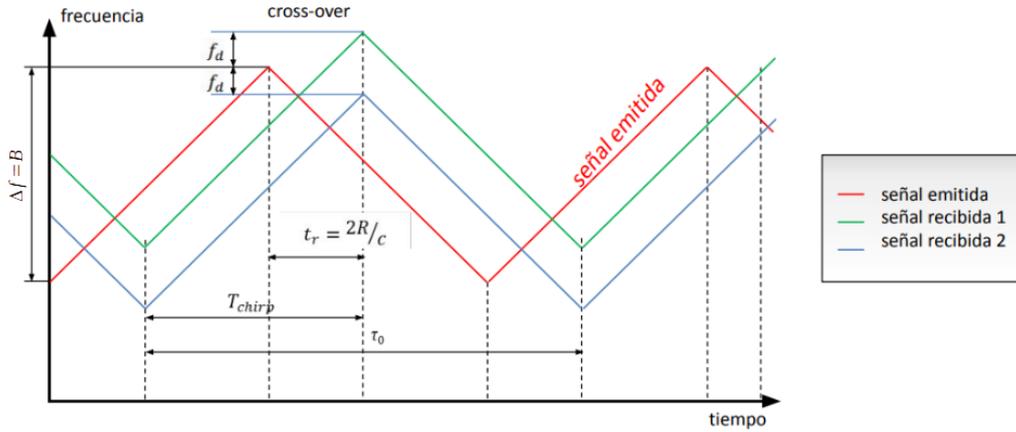


Figura 3.31: Señal modulada, corrimiento Doppler, (gráfica construida a partir de [71])

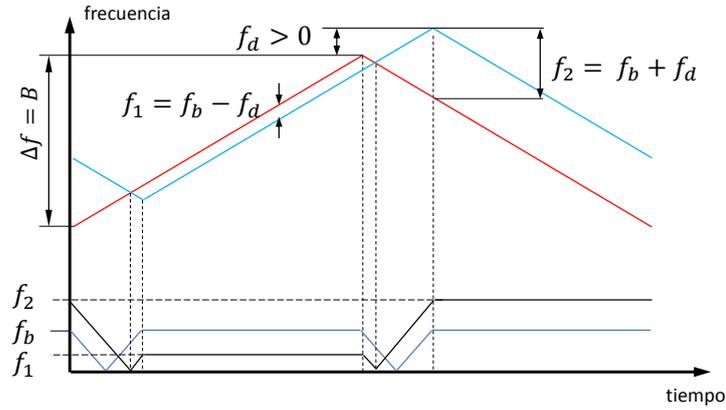


Figura 3.32: Señal modulada, corrimiento Doppler y frecuencia de batido f_b , (gráfica construida a partir de [71])

frecuencia f_1 y f_2 , que se pueden observar en la Figura 3.32. La frecuencia de batido f_b y la frecuencia asociada al corrimiento Doppler f_d se obtienen a partir de f_1 y f_2 .

$$\begin{cases} f_2 = f_b + f_d \\ f_1 = f_b - f_d \end{cases} \quad (3.46)$$

La frecuencia de batido media o frecuencia de batido f_b se calcula como:

$$f_b = \frac{f_2 + f_1}{2} \quad (3.47)$$

En la Figura 3.30 se muestra la frecuencia de batido f_b y ancho espectral B , tal que $B = \Delta f$. En el caso de modulaciones sawtooth τ_0 es igual a T_{chirp} . Reemplazando estas

expresiones en la ec. (3.45), resulta:

$$R = \frac{c\tau_0}{2B} f_b \quad (3.48)$$

La frecuencia asociada al corrimiento Doppler se puede calcular como:

$$f_d = \frac{f_2 - f_1}{2} \quad (3.49)$$

O también a partir de la ec. (3.46):

$$f_d = f_b - f_1 \quad (3.50)$$

Es decir que, se puede obtener f_b si inicialmente se opera con el patrón de la señal emitida, que corresponde a la señal s_r sin corrimiento Doppler, luego con el eco se la señal enviada se obtiene f_1 y es posible determinar f_d usando la ec. (3.50). Es decir que es posible determinar f_d usando sólo modulación *up - chirp*

La velocidad radial de la plataforma se puede obtener conociendo f_d , tal como se describe en 3.5.5.

3.5.5. Dirección y velocidad del radar

El radar emite en período regular PRT una sucesión de pulsos mientras se desplaza a lo largo de su trayectoria, y recibe por cada pulso emitido el eco de distintas partes reflectantes de la franja de suelo iluminada. Las muestras de los ecos permiten recuperar información del ángulo acimutal del blanco a partir del corrimiento f_d .

La Figura 3.33 muestra para diferentes posiciones de la plataforma el cambio en módulo dirección y sentido de la velocidad \vec{v}_r de la plataforma en la dirección del punto p .

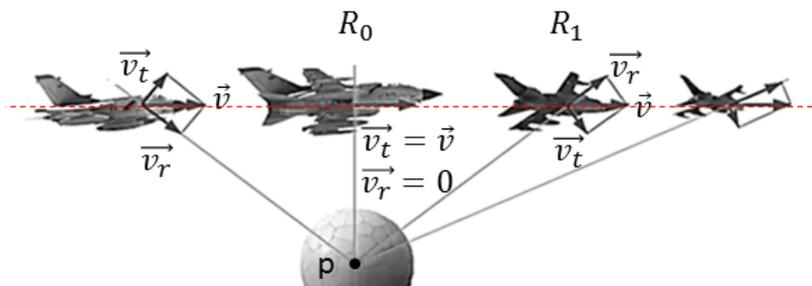


Figura 3.33: Diferentes posiciones del radar en su desplazamiento

Siendo $v_r = |\vec{v}_r|$, la posición R_0 es el caso particular en que $v_r = 0$ y $f_d = 0$. Si en cada posición de la plataforma correspondiente a un tiempo t , se considera que la distancia

$R = R(t)$ que separa a la plataforma del punto p es el radio de una circunferencia, entonces la velocidad \vec{v}_r es la velocidad radial, \vec{v}_t es la velocidad tangencial y ambas son componentes de la velocidad $\vec{v} = \vec{v}_{ac} = \text{cte.}$, velocidad de la plataforma en la dirección acimutal. El ángulo θ_{ac} es el ángulo formado por los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_{ac} en cada posición de la plataforma.

En la Figura 3.33, la distancia del punto p a la posición R_0 es el *rango oblicuo* del Plano de cero Doppler. Esta posición se corresponde con $f_d = 0$, el ángulo acimutal $\theta_{ac} = \pi/2$ y al tiempo t asociado a esta posición se denota con η_0 .

Si c es la velocidad de la luz y t_r es el tiempo que transcurre desde que la señal se emite hasta que se recibe su eco, la distancia $R(t_r)$ entre el emisor y el blanco es:

$$R(t_r) = \frac{ct_r}{2} \quad (3.51)$$

A los efectos de simplificar el análisis se supone que el radar emite una señal de frecuencia f_0

Siendo c la velocidad de propagación de la señal, la fase de la señal en un tiempo τ se expresa como:

$$\phi = 2\pi f_0 \tau = 2\pi f_0 \frac{2R(\tau)}{c} = \frac{4\pi f_0 R(\tau)}{c} \quad (3.52)$$

De la ec. (2.1), reemplazando f_0 por $\frac{c}{\lambda_0}$ en la ec. (3.52), queda:

$$\phi = \frac{4\pi R(\tau)}{\lambda_0} \quad (3.53)$$

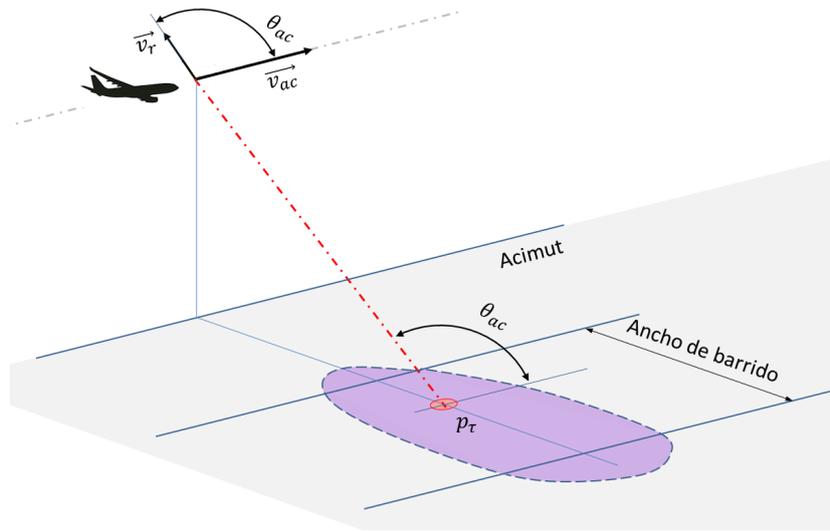
Cuando el radar recibe en el tiempo τ el eco de la posición p (Figura 3.34), recupera la frecuencia f_2 de esa señal y el desplazamiento en fase se puede expresar como:

$$\delta\phi = 2\pi\tau(f_2 - f_0) = 2\pi\tau f_d \quad (3.54)$$

Se puede expresar la siguiente relación entre la frecuencia f que llega a un receptor y la frecuencia f_0 emitida:

$$f = f_0 \mu_{Dp} \quad (3.55)$$

Donde μ_{Dp} se define como factor de corrimiento Doppler.

Figura 3.34: Modelo simple de geometría SAR - Posición de p

A partir de la ec. (2.8), que expresa el corrimiento Doppler entre emisor y receptor, reemplazando a u por v_r , se llega a la siguiente expresión.

$$\mu_{Dp} = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}} \quad (3.56)$$

Se debe considerar a $v_r = |\vec{v}_r|$ positivo si la plataforma y el blanco se acercan y negativo si se alejan.

Despejando v_r de la ec. (3.56), resulta:

$$v_r = c \frac{\mu_{Dp}^2 - 1}{\mu_{Dp}^2 + 1} \quad (3.57)$$

En la Figura 3.35 se puede observar la recta de acción sobre la cual se desplaza la plataforma de $-\infty$ a $+\infty$ en dirección acimutal y con velocidad $\vec{v}_{ac} = \text{cte.}$. Se muestran algunas posiciones del radar en su desplazamiento. Se ilustra para cada una de las posiciones seleccionadas, los ángulos θ_{ac} y las velocidades \vec{v}_r del radar.

- En el punto de mayor acercamiento entre la plataforma y el blanco, es decir en $f_d = 0$, resulta $\theta_{ac} = \pi/2$ y $\vec{v}_r = 0$
- Si la posición de la plataforma es próxima a la posición indicada con $-\infty$ o $+\infty$ resulta $\theta_{ac} \approx 0$ y $\vec{v}_r \approx \vec{v}_{ac}$

La ec. (3.56) contempla una convención de signos para \vec{v}_r , positiva si se acerca la plataforma al blanco y negativa si se aleja de él.

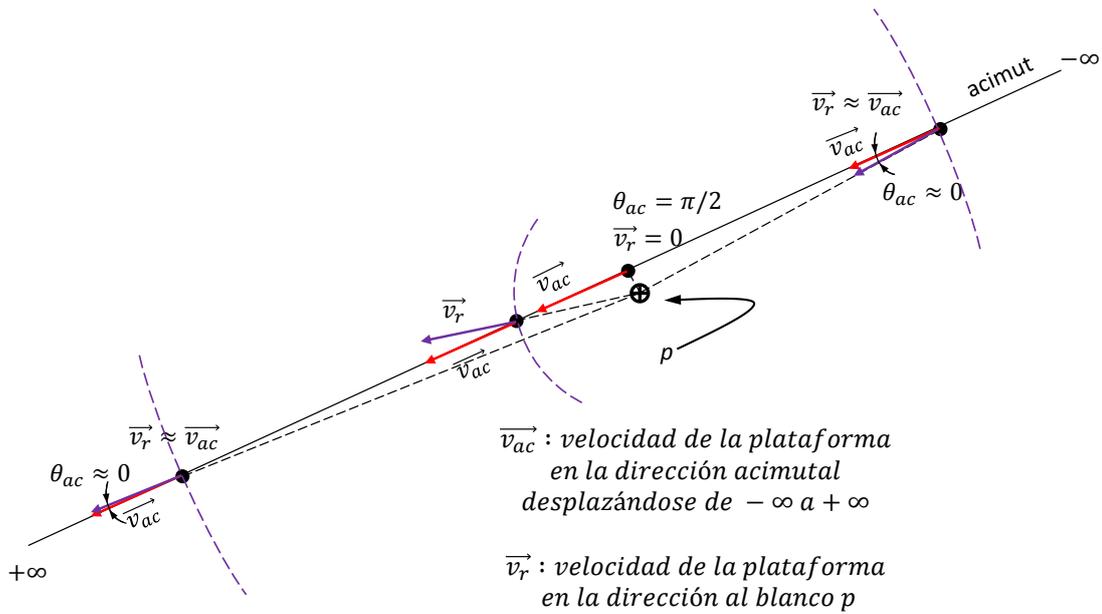


Figura 3.35: Desplazamiento de la plataforma visto desde el plano P_{az}

Se pueden ver en la Figura 3.36 distintos valores del factor de corrimiento Doppler μ_{Dp} para cada valor de v_r comprendido entre $-v_{ac}$ y v_{ac} .

Las Figuras 3.36 y 3.37 muestran que para valores de $v_r \ll c$, el factor μ_{Dp} y la velocidad v_r se puede aproximar a una relación lineal que puede expresarse como:

$$\mu'_{Dp} = k_{\mu} v_r + 1 \quad (3.58)$$

Donde $k_{\mu} = 1/c$, valor que puede verificarse a partir de la pendiente de la recta en la Figura 3.36

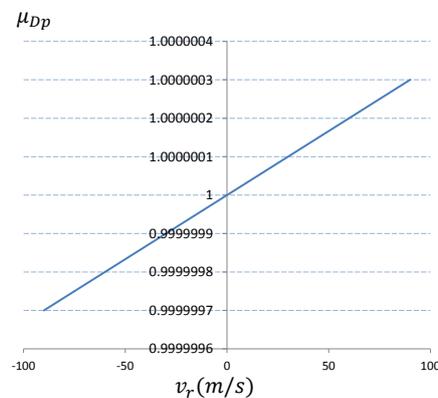


Figura 3.36: Valores del factor de corrimiento Doppler μ_{Dp} . Gráfica desarrollada en Excel

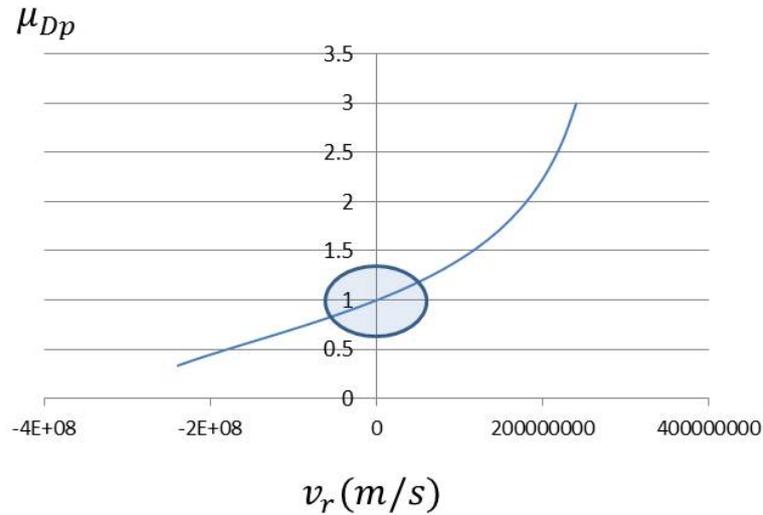


Figura 3.37: Valores del factor de corrimiento Doppler μ_{Dp} . Gráfica desarrollada en Excel

Por lo tanto μ'_{Dp} se puede expresar como:

$$\mu'_{Dp} = 1 + v_r/c \quad (3.59)$$

De [72], se pueden citar aviones utilizados en Argentina para transportar el SAR tales como, “Beechcraft B-200 F Super King Air” con una velocidad crucero de 149 m s^{-1} y “FMA IA-58 Pucará Fenix” con una velocidad crucero de 119 m s^{-1} .

Se puede conocer el error que se comete al calcular el factor de corrimiento Doppler cuando se usa μ'_{Dp} en lugar de usar μ_{Dp} .

$$\Delta\mu_{Dp} = |\mu_{Dp} - \mu'_{Dp}| \quad (3.60)$$

Con $v_r = 149 \text{ m s}^{-1}$ resulta $\epsilon_{\mu_{Dp}} = \frac{\Delta\mu_{Dp}}{\mu_{Dp}} = 1,23 \times 10^{-13}$

Para valores de v_r menores o iguales a 149 m s^{-1} se considera despreciable un error relativo de $1,23 \times 10^{-13}$. Por lo tanto resulta válida y se puede usar la ec. (3.59) para el cálculo de μ'_{Dp} .

- Para valores de $v_r \ll c$, la ec. (3.59) se obtiene por desarrollo de Teylor de la ec. (3.56).

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f = f_0 + \tilde{f}_d \\ f = f_0 \mu'_{Dp} \end{cases} \quad (3.61)$$

Siendo f : la frecuencia recibida, f_0 : la frecuencia emitida y \tilde{f}_d : el desplazamiento en frecuencia de la señal en un sistema emisor-receptor, resulta:

$$\tilde{f}_d = f_0(\mu'_{Dp} - 1) \quad (3.62)$$

Reemplazando en la ec.(3.62) μ'_{Dp} por $1 + v_r/c$ de la ec. (3.59), resulta:

$$\tilde{f}_d = f_0 \frac{v_r}{c} = \frac{v_r}{\lambda} \quad (3.63)$$

Como el radar recibe el eco de la señal enviada, el recorrido es de ida y de vuelta. El corrimiento f_d resulta:

$$f_d = 2\tilde{f}_d = 2\frac{v_r}{\lambda} \quad (3.64)$$

La ec. (3.64) se puede encontrar en [67] donde expresa que el corrimiento Doppler es función de la frecuencia de la señal emitida y de la velocidad relativa entre fuente y objeto.

La velocidad v_r se puede expresar como:

$$v_r = \frac{f_d \lambda}{2} \quad (3.65)$$

La siguiente expresión contempla la relación que existe entre v_r y v_{ac} y que satisface $-v_{ac} \leq v_r \leq v_{ac}$ para un desplazamiento de $-\infty$ a $+\infty$:

$$v_r = v_{ac} \cos \theta_{ac} \quad (3.66)$$

Conocido el valor de v_r se puede calcular θ_{ac} . De la ec. (3.66) resulta:

$$\theta_{ac} = \arccos v_r/v_{ac} \quad (3.67)$$

3.5.6. Posición del blanco

Conocido θ_{ac} se puede definir una familia de superficies donde está contenido el vector v_r y por lo tanto el vector desplazamiento radar-blanco en un instante t .

En este modelo ideal, si se conoce la altitud H del radar sobre la superficie horizontal (ver Figura 3.38), es posible dibujar un cono con eje de simetría coincidente con la recta de acción de \vec{v}_{ac} y generatriz de largo R que forme ángulo θ_{ac} con el eje de simetría de dicho cono.

La posición del blanco (punto p) es el lugar geométrico donde intersecta el extremo de una generatriz del cono con la superficie horizontal iluminada (del lado que mira el *SLAR*), Figura 3.38

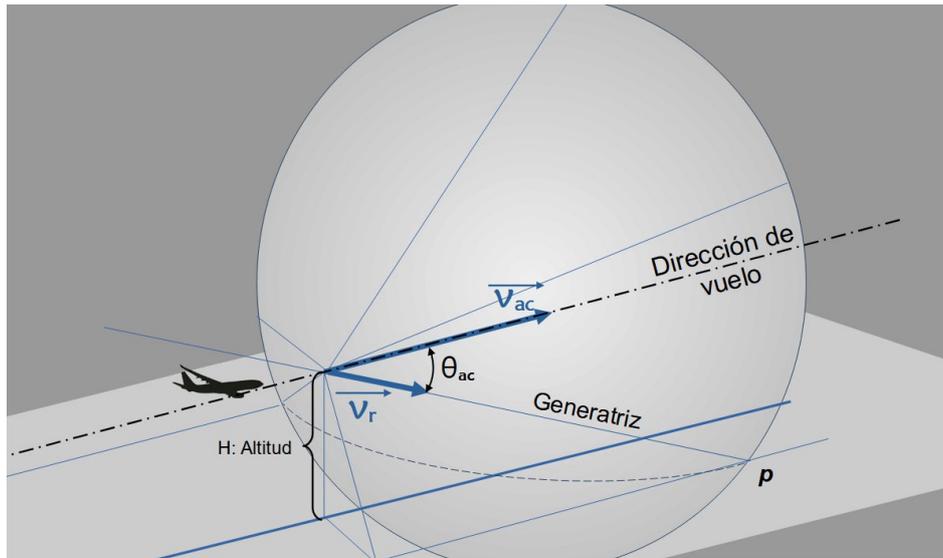


Figura 3.38: Posición del blanco (punto p)

3.6. *PolSAR* o *SAR* polarimétrico

Una variante del *SAR* es el “Polarimetric Synthetic Aperture Radar, (*PolSAR*)”. Este tipo de radar ilumina la superficie con señales electromagnéticas en la zona de las microondas y recibe los ecos de la señal emitida. La señal emitida por el *PolSAR* está polarizada en planos mutuamente ortogonales, denominados, plano de polarización horizontal y plano de polarización vertical. El eco de la señal emitida es captado en esos mismos planos de polarización, Figura 3.39.

Los sistemas *PolSAR* pueden adaptarse para emitir y recibir el eco de la señal en cualquiera de las cuatro posibles combinaciones de polarización: HH, VV, HV y VH, donde, como ya se comentó, la primer letra corresponde a la polarización en la emisión y la segunda a la polarización en la recepción. Las señales medidas en estos cuatro canales representan toda la información que es posible obtener de un blanco y se representan

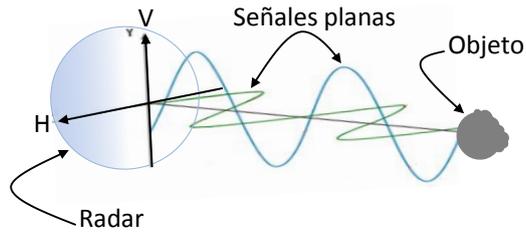


Figura 3.39: Señales en planos de polarización mutuamente ortogonales

como una matriz de polarización. Los ecos recibidos de la superficie y registrados en forma de datos complejos son procesados matemáticamente, este proceso genera una estructura de datos complejos que constituye la imagen *PolSAR*.

En 1.1 se hace una descripción de los radares polarimétricos montados en uno de los satélites de la constelación SAOCOM-1. En 3.4.2.4 se hace una descripción técnica del uso de radar con señales polarizadas para la teledetección, en la tabla 3.2 se exponen algunos ejemplos del tipo de polarización en estos sistemas de radar.

Capítulo 4

Imagen de radar

El radar ilumina la escena con señales electromagnéticas emitidas en el espectro de las microondas, los ecos de esas señales se registran como datos complejos que se guardan en una matriz creada a tal efecto. La imagen se obtiene mediante el procesamiento de esos datos.

4.1. Imagen *SAR*

Una imagen *SAR* proporciona un mapa de reflectividad de la superficie iluminada. La imagen se obtiene mediante el procesamiento de múltiples ecos del radar de un mismo escenario obtenidos desde distintos puntos de observación. Con los datos correspondientes al registro de esos ecos se pueden obtener tanto la posición como la velocidad del radar en relación al escenario.

4.1.1. Imagen de datos complejos

La distancia entre cada objeto y la antena cambia desde el *rango cercano* al *rango lejano*, (Figura 3.4 y Figura 3.10)

El radar repite la transmisión del pulso *chirp* en tiempo de repetición de pulso *PRT* y se producen ecos de repetición de pulsos de frecuencia *PRF*, tal que $PRT = 1/PRF$. Estos ecos son recibidos y almacenados.

Cuando el radar termina su recorrido, los datos de los vectores asociados a cada pulso, se encuentran en una matriz. Los valores almacenados en esa matriz se conocen como datos crudos (raw data), y en sí mismos no constituyen una imagen. Es necesario procesar estos datos digitalmente para efectivamente construir una imagen del terreno.

Existen varios algoritmos desarrollados para procesar los datos crudos y convertirlos en una imagen [70, 73].

En [74] se señala que la formación de una imagen *SAR* comprende una secuencia de procesamientos estándar, en la cual los dos primeros pasos son hechos a bordo del satélite (demodulación y digitalización), mientras que los cuatro pasos restantes (compresión en *rango*, procesamiento patch, migración del *rango* y compresión en acimut) son hechos por el usuario utilizando un procesador digital.

Dos parámetros de interés que se obtienen al realizar la demodulación de la onda electromagnética a bordo del satélite son el retraso y la distorsión de la señal *chirp* al reflejarse en la superficie de la Tierra. Usando el teorema de “shift” [75], que es básicamente una operación de filtrado de señal. Luego de aplicar el filtro shift se obtiene el eco de la señal emitida como un valor complejo. La posterior digitalización de la señal compleja se puede hacer usando 5 bits por posición, sin embargo se digitaliza en 8 bits, enviando 3 bits extras a Tierra para comprimir los datos antes de la transmisión. Una vez que los datos están en Tierra, se los expande a 8 bits. La parte real de la señal se la denomina componente en-fase (I) y la parte imaginaria de la señal se la denomina componente cuadratura (Q).

La imagen digital *SAR* es una matriz de dos dimensiones formada por columnas y filas de píxeles, donde cada pixel está asociado a una pequeña parte de la superficie de la Tierra y tiene resolución de celda. Cada pixel contiene un número complejo que lleva información de amplitud y fase de la señal de retorno.

4.1.2. Geometría *SAR*

La plataforma que transporta al radar se desplaza con velocidad “ v_{ac} ” a una altura “ h ” sobre la tierra. La antena del radar ilumina la superficie de la tierra por medio de la emisión de pulsos de radiación electromagnética. La radiación electromagnética emitida está concentrada principalmente en el cono correspondiente al lóbulo central del diagrama de radiación de la antena del radar, que en un instante dado ilumina una zona del terreno y capta una parte de la energía dispersada, denominada energía retrodispersada. La zona iluminada por el radar, mientras este se desplaza, define una franja de terreno paralela a su trayectoria delimitada por la línea de alcance cercano y la línea de alcance lejano.

En la Figura 4.1 se representa en un modelo simple de la geometría *SAR* y se

representan los términos que a continuación se definen.

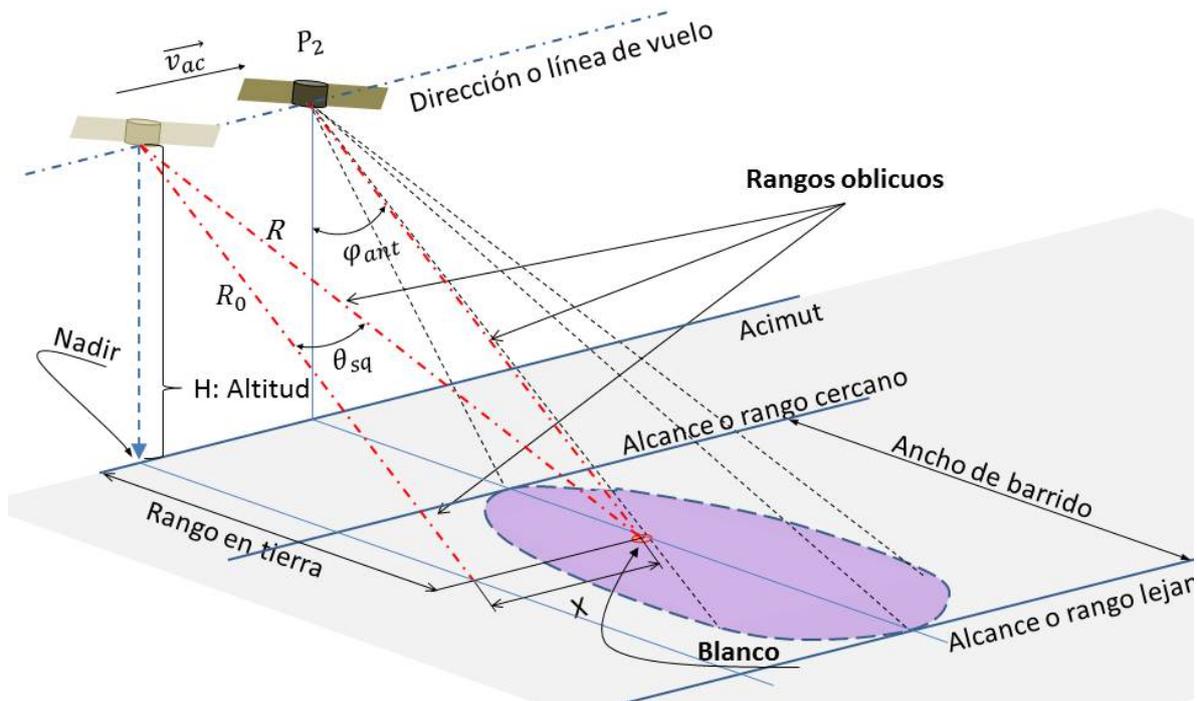


Figura 4.1: Modelo simple de geometría SAR. Vista general

- **Blanco:** Es un punto hipotético sobre la superficie terrestre donde el sistema SAR está iluminando.
- **Área iluminada:** Es el área determinada por el patrón de radiación de la antena sobre la superficie terrestre. Representándose su proyección en aquellos puntos donde la ganancia de la antena tanto en acimut como en elevación no decrecen más de 3 dB respecto a su máxima ganancia.
- **Nadir:** En el contexto de los sensores remotos, el término nadir se refiere a la disposición de los instrumentos de observación orientados de manera perpendicular a la superficie terrestre. En la Figura 4.1, se representa con la línea punteada que pasa por el punto de la superficie terrestre ubicado justo debajo del radar.
- **Acimut:** Se define como la dirección del vector velocidad de la plataforma que transporta al radar.
- **Plano de cero Doppler:** Es el plano que contiene el radar cuya normal es la dirección de vuelo. La intersección de este plano con el suelo es denominada línea de cero Doppler. Cuando esta línea cruza el blanco el corrimiento Doppler es cero.

- φ_{ant} : Es el ángulo que forma la línea nadir y la proyección del *rango oblicuo* en el plano de cero Doppler (R_0), Figura 4.1. A este ángulo también se le conoce como ángulo de elevación.
- **Rango de acercamiento máximo:** El *rango oblicuo* varía con el tiempo mientras la plataforma está en movimiento. El *rango oblicuo* de máximo acercamiento R_0 , se define como la distancia que existe entre el radar y el blanco cuando la línea de cero Doppler cruza a este último.
- **Tiempo de cero Doppler η_0 :** Es el tiempo medido desde algún origen arbitrario cuando ocurre el máximo acercamiento entre el radar y el blanco.
- **Posición de máximo acercamiento:** Posición del radar cuando se encuentra en el *rango* de acercamiento máximo al blanco. Esa posición se representa con el punto P_2 , Figura 4.1.
- **Ancho del haz:** definido en 3.4.6
- **Distancia en acimut X :** Es la distancia en la dirección acimut entre el blanco y el radar.
- θ_{sq} : Es el ángulo mínimo medible desde la plataforma, entre el *rango oblicuo* y la traza que resulta de la intersección de un plano P_{az} con el plano de cero Doppler. A su vez P_{az} pasa por la recta de acción del segmento que define al *rango oblicuo*.

4.1.3. Formación de imágenes SAR

En un modelo ideal la plataforma se desplaza a lo largo de una trayectoria recta de altitud H constante con respecto a la superficie iluminada. Los pulsos son emitidos y los ecos son recibidos desde la franja de la superficie iluminada por el haz, Figura 4.2.

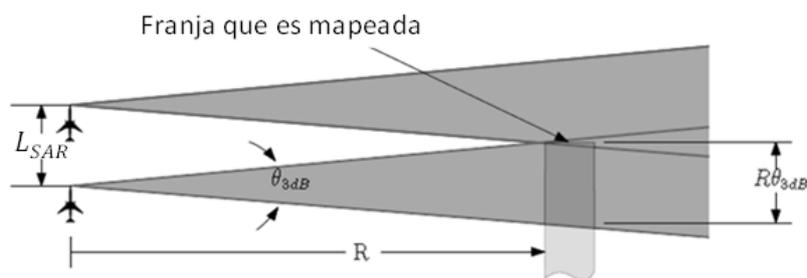


Figura 4.2: Franja mapeada

Los diferentes valores complejos medidos por cada eco recibido se combinan para formar una imagen.

Mientras la plataforma se desplaza, las posiciones en las que un punto sobre la superficie iluminada entra y sale del haz en movimiento marcan la longitud máxima de la apertura sintética. El haz se desplaza y nuevas aperturas desplazadas ligeramente se sintetizan, permitiendo de ese modo la formación de una imagen continua en la dirección de desplazamiento, denominada también dirección “along-track” (a lo largo de la pista) [62].

4.1.4. Modos de adquisición

El sistema *PolSAR* ofrece un amplio número de ángulos de incidencia entre 20° y 60° y tipos de polarización simple o dual. Puede operar el haz en diferentes modos, que incluyen: Stripmap (himage y pingpong), Scansar (wide o huge) y Spotlight, con resoluciones desde 1 m hasta 100 m y anchos de barrido comprendidos entre los 10 km y los 200 km. Se puede observar en la Figura 4.3 una representación simple de algunos modos de adquisición.

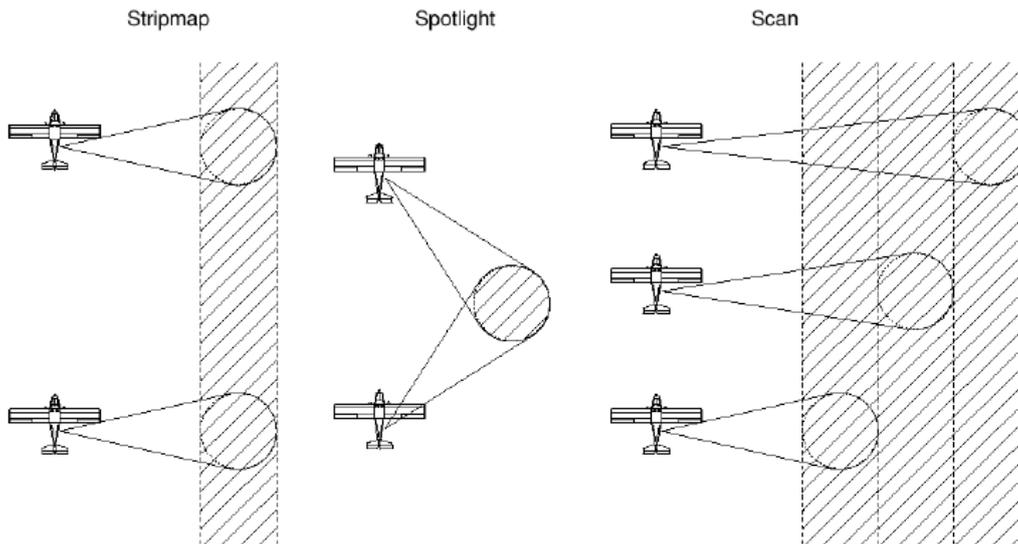


Figura 4.3: Modos de adquisición de SAR, [76]

- *Stripmap*: En este modo, el radar apunta a una dirección fija determinada mientras captura los datos de una franja continua. Corresponde a los barridos más estrechos con la resolución espacial más alta. La antena por lo general permite al sistema la flexibilidad de seleccionar un ancho de franja (swath) al cambiar el ángulo de

incidencia. Este modo es el que más se usa, pero tiene la limitación de tener un ancho de franja estrecho. En los casos de ERS-1/2 y JERS-1 el ancho de la franja es fijo. Mientras que otros sistemas *SAR* como RADARSAT-1/2, ENVISAT ASAR, ALOS PALSAR, TerraSAR-X-1, COSMO-SkyMed y RISAT-1 se pueden seleccionar diferentes ancho de franja [45].

- *ScanSAR*: Este modo no tiene la limitación de la franja estrecha del Modo *Stripmap*. El principio de *ScanSAR* es compartir el tiempo de operación del radar entre dos o más sub-franjas separadas para obtener una imagen completa [45]. Debido a que el procesamiento se realiza separadamente sobre cada sub-franja, los pulsos emitidos iluminan un número distinto de veces, así la sub-franja que esté en el centro tendrá muchos más pulsos que las que están en el extremo, produciendo una variación en brillo a lo largo del acimut. En general, no se recomienda este modo para aplicaciones interferométricas [76].
- *Spotlight*: Este modo permite incrementar la longitud de la antena, la antena de radar apunta e ilumina continuamente hacia la región que está siendo observada [35]; y por lo mismo el ancho de banda del acimut es más grande y tiene una mejor resolución en acimut. Otra característica importante de este modo es que tiene una gama más amplia de ángulos, por lo que se utiliza especialmente en interferometría porque al tener varias imágenes de una misma pasada disminuyen los problemas de pérdida de coherencia y brinda una resolución más fina en acimut [45].
- *TOPSAR Narrow*: En este modo, el radar cambia su orientación a lo largo del trazo para capturar varias tiras, cubriendo así un ancho de escaneo mayor con una resolución espacial más baja que en el caso de StripMap..
- *TOPSAR Wide*: En este modo, el radar cambia su orientación a lo largo de la traza para capturar un mayor número de franjas, cubriendo así un mayor ancho de barrido con menor resolución espacial que en el caso TOPSAR Narrow.

El *TPOSAR* se presenta como una variante del *ScanSAR*, donde la información se adquiere y organiza en franjas, lo cual se logra cambiando la orientación de la antena entre distintas sub-áreas de barrido adyacentes en una misma pasada. Además de orientar la antena en rango, como en el *ScanSAR*, el rayo emitido también se orienta electrónicamente en azimut, hacia adelante y hacia atrás para cada franja. De esa manera se obtiene una calidad de imagen más homogénea a lo largo del área barrida

En la tabla 4.1 se puede observar las características técnicas del SAR-2000 montado en la estación COSMO-SkyMed que opera con polarizaciones HH, VV, HV o VH [77].

Tipos de haz del SAR-2000 en COSMO-SkyMed	
Modo operativo	Parámetros
Spotlight (marco)	Resolución espacial: $\leq 1m$
	Area de observación puntual: $10km \times 10km$
Stripmap - Himage	Resolución espacial: $3 - 15m$
	Ancho de franja: $40km$
Stripmap - Ping Pong (mapa de bandas)	Resolución espacial: $15m$
	Ancho de franja: $30km$
ScanSAR - WideRegion	Resolución espacial: $30m$
	Ancho de franja: $100km$
ScanSAR - HugeRegion	Resolución espacial: $100m$
	Ancho de franja: $200km$

Tabla 4.1: COSMO-SkyMed. Modos de adquisición del instrumento SAR-2000 [77]

4.1.5. Toma de datos SAR

El SAR en su recorrido va almacenando muestras de los ecos que recibe desde las distintas posiciones que toma el radar, Figura 4.4. Los ecos recibidos son digitalizados y posteriormente procesados para construir una imagen 2D del suelo asociada a los valores de reflectancia $\sigma_p = \sigma_p(x, y)$ [78, 79] de cada píxel, que puede expresarse como:

$$\sigma_p \approx \frac{\sigma \delta_g \delta_{Az}}{\sin \theta} \quad (4.1)$$

De la ec. (3.66), reemplazando δ_g por $\frac{\delta_r}{\sin \theta}$, se obtiene la siguiente expresión.

$$\sigma_p \approx \frac{\sigma \delta_r \delta_{Az}}{\sin \theta} \quad (4.2)$$

Donde (ver Figura 4.4)

σ : coeficiente de retrodispersión (detalle de este coeficiente se puede ver en 4.2.3)

δ_r : resolución de *rango oblicuo*

δ_{Az} : resolución lineal en el acimut

θ : ángulo de incidencia

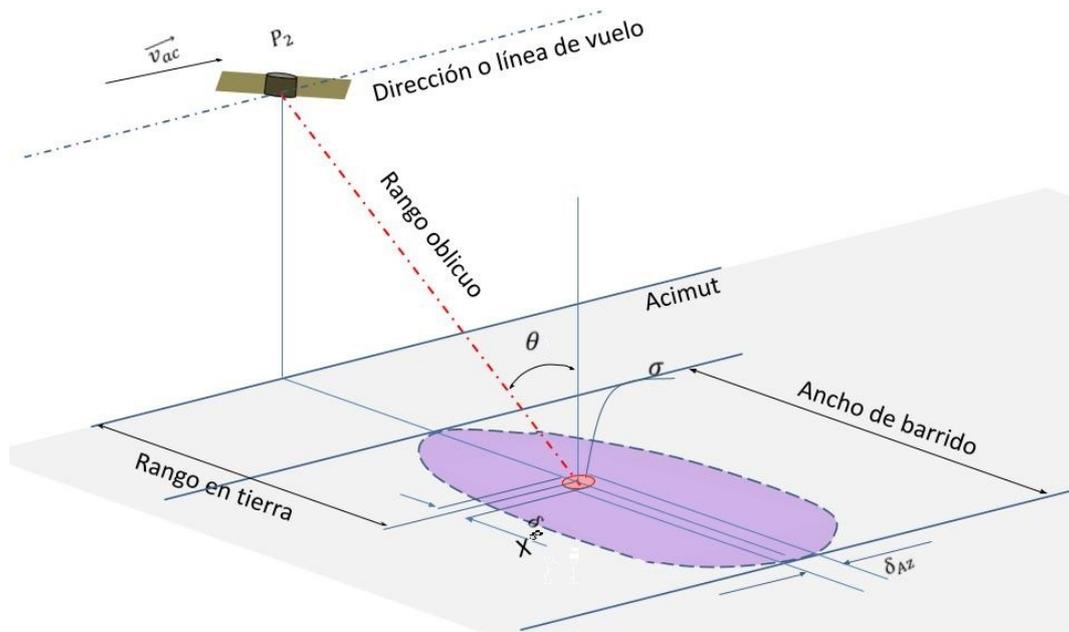


Figura 4.4: Modelo simple de geometría SAR - Mapa de reflectancias

4.1.5.1. Aplicaciones SAR

A continuación se mencionan algunas aplicaciones donde se utilizan imágenes SAR

- Obtención del espectro de las olas de agua en el océano. (Figura 4.5)
- Clasificación de los tipos de hielos.
- Modelos digitales del terreno por interferometría.
- Detección automática de vertidos de petróleo. (Figuras 4.7 y 4.6)
- Geodesia: determinación del geoide.
- Seguimiento de desplazamientos del hielo.
- Mapeo de inundaciones. (Figuras 4.8 y 4.9)
- Deformaciones del terreno. (Figura 4.10)
- Mapeo de cultivos.

Es importante destacar que los datos de las imágenes que se ven a continuación han sido procesados por algoritmos especialmente diseñados para este tipo de imágenes a los efectos de mejorar la calidad las mismas con el objetivo de facilitar el reconocimiento y la interpretación de la escena por parte del observador.

La Figura 4.5 es una instantánea de un video que muestra la altura de las olas. Es un modelo de elevación que usa datos de imágenes de radar, velocidad y dirección del viento.

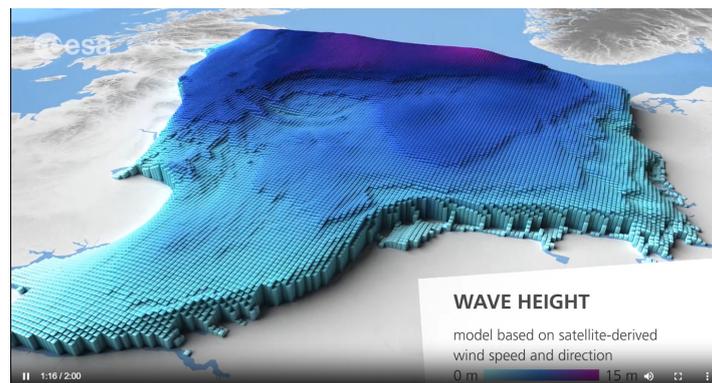


Figura 4.5: SAR - Monitoreo de las olas con radar. European Space Agency [80]

La Figura 4.6 contiene una imagen que se obtuvo usando *PolSAR* donde se puede apreciar la estela o marca que deja en la superficie el **derrame de petróleo provocado en forma intencional**.

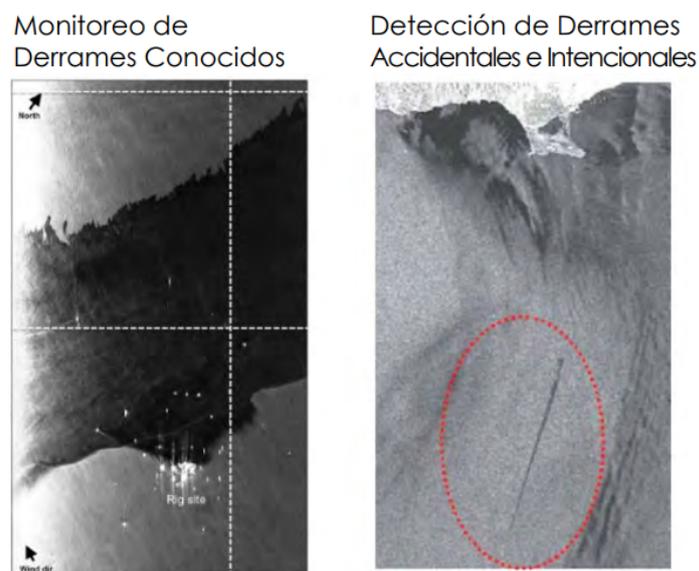


Figura 4.6: ARSET - Evaluación de Desastres usando *PolSAR*. [81]

La Figura 4.7 corresponde a una imagen de la misión Copernicus Sentinel-1. Derrame de petróleo en el Mediterráneo luego de una colisión entre dos buques mercantes (norte de la punta de Córcega).

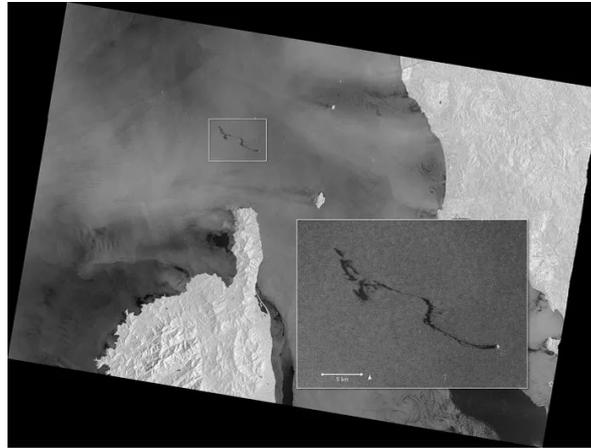


Figura 4.7: Derrame de petróleo en el Mediterráneo usando *PolSAR*, 2018. [82]

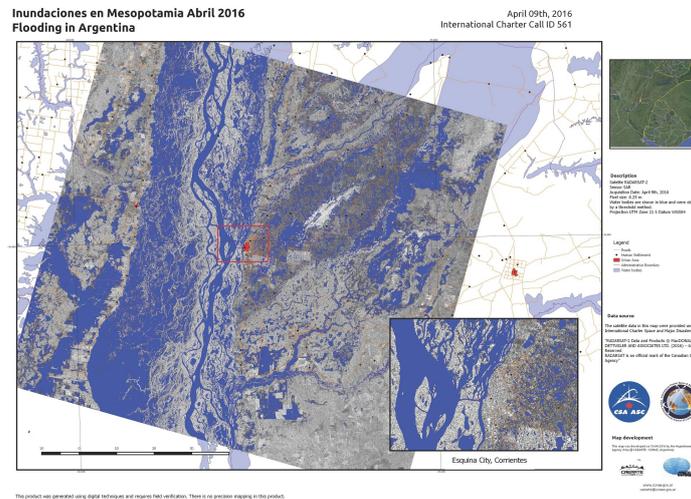


Figura 4.8: *SAR* - Mapa de inundaciones en Mesopotamia (2016). CONAE [83]

La Figura 4.9 es una imagen capturada de una presentación del “Programa de Capacitación en Percepción Remota Aplicada, (ARSET)” con material de la NASA. En esta imagen se puede apreciar la interfaz que usa algoritmos informáticos desarrollados para procesar en tiempo casi real (importa el tiempo de procesamiento) los datos de imágenes *PolSAR*.

Mapeo global de inundaciones de MODIS NRT (en tiempo casi real)

- Mapeo de inundaciones en basado en la reflectancia de MODIS a 250m de resolución
- Compuesto con un conjunto de imágenes de 2, 3 y 14 días
- Mapas de inundaciones disponibles en tejas de 10°x10°
- Información disponible sobre agua permanente y aguas de inundaciones superficiales
- Las sombras de nubes o del terreno pueden ser malinterpretadas como agua en la superficie



Ofrece mapeo de inundaciones en tiempo casi real o en el pasado de abril de 2011.
<http://oas.gsfc.nasa.gov/floodmap>

National Aeronautics and Space Administration Applied Remote Sensing Training Program 19

Figura 4.9: SAR - Herramientas para el mapeo de inundaciones (2015). NASA [84]

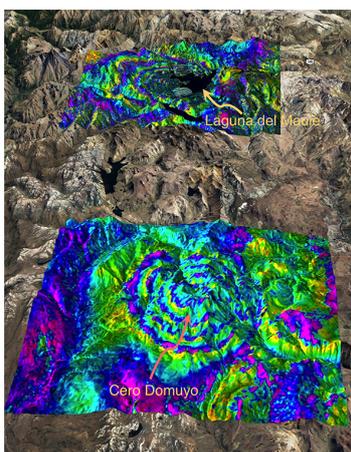


Figura 4.10: SAR - Monitoreo continuo de deformación del terreno (Volcanes Domuyo y Laguna del Maule). CONICET [85]

4.1.6. El ruido speckle

El ruido speckle es una característica de las imágenes generadas por sistemas que utilizan fuentes coherentes. Es una magnitud particularmente explotada en InSAR y da como resultado una distribución de datos que resultan de la interferencia de ondas electromagnéticas dispersadas por las superficies u objetos que ilumina el radar. Al iluminar la escena, cada objeto que la compone, contribuye con su aporte de energía dispersada para crear la imagen de radar.

En la representación gráfica de una imagen de radar, cada pixel representa un área sobre la superficie iluminada denominada celda de resolución.

La imagen de radar es afectada por la interferencia constructiva o destructiva de las señales reflejadas por los dispersores de la superficie iluminada. De modo que, en cada celda de resolución, se tiene el resultado de la suma coherente de los retornos correspondientes a cada uno de los elementos observados en el suelo. El ruido speckle es el resultado de esa adición coherente y se observa como un granulado en la representación gráfica de la imagen de radar. La fluctuación estadística (varianza) o incertidumbre se la asocia con el brillo de cada píxel.

Siendo que cada retorno es una señal caracterizada por su amplitud y fase, puede ser expresada como un complejo denominado fasor. La suma coherente de los retornos correspondientes a cada uno de los elementos observados en el suelo es la suma de fasores y se puede representar gráficamente para un instante t . En la Figura 4.11 se ilustra el conjunto de fasores elementales, el fasor resultante y sus componentes V_x , V_y [86].

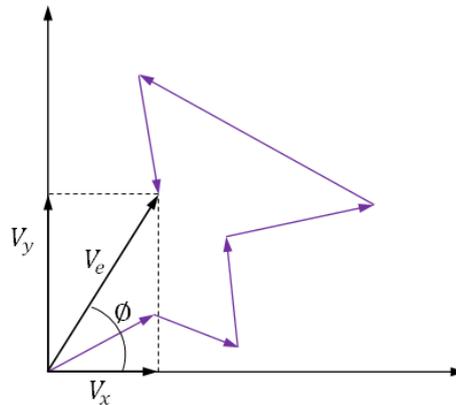


Figura 4.11: Suma de N_s fasores elementales de módulo y fase aleatorias

El valor de gris del píxel asociado a una celda de resolución es el módulo del número complejo resultante de esa celda. El valor del potencial eléctrico del i -ésimo dispersor se puede expresar como:

$$V_i e^{j(\omega t + \theta_i)} = V_i e^{j(\phi_i)} \quad (4.3)$$

Donde V_i es su amplitud y $\phi_i = \omega t + \theta_i$ es la fase instantánea.

De esta manera, se puede obtener al potencial eléctrico instantáneo V en cada celda de resolución a partir de la colección de N_s dispersores, como:

$$V = \sum_{i=1}^{N_s} V_i e^{j(\phi_i)} \quad (4.4)$$

Expresado en términos de módulo y fase, resulta:

$$\begin{cases} V = V_e e^{j\phi} \\ V_x = V_e \cos \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \cos \phi_i \\ V_y = V_e \sin \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \sin \phi_i \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1.7. Imagen multi-look

El ruido speckle influye en la calidad de imágenes SAR y para disminuir el efecto pernicioso de ese ruido en la imagen, en [87] se propone un procesamiento multi-look en el cual los datos son promediados. Este procesamiento multi-look se realiza durante el enfoque de la imagen sobre un número de celdas de resolución para mejorar la fase estadística o exactitud radiométrica a costo de la resolución de imagen [88].

En el procesamiento de los ecos (datos recogidos por el radar), el SAR puede obtener diferentes imágenes sobre la misma región iluminada, estas imágenes se generan si la antena observa la región desde ángulos ligeramente diferentes entre sí y a cada una de estas imágenes se la denomina look o vista. Promediando estas imágenes con el objetivo de reducir el ruido speckle, se genera una sola imagen multi-look. Cada uno de los píxeles de esta nueva imagen posee un valor proporcional al potencial eléctrico instantáneo asignado a cada posición de esta nueva imagen.

El valor del potencial eléctrico de cada posición de la nueva imagen está dado por la siguiente expresión:

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_{img}} V_{i,j}^k \quad (4.6)$$

Siendo:

N_{img} : número de imágenes o looks a promediar.

i, j : posición en la imagen de tamaño $m \times n$, con $0 \leq i \leq m - 1$ y $0 \leq j \leq n - 1$.

$\gamma_{i,j}$: valor del potencial eléctrico instantáneo en la posición (i, j) de la imagen multi-look resultante.

$V_{i,j}^k$: potencial eléctrico instantáneo en la posición (i, j) del k -ésimo look.

La distribución de esta nueva imagen posee un desvío estándar pequeño comparado con el valor medio, es decir que se reduce parcialmente el efecto pernicioso del fenómeno speckle pero también es menor la resolución espacial [89].

Para una misma posición (i, j) y para diferentes looks (diferentes valores de k), los $V_{i,j}^k$ resultan ser variables aleatorias estadísticamente independientes.

4.2. Imágenes en sistema *PolSAR*

Con los ecos de las señales que recibe el radar, se obtiene una familia de imágenes *PolSAR* que corresponden a una misma escena o posición iluminada, operando sobre esa familia de imágenes se puede obtener a gran distancia una imagen con buena resolución.

En la tabla 4.2 se pueden observar las características técnicas del radar montado en la estación SAOCOM [90,91].

Tipos de haz en SAOCOM - Banda L (L1B, L1C y L1D)			
Modo de Adquisición	RN	TN	Polarizaciones
STRIPMAP SP	10 x 10	40 x 74	HH o VV
STRIPMAP DP	10 x 10	40 x 74	HH+HV o VV+VH
STRIPMAP QP	10 x 10	20 x 74	HH+HV+VH+VV
TOPSAR NARROW SP	30 x 30	150 x 222	HH o VV
TOPSAR NARROW DP	30 x 30	150 x 222	HH+HV o VV+VH
TOPSAR NARROW QP	50 x 50	100 x 222	HH+HV+VH+VV
TOPSAR WIDE SP	50 x 50	350 x 445	HH o VV
TOPSAR WIDE DP	50 x 50	350 x 445	HH+HV o VV+VH
TOPSAR WIDE QP	100 x 100	220 x 445	HH+HV+VH+VV

Tabla 4.2: SAOCOM-1. Modos de adquisición del *SAR*. RN: Resolución Nominal ($R_{ng} \times Az$) [m]. TN: Tamaño Nominal de la Escena ($R_{ng} \times Az$) [km] [91]

4.2.1. Matriz de datos en sistema *PolSAR*

Los datos complejos de todos los sectores iluminados (celdas de resolución) se distribuyen en una matriz denominada “matriz polarimétrica” y cada conjunto de datos correspondiente a cada sector iluminado se denota con Z' . En la Figura 4.12, a los efectos de facilitar la comprensión, se representa la distribución de cada Z' sobre una grilla o cuadrícula. Siendo $Z' = Z'(x, y)$, tal que (x, y) son las coordenadas que identifican al conjunto de datos complejos Z' .

4.2.2. Representación gráfica de los datos de la matriz

Operando sobre cada Z' de la “matriz polarimétrica” se obtiene un valor que puede ser representado gráficamente en una escala de grises. Una imagen *PolSAR* es un conjunto de datos complejos distribuidos en una matriz, a los efectos de ofrecer una

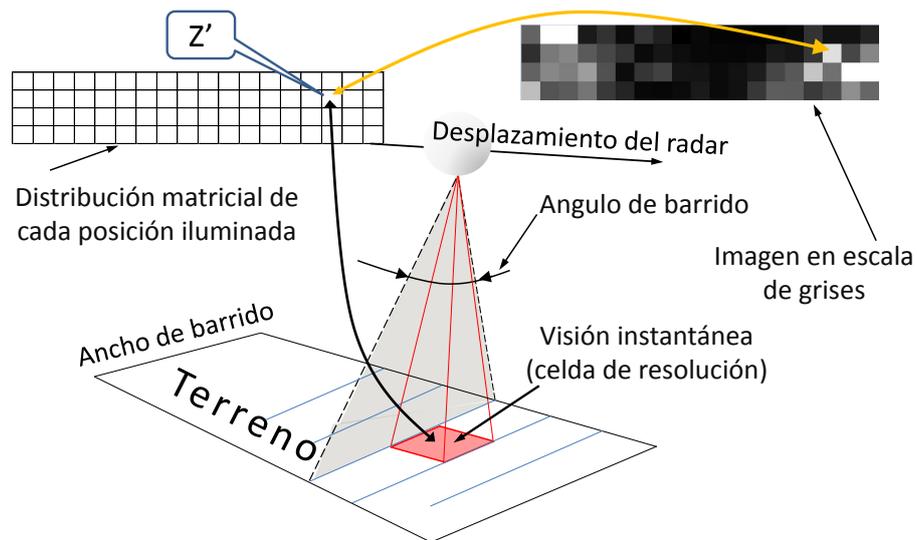


Figura 4.12: Datos de la imagen *PolSAR*

interpretación visual de la escena, se crean imágenes en escala de grises asociadas a la imagen *PolSAR*. A cada pixel de coordenadas (x,y) de la imagen en escala de grises se le asigna un valor en esa escala que se obtiene del Z' en esa posición (x,y) , (Figura 4.12).

En 4.2 se pueden observar algunos ejemplos de representaciones gráficas con imágenes en escala de grises, (Figura 4.7 y Figura 4.6).

Si bien es habitual realizar transformaciones sobre los datos de las imágenes *PolSAR* para generar matrices con valores de intensidad que van de 0 (color negro) a 255 (color blanco), dando lugar a imágenes en escalas de grises, algunas imágenes suelen transformarse en imágenes de “falso color” para mejorar su presentación visual, ejemplo de esto es la Figura 4.13.

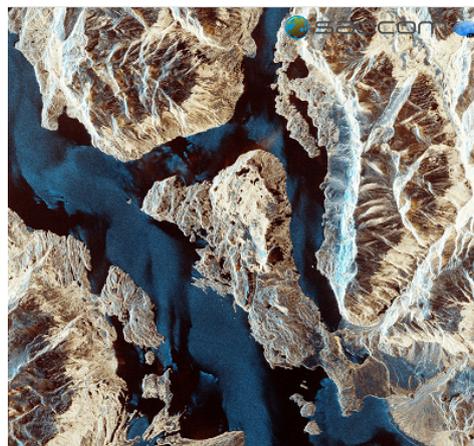


Figura 4.13: Distintos fenómenos oceanográficos y meteorológicos. Cordillera de los Andes, Lago San Martín, SAOCOM 1A. [92]

4.2.3. Coeficiente de retrodispersión o backscattering

El coeficiente de retrodispersión contempla el efecto que produce la superficie iluminada por el radar sobre la señal de retorno, representa la proporción de energía electromagnética que retorna al radar desde una celda o unidad de resolución.

En 3.4.2.5 y 3.4.2.6, se expone como influye la geometría del terreno, la rugosidad y sus características dieléctricas sobre la retrodispersión, que a su vez incide en la intensidad de la señal de retorno.

El coeficiente de retrodispersión σ está definido como la razón entre la energía E_1 que habría recibido el sensor si la misma hubiese sido dispersada totalmente en forma isotrópica y la energía E_2 efectivamente recibida por el sensor.

Esa relación queda expresada como:

$$\sigma = \frac{E_1}{E_2} \quad (4.7)$$

La ec. (4.7) también se puede expresar en decibeles:

$$\sigma^0 = 10 \log \frac{E_1}{E_2} = 10 \log \sigma \quad (4.8)$$

O en amplitud:

$$\sigma^A = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{\sigma} \quad (4.9)$$

4.2.4. Influencia de la polarización

El coeficiente de retrodispersión σ se puede expresar en función de la polarización de la señal emitida y de la componente de polarización detectada por el sensor. En 3.4.2.4 se expone que la señal emitida con una determinada polarización sufre una rotación del vector campo eléctrico como resultado de la interacción con la superficie iluminada y la señal recibida puede tener componente vertical y componente horizontal (ver polarización en 2.1.1). Por lo tanto existen cuatro combinaciones posibles de polarización de emisión y recepción: hh, hv, vh y vv.

El campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i sobre el blanco, se puede expresar como:

$$\mathbf{E}^i = \xi_h^i \check{h} + \xi_v^i \check{v} \quad (4.10)$$

Siendo:

- 1.- \check{h} y \check{v} versores en la dirección horizontal y vertical, respectivamente.
- 2.- ξ_h y ξ_v valores complejos que corresponden al campo eléctrico en esas direcciones.

El campo eléctrico \mathbf{E}^s medido por el sensor del radar, como resultado de la dispersión en el blanco se expresa como:

$$\mathbf{E}^s = \xi_h^s \check{h} + \xi_v^s \check{v} \quad (4.11)$$

Las propiedades de transformación de polarización debidas a la interacción con un blanco, en una frecuencia única en una dirección de referencia dada, son caracterizadas por la denominada “matriz de scattering o matriz de dispersión”. Esta matriz descriptiva muestra cómo está relacionado el estado de polarización de las ondas incidentes y reflejadas. Si la antena de transmisión y recepción es la misma, la matriz de scattering es simétrica. La relación entre el campo eléctrico incidente \mathbf{E}^i y el campo dispersado \mathbf{E}^s [93] se puede expresar como:

$$\mathbf{E}^s = \frac{e^{-ikr}}{r} [\mathbf{S}] \mathbf{E}^i \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_h^s \\ \xi_v^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_h^i \\ \xi_v^i \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Donde r es la distancia entre el blanco y el radar, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ la longitud de onda de la radiación. Los símbolos S_{hh} , S_{hv} , S_{vh} , S_{vv} representan los valores de la matriz de dispersión \mathbf{S} correspondiente a la dispersión en el blanco. Esta matriz está expresada como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Los subíndices de \mathbf{S} hacen referencia a la polarización de la señal emitida o captada por el radar. El primer subíndice corresponde a la onda incidente y el segundo subíndice corresponde a la onda dispersada captada por el sensor.

Los elementos de la diagonal de la matriz de dispersión reciben el nombre de términos *co-pol*, los elementos que se encuentran fuera de la diagonal se conocen como *cross-pol*.

Es importante tener en cuenta que la ec. (4.13) es solamente válida para la zona del campo lejano, donde se considera que los campos incidente y dispersado son ondas planas [94].

La respuesta del blanco en la dirección del radar queda caracterizada (para una determinada frecuencia y un ángulo de incidencia) por la matriz de coeficientes de

retrodispersión, (4.14). Por lo tanto, una misma zona puede dar cuatro imágenes distintas, correspondientes a los modos hh , hv , vh y vv .

Las interferencias constructiva y destructiva de la señal reflejada por el blanco observado dan un retorno que varía en forma aleatoria, y cuya media corresponde a la retrodispersión del blanco iluminado. La retrodispersión es inherente al blanco y es lo que interesa interpretar a partir de las observaciones. En la imagen existen zonas de alta variabilidad en la retrodispersión, como ocurre con las áreas urbanas, en las que los niveles de gris de la imagen están dispersos en un intervalo grande de valores. A este tipo de zonas se las llama muy heterogéneas o muy rugosas. En cambio, si la zona observada posee retrodispersión constante, como las áreas de pastura, los niveles de gris son parecidos entre sí y entonces la zona se denomina homogénea o poco rugosa. En el proceso de detección, el retorno es demodulado obteniéndose dos magnitudes que son la parte real e imaginaria de los números complejos que constituyen los datos, llamados pulsos crudos.

En el caso de radar monoestático, la antena emisora y la antena receptora son la misma. Este tipo de radar es el más común y en una perfecta calibración monoestática las componentes de polarización cruzada S_{hv} y S_{vh} son iguales. En la gran mayoría de los blancos (en particular para todos los blancos naturales) S_{hv} y S_{vh} son iguales [89]. Bajo las condiciones del teorema de reciprocidad [95] que considera $S_{hv} = S_{vh}$, la matriz de dispersión se puede simplificar en un vector de tres componentes. De ese modo, queda definido el vector de dispersión despreciando una de las componentes sin que haya pérdida de información. En la mayoría de los casos la onda dispersada posee una polarización elíptica expresada en la matriz compleja \mathbf{S} aún cuando la radiación incidente este polarizada linealmente. El radar polarimétrico mide ξ_h^s y ξ_v^s cuando se emite radiación con polarización horizontal (ξ_v^i nulo) y cuando se emite radiación con polarización vertical (ξ_h^i nulo). Teniendo en cuenta que S_{hv} y S_{vh} son iguales, es posible construir un vector seleccionando sólo los tres componentes S_{hh} , S_{hv} y S_{vv} de la matriz \mathbf{S} .

4.2.5. Expresiones de la señal de retorno del radar

Tal como se mencionó en 4.2.4, el retorno tiene dos magnitudes que son la parte real e imaginaria. La ec.(4.4) se puede reescribir como una señal de retorno S_r .

$$S_r = \sum_{i=1}^{N_s} V_i e^{j(\phi_i)} = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \cos \phi_i + j \sum_{i=1}^{N_s} V_i \sin \phi_i \quad (4.15)$$

Esta señal expresada en su componente real $\Re(S_r) = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \cos \phi_i$ y su componente imaginaria $\Im(S_r) = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \sin \phi_i$, que se aplica para cada posible imagen correspondiente a los modos hh, hv, vv , se usa para operar directamente con datos complejos.

También se pueden operar con el dato en formato amplitud o en formato intensidad

Formato amplitud

$$S_{rA} = |S_r| \quad (4.16)$$

Formato intensidad

$$S_{rI} = S_{rA}^2 \quad (4.17)$$

Si las imágenes se obtienen de una sola vista o look, estas pueden estar formadas por datos complejos “Single Look Complex, (SLC)”, o por datos reales que se obtienen de los respectivos complejos.

Si las imágenes se obtienen del proceso multi-look, se utilizan datos reales.

4.2.6. Ruido en la señal de retorno

En líneas generales se puede hablar de tres tipos de ruido en una señal, clasificados en función del modo en que se mezclan con la señal

- **Ruido multiplicativo:** ruido de señal aleatorio que se multiplica en la señal relevante durante la captura o transmisión. Este ruido depende de la señal.
- **Ruido aditivo:** ruido de señal aleatorio que se agrega a la señal relevante durante la captura o transmisión. Este ruido no depende de la señal.
- **Ruido aditivo y multiplicativo:** combinación de los modelos de ruido mencionados.

4.2.6.1. Ruido multiplicativo

El ruido multiplicativo presenta niveles proporcionales a la intensidad de la señal, mezclándose con ella.

Se puede expresar como:

$$g(t) = f(t) \zeta(t) \quad (4.18)$$

Siendo $g(t)$: señal de salida, $f(t)$: señal de entrada, $\zeta(t)$: ruido (proceso aleatorio) de media μ_ζ y dispersión σ_ζ . La fig. 4.14 es una representación del modelo de ruido multiplicativo.

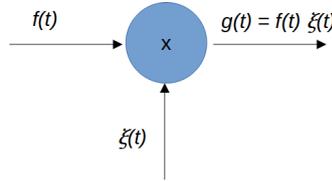


Figura 4.14: Modelo de ruido multiplicativo

Este modelo de ruido se puede expresar en forma discreta haciendo uso de arreglos unidimensionales, con valores que resultan del muestreo de las señales $g(t)$, $f(t)$ y $\zeta(t)$ e indexados con la variable discreta x .

$$g[x] = f[x] \zeta[x] \quad (4.19)$$

Tal que:

$$g[x] = g(t_x), f[x] = f(t_x), \zeta[x] = \zeta(t_x) \text{ con } x \in \mathbb{N}_0, 0 \leq x \leq n - 1$$

Esos mismos valores pueden ser elementos de arreglos bidimensionales (matrices de orden $M \times N$ con $M N = n$)

Siendo:

$$\begin{aligned} g[x] &\in G \subset \mathbb{C}, f[x] \in F \subset \mathbb{C}, \zeta[x] \in \Upsilon \subset \mathbb{C} \\ U_{(i,j)} &\in \mathbf{U} \subset \mathbb{C}^2, V_{(i,j)} \in \mathbf{V} \subset \mathbb{C}^2, W_{(i,j)} \in \mathbf{W} \subset \mathbb{C}^2 \\ H : G &\rightarrow \mathbb{C}^2 / H(g[x]) = U_{i,j}, \\ H : F &\rightarrow \mathbb{C}^2 / H(f[x]) = V_{i,j}, H : \Upsilon \rightarrow \mathbb{C}^2 / H(\zeta[x]) = W_{i,j} \end{aligned} \quad (4.20)$$

con i : cociente entero de x/M , j : resto de cociente entero de x/M

Estos cambios permiten expresar el modelo de ruido multiplicativo de la siguiente forma.

$$U_{(i,j)} = V_{(i,j)} W_{(i,j)} \forall (i,j). [Donde $i, j \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 \leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N - 1$] \quad (4.21)$$

Donde:

(i, j) : valores posibles de las coordenadas de los elementos de la matriz.

\mathbf{U} : matriz de datos de salida.

\mathbf{V} : matriz de datos de entrada.

\mathbf{W} : matriz del ruido.

En forma sintética la ec.4.21 se puede expresar como $\mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{W}$

Por lo expuesto, el modelo de ruido multiplicativo usando matrices de orden $M \times N$ con $M N = n$, es una operación punto a punto con los elementos de las mismas.

Capítulo 5

Modelos estadísticos en imágenes

En este capítulo se describen los modelos que se pueden aplicar a los datos de las imágenes *SAR* y *PolSAR*, incluyendo los formatos que pueden usarse para modelar la retrodispersión y el ruido speckle.

En particular, los datos provenientes de un sistema *SAR*, pueden modelarse con el modelo multiplicativo que responde adecuadamente a las características estadísticas de esos datos. El modelo multiplicativo da un retorno que varía en forma aleatoria con la media del backscatter o retrodispersión del blanco.

El modelado de la retrodispersión que representa la rugosidad y la textura de la imagen, depende de parámetros y distribuciones que determinan el grado de homogeneidad presentes en la imagen. Por ejemplo, como ya se mencionó antes, para muchos sensores *SAR*, las áreas de bosque y pastizales tienen gran homogeneidad, mientras que las zonas urbanas presentan alto grado de heterogeneidad.

5.1. Convenciones de notación

A continuación se definen reglas de escritura para la correcta interpretación de las posteriores expresiones algebraicas presentes en este trabajo.

- Las variables aleatorias se escriben en mayúscula, y sus valores particulares en minúscula. Las matrices y vectores se escriben en negrita.
- Cada posición de la imagen definida por la dupla (i, j) indexa a una variable aleatoria. Dependiendo del tipo de imagen modelada, esta variable aleatoria puede tener por codominio los reales, los complejos, vectores reales o vectores complejos. Es decir que se opera con variables aleatorias reales y complejas, univariadas y

multivariadas. El subíndice en las variables es un recurso que permite identificar a estas variables.

- Si en una imagen los datos son reales, la imagen es un objeto de la forma $f \in \mathbb{R}$; si los datos son complejos, la imagen es un objeto de la forma $f \in \mathbb{C}$
- En el contexto estadístico de esta Tesis, cada *pixel* en la imagen queda identificado por una determinada posición (i, j) que a su vez indexa al correspondiente dato o variable aleatoria en la imagen.
- $(\mathbf{A})^t$ es la traspuesta de \mathbf{A} .
- $(\mathbf{A})^*$ es la conjugada de \mathbf{A} .
- $(\mathbf{A})^H$ es la traspuesta conjugada de \mathbf{A} .
- $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p a_{i,i}$ es la traza de una matriz cuadrada \mathbf{A} de tamaño $p \times p$, tal que $\mathbf{A} = a_{i,j}$ con $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq p$.
- La notación $\mathcal{N}(\mu_{\mathcal{N}}, \sigma_{\mathcal{N}})$ se aplica a la función normal centrada en $\mu_{\mathcal{N}}$ y con dispersión $\sigma_{\mathcal{N}}$. Su función de densidad de probabilidad o “Probability Density Function, (*PDF*)” es:

$$f_1(q) = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q-\mu_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}\right)^2} \quad \forall q \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

- La notación $\Gamma(\alpha, \beta)$ se aplica a la función Gamma. La *PDF* que caracteriza a esta distribución puede verse expresada en función de los parámetros (α, β) o los parámetros (α, θ) , siendo $\theta = 1/\beta$.

$$f_2(q) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-1} e^{-q\beta} \quad q > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (5.2)$$

En la Figura 5.1 se muestra una representación de la *PDF* de la función $\Gamma(\alpha, \theta)$.

- La notación $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ se aplica a la función raíz cuadrada de Gamma y su *PDF* es:

$$f_3(q) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{2\alpha-1} e^{-\lambda q^2} \quad q > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (5.3)$$

En la Figura 5.2 se muestra una representación de la *PDF* de la función $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$.

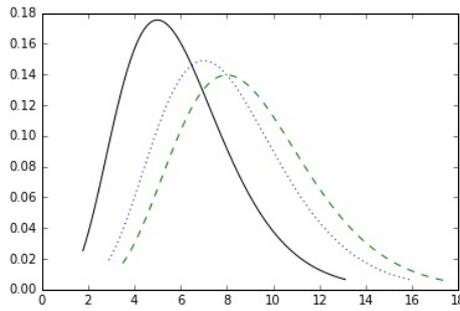


Figura 5.1: Gráfica de PDF de la función de distribución Gamma creada con Python.

$|\alpha| : 6,0$ trazo continuo; $|\alpha| : 8,0$ punto; $|\alpha| : 9,0$ trazo discontinuo

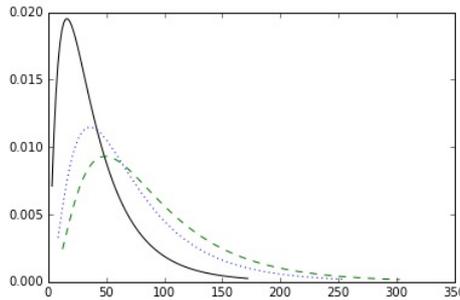


Figura 5.2: Gráfica de PDF de la función de distribución raíz cuadrada de Gamma creada con Python.

$|\alpha| : 6,0$ trazo continuo; $|\alpha| : 8,0$ punto; $|\alpha| : 9,0$ trazo discontinuo

- La notación $\Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$ se aplica a la función inversa de Gamma y su PDF es:

$$f_4(q) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\gamma^\alpha} q^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{q}} \quad q > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0 \quad (5.4)$$

En la Figura 5.3 se muestra una representación de la PDF de la función $\Gamma^{-1}(\alpha, \theta)$.

- La notación $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$ se aplica a la función inversa raíz cuadrada de Gamma y su PDF es:

$$f_4(q) = \frac{2}{\Gamma(-\alpha)\gamma^\alpha} q^{2\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{q^2}} \quad q > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0 \quad (5.5)$$

- La notación K_α es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden α expresada como:

$$K_\alpha(\sqrt{ab}) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(ax+bx^{-1})} \quad (5.6)$$

En la Figura 5.4 se muestra una representación de la PDF de la función inversa raíz cuadrada de Gamma $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$.

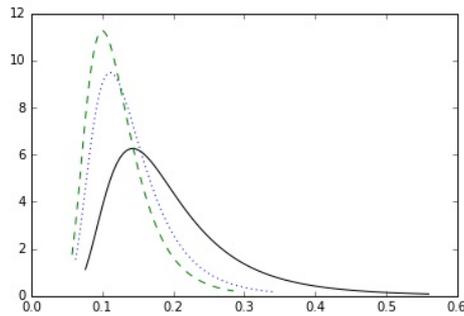


Figura 5.3: Gráfica de *PDF* de la distribución inversa de Gamma creada con Python. $|\alpha|$: 6,0 trazo continuo; $|\alpha|$: 8,0 punto; $|\alpha|$: 9,0 trazo discontinuo

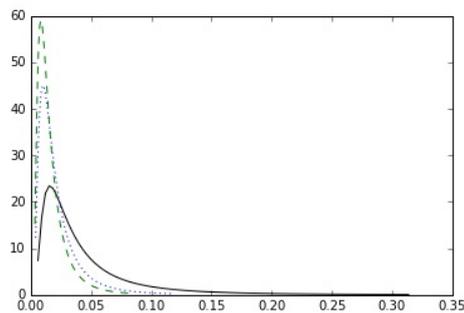


Figura 5.4: Gráfica de *PDF* de la distribución inversa raíz cuadrada de Gamma creada con Python. $|\alpha|$: 6,0 trazo continuo; $|\alpha|$: 8,0 punto; $|\alpha|$: 9,0 trazo discontinuo

- **Modelos no correlacionados:** En estos modelos se supone la existencia de datos espacialmente no correlacionados, en imágenes *SAR*. Es decir que cada pixel de la imagen se asocia a una variable aleatoria independiente del resto de variables asociadas a los demás píxeles.
- **Modelos correlacionados:** Los modelos correlacionados suponen que dado un conjunto de píxeles de una imagen, las variables aleatorias asociadas a cada uno de esos píxeles se encuentran distribuidas de acuerdo a una relación de dependencia determinada, dándole a la imagen una textura característica. Los modelos matemáticos clásicos no consideran esta correlación.

5.2. Modelo multiplicativo en imágenes *SAR*

Este modelo es muy usado en sistemas de iluminación coherente para representar el comportamiento estadístico de los datos, como es el caso de las imágenes *SAR*.

En el modelo multiplicativo se considera a la imagen que se obtiene de los retornos

captados por el SAR, como una realización del campo aleatorio \mathbf{Z} que resulta del producto punto a punto (ver 4.2.6.1) de un campo aleatorio correspondiente a la retrodispersión \mathbf{X} por un campo aleatorio correspondiente al ruido speckle \mathbf{Y} .

En este modelo se considera que el ruido speckle \mathbf{Y} no está correlacionado con la retrodispersión \mathbf{X} y se asume que \mathbf{Y} no depende del objeto que se esté intentando observar, sino del sistema que produce las imágenes. Se suponen independientes las variables aleatorias correspondientes a cada pixel de la imagen y también independientes los campos aleatorios \mathbf{X} , \mathbf{Y} .

La operación punto a punto sobre matrices que modela el efecto del ruido multiplicativo sobre la señal de retorno, descrita en 4.2.6.1 y aplicada en las matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} , de tamaño u orden $M \times N$ se expresa como:

$$Z_{i,j} = X_{i,j}Y_{i,j} \in \mathbb{C} \forall (i,j). \text{ [Donde } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1]$$
(5.7)

O en forma sintética.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}$$
(5.8)

Siendo $\mathbf{Z} := (Z_{i,j})$, $\mathbf{X} := (X_{i,j})$, $\mathbf{Y} := (Y_{i,j})$.

De [96], en la mayoría de los casos la retrodispersión o backscatter \mathbf{X} se considera real y positiva, $\mathbf{X} = \text{cte.}$ en el caso particular del modelado de áreas homogéneas que se describe en 5.3. El ruido speckle \mathbf{Y} puede ser complejo, por lo tanto usualmente el retorno \mathbf{Z} es complejo. [97]

Teniendo en cuenta lo expresado en 4.2.5, los formatos de amplitud e intensidad de $Z_{i,j}$ se pueden expresar de acuerdo con las ecuaciones (4.16) y (4.17), respectivamente. El mismo criterio se aplica para los formatos de amplitud e intensidad de $Y_{i,j}$

- $Z_{i,j}$ en formato amplitud es $Z_{Ai,j} = |Z|_{i,j}$
- $Z_{i,j}$ en formato intensidad es $Z_{Ii,j} = |Z|^2_{i,j}$
- $Y_{i,j}$ en formato amplitud es $Y_{Ai,j} = |Y|_{i,j}$
- $Y_{i,j}$ en formato intensidad es $Y_{Ii,j} = |Y|^2_{i,j}$

Por lo expresado, es posible derivar los siguientes formatos de imagen para el retorno \mathbf{Z} y para el speckle \mathbf{Y} .

- Amplitud $\mathbf{Z}_A := (Z_{Ai,j})$
- Intensidad $\mathbf{Z}_I := (Z_{Ii,j})$
- Amplitud $\mathbf{Y}_A := (Y_{Ai,j})$
- Intensidad $\mathbf{Y}_I := (Y_{Ii,j})$

Se expresan las relaciones entre los campos aleatorios $\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, en los formatos: complejo, amplitud e intensidad respectivamente.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y} \quad \mathbf{Z}_A = \mathbf{X}\mathbf{Y}_A \quad \mathbf{Z}_I = \mathbf{X}^2\mathbf{Y}_I$$

En imágenes SAR los formatos que más se usan son los de amplitud e intensidad, pues en muchos casos resulta más fácil derivar las propiedades estadísticas de ese tipo de datos.

La forma en que han quedado expresados los formatos complejo, intensidad y amplitud de los campos aleatorios $\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ se aplica sobre todas las imágenes de radar que se obtienen como resultado de los modos de polarización con que el radar opera, por ejemplo *hh*.

5.3. Tipos de distribución de datos SAR

En imágenes SAR se utiliza el modelo multiplicativo, de modo que el formato seleccionado (intensidad, amplitud o complejo) determina el tipo de distribución de la variable aleatoria $Y_{i,j}$ y la heterogeneidad de la zona correspondiente a cada pixel determina la distribución más apropiada para cada $X_{i,j}$. Según sea el tipo de terreno o superficie iluminada que permitió obtener la imagen, esta se clasifica en homogénea, heterogénea y extremadamente heterogénea, por ello las suposiciones que habitualmente se hacen sobre las distribuciones de las variables también dependen de la textura del blanco.

Tal como se expone en 4.1.7, un método simple de reducción de ruido speckle es el promedio n-vistas. El método consiste en tomar varias imágenes independientes del mismo objeto y obtener un promedio de esas imágenes. Suponiendo que la r -ésima imagen está dada por la ec. (5.7), entonces el promedio temporal de n-vistas queda expresado por la ec. (5.9), tal que $\widehat{Y}_{i,j}$ es el promedio de las n-vistas del proceso ruido speckle correspondiente a las n-imágenes distintas. También se considera que

$X_{i,j}$ no varía en las n -observaciones, de modo que $X_{i,j} = \widehat{X}_{i,j}$. Se definen los siguientes operadores, $\Im(\cdot)$: parte imaginaria y $\Re(\cdot)$: parte real

$$\widehat{Z}_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n Z^{(r)}_{i,j} = X_{i,j} \widehat{Y}_{i,j} \quad (5.9)$$

5.3.1. Formatos de ruido speckle, retrodispersión y retorno

A continuación se describen distribuciones apropiadas para el modelo multiplicativo.

1.- Modelos de distribución para el ruido speckle

De [98] se extraen los tipos de distribución asociables al ruido speckle en el modelo multiplicativo.

- **Ruido speckle en formato intensidad Y_I**

En el caso del ruido speckle intensidad \mathbf{Y}_I de una imagen, que se obtiene a partir de n vistas, tomando el promedio sobre las n muestras independientes de \mathbf{Y}_I , si en cada vista (look) el ruido posee una distribución $\mathcal{N}_2(0, 1/2)$, entonces $Y_I(i, j)$ tiene distribución Gamma de parámetros (n, n) y se expresa como $Y_I(i, j) \sim \Gamma(n, n)$. De la ec. (5.2), se obtiene la *PDF* que caracteriza a esta distribución:

$$f_{Y_I}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-yn} \quad y > 0, n > 0 \quad (5.10)$$

- **Ruido speckle en formato amplitud Y_A**

El ruido speckle amplitud \mathbf{Y}_A de una imagen, que se obtiene a partir de n vistas, está dado por la raíz cuadrada del ruido speckle intensidad, por lo cual tiene distribución raíz cuadrada de Gamma y se expresa como:

$$Y_A(i, j) \sim \Gamma^{1/2}(n, n).$$

De la ec. (5.3), la *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_{Y_A}(y) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \quad y > 0, n > 0 \quad (5.11)$$

- **Ruido speckle en formato complejo Y**

En el caso del ruido speckle complejo \mathbf{Y} en una imagen, se considera distribución normal bivariada, cuyas componentes correspondientes a parte real e imaginaria del ruido, son independientes e idénticamente distribuidas de parámetros 0

y $1/2$. Estas distribuciones se denotan con $\mathcal{N}(0, 1/2)$ y se expresan como $Y(i, j) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$. De la ec. (5.1), la *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2y^2} \quad \forall y \in \mathfrak{R} \quad (5.12)$$

2.- Modelos de distribución para la retrodispersión

En la literatura de imágenes de radar se encuentran tres modelos de distribuciones para la retrodispersión de intensidad aplicables al modelo multiplicativo. Estos modelos se toman de [96].

■ *Retrodispersión en formato intensidad X_I*

- a) Para modelar áreas homogéneas se considera a la retrodispersión como una constante β^2
- b) Para modelar áreas heterogéneas se usa la distribución $\Gamma(\alpha, \beta)$ que se expresa como $X_I(i, j) \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. De la ec. (5.2) se obtiene la *PDF* que caracteriza a esta distribución.

$$f_{X_I}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (5.13)$$

- c) Para modelar áreas extremadamente heterogéneas se usa la distribución inversa de Gamma que se expresa como:

$$X_I(i, j) \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$$

De la ec. (5.4) se obtiene la *PDF* que caracteriza a esta distribución.

$$f_{X_I}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\gamma^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{x}} \quad x > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0 \quad (5.14)$$

■ *Retrodispersión en formato amplitud X_A*

- a) Para modelar áreas homogéneas se considera a la retrodispersión como una constante β
- b) Para modelar áreas heterogéneas se usa la distribución $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ que se expresa como $X_A(i, j) \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$. De la ec. (5.3) se obtiene la *PDF* que caracteriza a esta distribución.

$$f_{X_A}(x) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\lambda x^2} \quad x > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (5.15)$$

c) Para modelar áreas extremadamente heterogéneas se usa la distribución inversa de la raíz cuadrada de Gamma que se expresa como $X_A(i, j) \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución está dada por la ec. (5.5).

3.- Modelos de distribución para el retorno

De [99] se tiene que para el retorno, tanto en el formato intensidad como en el formato amplitud, las distribuciones para cada clase de textura se calculan a través del teorema de existencia de la densidad del producto, llamada convolución de densidades. Estos modelos se toman de [96].

■ *Retorno en formato intensidad Z_I*

a) Para modelar áreas homogéneas se usa la distribución Gamma con los parámetros n y n/β^2 y se expresa como $Z_I(i, j) \sim \Gamma(n, n/\beta^2)$. De la ec. (5.2) se obtiene la *PDF* que caracteriza a esta distribución.

Siendo $\alpha = n$ y $\lambda = n/\beta^2$, resulta:

$$f_{Z_I}(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-z\lambda} \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (5.16)$$

b) Para modelar áreas heterogéneas se usa la distribución K de intensidad y se expresa como $Z_I(i, j) \sim K_I(\alpha, \lambda, n)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_{Z_I}(z) = \frac{2 \left(\sqrt{\lambda n}\right)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} z^{\frac{n+\alpha}{2}} K_{\alpha-n} \left(2\sqrt{\lambda n z}\right) \quad z > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, n > 0 \quad (5.17)$$

Donde $K_{\alpha-n}$ es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden $\alpha - n$ expresada en la ec. (5.6).

c) Para modelar áreas extremadamente heterogéneas se usa la distribución \mathcal{G}^0 de intensidad, que se expresa como $Z_I(i, j) \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_{Z_I}(t) = \frac{n^n \Gamma(n - \alpha) t^{n-1}}{\gamma^\alpha \Gamma(n) \Gamma(-\alpha) (\gamma + nz)^{n-\alpha}} \quad t > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0, n > 0 \quad (5.18)$$

■ *Retorno en formato amplitud Z_A*

a) Para modelar áreas homogéneas se usa la distribución raíz cuadrada de Gamma de parámetros n y n/β y se expresa como $Z_A(i, j) \sim \Gamma(n, n/\beta)$. De la ec. (5.3), la *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

Siendo $\alpha = n$ y $\lambda = n/\beta$

$$f_{Z_A}(z) = \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} q^{2\alpha-1} e^{-\lambda q^2} \quad q > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (5.19)$$

b) Para modelar áreas heterogéneas se usa la distribución K de amplitud y se expresa como $Z_A(i, j) \sim K_A(\alpha, \lambda, n)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_{Z_A}(z) = \frac{4\lambda n z}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} (\lambda n z^2)^{n+\alpha} K_{\alpha-n} \left(2z\sqrt{\lambda n} \right) \quad z > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, n > 0 \quad (5.20)$$

c) Para modelar áreas extremadamente heterogéneas se usa la distribución \mathcal{G}^0 de amplitud, que se expresa como $Z_A(i, j) \sim \mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_{Z_A}(t) = \frac{2n^n \Gamma(n - \alpha) \gamma^{-\alpha} z^{2n-1}}{\gamma^\alpha \Gamma(n) \Gamma(-\alpha) (\gamma + n z^2)^{n-\alpha}} \quad z > 0, -\alpha > 0, \gamma > 0, n > 0 \quad (5.21)$$

■ **Retorno en formato complejo Z**

Este formato, caracterizado para cada tipo de textura por las distribuciones marginales correspondientes a $\text{Re}(Z)$ y $\text{Im}(Z)$, tal que para $\text{Re}(Z)$ y $\text{Im}(Z)$ las densidades que caracterizan a esas distribuciones son las mismas y por lo tanto se hace referencia a una única *PDF*.

a) Para modelar áreas homogéneas se usa la distribución Normal con los parámetros n y $n/\sqrt{\beta/2}$ y se expresa como $Z(i, j) \sim \mathcal{N}(n, n/\sqrt{\beta/2})$

b) Para modelar áreas heterogéneas se usa la distribución K compleja y se expresa como $Z(i, j) \sim K_C(\alpha, \lambda)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_Z(z) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^{\alpha+1/2}}{\pi}} |z|^\alpha K_{\alpha-1/2} \left(2|z|\sqrt{\lambda} \right) \quad z > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (5.22)$$

c) Para modelar áreas extremadamente heterogéneas se usa la distribución \mathcal{G}^0 compleja, que se expresa como $Z(i, j) \sim \mathcal{G}_C^0(\alpha, \gamma)$. La *PDF* que caracteriza a esta distribución es:

$$f_Z(t) = \frac{\Gamma(1/2 - \alpha)}{\gamma^\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-\alpha)} (\gamma + z^2)^{\alpha-1/2} \quad z > 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \quad (5.23)$$

5.4. Modelo multiplicativo de datos *PolSAR*

Es importante señalar que en esta Tesis no resulta de interés las funciones que caracterizan al ruido speckle polarimétrico y sí interesan las funciones que caracterizan al retorno polarimétrico.

En las imágenes *PolSAR* también se suele aplicar el modelo multiplicativo visto en 5.3, que permite explicar el comportamiento estadístico de los datos obtenidos.

5.4.1. Distribución Wishart compleja centrada

De [100, 101], la distribución Wishart de parámetros p, n, Σ es la distribución de la matriz aleatoria cuadrada p dimensional $\mathcal{W} \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ y se puede expresar como $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^H$. Donde $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ denota a vectores aleatorios p dimensionales, independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*).

5.4.2. Formatos de ruido speckle, retrodispersión y retorno

En el caso de datos complejos polarimétricos es posible trabajar con una matriz que contemple las componentes de polarización. Se adopta para los datos *PolSAR* bajo el modelo multiplicativo la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} Z_{hh} \\ Z_{hv} \\ Z_{vv} \end{bmatrix} = \sqrt{X} \begin{bmatrix} Y_{hh} \\ Y_{hv} \\ Y_{vv} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Donde el vector aleatorio $\mathbf{Z} = [Z_{hh}, Z_{hv}, Z_{vv}]$ modela el retorno, $\mathbf{Y} = [Y_{hh}, Y_{hv}, Y_{vv}]$ modela el ruido speckle y la variable aleatoria X modela la variación del efecto de retrodispersión debido a la heterogeneidad de la zona sensada. La variable aleatoria X es escalar y tiene media unitaria. Los valores medios de cada uno de los componentes del vector aleatorio \mathbf{Y} determinan los valores medios de cada uno de los componentes correspondientes de \mathbf{Z} . El mayor inconveniente de este modelo para su uso directo es su nivel de ruido, tal como se describió en 4.1.7, a los efectos de mitigar el ruido se realiza el proceso multi-look, en la práctica se define la siguiente matriz.

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}(k) \mathbf{Z}(k)^H \quad (5.25)$$

Donde n es la cantidad de vistas (looks), k es el índice de cada vista (look), $\mathbf{Z}(k)$ es cada una de las vistas (looks), \mathbf{Z}^* es el complejo conjugado de \mathbf{Z} y \mathbf{Z}^H es la transpuesta del complejo conjugado de \mathbf{Z} .

En forma similar se define a $\mathbf{Y}^{(n)}$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}(k)^H \quad (5.26)$$

Si el área es homogénea, de 5.3.1 la variable X que modela a la retrodispersión se considera cte.. De las ecuaciones (5.24), (5.25) y (5.26), resulta:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = X \mathbf{Y}^{(n)} \quad (5.27)$$

Luego $\mathbf{Z}^{(n)}$ puede expresarse como:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = X \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}(k)^H \quad (5.28)$$

Desarrollando la matriz, $\mathbf{Z}^{(n)}$ puede expresarse como:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{X}{n} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} |Y_{hh}(k)|^2 & Y_{hh}(k)Y_{hv}^*(k) & Y_{hh}(k)Y_{vv}^*(k) \\ Y_{hv}(k)Y_{hh}^*(k) & |Y_{hv}(k)|^2 & Y_{hv}(k)Y_{vv}^*(k) \\ Y_{vv}(k)Y_{hh}^*(k) & Y_{vv}(k)Y_{hv}^*(k) & |Y_{vv}(k)|^2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

De [102, 103] se toman expresiones analíticas para el ruido speckle derivadas de los coeficientes de la matriz $\mathbf{Z}^{(n)}$. Definiendo $k_x = X/n = \text{cte.}$ resulta $\mathbf{Z}^{(n)} = k_x \mathbf{Y}^{(n)}$, es decir que el retorno $\mathbf{Z}^{(n)}$ es una expresión escalada de $\mathbf{Y}^{(n)}$, por lo expuesto en 5.4.1, $n\mathbf{Y}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}(k)^H$ posee una distribución Wishart Compleja Centrada.

La matriz $\mathbf{Z}^{(n)}$ es hermitiana definida positiva, cada una de las componentes de la matriz corresponde a una combinación particular de las polarización de emisión y de recepción.

De [11] se toma la *PDF* que caracteriza a esta distribución que está indexada por dos parámetros: la matriz de covarianzas $\mathbf{\Sigma}$ y el número de looks L de la imagen:

$$f_z(\mathbf{Z}', \mathbf{\Sigma}, L) = \frac{L^m |\mathbf{Z}'|^{L-m}}{|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}')) \quad (5.30)$$

Donde, \mathbf{Z}' representa los posibles resultados de \mathbf{Z} , $\mathbf{\Sigma}$ es el valor estimado de la matriz de covarianzas, $L = n$ es el número de looks, m es el número de canales de polarización, $\Gamma_m(L)$ es la función Gamma polarimétrica y $|\cdot|$ es el operador determinante de \cdot .

La distribución Wishart compleja, es el modelo de distribución que más se utiliza para trabajar con imágenes generadas a partir de datos multi-look polarimétricos.

Cabe señalar que a los efectos de procesar los datos de la imagen *PolSAR*, se crea una matriz \mathbf{Z} indexada con la dupla (i, j) , donde $\mathbf{Z}_{i,j}$ identifica a cada matriz \mathbf{Z}' de

orden 3×3 en \mathbf{Z} . Esa misma dupla indexa al punto p del plano P , donde $p_{i,j}$ identifica a cada pixel de una imagen Img o matriz de píxeles de N columnas y M filas. Por lo tanto cada matriz \mathbf{Z}' se relaciona en forma biunívoca con cada pixel de la imagen Img por medio del punto $p_{i,j}$, de modo que $\mathbf{Z}' \equiv \mathbf{Z}'(p_{i,j})$.

Lo señalado está representado en la Figura 4.12 y se expresa como:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &\in P \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{Z}' \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \\ \mathbf{Z} &\subset (\mathbb{C}^{3 \times 3})^{M \times N} \mid \mathbf{Z}'(p_{i,j}) = \mathbf{Z}_{i,j} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Capítulo 6

Segmentación en imágenes *PolSAR*

En capítulos anteriores se menciona la difícil tarea que representa interpretar a este tipo de imágenes por el gran volumen de información y por su contenido de ruido speckle. En líneas generales, en el procesamiento digital de imágenes, la interpretación de los objetos presentes en una imagen se puede hacer una vez identificados esos objetos a partir de una correcta segmentación.

Una imagen *PolSAR* se puede segmentar mediante el delineado del borde de las regiones, estimando las *PPB* y uniendo con un trazo esas posiciones. En este capítulo se describe cómo se eligen los datos para armar las muestras y el método utilizado para estimar las *PPB*.

6.1. Selección de puntos

Un contorno activo va cambiando su forma mientras los puntos del contorno cambian de posición conforme una regla de ajuste de posiciones hasta que los puntos alcanzan las posiciones de borde. Cuando todos los puntos del contorno están ubicados en las respectivas posiciones de borde la forma del contorno delinea el borde.

En este trabajo, cada posición de borde se obtiene como resultado de una selección sobre un conjunto acotado de posibles posiciones conforme una regla de ajuste sobre ese conjunto. Luego se dibuja una curva que pasa por esas posiciones de borde, definiendo de ese modo el contorno que delinea el borde.

6.2. Estimador de parámetros

Un tema central en inferencia estadística es la estimación de parámetros desconocidos (valores desconocidos de parámetros) de una determinada población.

A partir de una muestra de tamaño n proveniente de una población desconocida y asociada a un determinado modelo de $F(\theta)$ se utiliza la información contenida en la muestra para obtener una estimación de θ , donde θ es un vector de p parámetros desconocidos [104, 105]. Una estadística $T_n \equiv T_n(Y_1, \dots, Y_n)$ es cualquier función de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n que describen los datos. Una estadística utilizada para la estimación de un parámetro desconocido θ es llamada *estimador*. Un *estimador* es siempre una variable aleatoria, dado que es una función de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n , que generalmente representan n realizaciones de una variable aleatoria Y que posee una función de distribución $F \equiv F(\theta)$. Cuando Y_1, \dots, Y_n son independientes y provenientes de la misma distribución decimos que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Una estimación (o estimativa), por otro lado, no es una variable aleatoria pues representa la evaluación de un *estimador* en una muestra observada y_1, \dots, y_n .

6.3. Métodos y recursos

Se recurre al método propuesto en [25] para delinear el contorno de una región con una curva. En ese método propuesto se usa una cantidad discreta de puntos que pertenecen a la curva en lugar de trabajar con todos los puntos de la curva, de ese modo se reduce el tiempo de procesamiento. En la medida en que esa cantidad discreta de puntos se ubican en las posiciones de borde, la curva que une esos puntos define el contorno de la región. El método propuesto en [25] comienza con la especificación de las áreas de interés.

En cada área de interés se define la posición y largo de un segmento que se dibuja en la imagen, se extraen los datos de la imagen a partir de las posiciones que el segmento pisa o intersecta a cada pixel. El punto de borde identificado en cada segmento dibujado sobre la imagen, forma parte del conjunto de puntos que pertenecen al límite de la región. Cada punto de borde de cada segmento se determina mediante la estimación de parámetros a partir de los datos asociados al segmento. El contorno está definido por la curva que se ajusta a los puntos de borde.

A diferencia del método propuesto en [25], en este trabajo los segmentos que se dibujan en la imagen son diámetros de una misma circunferencia, "Rayos de la rueda, (RDR)". Para ello se escoge una región en la imagen y una posición inicial en la imagen (centro de la rueda). Se define el tamaño de un diámetro (rayo) y un número de rayos.

6.3.1. Muestra de datos y modelo RDR

La segmentación a partir del delineado de los bordes de las regiones necesita de muestras de datos de la imagen $PolSAR$ con las que se estiman las posiciones de los puntos de borde que se usan para el delineado.

La primera etapa consiste en elegir un sector de la imagen, recoger el conjunto de datos y construir la muestra. Los datos seleccionados se guardan en un vector creado a tal efecto. Como ejemplo, en la Figura 6.1 se muestra una imagen SAR polarimétrica simulada de 60×203 píxeles (fila, columna). Se puede observar un segmento horizontal de color blanco de ancho 1 píxel, que cubre N píxeles alineados. Este segmento marca las posiciones de los datos seleccionados. La Figura 6.1 presenta dos regiones bien definidas: "Región I, (R_I)", "Región II, (R_{II})". La posición de un "punto de borde, (P)" es la posición de uno de los dos píxeles tocados por el segmento horizontal, situado en el límite o frontera entre las regiones R_I y R_{II} , uno de los píxeles pertenece a R_I y el otro pertenece a R_{II} .

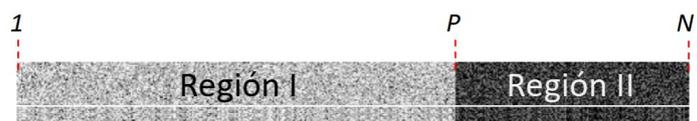


Figura 6.1: Regiones R_I y R_{II} en una imagen $PolSAR$ simulada P : posición horizontal de un punto de borde.

Los datos utilizados para construir la muestra se indexan con las posiciones (fila, columna) de los píxeles correspondientes en la imagen de la Figura 6.1; en este ejemplo, la posición "fila" del conjunto de los píxeles seleccionados es la "fila" donde se encuentra el segmento horizontal de color blanco y el valor de la posición "columna" de cada uno de los píxeles del conjunto seleccionado está entre los valores 1 y N . Se recorre el segmento de color blanco desde un extremo del mismo hasta el otro extremo y los datos de la matriz polarimétrica correspondientes a cada píxel tocado por el segmento se guardan en un vector creado a tal efecto.

Para crear la imagen de la Figura 6.1 se utilizan las matrices de covarianzas estimadas $\widehat{\Sigma}_p$ y $\widehat{\Sigma}_u$, tomadas de [106]. En ese documento se menciona que las matrices corresponden a datos capturados por el sensor $E - SAR$ sobre Weßling (Bayern, Alemania).

$\widehat{\Sigma}_p$ y $\widehat{\Sigma}_u$ corresponden a una zona de pastizal y una zona urbana, respectivamente. Los elementos omitidos en ambas matrices se pueden obtener como números complejos conjugados a partir de sus respectivos complejos conjugados simétricos.

$$\widehat{\Sigma}_p = \begin{bmatrix} 360932 & 11050 + i3759 & 63896 + i1581 \\ & 98960 & 6593 + i6868 \\ & & 208843 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\widehat{\Sigma}_u = \begin{bmatrix} 962892 & 19171 - i3759 & -154638 + i191388 \\ & 56707 & -5798 + i16812 \\ & & 472251 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

La Figura 6.2 muestra una imagen *PolSAR* simulada de 439×439 píxeles con dos regiones bien definidas. Sobre la misma se dibujan rayos (diámetros de la circunferencia) que constituyen el lugar geométrico de los datos de todas las muestras.

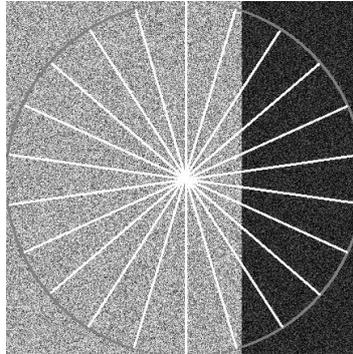


Figura 6.2: Imagen simulada. Cada rayo corresponde a una muestra de datos.

Cada rayo está asociado a una muestra de datos. Cada muestra se usa para estimar la posición de P del rayo asociado y cada posición estimada se corresponde con la posición de un píxel de la imagen. Los píxeles de borde son los que delimitan la frontera o límite entre dos regiones; en la Figura 6.2 son el conjunto de píxeles que definen el límite entre la zona oscura y la zona clara.

6.3.2. Partición de la muestra

A continuación se describe un método de uso habitual para estimar las *PPB* en imágenes *PolSAR*. Algunos ejemplos de este método pueden verse en [106].

- De acuerdo a lo descrito en la subsección 6.3.1 se crea un vector con los N datos Z' de la muestra.
- Se asigna a la variable j un valor entero, tal que $0 < j_{min} \leq j \leq j_{max} < N$. En [107] recomiendan asignar a j valores comprendidos entre las cotas $[0.23N, 0.77N]$. En este trabajo se usa $j_{min} = \lfloor 0.23N \rfloor$ y $j_{max} = \lfloor 0.77N \rfloor$. Donde $\lfloor \omega \rfloor$ es el operador redondeo a entero más cercano de ω .
- Se extraen del vector los datos, se los separa y agrupa en dos conjuntos A_j y B_j , usando para ello la posición j seleccionada como frontera que separa los datos, esto se puede ver en la Figura 6.3.

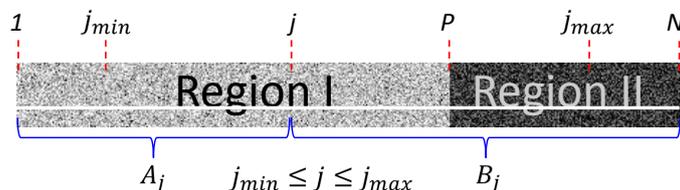


Figura 6.3: Conjuntos de datos A_j y B_j para una posición de j

El proceso descrito se repite para todos los valores o posiciones de j entre j_{min} y j_{max} . Quedan de ese modo definidos pares de conjuntos A_j y B_j para cada posición de j .

6.3.3. Estimación de la posición de borde

Los datos de cada par (A_j, B_j) se usan en una función f_{pb} de variable discreta j diseñada de forma tal que devuelve valores reales o enteros v_j por cada posición j y concebida de forma que v_j sea máximo en $j = P$. En un vector se cargan todas las duplas (v_j, j) que se forman con las posiciones de j comprendidas entre j_{min} y j_{max} .

Luego se usa una función que busca en el vector el v_j el valor máximo y devuelve el valor de j correspondiente a ese v_j máximo. Esta última función o “estimador de punto de borde, (\hat{pb}) ” es:

$$\hat{pb} = \arg \max_j f_{pb}(j) \quad (6.3)$$

6.3.4. Selección de sectores para armar la muestra y modelo SAM

El criterio con que se selecciona el sector de la imagen para armar las muestras es importante para la correcta estimación de las posiciones de borde. El método que se elije en esta Tesis recurre al cambio de escala (reducir el tamaño de la imagen), creando una nueva imagen donde es más fácil estimar las diferentes regiones (Figura 6.4).

Mediante una selección supervisada se determinan los sectores de interés sobre la nueva imagen. Luego, proyectando las posiciones seleccionadas sobre la imagen original se opera para estimar las posiciones de borde.

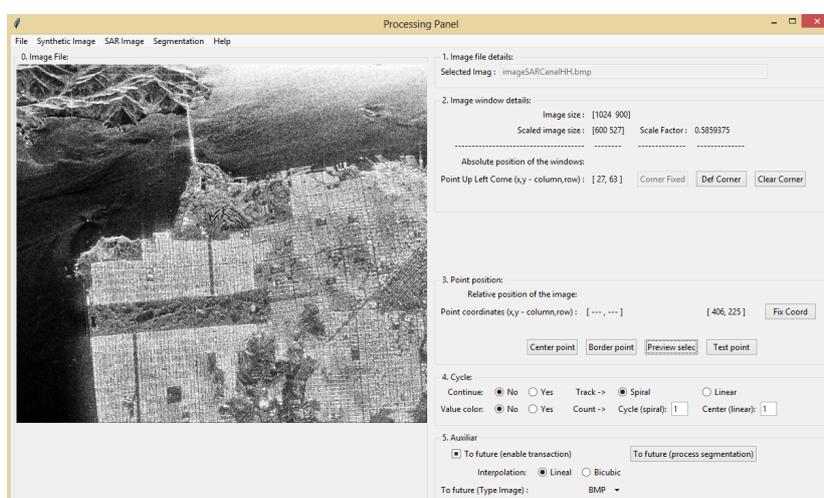


Figura 6.4: Imagen *PolSAR* seleccionada

6.3.4.1. Modelo SAM

Este modelo de selección automática de sectores para armar la muestra comienza con una posición inicial que se obtiene de una selección supervisada.

- Se elije un sector que se lo identifica por las coordenadas de su centro que se lo define como *centro semilla* y una distancia definida como *diámetro del sector*, Figura 6.5
- Se puede optar por una selección automática de nuevas posiciones centrales de sectores.

Estas nuevas posiciones centrales se ubican con respecto al centro seleccionado o *centro semilla* con una distribución denominada *espiral* o con una distribución denominada *lineal* (Figura 6.6).



Figura 6.5: Sector seleccionado en una Imagen PolSAR

- Además es posible decidir el número de vueltas de la espiral en la que se ubican los centros en la distribución *espiral* o el número columnas en las que se ubican los centros en la distribución *lineal*.

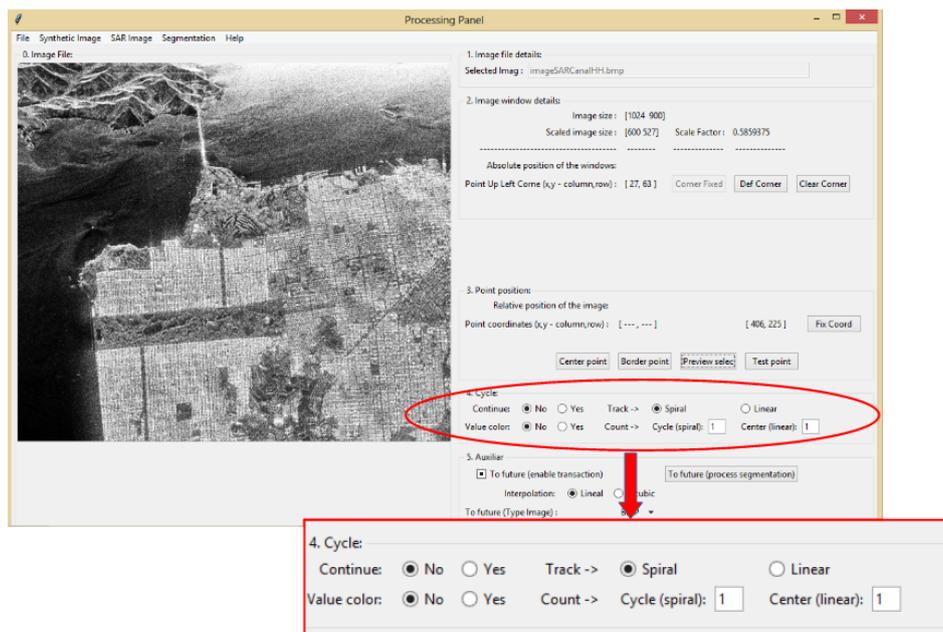


Figura 6.6: Selección de tipos de distribución

En la Figura 6.7 se muestra el resultado de aplicar estos tipos de distribución, denominados *espiral*, Figura 6.7(a) o *lineal*, Figura 6.7(b).

6.3.5. Matrices de covarianzas y número de vistas o looks

En una representación en escala de grises de una imagen *PolSAR*, cada pixel de esa imagen ubicado en una determinada posición (x, y) está asociado a la correspondiente

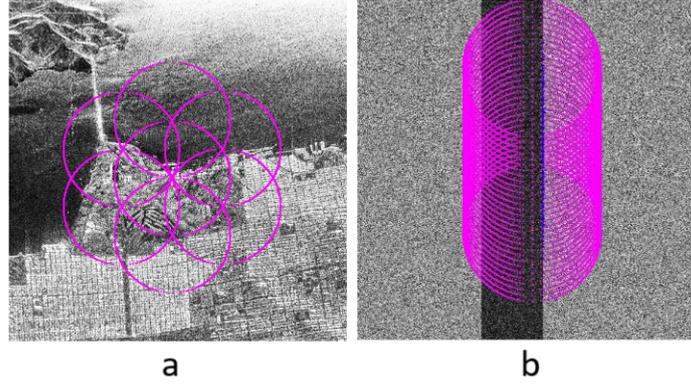


Figura 6.7: Posibles tipos de distribución. a.- *espiral*, b.- *lineal*

matriz de datos \mathbf{Z}' (de la imagen *PolSAR*) ubicada en esa misma posición (x, y) , de modo que, los conjuntos A_j y B_j están formados por datos \mathbf{Z}' de la imagen *PolSAR*.

Las siguientes expresiones surgen de considerar el modo en que se agrupan los datos en los conjuntos A_j y B_j para cada valor de j comprendido entre j_{min} y j_{max} , de acuerdo a lo expresado en 6.3.2.

Para cada par de conjuntos $A(j) = A_j$ y $B(j) = B_j$ (Figura 6.3) se define a Σ_{A_j} y Σ_{B_j} como los valores estimados de las matrices de covarianza de esos conjuntos.

Se cumplen las siguientes condiciones para la matriz hermitiana definida positiva $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'_k$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_k &\in A \text{ para } k = [1, \dots, j] \\ \mathbf{Z}'_k &\in B \text{ para } k = [j + 1, \dots, N] \end{aligned} \quad (6.4)$$

En la subsección 6.3.1 se menciona al vector con los N datos Z' de la muestra. El valor de la matriz de covarianzas de todos los datos de la muestra se denota con Σ_T y se define como:

$$\Sigma_T = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{Z}'_k}{N} \quad (6.5)$$

El valor de la matriz de covarianzas de Σ_{A_j} se define como:

$$\Sigma_{A_j} = \frac{\sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k}{j} \quad (6.6)$$

El valor de la matriz de covarianzas de Σ_{B_j} se define como:

$$\Sigma_{B_j} = \frac{\sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k}{N - j} \quad (6.7)$$

El número de looks está asociado al número de imágenes o “looks” de una misma escena para formar la imagen multi-look y dado que los datos de los conjuntos A y B son datos obtenidos de la misma imagen, en todos los casos se considera $L_A = L_B = L$. Las matrices de covarianzas de todo subconjunto de las regiones R_I y R_{II} (Figura 6.3) son similares a las matrices de covarianzas que caracterizan a las respectivas regiones.

6.3.6. Número equivalente de looks

A los efectos de ajustar los resultados del modelo ideal a los resultados de los ensayos es habitual en esta práctica usar el “número equivalente de looks, (L_e)”.

En imágenes de intensidad, L_e se define como el cuadrado del número que resulta de la división entre el valor medio y la desviación estándar de la energía retrodispersada sobre un objetivo homogéneo [108], y se expresa como:

$$L_e = \left(\frac{\mu}{S_d} \right)^2 = \frac{\mu^2}{\sigma} \quad (6.8)$$

Donde μ es el valor medio de la intensidad de la señal, S_d es la desviación estándar de la intensidad de la señal, σ es la varianza de la intensidad de la señal.

En [109] se introduce un estimador que usa la función de verosimilitud.

En [110] se propone un estimador que usa el método de momentos y es comparado con el “estimador de máxima verosimilitud, MLE ”.

De [111] se toma una expresión que conduce a la estimación de L_e .

$$L_e = \frac{tr(\Sigma_T)^2}{N^{-1} \sum_{k=1}^N tr(\mathbf{Z}'_k \mathbf{Z}'_k) - tr(\Sigma_T \Sigma_T)^2} \quad (6.9)$$

El valor estimado de (L_e) es usado en la PDF de la distribución Wishart compleja oportunamente descripta en 5.4.1, función que puede expresarse como $f_z(\mathbf{Z}', \Sigma, L)$ con $L = \widehat{L}_e$.

En [112] usando el modelo estadístico de distribución Wishart compleja para datos $PolSAR$, se propone un método mejorado de MLE , que se obtiene como solución de la siguiente ecuación no lineal:

$$mN \log \widehat{L}_e - N\psi_m^0(\widehat{L}_e) - N \log \bar{\mathbf{Z}} + \sum_{i=1}^N \log |\mathbf{Z}_i| - \frac{m^2}{2\widehat{L}_e} = 0 \quad (6.10)$$

Donde:

m es el número de canales de polarización u orden de la matriz cuadrada (matriz de covarianzas).

$\psi_m^0(\cdot)$ es el término de orden cero de la función poligamma multivariante de orden v expresada como:

$$\psi_m^v(L) = \sum_{i=0}^{m-1} \psi^v(L-i) \quad (6.11)$$

Siendo $\psi^v(\cdot)$ la función poligamma ordinaria expresada como:

$$\psi^v(L) = \frac{\partial^{v+1} \log \Gamma(L)}{\partial L^{v+1}} \quad (6.12)$$

En la ec. (6.10) tomada de [112], los autores no pudieron identificar una solución analítica de forma cerrada para \widehat{L}_e y por esa razón sugieren usar el método de optimización numérica de Newton-Raphson.

6.4. Conclusiones

- En las ecuaciones mostradas para estimar L_e el gran tamaño de estas imágenes representa un inconveniente al momento de estimar este parámetro, pues deben procesarse los datos de toda la imagen y eso demanda un tiempo considerable de procesamiento.
- Algunas propuestas para estimar L_e con mayor precisión conducen a expresiones más elaboradas que demandan un tiempo de procesamiento mayor, como es el caso de \widehat{L}_{BN} en donde se sugiere usar el método de optimización numérica de Newton-Raphson para encontrar una solución a la ecuación propuesta.
- Haciendo uso del modelo de Distribución Wishart Relajada [113, 114] es posible reducir el tiempo de procesamiento. Dado que, seleccionado un sector o área en la imagen donde se quieren estimar las PPB , con este modelo se considera válido usar solamente los datos de ese sector para obtener el \widehat{L}_e .
- El uso del modelo Distribución Wishart Relajada con el propósito de reducir el tiempo de procesamiento es útil en la medida que el sector sea comparativamente pequeño con respecto al tamaño de toda la imagen y en la medida en que se estimen PPB en un número reducido de sectores.
- Resulta beneficioso y deseable disponer de un modelo que pueda prescindir del L_e . Que estime las PPB con una precisión comparable con los métodos propuestos y en un menor tiempo de procesamiento con respecto a esos métodos.

Capítulo 7

Interfaz de usuario para imágenes

PolSAR

En este capítulo se exponen aspectos relevantes de la “Interfaz de usuario, (*IdeU*)” desarrollada para experimentar con imágenes *PolSAR*.

Se muestran algunas imágenes que muestran características de la interfaz así como algunos fragmentos de código que ilustran procesos llevados a cabo por algunos de los algoritmos implementados en la interfaz.

Esta interfaz se usa como un instrumento para ensayo y análisis. Desde esta interfaz se hace un seguimiento de la correcta ejecución de las diferentes etapas implementadas en el algoritmo de procesamiento de las imágenes *PolSAR* y se ven los resultados que se obtienen al aplicar ese algoritmo.

Con esta interfaz es posible repetir la experiencia con diferentes modelos matemáticos que se usan para la estimación de las posiciones de borde de imágenes *PolSAR*.

7.1. Lenguajes de programación

Luego del análisis de un conjunto de lenguajes de programación actualmente disponibles, tales como *Python*, *C/C++*, *C*, *JAVA*, *C++*, *C#*, se decide por *Python* como lenguaje de programación de código abierto para el desarrollo de la interfaz. Se puede agregar que “TIOBE” [115], una de las empresas que actualiza cada mes un ranking de popularidad de lenguajes de programación tiene al lenguaje “*Python*” ubicado en uno de los primeros lugares. En la Figura 7.1 se muestra la ventana principal del modelo de *IdeU* desarrollado.

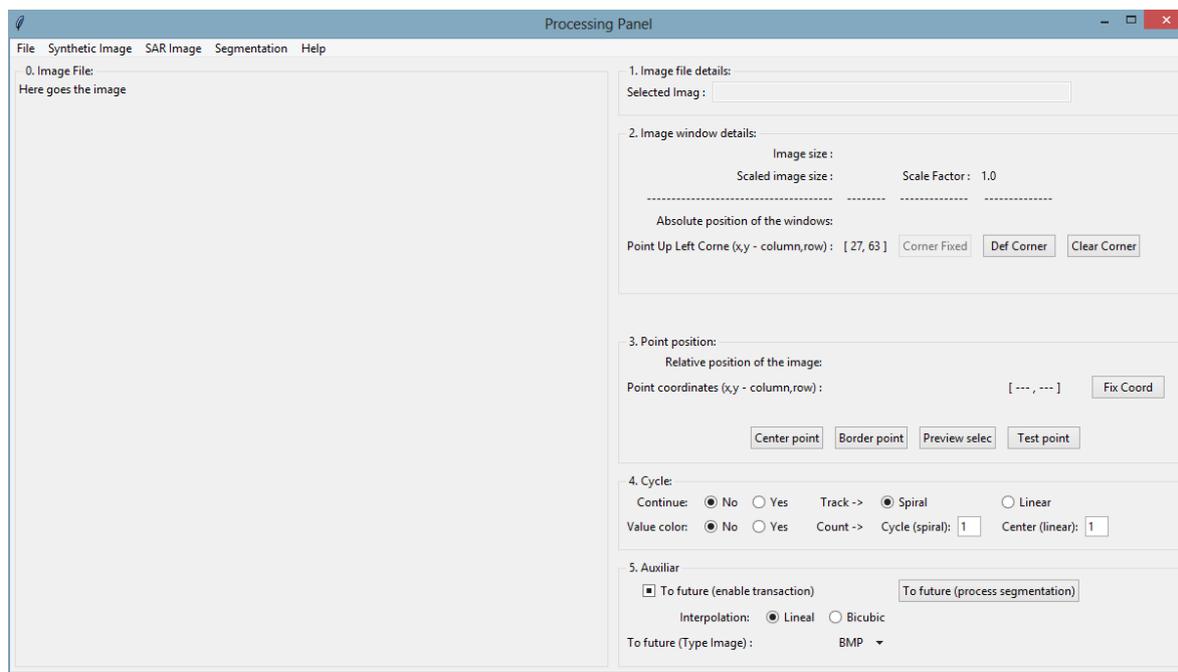


Figura 7.1: Interfaz de usuario para el procesamiento digital de imágenes PolSAR

7.1.1. Características del lenguaje Python

- Su éxito radica principalmente en que es de código abierto, es un lenguaje versátil y sencillo, fácil de leer y la sintaxis es bastante similar a la del inglés.
- Es un lenguaje de alto nivel, lenguaje de “Programación Orientada a Objetos” (POO) adecuado para el desarrollo rápido de aplicaciones, ofrece soporte para los recursos que proporciona y facilitan la reutilización del código, eso incluye librerías adecuadas para el procesamiento digital de imágenes, particularmente útil en imágenes *PolSAR*.
- Es un lenguaje interpretado, realiza la ejecución directa de código línea por línea. Si se encuentra un error al ejecutar el código, su ejecución se detiene y se genera un informe de error. Python muestra un solo informe de error, incluso si un programa en ejecución tiene varios errores. De ese modo el lenguaje facilita la depuración.

7.1.2. Uso de objetos en Python

Python ofrece la posibilidad de crear objetos con propiedades y métodos apropiados, dedicados a tareas específicas. Este modelo ofrece condiciones favorables al desarrollo de aplicaciones complejas, evitando códigos caóticos y abriendo la posibilidad de reutilizar los objetos, sus propiedades y métodos, en una codificación más sencilla y eficiente.

A continuación se especifican algunos de estos Objetos

- **atril:** El objeto de la clase “atril” se encarga de pintar el marco en el sector seleccionado de la imagen, dibujar la rueda y los rayos (ver por ejemplo Figura 6.2), delinear la curva que une las posiciones de borde y que definen el contorno del objeto. Parte del código se muestra en la sección 7.4 bajo los rótulos:

“Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 346 a 378” y

“Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 382 a 440”

- **imgSyntWishart:** El objeto de la clase “imgSyntWishart” se encarga de crear la imagen en escala de grises del sector seleccionado en la imagen sintética por cada canal de polarización. Parte del código se muestra en la sección 7.2.2.1 con el rótulo “Lenguaje Python archivo imgSyntheticSAR_03 líneas 259 a 282”. Para ello recurre al objeto de la clase “rndZoneWishart”
- **rndZoneWishart:** El objeto de la clase “rndZoneWishart” se encarga de crear las diferentes regiones de la imagen en escala de grises a partir de los datos complejos. Parte del código se muestra en la sección 7.2.2.1 con el rótulo “Lenguaje Python archivo zoneSinteticdmSAR_01 líneas 145 a 182”.
- **imgPolSar:** El objeto de la clase “imgPolSar” se encarga de crear la imagen en escala de grises del sector seleccionado en la imagen real por cada canal de polarización. Parte del código se muestra en la sección 7.4 con el rótulo “Lenguaje Python archivo imgPolarimetSAR_01 líneas 205 a 268”.
- **GridDm:** El objeto de la clase “GridDm” permite crear diferentes tipos de matrices de datos complejos. En diferentes etapas del proceso, con el objetivo de desarrollar un código más simple y un algoritmo más eficiente, resulta conveniente acceder a los datos de una manera en particular y esto es posible en la medida en que los datos estén convenientemente indexados en el arreglo que los contiene, es por ello que en determinados momentos los datos migran de un tipo de arreglo a otro tipo, pasando por ejemplo, de un arreglo de $M \times N \times 3 \times 3$ a un arreglo de $3 \times 3 \times W$. Parte del código se muestra en la sección 7.4 con el rótulo “Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6108 a 6158”.

7.2. Banco de imágenes

Se trabaja con dos tipos de imágenes como dato de entrada. Imágenes simuladas o sintéticas que deben crearse con la *IdeU* e imágenes reales que se deben tomar de algún banco de imágenes.

7.2.1. Imágenes *PolSAR* reales

Se obtienen imágenes *PolSAR* de un banco de imágenes, estas imágenes están contenidas en archivos de extensión *RDATA*. Los archivos *RDATA* (con extensión *RDATA*) pertenecen principalmente al lenguaje R, de “R Foundation”, donde *RDATA* significa archivo *R* de datos. El lenguaje R es un entorno de software libre utilizado para el análisis estadístico y la visualización gráfica.

Es necesario cambiar el formato de estos archivos de imagen a los efectos de obtener un formato de archivo al que Python pueda fácilmente acceder para tomar los datos de estas imágenes y procesarlos. Para ello se hace uso de rutinas propias del lenguaje R y se diseña un algoritmo que permite ejecutar en forma automática todo el proceso. El único parámetro de entrada que necesita el algoritmo es la ubicación o ruta al archivo, con ese dato el algoritmo crea y graba los archivos de imagen que usa Python como datos de entrada.

Código fuente 7.1: Lenguaje R archivo dm08Direc

```
# Descomprime y transforma el tipo de archivo de imagen.
```

```
caminoArchivo <- "C:/R_scrip/Files/rDatos"
caminoFiles   <- "C:/R_scrip/Files/CanalesFile"

tipoCanal <- c(
  "CanalHH.txt",
  "CanalHV.txt",
  "CanalVV.txt",
  "CanalReal_HH_HVc.txt",
  "CanalReal_HH_VVc.txt",
  "CanalReal_HV_VVc.txt",
  "CanalImag_HH_HVc.txt",
  "CanalImag_HH_VVc.txt",
  "CanalImag_HV_VVc.txt"
)

listFile <- dir(path = caminoArchivo)

if (length(listFile) > 0){
```

```

caminoArchivo <- paste(caminoArchivo, listFile[1], sep="/")

load(caminoArchivo, fileRdata <- new.env())

listaDm <- ls.str(fileRdata)

a <- get(listaDm[1], envir = fileRdata)

numCanales <- length(a[1,1,])

for(i in 1:numCanales) {
  nombreCanal <- tipoCanal[i]
  caminoFileCanal <- paste(caminoFiles, nombreCanal, sep="/")

  matrix01 <- a[, , i]
  write.table(matrix01, file = caminoFileCanal, sep = ",",
             col.names = F, row.names = F) #creo el archivo con los datos
}

dim(matrix01) #veo la dimension de la matriz
dim(a) #veo la dimension de la matriz

nombreCanal <- "DimeMatriz.txt"
caminoFileCanal <- paste(caminoFiles, nombreCanal, sep="/")

dimMatriz <- dim(a)
write.table(dimMatriz, file = caminoFileCanal, sep = ",",
           col.names = F, row.names = F) #creo el archivo con los datos
}

```

7.2.2. Imágenes *PolSAR* simuladas

Las imágenes simuladas se obtienen a partir de matrices de covarianzas de datos complejos con distribución Wishart. Cada posición en la imagen sintética definida por fila y columna corresponde a un conjunto de datos dispuestos en una matriz hermitiana.

Existe en Python librerías que ofrecen recursos para obtener este tipo de datos, tales como:

Código fuente 7.2: Lenguaje Python ejemplo 1

```

import numpy as np
from scipy.stats import wishart

```

```
x = np.linspace(1e-5, 8, 100)
for y in x:
    z = wishart.rvs(1, scale=y)
    print(z)
```

Código fuente 7.3: Lenguaje Python ejemplo 2

```
def _standard_rvs(self, n, shape, dim, df, random_state):

    # Parámetros

    # n : entero,          Número de variantes a generar
    # shape : iterable,   Forma de las variantes a generar
    # dim : int,          Dimensión de la matriz de escala
    # df : int,           Grados de libertad

    # random_state: {None, int, 'numpy.random.Generator', 'numpy.random.RandomState'}
    # Si 'seed' es None (o 'np.random')
    #     # se utiliza la instancia única 'numpy.random.RandomState'
    # Si 'seed' es un int
    #     # se utiliza una nueva instancia de 'RandomState'.
    # Si 'seed' ya es una instancia de 'Generator' o de 'RandomState'
    #     # entonces se utiliza esa instancia.

    # Variables normales aleatorias para los elementos no diagonales
    n_tril = dim * (dim-1) // 2
    covarianzas = random_state.normal(size=n*n_tril).reshape(shape+(n_tril,))

    # Variables aleatorias chi-cuadrado para los elementos diagonales
    varianzas = (np.r_[[random_state.chisquare(df-(i+1)+1, size=n)**0.5
    for i in range(dim)]].reshape((dim,) + forma[:: -1]).T)

    # Crear la matriz A - triangular inferior
    A = np.zeros(shape + (dim, dim))

    # Introducir las covarianzas
    size_idx = tuple([slice(None, None, None)]*len(shape))
    tril_idx = np.tril_indices(dim, k=-1)
    A[size_idx + tril_idx] = covarianzas

    # Introducir las varianzas
    diag_idx = np.diag_indices(dim)
    A[tamaño_idx + diag_idx] = varianzas

    devolver A
```

En los ejemplos vistos (ejemplo 1 y ejemplo 2) se hace uso de funciones “random” para dar valores a variables que usa la función que crea las matrices. En este trabajo se crean imágenes que muestren dos zonas caracterizadas por matrices de covarianzas diferentes, empleando para ello las matrices de covarianzas (6.1) y (6.2) como dato de

entrada en la función que crea las matrices hermitianas asociadas a cada posición de la imagen. Se hace uso de la descomposición o factorización de Cholesky de la matriz hermitiana definida positiva, esta factorización da como resultado el producto de una matriz triangular inferior y su conjugada transpuesta o matriz triangular superior.

7.2.2.1. Descomposiciones matriciales LU y Choleski

De acuerdo a lo expresado en 5.4.1, si $Y_{p,n}$ es una matriz $p \times n$, donde las filas son vectores aleatorios independientes y siguen una distribución normal centrada de dimensión p :

$$Y_i = (y_i^1, \dots, y_i^p) \sim N_p(0, V) \quad (7.1)$$

Entonces la distribución de Wishart es la distribución de probabilidad de la matriz aleatoria $p \times p$, [116], expresada como:

$$X = YY^t = \sum_{i=1}^n Y_i Y_i^t \quad (7.2)$$

Es decir que, dada una matriz Y que satisface la ec. (7.1) es posible obtener la matriz X a partir de la ec. (7.2). Con ese criterio se emplea la factorización o descomposición LU.

Una matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ posee descomposición LU cuando existen matrices $L, U \in M_{n \times n}(\mathfrak{R})$ triangular inferior (lower) y triangular superior (upper) respectivamente, tales que $A = LU$. En casos especiales se puede elegir $L = U^t = B$, es lo que se conoce como la factorización de Choleski [117] para una matriz cuadrada simétrica. La condición $L = U^t = B$ está relacionada con la expresión $A = LU = LDL^t$. Con el método de Doolittle [118] una matriz $A \in M_{p \times p}(\mathfrak{R})$ simétrica definida positiva se la puede expresar como el producto matricial $A = BB^t$, donde B es matriz triangular inferior de dimensión $p \times p$.

Este método se extiende al campo complejo para matrices hermitianas definidas positivas haciendo uso de funciones que aporta el lenguaje Python.

Se crea un método y se usan las matrices de covarianzas (6.1) y (6.2) correspondientes a la zona de pastizal y urbana respectivamente como variables de entrada a las funciones definidas para ese método. Se pueden obtener así imágenes a partir de datos con distribución Wishart que presentan dos regiones distinguibles y caracterizada por sus respectivas matrices de covarianzas.

Código fuente 7.4: Lenguaje Python archivo imgSyntheticSAR_03 líneas 259 a 282

función que levanta de archivo los datos de una de las matrices de covarianzas.

```
def datosDeFondo(self ):
    #----- fondo -----

    matSigma01 = matrix([[160000 + 0.0j, 11050 + 3759j, 0.00 + 1581j],
                        [
                            0, 98960 + 0.00j, 6593 + 6868j],
                        [
                            0,
                            0, 208843 + 0j]])

    if self.searchDatosWshaSint():
        matrizAux, grLib = self.recoverMatrix(1)

        if abs(matrizAux).sum() > 0:
            matSigma01 = matrizAux
            self.wishLiber = abs(grLib)

    zonaCmp = rndZoneWishart(matSigma01, grLib=self.wishLiber,
                             cantPol=self.dim1D, ajuste=False)

    datosFondoCmp = zonaCmp.createNewZoneSintetic()

    #datosFondoCmp = np.matrix(datosFondoCmp)

    return self.creoMatrizCanales(datosFondoCmp) # M x N x 6
```

Código fuente 7.5: Lenguaje Python archivo zoneSinteticdmSAR_01 líneas 145 a 182

función que incorpora las matrices hermitianas a la imagen PolSAR.

```
def createNewZoneSintetic(self):

#     dirActual = os.getcwd()

#     rutAux = "\\\" + \"TxtFiles\"
#     rutaTxtFile = dirActual + rutAux + "\\\"

#     nomArchi01 = 'matrizAuxSint.txt'

#     listCanal=['Canal_00 ', 'Canal_01 ', 'Canal_02 ', 'Canal_11 ', 'Canal_12 ', 'Canal_22 ']

    dimC = self.dimC
    gradLib = self.gradLib
#     cantCmp = self.cantCmp
    cantMatPol = self.cantMatPol

    matImg = np.zeros((dimC, dimC, cantMatPol))*1j
```

```

facEsc = 1

if self.ajuste:
    facEsc = self.facEscala()

matSigma02 = self.matSigma01/facEsc    #la matriz triangular que va a wishart

matSigmaProm = np.zeros((dimC, dimC))*1j

for cont in range(cantMatPol):
    auxiWishart = rndwishart(matSigma02, gradLib, 0)
    matImg[:, :, cont] = auxiWishart.getWishat()

    matSigmaProm = matSigmaProm + matImg[:, :, cont]

return matImg

```

Código fuente 7.6: Lenguaje Python archivo wishartdmSAR_01 líneas 12 a 28

```

# en el constructor de la clase se llama al método que crea
# la matriz de datos complejos.

```

```

class rndwishart:
    def __init__(self, sigma = np.eye(3,3), grLib=4, matWishDef = 0):

        if matWishDef == 0:
            self.sigma = self.getSigmaM(sigma)

        if matWishDef == 1:
            self.sigma = self.getSigma(1)

        if matWishDef == 2:
            self.sigma = self.getSigma(2)

        self.dim = sigma.shape[0]
        self.grLib = grLib

```

Código fuente 7.7: Lenguaje Python archivo wishartdmSAR_01 líneas 35 a 73

```

# función que crea la matriz hermitiana a partir de los datos
# de la matriz de covarianzas.

```

```

def createNewWishart(self):
    try:
        chol = np.linalg.cholesky(self.sigma)

```

```

except:
    showerror("la matriz no es hermitiana definida positiva")
    return np.eye(3,3)

cholH = chol.H
dAux = np.zeros((self.dim, self.dim))

for i in range(self.dim):
    for j in range(i+1):
        if i == j:
            dAux[i, j] = np.sqrt(chi2.rvs(self.grLib-i))
        else:
            dAux[i, j] = np.random.normal(0,1)

dAuxMat = np.matrix(dAux)
dAuxMat = dAuxMat.H
dAuxH = np.array(dAuxMat)

cholMat = np.matrix(chol)
cholMat = cholMat.H
cholH = np.array(cholMat)

tUno = np.dot(chol, dAux)

conjtUno = np.dot(dAuxH, cholH)
prd01 = np.dot(tUno, conjtUno)

try:
    chol = np.linalg.cholesky(prd01)
except:
    showerror("la matriz no es hermitiana definida positiva")
    return np.eye(3,3)

return prd01

```

La Figura 7.2 muestra una de las matrices hermitianas definidas positiva que se obtienen a partir de la matriz de covarianzas usada para ese propósito.

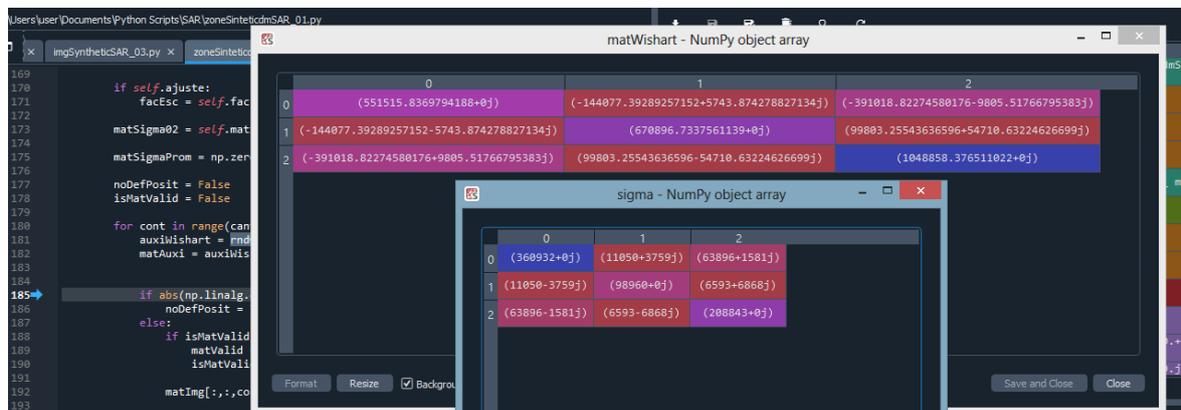


Figura 7.2: Matrices de datos complejos de la imagen PolSAR simulada

7.2.2.2. Aproximaciones con datos de punto flotante

En 5.4.2 se muestra que el retorno de los datos complejos polarimétricos se expresan como una matriz hermitiana definida positiva; los autovalores de la matriz, los valores de la traza y el determinante son valores reales positivos.

Los valores de los datos complejos de la matriz son cifras decimales. En el hardware de la computadora estos valores son números de punto flotante que se representan en fracciones con base 2 (sistema binario). Desafortunadamente, la mayoría de las fracciones decimales no pueden representarse exactamente como fracciones binarias.

Como consecuencia, los números de punto flotante binario que se guardan en el ordenador, en general son sólo aproximaciones de los números de punto flotante decimal. Estas aproximaciones ocasionalmente pueden producir errores en los resultados del cálculo, como en el caso del determinante de una matriz hermitiana, devolviendo por ejemplo, un complejo con parte imaginaria del orden de $1e-16$. A los efectos de evitar este tipo de error, la función calcula el módulo del determinante.

7.2.3. Creación de una imagen simulada

El sistema ofrece la posibilidad de crear diferentes tipos de imágenes simuladas. La Figura 7.3 muestra las opciones disponibles de forma, tamaño y distribución de las regiones que se desean incorporar en la imagen sintética a crear.

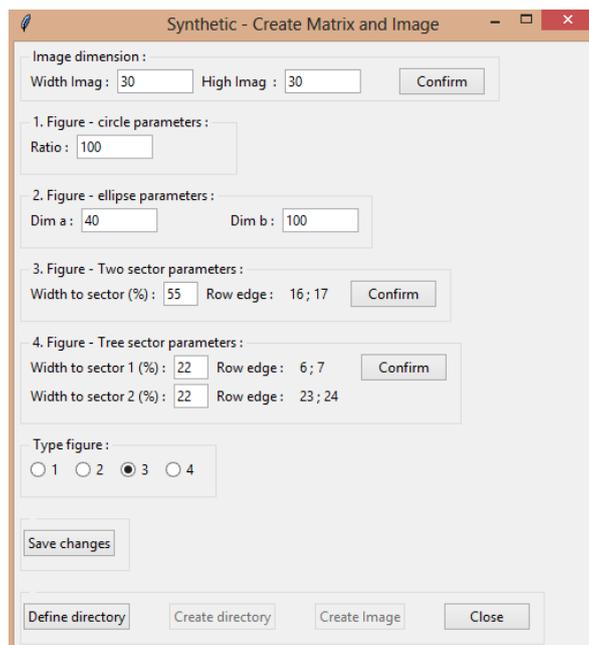


Figura 7.3: Panel para crear una imagen sintética PolSAR

El sistema tiene un panel donde se pueden incorporar datos complejos de las matrices

de covarianzas de dos tipos de suelo distintos, estos datos son usados para crear las matrices hermitianas correspondientes a dos regiones, Figura 7.4. Estos datos son guardados en archivo y el sistema accede a ellos cuando de se crean imágenes *PolSAR* simuladas.

1. Matrices zone 1 and 2:

360932.0	0.0	11050.0	3759.0	63896.0	1581.0
		98960.0	0.0	6593.0	6868.0
				208843.0	0.0
962892.0	0.0	19171.0	-3759.0	-154638.0	191388.0
		56707.0	0.0	-5798.0	16812.0
				472251.0	0.0

2. Degrees of freedom wishart:
Dg.Free:

Buttons: Save changes, Close

Figura 7.4: Panel de matrices de covarianzas de una Imagen *PolSAR*

7.3. Selección de una región de interés

La Figura 7.5 muestra cómo se puede acceder al banco de imágenes *PolSAR* a los efectos de seleccionar una región de interés para realizar los ensayos.

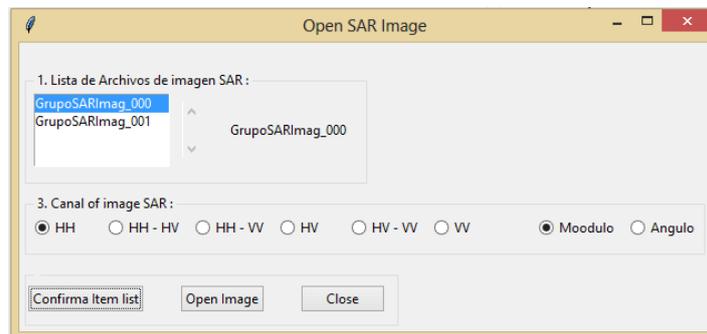


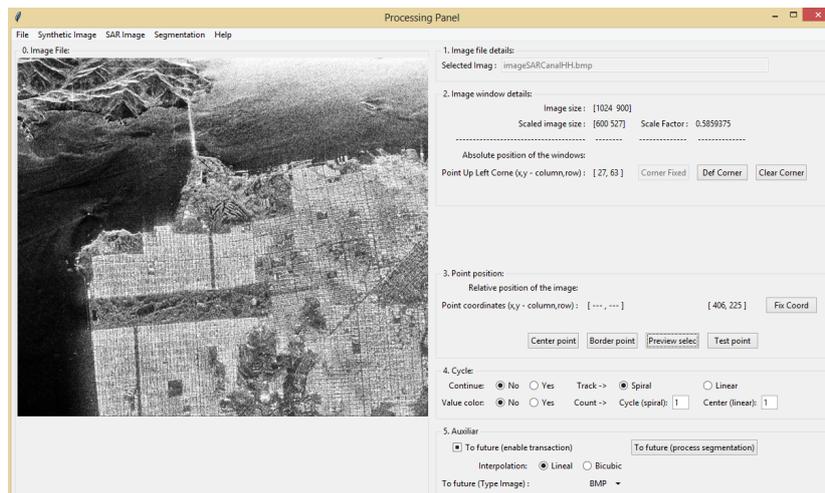
Figura 7.5: Panel de selección de una imagen *PolSAR*

El sistema busca las imágenes, muestra una lista de ellas para su elección y da la posibilidad de elegir el canal de polarización a ser usado a efectos de crear la imagen en escala de grises que muestra la interfaz. La Figura 7.6 muestra una imagen seleccionada.

El sistema escala la imagen y la ubica en un marco dispuesto en el panel principal.

En el lado derecho del panel se muestran los datos de la imagen. En el procesamiento de la imagen se usan los datos de todos los canales de polarización contenidos en las matrices hermitianas.

La Figura 7.7 muestra una Imagen sintética y el sector seleccionado inscripto en una circunferencia. El sector se selecciona arrastrando el mouse sobre la imagen de la izquierda y presionando la tecla del mouse en la posición deseada, el primer click define

Figura 7.6: Imagen *PolSAR* seleccionada

la posición del centro de la circunferencia y el segundo click define la posición de un punto de la circunferencia.

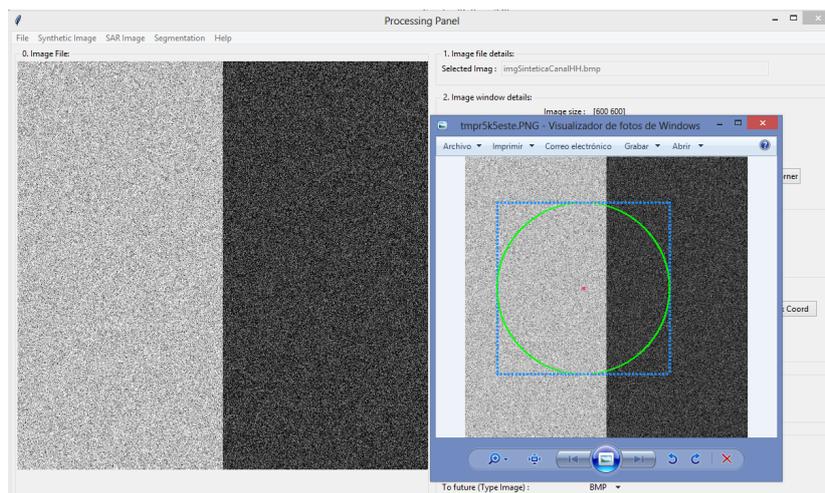


Figura 7.7: Sector seleccionado en una Imagen sintética

Desde el panel “Edge detection” se realiza la secuencia de pasos en el procesamiento de la imagen. Presionando el botón “Create subregion files” se toman las matrices complejas de cada una de las posiciones del sector seleccionado.

La nueva imagen que muestra la interfaz es una representación en escala de grises del sector seleccionado.

El sistema ofrece nuevamente da la posibilidad de elegir un canal de polarización para la representación de la imagen, seleccionado del grupo de opciones que ofrece “Channel of image PolSAR”.

El botón “Build spoke” se usa para pintar en color azul las posiciones de las matrices hermitianas que se toman para crear las muestras.

El botón “PolSAR data from spoke” se usa para crear las muestras y pintar de color verde las posiciones usadas.

La Figura 7.8 muestra el panel “Edge detection”

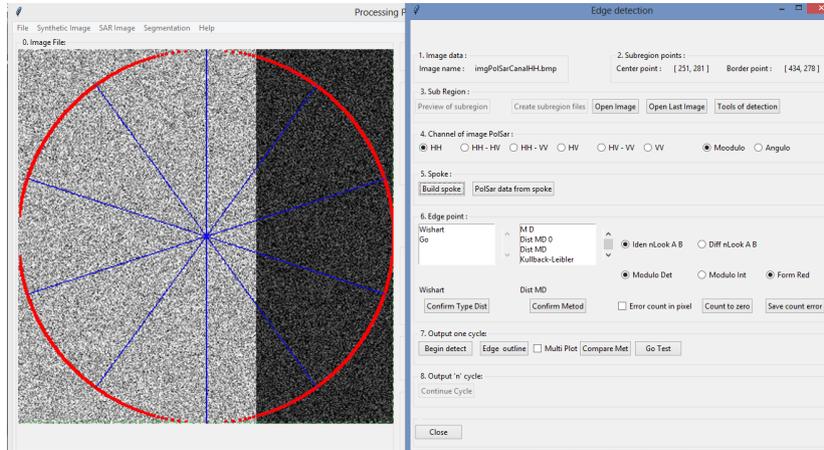


Figura 7.8: Sector seleccionado de una Imagen sintética

La Figura 7.9 muestra la nueva imagen del sector como resultado de tomar las matrices hermitianas de las posiciones seleccionadas. En el lado derecho del panel se pueden observar los datos del sector seleccionado.

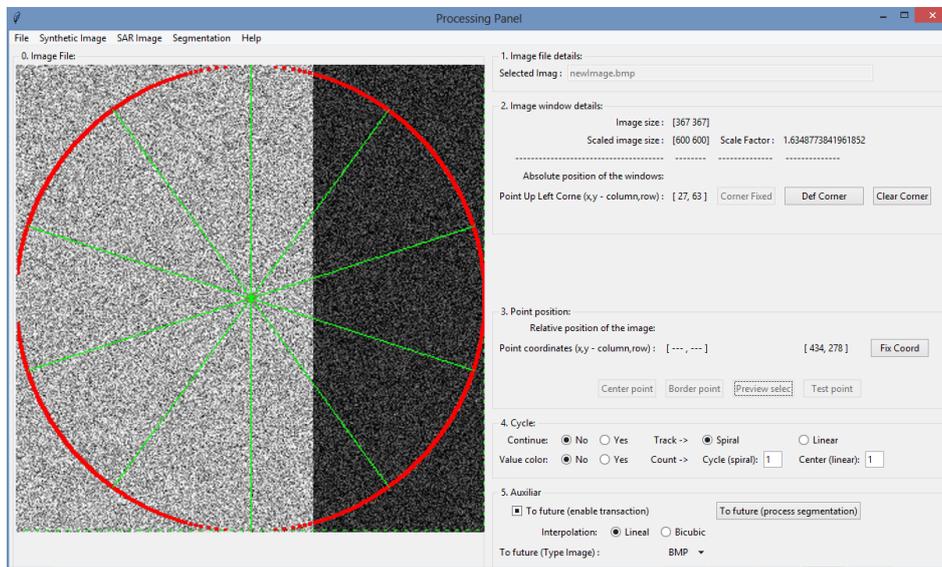


Figura 7.9: Posiciones en verde de los datos tomados para armar las muestras

El botón “Confirm Type Dist” se usa para seleccionar de la lista el tipo de distribución de datos, en este ejemplo es la distribución Wishart compleja.

El botón “Confirm Method” se usa para seleccionar de la lista la función con la que se estiman las posiciones de borde, en este ejemplo es la distancia estocástica d_{MD} .

El botón “Begin detect” se usa para estimar las posiciones de borde.

La Figura 7.10 muestra las posiciones de borde estimadas.

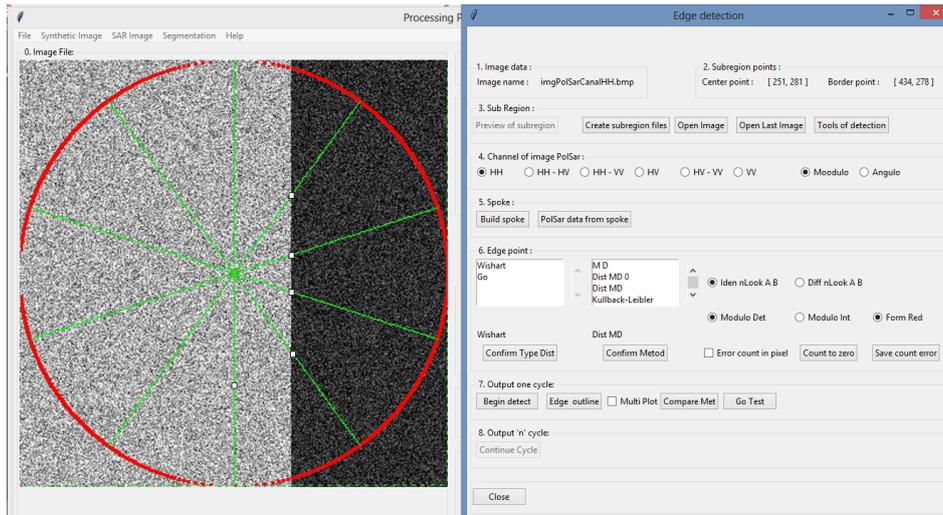


Figura 7.10: Posiciones de borde estimadas en color blanco

En la Figura 7.10 se observa que el sistema estima posiciones de borde en todas las muestras, incluida la muestra asociada al rayo vertical.

Esta posición de borde no es válida pues todos los datos de la muestra se encuentran en una misma región. Esta situación encuentra una solución en un algoritmo desarrollado para otorgar un grado de fiabilidad o confianza a cada posición estimada.

La Figura 7.11 muestra una Imagen *PolSAR* y el sector seleccionado inscripto en una circunferencia. El sector se selecciona de la forma descrita para una imagen sintética.

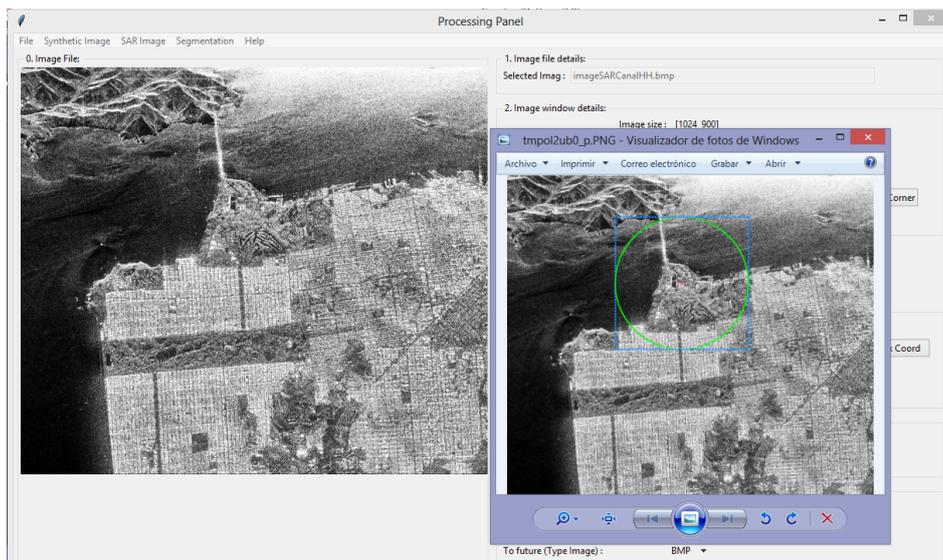


Figura 7.11: Sector seleccionado en una Imagen *PolSAR*

La Figura 7.12 muestra las posiciones de borde estimadas sobre 5 muestras (5 rayos).

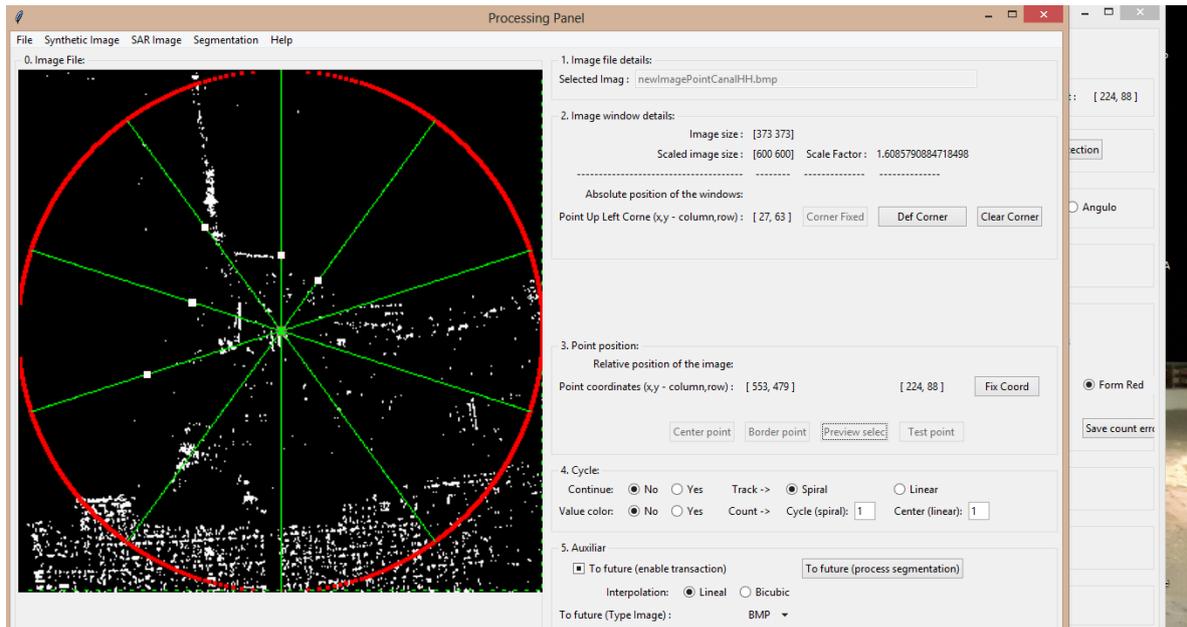


Figura 7.12: Posiciones de borde estimadas en color blanco

La Figura 7.13 muestra las posiciones de borde estimadas sobre 9 muestras (9 rayos).

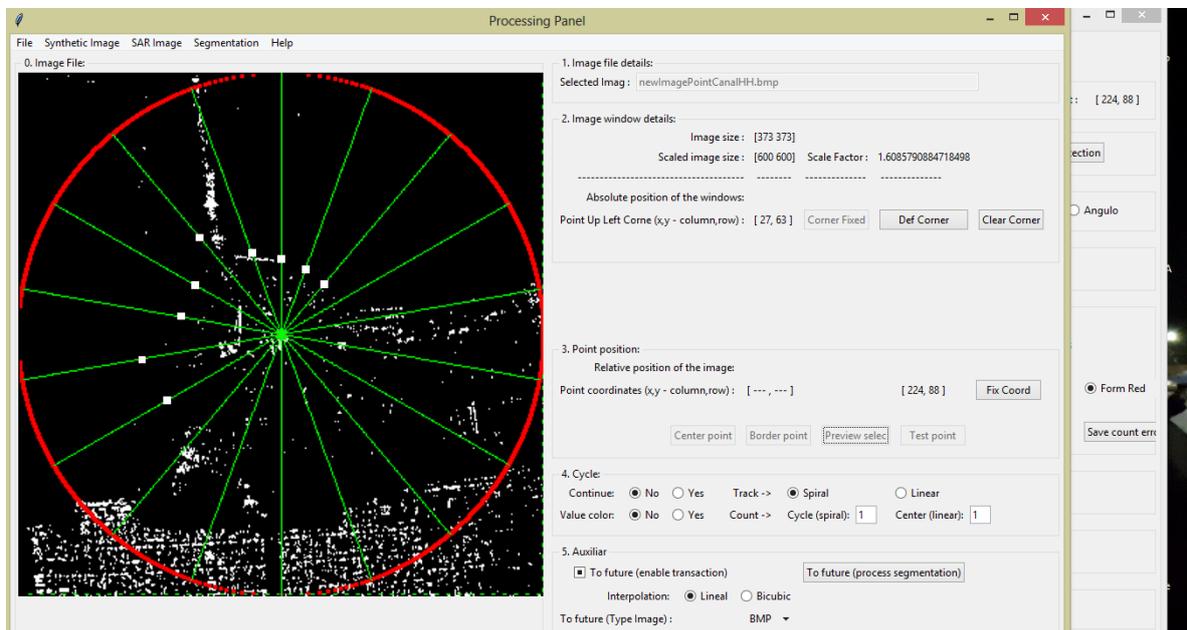


Figura 7.13: Posiciones de borde estimadas en color blanco

La Figura 7.14 muestra las posiciones de borde estimadas sobre 9 muestras (9 rayos).

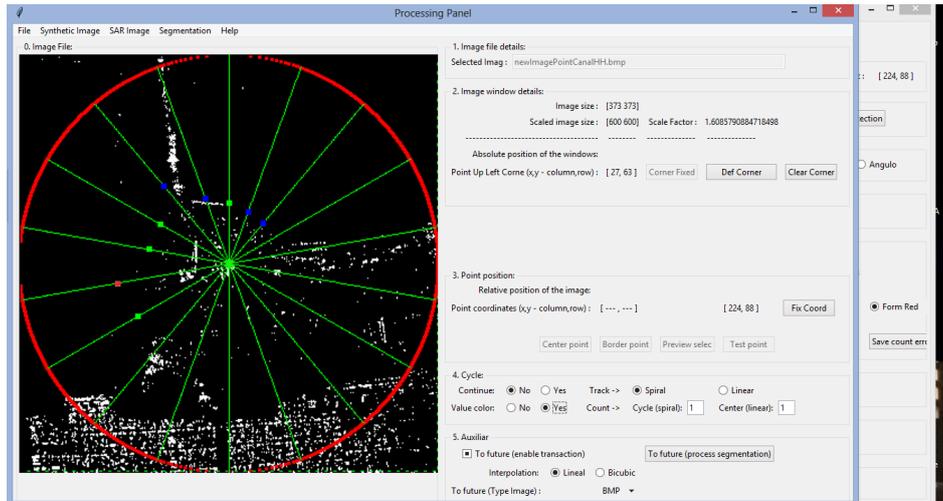


Figura 7.14: Posiciones de borde estimadas coloreadas de acuerdo con el índice de fiabilidad

7.4. Fragmentos de código

En esta sección se muestran algunos fragmentos de código que se usan para ejecutar las etapas en el procesamiento de las imágenes PolSAR.

Código fuente 7.8: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5203 a 5224

```
# función que muestra el panel para la selección de la imagen.
```

```
def mostrarSetSynt( self ):
    self.banderaLog.set(False)
    self.cargaLista(1)

    self.butSynt_03=Button(self.panelFiveWs, text="Open Image",
    command = self.openSynt)
    self.butSynt_03.grid(row=0,column=2)
    self.butSynt_03.config(state = 'disabled')

    self.wImgSynt.deiconify()

def mostrarSetSar( self ):
    self.banderaLog.set(False)
    self.cargaLista(2)

    self.butSaria_03=Button(self.panelFiveSar, text="Open Image",
    command = self.openSaria)
    self.butSaria_03.grid(row=0,column=2)
    self.butSaria_03.config(state = 'disabled')
```

```
self.wImgSaria.deiconify()
```

Código fuente 7.9: Lenguaje Python archivo interfazSAR.12 líneas 5019 a 5125

```
# función que toma los datos del archivo para crear la imagen
# del canal seleccionado y crear imágenes auxiliares # 1.
```

```
def openImgSynt( self , typeOpen ):
    encuentra = 0

    if typeOpen == 1:
        pathSynt = self.pathSynFile.get()
        nameImag = self.nameImgSynt.get()
        posic = self.tipoCanal.get()

    if typeOpen == 2:
        pathSynt = self.pathSarFile.get()
        nameImag = self.nameImgSAR.get()
        posic = self.tipoCanal2.get()

    if typeOpen == 3:
        pathSynt = self.subdirRegion.get()
        nameImag = self.nameImgPOLSAR.get()
        posic = self.tipoCanal3.get()

    dirActual = os.getcwd()

    rutAux = "\\\" + pathSynt + "\\\"

    if not typeOpen == 3:
        rutAux = rutAux + self.nameDirSelec.get() + "\\\"

    extCanal =['CanalHH', 'CanalHH-HVc', 'CanalHH-VVc', 'CanalHV',
              'CanalHV-VVc', 'CanalVV' ]

    tuplaNameImag = os.path.splitext((nameImag))

    nameFileDataSynt = tuplaNameImag[0] + extCanal[posic] + tuplaNameImag[1]

    #-----

    rutaFileDataSynt = dirActual + rutAux

    #rutaNomSetDataFileSynt = rutaFileDataSynt + nameFileDataSynt

    for file in os.listdir(rutaFileDataSynt):
        if file.endswith(nameFileDataSynt):
```

```

        encuentra = 1
        break

    if encuentra:

        try:

            self.inImageFile.set(nameFileDataSynt)

            if not typeOpen == 3:
                self.sourceImageFile.set(nameFileDataSynt)

            if typeOpen == 1:
                fileImageAdapt = self.adaptImage('Synth')
                self.typeOpenImgSy.set('Synth')
                self.typeOpenImgSource.set('Synth')

            if typeOpen == 2:
                fileImageAdapt = self.adaptImage('Sar')
                self.typeOpenImgSy.set('Sar')
                self.typeOpenImgSource.set('Sar')

            if typeOpen == 3:
                fileImageAdapt = self.adaptImage('PolSar')
                self.typeOpenImgSy.set('PolSar')

            #rutaImagen01 = rutAux

#            if not typeOpen == 3:
#                rutaImagen01 = rutaImagen01 + self.nameDirSelec.get() + "\\\"

            pathLoadNameImag = rutaFileDataSynt + self.subdirAdapt.get() + "\\\" +
            fileImageAdapt

            self.incrustaImagen(pathLoadNameImag)

        except:
            showerror("Open-Source-Image", "Couldn't-adapt-image")
            self.cicloContinuo.set(False)
            return
    else:
        showerror("Open-Source-Image", "Couldn't-found-images-files")
        self.cicloContinuo.set(False)

    if typeOpen == 1:

        self.butSynt_03=Button(self.panelFiveWs, text="Open-Image",
        command = self.openSynt)
        self.butSynt_03.grid(row=0,column=2)
        self.butSynt_03.config(state = 'disabled')

```

```

self.wImgSynt.withdraw()

if typeOpen == 2:

    self.butSaria_03=Button(self.panelFiveWs, text="Open-Image",
    command = self.openSaria)
    self.butSaria_03.grid(row=0,column=2)
    self.butSaria_03.config(state = 'disabled')

self.wImgSaria.withdraw()

```

Código fuente 7.10: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5134 a 5151

```

# función que toma los datos del archivo para crear la imagen
# del canal seleccionado y crear imágenes auxiliares # 2.

```

```

def incrustaImagen( self , pathLoadNameImag):

    photo02 = PhotoImage( file=pathLoadNameImag)

    self.panelZero = LabelFrame(self, text="- 0. -Image- File: -")
    self.panelZero.grid(row=0, columnspan=8, rowspan=8, sticky='EWNS',
    padx=5, pady=5)

    self.panelZero.inImgLbl = Label(self.panelZero, image=photo02,
    text="Here goes the name of the image")
    self.panelZero.inImgLbl.photo= photo02
    self.panelZero.inImgLbl.grid(row=0)

    self.panelOne.inFileTxt = Entry(self.panelOne, width=64)
    self.panelOne.inFileTxt.grid(row=0, column=1, columnspan=7,
    sticky="WE", pady=2)
    self.panelOne.inFileTxt.insert(0, self.inImageFile.get())
    self.panelOne.inFileTxt.configure(state=DISABLED)

```

Código fuente 7.11: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 2969 a 3009

```

# función que toma la posición del centro
# y la posición de borde del sector seleccionado.

```

```

def centerPoint( self ):
    self.adjusPosicCenter01()

    mousePositionXYfc = "-" + str(self.posXfixed.get()) + ",-" +
    str( self.posYfixed.get()) + "-]"

    self.myFixedCoord.set(mousePositionXYfc)
    self.mousePositionXY.set(mousePositionXYfc)

    self.posXcenter.set(self.posXfixed.get())
    self.posYcenter.set(self.posYfixed.get())

```

```

auxPosXYCenter = "-[-" + str(self.posXcenter.get()) + ",-" +
str( self.posYcenter.get()) + "-]"
self.positionXYCenter.set(auxPosXYCenter)

#     self.restaurabotonesProcess()

def borderPoint( self ):

    posX = self.posXcenter.get()
    posY = self.posYcenter.get()

    self.adjusPosicCenterEdge01(posX, posY)

    mousePositionXYfc = "-[-" + str(self.posXfixed.get()) + ",-" +
str( self.posYfixed.get()) + "-]"
    self.myFixedCoord.set(mousePositionXYfc)
    self.mousePositionXY.set(mousePositionXYfc)

    self.posXborder.set(self.posXfixed.get())
    self.posYborder.set(self.posYfixed.get())

    auxPosXYBorder = "-[-" + str(self.posXborder.get()) + ",-" +
str( self.posYborder.get()) + "-]"
    self.positionXYBorder.set(auxPosXYBorder)

```

Código fuente 7.12: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 5833 a 5986

```
# función que crea los archivos con los datos del sector seleccionado.
```

```

def createSubRegionImage( self ):

    if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
        showinfo(" Info - Create - Sub - Region - Imag" ,
                "Begin - process - to - Create - Sub - Region - Image ... ")
    self.butSeg_04.config(state='normal')
    self.butSeg_05.config(state='normal')
    self.butSeg_06.config(state='normal')

    dirActual = os.getcwd()

    tipoImg = ''

    tipoImg = self.typeOpenImgSy.get()

    if (tipoImg == 'Synth'):
        rutAux01 = "\\\" + self.pathSynFile.get()

```

```

if (tipoImg == 'Sar'):
    rutAux01 = "\\\" + self.pathSarFile.get()

if (tipoImg == ''):
    return np.zeros((3,3,3), dtype = np.uint8 )

#-----

rutaImagen01 = dirActual + rutAux01 + "\\\"

rutaImagen01 = rutaImagen01 + self.nameDirSelec.get() + "\\\"

posic2D , posic2Db = self.tuplasCentroExtrHoriz()

myImag3D = self.recuperoImagen()

myImag = myImag3D[:, :, 0]

myAtril = atril(myImag)

myAtril.setVertices(posic2D , posic2Db)

verticeSupIzq = myAtril.getVertice_SI()
verticeInfDer = myAtril.getVertice_ID()

self.refAbsolutaFil.set(verticeSupIzq[0])
self.refAbsolutaCol.set(verticeSupIzq[1])

cantFilas = verticeInfDer[0] - verticeSupIzq[0] + 1
cantColum = verticeInfDer[1] - verticeSupIzq[1] + 1

matSubImg = np.zeros((cantFilas , cantColum)) *1j

argCmp = self.tipoArgCmp.get()

miImagPolSar = imgPolSar(tipoImg , rutaImagen01 , rutaImagen01)

(borde01 , borde02) = self.loadPosColBorde(rutaImagen01)

borde01 = borde01 - verticeSupIzq[1]
borde02 = borde02 - verticeSupIzq[1]

if borde01 < 0:
    borde01 = 0

```

```

if borde02 < 0:
    borde02 = 0

if borde01 > cantColum - 1:
    borde01 = 0

if borde02 > cantColum - 1:
    borde02 = 0

posBorde = (borde01, borde02)

listCanal = [0, 1, 2, 11, 12, 22]

# miPolarimCanal = np.zeros((2, len(listCanal))) * 1j
# posCenter = int(matSubImg.shape[0]/2)

subDirRegion = self.subdirRegion.get()

for elCanal in range(len(listCanal)):
    matImg, nomFile01 = miImagPolSar.recoverFileCanal(listCanal[elCanal],
    argCmp)
#     if sum(sum(matImg)) == 0.0:
#         return

    if matImg.sum() == 0.0:
        return

    for fil in range(cantFilas):
        for col in range(cantColum):
            filMatOrig = verticeSupIzq[0] + fil
            colMatOrig = verticeSupIzq[1] + col
            matSubImg[fil, col] = matImg[filMatOrig, colMatOrig]

    try:

        rutaNomarchi = dirActual + '\\\' + subDirRegion + "\\comodin.txt"

        if not os.path.exists(os.path.dirname(rutaNomarchi)):
            os.makedirs(os.path.dirname(rutaNomarchi))

        nomFile01 = nomFile01[0:8] + self.nameFilPOLSAR.get()

        rutaNomarchi = dirActual + '\\\' + subDirRegion + '\\\' + nomFile01
        np.savetxt(rutaNomarchi, matSubImg)

        # miPolarimCanal[0, elCanal] = matSubImg[20, posCenter]
        # miPolarimCanal[1, elCanal] = matSubImg[30, posCenter]

    except:

```

```

        showerror("No-pudo-grabarse-archivo-del-canal-POLARIMETRICO" +
        "-de-la--subimagen--" + rutaNomarchi)
        self.cicloContinuo.set(False)

    try:
        rutaNomarchi = dirActual + '\\\' + subDirRegion + '\\\' +
        "PosEdgeImgSynRed.txt"
        np.savetxt(rutaNomarchi, posBorde)

    except:
        showerror("No-pudo-grabarse-archivo-del-posiciones-de-borde--" +
        rutaNomarchi)

    tipoImg = 'PolSar'

    rutaNomarchi = dirActual + '\\\' + subDirRegion + '\\\'

    miImagPolSar = imgPolSar(tipoImg, rutaNomarchi, rutaNomarchi)

    listCanal = [0, 1, 2, 11, 12, 22]

    for elCanal in range(len(listCanal)):
        miImagPolSar.createImagPolSar(listCanal[elCanal], argCmp, 0)

    rutaNomarchi = rutaNomarchi + self.subdirAdapt.get() + "\\comodin.txt"

    if not os.path.exists(os.path.dirname(rutaNomarchi)):
        os.makedirs(os.path.dirname(rutaNomarchi))

    if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
        showinfo("Info-Imag-SAR", "The-creation-of-Sub-Region-image-is-complete")

    self.wImgSeg01.deiconify()

```

Código fuente 7.13: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6093 a 6100

función que dibuja los rayos con las posiciones seleccionadas # 1.

```

def buildSpoke( self , colorRayo = 2):

    myAtril, estado = self.buildPaintSpoke(colorRayo)
    if not estado:         return myAtril, False

    myAtril, estado = self.asientaCambiosSubImagen(myAtril)

    return myAtril, estado

```

Código fuente 7.14: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7439 a 7450

función que dibuja los rayos con las posiciones seleccionadas # 2.

```

def buildPaintSpoke( self , colorRayo = 2):

    numRayos = self.nroSpoke.get()

    myAtril, vale = self.recallSubRegionImagChange()

    if not vale:
        return myAtril, False

    myAtril.bicycleSpokes(colorRayo, numRayos)

```

Código fuente 7.15: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7397 a 7435

función que dibuja los rayos con las posiciones seleccionadas # 3.

```

def recallSubRegionImagChange( self ):

    rutaFile = os.getcwd() + "\\\" + self.subdirRegion.get() + "\\\"
    nameFile = self.inImageFile.get()
    pathAndNameImagen01 = rutaFile + nameFile

    encuentra = 0

    for file in os.listdir(rutaFile):
        if file.endswith(nameFile):
            encuentra = 1
            break

    if encuentra:

        try:

            from PIL import Image
            myImag3D = Image.open(pathAndNameImagen01)
            myImag3D = np.asarray(myImag3D)

        except:
            showerror("Open-Source-Image", "Couldn't adapt image")
            self.cicloContinuo.set(False)
            return np.zeros((3,3), dtype=int), False

    else:
        showerror("Open-Source-Image", "Couldn't found images files")
        self.cicloContinuo.set(False)
        return np.zeros((3,3), dtype=int), False

myImag = myImag3D[:, :, 0]

```

```
return atril(myImag), True
```

Código fuente 7.16: Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 346 a 378

```
# función que dibuja los rayos con las posiciones seleccionadas # 4.
```

```
def bicycleSpokes(self, colorRayo, numRayos):

    if numRayos == 0:          return

    self.numRayos = numRayos

    posCenter = self.getPosCenter()

    posic2D = (posCenter, posCenter)
    posic2Db = (0, posCenter)

    self.pintarMarca(posic2D, 0, 3)

    self.pintarCuadrado(posic2D, posic2Db, 3)
    self.pintarCirculo(posic2D, posic2Db, -4)

    radio = self.getDistRadial(posic2D, posic2Db)
    cantPuntos = radio * 2 + 1

    self.creoArrayPuntos()

    for nRayo in range(0, numRayos):
        for posPt in range(0, cantPuntos):
            posXp = self.arrayPuntos[0, posPt, nRayo]
            posYp = self.arrayPuntos[1, posPt, nRayo]

            punto2DRayo = (posYp, posXp)
            self.pintoPunto(punto2DRayo, colorRayo)
```

Código fuente 7.17: Lenguaje Python archivo elAtrilToImgSAR_02 líneas 382 a 440

```
# función que dibuja los rayos con las posiciones seleccionadas # 5.
```

```
def creoArrayPuntos( self ):

    numRayos = self.numRayos

    posCenter = self.getPosCenter()

    posic2D = (posCenter, posCenter)
    posic2Db = (0, posCenter)
```

```

radio = self.getDistRadial(posic2D , posic2Db)

numAng = numRayos

angAlpha = np.pi/numAng

arrayAng = np.zeros((numAng), dtype = float)

for k in range(0, numAng):
    arrayAng[k] = k*angAlpha + np.pi*0.5

#arrayPend = np.tan(arrayAng)

cantPuntos = radio * 2 + 1

self.arrayPuntos = np.zeros((2, cantPuntos, numRayos))

# — posiciones extremas en los rayos para cada valor de radio —————

extremo = radio

for radioN in range(radio, -1, -1):

    posX = radioN * np.cos(arrayAng)
    posY = radioN * np.sin(arrayAng)

    posXop = - posX
    posYop = - posY

    posX = posX + posCenter
    posY = posY + posCenter

    posXop = posXop + posCenter
    posYop = posYop + posCenter

    posIni = extremo - radioN
    posFin = (cantPuntos-1) - posIni

    self.arrayPuntos[0, posIni, :] = np.round(posX)
    self.arrayPuntos[1, posIni, :] = np.round(posY)

    self.arrayPuntos[0, posFin, :] = np.round(posXop)
    self.arrayPuntos[1, posFin, :] = np.round(posYop)

self.arrayPuntos = np.asarray((self.arrayPuntos), dtype= np.int)

```

```
# función que toma los datos para armar las muestras # 1.
```

```
def dataFromSpoke( self ):

    if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
        showinfo(" Info -Spoke", "Begin-process-to-obtain-Data-from-Spoke...")

    dirActual = os.getcwd()

    myAtril, estado = self.buildSpoke(3)
    if not estado:         return

    arrayPuntos = myAtril.getArrayPuntos()

    subDirRegion = self.subdirRegion.get()

    tipoImg = 'PolSar'

    rutaNomarchi = dirActual + '\\\' + subDirRegion + '\\\'

    miImagPolSar = imgPolSar(tipoImg, rutaNomarchi, rutaNomarchi)

    matrix4D = miImagPolSar.recoverMatrixPolSar()

    cantPuntos = arrayPuntos.shape[1]
    cantRayos = arrayPuntos.shape[2]

    mat4DRayos = np.zeros((cantRayos, cantPuntos, 3, 3)) * 1j

# Para cada rayo
    for nRayo in range(cantRayos):

# Para cada punto de ese rayo
        for nPunto in range(cantPuntos):
            nCol = arrayPuntos[0, nPunto, nRayo]
            nFil = arrayPuntos[1, nPunto, nRayo]

            mat4DRayos[nRayo, nPunto, :, :] = matrix4D[nFil, nCol, :, :]

        self.createSubFileSpoke(mat4DRayos)

    if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
        showinfo(" Info -Spoke", "The-creation-of-Data-from-Spoke-is-complete")

    self.mostrarCreateSeg()
```

Código fuente 7.19: Lenguaje Python archivo imgPolarimetSAR_01 líneas 276 a 290

```
# función que toma los datos para armar las muestras # 2.
```

```

def recoverMatrixPolSarSemi( self ):

    listCanalPolSar = [0, 1, 2, 11, 12, 22]

    datos2DComplex, nameCompleFileDSynt = self.recoverFileCanal(0, 1)

    matrix3D = np.zeros((datos2DComplex.shape[0], datos2DComplex.shape[1], 6)) *1j

    matrix3D[:, :, 0] = datos2DComplex

    for elCanal in range(1, len(listCanalPolSar)):
        datos2DComplex, nameCompleFileDSynt =
            self.recoverFileCanal(listCanalPolSar[elCanal], 1)
        matrix3D[:, :, elCanal] = datos2DComplex
    return matrix3D

```

Código fuente 7.20: Lenguaje Python archivo imgPolarimetSAR_01 líneas 205 a 268

```
# función que toma los datos para armar las muestras # 3.
```

```

def recoverFileCanal( self, canal, moduloVsAngulo, typeRecover=''):
    posic = 0

    tuplaRet = np.zeros((1,1), '')

    if canal == 0:          posic = 0
    if canal == 1:          posic = 1
    if canal == 2:          posic = 2
    if canal == 11:         posic = 3
    if canal == 12:         posic = 4
    if canal == 22:         posic = 5

    prefijoNameSy = self.listCanal[posic]

    nameCompleFileDSynt = prefijoNameSy + self.nameFileDataPolSar

    self.rutaFileDataPolSar = self.dirCanalFile

    rutaFileData = self.rutaFileDataPolSar

    encuentra = 0

    for file in os.listdir(rutaFileData):
        if file.endswith(nameCompleFileDSynt):
            encuentra = 1
            break
    if encuentra:
        datos2DFloat64, vale = self.loadCanalPolSar( posic )
    else:

```

```

showerror("No-pudo-recuperarse-el-archivo-de-canal-" +
self.typeCanal + "-:-" + \
prefijoNameSy + self.nameFileDataPolSar)
return tuplaRet

if moduloVsAngulo == 1:

    if datos2DFloat64.sum() == 0.0:
        showerror("No-pudo-recuperarse-el-archivo-de-canal-" +
self.typeCanal + "-----:-" + \
prefijoNameSy + self.nameFileDataPolSar)
return tuplaRet

    if typeRecover == 'modulo':
        #datos2DFloat64 = abs(datos2DFloat64.reshape(self.dimen2D))
        datos2DFloat64 = abs(datos2DFloat64)

    if abs(datos2DFloat64).sum() == 0.0:
        showerror("No-pudo-recuperarse-el-archivo-de-canal-" +
self.typeCanal + "-----:-" + \
prefijoNameSy + self.nameFileDataPolSar)
return tuplaRet
else:
    datos2DFloat64 = abs(np.angle(datos2DFloat64))

    if datos2DFloat64.sum() == 0.0:
        showerror("No-pudo-recuperarse-el-archivo-de-canal-" +
self.typeCanal + "-----:-" + \
prefijoNameSy + self.nameFileDataPolSar)
return tuplaRet

return datos2DFloat64, nameCompletoFileDSynt

```

Código fuente 7.21: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 6632 a 6781

función que estima las posiciones de borde # 1.

```

def beginDetectPoint( self ):

    posiCanal = np.array([[0,0], [0,1], [0,2], [1,1], [1,2], [2,2]])
    totPuntos = 0

    if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
        showinfo(" Info-Edge-detection", "Begin-process-to-paint-edge-point...")

    #myAtril, estado = self.buildSpoke('G')

    myAtril, estado = self.buildSpoke(3)
    if not estado: return False

    array3DPuntos = myAtril.getArrayPuntos()

```

```

dirfile = self.subdirRegion.get()

# --- tiempos de calculo de nLook y gamma en la subregion ---

timenLook, timeGamma, nLook, gamma = self.computFormSubRegion(posiCanal)

# --- spokes ---

posfijo = self.nameFilSpokePOLSAR.get()
miPolSar = matPolSar()
matAuxispoke, estado = miPolSar.loadCanalPolSar(0, posfijo, dirfile)
if not estado: return False

miPolSar = matPolSar()
mat4DSpoke = np.zeros((matAuxispoke.shape[0], matAuxispoke.shape[1], 3, 3)) * 1j

for elCanal in range(6):
    matAuxispoke, estado = miPolSar.loadCanalPolSar(elCanal, posfijo, dirfile)
    if not estado: return False

    mat4DSpoke[:, :, posiCanal[elCanal,0], posiCanal[elCanal,1]] = matAuxispoke

cantRayos = mat4DSpoke.shape[0]
largoRayo = mat4DSpoke.shape[1]

for nFil in range(cantRayos):
    for nCol in range(largoRayo):
        matAux = mat4DSpoke[nFil, nCol, :, :]
        matAux = miPolSar.builtMat_3_3_fromMat_3_3_Incomplet(matAux)
        mat4DSpoke[nFil, nCol, :, :] = matAux

#         nCol = array3DPuntos[0, nPunto, nRayo]
#         nFil = array3DPuntos[1, nPunto, nRayo]
#
#         mat4DRayos[nRayo, nPunto, :, :] = matrix4D[nFil, nCol, :, :]

#     matPosic2D1 = np.zeros((3, cantRayos), dtype = int)
filArrEdge = self.filArrPosEdge.get()
matPosic2D1 = np.zeros((filArrEdge, cantRayos), dtype = int)
#matPesoMarca = np.zeros(cantRayos, dtype = int)
matPosExtremos = np.zeros((4, cantRayos), dtype = int)

#arrayTiempo = np.zeros(2, dtype = float)

#self.timeAcum.set(0)
#self.timeCte.set(0)

```

```

#self.saveTimeRead(0)

time00 = time.time()

for nRayo in range(cantRayos):
    unRayo = mat4DSpoke[nRayo, :, :, :]
    posicUnRayo = array3DPuntos[:, :, nRayo]
    unRayo, vale = miPolSar.toMatPolStd3D(unRayo)

    if not vale:
        self.cicloContinuo.set(False)
        return False

    edgeIndice1, pesoMarca, acceptable =
self.toSpecificDetection(unRayo, nRayo, nLook, gamma)
    seAcepta = int(acceptable)
    edgeIndice1 = int(edgeIndice1)

    if edgeIndice1 < 0:
        self.cicloContinuo.set(False)
        return False

    posExterna = len(posicUnRayo[0]) - 1

    matPosic2D1[0, nRayo] = posicUnRayo[0, edgeIndice1] #columna
    matPosic2D1[1, nRayo] = posicUnRayo[1, edgeIndice1] #fila
    matPosic2D1[2, nRayo] = pesoMarca
    matPosic2D1[3, nRayo] = seAcepta

    matPosExtremos[0, nRayo] = posicUnRayo[0, 0] #columna
    matPosExtremos[1, nRayo] = posicUnRayo[1, 0] #fila
    matPosExtremos[2, nRayo] = posicUnRayo[0, posExterna] #columna
    matPosExtremos[3, nRayo] = posicUnRayo[1, posExterna] #fila

#self.saveTimeRead(1, self.timeCte.get(), self.timeAcum.get())
#self.saveTimeRead(2)

#self.timeAcum.set(0)
#self.timeCte.set(0)

timeDetect = int((time.time() - time00)*1000000) #dado en microseg

#Si es MD va en columna 1, cualquier otro va en columna 0
timetotal = self.totTimeDetec(timenLook, timeGamma, timeDetect)

metod = self.nameTypeMetSelec.get()

self.saveTimeRead02(metod, timetotal, largoRayo, cantRayos)

```

```

if not self.saveMatrixEdge(matPosic2D1):
    return False

if not self.saveMatrixExtremos(matPosExtremos):
    return False

dirActual = os.getcwd()

image_name = dirActual + '\\SubRegion\\newImage.bmp'

im = plt.imread(image_name)
plt.imshow(im)

plt.plot(matPosic2D1[0,:], matPosic2D1[1,:], '.')
plt.show()

totPuntos = unRayo.shape[2]

#myAtril, estado = self.buildSpokeAndMarks(matPosic2D1, 'G', 'R')
myAtril, estado = self.buildSpokeAndMarks(matPosic2D1, totPuntos, 3, -4)

if self.chkPixel.get():
    self.computoDeError(matPosic2D1, matPosExtremos, cantRayos)

if (not self.isTestError.get() and not self.noMessage.get()):
    showinfo(" Info -Edge- detection",
            "The -Edge- detection -of -SAR- image -is -complete")
self.mostrarCreateSeg()

return True

```

Código fuente 7.22: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7299 a 7311

función que estima las posiciones de borde # 2.

```

def toSpecificDetection( self , matPol, nRayo, nLook, gamma):

lisDis = self.cargaListaDist()
itLisDis = self.nameTypeDistSelec.get()

if itLisDis == lisDis[0]:
    return self.metodosEnWishart(matPol, nRayo, nLook, gamma)

if itLisDis == lisDis[1]:
    return self.metodosEnGo(matPol, nRayo, nLook, gamma)

return -1, 0, False

```

Código fuente 7.23: Lenguaje Python archivo interfazSAR_12 líneas 7317 a 7344

función que estima las posiciones de borde # 3.

```
def metodosEnWishart(self, matPol, nRayo, nLook, gamma):
    if self.condNumLooksAB.get() == 0:          # La == Lb
        return self.metWish_And_LaEqLb(matPol, nRayo, nLook, gamma)

    return -1, 0, False

# dsitribucion wishart & La == Lb
def metWish_And_LaEqLb(self, matPol, nRayo, nLook, gamma):

    lisMet = self.cargaListaMet()
    itLisMet = self.nameTypeMetSelec.get()

    miMetodUsedWS = metodUsedWs(self.tipModulMatrix.get(),
    self.condEcuationAB.get(), nRayo, lisMet, itLisMet, nLook, gamma)
    miMetodUsedWS.setUmbMaMin(self.limitPrcDistance.get())
    miMetodUsedWS.setUmbChi(self.limitChi.get())

    miMetodUsedWS.actionDetect(matPol)

    posic = miMetodUsedWS.getPosicDetect()
    acceptable = miMetodUsedWS.getAcceptable()

    pesoMarca = -4
    if self.typeColour.get() == 1:
        pesoMarca = miMetodUsedWS.getPesoMarca()

    return posic, pesoMarca, acceptable
```

7.5. Conclusiones

- La versatilidad del sistema permite la comparación visual de resultados cuando se usan los diferentes modelos de distancia sobre un mismo sector.
- La representación en color de las muestras sobre el sector seleccionado permite evaluar visual y cualitativamente la variación de los datos de cada muestra.
- La representación del sector seleccionado como una imagen en escala de grises permite apreciar la distribución de los datos de cada canal de polarización.
- Las imágenes de salida que proporciona la interfaz como resultado del procesamiento de las imágenes *PolSAR* tomadas del banco de imágenes, permiten un rápido análisis visual de los resultados.

Capítulo 8

Modelos optimizados para estimar posiciones de borde en imágenes *PolSAR*

En este capítulo se proponen nuevos modelos [106, 119] que tienen por objetivo delinear las regiones de la imagen *PolSAR*. Cada uno de estos nuevos modelos de distancia que se obtienen a partir de los modelos propuestos operan en menos tiempo de procesamiento que el correspondiente modelo propuesto.

8.1. Métricas generalizadas

En estadística, teoría de la probabilidad y teoría de la información, una distancia estadística cuantifica la distancia entre dos objetos estadísticos, que pueden ser dos variables aleatorias o dos distribuciones de probabilidad. Las distancias estadísticas se pueden clasificar en una familia de métricas en función del conjunto de propiedades que satisfacen. En [120] páginas 274 a 288, se encuentra una descripción detallada de este tipo de clasificación.

8.1.1. Distancia semimétrica

Sea U un conjunto finito o infinito de elementos. Una función $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ se llama distancia semimétrica si $\forall x, y \in U$ se cumple:

1. $d(x, y) \geq 0$ (no negatividad)

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (identidad de indiscernibles)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)

8.1.2. Distancia métrica

Si una función cumple las anteriores propiedades y además satisface la siguiente desigualdad triangular, esa función se llama distancia métrica.

$$d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z), \forall z \in U \text{ (subaditividad o desigualdad triangular)}$$

8.1.3. Distancia ultramétrica

Se llama ultramétrica a toda métrica que verifique adicionalmente la propiedad $d(x, z) \geq \text{Max}(d(x, y), d(y, z))$

8.2. Distancias como indicadores de disimilitud

La disimilitud entre dos individuos u objetos (i, j) se puede interpretar como una magnitud, indicada por $d(i, j)$, que representa el grado de semejanza entre esos dos individuos, en relación a un cierto número de características cuantitativa y/o cualitativas. El valor de $d(i, j)$ es siempre un valor no negativo, y cuanto mayor sea este valor mayor será la diferencia o disimilitud entre esos individuos.

8.2.1. Distancias en distribuciones de probabilidad

Las distancias estocásticas que se exponen en esta Tesis son modelos matemáticos que permiten comparar dos distribuciones de probabilidad. Es posible obtener expresiones matemáticas de distancias estocásticas a partir de las divergencias de Kullback Leibler, Bhattacharyya, Hellinger y Réngy [114]. Cabe señalar que todas las distancias expuestas en esta Tesis responden a la misma métrica.

8.3. Selección del modelo estadístico

La distribución Wishart Compleja es un modelo destacado en la literatura [89, 101, 121, 122] y el que más se utiliza para modelar el retorno en imágenes *PolSAR*. Por lo mismo, el algoritmo desarrollado en este trabajo para estimar la posición de los puntos de borde en imágenes *PolSAR* usa ese modelo de distribución de datos.

8.4. Función de verosimilitud

En esta sección se define la función de verosimilitud para los conjuntos A_j y B_j , siendo esta función uno de los modelos que se analizan en las secciones posteriores.

Una vez obtenidos todos los posibles conjuntos A_j y B_j con el método expuesto en 6.3.2, se usa cada par (A_j, B_j) en la función de verosimilitud:

$$p(j) = \prod_{k=1}^j f_z(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_{A_j}, L_{A_j}) \prod_{k=j+1}^N f_z(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_{B_j}, L_{B_j}) \quad (8.1)$$

Donde, \mathbf{Z}'_k representa los posibles resultados de \mathbf{Z} ; $L_{A_j} = L_{B_j} = L = \text{cte.}$ de acuerdo con lo expresado en 6.3.5; Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son los valores estimados de las matrices de covarianzas de los conjuntos A_j y B_j respectivamente, que se obtienen de \mathbf{Z}'_k y que satisfacen la condiciones descritas en 6.3.5.

8.4.1. Estimación de la posición del punto de borde

En 6.3.3 se hizo una exposición detallada de cómo opera el *estimador* de *PPB*. A este *estimador*, por sus características de aquí en más se lo denomina indistintamente *estimador* de *PPB* o *estimador* de *máxima*. Siendo $\ell(j)$ el logaritmo de la función de verosimilitud, el *estimador* de *PPB* para $\ell(j)$ se expresa como:

$$\hat{J}_{ML} = \arg \max_j \ell(j) \quad (8.2)$$

Que devuelve el valor de j de la dupla $j, \ell(j)$ correspondiente al máximo valor de $\ell(j)$.

8.5. Análisis funcional

En esta sección, se hace una interpretación del conjunto de datos que usa el algoritmo del *estimador* de *PPB* a los efectos de demostrar la validez del método propuesto para obtener nuevas expresiones que pueden ser usadas para estimar las *PPB*.

8.5.1. Optimizador de expresiones *OFJ*

Para validar el método propuesto, se exponen propiedades aplicables a funciones de variable discreta.

Cuando se aplican esas propiedades en forma conveniente a la función de variable discreta que es usada para estimar las posiciones de borde con el *estimador de máxima*, se obtiene una nueva función que puede ser usada con el mismo propósito.

Con este proceso denominado “Optimizador de $f[j]$, (OFJ), se obtiene la función $f^e[j]$ a partir de la función $f[j]$

8.5.1.1. Señales discretas

Teniendo en cuenta que las señales discretas o señales para una variable discreta pueden representarse matemáticamente como funciones de esa variable discreta [123], la función $\ell(j)$ con $j \in N$ se puede interpretar como tal. Para dos señales discretas $f[j]$ y $f^e[j]$ con $f[j] = a + bf^e[j]$ resulta ser b un factor constante que escala la señal $f^e[j]$ y a un término constante que desplaza a $f^e[j]$. Vale decir que, $f[j]$ es la señal $f^e[j]$ escalada en b y desplazada en a . Ambas señales se muestran en la Figura (8.1)

Las señales $f[j]$ y $f^e[j]$ alcanzan un valor máximo en la misma posición j , posición

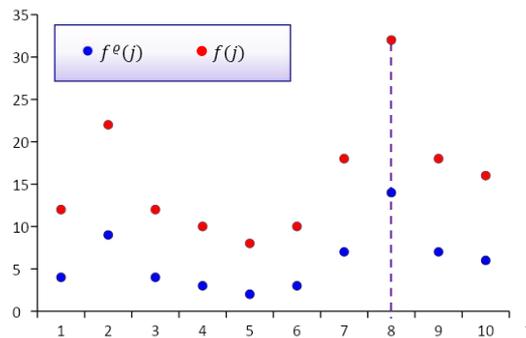


Figura 8.1: Gráfico de las señales discretas $f[j]$ y $f^e[j]$ con valor máximo en $j = 8$.

en la que $j = P$, en la Figura (8.1) esta posición de j es tocada por una línea vertical punteada.

Interesa hallar el valor j donde la función presenta un máximo y no el valor máximo de $f[j]$. Dado que operar con $f[j]$ requiere mayor tiempo de procesamiento que operar con $f^e[j]$ y ambas funciones tienen un máximo en el mismo valor de $j = P$, es preferible operar con $f^e[j]$ para ese propósito, pues consume un menor tiempo de procesamiento.

8.5.1.2. Expresión optimizada de $\ell(j)$

Los conjuntos A_j y B_j pertenecen a una misma imagen. Por esa razón, de acuerdo con lo expresado en 6.3.5, se puede aceptar el mismo número equivalente de looks para ambos conjuntos. Es decir $L_{A_j} = L_{B_j} = L = \text{cte.}$ para todo valor de j comprendido

entre j_{min} y j_{max} . En un paso intermedio de un proceso matemático detallado en el apéndice B, partiendo de la ec. (8.1) se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned} \ell(j) = & L(-j \ln |\Sigma_{A_j}| - (N-j) \ln |\Sigma_{B_j}|) - 3NL + \\ & (L-m) \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) + N(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Completando los pasos del proceso matemático detallado en el apéndice B, la ec. (8.1) queda reducida a la siguiente expresión:

$$\ell^e(j) = -j \ln |\Sigma_{A_j}| - (N-j) \ln |\Sigma_{B_j}| \quad (8.4)$$

La expresión que se muestra en la ec. (8.3) es similar a la que puede encontrarse en algunos trabajos de investigación que utilizan distribución Wishart y Logaritmo de Verosimilitud. Otra expresión a la que se podría haber arribado en un paso intermedio, es la que se toma de [11]:

$$\begin{aligned} \ell(j) = & N[-mL(1 - \ln L) - \ln \Gamma_m(L)] - \\ & L[j \ln |\Sigma_{A_j}| + (N-j) \ln |\Sigma_{B_j}|] \end{aligned} \quad (8.5)$$

En el apéndice C se demuestra que derivar a partir de la ec. (8.3) o a partir de la ec. (8.5) no modifica la expresión final, que es la ec. (8.4).

Es preferible operar con $\ell^e[j]$ de la ec. (8.4) en lugar de operar con $\ell(j)$, pues si se opera con $\ell(j)$ se consume un mayor tiempo de procesamiento.

El estimador de la posición del punto de borde para esta nueva expresión matemática es:

$$\hat{J}_{ML} = \arg \max_j \ell^e(j) \quad (8.6)$$

8.5.1.3. Expresiones optimizadas de otros modelos

El proceso de optimización visto en 8.5.1.1 puede aplicarse sobre diferentes modelos matemáticos. Se exponen algunos ejemplos.

1.- Distancias estocásticas

De [114] se toman expresiones analíticas denominadas distancias, que son funciones de los parámetros $\theta_{A_j} = (L_{A_j}, \Sigma_{A_j})$ y $\theta_{B_j} = (L_{B_j}, \Sigma_{B_j})$, con $A_j = A(j)$, $B_j = B(j)$ y $L_{A_j} = L_{B_j} = L = \text{cte}$.

- **Distancia Kullback-Leibler**

$$d_{KL}(\theta_{A_j}, \theta_{B_j}) = L \left[\frac{\text{tr}(\Sigma_{A_j}^{-1} \Sigma_{B_j} + \Sigma_{B_j}^{-1} \Sigma_{A_j})}{2} - m \right] \quad (8.7)$$

Operando se obtiene la nueva expresión para la estimación de la posición de los puntos de borde.

$$d_{KL}^g(j) = \text{tr}(\Sigma_{A_j}^{-1} \Sigma_{B_j} + \Sigma_{B_j}^{-1} \Sigma_{A_j}) \quad (8.8)$$

- **Distancia Bhattacharyya**

$$d_B(\theta_{A_j}, \theta_{B_j}) = L \left[\frac{(\log |\Sigma_{A_j}| + \log |\Sigma_{B_j}|)}{2} - \log \left| \left(\frac{\Sigma_{A_j}^{-1} + \Sigma_{B_j}^{-1}}{2} \right)^{-1} \right| \right] \quad (8.9)$$

Operando se obtiene la nueva expresión para la estimación de la posición de los puntos de borde.

$$d_B^g(j) = |\Sigma_{A_j}^{-1} + \Sigma_{B_j}^{-1}| \sqrt{|\Sigma_{A_j}| |\Sigma_{B_j}|} \quad (8.10)$$

8.6. Resultados

Se expone el método de Monte Carlo usado para el procesamiento de los datos de imágenes.

Se muestran imágenes con los resultados obtenidos la estimar las *PPB*.

En la tabla 8.1 se muestra la relación de tiempos de procesamiento usando el modelo optimizado y el modelo de base propuesto para estimar las *PPB*.

8.6.1. Monte Carlo

En este trabajo mediante el método de Monte Carlo se estima la posición de los puntos de borde sobre imágenes PolSAR simuladas.

8.6.2. Uso de interfaz

En la Figura 8.2 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), puede observarse el uso de la interfaz que permite seleccionar un sector de la imagen para el posterior proceso de análisis y estimación de la posición de los puntos de borde. El procesamiento posterior se hace mediante las opciones que ofrece la interfaz.

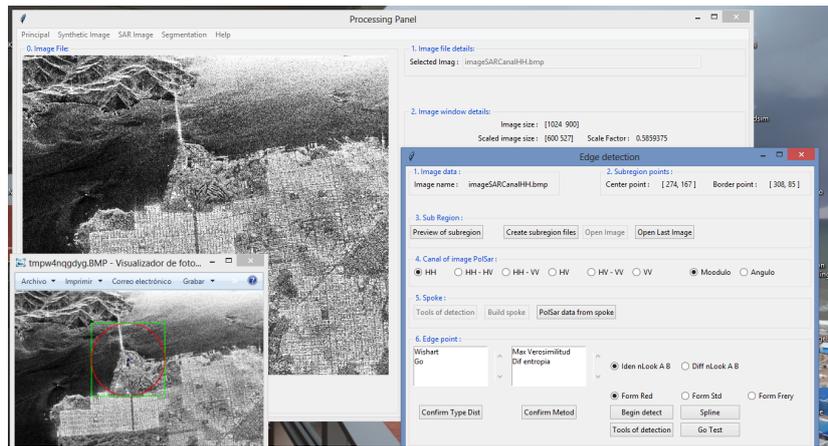


Figura 8.2: Representación de Imagen *Pol*SAR. Bahía de San Francisco, con la IdeU desarrollada en Python.

8.6.3. Imagen simulada

Se crea una imagen simulada de 1200×1200 píxeles conformada por dos regiones caracterizadas por las matrices de covarianza expresadas en (6.1) y (6.2); y se selecciona un sector de la misma de tamaño 421×421 píxeles.

En la Figura 8.3 se muestra en una imagen en escala de grises, 4 marcas de color blanco que representan a las 4 posiciones de borde estimadas. Esta imagen de 421×421 píxeles corresponde al Canal HH de la imagen sintética. Las posiciones estimadas se obtuvieron aplicando las ecuaciones (8.3), (8.5) y (8.4). No se aprecian diferencias en las posiciones de borde estimadas con las ecuaciones usadas.

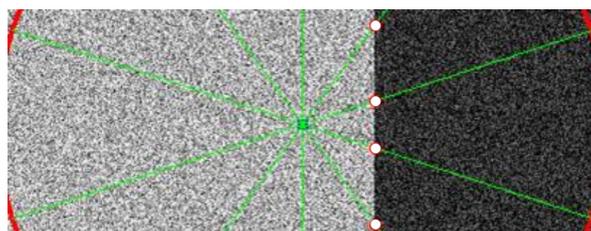


Figura 8.3: Puntos de borde en una imagen sintética. Canal HH.

8.7. Imagen *Pol*SAR

En las Figura 8.4 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se muestra el sector seleccionado sobre una imagen *Pol*SAR.

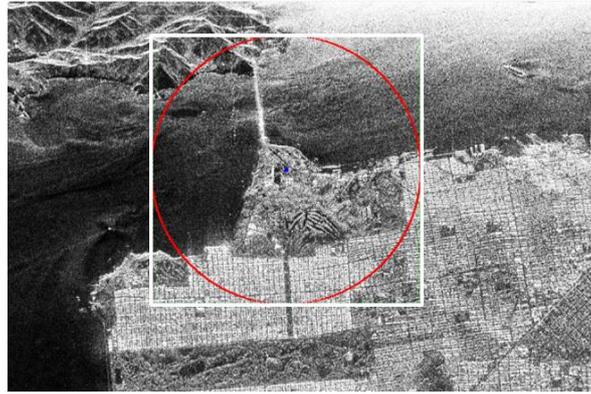


Figura 8.4: Sector seleccionado sobre una imagen *PolSAR*. Bahía de San Francisco

En las Figura 8.5 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.) se ilustra en color blanco las posiciones estimadas de 11 puntos de borde.

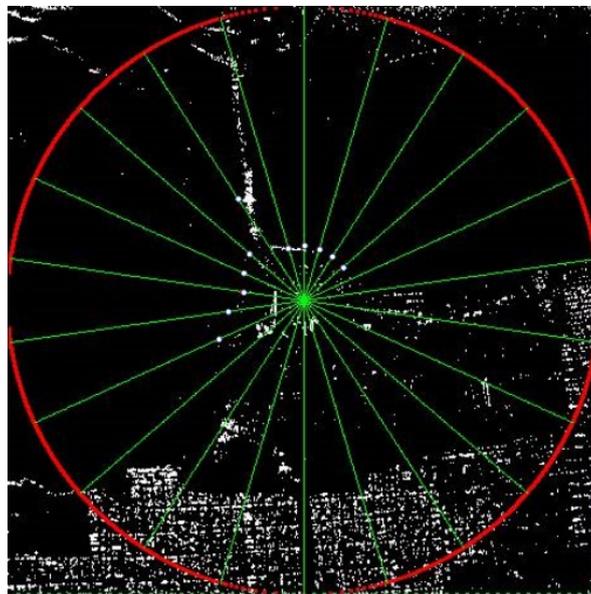


Figura 8.5: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 363×363 píxeles. Canal HH.

En la Figura 8.6 se resaltan las posiciones estimadas de los 11 puntos de borde para una mejor apreciación. Las posiciones de borde estimadas se obtuvieron aplicando a las

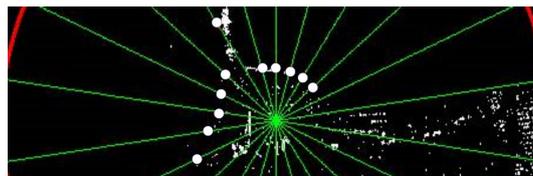


Figura 8.6: Puntos de borde en una imagen *PolSAR*. Canal HH.

imágenes las ecuaciones (8.3), (8.4) y (8.5). No se aprecian diferencias en las posiciones de borde estimadas con las ecuaciones usadas.

En la Figura 8.7 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se ilustra en color blanco las posiciones estimadas de puntos de borde en otro sector de la misma imagen

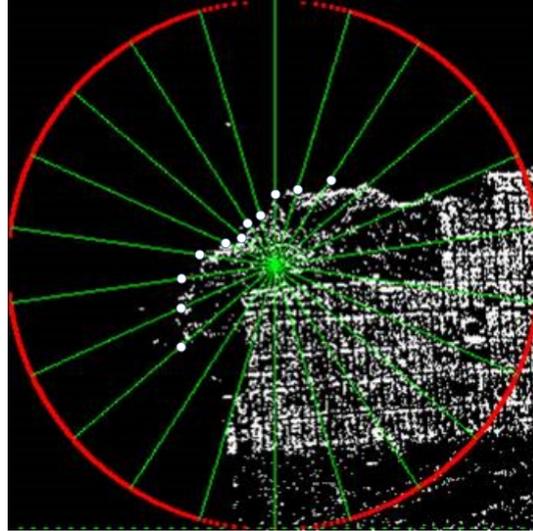


Figura 8.7: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 341×341 píxeles. Canal HH-HV.

En la Figura 8.8 se ilustra el correspondiente delineado del borde a partir de los puntos de borde de la Figura 8.7. Se compararon las posiciones estimadas aplicando a la imagen las ecuaciones (8.3), (8.4) y (8.5). No se aprecian diferencias en las posiciones de borde estimadas con las ecuaciones usadas.

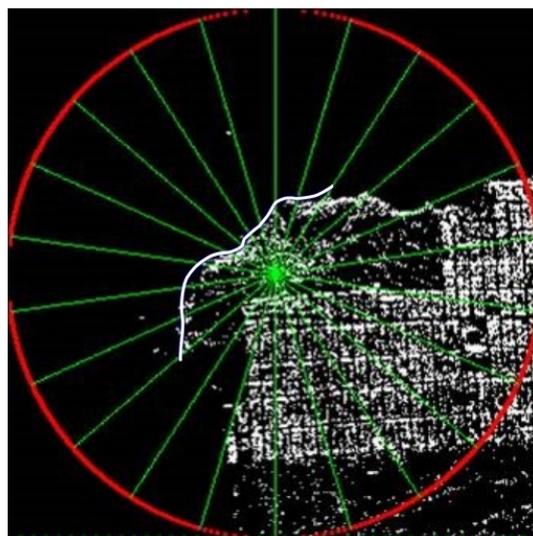


Figura 8.8: Delineado del borde sobre los 11 puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 341×341 píxeles. Canal HH-HV.

8.7.1. Tiempos medidos

En la Tabla 8.1 se exponen los tiempos de procesamiento, en términos de relación del tiempo de procesamiento, comparando de ese modo el tiempo que arroja el uso de la la ec. (8.3) que corresponde al modelo de base propuesto que se ha tomado como referencia y el tiempo que arroja el uso de la ec. (8.4) que corresponde al modelo optimizado del modelo base, desarrollado con el método propuesto en esta Tesis.

Las ecuaciones (8.3) y (8.5) derivan del uso de la Función de Verosimilitud y existe una amplia literatura de trabajos de investigación que utilizan “Distribución Wishart y Función de Verosimilitud” para la estimación de posiciones de puntos de borde, pudiendo citar [124–127]. Esto justifica que haya sido seleccionada la ec (8.3) como modelo base para la evaluación de los tiempos de procesamiento al estimar las *PPB*.

Detalle de los datos en la Tabla 8.1

- Sector seleccionado: Corresponde a la dimensión de la imagen seguido del número de puntos de borde.
- $tred/tstd$: tiempo de cálculo con la ec. (8.4)/tiempo de cálculo con la ec. (8.3)

Item	Sector seleccionado	$tred/tstd$
1	363 × 363 píxeles, 11 puntos, Figura 8.5	0,7904
2	341 × 341 píxeles, 11 puntos, Figura 8.7	0,7757

Tabla 8.1: Relación de los tiempos de procesamiento

8.8. Conclusiones

- Las nuevas expresiones optimizadas son el resultado de trasladar un concepto que surge del análisis de funciones de variable discreta.
- Tal como se expresa en 8.5.1.2, operando a partir de la ec. (8.3) o a partir de la ec. (8.5) es posible arribar al mismo resultado final, es decir, la ec. (8.4). Este resultado final que se obtiene a partir de las ecuaciones mencionadas refuerza la validez del método de optimización.
- Es importante destacar que en las nuevas expresiones que resultan del proceso de optimización, el parámetro L no está presente. Dado que en la práctica se

utiliza L_e en reemplazo de L y la estimación de ese parámetro (\widehat{L}_e) demanda un apreciable tiempo de procesamiento. Estas nuevas expresiones permiten estimar las posiciones de borde en un menor tiempo de procesamiento.

- Prescindir de \widehat{L}_e como parámetro interviniente en procesos de cálculo no es un tema menor. En 6.3.6 se mencionan trabajos de investigación tendientes a encontrar un mejor valor estimado del parámetro L_e y el tiempo de procesamiento que representa el uso de esos modelos matemáticos desarrollados para estimar L_e .
- En las imágenes expuestas (reales y simuladas), en las que determinados píxeles han sido destacados con un color o en un nivel de gris apropiado (para indicar que son píxeles de borde), no se aprecian diferencias en las posiciones de esos píxeles cuando se comparan las imágenes que se obtienen usando los modelos base propuestos en esta Tesis y los correspondientes modelos optimizados. Esto necesariamente es así, porque las posiciones obtenidas son las mismas, esa es justamente la fortaleza del método propuesto en la Tesis. Método usado para optimizar algunas expresiones matemáticas de uso frecuente en la literatura y apropiadas para ser usadas como modelos base en los ensayos que se hacen en esta Tesis.
- La nueva expresión o modelo optimizado (que resulta de operar sobre el modelo base) no pierde precisión en la estimación de cada PPB pues sólo se eliminan aquellos términos y factores de la expresión propuesta (modelo base) que carecen de utilidad a los efectos de estimar las posiciones de borde, pues son todos ellos elementos presentes en esa expresión que consumen tiempo de procesamiento en operaciones y cálculos que no modifican el resultado final si se los omite, entendiéndose por resultado final la PPB estimada. Por esa misma razón es que se obtienen con los modelos base las mismas PPB que se obtienen con los correspondientes modelos optimizados.
- A los efectos de otorgar las mejores condiciones al modelo base, para que procese los datos en el menor tiempo posible, cuando estima las PPB sobre un sector seleccionado, se usan sólo los datos del sector para estimar el L_e , tal como lo propone el modelo de distribución Wishart relajada.
- Lo mencionado en el ítem anterior, es una decisión que se toma sabiendo que no es importante la cantidad de datos que se usen para estimar el L_e a ser usado,

pues el valor de ese parámetro no influye en el valor de las posiciones de borde estimadas. Arbitrariamente y por dar un ejemplo, podría decidirse que $\widehat{L}_e = \sqrt{\pi}$, ese valor de \widehat{L}_e no cambia las *PPB* que se obtienen como resultado final.

- Se optó por el método de los momentos propuesto en [110] porque consume menos tiempo de procesamiento en comparación con otros métodos, sin importar el sesgo o precisión del valor estimado por ese método, dado que el valor obtenido de \widehat{L}_e es irrelevante.
- A diferencia de trabajos donde se analizan los tiempos de procesamiento y se muestran los valores absolutos de esos tiempos, que hace necesario dar los datos del modelo de microprocesador y puntualmente su velocidad de procesamiento para ponderar los resultados (valores de los tiempos expuestos en esos trabajos), en este trabajo los valores que aparecen en la tabla 8.1 son relaciones de tiempos de procesamiento. Eso evita tener que estar acompañando los datos de la tabla con los datos del microprocesador.
- La relación de tiempos ofrece en sí misma una idea clara y directa del beneficio que representa usar estas nuevas expresiones en reemplazo de las respectivas expresiones de base propuestas en este trabajo. Es decir, muestra cuanto se reduce el tiempo de procesamiento con el uso de las nuevas expresiones o modelos optimizados.

Capítulo 9

Módulos de detección MD en imágenes $PolSAR$

En este capítulo se proponen dos nuevos modelos [128] que permiten un correcto delineado del borde de las regiones en imágenes $PolSAR$. Este delineado puede ser usado en un proceso de segmentación de la imagen. En imágenes digitales, en general, el proceso de segmentación es posible porque existe un atributo común y similar en todos los elementos, puntos o píxeles que pertenecen a un objeto seleccionado de la imagen, atributo a su vez distinguible y diferenciable de todos los elementos, puntos o píxeles que no pertenecen al objeto seleccionado de la imagen. Es decir que está presente el concepto de similitud y diferencia o distancia. Una posición de frontera es aquella en que si miramos a ambos lados de esa posición la diferencia es máxima. Estos conceptos subyacen en el procesamiento de imágenes SAR cuando se usa un *estimador de máxima* sobre funciones tales como, función de verosimilitud o distancias estocásticas. En las imágenes $PolSAR$, por sus características, no es factible que el atributo sea el color o el nivel de gris y sí es razonable considerar como atributo a la matriz de covarianzas. Consecuentemente se puede suponer que es posible estimar posiciones de borde haciendo uso exclusivo de esas matrices que caracterizan a las regiones.

9.1. Segmentación

A los efectos de establecer el contorno de una región se usa el método usado en el capítulo 8.

9.1.1. Delineado del contorno en la imagen

Al igual que en el capítulo 8, en este trabajo el contorno se delinea a partir de una cantidad discreta de “n” puntos, esto supone un menor tiempo de procesamiento que si se trabaja con todos los puntos que pertenecen a la curva y que son todas las posibles posiciones de píxeles de la imagen que definen la curva.

9.1.2. Selección de modelo estadístico

Del mismo modo que en el capítulo 8, se hace uso de la distribución Wishart Compleja, modelo destacado en la literatura [89, 101, 121, 122] y el más utilizado para modelar el retorno en imágenes *PolSAR*.

9.2. Muestra de datos

Tal como se describe en 6.3.1, la segmentación a partir del delineado de los bordes de las regiones necesita de muestras de datos de la imagen *PolSAR* que permitan estimar las posiciones de los puntos de borde que se usan para dicho delineado. A tal efecto, se realizan los mismos pasos detallados en 6.3.1.

9.2.1. Partición de la muestra

Del mismo modo que en 6.3.2, una vez creado el vector con los datos de la muestra de acuerdo a lo expresado en 6.3.1, se elige una posición j sobre el vector de N elementos. Esta posición subdivide a los datos que contiene el vector en los conjuntos de datos A_j y B_j . Se repite esta elección de j para todas las posiciones comprendidos entre j_{min} y j_{max} , de modo que quedan definidos pares de conjuntos A_j y B_j por cada posición de j , tal que $0 < j_{min} \leq j \leq j_{max} < N$.

9.3. Análisis funcional

En esta sección se analizan los valores de los determinantes de las matrices de covarianzas correspondientes a las muestras A_j y B_j para cada valor de j , a los efectos de encontrar una expresión que devuelva un valor máximo o un valor mínimo en la posición estimada a priori, como posición de punto de borde.

9.3.1. Matrices de covarianzas y número de vistas o looks

Si bien se puede hacer una representación en escala de grises de la imagen *PolSAR*, cada pixel de esa imagen está asociado a la correspondiente matriz de datos \mathbf{Z}' de la imagen *PolSAR* en esa posición. Es por ello que se mantiene vigente lo expresado en 6.3.5 que surge de considerar el modo en que se agrupan los datos en los conjuntos A_j y B_j para cada valor de j comprendido entre j_{min} y j_{max} .

Las matrices \mathbf{Z}' de las imágenes PolSAR que se exponen en esta Tesis son matrices hermtianas definidas positivas $\Rightarrow (\exists \mathbf{Z}'^{-1}, |\mathbf{Z}'| \in \mathbb{R}^+)$. Siendo las matrices de covarianza Σ promedio de las matrices \mathbf{Z}' , las siguientes expresiones son válidas y equivalentes: $\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}, \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}$.

En esta sección, se establecen nuevas condiciones a los efectos de simplificar el análisis:

1. Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son las matrices de covarianzas de las muestras A_j y B_j respectivamente, para cada posición de j
2. Σ_I es la matriz de covarianzas de R_I y es igual a la matriz de covarianzas de todo subconjunto de R_I .
3. Σ_{II} es la matriz de covarianzas de R_{II} y es igual a la matriz de covarianzas de todo subconjunto de R_{II} .
4. Σ_T es la matriz de covarianzas de toda la muestra, es decir Σ_T de $A_j \cup B_j$.
5. $\Sigma_{II} = q \Sigma_I$ con $q \in \mathfrak{R}, q > 0 \wedge q \neq 1$
6. $j_{min} = \lfloor 0.23N \rfloor$ y $j_{max} = \lfloor 0.77N \rfloor$ (en 6.3.2 están las referencias de estos límites de j)
7. I es la matriz identidad

Si $\Sigma_{II} = a \Sigma_I$ y $a = \text{cte.}$, resulta:

$$\left| a \frac{\Sigma_{II}}{\Sigma_I} \right| = |(aq)I| = (aq)^3 \quad (9.1)$$

9.3.2. Conjunto de datos en una región

Si se selecciona un conjunto de datos Ω comprendido entre las posiciones n_1 y n_2 , tal como se muestra en la Figura 9.1, a partir de las condiciones establecidas se cumplen las siguientes reglas.

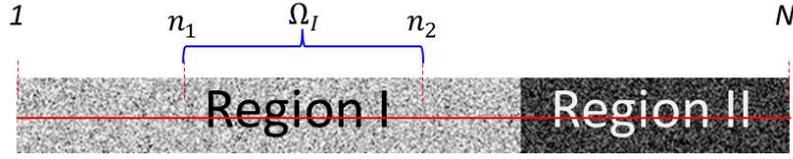


Figura 9.1: Ejemplo con un conjunto de datos $\Omega = [\mathbf{Z}'_{n_1}, \dots, \mathbf{Z}'_{n_2}]$ de la región R_I

$\forall \Omega_I \subset R_I$ resulta:

$$\Sigma_{\Omega_I} = \frac{\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \mathbf{Z}'_k}{n_2 - n_1} = \Sigma_I \quad \text{con } \mathbf{Z}'_k \in \Omega_I \quad (9.2)$$

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \mathbf{Z}'_k = \Sigma_I(n_2 - n_1) \quad (9.3)$$

$\forall \Omega_{II} \subset R_{II}$ resulta:

$$\Sigma_{\Omega_{II}} = \frac{\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \mathbf{Z}'_k}{n_2 - n_1} = \Sigma_{II} \quad \text{con } \mathbf{Z}'_k \in \Omega_{II} \quad (9.4)$$

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \mathbf{Z}'_k = \Sigma_{II}(n_2 - n_1) \quad (9.5)$$

9.3.3. Expresiones de Σ_{A_j} y Σ_{B_j} correspondientes a las muestras

A_j y B_j con $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$

Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son las matrices de covarianza de los conjuntos de datos A_j y B_j que se obtienen con cada valor de j , tal que $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$.

Mediante un proceso de manipulación matemática a partir de las ecuaciones (9.3) y (9.5) se obtienen las siguientes expresiones:

Si $j < P$, Figura 9.2:

$$\Sigma_{A_j} = \Sigma_I \quad (9.6)$$

$$\Sigma_{B_j} = \frac{\Sigma_I(P - j) + \Sigma_{II}(N - P)}{N - j} \quad (9.7)$$

$$\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} = \frac{(P - j) + q(N - P)}{N - j} \quad (9.8)$$

De las las ec. (9.6) y ec. (9.7) se deduce que Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son matrices hermitianas definidas positivas en $j < P$.

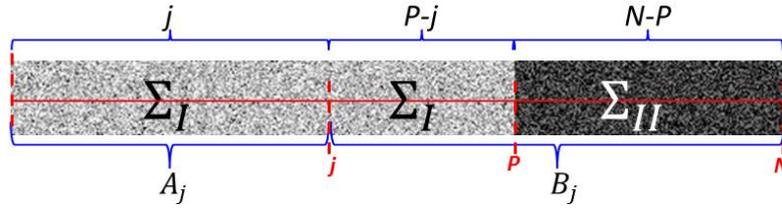


Figura 9.2: A_j y B_j con $j < P$

Si $j > P$, Figura 9.3:

$$\Sigma_{A_j} = \frac{\Sigma_I P + \Sigma_{II}(j - P)}{j} \quad (9.9)$$

$$\Sigma_{B_j} = \Sigma_{II} \quad (9.10)$$

$$\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} = \frac{P + q(j - P)}{qj} \quad (9.11)$$

De las las ec. (9.9) y ec. (9.10) se deduce que Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son matrices hermitianas definidas positivas en $j > P$.

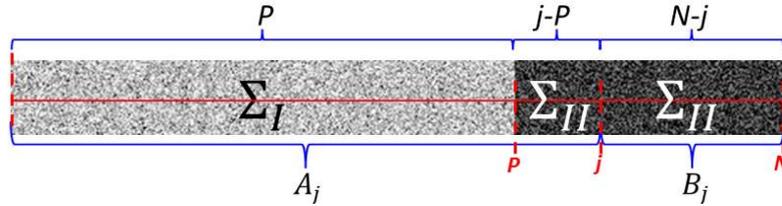


Figura 9.3: A_j y B_j con $j > P$

9.3.4. Relaciones entre $|\Sigma_{A_j}|$ y $|\Sigma_{B_j}|$ correspondientes a las muestras

A_j y B_j con $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$

A partir de las ecuaciones (9.8), (9.11) y (9.1) se obtienen las siguientes expresiones.

Si $j < P$:

$$|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}| = \left[\frac{(P - j) + q(N - P)}{N - j} \right]^3 \quad (9.12)$$

Si $j > P$:

$$|\Sigma_{A_j}|/|\Sigma_{B_j}| = \left[\frac{P + q(j - P)}{qj} \right]^3 \quad (9.13)$$

En la Figura 9.4 se representan $|\Sigma_{A_j}|$ y $|\Sigma_{B_j}|$ como funciones de variable j . Los gráficos de la Figura son un ejemplo cuando $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ y $q = 1.4$. En la Figura 9.4(a) se representa a $|\Sigma_{A_j}|$ y en la Figura 9.4(b) se representa a $|\Sigma_{B_j}|$.

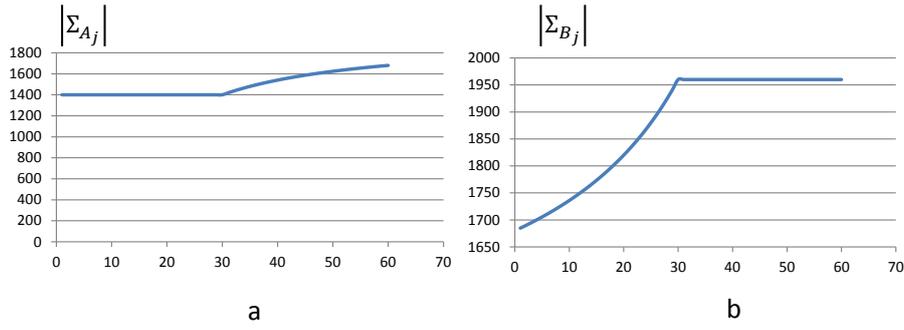


Figura 9.4: $|\Sigma_I| = 1400 < |\Sigma_{II}| = 1960$, $P = 30$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 60$

9.3.4.1. Máximos y mínimos en los cocientes de los determinantes de matrices de covarianzas

1. Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ el cociente $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ tiene un valor máximo en la posición $j = P$, Figura 9.5(a)
2. Con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$ el cociente $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ tiene un valor máximo en la posición $j = P$, Figura 9.6(b).

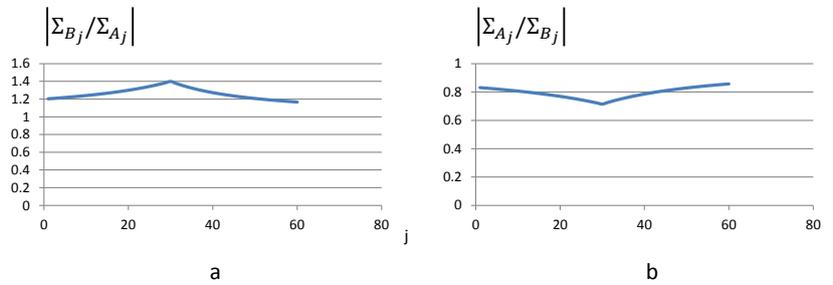


Figura 9.5: $|\Sigma_I| = 1400 < |\Sigma_{II}| = 1960$, $P = 30$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 60$

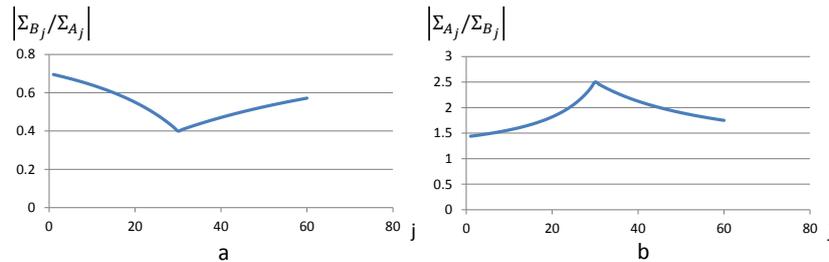


Figura 9.6: $|\Sigma_I| = 1400 > |\Sigma_{II}| = 560$, $P = 30$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 60$

9.3.5. Análisis del cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$

Siendo que para la existencia de dos regiones caracterizadas por sus respectivas matrices de covarianzas Σ_I y Σ_{II} , necesariamente debe ser $|\Sigma_I| \neq |\Sigma_{II}|$, en este análisis se opta por la condición $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$.

9.3.5.1. Análisis para $j < P$

A partir de las ecuaciones (9.7) y (9.6) se analizan los determinantes de Σ_{B_j} y Σ_{A_j} como funciones de variable discreta j .

La ec. (9.7) se puede expresar como (detalle en apéndice D):

$$\Sigma_{B_j} = \Sigma_I \left(1 + \frac{(q-1)(N-P)}{N-j} \right) = \Sigma_I \left(1 + \frac{k_0}{N-j} \right) \quad (9.14)$$

Donde $k_0 = (q-1)(N-P) = \text{cte}$.

Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ resulta ser $q > 1$; además $N > P$ es una condición para que exista más de una región. Por lo tanto $(q-1)(N-P) > 0$, es decir $k_0 > 0$.

Se define la función $f_{qN}(j) = 1 + \frac{k_0}{N-j}$. De la ec. (9.14) se concluye que la matriz Σ_{B_j} es la matriz Σ_I escalada por la función $f_{qN}(j) = 1 + \frac{k_0}{N-j}$, función que aumenta su valor cuando aumenta el valor de j .

Por lo expuesto, si se cumple que $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ el determinante de Σ_{B_j} es una función estrictamente creciente en el intervalo $j = [1, \dots, P]$. En la medida en que j se aproxima a P , $|\Sigma_{B_j}|$ se aproxima a $|\Sigma_{II}|$. Se calcula el límite para $j \rightarrow P^-$ de la siguiente expresión que deriva de la ec. (9.7):

$$|\Sigma_{B_j}| = \left| \frac{\Sigma_I(P-j) + \Sigma_{II}(N-P)}{N-j} \right| \quad (9.15)$$

Aplicando a la función el límite para j acercándose a P por izquierda resulta:

$$\lim_{j \rightarrow P^-} \left| \frac{\Sigma_I(P-j) + \Sigma_{II}(N-P)}{N-j} \right| = \left| \frac{\Sigma_{II}(N-P)}{N-P} \right| = |\Sigma_{II}| \quad (9.16)$$

De la ec. (9.6) se infiere que el determinante Σ_{A_j} es una constante en el intervalo $j = [1, \dots, P]$.

$$|\Sigma_{A_j}| = |\Sigma_I| = \text{cte. con } j = [1, \dots, P] \quad (9.17)$$

Siendo Σ_{B_j} una función estrictamente creciente en el intervalo $j = [1, \dots, P]$, ec. (9.14). De esa misma ecuación se deduce además que la $f_{qN}(j) = 1 + \frac{k_0}{N-j}$ toma

siempre valores mayores que 1 en ese mismo intervalo. Por lo tanto, si $\Sigma_{B_j} > \Sigma_I$ y $|\Sigma_{A_j}| = |\Sigma_I| = \text{cte.}$, entonces $|\Sigma_{B_j}|$ es siempre mayor que $|\Sigma_{A_j}|$ en ese intervalo.

Por lo expresado y definido en la ec. (9.17) resulta válido definir a la constante $k_{AI} = 1/|\Sigma_{A_j}|$.

El cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ se puede expresar como:

$$|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}| = |\Sigma_{B_j}| k_{AI} \quad (9.18)$$

Es decir que $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ es $|\Sigma_{B_j}|$ escalado por un factor constante.

Por lo expresado, si $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, entonces $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ se puede interpretar como una función de variable discreta j estrictamente creciente en el intervalo $j = [1, \dots, P]$

9.3.5.2. Análisis para $j > P$

A partir de las ecuaciones (9.9) y (9.10) se analizan los determinantes de Σ_{B_j} y Σ_{A_j} como funciones de variable discreta j .

La ec. (9.9) se puede expresar como (detalle en apéndice D):

$$\Sigma_{A_j} = \Sigma_{II} - \Sigma_I \frac{(q-1)P}{j} = \Sigma_{II} - \Sigma_I \frac{k_I}{j} \quad (9.19)$$

Donde $k_I = (q-1)P = \text{cte.}$

Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ resulta ser $q > 1$ y $k_I > 0$.

Se define la función $f_{qP}(j) = \frac{k_I}{j}$. De la ec. (9.19) se concluye que la matriz Σ_I es escalada por la función $f_{qP}(j) = \frac{k_I}{j}$, función que disminuye su valor cuando aumenta el valor de j en el intervalo $j = [P, \dots, N]$. En consecuencia $|\Sigma_{A_j}|$ crece constantemente y tiende a $|\Sigma_{II}|$ con el aumento del valor de j en ese intervalo.

Por lo expuesto, si se cumple que $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ el determinante de Σ_{A_j} es una función estrictamente creciente en el intervalo $j = [P, \dots, N]$.

De la ec. (9.10) se infiere que el determinante Σ_{B_j} es una constante en el intervalo $j = [P, \dots, N]$.

$$\Sigma_{B_j} = \Sigma_{II} = \text{cte. con } j = [P, \dots, N] \quad (9.20)$$

Por lo expresado $|\Sigma_{A_j}|$ crece constantemente y tiende a $|\Sigma_{II}|$ mientras que $\Sigma_{B_j} = \Sigma_{II}$, por lo tanto $|\Sigma_{A_j}| < |\Sigma_{B_j}|$ en el intervalo $j = [P, \dots, N]$.

Por lo expresado y definido en la ec. (9.20) resulta válido definir a la constante $k_{AIII} = |\Sigma_{B_j}|$

El cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ se puede expresar como:

$$\frac{k_{AIII}}{|\Sigma_{A_j}|} = k_{AIII} \frac{1}{|\Sigma_{A_j}|} \quad (9.21)$$

Es decir que $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ es la inversa de $|\Sigma_{A_j}|$ escalado por un factor constante. Siendo que $|\Sigma_{A_j}|$ crece constantemente con el aumento de j , su inversa es estrictamente decreciente en el intervalo $j = [P, \dots, N]$.

Por lo expresado, si $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, entonces $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ se puede interpretar como una función de variable discreta j estrictamente decreciente en el intervalo $j = [P, \dots, N]$

9.3.6. Existencia de máximo en la nueva función

- Condición $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$

Siendo que para la existencia de dos regiones caracterizadas por sus respectivas matrices de covarianzas $|\Sigma_{II}|$ y $|\Sigma_I|$, necesariamente debe ser $|\Sigma_{II}| \neq |\Sigma_I|$, en este primer análisis se mantiene el criterio adoptado en 9.3.5. Se opta por la condición $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$.

9.3.6.1. Análisis para $j < P$

En esta sección se demuestra que si $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ es una función estrictamente creciente en $j < P$ entonces $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ también lo es.

Si $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, quedó demostrado en 9.3.5 que $|\Sigma_{B_j}| > |\Sigma_{A_j}|$ con $j = [1, \dots, N]$ y por lo tanto se puede expresar:

$$|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| = \beta_j > 1 \text{ con } j = [1, \dots, N] \quad (9.22)$$

A partir de la ec. (9.22), resulta:

$$\beta_j \beta_{j+1} > 1 \quad (9.23)$$

$$\beta_j \beta_{j+1} > \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\beta_{j+1} - \beta_j} \quad (9.24)$$

En 9.3.5.1 queda demostrado que β_j es una función estrictamente creciente en $j < P$, entonces $\beta_{j+1} > \beta_j$ y por lo tanto $\beta_{j+1} - \beta_j > 0$, de la ec. (9.24), resulta:

$$\beta_{j+1} - \beta_j > \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\beta_j \beta_{j+1}} \quad (9.25)$$

$$\beta_{j+1} + \frac{1}{\beta_{j+1}} > \beta_j + \frac{1}{\beta_j} \quad (9.26)$$

Reemplazando la ec. (9.22) en la ec. (9.26)

$$|\Sigma_{B_{j+1}}/\Sigma_{A_{j+1}}| + |\Sigma_{A_{j+1}}/\Sigma_{B_{j+1}}| > |\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}| \quad (9.27)$$

Por lo tanto $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es una función estrictamente creciente en $j < P$.

9.3.6.2. Análisis para $j > P$

Del mismo modo, se demuestra que si $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ es una función estrictamente decreciente en $j > P$ entonces $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ también lo es.

En 9.3.5.2 queda demostrado que β_j es una función estrictamente decreciente en $j > P$, entonces $\beta_{j+1} < \beta_j$ y por lo tanto $\beta_{j+1} - \beta_j < 0$, de la ec. (9.24), resulta:

$$\beta_{j+1} - \beta_j < \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{\beta_j \beta_{j+1}} \quad (9.28)$$

$$\beta_{j+1} + \frac{1}{\beta_{j+1}} < \beta_j + \frac{1}{\beta_j} \quad (9.29)$$

Reemplazando la ec. (9.22) en la ec. (9.29)

$$|\Sigma_{B_{j+1}}/\Sigma_{A_{j+1}}| + |\Sigma_{A_{j+1}}/\Sigma_{B_{j+1}}| < |\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}| \quad (9.30)$$

Queda demostrado que $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es estrictamente decreciente en $j > P$.

Si la función $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es una función continua, estrictamente creciente en $j < P$ y estrictamente decreciente en $j > P$, entonces tiene un máximo en $j = P$

- Condición $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$

En la Figura 9.7 se ilustra la representación gráfica de una imagen *PolSAR* simulada que cumple con la condición $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$

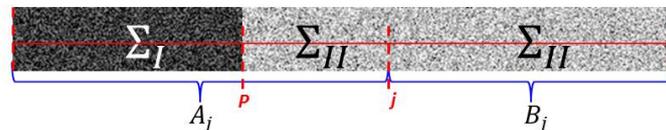


Figura 9.7: A_j y B_j con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$

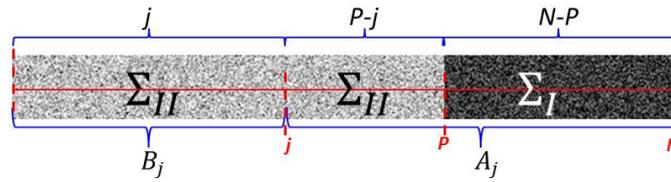


Figura 9.8: A_j y B_j con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$

En la Figura 9.8 se ilustra la representación gráfica de la imagen *PolSAR* simulada de la Figura 9.7 rotada 180° , esta representación es muy similar a la de la Figura 9.2, la diferencia notoria es la ubicación de los conjuntos A_j y B_j

Es fácil inferir que el mismo análisis realizado para la condición $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ se aplica para $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$ teniendo en cuenta que lo expresado para A_j se verifica en este caso para B_j y viceversa. Las siguientes afirmaciones surgen de esas consideraciones.

Si $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es una función estrictamente creciente en $j < P$ entonces $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ también lo es.

Si $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es una función estrictamente decreciente en $j > P$ entonces $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ también lo es.

Si la función $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| + |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ es una función continua, estrictamente creciente en $j < P$ y estrictamente decreciente en $j > P$, entonces tiene un máximo en $j = P$

9.3.6.3. Construcción de la función MD_j^0

Se construye la ec. (9.31) usando las relaciones $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ y $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$.

$$MD_j^0 = \left| \frac{\Sigma_{B_j}}{\Sigma_{A_j}} \right| + \left| \frac{\Sigma_{A_j}}{\Sigma_{B_j}} \right| \quad (9.31)$$

$$MD_j^0 = rs_j + rs_j^{-1} \quad \text{con } rs_j = \left| \frac{\Sigma_{B_j}}{\Sigma_{A_j}} \right| \quad (9.32)$$

En la Figura 9.9 se observa una representación gráfica de la ec. (9.31), esta gráfica se obtiene como resultado de sumar los valores que devuelven los términos $\left| \frac{\Sigma_{B_j}}{\Sigma_{A_j}} \right|$ y $\left| \frac{\Sigma_{A_j}}{\Sigma_{B_j}} \right|$, por cada posición de j .

Esta nueva expresión tiene un máximo en $j = P \quad \forall q > 0 \wedge q \neq 1$

9.3.6.4. Análisis de $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} + \Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$

A partir de las ecuaciones (9.8), (9.11) y (9.1) se obtienen las siguientes expresiones.

$$\forall q > 0 \wedge q \neq 1$$

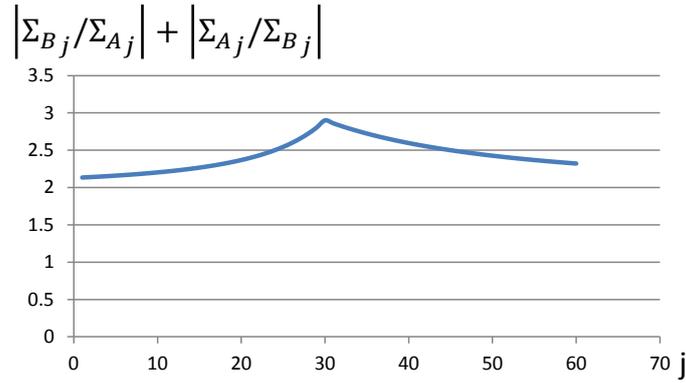


Figura 9.9: $|\Sigma_{B_j} \Sigma_{A_j}^{-1}| + |\Sigma_{A_j} \Sigma_{B_j}^{-1}|$, $P = 30$, $q = 0.4$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 60$

Si $j < P$, resulta:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} + \Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} = \\ & \left[\frac{(P-j) + q(N-P)}{N-j} + \left(\frac{(P-j) + q(N-P)}{N-j} \right)^{-1} \right] I \end{aligned} \quad (9.33)$$

Luego:

$$\begin{aligned} & |\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} + \Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}| = \\ & \left[\frac{(P-j) + q(N-P)}{N-j} + \left(\frac{(P-j) + q(N-P)}{N-j} \right)^{-1} \right]^3 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Si $j > P$, resulta:

$$\begin{aligned} & \Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} + \Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} = \\ & \left[\frac{P + q(j-P)}{qj} + \left(\frac{P + q(j-P)}{qj} \right)^{-1} \right] I \end{aligned} \quad (9.35)$$

Luego:

$$\begin{aligned} & |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} + \Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| = \\ & \left[\frac{P + q(j-P)}{qj} + \left(\frac{P + q(j-P)}{qj} \right)^{-1} \right]^3 \end{aligned} \quad (9.36)$$

La Figura 9.10 muestra la función $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} + \Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ con un valor máximo en la posición $j = P$.

9.3.6.5. Construcción de la función MD_j^1

A partir de las ecuaciones (9.8) y (9.11) se define al módulo de detección MD_j^1 como:

$$MD_j^1 = re_j + re_j^{-1} \quad \text{con } re_j = \frac{\Sigma_{B_j}}{\Sigma_{A_j}} \quad (9.37)$$

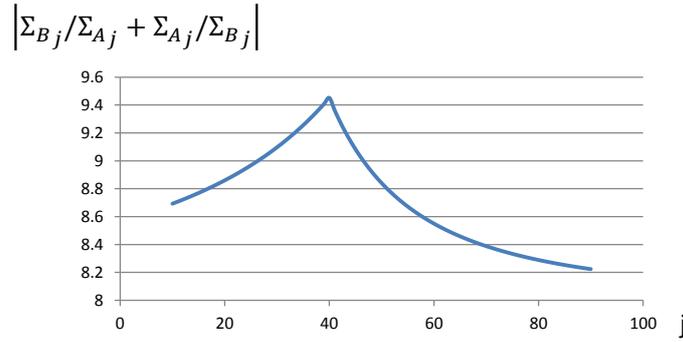


Figura 9.10: $|\Sigma_{B_j} \Sigma_{A_j}^{-1} + \Sigma_{A_j} \Sigma_{B_j}^{-1}|$, $P = 40$, $q = 1.4$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 100$

9.4. Comparación de modelos

En esta sección se analizan las expresiones propuestas y vistas en 8.5.1 para estimar PPB , incluyendo la expresión optimizada de la función de verosimilitud. Se compara el tiempo de procesamiento que resulta de usar esas expresiones con el tiempo de procesamiento que resulta de usar MD^1 . Se toman de [11, 114, 129] las expresiones de las distancias estocásticas Hellinger y Entropía de Shannon.

9.4.1. Función de verosimilitud

Tal como se expuso en 8.5.1.2, la ec. (8.4) es la expresión optimizada que se obtiene de la función de verosimilitud a partir de la ec. (8.1). Expresión que también puede tomarse de [106].

Teniendo presente que la estimación de P se obtiene con la ec. (6.3), tal que $f_{pb}(j) = \ell^q(j)$, a los efectos del posterior análisis la ec. (8.4) se puede expresar como:

$$\ell^q(j) = \ln \left[\left(\frac{|\Sigma_{B_j}|}{|\Sigma_{A_j}|} \right)^j \frac{1}{|\Sigma_{B_j}|^N} \right] \quad (9.38)$$

Dado que \ln sólo representa un cambio de escala, la posición del máximo que se obtiene con el estimador de la ec. (6.3) no cambia si se elimina el \ln en la ec. (9.38). Se crea una nueva expresión a partir de la ec. (9.38).

Se define a $g(j)$ como:

$$g(j) = \left(\frac{|\Sigma_{B_j}|}{|\Sigma_{A_j}|} \right)^j \left(\frac{1}{|\Sigma_{B_j}|} \right)^N \quad (9.39)$$

- Función $g(j)$ con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$:

Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$ el cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ que forma parte de la ec. (9.39) tiene un valor máximo en la posición $j = P$ (sección 9.3.4). Siendo que $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ forma

parte de la ec. (9.39), el resto de los factores de la ecuación no deben alterar la condición de máximo dada por ese cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ y bien pueden eliminarse si $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$. Y se puede usar sólo el cociente $|\Sigma_{B_j}|/|\Sigma_{A_j}|$ de la ec. (9.39) a los efectos de estimar P . Coincidentemente ese cociente es el primer término de la ec. (9.31) y representa el determinante del primer término de la ec. (9.37).

Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, las ecuaciones (9.39), (9.32) y el determinante de la ec.(9.37) devuelven un valor máximo en la posición $j = P$.

Es preferible usar MD_j^0 definido en la ec. (9.32) o el determinante de MD_j^1 definido en la ec. (9.37) para estimar PPB , dado que cualesquiera de esos modelos consume un menor tiempo de procesamiento que el tiempo de procesamiento que se consume si se usa la ec. (9.39).

- Función $g(j)$ con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$:

En la Figura 9.11 se observa una representación de la ec. (9.39) con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$.

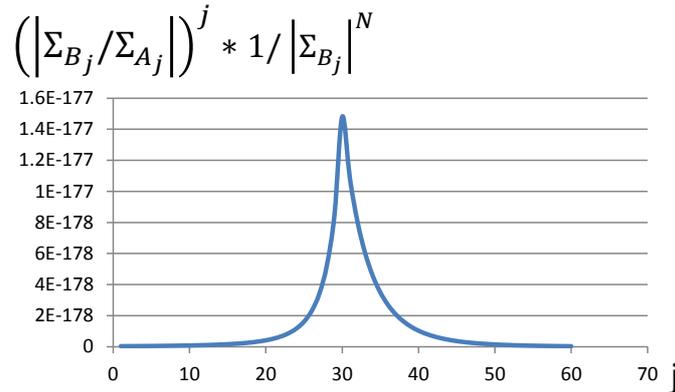


Figura 9.11: $g(j)$ con $|\Sigma_I| = 1400 > |\Sigma_{II}| = 560$, $P = 30$, $j = [j_{min}, \dots, j_{max}]$, $N = 60$

Si $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$ el cociente $|\Sigma_{A_j}|/|\Sigma_{B_j}|$ tiene un valor máximo en la posición $j = P$ (sección 9.3.4) y se puede usar a los efectos de estimar P , Figura 9.6(b). Ese cociente es el segundo término de la ec. (9.32). Es preferible usar MD_j^0 definido en la ec. (9.32) o el determinante de MD_j^1 definido en la ec. (9.37) para estimar PPB , dado que cualesquiera de esos modelos consume un menor tiempo de procesamiento que el tiempo de procesamiento que se consume si se usa la ec. (9.39).

En síntesis, a los efectos de reducir el tiempo de procesamiento es preferible usar MD_j^0 o $|MD_j^1|$

9.4.2. Distancias estocásticas

- Bhattacharyya:

De [114] se toma la expresión de la distancia de Bhattacharyya

$$d_B(X, Y) = -\log \int \sqrt{f_x f_y} \quad (9.40)$$

Siendo f_x y f_y distribuciones Wishart complejas, donde $f_x = f_z(\mathbf{Z}'; \boldsymbol{\Sigma}, L)$ con $\mathbf{Z}' \in A$ y $f_y = f_z(\mathbf{Z}'; \boldsymbol{\Sigma}, L)$ con $\mathbf{Z}' \in B$.

En la sección 8.5.1.3, se toma de [114] la expresión de d_B en función de los parámetros $A = A_j = A(j)$, $B = B_j = B(j)$, $\theta_A = (L_A, \boldsymbol{\Sigma}_A)$ y $\theta_B = (L_B, \boldsymbol{\Sigma}_B)$, con $L_A = L_B = L = \text{cte}$.

En la sección mencionada d_B es definida en la ec. (8.9) como:

$$d_B(j) = L \left[\frac{(\log |\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}| + \log |\boldsymbol{\Sigma}_{B_j}|)}{2} - \log \left| \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{B_j}^{-1}}{2} \right)^{-1} \right| \right]$$

En esa misma sección la forma optimizada de d_B queda expresada en la ec. (8.10) como:

$$d_B^o(j) = |\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{B_j}^{-1}| \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_{A_j} \boldsymbol{\Sigma}_{B_j}|}$$

- Kullback-Leibler:

De [114] se toma la expresión de la distancia de Kullback-Leibler.

En la sección 8.5.1.3 antes mencionada, la distancia d_{KL} es definida con la ec. (8.7) como:

$$d_{KL}(\theta_A, \theta_B) = L \left[\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_B + \boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_A)}{2} - m \right]$$

En esa misma sección la forma optimizada de d_{KL} queda expresada en la ec. (8.8) como:

$$d_{KL}^o(j) = \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{B_j} + \boldsymbol{\Sigma}_{B_j}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{A_j})$$

Teniendo en cuenta la expresión que define a MD_j^1 en la ec. (9.37), resulta:

$$d_{KL}^o(j) = \text{tr}(MD_j^1) \quad (9.41)$$

- Hellinger:

De [129] se toma la expresión de la distancia de Hellinger:

$$d_H(X, Y) = 1 - \int \sqrt{f_x f_y} \quad (9.42)$$

Si se compara esta última ec. (9.42) con la ec. (9.40), se reconoce que la diferencia entre ambas es sólo un cambio de escala y un desplazamiento de la función.

9.4.3. Entropía

De [11] se extrae la expresión de la Entropía de Shannon:

$$\begin{aligned} H_S(\Sigma, L) &= \frac{m(m-1)}{2} \log \pi - m^2 \log L + m \log |\Sigma| \\ &+ mL + (m-L)\psi_m^0(L) + \sum_{k=0}^{m-1} \log \Gamma(L-k) \end{aligned} \quad (9.43)$$

Se propone usar la diferencia de entropía entre los conjuntos A y B . Esta queda expresada como:

$$\begin{aligned} \Delta H_S(j) &= H_S(\Sigma_A, L) - H_S(\Sigma_B, L) \\ &= m (\log |\Sigma_A| - \log |\Sigma_B|) \\ &= m \log \left(\frac{|\Sigma_A|}{|\Sigma_B|} \right) \end{aligned} \quad (9.44)$$

La estimación de P se obtiene con el operador de la ec. (6.3). Siendo $m = \text{cte.}$ y \log un cambio de escala, de [106] a los efectos de determinar el máximo, la ec. (9.44) deriva en la siguiente expresión:

$$\Delta H_S^g(j) = \left| \frac{\Sigma_{A_j}}{\Sigma_{B_j}} \right| \quad (9.45)$$

Teniendo en cuenta la expresión que define a MD_j^1 en la ec. (9.37) y la expresión que define a $MD^0(j)$ en la ec. (9.32), resulta:

$$\Delta H_S^g(j) = rs_j = |re_j| \quad (9.46)$$

El cociente $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ de la ec. (9.45) fue analizado (sección 9.3.4) y presenta un máximo en $j = P$ sólo si $|\Sigma_I|$ es mayor que $|\Sigma_{II}|$, Figura 9.6(b). Además $\frac{\Sigma_{A_j}}{\Sigma_{B_j}}$ es uno de los términos que definen al $|MD_j^1|$. Se debe usar $|MD_j^1|$ o MD_j^0 válido para todo $|\Sigma_I| \neq |\Sigma_{II}|$.

9.5. Resultados

Se muestran imágenes con los resultados obtenidos al estimar PPB usando el nuevo modelo MD^0 . Se muestra en la Tabla 9.1 la relación de tiempos de procesamiento usando el MD^1 y d_{KL} , que según [11], es la distancia que consume el menor tiempo de procesamiento en la estimación de PPB entre los modelos de base propuestos.

9.5.1. Imagen simulada

Se crea una imagen simulada de 1200×1200 píxeles conformada por dos regiones caracterizadas por las matrices de covarianzas expresadas en (6.1) y (6.2). Se selecciona un sector de la misma de tamaño 421×421 píxeles.

En la Figura 9.12 se ilustra en color blanco las posiciones estimadas de 8 puntos de borde en una imagen sintética de 441×441 píxeles, canal HH. Las posiciones estimadas se obtuvieron aplicando las ecuaciones (9.31) y (8.4) con el método de Monte Carlo. No se aprecian diferencias en las posiciones de borde estimadas con las ecuaciones usadas.

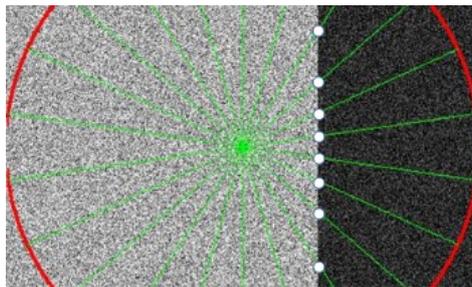


Figura 9.12: Puntos de borde en una imagen simulada. Canal HH.

9.5.2. Imagen *PolSAR*

En la Figura 9.13, se ilustra el canal VV de un sector de la Bahía de San Francisco. Se puede observar las posiciones estimadas de puntos de borde resaltados en color blanco.

En las Figuras 9.14 y 9.15 se ilustra el canal HH-HV de un sector de la Bahía de San Francisco. En la Figura 9.14 se puede observar las posiciones estimadas de puntos de borde resaltadas en color blanco y en la Figura 9.15 el delineado resaltado en color azul.

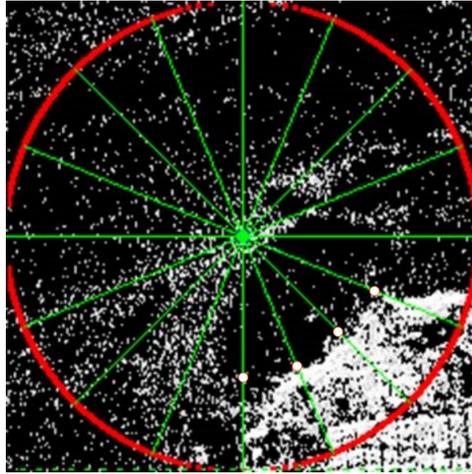


Figura 9.13: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 235×235 píxeles. Canal VV.

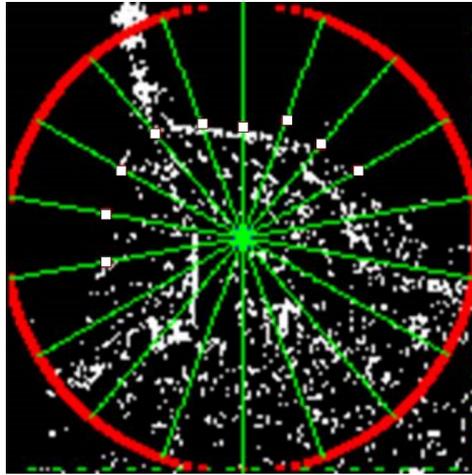


Figura 9.14: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 153×153 píxeles. Canal HH-HV.

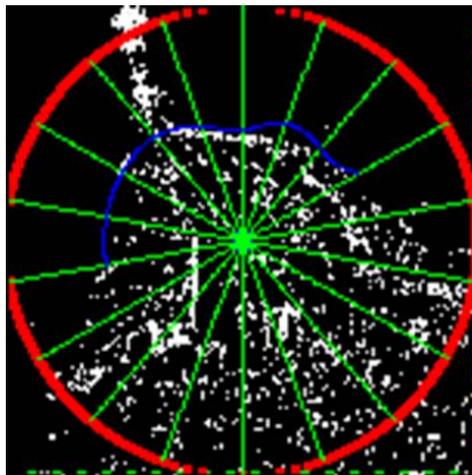


Figura 9.15: Delineado del borde en una imagen *PolSAR* de 153×153 píxeles. Canal HH-HV.

9.5.3. Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos

De [11] se toma la siguiente expresión de los resultado obtenidos en ese trabajo al comparar los tiempos de procesamiento consumidos en la estimación de PPB por los modelos de base propuestos.

$$t_{LV} \geq t_{RD} \geq t_{RE} \geq t_S \geq t_H \geq t_B \geq t_{KL} \quad (9.47)$$

t_{LV} corresponde a función de verosimilitud, t_{RD} corresponde a distancia R'enyi, t_{RE} corresponde a entropía de R'enyi, t_S corresponde a entropía de Shannon, t_H corresponde a distancia Hellinger, t_B corresponde a distancia Bhattacharyya, t_{KL} corresponde a "distancia Kullback-Leibler, (d_{KL})", siendo esta última distancia el modelo que consume menos tiempo de procesamiento.

9.5.4. Tiempos medidos

En esta sección se muestra el resultado de comparar el tiempo de procesamiento del nuevo modelo MD^0 con el tiempo de procesamiento de d_{KL} .

Este ultimo necesita del parámetro L_e que, en esta Tesis, se calcula utilizando el modelo de Distribución Wishart Relajada, que sólo usa para el cálculo de L_e los datos del sector seleccionado para estimar las PPB y no toda la imagen, de esta manera se reduce el tiempo de procesamiento en ese cálculo, lo que supone una reducción importante en el tiempo de procesamiento total que consume d_{KL} para estimar las PPB .

Detalle de datos en la Tabla 9.1.

- Sector seleccionado: Corresponde a la dimensión de la imagen seguido del número de puntos de borde.
- t_{MoD}/t_{KL} : tiempo de cálculo usando MD^0 / tiempo de cálculo usando d_{KL}

Imágenes <i>PolSAR</i>		
Item	Sector seleccionado	t_{MoD}/t_{KL}
1	221 × 221 píxeles, 3 puntos, Figura 9.17	0,78
2	193 × 193 píxeles, 3 puntos, Figura 9.18	0,80
3	225 × 225 píxeles, 3 puntos, Figura 9.20	0,76

Tabla 9.1: Relación en tiempos de procesamiento al estimar PPB

En la Figura 9.16 se puede observar el sector seleccionado de 221 × 221 píxeles.

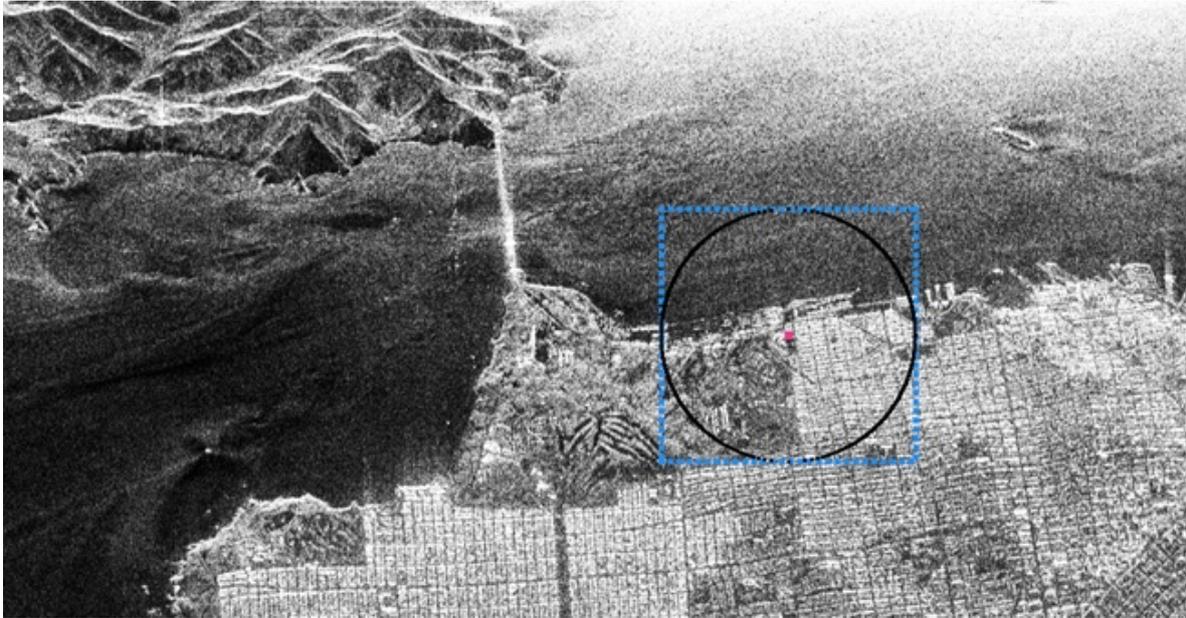


Figura 9.16: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HH.

En la Figura 9.17 se puede observar las *PPB* estimadas usando MD^0 y d_{KL} . En la tabla 9.1 se observa una relación de tiempos $t_{MoD}/t_{KL} = 0,78$.

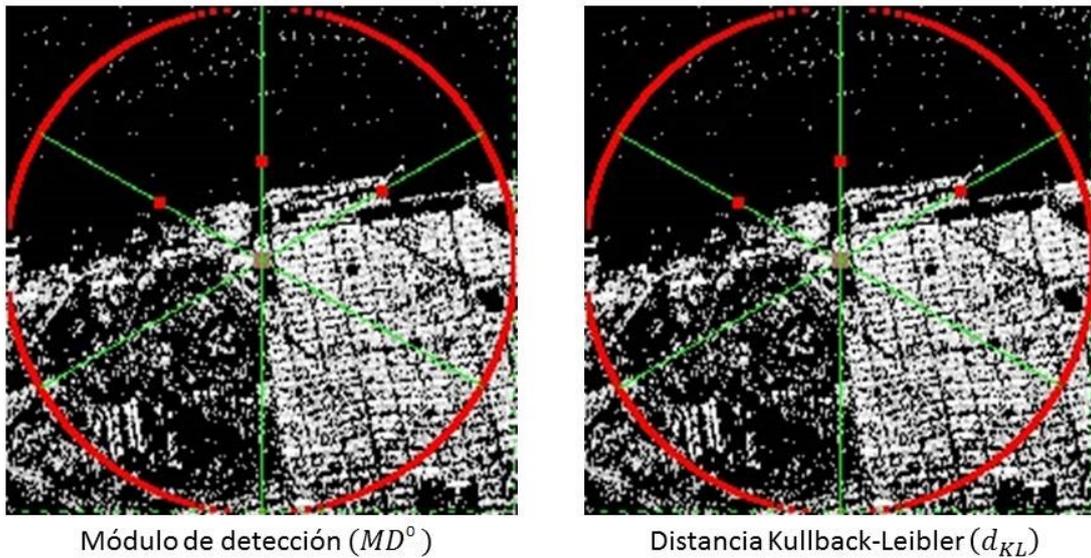


Figura 9.17: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 221×221 píxeles. Canal HH.

En la Figura 9.18 se puede observar las 3 *PPB* estimadas en otro sector de la imagen, usando MD^0 y d_{KL} .

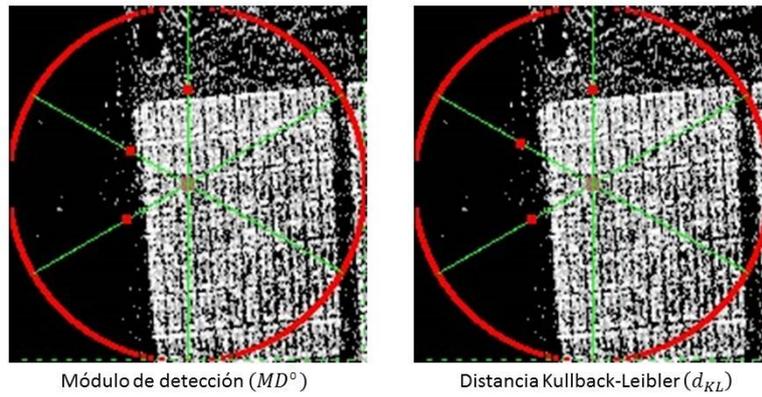


Figura 9.18: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 193×193 píxeles. Canal HH.

En la Figura 9.19 se puede observar en una nueva imagen, el sector seleccionado de 225×225 píxeles, que se usa para la estimación de tres *PPB*.

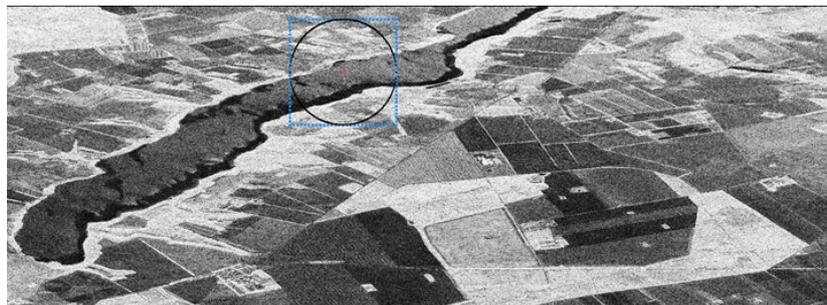


Figura 9.19: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HH.

En la Figura 9.20 se puede observar las 3 *PPB* estimadas, usando MD^0 y d_{KL} , en el sector seleccionado.

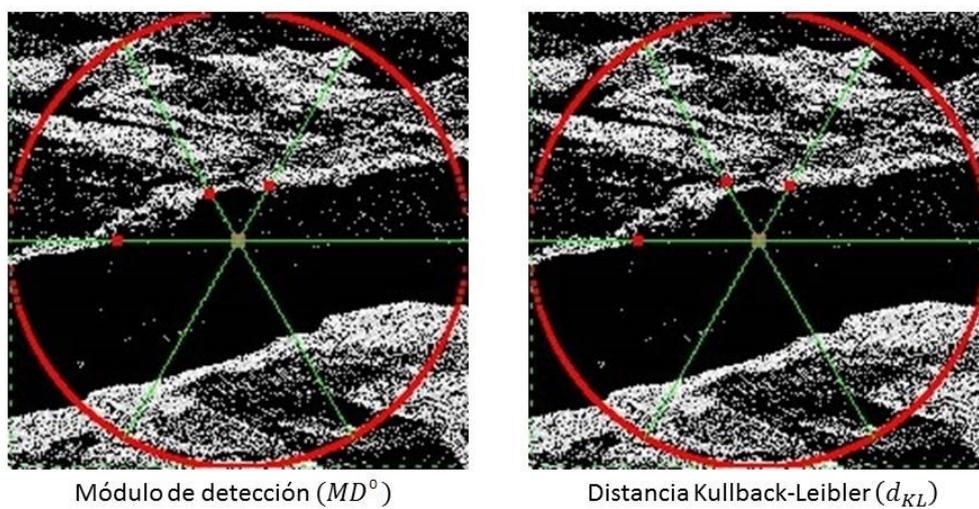


Figura 9.20: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 225×225 píxeles. Canal HH.

9.6. Conclusiones

- Los modelos MD_j^0 y MD_j^1 son en sí mismo una síntesis, un modelo unificado de algunas de las expresiones propuestas, tales como las vistas en la sección 9.4 para la estimación de la posición de puntos de borde. Permiten estimar eficientemente posiciones de borde y por ser síntesis de las expresiones vistas en la sección 9.4, realizan un menor número de operaciones con respecto a esas expresiones y por lo tanto se obtienen resultados con un menor tiempo de procesamiento.
- Al estar presente MD_j^0 y MD_j^1 en al menos uno de los modelos analizados como elemento determinante para la estimación de P , implica que tanto MD_j^0 como MD_j^1 se aplican en todo par (Σ_X, Σ_Y) . Es decir que MD_j^0 y MD_j^1 extienden su aplicación más allá de la condición restrictiva $\Sigma_{II} = q\Sigma_I$ impuesta en la sección 6.3.5 y a sólo efecto de simplificar el análisis funcional.
- En los ensayos realizados en este trabajo, al comparar tiempos de procesamiento para estimar PPB , se observa que con MD^0 se obtienen resultados con el menor tiempo de procesamiento. En la Tabla 9.1 se pueden apreciar las relaciones de tiempos de procesamiento con un valor máximo de 0,8
- Se pudo observar en las imágenes la similitud de las PPB estimadas con MD^0 y con d_{KL} .

Capítulo 10

Distancia d_{MD} en *PolSAR*

En el capítulo 9 se expuso un conjunto de distancias que se usan en la estimación de puntos de borde. Estas medidas de distancia no satisfacen la cuarta propiedad de las métricas, es decir, el axioma de la desigualdad triangular. Estas medidas de distancia están clasificadas como semimétricas, clasificación que se expuso en el capítulo 8, en la sección 8.1. Existen numerosos trabajos publicados donde se usa ese tipo de distancias [130–135].

En este capítulo se expone la distancia d_{MD} , comparable con las distancias expuestas en el capítulo 9.

Se analiza su comportamiento, así como su respuesta cuando se la usa para estimar posiciones de bordes. Quedó demostrado en el capítulo 9 que el módulo de detección conjuntamente con el método propuesto, delinea de un modo eficiente el borde de las regiones en comparación con otros métodos de uso frecuente. Quedó también demostrado que procesa eficientemente los datos en un tiempo de procesamiento menor que el tiempo de procesamiento que consume cada uno de los demás modelos propuestos, expuestos oportunamente.

Se puede consultar en [106,119,128], donde se expone que MD^0 y MD^1 son expresiones sintéticas de otras expresiones analíticas expuestas en esos mismos artículos. MD^0 y MD^1 pueden considerarse como modelos unificadores de esas otras expresiones analíticas expuestas en los mencionados artículos, algunas de ellas detalladas en 8.5.1.3. Los resultados expuestos en tablas demuestran que MD^1 estima las posiciones de borde en un tiempo de procesamiento comparativamente menor con respecto a los otros modelos propuestos.

En este capítulo se compara, para un mismo conjunto de datos, el tiempo de

procesamiento que consume d_{MD} con el tiempo de procesamiento que consume la distancia Kullback-Leibler (d_{KL}). Es importante tener en cuenta que se expuso en 9.5.3 que d_{KL} es la distancia que consume el menor tiempo de procesamiento cuando se compara con los tiempos que consumen las otras distancias mencionadas oportunamente.

Recordar que, una distancia en el espacio de funciones, da una referencia de cuán distintos son dos elementos en ese espacio. La distancia estocástica que se define en este capítulo es un modelo matemático que permite comparar dos distribuciones de probabilidad.

Si bien el objetivo principal de la Tesis concluye una vez definida la nueva distancia y demostrado el beneficio que representa su elección en la estimación de posiciones de puntos de borde en imágenes PolSAR, se incorpora en esta Tesis un avance de la continuación de este trabajo de investigación en la sección “Grado de confianza” 10.3.4 donde se hace uso de un modelo ideal que se define en 10.3.3 y un método que puede usarse para otorgar un grado de fiabilidad a las posiciones de borde que se estimen con algunos de los modelos de distancia presentados en esta Tesis.

En este capítulo, este “Grado de confianza” se aplica sobre algunas *PPB* que son estimadas usando el nuevo modelo de distancia propuesto y en los gráficos se colorean las marcas de las *PPB* analizadas con este método.

10.0.1. Selección de modelo estadístico

Del mismo modo que en el capítulo 8, se hace uso de la distribución Wishart Compleja, distribución más utilizada para modelar el retorno en imágenes *PolSAR*.

10.1. Muestra de datos

Tal como se describe en 6.3.1, la segmentación a partir del delineado de los bordes de las regiones necesita de muestras de datos de la imagen *PolSAR* que permitan estimar las posiciones de los puntos de borde que se usarán para el dicho delineado. A tal efecto, se realizan los mismos pasos detallados en 6.3.1.

10.1.1. Partición de la muestra

Del mismo modo que en 6.3.2, una vez creado el vector con los datos de la muestra de acuerdo a lo expresado en 6.3.1, se elige una posición j sobre el vector de N elementos.

Esta posición subdivide a los datos que contiene el vector en los conjuntos de datos **A** y **B**. Se repite esta elección de j para todas las posiciones comprendidos entre j_{min} y j_{max} , de modo que quedan definidos pares de conjuntos **A** y **B** por cada posición de j , tal que $0 < j_{min} \leq j \leq j_{max} < N$.

10.2. Recursos

En esta sección se describen recursos que se usan para:

- Implementar este modelo de distancia
- Exponer los beneficios de este modelo en comparación con los modelos de base propuestos.

10.2.1. Monte Carlo

Mediante el método de Monte Carlo se estima la posición de los puntos de borde en imágenes *PolSAR* simuladas.

10.2.2. Tipos de imágenes *PolSAR*

Se usan dos tipos de imágenes *PolSAR* para la estimación de las *PPB* a los efectos de exponer gráficamente el beneficio que resulta de usar la distancia estocástica d_{MD}

- **Imagen simulada:** Se crea con la *IdeU* (interfaz desarrollada en Python) expuesta en el capítulo 7 una imagen simulada formada por dos regiones caracterizadas por las matrices de covarianzas expresadas en (6.1) y (6.2) y se selecciona un sector de la misma.
- **Imagen real:** Por medio de la *IdeU* se toma una imagen *PolSAR* de la Bahía de San Francisco, California, EE. UU. y se selecciona un área de la misma.

10.2.3. Tiempos de procesamiento

A los efectos de exponer el beneficio cuantitativo en tiempos de procesamiento que representa el uso del nuevo modelo propuesto de distancia estocástica d_{MD} , en este trabajo se muestra en la Tabla 10.2 el resultado de comparar el tiempo de procesamiento del nuevo modelo con el tiempo de procesamiento de uno de los modelos propuestos: Se selecciona el modelo que consume el menor tiempo de procesamiento según [11].

10.2.4. Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos

En 9.5.3 se expresa que en el trabajo [11] se analizan los tiempos de procesamiento que consumen siete funciones al ser usadas para la estimación de la posición de puntos de borde, función de verosimilitud, distancia Rényi, entropía de Rényi, entropía de Shannon, distancia Hellinger, distancia Bhattacharyya, distancia Kullback-Leibler. Y se concluye que la distancia Kullback-Leibler es la función que permite estimar posiciones de puntos de borde con el menor tiempo de procesamiento con respecto a las otras funciones. A los efectos de evaluar el beneficio que representa optar por el nuevo modelo de distancia d_{MD} cuando se analiza el tiempo de procesamiento, se usa la distancia Kullback-Leibler como modelo de comparación con el nuevo modelo de distancia.

Uno de los parámetros que usa la función o “distancia Kullback-Leibler, (d_{KL})” es el número de looks, en la práctica se estima el valor del número equivalente de looks y se usa ese valor en la función d_{KL} . Para estimar ese parámetro se usan todos los datos de la imagen y el tiempo de procesamiento que se consume en ese cálculo, se incluye como parte del tiempo total de procesamiento para estimar las *PPB*.

Del mismo modo que en 9.5.4 se opta por el modelo propuesto en [113,114], es decir la distribución Wishart compleja relajada como variante de la la distribución Wishart compleja.

Usando la distribución Wishart compleja relajada, sólo se toman los datos del sector seleccionado para el cálculo del número equivalente de looks y no los datos de toda la imagen, por lo tanto, el tiempo de procesamiento que se consume en ese cálculo es menor que el tiempo que se consume si se usa la distribución Wishart compleja.

A los efectos de crear las mejores condiciones para la distancia Kullback-Leibler, se acepta ese criterio y se toma sólo los datos del sector seleccionado para la estimación del número equivalente de looks.

En la Tabla 10.2 se muestra el valor del cociente entre el tiempo de procesamiento que se consume cuando se usa d_{MD} y el tiempo que se consume cuando se usa d_{KL} para estimar las *PPB*. Para el cálculo del número equivalente de looks d_{KL} usa solamente los datos del sector seleccionado, de ese modo el tiempo de procesamiento es menor.

10.3. Análisis funcional

En esta sección se analizan funciones que derivan en la expresión optimizada de la distancia estocástica propuesta. Se exponen modelos que relacionan las matrices de covarianzas correspondientes a las muestras A_j y B_j por cada valor de j , y que devuelven un valor máximo en la posición de borde. Se detallan los nuevos modelos de distancia para la estimación de *PPB*.

Una divergencia es una medida de disimilitud entre dos distribuciones de probabilidad. Es decir, es un funcional que como argumento tiene dos (o más) distribuciones de probabilidad. En la sección 9.4.2 se exponen las distancias estocásticas tomadas de [114] como resultado de simetrizar las respectivas divergencias mediante la siguiente expresión:

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + D(\mathbf{Y}, \mathbf{X})}{2} \quad (10.1)$$

Siendo \mathbf{X} e \mathbf{Y} variables aleatorias, $D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ función divergencia, $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ función distancia.

En ese mismo artículo se expresa que $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : A \times A \rightarrow \Re$ es una distancia sobre A pues para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A$ se cumple:

1. No negatividad: $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \geq 0$
2. Simetría: $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = d(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$
3. Identidad de indiscernibles: $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}$

10.3.1. Relaciones $\Sigma_{A_j}, \Sigma_{B_j}$ con $\Sigma_{II} = \Sigma_q \Sigma_I$

En este desarrollo del mismo modo que en 9.3.1, se mantienen vigente las expresiones expuestas en 6.3.5 que surgen de considerar el modo en que se agrupan los datos en los conjuntos A_j y B_j para cada valor de j comprendido entre j_{min} y j_{max} . Se conservan las relaciones expresadas en 9.3.2 y se modifica una de las condiciones establecidas en 9.3.1.

La condición $\Sigma_{II} = q\Sigma_I$ es reemplazada por una condición menos restrictiva:

$$\Sigma_q = \Sigma_{II} \Sigma_I^{-1} \text{ ó } \Sigma_{II} = \Sigma_q \Sigma_I$$

Luego, al igual que en 9.3.1, se establece el conjunto de condiciones a los efectos de simplificar el análisis:

1. Σ_{A_j} y Σ_{B_j} son las matrices de covarianzas de las muestras A_j y B_j respectivamente, para cada posición de j

2. Σ_I es la matriz de covarianzas de R_I y es igual a la matriz de covarianzas de todo subconjunto de R_I .
3. Σ_{II} es la matriz de covarianzas de R_{II} y es igual a la matriz de covarianzas de todo subconjunto de R_{II} .
4. Σ_T es la matriz de covarianzas de toda la muestra, es decir Σ_T de $A_j \cup B_j$
5. $\Sigma_{II} = \Sigma_q \Sigma_I$
6. $j_{min} = \lfloor 0.23N \rfloor$ y $j_{max} = \lfloor 0.77N \rfloor$
7. I es la matriz identidad

Se definen las expresiones para las relaciones entre Σ_{B_j} y Σ_{A_j} mediante un proceso de manipulación matemática y reemplazando q por Σ_q en las ecuaciones (9.8) y (9.11)

Si $j < P$:

$$\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j} = \frac{P-j}{N-j}I + \frac{N-P}{N-j}\Sigma_q \quad (10.2)$$

Si $j > P$:

$$\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j} = \frac{P}{j}\Sigma_q^{-1} + \left(1 - \frac{P}{j}\right)I \quad (10.3)$$

10.3.2. Distancia de MD^0

Se define a D_{MD} como:

$$D_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = \frac{|\Sigma_X|}{|\Sigma_Y|} - 1 \quad (10.4)$$

En 9.3.4.1 se demostró que:

1. Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, la función cociente $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ tiene un valor máximo en la posición $j = P$, Figura 9.5(a).
2. Con $|\Sigma_{II}| < |\Sigma_I|$ el cociente $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ tiene un valor máximo en la posición $j = P$, Figura 9.6(b).

Si $\Sigma_X = \Sigma_{B_j}$ y $\Sigma_Y = \Sigma_{A_j}$

1. Con $|\Sigma_{II}| > |\Sigma_I|$, entonces $D_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = D_{MD}(|\Sigma_{B_j}|, |\Sigma_{A_j}|) = |\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}| - 1$ resulta ser la función $|\Sigma_{B_j}/\Sigma_{A_j}|$ desplazada una unidad y se mantiene la condición de máximo en $j = P$.

2. Con $|\Sigma_I| > |\Sigma_{II}|$, entonces $D_{MD}(|\Sigma_Y|, |\Sigma_X|) = D_{MD}(|\Sigma_{A_j}|, |\Sigma_{B_j}|) = |\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}| - 1$ resulta ser la función $|\Sigma_{A_j}/\Sigma_{B_j}|$ desplazada una unidad y se mantiene la condición de máximo en $j = P$.

En forma similar a lo expresado en 10.3, una medida de distancia asociada al Módulo de Detección MD^0 se puede expresar como:

$$d_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = D_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) + D_{MD}(|\Sigma_Y|, |\Sigma_X|) \quad (10.5)$$

$$d_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = \frac{|\Sigma_X|}{|\Sigma_Y|} + \frac{|\Sigma_Y|}{|\Sigma_X|} - 2 \quad (10.6)$$

Si $\Sigma_X = \Sigma_{B_j}$ y $\Sigma_Y = \Sigma_{A_j}$, esta expresión resulta ser la función MD^0 desplazada en dos unidades. En 9.3.6 se demostró que MD^0 tiene un máximo en $j = P$ y esta condición se traslada a d_{MD} .

$$d_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = \frac{|\Sigma_X|^2 + |\Sigma_Y|^2}{|\Sigma_X||\Sigma_Y|} - 2 \quad (10.7)$$

$$d_{MD}(|\Sigma_X|, |\Sigma_Y|) = \frac{(|\Sigma_X| - |\Sigma_Y|)^2}{|\Sigma_X||\Sigma_Y|} \quad (10.8)$$

La función $d_{MD} : |\Sigma| \times |\Sigma| \rightarrow R$ es una distancia en Σ pues cumple para todo $(\Sigma_X, \Sigma_Y) \in \Sigma$ las propiedades antes expuestas en la sección 10.3 (No negatividad, Simetría, Identidad de indiscernibles).

10.3.3. Modelo ideal de d_{MD}

Cabe recordar que se está operando son matrices hermitianas definidas positivas.

Con las ecuaciones (10.2) y (10.3) se crea una expresión del modelo ideal de d_{MD} , denominado $d_{MD_{ideal}}$.

Si $j < P$:

$$d_{MD_{ideal}}(|\Sigma_{B_j}|, |\Sigma_{A_j}|) = d_{MD_{ideal}}(\Sigma_q, j, P) = \left| \frac{P-j}{N-j} I + \frac{N-P}{N-j} \Sigma_q \right| + \left| \left(\frac{P-j}{N-j} I + \frac{N-P}{N-j} \Sigma_q \right)^{-1} \right| - 2 \quad (10.9)$$

Si $j > P$:

$$d_{MD_{ideal}}(|\Sigma_{B_j}|, |\Sigma_{A_j}|) = d_{MD_{ideal}}(\Sigma_q, j, P) = \left| \frac{P}{j} \Sigma_q^{-1} + \left(1 - \frac{P}{j} \right) I \right| + \left| \left(\frac{P}{j} \Sigma_q^{-1} + \left(1 - \frac{P}{j} \right) I \right)^{-1} \right| - 2 \quad (10.10)$$

10.3.4. Grado de confianza

Para cuantificar el grado de “precisión” con que los diversos métodos logran definir los bordes de las diferentes regiones en las imágenes, se define el “grado de confianza” que asigna un valor determinado a las posiciones de borde estimadas con algunos de los modelos de distancia estocástica.

A continuación se expone un detalle de la secuencia de pasos que se ejecutan para asignar un valor denominado “grado de confianza, (g_c)” a una PPB usando la distancia estocástica d_{MD} descrita en 10.3.2:

- Se seleccionan los datos para armar la muestra con el objetivo de estimar una PPB .
- Se estima la PPB usando la distancia estocástica seleccionada.
- Los valores que se obtienen de usar la función distancia estocástica seleccionada para los valores de j comprendido entre j_{min} y j_{max} , se guardan en un vector denominado vec_{dmr} , creado a tal efecto.
- Una vez estimada la PPB , se usa la distancia estocástica $d_{MD_{Ideal}}$ descrita en 10.3.3.
- Los valores que se obtienen de usar la función $d_{MD_{Ideal}}$ para valores de j comprendido entre j_{min} y j_{max} se guardan en un vector denominado vec_{dmt} , creado a tal efecto.
- Mediante un algoritmo se calculan diferencias entre los vectores vec_{dmr} y vec_{dmt} . Se guardan los valores absolutos de esas diferencias en el vector $vecDif$ creado a tal efecto, de modo que $vecDif[i] = |(vec_{dmr}[i] - vec_{dmt}[i])|$, para $i = [1, \dots, Nv]$, siendo Nv el número de elementos del vector.
- Se compara el valor de la suma de todas las diferencias $\left(\sum_{i=1}^{Nv} vecDif[i]\right)$ con un valor umbral; se selecciona una cantidad reducida de las diferencias $vecDif[i]$ correspondientes a posiciones cercanas a la PPB y se compara el valor de la suma de esas diferencias con un valor umbral. Como resultado de esas comparaciones se asigna a la PPB estimada un valor de g_c que se usa para dar un color (ver Tabla 10.1) al pixel asociado a esa PPB .

Códigos de color - Grado de confianza g_c	
g_c	Color
- 4	rojo
- 3	magenta
- 2	naranja
- 1	amarillo
0	violeta
1	azul claro
2	azul oscuro
3	verde

Tabla 10.1: Tabla de códigos de color para *PPB*

10.4. Resultados

En las secciones 10.4.1, 10.4.2, 10.4.5, 10.4.6 se muestran imágenes con los resultados obtenidos al estimar *PPB* usando la nueva distancia d_{MD} .

En la sección 10.4.4 se muestra en la Tabla 10.2 la relación de tiempos de procesamiento usando d_{MD} y d_{KL} . Se debe tener en cuenta que la distancia d_{KL} consume el menor tiempo de procesamiento en la estimación de *PPB* si se la compara con los modelos de base propuestos [11].

Se calculan los valores de $d_{MD_{Ideal}}$. Con los valores obtenidos de d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ se construyen curvas que se muestran en la misma imagen. Estas curvas se exponen en la sección 10.4.6 en imágenes tales como: Figura 10.6, Figura 10.8, Figura 10.10.

Los gráficos de curvas de d_{MD} y de $d_{MD_{Ideal}}$ están clasificados por número de rayo, los rayos son numerados en forma ascendente y en sentido horario partiendo del rayo número 0, tal como se indica en la imagen. Esto se expone en la sección 10.4.6 en imágenes tales como: Figura 10.6, Figura 10.8, Figura 10.10.

Mediante el método de Monte Carlo se estima la posición de los puntos de borde en imágenes *PolSAR* simuladas. Esto se expone en la sección 10.4.5 y se representa en la Figura 10.4.

10.4.1. Imagen simulada

Se crea una imagen simulada de 1200×1200 píxeles conformada por dos regiones caracterizadas por las matrices de covarianzas expresadas en (6.1) y (6.2); y se selecciona un sector de la misma de tamaño 283×283 píxeles.

En la Figura 10.1 se ilustra en color las posiciones estimadas de 5 puntos de borde en una imagen simulada de 283×283 píxeles, canal HH. Las posiciones estimadas se obtuvieron aplicando las ecuaciones (10.6) y (8.7) con el método de Monte Carlo.

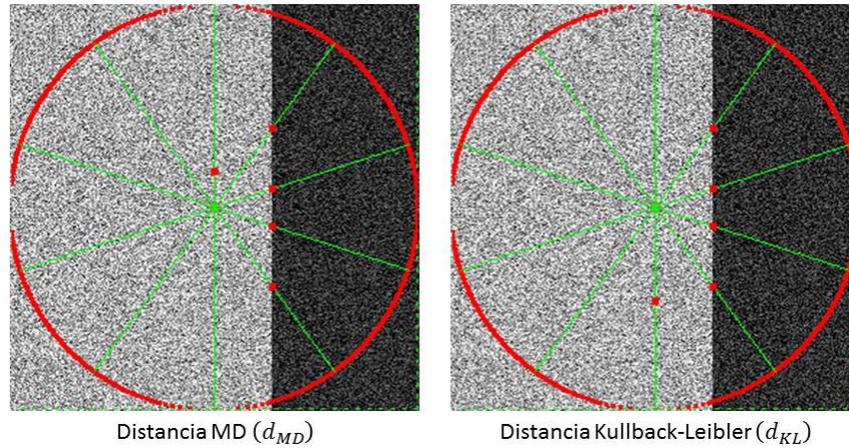


Figura 10.1: Posiciones estimadas de puntos de borde en una imagen sintética. Canal HH.

10.4.2. Imagen *PolSAR*

En la Figura 10.2 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se puede observar el área seleccionada para la estimación de *PPB*.



Figura 10.2: Visualización de una imagen *PolSAR*, canal HH con la IdeU desarrollada en Python.

En la Figura 10.3, se ilustra el canal HH-HV de un área de la Bahía de San Francisco, se puede observar la similitud en las posiciones de borde estimadas usando d_{MD} y LV , respectivamente.

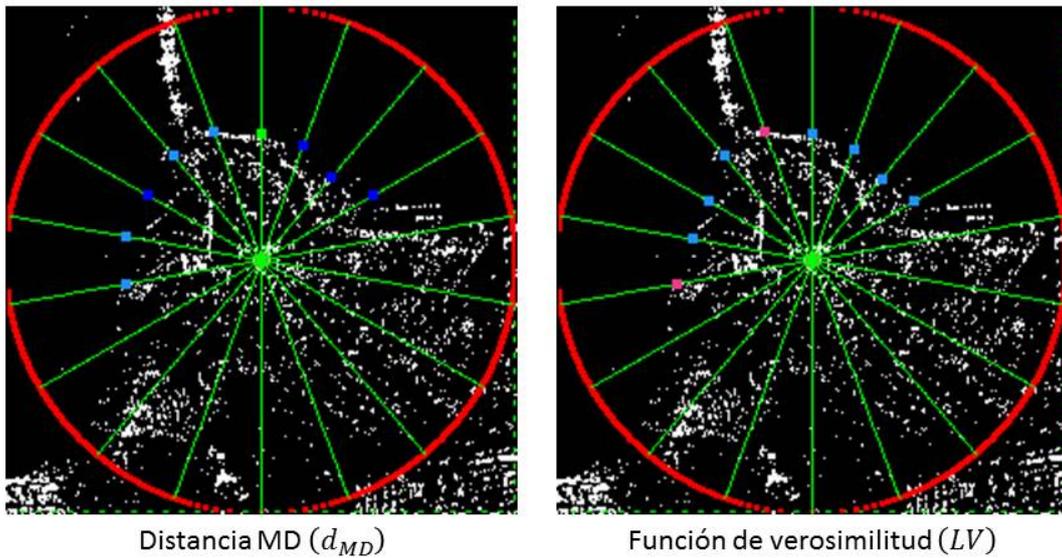


Figura 10.3: Puntos de borde en una imagen *PolSAR* de 257×257 píxeles. Canal HH-HV.

10.4.3. Tiempos de procesamiento de los modelos propuestos

Recordar que, tal como se expresa en 9.5.3 y de acuerdo con [11], la distancia d_{KL} es la que consume el menor tiempo de procesamiento al estimar *PPB* con respecto a los otros modelos analizados en [11] y por ello se usa d_{KL} para comparar tiempos de procesamiento.

10.4.4. Tiempos medidos

A los efectos de exponer el beneficio que representa el uso de la distancia d_{MD} , en esta sección se muestra el resultado de comparar el tiempo de procesamiento del nuevo modelo con el tiempo de procesamiento de d_{KL} .

Este último necesita del parámetro L_e que, al igual que en la sección anterior 9.5.4, se calcula utilizando el modelo de Distribución Wishart Relajada, que sólo usa para el cálculo de L_e los datos del sector seleccionado para estimar las *PPB* y no toda la imagen, de esta manera se reduce el tiempo de procesamiento en ese cálculo, lo que supone una reducción importante en el tiempo de procesamiento total que consume d_{KL} para estimar las *PPB*.

Detalle de datos en la Tabla 10.2.

- Sector seleccionado: Corresponde a la dimensión de la imagen seguido del número de puntos de borde.

- $t_{d_{MD}}/t_{KL}$: tiempo de cálculo usando d_{MD} / tiempo de cálculo usando d_{KL}

Imágenes <i>PolSAR</i>		
Item	Sector seleccionado	$t_{d_{MD}}/t_{KL}$
1	257 × 257 píxeles, 3 puntos, Figura 10.9	0,77
2	165 × 165 píxeles, 3 puntos, Figura 10.12	0,84
3	193 × 193 píxeles, 3 puntos, Figura 10.15	0,81
4	173 × 173 píxeles, 3 puntos, Figura 10.18	0,83
5	275 × 275 píxeles, 6 puntos, Figura 10.21	0,84

Tabla 10.2: Relación en tiempos de procesamiento al estimar *PPB*

10.4.5. Error en la estimación

Se expone en la Tabla 10.3 el número de veces que se comete error y el correspondiente valor de error con el uso de la distancia d_{MD} . El valor del error se computa como la distancia entre la posición estimada y la posición real, medido en número de píxeles (# pixel).

- Error (# pixel): Distancia entre la *PPB* estimada y la *PPB* definida, medida en número de píxeles.
- Cantidad (%): Porcentaje de veces que se presenta error en la *PPB* estimada con respecto al total de estimaciones realizadas.

Tabla 10.3: Estadística del error que se produce al estimar *PPB* sobre 1000 mediciones

Imágenes <i>PolSAR</i>		
Item	Error (# pixel)	Cantidad (%)
1	0	77,6
2	1	10,8
3	2	05,0
4	3	01,9
5	> 3	04,6

En la Figura 10.4 se puede observar la imagen simulada. En esa imagen: en (a) las circunferencias representan las áreas donde se estiman las posiciones de borde; en (b) los píxeles de color azul identifican las posiciones de borde estimadas. Se realizaron 1000 ensayos.

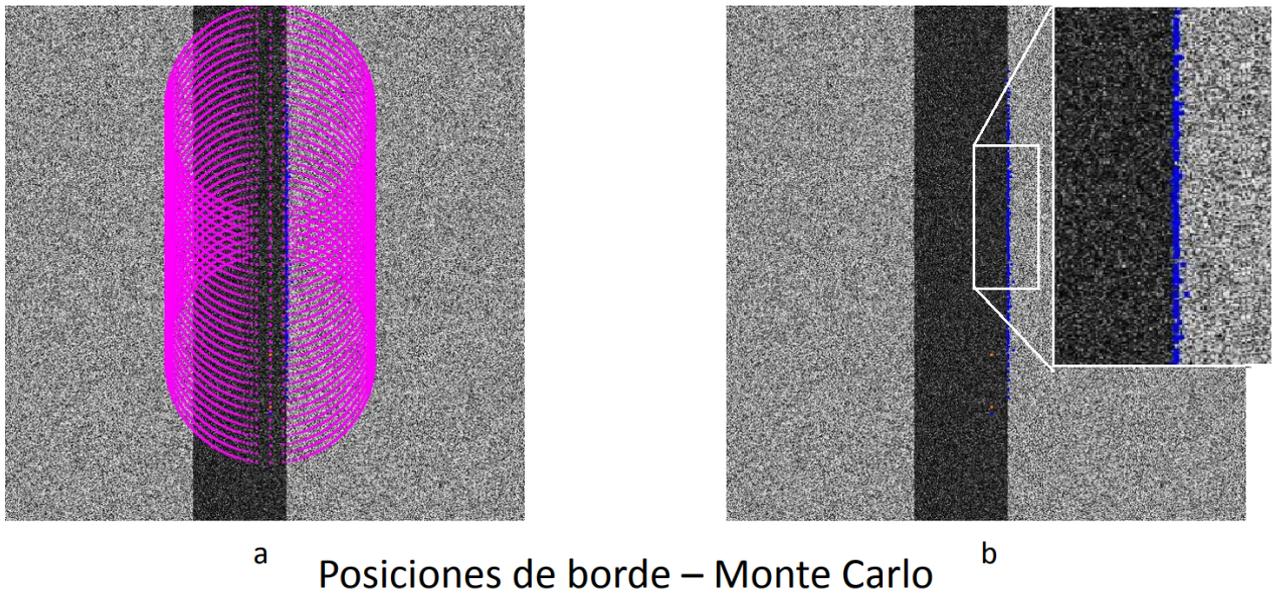


Figura 10.4: Puntos de borde estimados con d_{MD}

10.4.6. Imágenes

Se muestran algunas imágenes con las *PPB* representadas por círculos blancos para su fácil identificación. Figura 10.5, Figura 10.7, Figura 10.9 y 10.10.

Se muestran imágenes con las *PPB* coloreadas con el código de color “ g_c ” asignado, Figura 10.6 y Figura 10.8.

En una misma figura se muestran las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

La curva d_{MD} se dibuja interpolando los valores calculados previamente por cada posición de j . El mismo método se aplica para la curva de $d_{MD_{Ideal}}$.

Los rayos son numerados en forma ascendente y en sentido horario, partiendo del rayo número 0. Los gráficos de curvas de d_{MD} y de $d_{MD_{Ideal}}$ están clasificados por el número de rayo.

Etiquetas en los gráficos de curvas:

- “Dist MD” es equivalente a d_{MD}
- “Dist MD (teor)” es equivalente a $d_{MD_{Ideal}}$

En la Figura 10.5.(a) se puede observar la imagen simulada. En la Figura 10.5.(b) el sector seleccionado de 165×165 píxeles y las tres PPB estimadas.

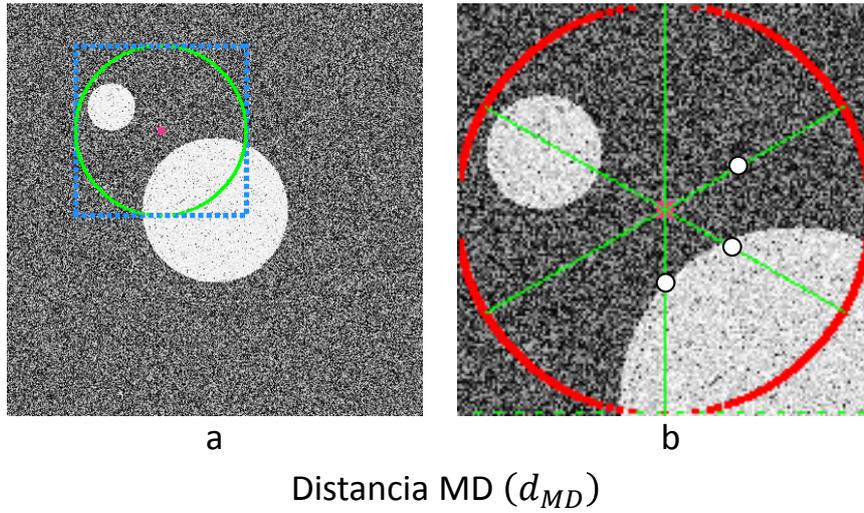


Figura 10.5: Puntos de borde estimados con d_{MD} . Canal HH

En la Figura 10.6 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

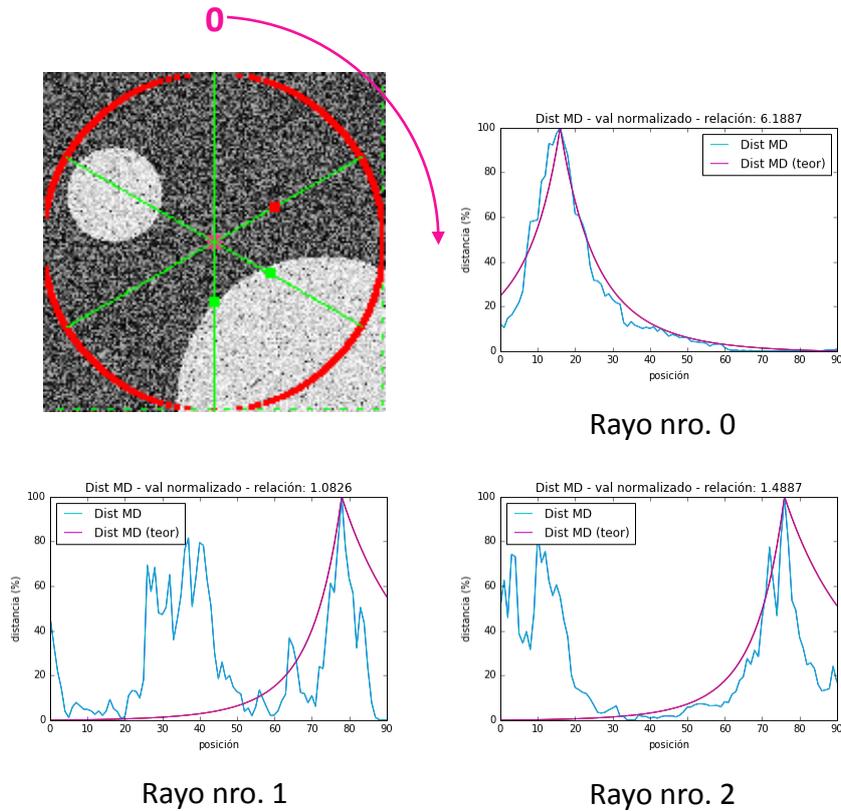


Figura 10.6: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$

En la Figura 10.7.(a) se puede observar la imagen simulada. En la Figura 10.7.(b) el sector seleccionado de 139×139 píxeles y las tres PPB estimadas.

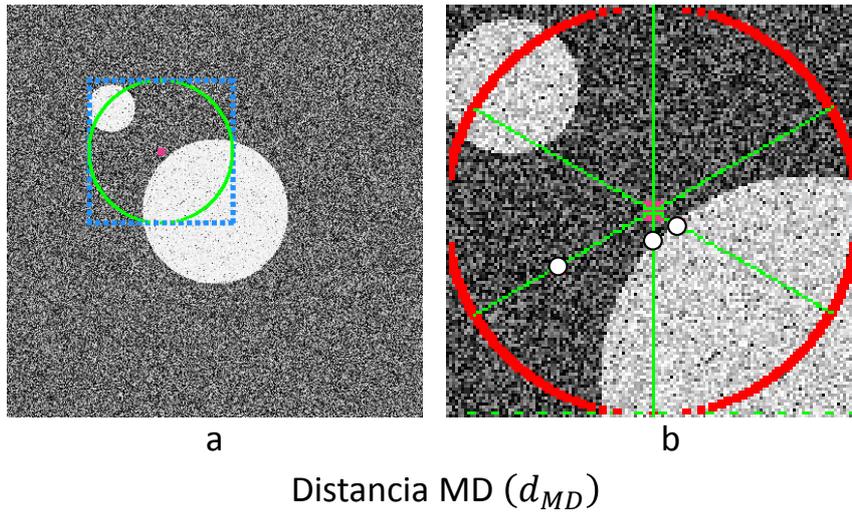


Figura 10.7: Puntos de borde estimados con d_{MD} . Canal HH

En la Figura 10.8 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

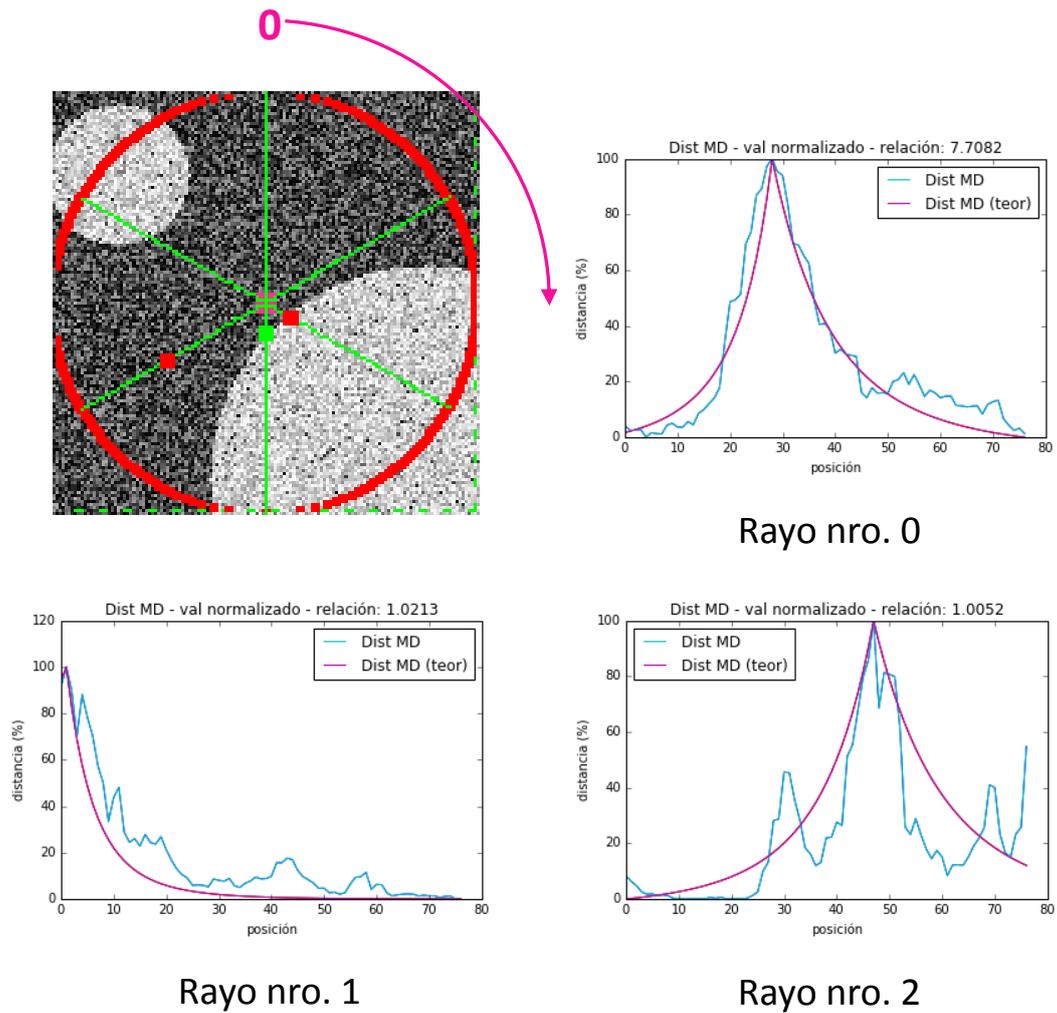


Figura 10.8: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$

En la Figura 10.9 se puede observar en el sector de 257×257 píxeles las *PPB* estimadas, usando d_{MD} y d_{KL} .

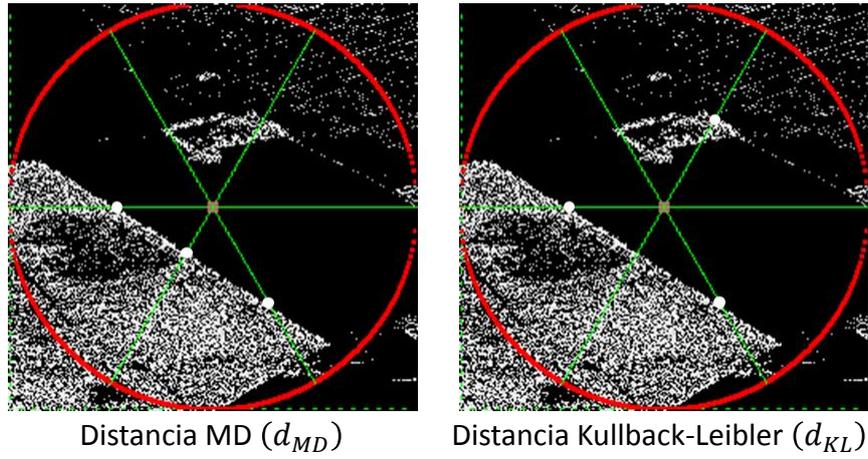


Figura 10.9: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HH.

En la Figura 10.10 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

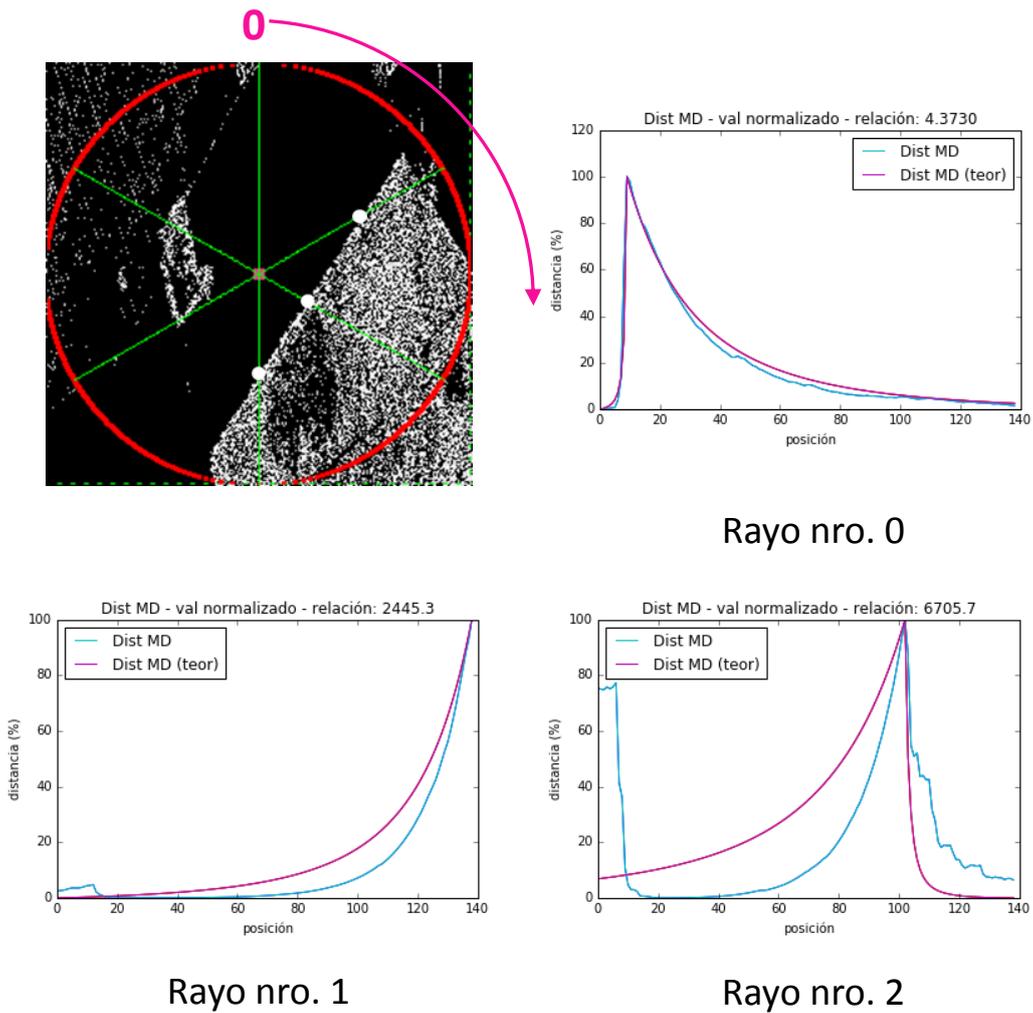


Figura 10.10: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$

En la Figura 10.11 se puede observar otro sector seleccionado de 165×165 píxeles, que se usa para la estimación de tres *PPB*.

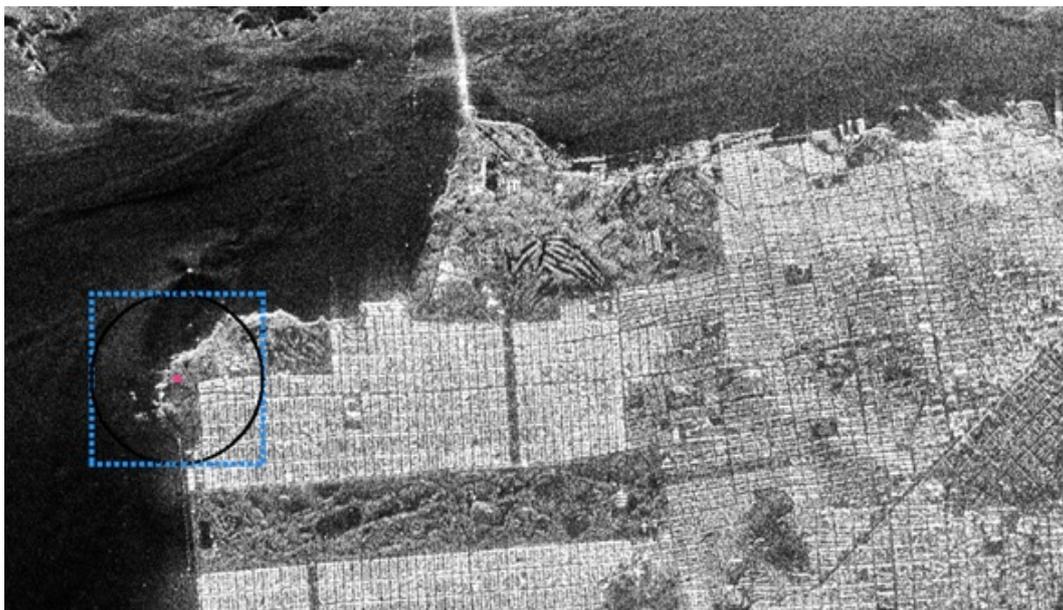


Figura 10.11: Visualización de una imagen *PolSAR*, canal HH. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU. (Uso de la IdeU)

En la Figura 10.12 se puede observar en el sector de 165×165 píxeles las 3 *PPB* estimadas, usando d_{MD} y d_{KL} .

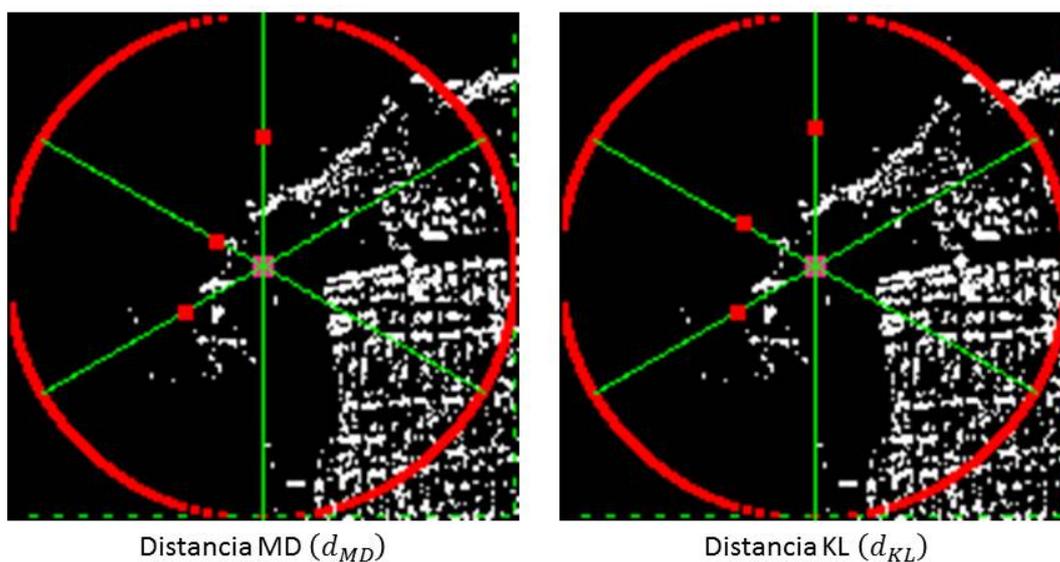


Figura 10.12: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HH

En la Figura 10.13 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

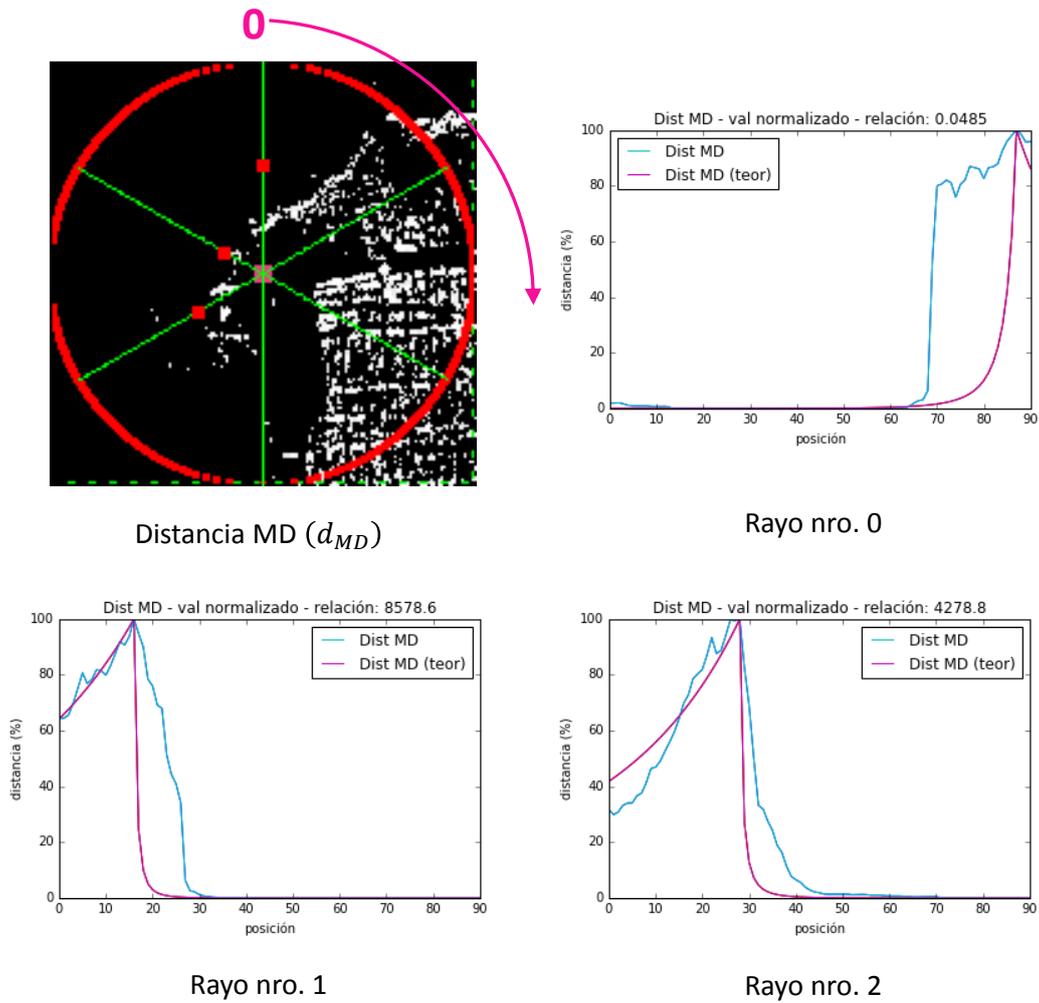


Figura 10.13: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$. 165×165 píxeles. Canal HH.

En la Figura 10.14 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se puede observar otro sector seleccionado de 193×193 píxeles, que se usa para la estimación de tres PPB .

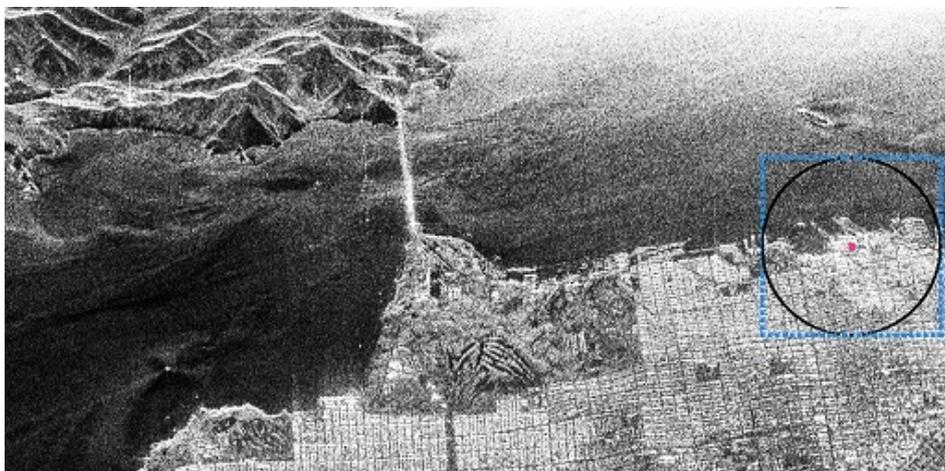


Figura 10.14: Visualización de una imagen *PolSAR*. Canal HH. (Uso de la IdeU)

En la Figura 10.15 se puede observar en el sector de 193×193 píxeles las 3 *PPB* estimadas, usando d_{MD} y d_{KL} .

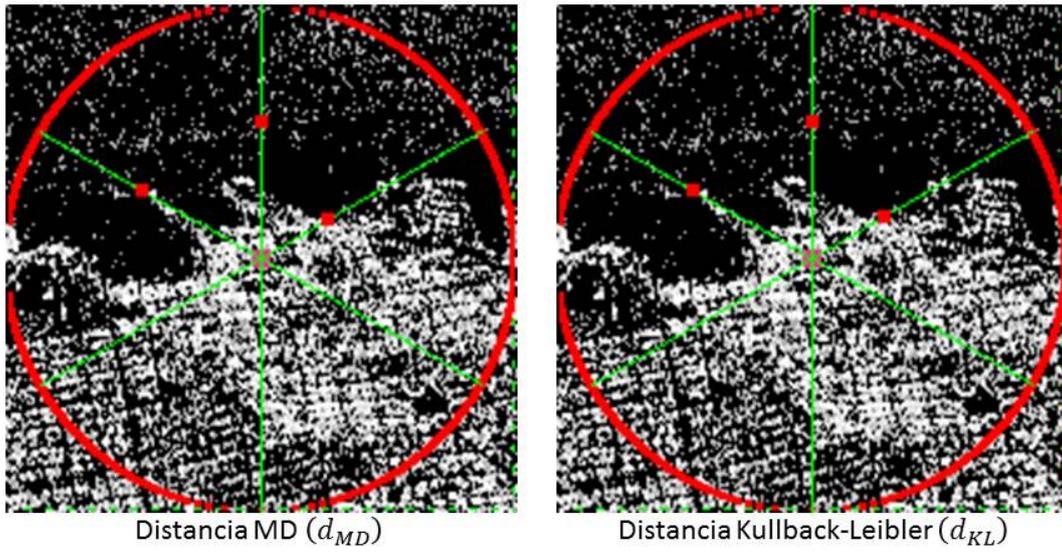


Figura 10.15: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal VV.

En la Figura 10.16 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

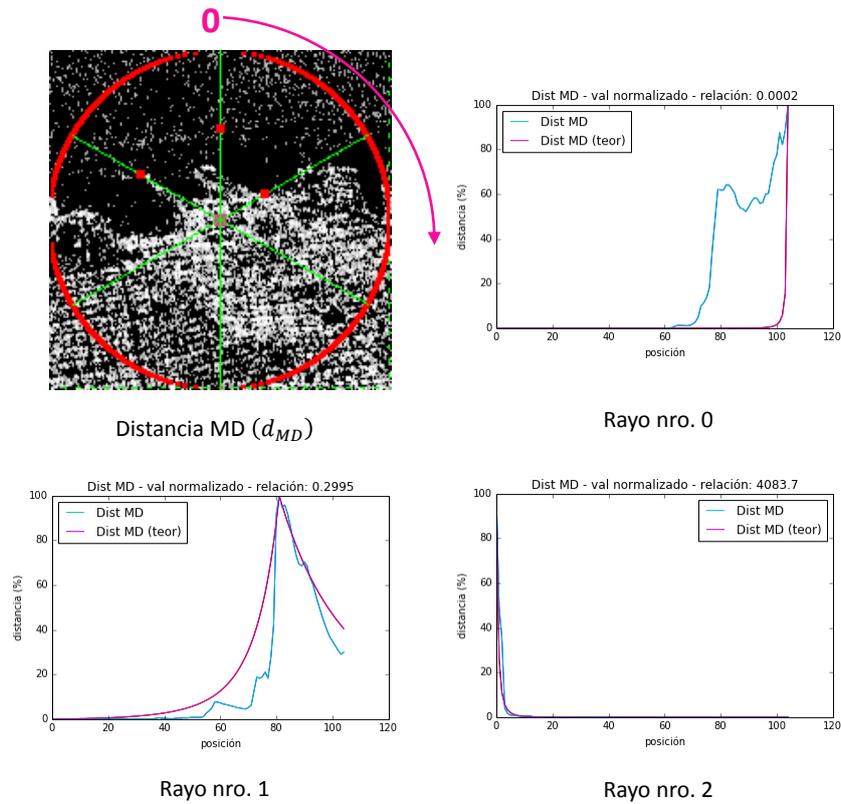


Figura 10.16: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$. 193×193 píxeles. Canal VV.

En la Figura 10.17 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se puede observar otro sector seleccionado de 173×173 píxeles, que se usa para la

estimación de tres PPB .

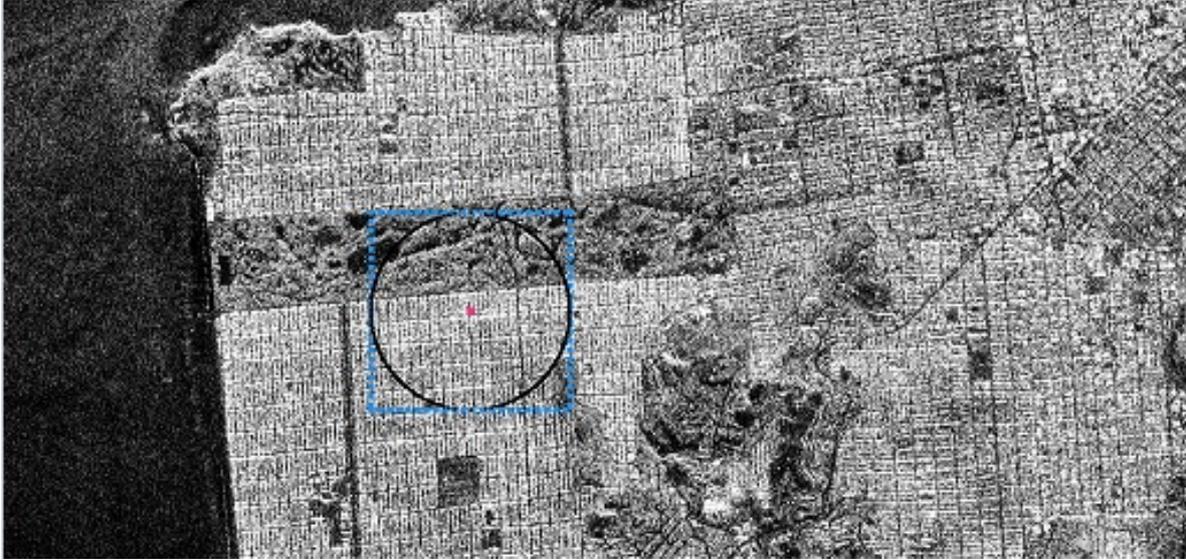


Figura 10.17: Visualización de una imagen *PolSAR*. Canal VV. (Uso de la IdeU)

En la Figura 10.18 se puede observar en el sector de 173×173 píxeles las 3 PPB estimadas, usando d_{MD} y d_{KL} .

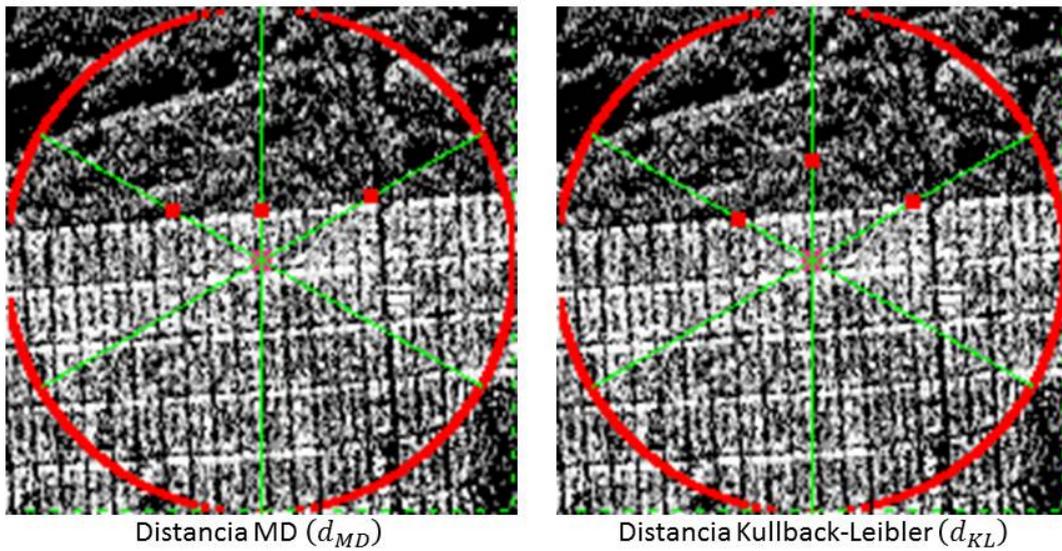


Figura 10.18: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal VV.

En la Figura 10.19 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

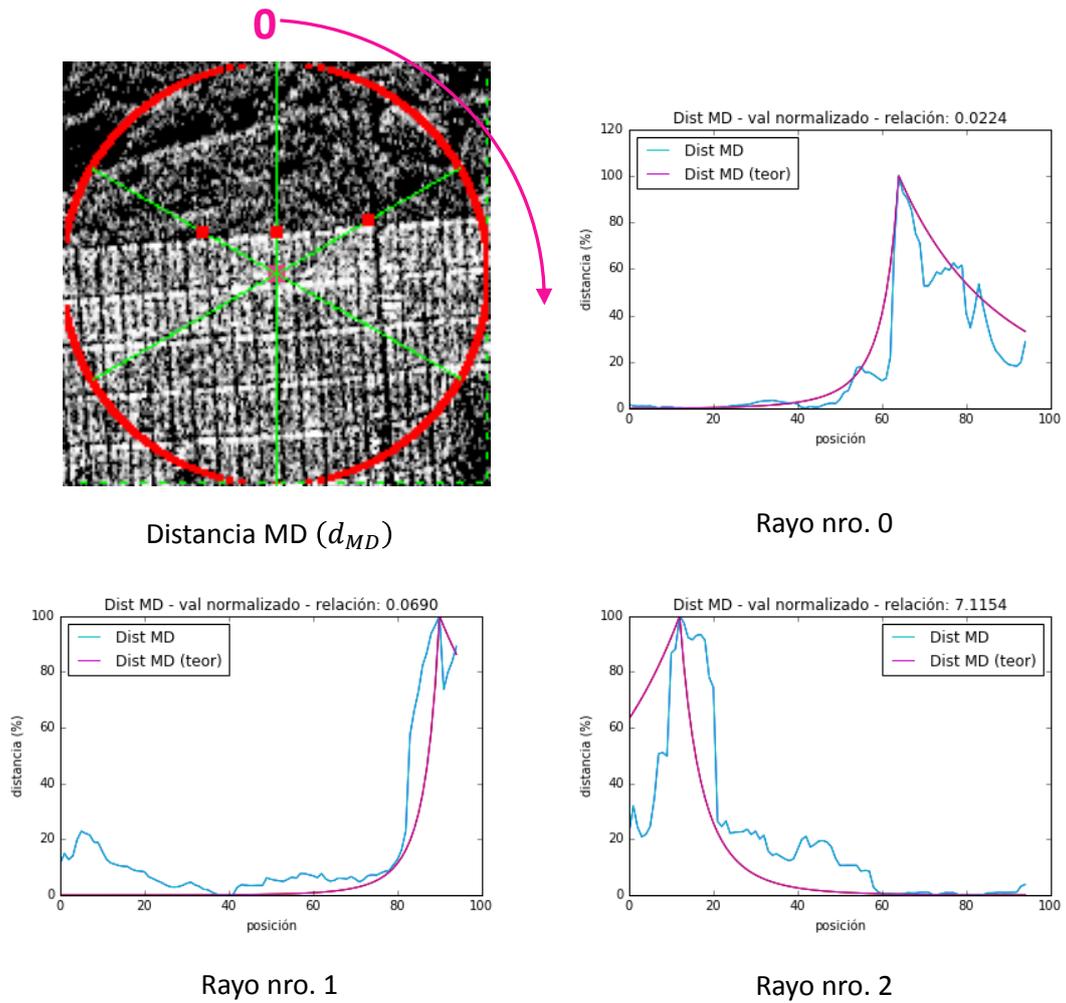


Figura 10.19: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{ideal}}$. 173×173 píxeles. Canal VV.

En la Figura 10.20 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se puede observar otro sector seleccionado de 275×275 píxeles, que se usa para la estimación de seis PPB .

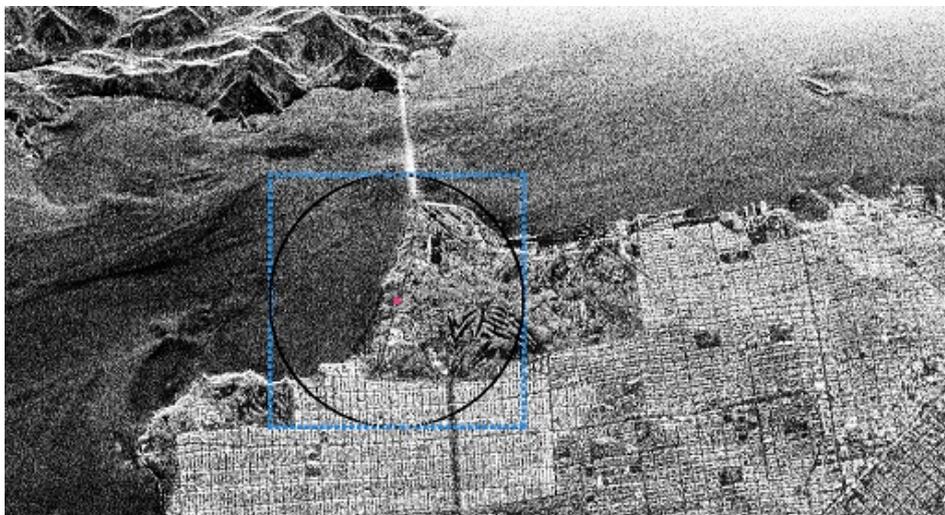


Figura 10.20: Visualización de una imagen *PolSAR*. Canal VV. (Uso de la IdeU)

En la Figura 10.21 se puede observar en el sector de 275×275 píxeles las 6 *PPB* estimadas, usando d_{MD} y d_{KL} .

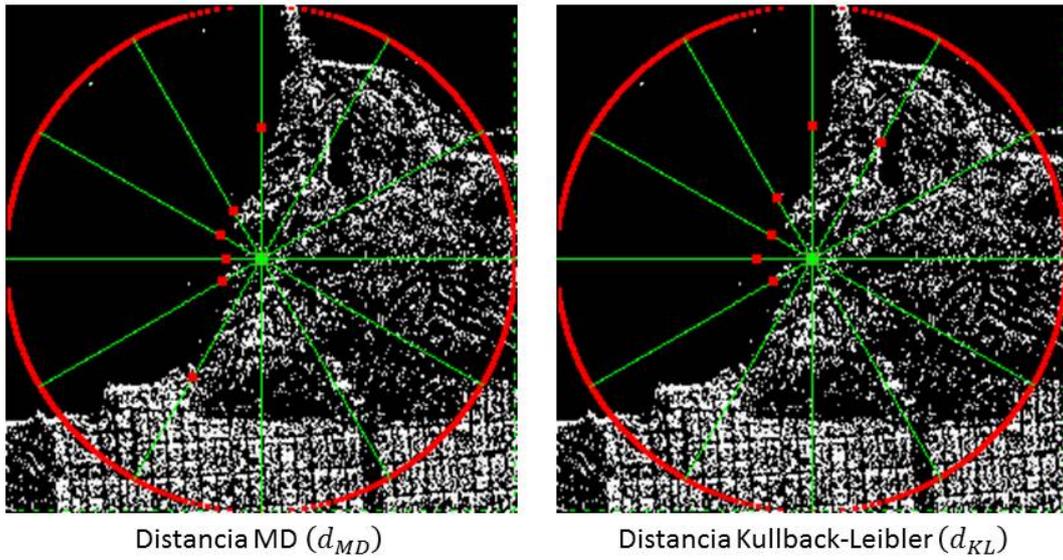


Figura 10.21: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HV-VV

En las Figuras 10.22 y 10.23 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

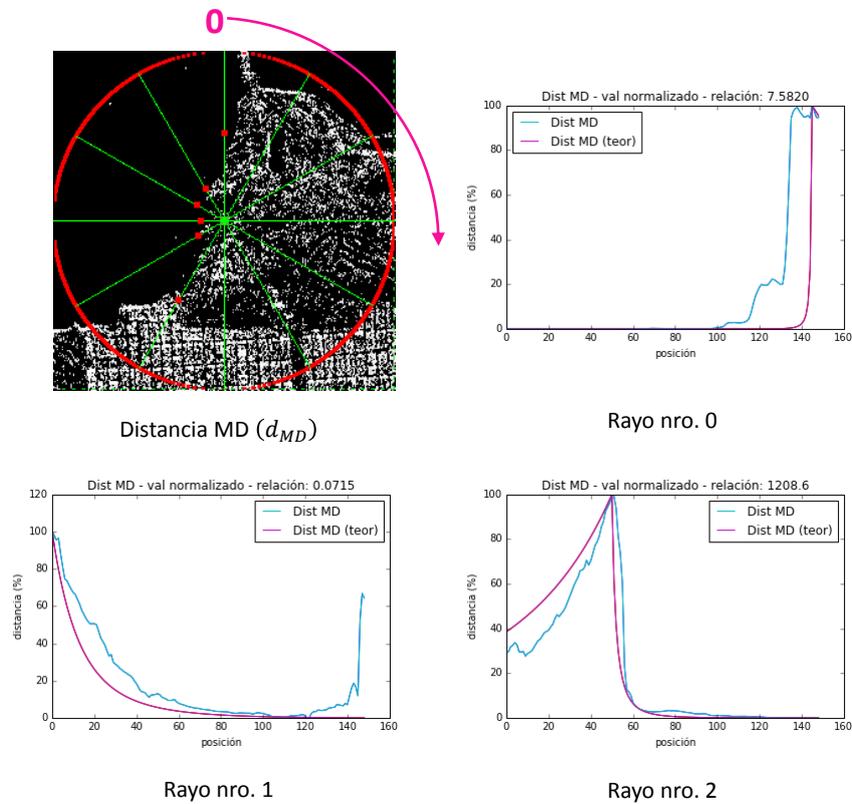


Figura 10.22: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$. 275×275 píxeles. Canal HV-VV.

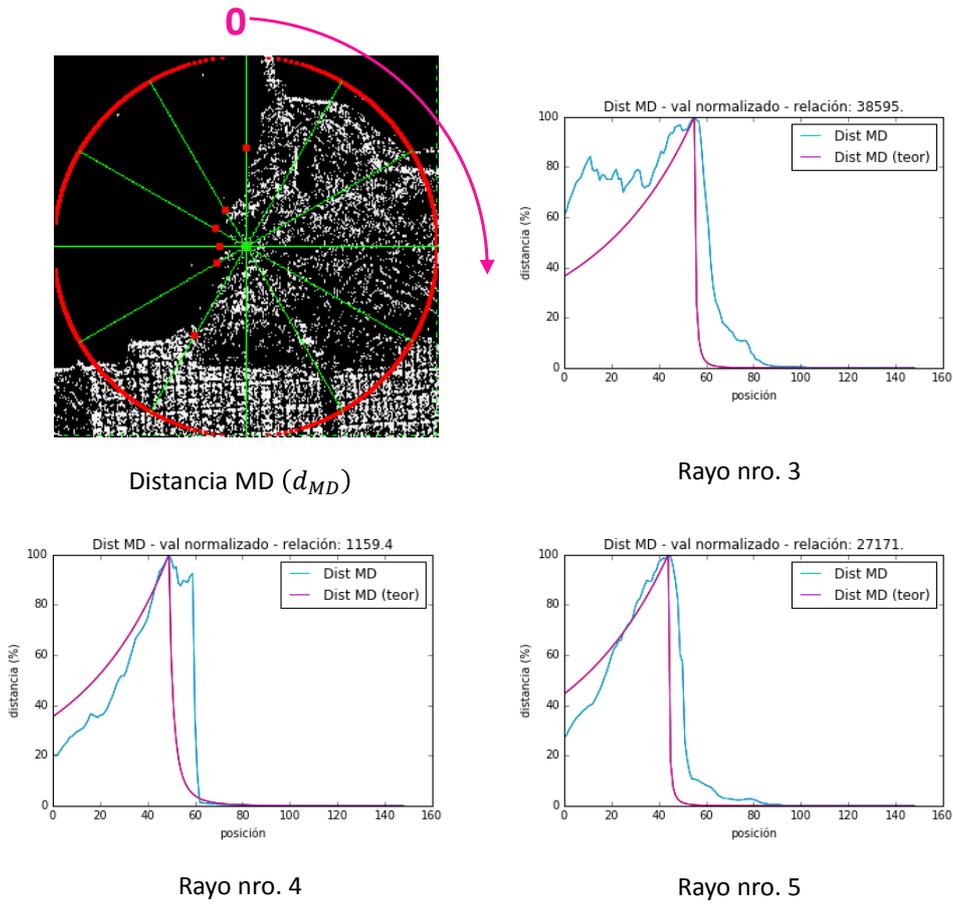


Figura 10.23: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{ideal}}$. 275×275 píxeles. Canal HV-VV.

En la Figura 10.24 se puede observar el delineado del borde que separa las regiones, usando d_{MD} y d_{KL} .

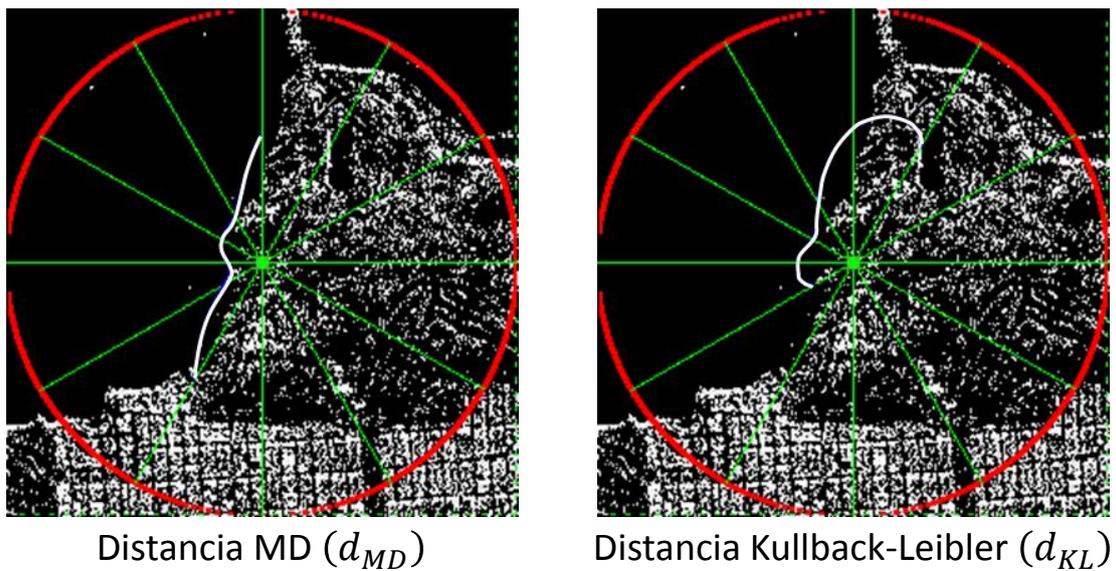


Figura 10.24: Sector seleccionado en una imagen *PolSAR*. Canal HV-VV

En la Figura 10.25 (AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.), se

puede observar otro sector seleccionado de 163×163 píxeles.



Figura 10.25: Imagen *PolSAR*. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.

En la Figura 10.26 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

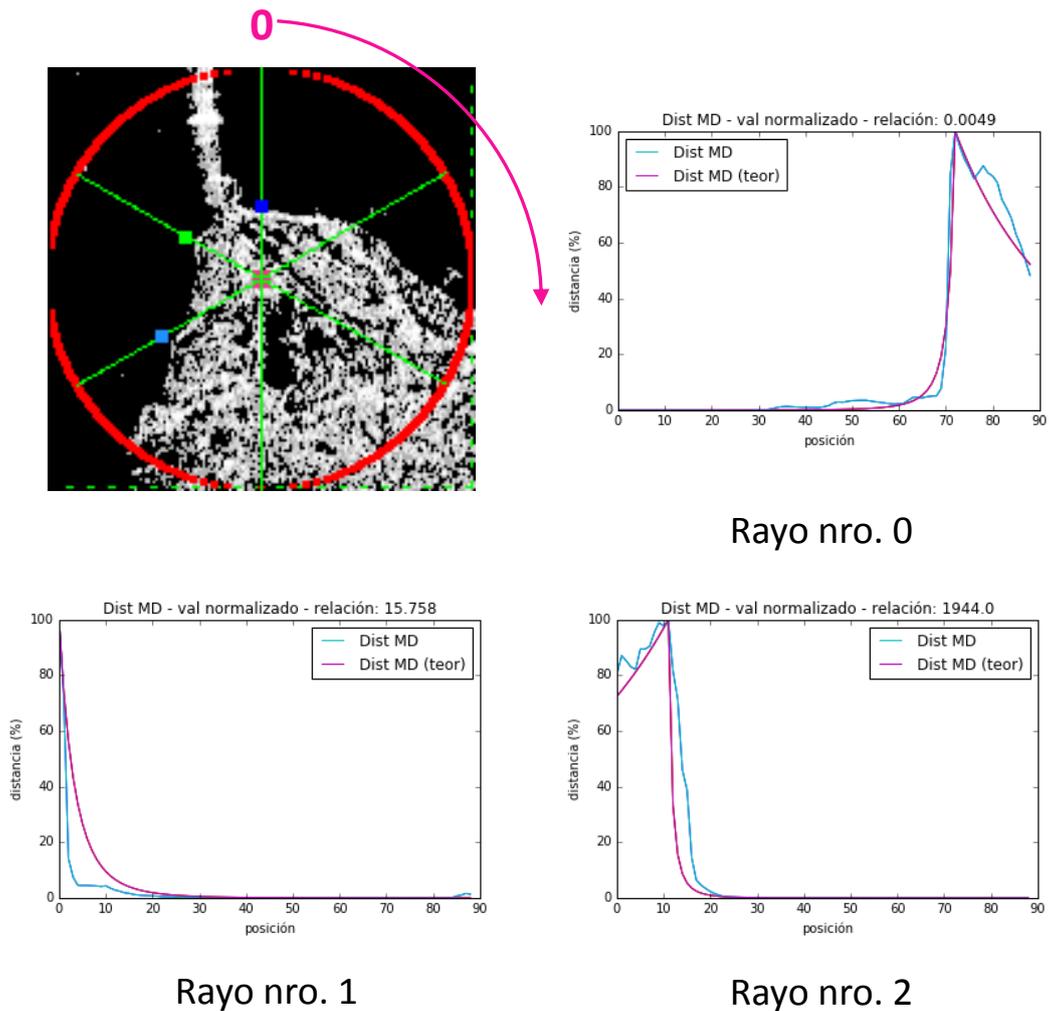


Figura 10.26: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

En la Figura 10.27, se puede observar otro sector seleccionado de 185×185 píxeles.

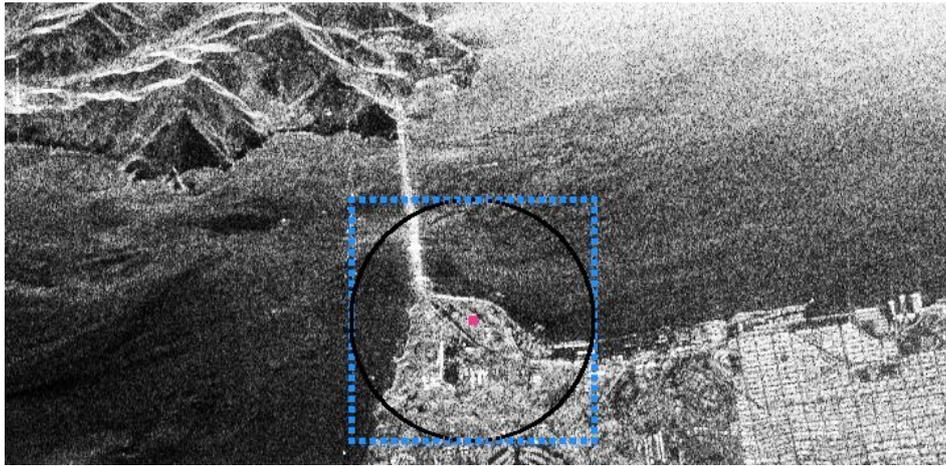


Figura 10.27: Imagen *PolSAR*. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.

En la Figura 10.28 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

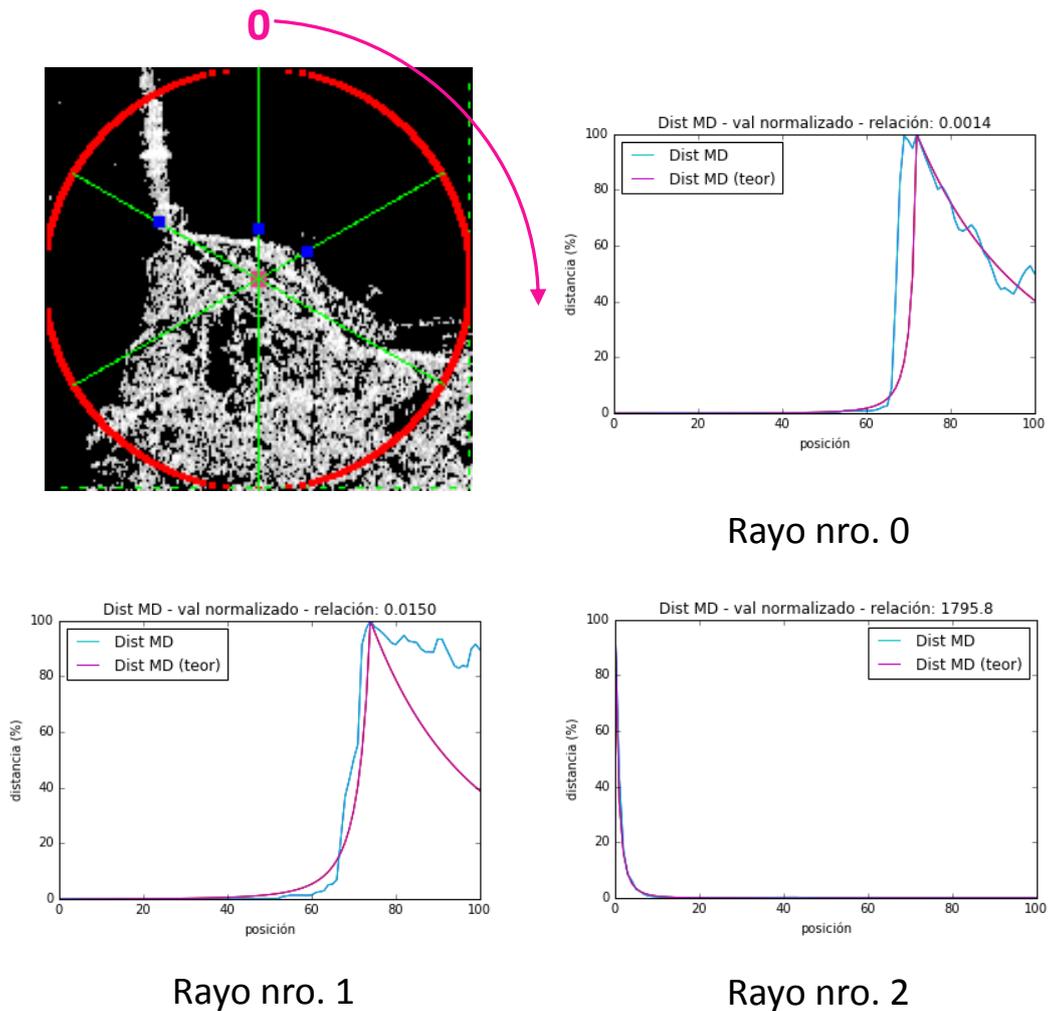


Figura 10.28: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

En la Figura 10.29, se puede observar otro sector seleccionado de 217×217 píxeles.

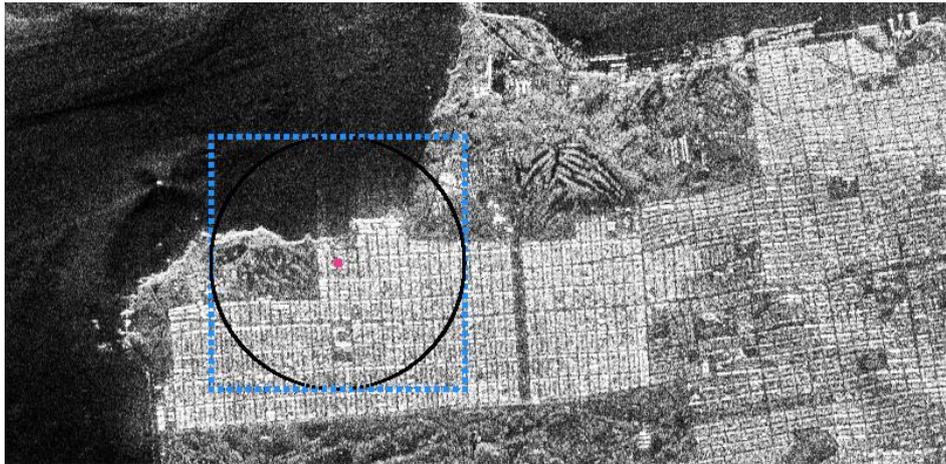


Figura 10.29: Imagen *PolSAR*. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.

En la Figura 10.30 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

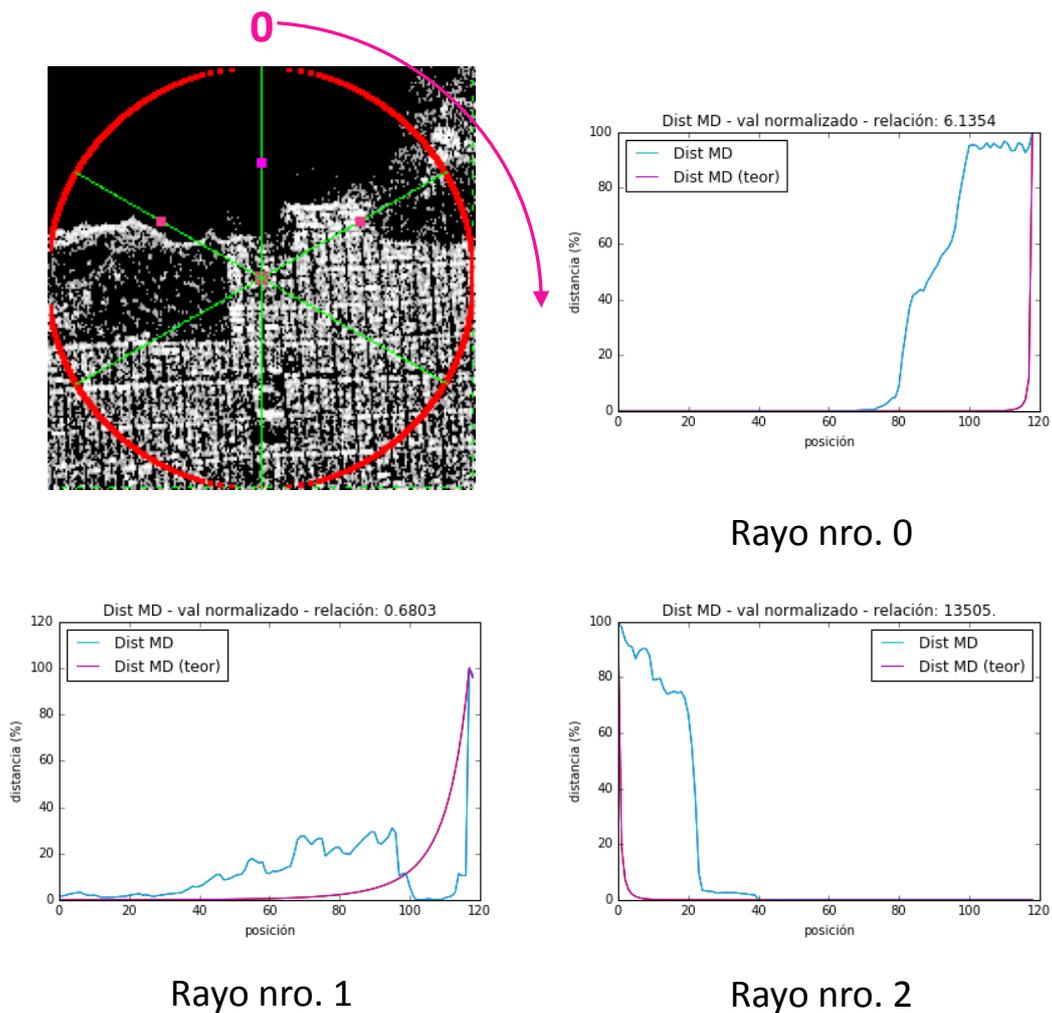


Figura 10.30: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

En la Figura 10.31, se puede observar otro sector seleccionado de 161×161 píxeles.



Figura 10.31: Imagen *PolSAR*. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.

En la Figura 10.32 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

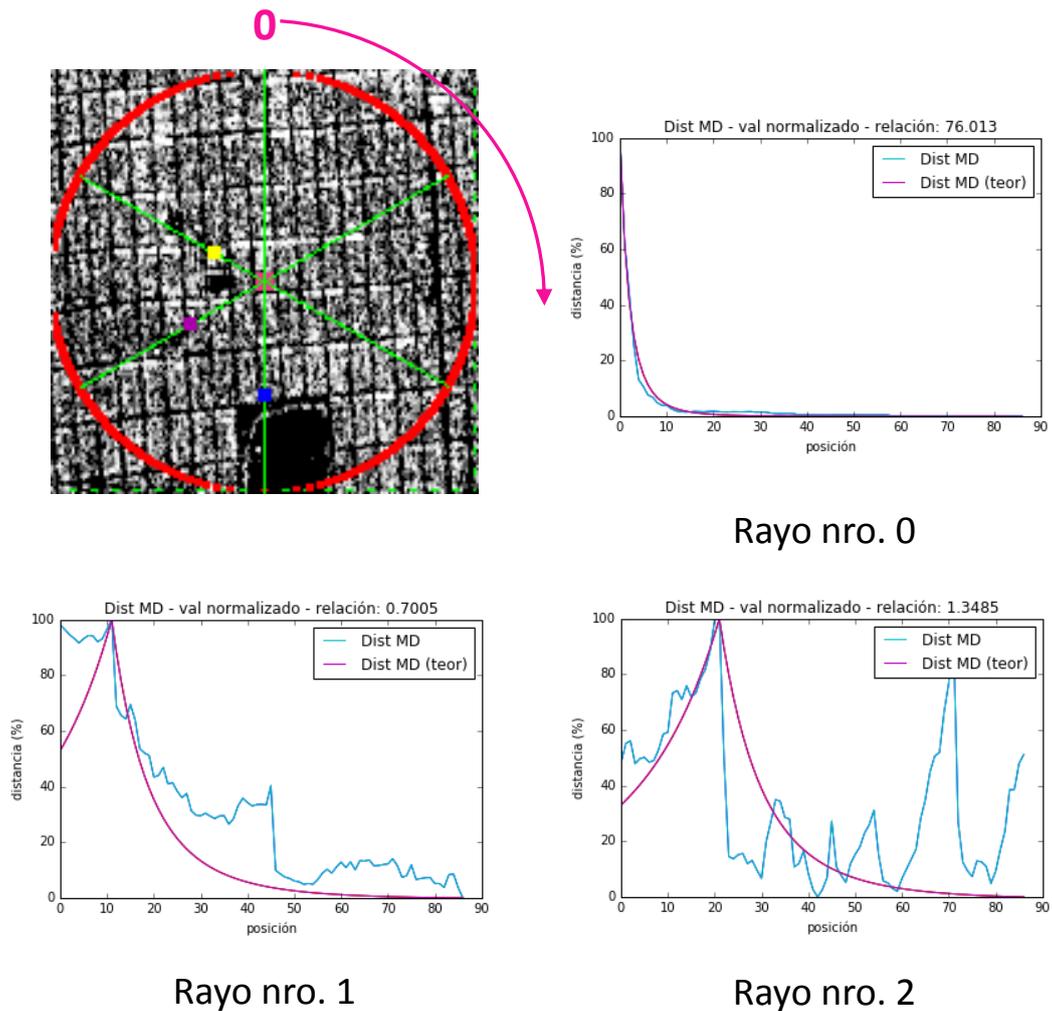


Figura 10.32: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

En la Figura 10.33, se puede observar otro sector seleccionado de 171×171 píxeles.

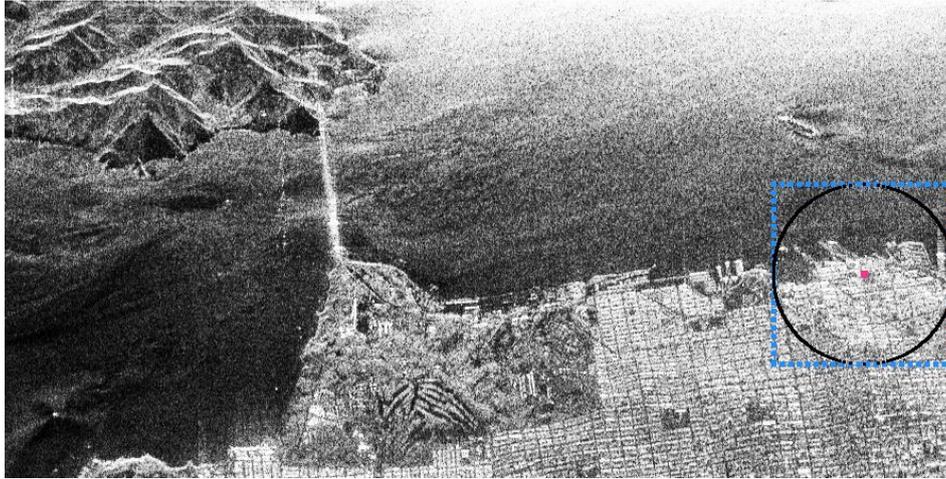


Figura 10.33: Imagen *PolSAR*. AIRSAR - Bahía de San Francisco, California, EE. UU.

En la Figura 10.34 se pueden observar las gráficas de las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$ y las posiciones de borde coloreadas con el código de color “ g_c ”.

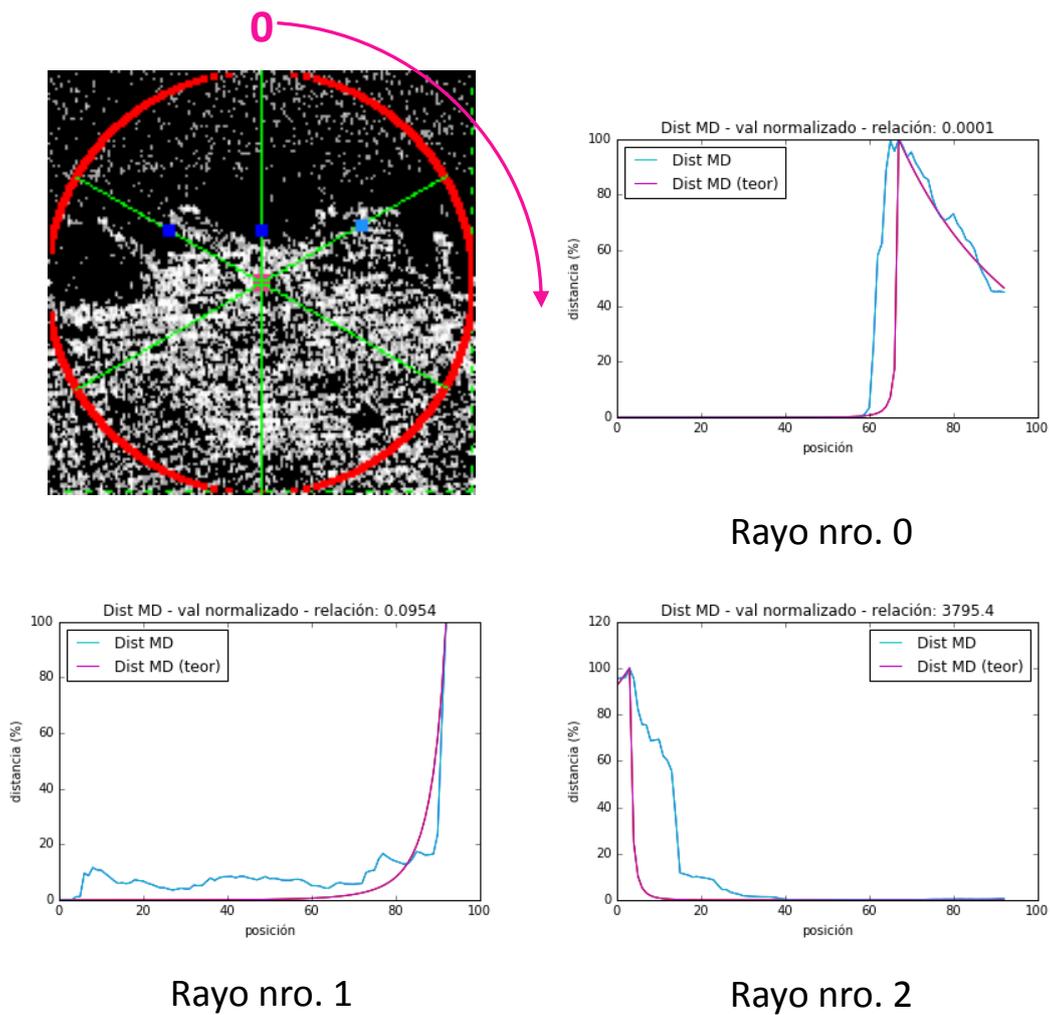


Figura 10.34: Puntos de borde, curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$.

10.5. Conclusiones

- Dado que d_{MD} hereda características de el MD , por lo mismo resulta ser en sí una síntesis, un modelo unificado de las distancias propuestas, vistas en la sección 9.4 para la estimación de la posición de puntos de borde.
- Permite estimar eficientemente posiciones de borde y por ser una expresión sintética o reducida con respecto a las expresiones vistas en la sección 9.4, realiza un menor número de operaciones con respecto a esas expresiones y por lo tanto se obtienen resultados en un menor tiempo de procesamiento.
- El menor número de operaciones que realiza d_{MD} pone en evidencia que las otras expresiones realizan operaciones carentes de utilidad a los efectos de estimar las PPB .
- Al igual que con el MD se aplica en todo par (Σ_X, Σ_Y) .
- En los ensayos realizados en este trabajo, al comparar tiempos de procesamiento para estimar PPB , se observa que d_{MD} siempre arroja el menor tiempo de procesamiento. En la Tabla 10.2 se puede apreciar la relación de tiempos de procesamiento entre d_{KL} y d_{MD} .
- Se puede observar en las imágenes o figuras expuestas, que en la mayoría de los casos existe gran similitud en las estimaciones de PPB usando d_{MD} y d_{KL} .
- Particularmente en las Figuras 10.9, 10.12 , 10.18 y 10.21, se puede observar que d_{MD} estima mejor las PPB . Y se aprecia un mejor delineado del borde en la Figura 10.24.
- En Figuras donde aparecen las curvas d_{MD} y $d_{MD_{Ideal}}$, puede observarse que en algunas casos las curvas son muy similares y en otros casos difieren sensiblemente. Esto se asocia a la presencia de heterogeneidad en el sector y por lo tanto en la muestra. Una de las condiciones del modelo establece que la matriz de covarianzas de todo subconjunto de una determinada región, debe ser igual a la matriz de covarianzas de toda la región. Esta condición se aplica perfectamente en una región homogénea (donde la distribución de todos los datos está bien caracterizada por una única matriz de covarianzas). En consecuencia, la heterogeneidad en la distribución de los datos de la muestra influye en la representación gráfica de la

función d_{MD} y da como resultado una curva diferente a la representada con la función $d_{MD_{ideal}}$. Esa diferencia cualitativa, o de forma, entre ambas curvas puede ser motivo de investigación en estudios posteriores a los efectos de evaluar si es posible usar esa variación como complemento en la estimación de PPB .

- Los datos de tabla y las figuras muestran que la distancia estocástica d_{MD} estima PPB consumiendo menos tiempo de procesamiento que el tiempo de procesamiento consumido cuando se usa la distancia d_{KL} , esto es una consecuencia del modelo o expresión analítica de d_{MD} , que es síntesis de otras expresiones. Y es en sí misma, una expresión optimizada pues en algunos casos estima PPB con mayor precisión que d_{KL} .
- Esta nueva distancia d_{MD} permite obtener un buen delineado de las regiones de la imagen con muy poco tiempo de procesamiento, el correcto delineado puede usarse para una posterior segmentación. Que pueda realizarse en muy poco tiempo de procesamiento es deseable en situaciones de alerta temprana donde se necesita una rápida y eficiente interpretación de la imagen.

Apéndice A

Transformada de Fourier de la frecuencia de batido

En la sección 3.5.4 del capítulo 3, se muestra la expresión final de $S_b(f)$, que proviene de la transformada de Fourier de $S_b(t)$ y permite obtener un pulso sinc para poder conocer la frecuencia de batido f_b de la señal. Con esta frecuencia es posible calcular la distancia R entre el radar y blanco.

A partir de la ec. (3.41) y agrupando los términos constantes se obtiene una nueva expresión de $S_b(t)$:

$$\begin{aligned} S_b(t) &= A_b \Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right) e^{j\omega_0 t_r} e^{j2\pi k_c t_r t} e^{-j\pi k_c t_r^2} = \\ &A_b \Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right) e^{j(\omega_0 t_r - \pi k_c t_r^2)} e^{j2\pi k_c t_r t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Se define $k_1 = A_b e^{j(\omega_0 t_r - \pi k_c t_r^2)}$

$$S_b(t) = k_1 \Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right) e^{j2\pi k_c t_r t} \quad (\text{A.2})$$

Se plantea la transformada de Fourier de $S_b(t)$

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_b(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (\text{A.3})$$

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right) e^{j2\pi k_c t_r t} e^{-j2\pi f t} dt \quad (\text{A.4})$$

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = k_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-t_r}{\tau_0}\right) e^{-j2\pi(f-k_c t_r)t} dt \quad (\text{A.5})$$

La señal es distinta de cero dentro de los límites del pulso de amplitud 1 y se pueden cambiar los límites de la integral en el intervalo del pulso en que este es distinto de cero. Pulso centrado en $t_0 = 0$ y ancho $\tau_0/2$.

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = k_1 \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{-j2\pi(f-k_ct_r)t} dt \quad (\text{A.6})$$

Se define $\varphi = -j2\pi(f - k_ct_r)t$.

$$\begin{aligned} S_b(f) &= \mathcal{F}(S_b(t)) = k_1 \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{\varphi t} dt = k_1 \frac{e^{\varphi t}}{\varphi} \Big|_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} = k_1 \frac{e^{\varphi\tau_0/2} - e^{-\varphi\tau_0/2}}{\varphi} \\ &= k_1 \frac{e^{-j2\pi(f-k_ct_r)\tau_0/2} - e^{j2\pi(f-k_ct_r)\tau_0/2}}{-j2\pi(f - k_ct_r)} = k_1 \frac{e^{j2\pi(f-k_ct_r)\tau_0/2} - e^{-j2\pi(f-k_ct_r)\tau_0/2}}{j2\pi(f - k_ct_r)} \\ &= k_1 \frac{\sin \pi(f - k_ct_r)\tau_0}{\pi(f - k_ct_r)} = k_1 \frac{\tau_0 \sin(\pi\tau_0(f - k_ct_r))}{\tau_0 \pi(f - k_ct_r)} = k_1 \tau_0 \text{sinc}(\pi\tau_0(f - k_ct_r)) \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Se define $k_2 = k_1\tau_0$ y $S_b(f)$ se puede expresar como:

$$S_b(f) = \mathcal{F}(S_b(t)) = k_2 \text{sinc}(\pi\tau_0(f - k_ct_r)) \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Transformación de la función de verosimilitud

La *PDF* de la distribución Wishart compleja expresada en la ec. (5.30) como $f_z(\mathbf{Z}', \boldsymbol{\Sigma}, L)$ es:

$$f_z(\mathbf{Z}', \boldsymbol{\Sigma}, L) = \frac{L^{mL} |\mathbf{Z}'|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}')) \quad (\text{B.1})$$

Donde, \mathbf{Z}' representa los posibles resultados de \mathbf{Z} , siendo \mathbf{Z}' una matriz hermitiana definida positiva; $\boldsymbol{\Sigma}$ es el valor estimado de la matriz de covarianzas; L es el número de looks; $m = 3$ es el número de canales de polarización; $\Gamma_m(L)$ es la función Gamma polarimétrica y $|\cdot|$ es el operador determinante de \cdot .

Separando los datos de la muestra en los conjuntos de datos A y B , tal como se detalla en 6.3.2, se puede expresar a la función de verosimilitud como:

$$p(j) = \prod_{k=1}^j f_z(\mathbf{Z}'_k; \boldsymbol{\Sigma}_A, L_A) \prod_{k=j+1}^N f(\mathbf{Z}'_k; \boldsymbol{\Sigma}_B, L_B) \quad (\text{B.2})$$

Donde j es la posición del pixel que determina la partición dentro del segmento, $\boldsymbol{\Sigma}_A$ y $\boldsymbol{\Sigma}_B$ son valores estimados de las matrices de covarianzas de los conjuntos A y B que satisfacen las siguientes condiciones para \mathbf{Z}'_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_k &\in A && \text{para } k = [1, \dots, j] \\ \mathbf{Z}'_k &\in B && \text{para } k = [j + 1, \dots, N] \end{aligned}$$

Reemplazando la ec. (B.1) en la ec. (B.2) para los conjuntos A y B :

$$p(j) = \prod_{k=1}^j \frac{L_A^{mL_A} |\mathbf{Z}'_k|^{L_A-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_A|^{L_A} \Gamma_m(L_A)} e^{-L_A \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)} \prod_{k=j+1}^N \frac{L_B^{mL_B} |\mathbf{Z}'_k|^{L_B-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_B|^{L_B} \Gamma_m(L_B)} e^{-L_B \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 p(j) &= \prod_{k=1}^j \frac{L_A^{mL_A}}{|\Sigma_A|^{L_A} \Gamma_m(L_A)} |\mathbf{Z}'_k|^{L_A-m} e^{-L_A \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)} \\
 &\quad \prod_{k=j+1}^N \frac{L_B^{mL_B}}{|\Sigma_B|^{L_B} \Gamma_m(L_B)} |\mathbf{Z}'_k|^{L_B-m} e^{-L_B \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

De lo expresado en 6.3.5 resulta $L_A = L_B = L$:

$$\begin{aligned}
 p(j) &= \prod_{k=1}^j \frac{L^{mL}}{|\Sigma_A|^L \Gamma_m(L)} |\mathbf{Z}'_k|^{L-m} e^{-L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)} \\
 &\quad \prod_{k=j+1}^N \frac{L^{mL}}{|\Sigma_B|^L \Gamma_m(L)} |\mathbf{Z}'_k|^{L-m} e^{-L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 p(j) &= \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_A|^L \Gamma_m(L)} \right)^j \prod_{k=1}^j |\mathbf{Z}'_k|^{L-m} e^{-L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)} \\
 &\quad \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_B|^L \Gamma_m(L)} \right)^{N-j} \prod_{k=j+1}^N |\mathbf{Z}'_k|^{L-m} e^{-L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Se aplica logaritmo en la ec. (B.6):

$$\ell(j) = \ln p(j) \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \ell(j) &= j \ln \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_A|^L \Gamma_m(L)} \right) + \\
 &\quad \sum_{k=1}^j (L-m) \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + (N-j) \ln \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_B|^L \Gamma_m(L)} \right) + \\
 &\quad \sum_{k=j+1}^N (L-m) \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$\ell(j)$ se expresa como suma de los términos $\ell_A(j)$ y $\ell_B(j)$:

$$\ell(j) = \ell_A(j) + \ell_B(j) \tag{B.9}$$

Tal que:

$$\begin{aligned}
 \ell_A(j) &= j \ln \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_A|^L \Gamma_m(L)} \right) + \\
 &\quad \sum_{k=1}^j (L-m) \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k)
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
 \ell_B(j) &= (N-j) \ln \left(\frac{L^{mL}}{|\Sigma_B|^L \Gamma_m(L)} \right) + \\
 &\quad \sum_{k=j+1}^N (L-m) \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned} \ell_A(j) = & j(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L) - L \ln |\Sigma_A|) + \\ & (L - m) \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \ell_B(j) = & (N - j)(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L) - L \ln |\Sigma_B|) + \\ & (L - m) \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$\ell_A(j)$ y $\ell_B(j)$ se expresa como suma de los siguientes términos:

$$\ell_A(j) = \ell_{A1}(j) + \ell_{A2}(j) \quad (\text{B.14})$$

$$\ell_B(j) = \ell_{B1}(j) + \ell_{B2}(j) \quad (\text{B.15})$$

Tal que:

$$\ell_{A1}(j) = j(-L \ln |\Sigma_A|) + (L - m) \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - L \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \quad (\text{B.16})$$

$$\ell_{A1}(j) = L \left(-j \ln |\Sigma_A| + \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right) - m \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| \quad (\text{B.17})$$

$$\ell_{A2}(j) = j(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \ell_{B1}(j) = & (N - j)(-L \ln |\Sigma_B|) + (L - m) \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \\ & L \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \ell_{B1}(j) = & L \left(-(N - j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right) - \\ & m \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\ell_{B2}(j) = (N - j)(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \quad (\text{B.21})$$

Siendo:

$$\ell_{A2}(j) + \ell_{B2}(j) = j(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) + (N - j)(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \quad (\text{B.22})$$

Se define $\ell_{AB2}(j)$ como:

$$\ell_{AB2}(j) = \ell_{A2}(j) + \ell_{B2}(j) = N(mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \quad (\text{B.23})$$

$\ell(j)$ se expresa como suma de los términos definidos en las ecuaciones (B.17), (B.20) y (B.23):

$$\ell(j) = \ell_{A1}(j) + \ell_{B1}(j) + \ell_{AB2}(j) \quad (\text{B.24})$$

Se define $\ell_{A1}(j)$ como:

$$\ell_{A1}(j) = L\ell_{A1}^I(j) + \ell_{A1}^{II}(j) \quad (\text{B.25})$$

Se define $\ell_{B1}(j)$ como:

$$\ell_{B1}(j) = L\ell_{B1}^I(j) + \ell_{B1}^{II}(j) \quad (\text{B.26})$$

Tal que:

$$\ell_{A1}^I(j) = -j \ln |\Sigma_A| + \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \quad (\text{B.27})$$

$$\ell_{A1}^{II}(j) = -m \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| \quad (\text{B.28})$$

$$\ell_{B1}^I(j) = -(N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \quad (\text{B.29})$$

$$\ell_{B1}^{II}(j) = -m \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \quad (\text{B.30})$$

Se define $\ell_{AB1}^{II}(j)$ como suma de los términos definidos en las ecuaciones (B.28) y (B.30):

$$\begin{aligned} \ell_{AB1}^{II} &= \ell_{A1}^{II}(j) + \ell_{B1}^{II}(j) = -m \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - m \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| = \\ &= -m \left(\sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| + \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\ell_{AB1}^{II}(j) = -m \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) \quad (\text{B.32})$$

De las ecuaciones (B.24), (B.25), (B.26) y (B.32):

$$\ell(j) = L\ell_{A1}^I(j) + L\ell_{B1}^I(j) + \ell_{AB1}^{II}(j) + \ell_{AB2}(j) \quad (\text{B.33})$$

$$\ell(j) = L(\ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j)) + \ell_{AB1}^{II}(j) + \ell_{AB2}(j) \quad (\text{B.34})$$

Operando sobre $\ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j)$:

$$\begin{aligned} & \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ & -j \ln |\Sigma_A| + \sum_{k=1}^j \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) - \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$(N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=j+1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} & \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ & -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\text{tr}(\Sigma_A^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k) - \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k) \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} & \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ & -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\text{tr}(\Sigma_A^{-1} j \Sigma_A) - \text{tr}(\Sigma_B^{-1} (N-j) \Sigma_B) \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} & \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ & -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - \end{aligned}$$

$$j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \Sigma_A) - (N-j) \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \Sigma_B) \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} & \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ & -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

$$\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - 3j - 3(N-j) \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned} \ell_{A1}^I(j) + \ell_{B1}^I(j) = \\ -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - 3N \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

De las ecuaciones (B.44), (B.32) y (B.23):

$$\ell(j) = \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} L \left(-j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| + \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| - 3N \right) \\ - m \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) + N (mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\ell(j) =$$

$$\begin{aligned} L (-j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B|) - 3NL + \\ (L-m) \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) + N (mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Los siguientes términos no dependen de j , por lo tanto:

$$-3NL = \text{cte.}$$

$$(L-m) \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) = \text{cte.} \quad (\text{B.48})$$

$$N (mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) = \text{cte.}$$

Se define la constante b como suma de términos constantes:

$$b = -3NL + (L-m) \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) + N (mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \quad (\text{B.49})$$

Se define $\ell^e(j)$ como:

$$\ell^e(j) = -j \ln |\Sigma_A| - (N-j) \ln |\Sigma_B| \quad (\text{B.50})$$

Finalmente, $\ell(j)$ se puede expresar como:

$$\ell(j) = L\ell^e(j) + b \quad (\text{B.51})$$

Apéndice C

Síntesis hacia una misma expresión lineal

En el apéndice B se demostró que a partir de las siguiente expresión

$$\begin{aligned} \ell(j) = & L (-j \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}| - (N - j) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{B_j}|) - 3NL + \\ & (L - m) \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}'_k| \right) + N (mL \ln L - \ln \Gamma_m(L)) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Se puede definir

$$\ell^e(j) = -j \ln |\boldsymbol{\Sigma}_A| - (N - j) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_B| \quad (\text{C.2})$$

Tal que

$$\ell(j) = L \ell^e(j) + b \quad \text{con } L = \text{cte.}, b = \text{cte.} \quad (\text{C.3})$$

Se quiere demostrar que, partiendo de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \ell(j) = & N [-mL(1 - \ln L) - \ln \Gamma_m(L)] - \\ & L [j \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}| + (N - j) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{B_j}|] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Es posible expresar $\ell(j)$ como:

$$\ell(j) = L \ell^e(j) + b \quad \text{con } L = \text{cte.}, b = \text{cte.} \quad (\text{C.5})$$

Demostración:

Se reacomodan los términos de la ec. (C.4)

$$\begin{aligned} \ell(j) = & L [-j \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{A_j}| - (N - j) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{B_j}|] + \\ & N [-mL(1 - \ln L) - \ln \Gamma_m(L)] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Se agrupan términos constantes de la ec. (C.6) en la siguiente expresión donde se redefine b :

$$b = N[-mL(1 - \ln L) - \ln \Gamma_m(L)] = \text{cte.} \quad (\text{C.7})$$

Reemplazando (C.2) y (C.7) en la ec. (C.6), $\ell(j)$ queda expresada como:

$$\ell(j) = L \ell^o(j) + b \quad \text{con } L = \text{cte.}, b = \text{cte.} \quad (\text{C.8})$$

Apéndice D

Transformación de Σ_{A_j} y Σ_{B_j}

- Análisis de Σ_{B_j} para $j < P$

Siendo $P - j = P - j + N - N = N - j - (N - P)$, la ec. (9.7) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\Sigma_{B_j} &= \frac{\Sigma_I[N - j - (N - P)] + \Sigma_{II}(N - P)}{N - j} = \\ &= \frac{\Sigma_I(N - j)}{N - j} - \frac{\Sigma_I(N - P)}{N - j} + \frac{\Sigma_{II}(N - P)}{N - j} = \Sigma_I + \frac{(\Sigma_{II} - \Sigma_I)(N - P)}{N - j} = \\ &= \Sigma_I + \frac{(q\Sigma_I - \Sigma_I)(N - P)}{N - j} = \Sigma_I + \frac{\Sigma_I(q - 1)(N - P)}{N - j} = \Sigma_I \left(1 + \frac{(q - 1)(N - P)}{N - j} \right)\end{aligned}$$

- Análisis de Σ_{A_j} para $j > P$

Siendo $P = P - j + j = j - (j - P)$, la ec. (9.9) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\Sigma_{A_j} &= \frac{\Sigma_I P + \Sigma_{II}(j - P)}{j} = \frac{\Sigma_I j - \Sigma_I(j - P) + \Sigma_{II}(j - P)}{j} = \\ &= \frac{\Sigma_I j + (\Sigma_{II} - \Sigma_I)(j - P)}{j} = \Sigma_I + \Sigma_{II} - \Sigma_I - \frac{(\Sigma_{II} - \Sigma_I)P}{j} = \Sigma_{II} - \frac{\Sigma_I(q - 1)P}{j}\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] B. N. Koopmans, “Space borne imaging radars. Present and future”, *TC Journal. Enschede. The Netherlands* , pp. 223–231, 1983.
- [2] T. Strozzi, A. Kouraev, A. Wiesmann, U. Wegmüller, A. Sharov, C. Werner, “Estimation of arctic glacier motion with satellite L-band SAR data”, *Remote Sensing of Environment* , vol. 112, no. 3, pp. 636–645, Mar. 2008.
- [3] J. A. Dowdeswell, B. Unwin, A. M. Nuttall, D. J. Wingham, “Velocity structure, flow instability and mass flux on a large Arctic ice cap from satellite radar interferometry”, *Earth and Planetary Science Letters* , vol. 167, no. 3, pp. 131–140, Apr. 1999.
- [4] R. P. Allan, B. J. Soden, “Atmospheric warming and the amplification of precipitation extremes”, *Science* , vol. 321, no. 5895, pp. 1481–1484, DOI: 10.1126/science.1160787, Sep. 2008.
- [5] OMM, “El estado del clima en 2018 pone de manifiesto un aumento de los efectos del cambio climático”, url = <https://public.wmo.int/es/media/comunicados-de-prensa/el-estado-del-clima-en-2018-pone-de-manifiesto-un-aumento-de-los-efectos>, Mar. 2019.
- [6] J. S. Lee and E. Pottier, *Polarimetric radar imaging: From basics to applications*, CRC Press: Boca Raton, FL, EE. UU., 2009.
- [7] V. Akbari, A. Doulgeris and T. Eltoft, “Monitoring glacier changes using multitemporal multipolarization SAR images”, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, pp. 3729–3741, Jun. 2014.
- [8] T. Lillesand, R. W. Kiefer, J. Chipman, “Remote Sensing and Image Interpretation”, *Wiley & Sons Inc.*, no. 7, pp. 736, Mar. 2015.

- [9] M. P. Zénere, R. Solorza, “Herramientas de teledetección óptica y SAR”, *Cursos educativos en línea - UNC*, pp. 6–8, url = https://edx-studio.campusvirtual.unc.edu.ar/asset-v1:CampusVirtual-UNC+AV082+2021_T1+type@asset+block@Teorico-Unidad6.pdf, 2021.
- [10] eoPortal, “Misiones Satelitales”, *ESA*, url = <https://www.eoportal.org/satellite-missions>
- [11] A. D. C. Nascimento, M. M. Horta, A. C. Frery and R. J. Cintra, “Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery”, *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 7, pp. 648–663, Feb. 2014.
- [12] J. Canny, “A computational approach to edge detection”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, vol. 8, pp. 679–698, 1986.
- [13] A. Rosenfeld, M. Turson, “Edge and curve detection for visual scene and analysis.”, *IEEE Transactions on Computers*, vol. 25, pp. 562–569, 1971.
- [14] D. Marr, E. Hildreth, “Theory of edge detection”, *In Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences.*, pages 187–217, 1980.
- [15] D. Marr, E. Hildreth, “Theory of edge detection. In computer vision”, *IEEE, Los Alamitos, CA.*, pp. 77–107, 1991.
- [16] M. Tabb, N. Ahuja, “Multiscale image segmentation by integrated edge and region detection”, *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 25, pp. 642–655, 1997.
- [17] L. Alvarez, P. Lions, J. M. Morel, “Image selecting smoothing and edge detection by non-linear diffusion”, *Siam J. Numerical Analysis*, vol. 29, 1992.
- [18] J. Babaud, A. Witkin, R. Duda, “Uniqueness of the gaussian kernel for scale-space filtering”, *IEEE Transaction on Pattern Anal. and Machine Intelligence*, vol. 8, 1986.
- [19] A. Bovik, “On detecting edge in speckle imagery”, *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, vol. 36, pp. 618–627, 1988.
- [20] C. Oliver, I.M. Connell, R. White, “Optimum edge detection in SAR.”, *SPIE on Satellite Remote Sensing*, vol. 2584, pp. 152–163, 1995.

- [21] R. Touzi, A. Lopes, P. Bousquet, “A statistical and geometrical edge detector for SAR images”, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 26, pp. 764–773, 1988.
- [22] D. Smith, “Speckle reduction and segmentation of SAR images”, *International Journal of Remote Sensing*, vol. 17, pp. 2043–205, 1998.
- [23] R. Fjortoft, A. Lopes, P. Marthon, E. Cubero-Castan, “An optimum multiedge detector for SAR image segmentation”, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 37, 1998.
- [24] A. Lopes, E. Nezry, R. Touzi, H. Laur, “Structure detection and statistical adaptive speckle filtering in SAR images”, *International Journal of Remote Sensing*, vol. 14, pp. 1735–1758, 1993.
- [25] J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, “Feature extraction in speckled imagery using dynamic B-spline deformable contours under the G0 model”, *International Journal of Remote Sensing*, vol. 27, no. 22, pp. 5037–5059, 2006.
- [26] A. C. Frery, J. Jacobo-Berlles, J. Gambini, M. Mejail, “Polarimetric SAR image segmentation with B-splines and a new statistical model”, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 21, pp. 319–342, 2010.
- [27] J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, “Accuracy of edge detection methods with local information in speckled imagery”, *Statistics and Computing*, vol. 18, no. 1, pp. 15–26, 2008.
- [28] E. Giron, A. C. Frery, F. Cribari-Neto, “Nonparametric edge detection in speckled imagery”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 82, pp. 2182–2198, 2012.
- [29] A. Serna, SCRIB, “Física Ondas Electromagnéticas”, url = [https://es.scribd.com/document/407071984/Fisica – Ondas – Electromagneticas](https://es.scribd.com/document/407071984/Fisica-Ondas-Electromagneticas)
- [30] E. Chuvieco, “Fundamentos de teledetección espacial”, *Rialp S.A, Madrid*, 1995.
- [31] T. M. Mayorga Torres, “Determinación de la deformación del terreno por movimientos en masa usando interferometría SAR (Radar de Apertura Sintética)”, *IG - CONAE/UNC*, 2013.

- [32] P. Benaglia, M. E. Colazo, “Qué es la radiación polarizada”, url = [https :
//www.iar.unlp.edu.ar/boletin/radiacion – polarizada/](https://www.iar.unlp.edu.ar/boletin/radiacion-polarizada/), 2021.
- [33] M. A. Richards, J. Scheer, W. A. Holm, W. L. Melvin, “Principles of modern radar volume I, basic principles”, *SciTech Publishing*, vol. 1, 2010.
- [34] J. C. Curlander, R. N. McDonough, “Synthetic aperture radar: Systems and signal processing”, *John Wiley and Sons Ltd*, Chichester, Reino Unido, pp. 647, Nov. 1991.
- [35] M. Skolnik, “Radar Handbook”, vol. 2, 1990.
- [36] Citizendium, “IEEE frequency bands”, *The Citizens Compendium*, url = [http :
//en.citizendium.org/wiki/IEEE_frequency_bands](http://en.citizendium.org/wiki/IEEE_frequency_bands), 2013.
- [37] Microwaves101.com, “Frequency Letter Bands”, *the world’s microwave information resource since 2001*, url = [https :
//www.microwaves101.com/encyclopedias/frequency – letter – bands](https://www.microwaves101.com/encyclopedias/frequency-letter-bands).
- [38] E. Chuvieco, “La observación de la Tierra desde el espacio”, *Teledetección ambiental*, vol. 1, pp. 586, May. 2002.
- [39] E. Lopinto, “An introduction to the synthetic aperture radar”, *Agencia Espacial Italiana ASI*, 2010.
- [40] O. H. Bustos, C. A. Frery, M. A. Lamfri, C. M. Scavuzzo, “Técnicas estadísticas en teledetección espacial”, *FAMAF*, Córdoba, Argentina, 2004.
- [41] J.D. Tagestad, “Radiometric standardization of adjacent Landsat Thematic Mapper images for multi-scene mosaics (Tesis de Maestría)”, *Utah State University*, Logan, Utah, 2000.
- [42] E. Chuvieco, “Teledetección ambiental: La observación de la Tierra desde el espacio.”, *Editorial Ariel S.A., Barcelona (España)*, , vol. 3, Sep. 2008.
- [43] G. F. Bazán, “Consideraciones para la integración de sensores, para la elaboración de un sistema de control y vigilancia aeroespacial conjunta”, *Escuela Superior de Guerra Conjunta de las Fuerzas Armadas. (Argentina)*, url = [http :
//www.cefadigital.edu.ar/handle/1847939/2353](http://www.cefadigital.edu.ar/handle/1847939/2353), 2010.

- [44] J. Toomay, “Principles of modern radar volume I, basic principles”, *Springer Netherlands*, vol. 3, 2012.
- [45] SARMAP, “Synthetic aperture radar and SARscape”, *European Space Agency, ESA, UNESCO BILKO group*, Aug. 2009
- [46] IGN.ES, “Fundamentos de teledetección radar”, *Instituto Geográfico Nacional, (España)*, url = <https://www.ign.es/web/ign/portal/inicio>
- [47] E. Podest, “Conceptos básicos del radar de apertura sintética”, *National Aeronautics and Space Administration, NASA*, Nov. 2017.
- [48] Canada Centre for Remote Sensing, “Fundamentals of remote sensing”, url = <http://www.nrcan.gc.ca/earth-sciences/geomatics/satellite-imagery-air-photos/satellite-imagery-products/educational-resources/9309>, 2016.
- [49] S. Uhlmann, S. Kiranyaz, “Integrating color features in Polarimetric SAR image classification”, *JEBE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, no. 4, pp. 2197–2216, 2014.
- [50] T. Holmes, “Measuring surface soil parameters using passive microwave remote sensing The ELBARA field campaign”, *Tesis, Faculteit der Aard- en Levenswetenschappen, Vrije Universiteit. Amsterdam.*, 2003.
- [51] A. P. ANNAN, “Ground Penetrating Radar” *Workshop Notes. Sensor and software Inc. Mississauga, Ontario, Canada*, 1992.
- [52] F. Ulaby, “Microwave remote sensing: active and passive. Volume scattering and emission theory”, *Advanced Systems and Applications. Dedham, MA, USA*, 1986.
- [53] T. Schmugge, “Remote sensing of soil moisture: recent advances”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 21, pp. 336–344, 1983.
- [54] E. Njokul, D. Entekhabi, “Passive microwaves remote sensing of soil moisture”, *Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Pasadena*, 1994.
- [55] T. Jackson, H. Mcnairn, M. Wertz, B. Brisco, R. Brown, “First Order Surface Roughness Correction of Active Microwave Observations for Estimating Soil Moisture”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, no. 4, pp. 1065–1069, 1997.

- [56] H. Karszenbaum, “Obtención de parámetros biofísicos utilizando datos satelitales de radar de apertura sintética SAR: combinación de modelos de interacción y observaciones”, *Seminario dictado en Gerencia Investigación y Aplicaciones*, Laboratorio Tandár, CONEA, url = [http : //www.tandar.cnea.gov.ar/eventos/seminariosGIyA/2007/20071026 – Parametros_Biofisicos – Karszenbaum.pdf](http://www.tandar.cnea.gov.ar/eventos/seminariosGIyA/2007/20071026-ParametrosBiofisicos-Karszenbaum.pdf), 2007.
- [57] NASA, “THE SAR HANDBOOK”, *NASA Technical Reports Server*, url = [https : //ntrs.nasa.gov/api/citations/20190002563/downloads/20190002563.pdf](https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20190002563/downloads/20190002563.pdf), 2019
- [58] NASA, “Introducción a Radar”, *Applied Remote Sensing Training*, url = [https : //appliedsciences.nasa.gov/join – mission/training/english/arset – introduction – synthetic – aperture – radar](https://appliedsciences.nasa.gov/join-mission/training/english/arset-introduction-synthetic-aperture-radar), 2016
- [59] H. Salgado, “Distribución espacial de la rugosidad en parcelas agrícolas en provincia de Buenos Aires, Argentina”, *Engenharia Agricola*, vol. 26, no. 2, pp. 600–609, 2006.
- [60] N. Beaulieu, G. Leclerc, Y. Moisan, “Détermination de la rugosité de surface par des méthodes accessibles”, *Canadian Journal of Remote Sensing*, Ottawa, vol. 21, no. 2, pp. 198–203, 1995.
- [61] CCRS, “Programa GlobeSAR: Material educativo para teledetección mediante radares”, *Canada Centre for Remote Sensing CCRS*, Natural Resources Canada, url = [http : //www.ccrs.nrcan.gc.ca/ccrs/tekrd/internat/glbsar2/indexe.html](http://www.ccrs.nrcan.gc.ca/ccrs/tekrd/internat/glbsar2/indexe.html), 2001.
- [62] G. Stimson, H. Griffiths, H. Griffiths, C. Baker, D. Adamy, “Stimson’s introduction to airborne radar.”, *Electromagnetics and Radar Series*, SciTech Publishing, no. 3, 2013.
- [63] European Space Agency, “Radar courses”, url = [https : //earth.esa.int/web/guest/missions/esa – operational – eo – missions/ers/instruments/sar/applications/radar – courses/content – 3/ – /asset_publisher/mQ9R7ZVkkG5P/content/radar – course – 3 – real – aperture – radar](https://earth.esa.int/web/guest/missions/esa-operational-eo-missions/ers/instruments/sar/applications/radar-courses/content-3/-/asset_publisher/mQ9R7ZVkkG5P/content/radar-course-3-real-aperture-radar), 2020.
- [64] C. Wolff, “Radar Tutorial”, url = [http : //www.radartutorial.eu/20.airborne/ab07.en.html](http://www.radartutorial.eu/20.airborne/ab07.en.html), 1997.

- [65] M. P. Zénere, “Focalización de imágenes SAR utilizando el algoritmo Omega-K. Simulación y Validación”, *IG-CONAE, UNC*, 2013.
- [66] M. A. Richards, “Fundamentals of radar signal processing”, *McGraw-Hill Education*, vol. 2, 2013.
- [67] M. Skolnik, “Introduction to radar systems”, *McGraw-Hill Book Company, Inc.*, 1962.
- [68] I. G. Cumming y F. H. Wong, “Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation”, Norwood, MA, Jan, 2005.
- [69] D. V. González, “Detección de movimiento mediante técnicas radar CW-FM en banda W”. *Universidad Politécnica de Catalunya*, url = <https://upcommons.upc.edu/handle/2099,1/21313?locale-attribute=es>, 2014
- [70] M. Soumekh, “Synthetic aperture radar. Signal processing with MATLAB algorithms”, *John Wiley and Sons, Inc.*, pp. 648, Apr 1999.
- [71] Z. Tong, “Fast chirp FMCW radar in automotive applications, *IEEE Xplore*, DOI: 10.1049/cp.2015.1362”, url = <https://ieeexplore.ieee.org/document/7455584>, 2016.
- [72] PUCARA, “INVAP y su aporte a la Defensa y Seguridad”, url = <https://www.pucara.org/post/invap-y-su-aporte-a-la-defensa-y-seguridad>, Ago. 2021.
- [73] M. Soumekh, “Focusing moving targets using range migration algorithm in ultra wideband low frequency synthetic aperture radar”, *Master Thesis Electrical Engineering*, pp. 40, Jun. 2010.
- [74] D. T. Sandwell, “SAR image formation: ERS SAR processor coded in Matlab”, *SIO 239*, Jan. 2008
- [75] R. N. Bracewell, “La transformada de Fourier y sus aplicaciones”, *McGraw-Hill Kogakusha*, vol. 2, 1978.
- [76] M. Schwabisch, R. Siegmund, “Study on concepts for radar interferometry satellites for ocean (and land) application”, *KoRIOLIS*, 2002.

- [77] ESA, “COSMO-SkyMed (Constelación de 4 satélites SAR)”, *European Space Agency*, ESA Earth Online, url = <https://earth.esa.int/eogateway/missions/cosmo-skymed>, 2020.
- [78] A. Moreira et al., “A tutorial on synthetic aperture radar”, *IEEE Geoscience and remote sensing magazine*, vol. 1, no. 1, pp. 6–43, Mar. 2013.
- [79] K. Tomiyasu, “Tutorial review of synthetic-aperture radar (SAR) with applications to imaging of the ocean surface”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 5, pp. 563–583, May. 1978.
- [80] esa - Aplicaciones, “Monitoreo de olas con radares satelitales”, url = https://www.esa.int/ESAMultimedia/Videos/2014/05/Wave_monitoring_with_satellite_radars.
- [81] NASA, “Evaluación de Desastres usando Radar de Apertura Sintética”, *Applied Remote Sensing Training*, url = <https://appliedsciences.nasa.gov/join-mission/training/spanish/arset-evaluacion-de-desastres-usando-radar-de-apertura-sintetica>, Oct. 2022.
- [82] METEORED tiempo.com, “Derrame de petróleo en el Mediterráneo”, Meteored - Empresa Alpred S.L. Almendricos. Murcia. España, *Datos modificados de Copernicus Sentinel, procesados por ESA*, url = <https://www.tiempo.com/ram/467981/derrame-de-petroleo-en-el-mediterraneo/>, Oct. 2018.
- [83] CONAE - Consultoría en Aplicaciones Espaciales de Alerta y Respuesta Temprana a Emergencias (CAEARTE), “Inundaciones en Mesopotamia. Abril 2016”, url = https://disasterscharter.org/image/journal/article.jpg?img_id=244017&t=1460363145508, Apr. 2016.
- [84] NASA, “Herramientas de la NASA de monitoreo y mapeo de inundaciones”, *Applied Remote Sensing Training*, url = https://www.cazalac.org/mwarac/fileadmin/imagenes2/Remote_sensing/span_s3P1.pdf, Jun. 2015.
- [85] CONICET - Instituto de Investigación en Paleobiología y Geología (IIPG), “Monitoreo continuo de los volcanes Domuyo y Laguna del Maule mediante imágenes de Radar de Apertura Sintética (SAR)”, url = https://www.cazalac.org/mwarac/fileadmin/imagenes2/Remote_sensing/span_s3P1.pdf.

//iipg.conicet.gov.ar/monitoreo – continuo – de – la – deformacion – del – terreno – por – radar – a – apertura – sintetica – sar/.

- [86] R. K. Moore, F. T. Ulaby, A. K. Fung, “Microwave remote sensing: Active and pasive, radar remote sensing and surface scattering and emission theory”, *Prentice Hall Signal Processing Series, Addison Wesley Publishing Company, London*, vol. 2, 1982.
- [87] A. K. Gabriel, R. M. Goldstein, H. A. Zebker, “Mapping small elevation changes over large areas: Differential interferometry”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 94, no. B7, pp. 9183–9191, Jul. 1989.
- [88] R. Hanssen, “Radar interferometry: Data interpretation and error analysis”, *Delft University of Technology, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers*, vol. 2, 2001.
- [89] C. Oliver, S. Quegan, “Understanding synthetic aperture radar images”, *Artech House, Boston*, pp. 479, 1998.
- [90] ESA, “Constelación SAOCOM. Satélite de comunicaciones y observación SAR”, *Sharing earth observation resources*, eoPortal Directory, ESA, url = *https : //directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite – missions/s/saocom*, 2020.
- [91] VENG, “Sitio web oficial para la comercialización de productos SAOCOM”, *VENG. Servicios y desarrollos tecnológicos*, VENG SA, Argentina, url = *https : //saocom.veng.com.ar/*, 2020.
- [92] INVAP, “La Primera Mirada SAOCOM 1A”, *INVAP. La misión SAOCOM*, url = *https : //saocom.invap.com.ar/la – primera – mirada – saocom – 1a/*, Mar. 2019.
- [93] E. M. Kennaugh, “Polarization properties of radar reflections”, *Ph.D. dissertation, Ohio State University*, Columbus, USA, Mar., 1952.
- [94] A. Natale, , “Electromagnetic models for the retrieval of surface parameters through SAR images”, *tesis doctoral*, Universidad de Nápoles FII, 2011.
- [95] F. T. Ulaby, Ch. Elachi, “Radar polarimetry for geoscience applications”, *Norwood*, 1990.

- [96] A. G. FLESIA, “Modelaje de imágenes con correlación”, *Chilean Journal of Statistics, Soche, Sociedad Chilena de Estadística*, vol. 14, pp. 43–62, ISSN 0718-7912, Valparaíso, Chile, 1999.
- [97] L. P. Quiroz, “Estimación robusta de parámetros en distribuciones con datos SAR, Master’s Thesis”, *Universidad Técnica Federico Santa María, Departamento de Informática*, Valparaíso, Chile, 2013.
- [98] A. C. Frery, H. J. Müller, C. C. F. Yanasse, S. J. S. Sant’Anna, “A model for extremely heterogeneous clutter”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, no. 3, pp. 1–12, 1997.
- [99] P. Meyer, “Introductory probability and statistical applications”, *Addison-Wesley*, 1965
- [100] J. W. Goodman, “Statistical optics, pure and applied optics”, *Wiley, New York, USA*, 1985.
- [101] N. R. Goodman, “Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (an introduction)”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 34, no. 1, pp. 152–177, 1963.
- [102] C. López-Martínez, X. Fabregas, “Polarimetric SAR Speckle Noise Model”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 41, nro. 3, pp. 2232–2242, Oct., 2003.
- [103] C. López-Martínez, E. Pottier, “On the Extension of Multidimensional Speckle Noise Model From Single-Look to Multilook SAR Imagery”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, nro. 2, pp. 305–320, Feb., 2007.
- [104] P. J. Bickel, K. A. Doksum, “Mathematical statistics: basic ideas and selected topics”, *Prentice-Hall, NJ.*, vol. 1, no. 2, 2001.
- [105] C. F. Manski. “Analog estimation methods in econometrics”, *Cambridge University Press*, vol. 6, no. 2, pp. 268–272, url = <https://www.jstor.org/stable/3532277>, 1990.
- [106] D. Monferrán, A. Sartarelli, “Estimated edges of points position. Optimized model for polarimetric SAR imagery”, *2018 IEEE Biennial*

- Congress of Argentina, ARGENCON 2018.: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.*, pp. 6, ISBN 978-1-5386-5032-5, url = <https://doi.org/10.1109/ARGENCON.2018.8646021>, Jun. 2018.
- [107] D. Monferrán, J. Gambini y A. C. Frery, “Evaluación del error en la detección de puntos de borde en imágenes SAR polarimétricas”, *XIX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*, pp. 389–392, nro. 389, Abr., 2017.
- [108] H. Laur, P. Bally, P. Meadows, J. Sanchez, B. Schaettler, E. Lopinto, D. Esteban, “ERS SAR calibration. Derivation of the backscattering coefficient in ESA ERS SAR PRI products”. *ESA/ESRIN ES-TN-RS-PM-HL09*, nro. 2, Nov. 2004.
- [109] O. E. Barndorff-Nielsen, “Adjusted versions of profile likelihood and directed likelihood, and extended likelihood”, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 56, no. 1, pp. 125–140, 1994.
- [110] C. H. Gierull, I. C. Sikaneta, “Estimating the effective number of looks in interferometric SAR data”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 40, pp. 1733–1742, Aug. 2002.
- [111] S. N. Anfinsen, A. P. Doulgeris, T. Eltoft, “Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 11, pp. 3795–3809, 2009.
- [112] A. D. C. Nascimento, A. C. Frery, R. J. Cintra, “Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 8, pp. 4935–4941, 2014.
- [113] S. N. Anfinsen, T. Eltoft, A. P. Doulgeris, “A relaxed Wishart model for polarimetric SAR data”, *Fourth International Workshop on Science and Applications of SAR Polarimetry and Polarimetric Interferometry PoInSAR 2009*, Netherlands: European Space Agency, no. 8, pp. 26–30, Jan. 2009.
- [114] A. C. Frery, A. D. C. Nascimento, R. J. Cintra, “Analytic expressions for stochastic distances between relaxed complex Wishart distributions”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, pp. 1213–1226, 2014.
- [115] P. Jansen, “Python remain number 1?”, *TIOBE - The Software Quality Company*, url = <https://www.tiobe.com/tiobe-index/>, 2023

- [116] A. K. Gupta, D. K. Nagar, “Monographs and surveys in pure and applied mathematics”, Chapman and Hall, 2000
- [117] P. G. Ciarlet, “à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation”, Dunod, 2007
- [118] M. H. Doolittle, “Method employed in the solution of normal equations and the adjustment of a triangulation”, *US Coast and Geodetic Survey Report*, Government Printing Office Washington DC, pp. 115–120, 1878
- [119] D. Monferrán, A. Sartarelli, “Modelo mejorado para la estimación de puntos de borde en imágenes SAR polarimétricas”, *XXII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC 2020, El Calafate, Santa Cruz)*, Red de Universidades con Carreras en Informática, pp. 704–708, ISBN 978-987-3714-82-5, May. 2020.
- [120] P. Legendre, L. Legendre, “Numerical ecology”, *Elsevier Science B.V., Amsterdam*, vol. 1, no. 2, 2012.
- [121] N. R. Goodman, “The distribution of the determinant of a complex wishart distributed matrix”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 34, no. 1, pp. 178–180, 1963.
- [122] M. S. Srivastava, “On the complex Wishart distribution”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 36, no. 1, pp. 313–315, 1965.
- [123] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky and S. H. Nawab, *Señales y Sistemas*, Prentice-Hall, México, 1998.
- [124] B. Liu, Z. Zhang, X. Liu, W. Yu, “Extracción de bordes para imágenes SAR polarimétricas usando filtro degenerado con estimación de máxima verosimilitud ponderada”, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 11, pp. 2140–2144, 2014.
- [125] C. J. Oliver, P. Lombardo, “Detección simultánea de borde medio y de textura en ecos parásitos SAR”, *IEE: radar, sonar y navegación*, vol. 143, nro. 6, pp. 391–399, 1996.
- [126] X. Qin, S. Zhou, H. Zou, “Segmentación de imágenes SAR mediante fusión de regiones jerárquicas y evolución de bordes con distribución gamma generalizada”, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 11, nro. 10, 1742–1746, 2014.

- [127] J. Y. Tourneret, M. Doisy, M. Lavielle, “Detección fuera de línea bayesiana de múltiples puntos de cambio corrompidos por ruido multiplicativo: aplicación a la detección de bordes de imágenes SAR”, *Procesamiento de señales*, vol. 83, nro. 9, 1871–1887, 2003.
- [128] D. Monferrán, A. Sartarelli, “Módulo de Detección (MD) en Imágenes SAR Polarimétricas. Síntesis y Fusión de Métodos Usados para Estimar la Posición de Puntos de Borde”, *2020 IEEE Biennial Congress of Argentina, ARGENCON 2020.: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.*, doi = 10.1109/argencon49523.2020.9505510, url = <https://doi.org/10.1109/argencon49523.2020.9505510>, 2020.
- [129] A. C. Frery , A. D. C. Nascimento y R. J. Cintra, “Information theory and image understanding: An application to polarimetric SAR imagery”, *Chilean Journal of Statistics*, vol. 2, nro. 2, pp. 81–100, Sep., 2011.
- [130] R. W. So, A. C. Chung, “A novel learning-based dissimilarity metric for rigid and non-rigid medical image registration by using Bhattacharyya Distances.”, *Pattern Recognition*, vol. 62, pp. 161–174, 2017.
- [131] S. Jabari, M. Rezaee, F. Fathollahi Y. Zhang, “Multispectral change detection using multivariate Kullback-Leibler distance.”, *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote sensing*, vol. 147, pp. 163–177, 2019.
- [132] J. Lin, N. Saito, R. Levine, “Edgeworth approximation of the Kullback-Leibler distance towards problems in image analysis.”, *University of California, Davis, Tech. Rep*, 1999
- [133] F. Harrou, Y. Sun, M. Madakyaru, “Kullback-leibler distance-based enhanced detection of incipient anomalies.”, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, vol. 44, pp. 73–87, 2016
- [134] M. H. Shah, X. Dang, “Novel feature selection method using bhattacharyya distance for neural networks based automatic modulation classification.”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 27, pp. 106–110, 2019.
- [135] M. Niknazar, B. V. Vahdat, M. B. Shamsollahi, M. Sayyah, “Application of Bhattacharyya distance as a dissimilarity index for automated prediction of

epileptic seizures in rats.”, *In 2010 International Conference on Intelligent and Advanced Systems, IEEE*, pp. 1–5, Jun. 2010.