Facultad de Ciencias Básicas
©Programa de Matemáticas
Vol. III , № 1, (2016)

MATUA

Revista Del Programa De Matemáticas Páginas: 47–60

Sobre una propiedad equivalente a la condición de pesos A_p para el operador maximal de Hardy-Littlewood

About a property equivalent to A_p weight condition for the Hardy-Littlewood maximal operator

Alvaro Corvalán

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

acorvala@ungs.edu.ar

Resumen

Recientemente se ha observado que para un peso w la desigualdad puntual para operadores de Hardy-Littlewood $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$, que es consecuencia del tipo débil (p, p) respecto de un peso w en realidad es equivalente a la acotación débil (p, p). Aquí proporcionamos una demostración nueva y elemental de dicha equivalencia que, a diferencia de las demostraciones existentes, no requiere apoyarse en resultados de cubrimientos.

Palabras claves: Hardy-Littlewood Maximal Operator A_p Classes Weight Functions

Abstract

The inequality $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$, for a weight function w, is a consequence of the weak type (p, p) for the Hardy-Littlewood maximal operator from $L^p(w)$. A recent result shows that the inequality also implies the weak type (p, p) so, in fact, both conditions are equivalent. Here we give a new an elementary proof of the equivalence that, unlike existing demonstrations, it requires no covering properties.

Keywords: Operador Maximal de Hardy-Littlewood clases A_p funciones de pesos

1. INTRODUCCIÓN

Los pesos que cumplen las condiciones A_p tienen muchas propiedades interesantes relacionadas con la acotación de operadores, y dichas clases tienen una rica estructura que en particular habilitan importantes resultados de extrapolación para distintas familias de operadores y clases de pares de funciones.

Aquí entenderemos por cubos siempre a cubos de $\mathbb{R}^n$ *con lados paralelos a los ejes coordenados (es decir que serán el producto cartesiano de n intervalos de* $\mathbb{R}$ de la misma longitud. *Y notaremos* $|Q|$ al volumen de dichos cubos.

Comenzamos por algunas definiciones:

Entendemos por un peso w una función medible, no negativa y localmente integrable $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Como es de uso frecuente, dado un conjunto medible E, a veces denotaremos $w(E) = \int_E w(x)\, dx$. Para evitar casos triviales asumiremos que w es no nula en algún conjunto de medida positiva -de lo contrario w sería nula para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Notaremos $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, o a veces sencillamente L^1_{loc}, a las funciones medibles Lebesgue tales que para todo conjunto E de medida finita vale $\int_E f(x)\, dx < \infty$ -funciones localmente integrables-.

El estudio de los pesos, y en general de los pesos A_p -que enseguida definiremos- está ligada fuertemente al estudio de la acotación del operador de Hardy-Littlewood M que se define de la siguiente manera.

Definición 1. *Dada una función* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, definimos*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \tag{1}$$

Definición 2. *Dada una función* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, definimos*

$$M^c f(x) = \sup_{Q \in Q_x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \tag{2}$$

donde Q_x *es la familia de cubos cuyo centro es x.*

Observación 3. *En distintos textos -e incluso en distintos apartados de un mismo texto (confrontar, por ej. [9])- se llama función maximal de Hardy-Littlewood a* Mf *o a* $M^c f$ *(o a operadores análogos reemplazando los cubos por bolas de* $\mathbb{R}^n$*), y de hecho en diversos artículos se denota* Mf *lo que aquí llamamos* $M^c f$*. Sin embargo, para las cuestiones que nos ocupan aquí ambos operadores son esencialmente intercambiables debido a que son puntualmente equivalentes:* T_1 *y* T_2 *se dicen puntualmente equivalentes si existen constantes positivas A y B -que no dependen de x ni de f, solo de la dimensión n- tales que* $\forall f \in L^1_{loc}$ *y* $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$A \cdot T_2 f(x) \leq T_1 f(x) \leq B \cdot T_2 f(x)$$

En tal caso escribiremos $T_1 \approx T_2$*. Claramente* $\approx$ *es una relación de equivalencia. De hecho con* M *y* M^c *esto sucede para* $A = 1$ *y* $B = 2^n$*, en efecto, que* $M^c f(x) \leq Mf(x)$ *es evidente ya que los cubos centrados en x es una subfamilia de todos los cubos a los que x pertenece, de modo que*

$$\sup_{Q \in Q_x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

, por otra parte, dado x y un cubo cualquiera Q *con* $x \in Q$*, si tomamos* $\widetilde{Q}_x$ *el cubo centrado cuyo lado es el doble del lado del cubo Q está claro que* $Q \subset \widetilde{Q}_x$ *y que* $\left|\widetilde{Q}_x\right| = 2^n |Q|$ *de modo que*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \leq 2^n \frac{1}{\left|\widetilde{Q}_x\right|} \int_{\widetilde{Q}_x} |f(y)|\, dy \leq 2^n M^c f(x)$$

. Como esto vale para todo $Q \ni x$ tenemos que $Mf(x) \leq M^c f(x)$. Es decir

$$M^c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n \cdot M^c f(x) \tag{3}$$

, por lo tanto $M \approx M^c$.

Observación 4. *El operador M, lo mismo que M^c y varios otros operadores similares, aunque no es lineal, es un operador sublineal: Un operador T que va de un espacio vectorial de funciones medibles en otro espacio de funciones medibles a valores complejos reales-, diremos que es sublineal si para cada par de funciones f y g en el dominio de T vale que $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, y vale que $|T(\alpha f)| = |\alpha|\,|Tf|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.*

2. LA ACOTACIÓN DEL OPERADOR M

Dada una medida μ se trata de determinar para cuales espacios $L^p(\mu)$ el operador $f \longmapsto Mf$ está acotado o al menos satisface una condición similar pero más débil. Definamos más formalmente estas cuestiones:

Definición 5. *Si (X,μ) y (Y,ν) son espacios de medida, un operador T que va de $L^p(\mu)$ en $L^q(\nu)$ se dirá que es de tipo fuerte (p,q) si es un operador acotado de $L^p(\mu)$ en $L^q(\mu)$, es decir si para toda $f \in L^p(\mu)$ resulta que $Tf \in L^q(\nu)$ y existe una constante positiva C tal que*

$$\|Tf\|_{L^q(\nu)} \leq C\,\|f\|_{L^p(\mu)} \tag{4}$$

para toda $f \in L^p(\mu)$. La menor de tales constantes C es llamada la norma de operadores de T.

Observación 6. *Si $q < \infty$ la desigualdad (4) queda así:*

$$\left(\int_Y |Tf(y)|^q \, d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

Puede verse entonces que como para todo $\lambda > 0$ vale que

$$\lambda\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} = (\lambda^q \nu(\{y \in Y : |Tf(y)|^q > \lambda^q\})^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\left(\int_{\{y:|Tf(y)|^q>\lambda^q\}} \lambda^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\{y:|Tf(y)|^q>\lambda^q\}} |Tf(y)|^q \, d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_Y |Tf(y)|^q \, d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$$

entonces si T es de tipo fuerte (p,q) con $q < \infty$, debido a la desigualdad (5) tenemos que existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mu)$ y para todo $\lambda > 0$ vale:

$$\lambda\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

lo que motiva la siguiente:

Definición 7. *Si T es un operador que va de $L^p(\mu)$ en las funciones medibles respecto de μ, decimos que T es de tipo débil (p,q) con $q < \infty$ si existe una constante positiva C tal que para toda $f \in L^p(\mu)$ y para todo $\lambda > 0$ vale la desigualdad (6).*

Observación 8. *Para el caso $q = \infty$ cabe recordar que $g \in L^{\infty}(\nu)$ si y solo si existe una constante k con $0 \leq k < \infty$ tal que $\nu(\{y \in Y : |g(y)| > k\}) = 0$ y $\|g\|_{L^{\infty}(\nu)}$ es el ínfimo de tales k. En $\nu(\{y \in Y : |g(y)| > k\}) = 0$ identificamos los tipos débil y fuerte es decir T es de tipo débil y fuerte (p, ∞) si y solo si $T : L^p(\mu) \to L^{\infty}(\nu)$ es un operador acotado, es decir si existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mu)$ vale*

$$\|Tf\|_{L^{\infty}(\nu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}$$

De modo que a partir de las observaciones y definiciones precedentes es inmediato que si T es de tipo fuerte (p, q) entonces T también es de tipo débil (p, q). En general para $q < \infty$ la recíproca no es cierta, y un operador de tipo débil (p, q) puede no ser de tipo fuerte (p, q). Por ejemplo M es de tipo débil $(1, 1)$ pero no de tipo fuerte $(1, 1)$.

En $\mathbb{R}^n$ es interesante la caracterización de aquellas medidas μ para las que M es de tipo fuerte (p, p), o al menos de tipo débil (p, p), respecto de μ.

Pero en tales casos resulta que la medida μ tiene que ser absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue (ver [1]) por lo tanto $d\mu(y) = w(y)dy$ para un peso w tal que para E medible Lebesgue vale que $w(E) = 0$ si y solo $|E| = 0$ -donde $|E|$ es la medida de Lebesgue de E- y podemos siempre referirnos a las medidas dadas por un peso como función de densidad, y los espacios $L^p(dw)$ se notan usualmente $L^p(w)$. Así que en definitiva nos interesan la acotaciones tipo fuerte (p, p) o tipo débil (p, p) respecto de w, es decir, para $p < \infty$ si:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para cierta $C > 0$ y para toda $f \in L^p(w)$ -tipo fuerte (p, p)-, o si por otra parte:

$$\lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

para cierta $C > 0$, para toda $f \in L^p(w)$, y para todo $\lambda > 0$ -tipo débil (p, p)-.

Cuando un operador satisface la desigualdad (7) para toda $f \in L^p(w)$ decimos que es de tipo débil (p, p). Es decir que el tipo fuerte (p, p) implica el tipo débil (p, p), y la recíproca en general no es cierta.

Observación 9. *Si w es un peso tal que $w(E) = 0$ si y solo $|E| = 0$ es inmediato de la definición de M que $\|Mf\|_{L^{\infty}(w)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(w)}$ de modo que M es de tipo débil y fuerte (∞, ∞) con norma de operadores menor o igual que 1. De hecho tomando la función característica de un cubo: $f = \chi_Q$ es fácil ver que $\|Mf\|_{L^{\infty}(w)} = \|f\|_{L^{\infty}(w)} = 1$ de modo que la norma de M en el caso (∞, ∞) es 1.*

Observación 10. *Aunque el tipo débil (p, p) no implica en general el tipo fuerte (p, p) hay situaciones interesantes en que sí ocurre, lo cual es importante, porque usualmente es más fácil demostrar que un operador es de tipo débil. Por ejemplo, para el operador M sucede que el tipo débil (p, p) para $p > 1$ respecto de un peso w nos asegura que existe un $\varepsilon > 0$ tal que M es de tipo débil $(p - \varepsilon, p - \varepsilon)$, y esto, junto con la observación anterior de que M es de tipo débil (∞, ∞) nos pemite asegurar que, de hecho, M será de tipo fuerte (p, p), usando una técnica de interpolación que permite probar acotaciones de tipo fuerte para valores de p intermedios entre p_0 y p_1 con $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ si un operador sublineal T es de tipo débil para (p_0, p_0) y de tipo débil (p_1, p_1). El resultado fue anunciado en 1939 ([6]), mencionando que la demostración se publicaría en un artículo posterior por Jósef Marcinkiewicz quien falleció poco después durante la segunda guerra mundial. Quince años después Anthony Zygmund publicó una demostración* *completa -[7]-, y se hallaron posteriormente numerosas generalizaciones -ver, p. ej. [8]-. De hecho, ya el resultado original permite interpolar entre (p_0, q_0) y (p_1, q_1) con $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ y $1 \leq q_0 < q < q_1 \leq \infty$, pero en este artículo nos alcanza con la siguiente versión.*

Teorema 11. *(de Interpolación de Marcinkiewicz) Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T un operador sublineal que va de $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ en las funciones medibles en (Y, ν) tal que T es de tipo débil (p_0, p_0) y de tipo débil (p_1, p_1). Tenemos entonces que T es de tipo fuerte (p, p).*

La demostración de este resultado de interpolación, usando sólo conceptos habituales de medida e integración, puede encontrarse, por ejemplo, en [9] (Cap 2, Teo. 2.4).

Definición 12. *Decimos que w está en la clase A_p para $1 < p < \infty$ si existe una constante positiva $C > 0$ tal que para cualquier cubo Q se cumple que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq C \tag{8}$$

Para $p = 1$ decimos que w está en A_1 si existe $C > 0$ tal que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x) \tag{9}$$

para casi todo $x \in Q$. Equivalentemente w está en A_1 si existe $C > 0$ tal que

$$Mw(x) \leq C \cdot w(x) \tag{10}$$

para casi todo x.

Tanto para las definiciones de las clases A_p con $p = 1$ y con $p > 1$ denotamos $[A_p]$ a la menor constante C que verifica las desigualdades 8,9, o 10. Es decir que $[A_p] = \sup\limits_Q \left(\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\right)$ si $p > 1$, y para $p = 1$ es $[A_1] = \left\|\frac{Mw}{w}\right\|_\infty$ (es fácil ver a partir de la definición de M que si w fuera nula en un conjunto de medida positiva entonces 9 o 10 sólo puede valer si $w \equiv 0$ en casi todo punto).

Por un conocido teorema debido a Benjamin Muckenhoupt para $n = 1$ y Ronald Coifman y Charles Fefferman para $n > 1$) la condición A_p es equivalente al tipo débil para $1 \leq p < \infty$. (ver [1] y [3]).

Usando el resultado de interpolación de Marcinkiewicz resulta que el último teorema implica que si $w \in A_{p_0}$ entonces M es de tipo fuerte (p, p) para todo $p > p_0$. Pero en realidad, si $p_0 > 1$ puede probarse que si $w \in A_{p_0}$ no sólo es de tipo débil (p_0, p_0) sino también de tipo fuerte (p_0, p_0). Eso se debe al siguiente resultado:

Teorema 13. *$(A_p \Rightarrow A_{p-\varepsilon})$*

Si $w \in A_{p_0}$ con $p_0 > 1$ entonces $w \in A_{p_0-\varepsilon}$ para algún ε con $0 < \varepsilon < p_0 - 1$.

La demostración puede hallarse, por ejemplo, en [5] o [9]. Esencialmente se apoya en el hecho de que si w pertenece a alguna clase A_p entonces satisface, para algún $\varepsilon > 0$ y alguna constante positiva C una desigualdad de la forma:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\frac{1}{|Q|}\int_Q w$$

Estas desigualdades se conocen como desigualdades de Hölder inversas -debido a que la desigualdad opuesta vale con constante $C = 1$ como consecuencia fácil de la desigualdad de Hölder usual-.

También puede plantearse, en términos del operador maximal de Hardy-Littlewood ponderado respecto de w, $M_w f$, otra condición que recientemente se observó (ver [2]) que también es equivalente a la condición A_p. Definamos $M_w f$:

Definición 14. *Sea f localmente integrable respecto de w, definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood ponderado respecto de w :*

$$M_w f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|\, w(y) dy \tag{11}$$

Si $w(Q) = 0$ la expresión $\frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|\, w(y) dy$ se interpreta como 0.

Claramente si $w \equiv 1$ es $M_w = M$.

De manera similar a la definición de M^c podemos definir también un operador maximal centrado ponderado respecto de w, que notaremos M_w^c:

Definición 15. *Sea f localmente integrable respecto de w, definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood centrado ponderado respecto de w :*

$$M_w^c f(x) = \sup_{Q \in Q_x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)|\, w(y) dy \tag{12}$$

Observación 16. *A diferencia del caso de M y M^c, en general los operadores M_w y M_w^c no son equivalentes salvo que w cumpla alguna condición adicional. Claramente $M_w^c f(x) \leq M_w f(x)$ pero no siempre existe una constante $B > 0$ que asegure que $M_w f(x) \leq B.M_w^c f(x)$. Una propiedad que permite conseguir asegurar la última desigualdad es que w sea un peso duplicante: Decimos que w es duplicante si existe una constante positiva c tal que para todo cubo Q vale que $w(2Q) \leq c.w(Q)$ donde llamando $2Q$ al cubo que tiene el mismo centro que Q y el doble de su lado. Luego si w es duplicante entonces $M_w \approx M_w^c$.*

Es fácil ver, a partir de la definición de las clases A_p, que si $w \in A_p$ entonces existe una constante positiva $c > 0$ tal que $Mf(x)^p \leq c \cdot M_w(|f|^p)(x)$. En efecto, si $p = 1$ tenemos que para $w \in A_1$ por la desigualdad 9 vale que existe $C > 0$ tal que $\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x)$ en casi todo punto, y entonces para cualquier Q vale que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, Cw(y) \tfrac{|Q|}{w(Q)} dy = \frac{C}{w(Q)} \int_Q |f(y)|\, w(y)\, dy$$

, de donde tomando supremos sobre Q se obtiene $Mf(x) \leq c \cdot M_w(|f|)(x)$.

Por otra parte, para $p > 1$, aplicando la desigualdad de Hölder respecto de la medida $w(y)dy$, y utilizando que para p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ vale que $1 - p' = \frac{-1}{p-1}$ y que $\frac{p}{p'} = p - 1$, y usando la condición A_p dada en la definición de arriba a tenemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \cdot 1 dy \right)^p = \frac{1}{|Q|^p} \left(\int_Q |f(y)| \cdot \frac{1}{w(y)} w(y) dy \right)^p$$

$$\leq \frac{1}{|Q|^p}\left(\left(\int_Q |f(y)|^p\, w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q \left(\frac{1}{w(y)}\right)^{p'} w(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p$$

$$= \frac{1}{|Q|^p}\left(\left(\int_Q |f(y)|^p\, w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q w(y)^{1-p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p$$

$$= \frac{1}{|Q|}\frac{1}{|Q|^{p-1}}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy\cdot\left(\int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy\right)^{p-1}$$

$$\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy\right)^{p-1}$$

$$\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy\frac{C}{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\, dx} = \frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy$$

, y tomando de nuevo supremos sobre los cubos, tenemos:

$$Mf(x)^p \leq C\cdot M_w\left(|f|^p\right)(x) \tag{13}$$

.

Es decir, revisando el razonamiento lo que vimos es que las condiciones A_p implican, en cada cubo Q y para toda f localmente integrable, desigualdades locales de la forma

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy\right)^p \leq C\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy \tag{14}$$

; y de allí obtuvimos las desigualdades puntuales 13, tomando supremos sobre los cubos.

Por otra parte puede verse que si vale en cada cubo la condición 14 entonces $w \in A_p$: En el caso $p = 1$ para cualquier x del interior de Q tomamos una familia de aproximantes de δ_x, por ejemplo f, dada por $f(y) = \frac{1}{|Q_x|}\chi_{Q_x}(y)$, donde χ_{Q_x} son características de cubos centrados en x de lado lo suficientemente pequeño para que $Q_x \subset Q$, de modo que 14 para $p = 1$ implica que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{|Q_x|}\chi_{Q_x}(y)\, dy \leq C\frac{1}{w(Q)}\int_Q \frac{1}{|Q_x|}\chi_{Q_x}(y)\, w(y)\, dy$$

, es decir

$$\frac{1}{|Q|}\frac{1}{|Q_x|}\int_Q \chi_{Q_x}(y)\, dy \leq C\frac{1}{w(Q)}\frac{1}{|Q_x|}\int_Q \chi_{Q_x}(y)\, w(y)\, dy$$

luego

$$\frac{1}{|Q|}\frac{1}{|Q_x|}|Q_x| \leq C\frac{1}{w(Q)}\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} w(y)\,dy$$

de donde

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} w(y)\,dy$$

y como vale para todo cubo Q_x centrado en x de lado suficientemente pequeño tendremos

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \cdot w(x)$$

para todo x que sea un punto de Lebesgue de w, por lo tanto eso será para casi todo $x \in Q$ ya que un peso w es localmente integrable (-ver, p. ej. [4], Teorema 7.10-), es decir $w \in A_1$.

Para $p > 1$, tomando $f = w^{1-p'}$ y usando que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ vale que $p + p' = p \cdot p'$ tenemos que $f^p = w^{p-pp'} = w^{p-(p+p')} = w^{-p'}$ y reemplazando en la desigualdad 14 nos queda

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\,dy\right)^p \leq C\frac{1}{w(Q)}\int_Q w(y)^{-p'}\,w(y)\,dy$$

, y de allí, multiplicando y dividiendo por $|Q|$:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\,dy\right)^p \leq C\frac{|Q|}{w(Q)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\,dy\right)$$

y entonces

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}\,dy\right)^{p-1} \leq C$$

y usando que $1 - p' = \frac{-1}{p-1}$ y $w(Q) = \int_Q w(y)^{1-p'}\,dy$ obtenemos 8 es decir que $w \in A_p$.

3. EQUIVALENCIA DE LA DESIGUALDAD PUNTUAL CON LA CONDICIÓN A_p

Como mencionamos, debido al resultado de Muckenhoupt y Coifman-Fefferman mencionado previamente se tiene que (8) -y por lo tanto también (14)- son equivalentes al tipo débil (p, p) para $p \geq 1$ y al tipo fuerte (p, p) para $p > 1$, y una consecuencia bien conocida la desigualdad puntual $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$ -inmediata, como vimos, tomando supremos en 13-, es decir se tienen los siguientes teorema y corolario:

Teorema 17. *Sea w un peso en $\mathbb{R}^n$, y $1 \leq p < \infty$ son equivalentes las siguientes condiciones:*
i) M es de tipo débil (p, p) respecto de w, es decir:

$$\lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para cierta $C > 0$, para toda $f \in L^p(w)$, y para todo $\lambda > 0$.

ii) $w \in A_p$, esto siginfica que para cierta $C > 0$:

si $p > 1$:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo Q,

y si $p = 1$:

$$Mw(x) \leq C \cdot w(x)$$

para casi todo x.

iii) w satisface:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy\right)^p \leq C\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|^p\,w(y)\,dy$$

para cierta $C > 0$, para todo cubo Q y para toda f localmente integrable.

Corolario 18. *Si w es un peso que satisface cualquiera de las condiciones del teorema anterior entonces para toda f localmente integrable y para casi todo x vale que:*

$$Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$$

Observación 19. *Una consecuencia elemental del teorema que nos conviene mencionar es que si se satisface cualquiera de las condiciones i), ii) o iii) entonces w es duplicante. Como las condiciones son equivalentes basta usar cualquiera de ellas, por ejemplo, a partir de iii), tomando $2Q$ en la desigualdad, con $f = \chi_Q$ tenemos*

$$\left(\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q} \chi_Q(y)\,dy\right)^p \leq C\frac{1}{w(2Q)}\int_{2Q} \chi_Q(y)^p\,w(y)\,dy$$

, y usando la definición de χ_Q y que en $\mathbb{R}^n$ es $|2Q| = 2^n|Q|$ queda

$$\left(\frac{|Q|}{2^n|Q|}\right)^p \leq C\frac{1}{w(2Q)}w(Q)$$

de donde simplificando $|Q|$ y despejando se obtiene

$$w(2Q) \leq k \cdot w(Q)$$

con $k = 2^{np}C$.

Notación 20. *Para aligerar la notación, dado $p \geq 1$, llamemos a la condición iii) del teorema: Condición Maximal Local y notémosla CML_p, y a la consecuencia del corolario la llamaremos Condición Maximal puntual y la notaremos CMP_p. El teorema precedente y su corolario pueden entonces enunciarse de manera abreviada como:*

$$\left(\textit{Débil } (p,p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p\right) \Rightarrow CMP_p$$

Observación 21. *Se puede demostrar que, para $p > 1$, si M es de tipo débil (p, p) entonces M es de tipo fuerte (p, p) -y la recíproca ya vimos que es inmediata-, de modo que en el caso $p > 1$ la condición i) se puede enunciar como*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

y tenemos para $p > 1$:

$$\left(Fuerte\ (p, p) \Leftrightarrow Débil\ (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p\right) \Rightarrow CMP_p$$

La equivalencia entre las condiciones ii) y iii) del teorema las hemos probado en los párrafos anteriores, y que i) equivale a ii) es el resultado de Muckenhoupt y Coifman-Fefferman (ver también [5] Teorema IV 2.1 y observaciones posteriores).

. Cabe destacar que las demostraciones de que ii) o iii) implican i) son en general considerablemente más difíciles véase, por ejemplo, [3], o [5] o también [9], mediante una descomposición de tipo Calderón-Zygmund.

En un trabajo bastante reciente ([2]) los autores muestran que la condición del corolario, $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$, aparentemente más débil que i), ii) y iii) es en realidad equivalente a ellas, de modo que se tiene

$$\text{Fuerte } (p, p) \Leftrightarrow \text{Débil } (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p \Leftrightarrow CMP_p$$

. La prueba de [2] requiere, en primer término, mostrar que la condición CMP_p implica directamente que w es duplicante, de allí resulta que M_w es equivalente a M_w^c, y luego se alude a que el operador maximal ponderado M_w^c es de tipo débil $(1, 1)$ lo que se puede probar usando lemas de cubrimientos, por ejemplo (ver [9]), el Lema de Besicovitch (que es un resultado profundo que se apoya fuertemente en la geometría de $\mathbb{R}^n$ y en el hecho de usar una base de cubos centrados). Luego, usando de nuevo la condición CMP_p resulta que M es de tipo débil (p, p).

A continuación presentamos nuestro resultado principal que es otra demostración de la equivalencia de CMP_p con las demás condiciones que no requiere apoyarse en ningún tipo de lema de cubrimiento. Es la siguiente proposición que demuestra directamente que CMP_p implica la condición A_p (y la recíproca sale de que $A_p \Rightarrow CML_p \Rightarrow CMP_p$).

Observación 22. *Como en todo el artículo cuando hablamos de cubos se trata de cubos con lados paralelos a los ejes coordenados.*

Teorema 23. *Sea w es un peso que satisface la condición CMP_p, es decir que para cada x vale que: $Mf(x)^p \leq C \cdot M_w(|f|^p)(x)$ entonces:*

a) Si Q_0 y Q_1 son cubos contiguos por un vértice entonces $w(Q_0) \approx w(Q_1)$, esto es que existen constantes positivas K_0 y K_1 -independientes de Q_0 y Q_1- tales que $w(Q_0) \leq K_1 \cdot w(Q_1)$ y $w(Q_1) \leq K_0 \cdot w(Q_0)$.

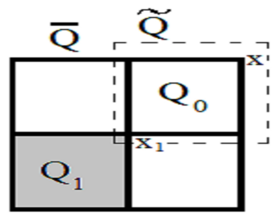
b) w es un peso que satisface la condición CML_p, es decir:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy\right)^p \leq C\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|^p\, w(y)\, dy$$

para cierta $C > 0$, para todo cubo Q y para toda f localmente integrable.

Demostración.

a) Para ilustrar la notación observemos el dibujo en $\mathbb{R}^2$ con Q_1 contiguo a Q_0 por abajo y la izquierda -pero la situación es similar con cubos contiguos por cualquier vértice en $\mathbb{R}^n$-, y $\overline{Q}$ es el menor cubo que contiene a Q_0 y Q_1:



Consideremos x el vértice de Q_0 opuesto a x_1, donde x_1 es el vértice compartido por Q_0 y Q_1. Como w satisface la condición CMP_p para toda $f \in L^1_{loc}$ y para todo $\widetilde{Q} \ni x$ vale que:

$$\left(\frac{1}{\left|\widetilde{Q}\right|} \int_{\widetilde{Q}} |f(y)|\, dy \right)^p \leq Mf(x)^p \leq C \cdot M_w \left(|f|^p\right)(x)$$

. Para $f = \chi_{Q_1}$, la función característica del cubo Q_1 tenemos que

$$M_w \left(|f|^p\right)(x) = \sup_{\widetilde{Q} \ni x} \frac{1}{w(\widetilde{Q})} \int_{\widetilde{Q}} |f(y)|^p\, w(y)\, dy = \sup_{\widetilde{Q} \ni x} \frac{1}{w(\widetilde{Q})} w\left(\widetilde{Q} \cap Q_1\right)$$

Ahora si $\widetilde{Q} \cap Q_1 = \emptyset$ entonces $w\left(\widetilde{Q} \cap Q_1\right) = 0$, de modo que basta considerar el máximo entre aquellos cubos $\widetilde{Q} \ni x$ que intersecan a Q_1. Pero si $\widetilde{Q} \cap Q_1 \neq \emptyset$ entonces $x_1 \in \widetilde{Q}$, y como $x \in \widetilde{Q}$ tenemos que $\{x, x_1\} \subset \widetilde{Q}$, y siendo x y x_1 vértices opuestos de Q_0 tenemos que $Q_0 \subset \widetilde{Q}$. Luego, observando que $\left|\overline{Q}\right| = 2^n |Q_1|$ (ya que el lado de $\overline{Q}$ es el doble del lado de Q_1):

$$\frac{1}{2^n} = \frac{|Q_1|}{|\overline{Q}|} = \frac{\left|Q_1 \cap \overline{Q}\right|}{|\overline{Q}|} = \left(\frac{1}{|\overline{Q}|} \int_{\overline{Q}} \chi_{Q_1} dy \right)^p \leq Mf(x)^p$$

$$\leq C \cdot M_w \left(|f|^p\right)(x) \leq \sup_{\widetilde{Q} \ni x} \frac{w\left(\widetilde{Q} \cap Q_1\right)}{w(\widetilde{Q})} \leq C \cdot \frac{w(Q_1)}{w(Q_0)}$$

Luego, con constante $K_1 = 2^n C$, que depende solo de n y de la constante C de la condición CMP_p de w tenemos:

$$w(Q_0) \leq K_1 \cdot w(Q_1)$$

Pero con un argumento similar, tomando en cambio como x el vértice de Q_1 opuesto a x_1, (es decir el inferior izquierdo, en el ejemplo) y usando $f = \chi_{Q_0}$ obtenemos de manera análoga una constante K_0 -de hecho puede tomarse K_0 igual a K_1- tal que:

$$w(Q_1) \leq K_1 \cdot w(Q_0)$$

Por lo tanto

$$w(Q_0) \approx w(Q_1)$$

.

b) Sea ahora un cubo cualquiera Q. Con la notación de a) tomemos $Q_1 = Q$, y sea ahora f cualquier función localmente integrable y usaremos CMP_p para $f \cdot \chi_{Q_1}$ y para x el vértice del cubo Q_0 opuesto a x_1 donde $Q_0 \cap Q_1 = \{x_1\}$.

Como $(f \cdot \chi_{Q_1})(y) = 0$ si $y \notin Q_1$, para cualquier $\widetilde{Q} \ni x$ vale que:

$$\int_{\widetilde{Q}} \left|(f \cdot \chi_{Q_1})(y)\right|^p w(y)\, dy = \int_{\widetilde{Q}\cap Q_1} \left|(f \cdot \chi_{Q_1})(y)\right|^p w(y)\, dy \leq \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy$$

Por otra parte si $\widetilde{Q} \cap Q_1 = \emptyset$ entonces $\int_{\widetilde{Q}} \left|(f \cdot \chi_{Q_1})(y)\right|^p w(y)\, dy = 0$. Y si $\widetilde{Q} \cap Q_1 \neq \emptyset$ entonces $\{x_0, x_1\} \subset \widetilde{Q}$ y $Q_0 \subset \widetilde{Q}$, luego tenemos que:

$$M_w\left(\left|f \cdot \chi_{Q_1}\right|^p\right)(x) = \sup_{\widetilde{Q}\ni x} \frac{1}{w(\widetilde{Q})} \int_{\widetilde{Q}} \left|(f \cdot \chi_{Q_1})(y)\right|^p w(y)\, dy =$$

$$= \sup_{Q_0\subset\widetilde{Q}} \frac{1}{w(\widetilde{Q})} \int_{\widetilde{Q}\cap Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy$$

Como $Q_0 \subset \widetilde{Q}$ tenemos que $w(Q_0) \leq w\left(\widetilde{Q}\right)$ y usando la parte a) tenemos una constante K_1 tal que $\frac{1}{K_1} \cdot w(Q_1) \leq w(Q_0) \leq w\left(\widetilde{Q}\right)$ entonces para cualquiera de tales $\widetilde{Q}$, con $Q_0 \subset \widetilde{Q}$, vale que:

$$\frac{1}{w(\widetilde{Q})} \int_{\widetilde{Q}\cap Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy \leq \frac{K}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy$$

y por lo tanto:

$$M_w\left(\left|f \cdot \chi_{Q_1}\right|^p\right)(x) = \sup_{Q_0\subset\widetilde{Q}} \frac{1}{w(\widetilde{Q})} \int_{\widetilde{Q}\cap Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy \leq \frac{K}{w(Q_1)} \int_{Q_1} |f(y)|^p w(y)\, dy$$

Entonces tomando $\overline{Q}$ el menor cubo que contiene a Q_0 y Q_1, y usando el hecho de que $\left|\overline{Q}\right| = 2^n |Q_1|$, la definición de $Mf(x)$, la condición CMP_p para $f \cdot \chi_{Q_1}$ con el vértice $x \in Q_0 \subset \overline{Q}$, y la última desigualdad tenemos:

$$\frac{1}{2^{np}} \left(\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |f(y)|\, dy\right)^p = \left(\frac{1}{\left|\overline{Q}\right|} \int_{\overline{Q}} \left|(f \cdot \chi_{Q_1})(y)\right| dy\right)^p \leq M(f \cdot \chi_{Q_1})(x)^p$$

$$\leq C \cdot M_w\left(\left|f \cdot \chi_{Q_1}\right|^p\right)(x) \leq C \cdot \frac{K}{w(Q_1)} \int\limits_{Q_1} |f(y)|^p \, w(y)\, dy$$

Es decir:

$$\left(\frac{1}{|Q_1|} \int\limits_{Q_1} |f(y)|\, dy\right)^p \leq 2^{np} C \cdot K \cdot \frac{1}{w(Q_1)} \int\limits_{Q_1} |f(y)|^p \, w(y)\, dy$$

Y renombrando C a la constante $2^{np}KC$, y observando que esto vale para cualquier cubo $Q_1 = Q$ con una constante que solo depende de w y de n obtenemos CML_p:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y)|\, dy\right)^p \leq C \frac{1}{w(Q)} \int\limits_{Q} |f(y)|^p \, w(y)\, dy$$

■

En consecuencia hemos obtenido una nueva prueba que excluye el uso de cubrimientos de las equivalencias:

$$\text{Débil } (p, p) \Leftrightarrow A_p \Leftrightarrow CML_p \Leftrightarrow CMP_p$$

Si $p > 1$, como ya mencionamos, el teorema ($A_p \Rightarrow A_{p-\varepsilon}$) implica también la equivalencia: Fuerte $(p, p) \Leftrightarrow$ Débil (p, p).

Como nota adicional obsérvese que el ítem a) de la proposición anterior puede usarse fácilmente para obtener otra demostración de que si $w \in A_p$ entonces es duplicante -basta usar una partición del cubo $2Q$ por cubos de Q contiguos por el vértice y que en tales cubos vale $w(Q_0) \approx w(Q_1)$.

Referencias

[1] Muckenhoupt, Benjamin, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972) 207–226.

[2] Lerner, Andrei K.; Ombrosi, Sheldy. A Boundedness Criterion for General Maximal Operators. Publ. Mat. 54 (2010), no. 1, 53–71.

[3] Coifman, R., and Fefferman, C.. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Mathematica, 51.3 (1974): 241-250.

[4] Rudin, W. Real and Complex Analysis, 3rd ed. McGraw-Hill, Inc. NY,USA, 1987.

[5] García-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J.L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics, Elsevier, 1985.

[6] Marcinkiewicz, J. Sur l´ interpolation d´ opérations, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939).

[7] Zygmund, A. On a Theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math Pures. Appl. 34 (1956).

[8] Benett, C. and Sharpley, R. Interpolation of Operators, Academic Press, NY, USA, 1988.

[9] Duoandikoetxea Zuazo, F. J., Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 29, AMS, 2001

[10] Stein, E. Note on the class $L \log L$, Studia Math. 32 (1969).

Para citar este artículo: Alvaro Corvalán 2016, “ Sobre una propiedad equivalente a la condición de pesos A_p para el operador maximal de Hardy-Littlewood ” . Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA