

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

*Sobre convexidades en grafos: fórmulas y problemas vinculados con
complejidad computacional*

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Lucía María González**

Director: Luciano N. Grippo
Co-Director: Ezequiel Dratman

Fecha:

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluated and accredited by the National Commission of Evaluation and Accreditation of Universities (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Sobre convexidades en grafos: problemas vinculados con complejidad computacional y fórmulas.

Publicaciones:

- 1) L. M. González, L. N. Grippo, M. D. Safe and V. F. dos Santos. *Covering graphs with convex sets and partitioning graphs into convex sets*, *Inform. Process. Lett.*, 158, (2020), 105944.
- 2) L. M. González, L. N. Grippo and M. D. Safe. *Formulas in connection with parameters related to convexity of paths on three vertices: caterpillars and unit interval graphs*. *Australasian J Comb.* 79: 401-423 (2021)

Aportes Originales:

(Especificar cuales son los aportes originales o innovadores conseguidos en la realización de esta tesis. Indicar donde se encuentran. Máximo una carilla)

En el capítulo 2 consideramos dos problemas de decisión asociados: en un caso, donde la entrada es solo un grafo G y, en el otro caso, donde la entrada es un grafo G y un número entero $p \geq 2$. En ambos casos, el problema de decisión es: ¿Tiene el grafo G un p -cubrimiento C -convexo (respectivamente. p -partición C -convexa)? Tratamos los problemas de cubrir con conjuntos convexos y de particionar en conjuntos convexos los vértices de un grafo bajo la convexidad digital. Presentamos los resultados en relación con el problema de particionar los vértices de un grafo en conjuntos convexos bajo la P_3 -convexidad y bajo la P_3^* -convexidad, y consideramos también el problema de cubrir los vértices de un grafo con P_3 -conjuntos convexos. Abordamos estos problemas también bajo la convexidad monofónica. Los resultados principales de este capítulo fueron publicados en 1).

En el capítulo 3 estudiamos la existencia de fórmulas para calcular el número de P_3 -intervalo, el número de P_3 -cápsula y el tiempo de percolación bajo la P_3 -convexidad, para los grafos caterpillar. En el caso de los grafos de intervalo unitario, encontramos una fórmula para el tiempo de percolación en términos del diámetro de un determinado grafo de intervalo unitario relacionado con él. Más precisamente, tratamos el número de P_3 -intervalo y el número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar. Asociamos una secuencia de números enteros positivos a cada grafo caterpillar, llamada secuencia básica, utilizada a lo largo del resto de la sección.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Presentamos una fórmula cerrada para el número de P_3 -intervalo y otra fórmula para el número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar, en términos de su secuencia básica asociada. También presentamos fórmulas para el tiempo de percolación para grafos caterpillar y grafos de intervalo unitario. Estudiamos el tiempo de percolación de un grafo caterpillar y nos ocupamos del problema de encontrar el tiempo de percolación de los grafos de intervalo unitario. Luego, presentamos una clase de grafos hereditarios para la cual el tiempo de percolación de cualquier grafo en la clase es 1. Los resultados principales de este capítulo fueron publicados en 2).

Y, por último, en el capítulo 4, calculamos una fórmula para calcular el número de Carathéodory bajo la P_3 -convexidad en los grafos de Hamming de dimensión menor a 7 y otra fórmula para cierta subfamilia de los grafos de Hamming de dimensión mayor o igual a 7, que cumplen que son el producto cartesiano de grafos completos de 3 o más vértices.

SOBRE CONVEXIDADES EN
GRAFOS: FÓRMULAS Y PROBLEMAS
VINCULADOS CON COMPLEJIDAD
COMPUTACIONAL

Resumen

En esta tesis estudiamos distintos tipos de convexidades en grafos y parámetros asociados a ellas. Una *convexidad* en un grafo G es un par $(V(G), \mathcal{C})$ donde $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de $V(G)$ que satisface las siguientes condiciones: $\emptyset \in \mathcal{C}$, $V(G) \in \mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones; es decir, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{C}$ para cada $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$. A cada conjunto de la familia $\mathcal{C}$ se lo llama *$\mathcal{C}$ -convexo*. Sea $\mathcal{P}$ un subconjunto de caminos de G . Si $\mathcal{C}$ es la familia de todos los conjuntos S de vértices de G tales que, para cada camino $P \in \mathcal{P}$ cuyos extremos pertenecen a S , todo vértice de P también pertenece a S , entonces tenemos que $(V(G), \mathcal{C})$ es una convexidad en G y nos referimos a $\mathcal{C}$ como una *convexidad de caminos generada por $\mathcal{P}$* .

Las distintas convexidades en grafos han sido ampliamente estudiadas en los últimos años. Un problema interesante consiste en comparar el comportamiento de distintos parámetros bajo diferentes convexidades.

En esta tesis estudiamos los siguientes problemas y convexidades:

1. Presentamos resultados sobre complejidad relacionados con el cubrimiento de los vértices de un grafo mediante p conjuntos convexos, en la sección 2.1.4 bajo la convexidad digital, en la sección 2.3 bajo la convexidad monofónica y en la sección 2.2 bajo la P_3 -convexidad.
2. Presentamos resultados sobre complejidad relacionados con particionar de los vértices de un grafo con p conjuntos convexos, en la sección 2.3 bajo la convexidad monofónica, en la sección 2.2 bajo la P_3 -convexidad y bajo la P_3^* -convexidad.
3. En la sección 3.1.2, presentamos una fórmula para calcular el número de

P_3 -intervalo, en términos de ciertas secuencias asociadas a los vértices del grafo estudiado.

4. En la sección 3.1.3, presentamos una fórmula para el número de P_3 -cápsula, en términos de ciertas secuencias asociadas a los vértices del grafo estudiado.
5. En la sección 3.2.1, presentamos una fórmula para el tiempo de percolación bajo la P_3 -convexidad de un grafo caterpillar, en términos de ciertas secuencias asociadas a los vértices del grafo estudiado. Además, en la sección 3.2.2, encontramos una relación entre el tiempo de percolación de un grafo de intervalo unitario y un parámetro relacionado con el diámetro de un grafo de intervalo unitario.
6. En la sección 3.3, presentamos una familia de grafos hereditarios, definidos por subgrafos inducidos prohibidos, tal que su tiempo de P_3 -percolación es igual a uno.
7. En la sección 4.1, presentamos, una fórmula para el número de carathéodory bajo la P_3 -convexidad de los grafos de Hamming de dimensión menor o igual a 6 y para los grafos de Hamming de dimensión mayor o igual a 7, que cumplen que son el producto cartesiano de grafos completos de 3 o más vértices.

Índice general

Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Convexidad	1
1.2. Complejidad computacional	8
1.3. Problemas de complejidad computacional en convexidades . .	10
1.4. Definiciones básicas y preliminares	11
2. Problemas de cubrimientos y particiones de grafos con conjuntos convexos	17
2.1. Convexidad digital	18
2.2. P_3 -convexidad	21
2.3. Convexidad monofónica	26
3. Fórmulas para calcular parámetros en los grafos caterpillar y de intervalo unitario en la P_3-convexidad	31
3.1. Número de P_3 -intervalo y número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar	32
3.1.1. Secuencia básica de un grafo caterpillar	32
3.1.2. Número P_3 -intervalo	35
3.1.3. Número de P_3 -cápsula	36
3.2. Tiempo de percolación	39
3.2.1. Tiempo de percolación de un grafo caterpillar	40
3.2.2. Grafos de intervalo unitario	44

3.2.2.1. Tiempo de percolación de un grafo de inter- valo unitario	46
3.3. Una clase especial de grafos	56
4. Fórmulas para calcular parámetros en grafos de Hamming	59
4.1. P_3 -convexidad	59
5. Problemas abiertos y futuros trabajos	81
5.0.1. Problemas de cubrimientos y particiones de grafos con conjuntos convexos	81
5.0.2. Fórmulas para calcular parámetros	82
5.0.3. Fórmulas para calcular parámetros en grafos de Ham- ming	83
Bibliografía	85

Capítulo 1

Introducción

1.1. Convexidad

El estudio de convexidad de conjuntos comenzó alrededor de 1960 por Franklin y Clader, [33, 14]. Dado un conjunto finito de puntos S y la familia de subconjuntos $\mathcal{C} \subset P(S) \subset \mathbb{R}^n$, el par $(S, \mathcal{C})$ es una convexidad si $\emptyset \in \mathcal{C}$, $S \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones. Un conjunto que pertenece a $\mathcal{C}$ es un conjunto convexo. Luego en el año 1984, Chepoi y Soltan, [22, 21], hacen la analogía entre la convexidad de conjuntos continuos y la convexidad en grafos tomando a los vértices del grafo como los elementos del conjunto y como espacio métrico la distancia entre los vértices, que no es otra cosa que la mínima cantidad de aristas que tiene un camino entre dos vértices, de esa forma un conjunto $S \subset V(G)$ es convexo si contiene a todos los vértices de los caminos mínimos entre dos vértices de S .

Distintas convexidades en grafos han sido muy estudiadas. El interés en el estudio se debe a sus amplias aplicaciones, por ejemplo: en marketing [42], en procesamiento de imágenes digitales [50], en comportamientos sociales [49], en biología molecular [37], entre otras.

Un ejemplo de una aplicación de las convexidades en grafos es el estudio de la propagación de cierta propiedad por una red, por ejemplo difundir una noticia o un virus. Se considera un grafo G y un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, que inicialmente tienen el virus que se va a propagar, los vértices

de S representan a las personas que están infectadas y hay una arista entre dos vértices si las personas representadas por esos vértices tienen contacto entre si, se define el patrón de contagio de como se van a ir infectando los vértices a partir de los ya infectados, la iteración se repite hasta que no se pueda infectar ningún vértice más, quedando finalmente un conjunto de vértices infectados que es convexo. Es interesante estudiar, por ejemplo, cuales son los conjuntos iniciales de vértices que terminan infectando a todos los vértices del grafo, cual es la mínima cantidad de vértices que debe tener un conjunto inicialmente infectado para terminar infectando a todos los vértices del grafo o cuánto tiempo se tarda en infectar a todos los vértices del grafo. Por ejemplo, en la P_3 -convexidad, en cada iteración se infecta a todos los vértices de $V(G) \setminus S$ que tienen al menos dos vecinos en S .

Una *convexidad* en un grafo G es un par $(V(G), \mathcal{C})$ donde $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de $V(G)$ que satisface todas las siguientes condiciones:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$,
- $V(G) \in \mathcal{C}$,
- $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones, es decir, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{C}$ para cada $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$.

Cada conjunto de la familia $\mathcal{C}$ se llama $\mathcal{C}$ -convexo.

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de caminos en G y sea $S \subseteq V(G)$. Si u y v son dos vértices de G , entonces el $\mathcal{P}$ -intervalo de u y v , denotado por $I_{\mathcal{P}}[u, v]$, es el conjunto de todos los vértices que se encuentran en algún camino $P \in \mathcal{P}$ que tienen a u y a v como vértices extremos. Sea $I_{\mathcal{P}}[S] = \bigcup_{u, v \in S} I_{\mathcal{P}}[u, v]$. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todos los conjuntos S de vértices de G tales que, para cada camino $P \in \mathcal{P}$ cuyos extremos pertenecen a S , todo vértice de P también pertenece a S ; es decir, $\mathcal{C}$ está formada por aquellos subconjuntos S de $V(G)$ tales que $I_{\mathcal{P}}[S] = S$. El par $(V(G), \mathcal{C})$ es una convexidad de G y llamamos a $\mathcal{C}$ *convexidad de caminos generada por $\mathcal{P}$* . De esta manera se define un conjunto convexo en grafos de manera análoga que en el espacio euclideo, ya que, un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera del

conjunto, el segmento lineal cerrado que une los dos puntos está totalmente contenido en el conjunto.

Algunas de las convexidades de caminos son:

- La *convexidad geodésica*, cuyos conjuntos convexos son generados por el conjunto de todos los caminos mínimos.

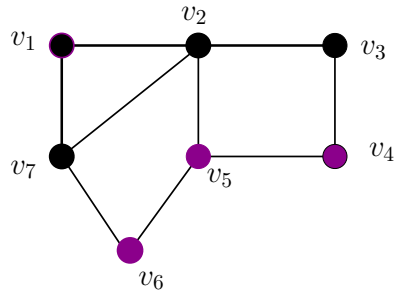


Figura 1.1: $\{v_4, v_5, v_6\}$ es un conjunto g -convexo de G

- La *convexidad monofónica*, cuyos conjuntos convexos son generados por el conjunto de todos los caminos inducidos.

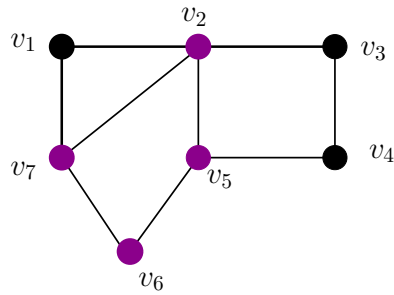


Figura 1.2: $\{v_2, v_5, v_6, v_7\}$ es un conjunto m -convexo de G

- La P_3 -convexidad, cuyos conjuntos convexos son generados por el conjunto de todos los caminos de longitud dos.

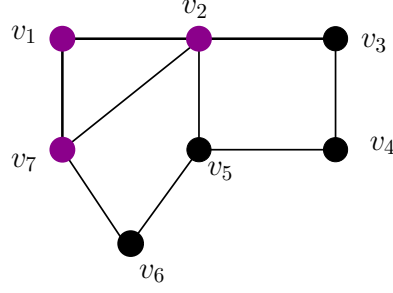


Figura 1.3: $\{v_1, v_2, v_7\}$ es un conjunto P_3 -convexo de G

- La P_3^* -convexidad, cuyos conjuntos convexos son generados por el conjunto de todos los caminos inducidos de longitud dos.

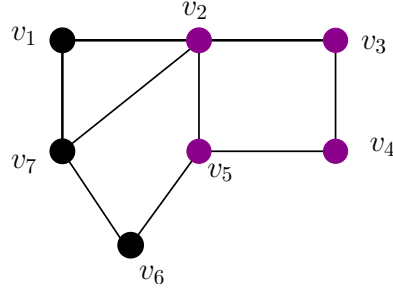


Figura 1.4: $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es un conjunto P_3^* -convexo de G

Hay otras alternativas para generar una convexidad que no depende de una familia de caminos en el grafo, como por ejemplo la convexidad digital, que introdujeron Rosenfeld y Pfaltz en [50], como una herramienta para el procesamiento de imágenes digitales. Un conjunto S de vértices de un grafo G es *digitalmente convexo* si, para cada vértice v de G , $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$. La *convexidad digital* de un grafo G es el par $(V(G), \mathcal{C})$ donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de todos los conjuntos digitalmente convexos de G .

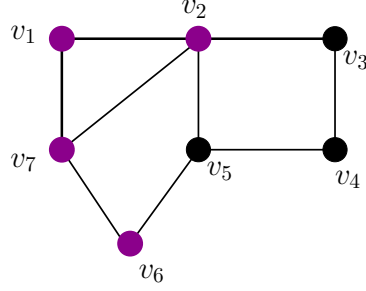


Figura 1.5: $\{v_1, v_2, v_6, v_7\}$ es un conjunto d -convexo de G

Una familia $\{V_1, \dots, V_p\}$ de p conjuntos no vacíos $\mathcal{C}$ -convexos, todos diferentes de $V(G)$, es un p -cubrimiento $\mathcal{C}$ -convexo si $V_1 \cup \dots \cup V_p = V(G)$ y una p -partición $\mathcal{C}$ -convexa si, además, $V_i \cap V_j = \emptyset$ por cada $i, j \in \{1, \dots, p\}$ con $i \neq j$.

Desde una perspectiva algorítmica, hay varios resultados en relación con diferentes parámetros relacionados con la convexidad en grafos. Algunos parámetros fueron definidos en un principio en el continuo, luego se definieron parámetros análogos para convexidades en grafos. Por ejemplo la cápsula convexa de un conjunto dado $C \subset \mathbb{R}^n$ es el menor conjunto convexo que contiene a C . El análogo en grafos es lo que definimos como la *cápsula $\mathcal{C}$ -convexa* de un conjunto $R \subseteq V(G)$ que es el mínimo conjunto $\mathcal{C}$ -convexo de G que contiene a R , lo notamos $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(R)$, ver ejemplo en la figura 1.6. Un *conjunto de cápsula $\mathcal{C}$ -convexa* de G es un conjunto de vértices cuyo conjunto de cápsula $\mathcal{C}$ -convexa coincide con $V(G)$, y la cardinalidad mínima de un conjunto de cápsula $\mathcal{C}$ -convexa de G , denotado $h_{\mathcal{C}}(G)$, es el *número de $\mathcal{C}$ -cápsula*. En [15], Cappelle y otros encuentran una cota superior para el número de P_3 -cápsula en grafos de diámetro dos. En [23], Coelho y otros dan una cota inferior y superior para el número de P_3 -cápsula del grafo $G \square H$ y hallan el número de P_3 -cápsula del grafo $G \square K_n$. En [11], Bresar y Valencia-Pabon, encuentran una fórmula para el número de P_3 -cápsula en grafos de Hamming, que son el producto cartesiano de n grafos completos. En esta tesis encontramos una fórmula para el número de P_3 -cápsula en grafos caterpillar, que son los árboles que si se le sacan las hojas queda un camino, forma parte del trabajo [36].

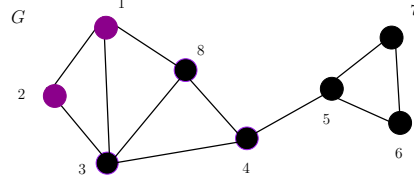


Figura 1.6: Si $R = \{1, 2\}$, su cápsula P_3 -convexa es $\{1, 2, 3, 4, 8\}$.

Otro parámetro relacionado con la convexidad es el número de intervalo de un grafo. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ se llama P_3 -intervalo si para cada vértice $v \in V(G)$: $v \in S$ o v tiene al menos dos vecinos en S , ver ejemplo en la figura 1.7. La cardinalidad mínima de un conjunto P_3 -intervalo de G , indicado como $g(G)$, se denomina *número P_3 -intervalo* de G . Observamos que, por definición, un conjunto P_3 -intervalo también es un conjunto cápsula P_3 -convexa de G y, por lo tanto, $h(G) \leq g(G)$ para todo grafo G . Centeno y otros en [19], muestran que bajo la P_3 -convexidad, el número de P_3 -intervalo coincide con el número de 2-dominación.

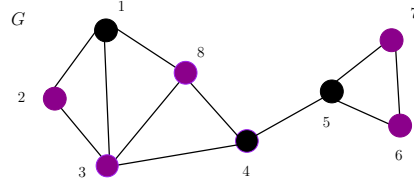


Figura 1.7: $S = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ es un conjunto P_3 -intervalo.

Consideramos las convexidades de caminos en G . Si S es un conjunto de cápsula $\mathcal{C}$ -convexa de G , es decir, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$ entonces decimos que S *percola a G* . Para decidir si un conjunto S percola a G , podemos construir una secuencia $S_0, S_1, S_2, \dots$ en la que $S_0 = S$ y S_{i+1} se obtiene de S_i agregando a éste conjunto los vértices de G que están dentro de un camino, con la condición de la convexidad, que tiene sus extremos en S_i , así el conjunto S_{i+1} queda $\mathcal{C}$ -convexo. Usamos $I_{\mathcal{C}}^k[S]$ para indicar S_k . Si existe algún t tal que $S_t = V(G)$, entonces S percola a G y definimos $\tau_S(G)$ como el mínimo t tal que $S_t = V(G)$, ver ejemplo en la figura 1.8. También definimos el *tiempo*

de percolación de G como $\tau(G) = \max\{\tau_S(G) : S \text{ percola } G\}$. Sea G un grafo y sea $v \in V(G)$. Decimos que S percola a v si $v \in I_C^k[S]$ para algún entero k , y $\tau_S(v)$ representa el mínimo entero k con esta propiedad. Si $A \subseteq V(G)$ y S percola a cada vértice $v \in A$, $\tau_S(A)$ representa el máximo $\tau_S(w)$ entre todos los vértices $w \in A$. Cuando el contexto sea lo suficientemente claro, usaremos $\tau(v)$ y $\tau(A)$ para abreviar.

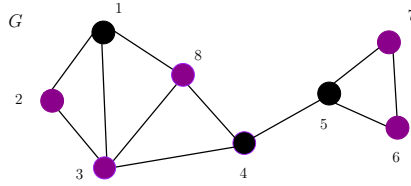


Figura 1.8: El tiempo de percolación bajo la P_3 -convexidad de $S = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ es $\tau_S(G) = 1$, se puede probar que el tiempo de percolación de $\tau(G) = 5$, con $S = \{1, 2, 7\}$, por ejemplo.

El número de Carathéodory definido para grafos es también muy estudiado bajo distintas convexidades. Se puede hacer la analogía entre el número de Carathéodory en matemática discreta y la geometría convexa, ya que el teorema de Carathéodory establece que si un punto x de $\mathbb{R}^d$ se encuentra en la cápsula convexa de un conjunto P , entonces x puede escribirse como la combinación convexa de como máximo $d + 1$ puntos en P . Es decir, hay un subconjunto P' de P que consta de $d + 1$ o menos puntos tales que x se encuentra en la cápsula convexa de P' . De manera equivalente, x se encuentra en un r -simplex con vértices en P , donde $r \leq d$. El r más pequeño que hace que la última afirmación sea válida para cada x en la cápsula convexa de P se define como el número de Carathéodory de P . En matemática discreta, el *número de Carathéodory*, que notamos $c(G)$, es el número entero más pequeño c tal que para cada $S \subseteq V(G)$ y $p \in \mathcal{H}_C[S]$, existe $F \subseteq S$ con $|F| \leq c$ tal que $p \in \mathcal{H}_C[F]$. Definimos la frontera de S como $\partial\mathcal{H}_C(S) = \mathcal{H}_C(S) \setminus \bigcup_{u \in S} \mathcal{H}_C(S \setminus \{u\})$. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto de Carathéodory* de G si su frontera es no vacía, es decir, $\partial\mathcal{H}_C(S) \neq \emptyset$. El número de Carathéodory de G es el cardinal más grande de un conjunto de Carathéodory de G . En [24], Cohelo y otros describen un algoritmo po-

linomial para encontrar el número de Carathéodory bajo la P_3 -convexidad en grafos cordales. En [7], Barbosa y otros encuentran el número de Carathéodory, bajo la P_3 -convexidad, para los árboles y encuentran una cota superior del número de Carathéodory para los grafos en general. En esta tesis estudiamos el número de Carathéodory, bajo la P_3 -convexidad, en los grafos de Hamming.

1.2. Complejidad computacional

La teoría de la complejidad computacional trata de clasificar los problemas según su dificultad y si se pueden o no se pueden resolver con un algoritmo en una cantidad determinada de operaciones con una máquina de Turing. La máquina de Turing fue descrita en [53] en el año 1936, se puede pensar en la máquina de Turing como un ordenador moderno simplificado, especialmente en el caso determinista, que surgió como un modo de formalizar los algoritmos, para poder razonar matemáticamente sobre ellos. Cada máquina resuelve un problema y representa un algoritmo. En 1965, Edmonds definió un buen algoritmo como uno con un tiempo de ejecución polinómico, [40]. La clase de problemas P (Polinomial) contiene a aquellos problemas que se resuelven en tiempo polinomial por una máquina de Turing determinista, [26]. La clase de problemas NP (polinomial no-determinísticamente) contiene a aquellos problemas que se resuelven en tiempo polinomial por una máquina de Turing no determinista, [34]. Se sabe que la relación entre las clases es $P \subseteq NP$. Para algunos problemas no se conocen algoritmos que los resuelvan en tiempo polinomial. Cook y Levin, alrededor del año 1971, trabajando de manera independiente, probaron que existen problemas que son computacionalmente intratables y son más difíciles que todos los problemas NP, a estos problemas los llamaron NP-completos, [25]. En 1972, Karp continuó trabajando sobre esta teoría y demostró que existen 21 problemas combinatorios y de teoría de grafos que son NP-completos, [41].

Un problema computacional constituye una pregunta a ser respondida, teniendo generalmente varios parámetros o variables libres, cuyos valores no se han especificado. Un problema computacional se describe mediante una

descripción general de todos sus parámetros (de entrada y de salida) y una sentencia que describa las propiedades que la solución debe cumplir. Una instancia de un problema se obtiene cuando se especifican valores particulares para todos los parámetros del problema.

Un problema de decisión es un tipo especial de problema computacional cuya respuesta es solamente sí o no (o, la respuesta puede ser también 1 o 0). Los problemas de decisión constituyen uno de los principales objetos de estudio de la teoría de la complejidad computacional, pues la NP-completitud se aplica directamente a este tipo de problemas. Estos problemas tienen gran importancia porque casi todo problema puede transformarse en un problema de decisión.

Un problema de decisión pertenece a la clase NP si dada una instancia de SI y evidencia de la misma, puede ser verificada en tiempo polinomial. La pregunta si P es igual a NP es una de las más importantes en el campo de la ciencia de la computación, debido a las grandes repercusiones que habría en caso de encontrarse una solución. Se cree que las clases no son iguales ya que si $P=NP$, cualquier problema verificable en tiempo polinomial sería polinomial.

Una reducción es una transformación de un problema en otro problema. Intuitivamente, un problema Q puede ser reducido a otro problema Q' , si cualquier instancia del problema Q puede ser expresada como una instancia del problema Q' y cuya solución proporcione una solución para la instancia de Q y viceversa, [26]. Una reducción polinomial de un problema de decisión problema 1 a otro problema 2 es una función polinomial que transforma cada instancia I_1 del problema 1 en una instancia I_2 del problema 2 de modo tal que I_1 tiene respuesta SI para el problema 1 si y solo si I_2 tiene respuesta SI para el problema 2. El problema de decisión 1 se reduce polinomialmente a otro problema de decisión 2, si existe una transformación polinomial de problema 1 al problema 2. Las reducciones en tiempo polinomial nos dotan de elementos para probar, de una manera formal, que un problema es al menos tan difícil como otro, con una diferencia de un factor polinomial. Estas son esenciales para definir a los problemas NP-completos, además de ayudarnos a comprender los mismos.

Un problema de decisión, llamémoslo π , es NP-completo si π pertenece a la clase NP y además si para todo problema $\pi' \in NP$, π' se reduce polinomialmente a π . La clase de los problemas NP-completos contiene a los problemas más difíciles en NP, en el sentido de que son los que están más lejos de estar en la clase P.

1.3. Problemas de complejidad computacional en convexidades

Con respecto a la complejidad computacional hay varios resultados para diferentes parámetros relacionados con la convexidad en grafos. Centeno y otros demostraron en [18], que es NP-completo decidir si el número de P_3 -cápsula de un grafo es como máximo k . En [7], Barbosa demuestra que es NP-completo decidir si, dados un grafo bipartito G y un entero k , el número de Carathéodory de G es al menos k . En [47, 48], Penso y otros investigaron aspectos de la complejidad del número de P_3 -cápsula y del número de P_3 -intervalo para grafos de grado acotado y grafos planares, demostraron que decidir si hay un conjunto de P_3 -cápsula de tamaño como máximo k en un grafo dado es NP-completo incluso para grafos planares con vértices de grado máximo cuatro y que es NP-completo decidir si hay un conjunto de P_3 -cápsula de tamaño como máximo k en un grafo con vértices de grado máximo tres. Demuestran también que el problema de decidir si hay un conjunto P_3 -intervalo de tamaño como máximo k , de un grafo planar G con vértices de grado máximo tres, es NP-completo.

Determinar el tiempo de percolación de un grafo bajo distintas convexidades es un problema interesante para estudiar, consiste en decidir si el tiempo de percolación es al menos k bajo la convexidad que se está estudiando. En [8], Benevides y otros, prueban que es NP-completo decidir si $\tau(G) = k$ para $k \geq 4$ fijo, prueban también que es NP-completo en grafos bipartitos para $k \geq 7$ y en grafos planares. En esta tesis encontramos el número de percolación para los grafos caterpillar, resultado que forma parte de [36].

El problema de decidir si G tiene una p -partición $\mathcal{C}$ -convexa fue presentado por Artigas y otros en [5], demostraron que el problema es NP-completo para cada entero fijo $p \geq 2$, bajo la convexidad geodésica. Centeno y otros, en [17], demostraron que el problema es también NP-completo bajo la P_3 -convexidad si se dan como entrada un grafo G y un entero $p \geq 2$. El problema de decidir si un grafo tiene un p -cubrimiento $\mathcal{C}$ -convexo fue presentado en [6], por Artigas y otros, donde probaron que este problema es NP-completo bajo la convexidad geodésica para cada entero fijo $p \geq 3$ y Buzatu y otros en [13], donde probaron que el problema es NP-completo para $p = 2$. En [17], Centeno y otros demostraron que es NP-completo decidir si, dado un grafo G y un entero p , $V(G)$ puede dividirse en p conjuntos P_3 -convexos. En esta tesis estudiamos estos problemas bajo distintas convexidades, y los resultados están publicados en [35].

1.4. Definiciones básicas y preliminares

Un grafo G está formado por un par ordenado $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es el conjunto de vértices de G , que es finito y $E(G)$ es el conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de G , que llamamos aristas de G , las notamos como uv y decimos que los vértices u y v son los extremos de la arista uv . Todos los grafos en esta tesis son finitos, no dirigidos, sin aristas múltiples, ni bucles, que son aristas que conectan un vértice consigo mismo, es decir, un bucle es la arista uu . Los grafos simples son los grafos que no tienen bucles ni aristas múltiples.

Dos grafos simples, G y H , son isomorfos si existe una función $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ biyectiva, tal que $uv \in E(G)$ si y solo si $f(u)f(v) \in E(H)$, es decir, f preserva adyacencias.

Si X es un conjunto, $|X|$ denota su cardinalidad. El *orden de un grafo* es la cantidad de vértices del grafo, es decir, $|V(G)|$.

Dados u y v en $V(G)$, decimos que u es *adyacente o vecino* de v si $uv \in E(G)$. La vecindad de un vértice v de G es el conjunto de los vértices de G con al menos un vecino en S , se denota por $N_G(v)$, y $N_G[v]$ representa el conjunto

$N_G(v) \cup \{v\}$. El *grado* de un vértice u es la cardinalidad de su vecindad, es decir, $|N_G(u)|$ y lo notamos $gr(v)$.

Un *camino* de un grafo G es una secuencia de vértices distintos, $P = v_1v_2 \cdots v_k$, tal que $v_iv_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k-1$. Un *ciclo* en un grafo G es una secuencia de vértices distintos, $C_k = v_1v_2 \cdots v_kv_1$, donde $v_1 = v_k$ y $v_iv_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k-1$, los ciclos son caminos cerrados con igual cantidad de vértices y aristas. Un grafo *acíclico* es un grafo que no contiene ciclos.

La *longitud* de un camino es igual a la cantidad de aristas. La *distancia* entre dos vértices u y v de G , denotada por $d_G(u, v)$, es la longitud mínima de un camino que tiene a u y a v como vértices extremos.

Un grafo G es *conexo* si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w .

El *diámetro* de un grafo G conexo, denotado por $diam(G)$, es la máxima distancia entre todos los pares $u, v \in V(G)$, $diam(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$; es decir, el diámetro de un grafo es la distancia máxima entre dos vértices cualesquiera del grafo.

Un camino P que tiene sus vértices extremos a distancia $diam(G)$ se llama *camino de diámetro*.

Un camino es *inducido* si no hay una arista que una dos vértices no consecutivos del camino.

Un *vértice pendiente* es un vértice de grado 1. Un *vértice soporte* es un vértice adyacente a un vértice pendiente.

Un *árbol* es un grafo acíclico conexo. Una *hoja* de un árbol es un vértice pendiente del árbol. Un grafo *caterpillar* es un árbol al que si le eliminamos todos sus vértices pendientes queda un camino, ver ejemplo en la figura 1.9.

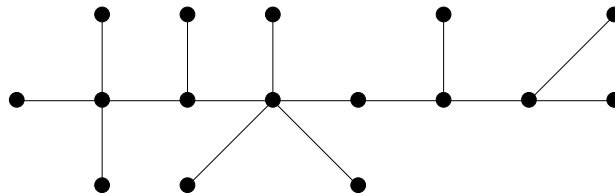


Figura 1.9: G es un grafo caterpillar.

Dado un grafo G y un subconjunto $S \subset V(G)$. El *subgrafo de G inducido por S* es el subgrafo H de G tal que $V(H) = S$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en S , lo notamos $G[S]$.

Una *componente conexa* de un grafo es un subgrafo de G que es conexo maximal.

Denotamos el *grafo complemento* de G por $\overline{G}$, donde $V(\overline{G}) = V(G)$ y $uv \in E(\overline{G})$ si y sólo si $uv \notin E(G)$.

Un grafo es *bipartito* si no contiene como subgrafo un ciclo de longitud impar.

Un grafo G es *co-bipartito* si $\overline{G}$ es bipartito.

Un *conjunto dominante* de un grafo G es un conjunto S de vértices de G tales que cada vértice $v \in V(G) \setminus S$ tiene al menos un vecino en S . Un *camino dominante* en un grafo G es un camino P cuyo conjunto de vértices es un conjunto dominante de G .

Un *conjunto estable* es un conjunto de vértices no adyacentes de a pares. También se lo conoce como *conjunto independiente*. La cardinalidad máxima de un conjunto independiente de G se denota por $\alpha(G)$.

Una *clique* es un conjunto de vértices adyacentes de a pares.

Un *grafo split* es un grafo cuyo conjunto de vértices se puede particionar en un conjunto estable S y una clique K ; el par (K, S) se llama *partición split*.

Un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es un conjunto separador si existen dos vértices que están en la misma componente conexa de G y están en diferentes componentes conexas de $G \setminus S$. Una *clique separadora* de un grafo conexo G es un conjunto separador de vértices mutuamente adyacentes. Un *vértice de corte* de G es un vértice v tal que el número de componentes conexas de $G \setminus \{v\}$ es mayor que el número de componentes conexas de G .

Un *corte* de un grafo G es una partición de $V(G)$ en dos conjuntos X e Y , denotada por (X, Y) . El conjunto de todas las aristas que tienen un extremo en X y el otro en Y se llama *aristas de corte* del corte (X, Y) . Un *matching cut set* es un conjunto de aristas de corte (posiblemente vacía), es decir, no hay dos aristas de corte que compartan un extremo.

A un grafo G se lo llama *grafo cordal* si para todo ciclo C de al menos 4 vértices, existe una arista entre un par de vértices no consecutivos de C , esto quiere decir que G no tiene como subgrafo inducido a un ciclo inducido C_k .

con $k \geq 4$.

A un grafo G , se lo llama *grafo de intervalos*, si existe una familia de intervalos abiertos, o cerrados, de la recta real $\mathbb{I} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ tal que $I_i \cap I_j = \emptyset$ si y solo si $v_i v_j \in E(G)$. A $\mathbb{I}$ se lo llama modelo de intervalos. Si todos los intervalos son de la misma longitud, se lo llama *grafo de intervalo unitario*, es decir, es un grafo tal que existe una asignación uno a uno entre su conjunto de vértices y una familia de intervalos cerrados de longitud unitaria en la recta real, tal que dos vértices diferentes son adyacentes si y solo si sus intervalos correspondientes se intersecan, ver figura 1.10. De manera equivalente, G es un grafo de intervalo unitario si existe un orden lineal, llamado *orden de intervalo unitario*, de sus vértices de modo que la vecindad cerrada de cada vértice es un intervalo bajo ese orden; es decir, una secuencia de vértices consecutivos.

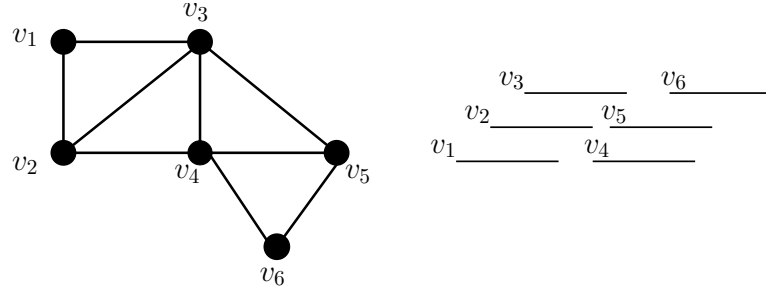


Figura 1.10: Grafo de intervalo unitario y su modelo de intervalo. El orden de intervalo unitario de sus vértices en este caso es $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$

Sean G_i , $1 \leq i \leq n$, grafos arbitrarios. El producto cartesiano $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$ tiene a $V(G_1) \times \dots \times V(G_n)$ como conjunto de vértices. Dos vértices $(x_1, \dots, x_n)$ y $(y_1, \dots, y_n)$ son adyacentes si existe un índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j y_j \in E(G_j)$ y $x_i = y_i$ para todo $i \neq j$, [39]. Si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ el grafo G_i es isomorfo a un grafo completo K_{r_i} , entonces $H = G_1 \square \dots \square G_n = K_{r_1} \square \dots \square K_{r_n}$ es un *grafo de Hamming*. Si $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$, es decir, $V(K_{r_i}) = \{x\}$, notamos $H = K_{r_1} \square \dots \square K_{r_{i-1}} \square x \square K_{r_{i+1}} \square \dots \square K_{r_n}$ y lo llamamos *subgrafo Hamming*, que es un subgrafo de un grafo de Hamming isomorfo a un grafo de Hamming. La *dimensión de un grafo de Hamming* es el número de sus factores, es

decir, el número de coordenadas de sus vértices. La *dimensión de un subgrafo Hamming* es el número de sus factores que no están fijos, es decir, el número de coordenadas de sus vértices que no son fijos. Sea Σ un alfabeto finito. Dadas dos r -uplas w_1 y w_2 de elementos de Σ , su *distancia de Hamming*, $H(w_1, w_2)$ es el número de posiciones en las que difieren. Los vértices de un grafo de Hamming se pueden etiquetar de tal manera que la distancia entre dos vértices coincida con la distancia de Hamming de sus etiquetas, ver ejemplo en la figura 1.11. Un grafo G es un grafo de Hamming si y sólo si cada vértice $v \in V(G)$ puede etiquetarse mediante una tupla $w(v)$ de longitud fija tal que $H(w(u), w(v)) = d_G(u, v)$ para todo $u, v \in V(G)$, a tal etiquetado se lo conoce como etiquetado de Hamming, [39].

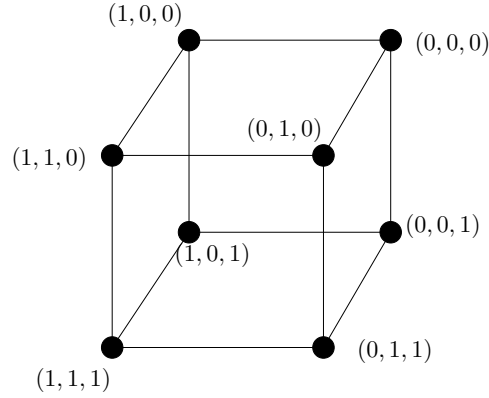


Figura 1.11: $G = K_2 \square K \square K_2$. $V(K_2) = \{0, 1\}$, entonces $V(G) = \{(0, 0, 0); (0, 0, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 1, 1)\}$.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 consideramos dos problemas de decisión asociados: en un caso, donde la entrada es solo un grafo G y, en el otro caso, donde la entrada es un grafo G y un número entero $p \geq 2$. En ambos casos, el problema de decisión es: ¿Tiene el grafo G un p -cubrimiento $\mathcal{C}$ -convexo (resp. p -partición $\mathcal{C}$ -convexa)?. En la Sección 2.1, tratamos los problemas de cubrir con conjuntos convexos y de particionar en conjuntos convexos un grafo bajo la convexidad digital. En la Sección 2.2, presentamos los resultados en relación con el problema de particionar un grafo en conjuntos convexos bajo la

P_3 -convexidad y bajo la P_3^* -convexidad, y consideramos también el problema de cubrir un grafo con P_3 -conjuntos convexos. En la Sección 2.3, abordamos estos problemas bajo la convexidad monofónica.

En el capítulo 3 estudiamos la existencia de fórmulas para calcular el número de P_3 -intervalo, el número de P_3 -cápsula y el tiempo de percolación, bajo la P_3 -convexidad, para los grafos caterpillar. En el caso de los grafos de intervalo unitario, encontramos una fórmula para el tiempo de percolación en términos del diámetro de un determinado grafo de intervalo unitario relacionado con él. Más precisamente, en la Sección 3.1 tratamos el número de P_3 -intervalo y el número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar. En la Subsección 3.1.1, asociamos una secuencia de números enteros positivos a cada grafo caterpillar, llamada secuencia básica, utilizada a lo largo del resto de la sección: en la Subsección 3.1.2 y en la Subsección 3.1.3 presentamos una fórmula cerrada para el número de P_3 -intervalo y el número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar, respectivamente, en términos de su secuencia básica asociada. La sección 3.2 está dedicada a dar fórmulas para el tiempo de percolación para grafos caterpillar y grafos de intervalo unitario. En la Subsección 3.2.1 estudiamos el tiempo de percolación de un grafo caterpillar y en la Subsección 3.2.2 resumimos algunos resultados conocidos de grafos de intervalos unitarios y luego nos ocupamos del problema de encontrar el tiempo de percolación de un grafo de intervalo unitario. Luego, en la Sección 3.3 presentamos una clase de grafos hereditarios para la cual el tiempo de percolación de cualquier grafo en la clase es 1.

Y por último en el capítulo 4 calculamos una fórmula para calcular el número de Carathéodory bajo la P_3 -convexidad en los grafos de Hamming y para cierta subfamilia de los grafos de Hamming de dimensión mayor o igual a 7.

Capítulo 2

Problemas de cubrimientos y particiones de grafos con conjuntos convexos

En este capítulo estudiamos la complejidad computacional de los problemas de decisión de cubrimientos con conjuntos convexos y de particionar en conjuntos convexos los vértices de un grafo bajo distintas convexidades.

Los problemas de decisión que estudiamos son:

- *Problema de cubrimiento C -convexo*: dado un grafo G y un número entero p , nos preguntamos si $V(G)$ tiene un p -cubrimiento C -convexo.
- *Problema de p -cubrimiento C -convexo*: dado un grafo G , nos preguntamos si $V(G)$ tiene un p -cubrimiento C -convexo.
- *Problema de partición C -convexa*: dado un grafo G y un número entero p , nos preguntamos si $V(G)$ tiene una p -partición C -convexa.
- *Problema de p -partición C -convexa*: dado un grafo G , nos preguntamos si $V(G)$ tiene una p -partición C -convexa.

Los cuatro problema para la convexidad geodésica y el problema de p partición con p variable bajo la P_3 -convexidad ya estaban resueltos cuando arrancamos a trabajar.

Los resultados principales de este capítulo fueron publicados en [35].

2.1. Convexidad digital

Recordamos que un conjunto S de vértices de un grafo G es digitalmente convexo si, para cada vértice v de $V(G)$, $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ entonces $v \in S$. Usamos *d-convexo* para denotar cualquier conjunto convexo bajo la convexidad digital.

Nuestro primer resultado caracteriza a los conjuntos d-convexos como complementos de las vecindades cerradas de conjuntos de vértices.

Proposición 2.1.1. *Sea G un grafo, $S \subseteq V(G)$ y $W = V(G) \setminus N_G[S]$. Para cada vértice v de G , $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ si y solo si $v \notin N_G[W]$.*

Demostración. Tenemos que $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ es equivalente a $N_G[v] \cap W = \emptyset$ que, a su vez, es equivalente a $v \notin N_G[W]$. $\square$

Lema 2.1.2. *Un conjunto de vértices S de un grafo G es d-convexo si y solo si $S = V(G) \setminus N_G[W] = \overline{N_G[W]}$ para algún conjunto $W \subseteq V(G)$.*

Demostración. Supongamos que S es un conjunto d-convexo de G y sea $W = V(G) \setminus N_G[S]$. Definimos $S = V(G) \setminus N_G[W]$. Por un lado, si $v \in S$, entonces $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ y, por la proposición 2.1.1, $v \notin N_G[W]$. Por otro lado, si $v \notin N_G[W]$, entonces, por proposición 2.1.1, $N_G[v] \subseteq N_G[S]$ y, dado que S es d-convexo, $v \in S$. Concluimos que $S = V(G) \setminus N_G[W]$.

Recíprocamente, sea $W \subseteq V(G)$ y $S = V(G) \setminus N_G[W]$. Sea $v \in V(G)$ tal que $N_G[v] \subseteq N_G[S]$. En particular, $v \in N_G[S]$. Observamos que $N_G[S] \cap W = \emptyset$ (de hecho, si hubiera algún vértice $w \in W \cap N_G[S]$, entonces habría algún vértice $s \in N_G[W] \cap S$, contradicción). Por lo tanto, $N_G[v] \cap W = \emptyset$ o, de manera equivalente, $\{v\} \cap N_G[W] = \emptyset$. Por lo tanto, $v \in V(G) \setminus N_G[W] = S$. Esto prueba que S es un conjunto d-convexo de G . $\square$

Un *conjunto totalmente dominante* de un grafo G es un conjunto S de vértices de G tales que cada vértice de G tiene al menos un vecino en S .

Nuestro siguiente resultado muestra que la existencia de un cubrimiento con p conjuntos digitalmente convexos (p suficientemente chico) es equivalente a la existencia de conjuntos totalmente dominantes suficientemente pequeños en el complemento.

Teorema 2.1.3. *Un grafo G tiene un p -cubrimiento d -convexo si y solo si $\overline{G}$ tiene un conjunto totalmente dominante de tamaño como máximo p .*

Demostración. Sea $X = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ un conjunto totalmente dominante de $\overline{G}$ con $k \leq p$. En virtud del lema 2.1.2, $V_i = V(G) \setminus N_G[w_i]$ es un conjunto d -convexo para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Afirmamos que $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ es un cubrimiento de $V(G)$. Dado que X es un conjunto totalmente dominante de $\overline{G}$, para cada v en $V(\overline{G}) = V(G)$, existe algún $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $v \in N_{\overline{G}}(w_i) = V(G) \setminus N_G[w_i] = V_i$. Por lo tanto, $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i$.

Recíprocamente, sea $\{V_1, \dots, V_p\}$ un p -cubrimiento d -convexo de G . Por lo tanto, por el lema 2.1.2, $V_i = V(G) \setminus N_G[W_i]$ para algún $W_i \subseteq V(G)$. Elegimos un vértice $w_i \in W_i$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Tenemos en cuenta que puede suceder que $w_i = w_j$ incluso si $i \neq j$. Sea $W = \{w_1, \dots, w_p\}$. Por construcción, $|W| \leq p$. Como $\{V_1, \dots, V_p\}$ es un cubrimiento de G , por cada $v \in V(\overline{G})$ hay algún $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $v \in V_i = V(G) \setminus N_G[W_i] \subseteq V(G) \setminus N_G[w_i] = N_{\overline{G}}(w_i)$. Esto prueba que W es un conjunto totalmente dominante de $\overline{G}$ con como máximo p vértices. $\square$

Dado que el problema de decidir si, dado un grafo G y un entero positivo p , G tiene un conjunto totalmente dominante de tamaño a lo sumo p es NP-completo [43], el Teorema 2.1.3 implica lo siguiente.

Corolario 2.1.4. *Es NP-completo decidir si, dado un grafo G y un entero $p \geq 2$, G tiene un p -cubrimiento d -convexo.*

Observamos que el Corolario 2.1.4 demuestra la NP-completitud de decidir si un grafo G tiene un p -cubrimiento d -convexo cuando p es parte del input. Sin embargo, se desconoce la complejidad del caso en el que p es un número entero fijo.

Se desconoce la complejidad computacional del problema de decidir, dado un grafo G y un entero p , si el grafo G tiene una p -partición d -convexa. Si se asume que el grafo G es bipartito y fijamos $p = 2$, entonces el problema se puede resolver en tiempo polinomial.

Empezamos probando el siguiente lema.

Lema 2.1.5. *Sea G un grafo conexo. Si G tiene una 2-partición d -convexa, entonces G tiene diámetro al menos 3.*

Demostración. Sea $\{V_1, V_2\}$ una 2-partición d -convexa de un grafo conexo G . Como G es conexo, existe $u_i \in V_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$ tal que u_1 es adyacente a u_2 . Dado que $u_i \in N_G[V_{i+1}]$ (donde las sumas deben considerarse módulo 2) y V_{i+1} es un conjunto d -convexo, existe un vértice v_i adyacente a u_i tal que $v_i \notin N_G[V_{i+1}]$. Por construcción, $v_1 u_1 u_2 v_2$ es un camino inducido de longitud tres de G . En consecuencia, el diámetro de G es al menos 3. $\square$

Ahora estamos listos para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Un grafo bipartito G tiene una 2-partición d -convexa si y solo si G tiene diámetro al menos 3. Además, si dicha partición existe, se puede encontrar en tiempo polinomial.*

Demostración. Si G es desconexo y C es cualquier componente conexa de G , entonces $\{C, V(G) \setminus C\}$ es una 2-partición d -convexa de G que, además, se puede construir en tiempo polinomial. Por lo tanto, asumamos, sin pérdida de generalidad, que G es conexo. Ya hemos probado en el Lema 2.1.5 que si G es un grafo conexo que tiene una 2-partición d -convexa, entonces G tiene diámetro al menos 3.

Por el contrario, supongamos ahora que G es un grafo bipartito conexo con bipartición $\{X, Y\}$ y diámetro 3. Sean $u, v \in V(G)$ dos vértices tales que $d_G(u, v) = 3$, $u \in X$ y los dos conjuntos $V_1 = N_G[u] \cup \{x \in X : N_G(x) \subseteq N_G[u]\}$ y $V_2 = V(G) \setminus V_1$ se pueden calcular en tiempo polinomial. En efecto, $\{V_1, V_2\}$ es una 2-partición d -convexa de G , ya que, observemos que u y v están en conjuntos distintos de la bipartición $\{X, Y\}$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $u \in X$. Decimos que $\{V_1, V_2\}$, donde $V_1 = N_G[u] \cup \{x \in$

$X: N_G(x) \subseteq N_G[u]$ y $V_2 = V(G) \setminus V_1$, es una 2-partición d-convexa de G . No es difícil ver que V_1 es d-convexo por definición. De hecho, sea $v \in V(G)$ tal que $N_G[v] \subseteq N_G[V_1]$ y probaremos que $v \in V_1$. Por un lado, si $v \in X$, entonces $v \in V_1$ porque $N_G(v) \subseteq N_G[V_1] \cap Y = N_G(V_1 \cap X) \cap Y \subseteq N_G[u]$. Por otro lado, si $v \in Y$, entonces $v \in N_G[V_1] \cap Y \subseteq N_G[u] \subseteq V_1$. Por tanto, V_1 es un conjunto d-convexo de G . Además, dado que $V_1 = N_G[V_1 \cap X]$, se sigue que $V_2 = V(G) \setminus N_G[V_1 \cap X]$ y, en virtud del Lema 2.1.2, V_2 también es un conjunto d-convexo de G . Dado que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, concluimos que $\{V_1, V_2\}$ es una 2-partición d-convexa de G . Claramente, si G tiene diámetro al menos 3, entonces u y v se pueden encontrar en tiempo polinomial y, por tanto, V_1 y V_2 también se pueden construir en tiempo polinomial. $\square$

2.2. P_3 -convexidad

Recordamos que en la P_3 -convexidad los conjuntos convexos son generados por el conjunto de todos los caminos de longitud dos. Llamamos P_3 -convexo a cualquier conjunto convexo bajo la P_3 -convexidad. Se puede demostrar fácilmente que el problema de decidir si un grafo tiene una 2-partición P_3 -convexa y el problema de decidir si un grafo tiene un matching cut set son equivalentes, y es el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Un grafo G tiene una 2-partición P_3 -convexa si y solo si G tiene un matching cut set.*

Demostración. Sea $\{V_1, V_2\}$ una 2-partición P_3 -convexa de $V(G)$. Afirmamos que el conjunto de aristas $M = \{uv: u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$ es un matching cut set de G . Claramente, M es un conjunto de aristas de corte. Argumentando por el absurdo, supongamos que existen dos aristas $uv, u'v' \in M$ tales que $u = u'$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u \in V_1$ y por lo tanto $v, v' \in V_2$. Por lo tanto, como V_2 es un conjunto P_3 -convexo, $u \in V_2$, contradiciendo $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Esto prueba que M es un matching cut set.

Recíprocamente, supongamos que M es un matching cut set de G del corte (V_1, V_2) . Probaremos que V_1 es un conjunto P_3 -convexo. Supongamos, por el absurdo, que existe un vértice $v \in V_1$ tal que $|N_G(v) \cap V_2| \geq 2$ y sea

$w, x \in N_G(v) \cap V_2$. En consecuencia, wvx es un camino de tres vértices en G y, por lo tanto, $u \in V_2$, lo que contradice que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Por lo tanto, V_1 es un conjunto P_3 -convexo. Por simetría, se sigue que V_2 también es un conjunto P_3 -convexo. $\square$

En el siguiente lema vamos a usar la siguiente construcción: sea G un grafo y sea p un número entero tal que $p \geq 2$. Construimos un grafo G' de la siguiente manera: tomamos una copia de G y un grafo bipartito completo $K_{r,r}$ donde $r = \max\{p+2, |V(G)|\}$, agregamos una arista conectando cada vértice de $V(G)$ con un vértice de uno de los conjuntos de la partición de $K_{r,r}$, de modo que no haya dos vértices de la copia de G en G' adyacentes al mismo vértice en el grafo bipartito completo $K_{r,r}$, ver ejemplo en la figura 2.1. Vamos a probar cual es la relación entre una p -partición P_3 -convexa de G con una de G' .

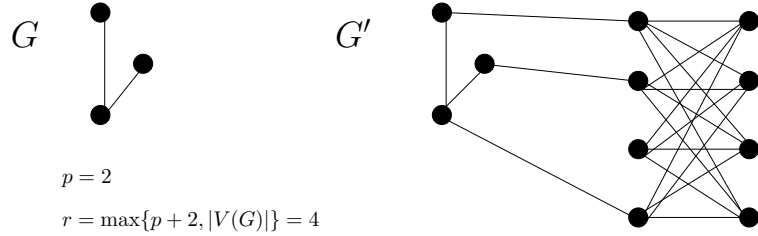


Figura 2.1: Dado G construimos G'

Lema 2.2.2. *Sea p un entero tal que $p \geq 2$. Un grafo G tiene una p -partición P_3 -convexa si y solo si G' tiene una $(p+1)$ -partición P_3 -convexa.*

Demostración. Vemos la idea de la demostración en la siguiente figura

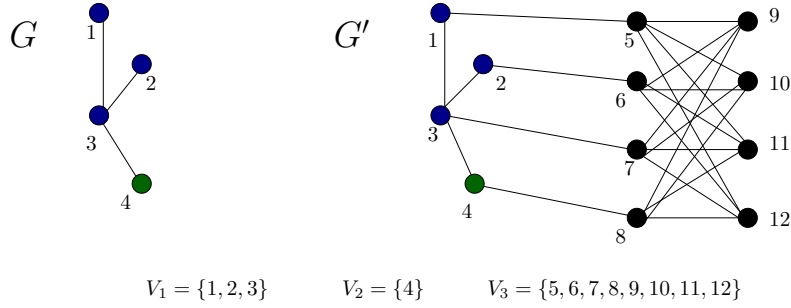


Figura 2.2: $\{V_1, V_2\}$ es una 2-partición P_3 -convexa de G y $\{V_1, V_2, V_3\}$ es una 3-partición P_3 -convexa de G'

Si G tiene una p -partición P_3 -convexa, $\{V_1, \dots, V_p\}$, entonces G' tiene una $(p+1)$ -partición P_3 -convexa, $\{V_1, \dots, V_p, V_{p+1}\}$, donde V_{p+1} es el conjunto de vértices de la copia de $K_{r,r}$ en G' . Por el contrario, supongamos que G' tiene una $(p+1)$ -partición P_3 -convexa $\{V_1, \dots, V_p, V_{p+1}\}$. Sea V el conjunto de vértices de la copia de G en G' y sea V' el conjunto de vértices de la copia de $K_{r,r}$ en G' . Afirmamos que $V' \subseteq V_i$ para algún $i \in \{1, \dots, p, p+1\}$. En efecto, dado que $r \geq p+2$, existen al menos dos vértices no adyacentes $\{x, y\} \in V' \cap V_i$ para algún $i \in \{1, \dots, p, p+1\}$ y como V_i es P_3 -convexo se tiene que $V' \subseteq V_i$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $i = p+1$; es decir, $V' \subseteq V_{p+1}$. Sea $W = V_{p+1} \cap V$. Argumentando por el absurdo, supongamos que $W \neq \emptyset$. Observamos que si ningún vértice de W tiene un vecino en V_i para cualquier $i \in \{1, \dots, p\}$, entonces $\{V_1, \dots, V_{p-1}, V_p \cup W\}$ es una p -partición P_3 -convexa de la copia G en G' y, en particular, una p -partición P_3 -convexa de G , como se desea probar. Por lo tanto, asumimos, sin pérdida de generalidad, que hay algún vértice $a \in W$ adyacente a algún vértice $b \in V_i$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$. Por construcción de G' , existe un vértice $c \in V' \subseteq V_{p+1}$ que es adyacente a b y no adyacente a a . En consecuencia, abc es un camino de tres vértices de G' tal que $\{a, c\} \in V_{p+1}$ pero $b \notin V_{p+1}$, contradiciendo la hecho de que V_{p+1} es un conjunto P_3 -convexo de G' . Esta contradicción surgió de suponer que $W \neq \emptyset$. Por lo tanto, $W = \emptyset$ y por lo tanto $V_{p+1} = V'$. Entonces, $\{V_1, \dots, V_p\}$ es una p -partición P_3 -convexa de la copia de G en G' y, en particular, una p -partición P_3 -convexa de G . $\square$

Dado que el problema de matching cut set es NP-completo incluso cuando la entrada es un grafo bipartito [54] y usando los lemas 2.2.1 y 2.2.2 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Para cada entero fijo $p \geq 2$, es NP-completo decidir, dado un grafo G , si G tiene una p -partición P_3 -convexa, incluso si G es un grafo bipartito.*

Demostración. Como ya probamos en el Lema 2.2.1, el problema de decidir si existe una 2-partición bajo la P_3 -convexidad en un grafo G es equivalente al problema de decidir si existe un matching cut set en G , además sabemos que el problema de matching cut set es NP-completo incluso cuando la entrada es un grafo bipartito, [54]. Entonces el problema de 2-partición en grafos bipartitos es NP-completo. Luego en el lema 2.2.2 probamos que si el problema es NP-completo para p entonces lo es para $(p+1)$. Entonces como para $p = 2$ es NP-completo, también lo es para todo $p \geq 2$. $\square$

Corolario 2.2.4. *Para cada entero fijo $p \geq 2$, es NP-completo decidir si, dado un grafo G , G tiene una p -partición P_3^* -convexa, incluso si G es un grafo bipartito.*

Demostración. Observamos que, en un grafo bipartito, la familia de conjuntos P_3 -convexos de G' coincide con la familia de conjuntos P_3^* -convexos de G' . Por lo tanto, el Teorema 2.2.3 sigue siendo válido si ‘ P_3 -convexo’ se reemplaza por ‘ P_3^* -convexo’. $\square$

Lema 2.2.5. *Sea G un grafo split con partición split (K, S) y p un número entero tal que $p \geq 2$. Si cada vértice $s \in S$ tiene grado al menos dos, entonces G tiene una p -partición P_3 -convexa si y solo si G tiene un p -cubrimiento P_3 -convexo.*

Demostración. La parte ‘solo si’ es clara. Supongamos que G tiene un p -cubrimiento P_3 -convexo $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$. Notamos que $|V_i \cap K| \leq 1$, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, porque de lo contrario todo vértice $x \in K$ pertenecería a V_i . Además, dado que cada vértice de S es adyacente al menos a dos vértices de K , $y \in V_i$ para cada vértice $y \in S$, contradice que $V_i \neq V(G)$. Además,

si $x \in K$ e $y \in S$ son adyacentes, entonces no existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\{x, y\} \in V_i$; de lo contrario, cualquier otro vecino z de y en $\mathcal{C}$ pertenecería a V_i y por lo tanto $\{x, z\} \in V_i \cap K$. Hemos probado que V_i es un conjunto estable para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Sea $V'_1 = V_1$ y sea $V'_{i+1} = V_{i+1} \setminus (\bigcup_{j=1}^i V_j)$ para cada $j \in \{2, \dots, p\}$. Por construcción, $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ es una partición. Afirmamos que, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, V'_i es un conjunto P_3 -convexo. Argumentando por el absurdo, supongamos que existe algún $i \in \{1, \dots, p\}$ y algún vértice $x \in V(G) \setminus V'_i$ tal que $\{u, v\} \subseteq N_G(x) \cap V'_i$. En particular, $\{u, v\} \in V_i$ y, dado que V_i es P_3 -convexo, $x \in V_i$, contradiciendo el hecho de que V_i es un conjunto estable. Esta contradicción prueba la afirmación. Por lo tanto, $\{V'_1, V'_2, \dots, V'_p\}$ es una p -partición P_3 -convexa de G . $\square$

En [17], Centeno y otros demuestran que es NP-completo decidir si dado un grafo G tiene una p -partición P_3 -convexa cuando p es parte del input, incluso cuando G es un grafo split.

Teorema 2.2.6 ([17, Teorema 2.1]). *El problema de decidir si, dado un grafo split G y un entero positivo p , G tiene una p -partición P_3 -convexa es NP-completo, incluso si G es un grafo split.*

Demostración. Para poder hacer la demostración de ese teorema, los autores, Centeno y otros, presentan una reducción polinomial del problema del número cromático al problema de p -partición P_3 -convexa. Dada una instancia (H, k) , donde H es un grafo y k un entero positivo, construyen un grafo split G con una partición split (K, S) de la siguiente manera. El conjunto independiente S tiene $|V(H)|$ vértices y la clique K tiene $2|V(H)| + |E(H)|$ vértices. Sea $f : V(H) \rightarrow S$ una función biyectiva. Para cada vértice $u \in V(H)$, $f(u)$ tiene dos vecinos $g(u)$ y $g'(u)$ en K . Además, si $uv \in E(H)$, entonces $f(u)$ y $f(v)$ tienen un vecino en común $h(uv)$ en K . Todos los vértices especificados en K son distintos y $K = \{g(u) : u \in V(H)\} \cup \{g'(u) : u \in V(H)\} \cup \{h(uv) : uv \in E(H)\}$. Sea $p = k + |K|$. Vemos un ejemplo en la figura 2.3.

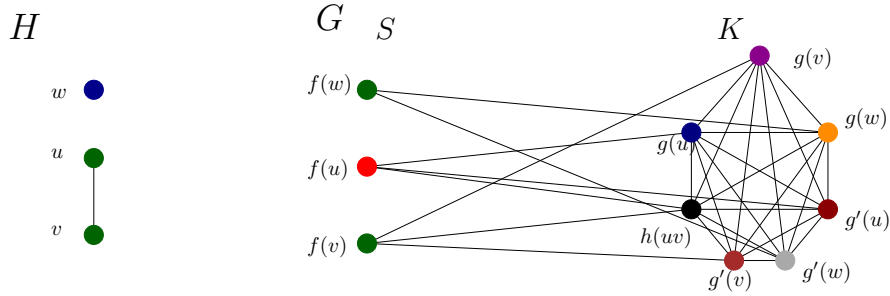


Figura 2.3: $|V(H)| = 3$; $k = 2$; $|K| = 7$; $p = 9$

Finalmente, se prueba que H tiene una coloración de vértices propia con k colores si y solo si G tiene una p -partición P_3 -convexa. Se sabe que el problema del número cromático es NP-completo, [34], por lo tanto, se cumple el resultado. $\square$

De la demostración del teorema 2.1 de [17], podemos observar que cada vértice en el conjunto independiente S del grafo split G tiene al menos grado dos, con lo cual vale el siguiente teorema.

Teorema 2.2.7 ([17]). *El problema de decidir si, dado un grafo split G con una partición split (K, S) y un entero positivo p , G tiene una p -partición P_3 -convexa es NP-completo, incluso si cada vértice en S tiene al menos dos vecinos.*

Por lo tanto, por el Lema 2.2.5, se muestra el siguiente resultado.

Corolario 2.2.8. *El problema de decidir si, dado un grafo G y un entero positivo $p \geq 2$, G tiene un p -cubrimiento P_3 -convexo es NP-completo, incluso si G es un grafo split.*

Demostración. El resultado se obtiene combinando el Lema 2.2.5 y el Teorema 2.2.7. $\square$

2.3. Convexidad monofónica

Usamos m -convexo para denotar cualquier conjunto convexo bajo la convexidad monofónica.

Probaremos que es NP-completo decidir, dado un grafo G y un entero $p \geq 3$, si G tiene una p -partición m -convexa, adaptando la demostración del Teorema 1 de [6] para el resultado análogo para la convexidad geodésica.

Teorema 2.3.1 ([6, Teorema 1]). *Sea G un grafo y $p \geq 3$ un entero fijo. Es NP-completo decidir si G tiene un p -cubrimiento g -convexo.*

En [56], Whitesides demuestra que una clique separadora se puede encontrar en tiempo $O(nm)$. En [28], Dorado y otros demuestran que si $\mathcal{C}$ es una clique separadora de un grafo conexo G y S es la unión de los conjuntos de vértices de algunas componentes conexas de $G \setminus \mathcal{C}$, entonces $S \cup \mathcal{C}$ es un conjunto m -convexo de G .

Si p es un entero positivo, CLIQUE p -PARTITION es el problema de decidir, dado un grafo G , si el conjunto de vértices de G se puede dividir en p cliques de G .

Teorema 2.3.2 ([34]). *El problema Clique p -Partition es NP-completo para todo $p \geq 3$.*

Teorema 2.3.3. *Es NP-completo decidir si, dado un grafo G y un entero $p \geq 3$, G tiene una p -partición m -convexa.*

Demostración. Sabemos que decidir si un conjunto $S \subseteq V(G)$ es m -convexo se puede hacer en tiempo polinomial, [28], y por lo tanto el problema de decidir si un grafo G tiene un p -cubrimiento m -convexo pertenece a la clase de problemas NP. La prueba sigue de la misma manera que la prueba de la completitud NP del problema p -partición g -convexa del teorema 3 de [5], adaptado a la convexidad monofónica. Sea G una instancia del problema CLIQUE p -PARTITION. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $|V(G)| \geq 2$ y que G no es un grafo completo. Construimos un grafo G' cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cup \{u, v\}$ y $E(G') = E(G) \cup \{ux, vx : x \in V(G)\}$.

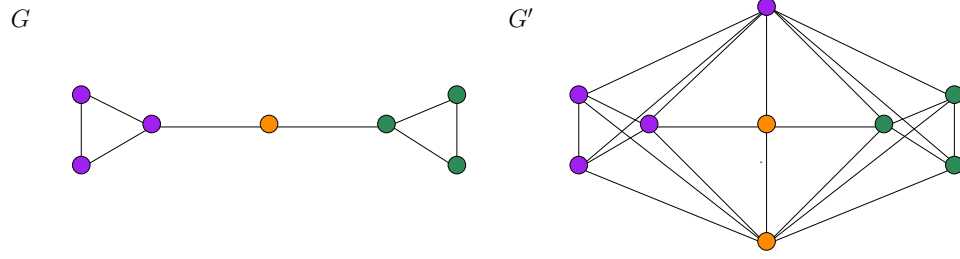


Figura 2.4: Ejemplo de G y G'

Probaremos que existe una CLIQUE p -PARTITION de $V(G)$ si y sólo si existe una p -partición m -convexa de $V(G')$. Como toda clique de G es un conjunto m -convexo de $V(G)$, entonces toda partición en cliques, es una partición en conjuntos m -convexos de $V(G)$.

Todo conjunto m -convexo propio de $V(G')$ es una clique, porque si existiera un $C \subsetneq V(G)$, m -convexo que no es una clique, entonces $\{u, v\} \in C$, pues para todo $x \in V(G)$, uxy es un camino inducido en G' . Entonces, $\mathcal{H}(\{u, v\}) = V(G')$, con lo cual $C = V(G')$, absurdo.

Si $V(G)$ tiene una partición en p cliques, $p \geq 3$, entonces formamos la p -partición m -convexa de $V(G')$ agregando u a una clique y v a otra clique diferente a la anterior. Si $V(G')$ tiene una p -partición m -convexa con $p \geq 3$, eso induce una partición de $V(G)$ en l cliques, $p-2 \leq l \leq p$. Si $l \neq p$, divimos una clique de G' en dos cliques y así obtenemos una partición de $V(G)$ en $l+1$ cliques. Si $l+1 \neq p$, hacemos lo mismo con otra clique, y así hasta obtener la p -partición clique de $V(G)$. $\square$

A continuación, probaremos que decidir si un grafo G tiene un 2-cubrimiento m -convexo se resuelve en tiempo polinomial.

Lema 2.3.4 ([28]). *Sea G un grafo conexo, $\mathcal{C}$ una clique separadora de G y S la unión de los conjuntos de vértices de algunas de las componentes conexas de $G \setminus \mathcal{C}$. Entonces $S \cup \mathcal{C}$ es un conjunto m -convexo de G .*

Corolario 2.3.5. *Si G es un grafo conexo que tiene una clique separadora, entonces G tiene un 2-cubrimiento m -convexo.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es una clique separadora de G y G_1 es cualquier componente conexa de $G \setminus \mathcal{C}$, entonces, en virtud del lema 2.3.4, $\{V(G_1) \cup \mathcal{C}, (V(G) \setminus V(G_1)) \cup \mathcal{C}\}$ es un 2-cubrimiento m-convexo de G . $\square$

Dorado y otros probaron el siguiente lema:

Lema 2.3.6 ([28]). *Si G es un grafo conexo no completo que no tiene una clique separadora, entonces cada par de vértices no adyacentes es una m-cápsula convexa de G .*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.3.6.

Corolario 2.3.7. *Si G es un grafo conexo que no tiene una clique separadora, entonces todo conjunto m-convexo propio de G es una clique. Además, G tiene un 2-cubrimiento m-convexo si y solo si G es un grafo co-bipartito.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los caminos inducidos de G . Argumentando por el absurdo, supongamos que S es un conjunto m-convexo de G tal que $S \neq V(G)$ y hay dos vértices no adyacentes $\{v, w\} \in S$. Como S es un conjunto m-convexo, $I_{\mathcal{P}}[S] = S$. Por lo tanto, en virtud del Lema 2.3.6, $V(G) = I_{\mathcal{P}}[v, w] \subseteq I_{\mathcal{P}}[S] = S$, absurdo.

Un grafo co-bipartito tiene siempre un 2-cubrimiento m-convexo, pues sea $\{V_1, V_2\}$ la bipartición de $\overline{G}$, V_1 y V_2 son conjuntos independientes en $\overline{G}$, con lo cual son cliques en G , con lo cual V_1 y V_2 son conjuntos m-convexos en G , entonces tenemos que G tiene un 2-cubrimiento m-convexo que es (V_1, V_2) . Por el contrario, si G tiene un 2-cubrimiento m-convexo (V_1, V_2) , sabemos que V_1 y V_2 son cliques de G , por lo tanto $\{V_1, V_2 \setminus V_1\}$ es una bipartición de $\overline{G}$. $\square$

Teorema 2.3.8. *El problema de dado un grafo G , decidir si G tiene un 2-cubrimiento m-convexo, se puede resolver en tiempo polinomial.*

Demostración. Para decidir si un grafo conexo G tiene un 2-cubrimiento m-convexo, primero buscamos una clique separadora, que se encuentra en tiempo $O(nm)$ [56]. Si se encuentra una clique separadora, entonces, por Corolario 2.3.5, G tiene un 2-cubrimiento m-convexo. Si G no tiene una

clique separadora, probamos que G es co-bipartito, lo que se puede realizar en tiempo lineal. En consecuencia, se puede decidir en tiempo $O(nm)$ si un grafo dado G tiene o no tiene un 2-cubrimiento m-convexo. $\square$

Capítulo 3

Fórmulas para calcular parámetros en los grafos caterpillar y de intervalo unitario en la P_3 -convexidad

En este capítulo nos ocuparemos únicamente de la P_3 -convexidad. Entonces, de ahora en adelante, en algunos casos, omitiremos el prefijo ‘ P_3 -’ y $\mathcal{P}$ denotará el conjunto de caminos de tres vértices.

Todos los parámetros que usaremos en este capítulo están vinculadas con la P_3 -convexidad, que es la convexidad de caminos generada por el conjunto de todos los caminos de longitud dos. Una definición equivalente que usaremos es la siguiente: un conjunto P_3 -convexo es un conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que para cada vértice $v \in V(G) \setminus S$, v tiene como máximo un vecino en S .

Los resultados principales de este capítulo fueron publicados en [36].

3.1. Número de P_3 -intervalo y número de P_3 -cápsula de un grafo caterpillar

3.1.1. Secuencia básica de un grafo caterpillar

Sea T un grafo caterpillar. Por definición, T tiene algún camino dominante P . Sea $P = v_1 \dots v_k$ elegido para que sus extremos sean hojas de T . Para cada vértice w de T , definimos el *grado reducido de w en T* por $\tilde{d}_T(w) = \min\{d_T(w), 4\}$. La secuencia $\tilde{d}_T(v_1), \tilde{d}_T(v_2), \dots, \tilde{d}_T(v_k)$, denotada por $s(T)$, se denomina *secuencia reducida de grados de T* . Dado que un camino dominante de T que tiene hojas como vértices finales es único cuando se definen sus puntos finales, la secuencia reducida de grados de T está bien definida. Por construcción, el primer y último término de $s(T)$ son iguales a 1, es decir, $\tilde{d}_T(v_1) = \tilde{d}_T(v_k) = 1$.

Sea α una secuencia. La *longitud* de α , indicada como $|\alpha|$, es el número de términos de α . Para cada $i \in \{1, \dots, |\alpha|\}$, denotamos por α_i el i -ésimo término de α . Sean α^1 y α^2 dos secuencias de longitud n_1 y n_2 , respectivamente. La *concatenación de α^1 y α^2* , denotada por $\alpha^1\alpha^2$, es la secuencia β de longitud $n_1 + n_2$ caracterizada por $\beta_i = \alpha_i^1$ por cada $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ y $\beta_{n_1+i} = \alpha_i^2$ por cada $i \in \{1, 2, \dots, n_2\}$. Si α^1 o α^2 es la secuencia vacía, entonces $\alpha^1\alpha^2$ es α^2 o α^1 , respectivamente. Sea Γ la familia de secuencias, posiblemente vacías, γ tales que todos los términos de γ son iguales a 4.

Una *secuencia básica* λ es una secuencia que satisface exactamente una de las siguientes condiciones:

- $\lambda = 1$ (tipo I)
- $\lambda \in \{21, 22, 23, 24\}$, donde cada elemento del conjunto debe pensarse como una secuencia, o $\lambda \in \{x\gamma y, x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2\} \text{ y } \gamma \in \Gamma\}$ (tipo II)
- $\lambda \in \{x\gamma 3y, x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } \gamma \in \Gamma\}$ (tipo III).

Denotamos por Λ a la familia de todas las secuencias básicas. Un *prefijo* de una secuencia α es una secuencia β tal que $\alpha = \beta\eta$ para alguna secuencia,

posiblemente vacía, η . Si η no es vacía, entonces β es un *prefijo propio* de α . Observe que ninguna secuencia básica es un prefijo propio de otra secuencia básica. Ver figura 3.1.1.

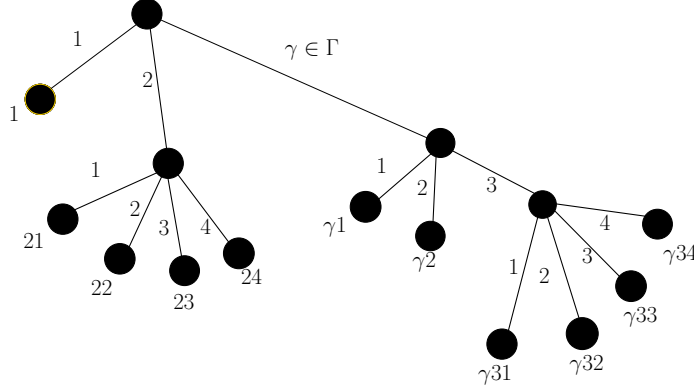


Figura 3.1: En este árbol de prefijos están agrupadas todas las secuencias de grados posibles que pueden quedar.

Lema 3.1.1. *Sea σ una secuencia finita cuyos términos pertenecen a $\{1, 2, 3, 4\}$ y cuyo último término es 1. Entonces, existe algún entero $p \geq 0$ y algún $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^p \in \Lambda$ tal que $\sigma = \lambda^0 \lambda^1 \dots \lambda^p$. Además, el entero p y las sucesiones $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^p$ están determinadas de forma única.*

Demostración. Probamos el lema por inducción sobre la longitud de σ . Dado que el último término de σ es igual a 1, es posible definir un prefijo λ^0 de σ de la siguiente manera:

- (I) si $\sigma_1 = 1$, ponemos $\lambda^0 = 1$ (tipo I);
- (II) si $\sigma_1 = 2$, ponemos $\lambda^0 = \sigma_1 \sigma_2 = 2 \sigma_2$ (tipo II);
- (III) si $\sigma_1 \in \{3, 4\}$ y j es el entero más chico menor que 1 tal que $\sigma_j \neq 4$, entonces:
 - a) si $\sigma_j \in \{1, 2\}$, ponemos $\lambda^0 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_j = \sigma_1 \gamma \sigma_j$ para algún $\gamma \in \Gamma$ (tipo II);
 - b) si $\sigma_j = 3$, ponemos $\lambda^0 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_j \sigma_{j+1} = \sigma_1 \gamma 3 \sigma_{j+1}$ para algún $\gamma \in \Gamma$ (tipo III).

Por construcción, $\lambda^0 \in \Lambda$. Si $\sigma = \lambda^0$, el lema se cumple trivialmente. De lo contrario, $\sigma = \lambda^0 \sigma'$ para alguna secuencia σ' cuyo último término es 1 y, por la hipótesis inductiva, hay algún $p \geq 1$ y algún $\lambda^1, \dots, \lambda^p \in \Lambda$ tal que $\sigma' = \lambda^1 \cdots \lambda^p$; por lo tanto $\sigma = \lambda^0 \lambda^1 \cdots \lambda^p$. Por la unicidad de p y $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^p$ se sigue inmediatamente por inducción del hecho de que ningún elemento de Λ es un prefijo propio de otro elemento de Λ . $\square$

De ahora en adelante, todos los grafos caterpillar considerados en este trabajo tienen al menos dos vértices.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 3.1.1.

Lema 3.1.2. *Si T es un grafo caterpillar y $s(T)$ es una secuencia de grados reducidos de él, entonces existe algún número entero $p \geq 1$ y algún $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^p \in \Lambda$ tal que $s(T) = 1\lambda^1\lambda^2 \cdots \lambda^p$. Además, el entero p y las secuencias $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^p$ están determinadas de manera única.*

Ahora, estamos listos para introducir un parámetro $p(T)$ definido para cada grafo caterpillar T y una secuencia de grados reducida $s(T)$. El *número de secuencia básica* de un grafo caterpillar T , indicado por $p(T)$, es el único entero positivo p tal que $s(T) = 1\lambda^1\lambda^2 \cdots \lambda^p$, donde $\lambda^i \in \Lambda$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Se muestra un ejemplo en la figura 3.2.

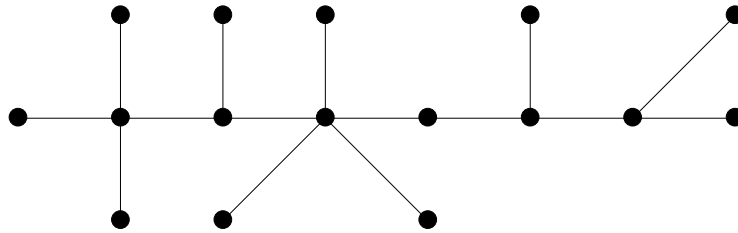


Figura 3.2: Las dos posibles secuencias de grado reducido del grafo caterpillar representado T son 14342331 y 13324341. Observe que la segunda secuencia es la primera recorrida hacia atrás. Ambas son la concatenación de cuatro secuencias básicas 1, 434, 23, 31 y 1, 332, 434, 1, respectivamente. Por lo tanto, $p(T) = 3$.

3.1.2. Número P_3 -intervalo

Recordemos que un conjunto de P_3 -intervalo de un grafo G es un conjunto S de vértices tales que cada vértice fuera de S tiene al menos dos vecinos en S y $g(G)$ representa el tamaño de un conjunto de P_3 -intervalo mínimo de G .

Usamos $\ell(T)$ (respectivamente $\mathcal{L}(T)$) para indicar la cantidad de hojas (respectivamente el conjunto de hojas) de un árbol T .

Teorema 3.1.3. *Si T es un grafo caterpillar que tiene al menos 2 vértices, entonces*

$$g(T) = p(T) + \ell(T) - 1.$$

Demostración. Sea $P = v_1 v_2 \dots v_k$ un camino dominante de T donde v_1 y v_k son hojas de T . Sea $\sigma = s(T) = \tilde{d}_T(v_1) \tilde{d}_T(v_2) \dots \tilde{d}_T(v_k)$. Por el lema 3.1.2, $\sigma = 1\lambda^1 \dots \lambda^p$ para algunos $\lambda^1, \dots, \lambda^p \in \Lambda$, donde $p = p(T)$. Sea $t_0 = 1$ y sea $t_j = |1\lambda^1 \dots \lambda^j| = 1 + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^j|$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Así $1 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = k$. (si, $t_0 = 1$, $t_p = k$), y $\sigma_{t_j} = \tilde{d}_T(v_{t_j}) = \lambda_{r_j}^j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, p\}$. Sea S el conjunto $\{v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_{p-1}}\} \cup \mathcal{L}(T)$. Como ninguno de los vértices $v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_{p-1}}$ es una hoja de T , entonces $|S| = p(T) + \ell(T) - 1$.

Afirmamos que S es un conjunto de intervalos de T . Sea v un vértice en $V(T) \setminus S$. Dado que $\mathcal{L}(T) \subseteq S$, $v \in V(P)$. Por lo tanto, $v = v_h$ para algún $h \in \{1, 2, \dots, k\}$. Además, dado que $v_{t_0}, v_{t_1}, \dots, v_{t_p}$ son vértices de S , se sigue que $h \neq t_j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, p\}$. Sea $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $t_{j-1} < h < t_j$ y sea i tal que $h = t_{j-1} + i$. Observe que, $\tilde{d}_T(v_h) = \sigma_h = \lambda_i^j$ para algún $1 \leq i < |\lambda^j|$, porque $\sigma = 1\lambda^1 \dots \lambda^p$. Como $h \notin \{t_0, t_p\}$, $\lambda_i^j \neq 1$.

Supongamos primero que $\lambda_i^j = 2$. Por lo tanto, $\lambda^j \in \{21, 22, 23, 24\}$ e $i = 1$, porque $\lambda^j \in \Lambda$. En consecuencia $t_{j-1} = h - 1$ y $t_j = h + 1$. Por lo tanto, v_h es adyacente a $v_{t_{j-1}}$ y a v_{t_j} . Supongamos ahora que $\lambda_i^j = 3$. Por lo tanto, $\lambda^j \in \Lambda$ y $\lambda_1^j \in \{3, 4\}$. Además, $i = 1$ o $i = |\lambda^j| - 1$. Observe que $t_{j-1} = h - 1$, $t_j = h + 1$ y $d_T(v_h) \geq \tilde{d}_T(v_h) = \lambda_i^j = 3$. Por un lado, si $i = 1$, entonces v_h es adyacente a $v_{t_{j-1}}$ y a alguna hoja de T . Por otro lado, si $i = |\lambda^j| - 1$, entonces v_h es adyacente a v_{t_j} y a alguna hoja de T . Por lo tanto, v es adyacente a por lo menos dos vértices en S . Queda por considerar el caso en el que $\lambda_i^j = 4$.

En este caso, $\tilde{d}_T(v_h) = \lambda_i^j = 4$. Por tanto, v_h es adyacente al menos a dos hojas de T . Por lo tanto, v_h tiene al menos dos vecinos en S . Esto completa la prueba de nuestra afirmación.

Ahora debemos demostrar que S es un conjunto de intervalos de T de mínimo cardinal. Considere cualquier conjunto de intervalos S' de T y sea $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Decimos que $v_h \in S'$ para algún $h \in \{t_{j-1}+1, t_{j-1}+2, \dots, t_j\}$. Supongamos primero que λ^j tiene algún término igual a 2. Como $\lambda^j \in \Lambda$, el primer o el último término de λ^j es igual a 2. Por un lado, si el primer término de λ^j es igual a 2, entonces $\tilde{d}_T(v_{t_{j-1}+1}) = 2$ y por lo tanto $v_h \in S'$ para $h = t_{j-1} + 1$ o $h = t_j$. Por otro lado, si el último término de λ^j es igual a 2, entonces $\tilde{d}_T(v_{t_j}) = 2$ y por lo tanto $v_h \in S'$ para $h = t_j - 1$ o $h = t_j$. En ambos casos la afirmación vale. Podemos suponer ahora, sin pérdida de generalidad, que λ^j no tiene un término igual a 2. Como $j \neq p$, ningún término de λ^j es igual a 1. Por tanto, cada término de λ es igual a 3 o a 4. Observe que $t_j - 2 \geq t_{j-1} + 1$, porque $|\lambda^j| \geq 3$. Además, dado que $\lambda^j \in \Lambda$, $\tilde{d}_T(v_{t_{j-1}}) = 3$ y por tanto $v_h \in S'$ para algún $h \in \{t_j - 2, t_j - 1, t_j\}$. Así S' contiene al menos $p - 1$ vértices no pendientes de P . Dado que S' contiene todas las hojas de T , $|S'| \geq p + \ell(T) - 1 = |S|$. Ya hemos probado que S es un conjunto de intervalos de T de mínimo cardinal. Por lo tanto $g(T) = p(T) + \ell(T) - 1$. $\square$

Observación 3.1.4. Del Teorema 3.1.3 se sigue que $p(T)$ no depende de la elección entre los dos posibles órdenes lineales de los vértices de un camino dominante de T , ver figura 3.2.

3.1.3. Número de P_3 -cápsula

Observación 3.1.5. Los vértices pendientes pertenecen a cada conjunto cápsula convexa de cualquier grafo conexo.

Lema 3.1.6. Si G es un árbol, entonces hay un conjunto cápsula convexa mínimo que no tiene vértices de grado 3 adyacentes a un vértice pendiente de G .

Demostración. Argumentando por el absurdo, supongamos que cada conjunto cápsula convexa minimal de algún árbol G tiene al menos un vértice de

soporte de grado 3. Sea S un conjunto cápsula convexa minimal de G que tiene el menor número posible s de vértices de soporte de grado 3 de G . Suponga que v_1 es un vértice de soporte de grado 3 de S , donde $N_G(v_1) = \{a, b, c\}$ y a es un vértice pendiente de G . Si b fuera también un vértice pendiente de G , entonces $b \in S$ y v_1 tendría como vecinos dos vértices pendientes, a y b . Por lo tanto, $S \subseteq I[S \setminus \{v_1\}]$ lo que implica que $S \setminus \{v_1\}$ es un conjunto cápsula convexa de G , lo que contradice que S es un conjunto cápsula convexa minimal de G . Por tanto, b no es un vértice pendiente de G . Por simetría, c no es un vértice pendiente de G . Además, b y c no pertenecen a S . Si $b \in S$, ya que $a \in S$, entonces $S \subseteq I_{\mathcal{P}}[S \setminus \{v_1\}]$ y por lo tanto $S \setminus \{v_1\}$ no sería un conjunto cápsula convexa minimal.

Sea $v_2 = c$. Tengamos en cuenta que $S_1 = (S \setminus \{v_1\}) \cup \{v_2\}$ también es un conjunto cápsula convexa de T . Esto implica que, si v_2 no es un vértice de soporte de grado 3, entonces S_1 es un conjunto cápsula convexa minimal con $s - 1$ vértices de soporte de grado 3, contradiciendo que s es el mínimo número de vértices de soporte de grado 3 para un conjunto cápsula convexa de G . Siguiendo esta construcción, obtenemos un camino $P = v_1 v_2 \dots v_k$ en G tal que, por cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, v_i es un vértice de soporte de grado 3 y $v_k \in S$, donde k es el máximo entero positivo que tiene esta propiedad para algún conjunto cápsula convexa S de G . Por lo tanto, v_k tiene dos vecinos, un vértice pendiente w_1 y, dado que G es un árbol, un vértice w_2 diferente de los de $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ tal que w_2 no es un vértice pendiente de grado 3. De lo contrario, $P' = v_1 \dots v_k w_2$ sería un camino más largo que P con la misma propiedad que P para $S' = (S \setminus \{v_k\}) \cup \{w_2\}$. Por otro lado, w_2 no es un vértice pendiente porque, de lo contrario, v_k sería adyacente a dos vértices pendientes y, por lo tanto, $S \setminus \{v_k\}$ sería un conjunto cápsula convexa mínimo con menos vértices que s vértices de soporte de grado 3. Por lo tanto, $(S \setminus \{v_k\}) \cup \{w_2\}$ es un conjunto cápsula convexa minimal que tiene $s - 1$ vértices de soporte de grado 3, absurdo. La contradicción provino de suponer que G no tiene un conjunto cápsula convexa minimal sin vértices de soporte de grado 3. $\square$

Observación 3.1.7. Sea G un grafo y S un conjunto cápsula convexa.

- Si u y v son vértices adyacentes de grado 2 de G , entonces $u \in S$ o $v \in S$.
- Sea u un vértice de corte de grado 2 de G tal que $u \notin S$ y cuyos vecinos son v y w . Si G_v y G_w son las componentes conexas de $G \setminus \{u\}$ tales que $v \in V(G_v)$ y $w \in V(G_w)$, entonces $V(G_v) \cap S$ y $V(G_w) \cap S$ son conjuntos de cápsula convexa de G_v y G_w , respectivamente.

Sea s una secuencia de enteros positivos. Usamos $Z(s)$ para denotar la sumatoria $\sum \lfloor \frac{z_i}{2} \rfloor$ tomada sobre todas las longitudes z_i en s de las subsecuencias consecutivas máximas que contienen solo al entero 2.

Teorema 3.1.8. *Sea T un grafo caterpillar tal que $|V(T)| \geq 2$. Si $s'(T)$ es la secuencia que se obtiene al eliminar de $s(T)$ los términos correspondientes al entero 3 (es decir, $s'(T)$ es la subsecuencia cuyos términos pertenecen a $\{1, 2, 4\}$), entonces*

$$h(T) = \ell(T) + Z(s'(T)).$$

Demostración. Sea $P = v_1 v_2 \dots v_k$ un camino dominante maximal de T . Sea $s(T) = \tilde{d}_T(v_1), \tilde{d}_T(v_2), \dots, \tilde{d}_T(v_k)$. Recordar que $\tilde{d}_T(v_1) = \tilde{d}_T(v_k) = 1$. Sea $B_j = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{z_j}}\}$ un conjunto de vértices maximal en P que satisface las siguientes condiciones:

- $\tilde{d}_T(v_{j_i}) = 2$, para todo $1 \leq i \leq z_j$, y
- $j_{i+1} = j_i + 1$ para todo $1 \leq i \leq z_j - 1$ o $\tilde{d}_T(v_h) = 3$ para todo $j_i < h < j_{i+1}$.

Sea J el número de esas subsecuencias máximas en $s(T)$ y S un conjunto minimal de T sin vértices de grado 3. El lemma 3.1.6 nos garantiza la existencia de este conjunto cápsula convexa minimal. Sabemos que $\mathcal{L}(T) \subset S$. Todo vértice v tal que $\tilde{d}_T(v) = 4$ no pertenece a S porque es adyacente a al menos dos vértices en $\mathcal{L}(T)$ y por lo tanto $v \in I_{\mathcal{P}}[S]$ para cada conjunto cápsula convexa S . Consideramos los subconjuntos $A_i = \{v_{j_{2i-1}}, v_{j_{2i}}\}$ de B_j , para cada $1 \leq i \leq z_j/2$ si z_j es par y los subconjuntos $A_i = \{v_{j_{2i-1}}, v_{j_{2i}}\}$ de B_j , para cada $1 \leq i \leq (z_j - 3)/2$ y $A_{\lfloor \frac{z_j}{2} \rfloor} = \{v_{j_{z_j-2}}, v_{j_{z_j-1}}, v_{j_{z_j}}\}$ si z_j es impar

y mayor que uno. En virtud del primer enunciado de la observación 3.1.7, $|S \cap A_i| \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq \lfloor \frac{z_i}{2} \rfloor$. Por lo tanto, $|S \cap B_j| \geq \lfloor \frac{z_j}{2} \rfloor$. Este límite inferior se mantiene trivialmente incluso cuando $z_j = 1$. Por lo tanto, $h(T) \geq \ell(T) + Z(s'(T))$.

Queda por probar que existe un conjunto cápsula convexa S tal que $|S| = \ell(T) + Z(s'(T))$. Por cada $1 \leq j \leq J$, sea $C_j = \{v_{j_2}, v_{j_4}, \dots, v_{j_{h_j}}\} \subset B_j$ donde $v_{j_{h_j}} = v_{j_{z_j-1}}$ si z_j es impar y $v_{j_{h_j}} = v_{j_{z_j}}$ si z_j es par. Sea $S = \mathcal{L}(T) \cup \left(\bigcup_{j=1}^J C_j \right)$. No es difícil demostrar que S es un conjunto cápsula convexa.

Hemos probado que el cardinal del mínimo conjunto cápsula convexa es igual a $\mathcal{L}(T)$ más $\sum_{j=1}^J \lfloor \frac{z_j}{2} \rfloor$. Entonces, $h(T) = \ell(T) + Z(s'(T))$. $\square$

En la figura 3.3 se muestra un ejemplo del Teorema 3.1.8.

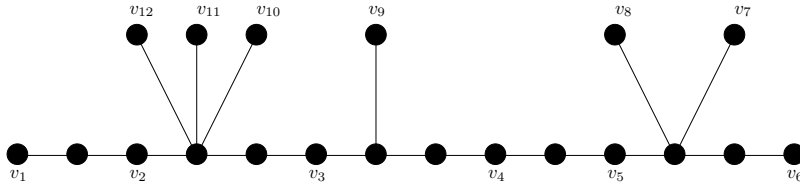


Figura 3.3: En este grafo caterpillar T , tenemos que $s'(T) = 122422222421$, $\ell(T) = 8$ y $Z(s'(T)) = 4$. Con lo cual, $h(T) = 12$. Un conjunto de cápsula convexa de T es $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$, no es único.

3.2. Tiempo de percolación

En esta sección presentamos dos resultados sobre el tiempo de percolación de un grafo bajo la P_3 -convexidad.

Si S es un conjunto de cápsula P_3 -convexa de G , es decir, $\mathcal{H}_{P_3}(S) = V(G)$ entonces decimos que S percola a G . Para decidir si un conjunto S percola a G , podemos construir una secuencia $S_0, S_1, S_2, \dots$ en la que $S_0 = S$ y S_{i+1} se obtiene de S_i agregando los vértices de G que tienen como máximo un vecino en $\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$ y al menos dos vecinos en $\bigcup_{j=1}^i S_j$. Usamos $I_{P_3}^k[S]$ para indicar S_k . Si existe algún t tal que $S_t = V(G)$, entonces S percola a G y definimos $\tau_S(G)$ como el mínimo t tal que $S_t = V(G)$. El tiempo de percolación de G es $\tau(G) = \max\{\tau_S(G) : S \text{ percola a } G\}$. Sea G un grafo y sea $v \in V(G)$. Decimos

que S percola a v si $v \in I_{P_3}^k[S]$ para algún entero k , y $\tau_S(v)$ representa el mínimo entero k con esta propiedad. Si $A \subseteq V(G)$ y S percola a cada vértice $v \in A$, $\tau_S(A)$ representa el máximo $\tau_S(w)$ entre todos los vértices $w \in A$. Cuando el contexto sea lo suficientemente claro, usaremos $\tau(v)$ y $\tau(A)$ para abreviar.

Consideramos dos clases de grafos: los grafos caterpillar y grafos de intervalo unitario.

3.2.1. Tiempo de percolación de un grafo caterpillar

En [8] se demostró que si T es un árbol, entonces $\tau(T)$ se puede calcular en tiempo lineal. En esta subsección damos una fórmula cerrada simple para $\tau(T)$ cuando T es un grafo caterpillar, en términos de ciertas secuencias asociadas a T .

Sea T un grafo caterpillar y sea $s(T)$ una sucesión de grado reducido de T . Sea $\ell(i)$ definido recursivamente para cada $1 \leq i \leq |s(T)|$ de la siguiente forma: $\ell(1) = 1$ y

$$\ell(i) = \begin{cases} \ell(i-1) + 1 & \text{si } \tilde{d}(v_i) \neq 3, \text{ o } \tilde{d}(v_i) = 3 \text{ y } \tilde{d}(v_{i-1}) \neq 3, \\ \ell(i-1) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Denotamos, para cada $i \in \{1, \dots, |s(T)|\}$, por $n(i)$ (respectivamente $m(i)$) el mínimo (respectivamente máximo) entero j tal que $\ell(j) = \ell(i)$. Por ejemplo consideramos el grafo de la Figura 3.2, en este ejemplo $s = 14342331$, $\ell = 12345667$, $n = 12345668$ y $m = 12345778$.

Definimos la secuencia $f(T)$, llamada *secuencia de percolación de T* , como sigue. Sea i un entero tal que $1 \leq i \leq |s(T)|$.

- $f_i(T) = 0$, si $\tilde{d}(v_i) = 1$.
- $f_i(T) = 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 2$ y $\tilde{d}(v_{i-1}), \tilde{d}(v_{i+1}) \in \{1, 2\}$.
- $f_i(T) = f_{i+1}(T) + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 2$, $\tilde{d}(v_{i-1}) \in \{1, 2\}$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \notin \{1, 2\}$.
- $f_i(T) = f_{i-1}(T) + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 2$, $\tilde{d}(v_{i-1}) \notin \{1, 2\}$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \in \{1, 2\}$.

- $f_i(T) = \max\{f_{i-1}(T), f_{i+1}(T)\} + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 2$, $\tilde{d}(v_{i-1}), \tilde{d}(v_{i+1}) \notin \{1, 2\}$.
- $f_i(T) = \min\{i - n(i), m(i) - i\} + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$ y $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = \tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$.
- $f_i(T) = \max\{i - n(i), m(i) - i\} + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$ y $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = \tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$.
- $f_i(T) = i - n(i) + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 1$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$.
- $f_i(T) = m(i) - i + 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 2$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$.
- $f_i(T) = \min\{i - n(i) + 1, m(i) - i + 2\}$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 1$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$.
- $f_i(T) = \min\{i - n(i) + 2, m(i) - i + 1\}$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$.
- $f_i(T) = i - n(i) + 2$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$.
- $f_i(T) = m(i) - i + 2$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 2$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$.
- $f_i(T) = \min\{i - n(i), m(i) - i\} + 2$, si $\tilde{d}(v_i) = 3$, $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$.
- $f_i(T) = 1$, si $\tilde{d}(v_i) = 4$.

Definimos $F(T) = \max_{1 \leq i \leq r} f_i(T)$. En el ejemplo de la figura 3.2, $f = 01213210$, y por lo tanto $F = 3$, y en el ejemplo de la figura 3.3, $f = 01212212112120$ y por tanto $F = 2$. Observamos que en ambos ejemplos el máximo se alcanza en alguno de los términos, es decir, según el teorema siguiente, el tiempo máximo de percolación se alcanza únicamente en los vértices correspondientes a esos términos.

Teorema 3.2.1. *Si G es un grafo caterpillar, entonces $\tau(T) = F(T)$.*

Demostración. Sea $P = v_1 v_2 \dots v_k$ un camino dominante de T donde v_1 y v_k son hojas de T . Sea $s(T) = \tilde{d}_T(v_1) \tilde{d}_T(v_2) \dots \tilde{d}_T(v_p)$. Si $p \in \{1, 2\}$, el resultado vale.

Por cada $i \in \{1, \dots, p\}$, si $\tilde{d}(v_i) = 1$ o $\tilde{d}(v_i) = 4$ como el conjunto de hojas está contenido en cualquier conjunto cápsula convexa, entonces $\tau_T(v_i) = 0$ o $\tau_T(v_i) = 1$, respectivamente. Así $\tau(v_i) = f_i(T)$.

Sea i un entero tal que $1 < i < k$. Supongamos que $\tilde{d}(v_i) = 3$. Observamos que cada conjunto cápsula convexa S de T verifica $\mathcal{L}(T) \subseteq S$. De ahora en adelante, estamos considerando un conjunto de percolación de un vértice dado que contiene $\mathcal{L}(T)$. Si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = \tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$, entonces $\mathcal{L}(T)$ es un conjunto cápsula convexa de T y por lo tanto $\tau_S(v_i) \leq \tau_{\mathcal{L}(T)}(v_i)$ para cada conjunto cápsula convexa S de T . Es fácil probar que $\tau_{\mathcal{L}(T)}(v_i) = \min\{i - n(i), m(i) - i\} + 1$ y por lo tanto $\tau_T(v_i) = f_i(T)$. Supongamos que $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 1$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$. Notamos que si S percola a v_i en T , ya que $\mathcal{L}(T) \subseteq S$, entonces $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)+1}\}$ también percola a v_i . Por lo tanto, $\tau_S(v_i) \leq \tau_{R(S)}(v_i) = i - n(i) + 1$ para cada conjunto cápsula convexa S de T . Observamos que $S = V(T) \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)+1}\}$ es un conjunto cápsula convexa tal que $\tau_S(v_i) = i - n(i) + 1$. Por lo tanto $\tau_T(v_i) = f_i(T)$. Simétricamente, si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 2$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$, entonces $\tau_T(v_i) = m(i) - i + 1 = f_i(T)$. Análogamente, si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 1$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$, S percola a v_i , entonces $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)+1}\}$ percola a v_i , porque $\mathcal{L}(T) \subseteq S$. Además, $\tau_{R(S)}(v_i) = f_i(T) = \min\{i - n(i) + 1, m(i) - i + 2\}$. Por lo tanto, usando un argumento similar al último caso, concluimos que $\tau_T(v_i) = f_i(T)$. Simétricamente, $\tau_T(v_i) = f_i(T) = \min\{i - n(i) + 2, m(i) - i + 1\}$, si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 1$. Los siguientes casos, enumerados a continuación, pueden probarse siguiendo la misma línea de argumentación y por lo tanto se omiten sus pruebas.

- Si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 2$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$, entonces $\tau_T(v_i) = i - n(i) + 2$.
- Si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$, entonces $\tau_T(v_i) = m(i) - i + 2$.
- Si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 4$, entonces $\tau_T(v_i) = \min\{i - n(i) + 2, m(i) - i\} + 2$.

Supongamos ahora que $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = \tilde{d}(v_{m(i)+1}) = 2$. Sea S un conjunto tal que S percola a v_i . Por un lado, si $v_j \in S$ para algún entero j tal que $n(i) \leq j \leq m(i)$, entonces $\tau_S(v_i) \leq |i-j| \leq \max\{i-n(i)+1, m(i)-i+1\}$. Por otro lado, si S percola a v_i y no contiene ningún vértice en $\{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)}\}$, entonces, por la observación 3.1.7, alguno de $v_{n(i)-1}$ o $v_{m(i)+1}$ pertenece a S . Además, si $v_{n(i)-1} \in S$ (respectivamente $v_{m(i)+1} \in S$), entonces $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)+1}\}$ (respectivamente $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)-1}, \dots, v_{m(i)}\}$) también percola a v_i . Por lo tanto $\tau_S(v_i) \leq \tau_{R(S)} = i - n(i) + 1$ (respectivamente $\tau_S(v_i) \leq \tau_{R(S)} = m(i) - i + 1$). En consecuencia, $\tau_S(v_i) \geq \max\{i - n(i) + 1, m(i) - i + 1\}$ para cada conjunto S que percola a v_i . Dado que $V(T) \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{m(i)+1}\}$ y $V(T) \setminus \{v_{n(i)-1}, \dots, v_{m(i)}\}$ son conjuntos de cápsula convexa de T , $\tau_T(v_i) = \max\{i - n(i) + 1, m(i) - i + 1\} = f_i(T)$.

Queda por considerar el caso $\tilde{d}(v_i) = 2$. Si $\tilde{d}(v_{i-1}) \in \{1, 2\}$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \in \{1, 2\}$, por la observación 3.1.7 y dado que $\mathcal{L}(T) \subseteq S$, $\tau_S(v_i) = 1$ para cada conjunto S que percola a v_i tal que $v_i \notin S$.

De ahora en adelante, estamos considerando un conjunto S que percola a v_i tal que $\mathcal{L}(T) \subseteq S$. Supongamos ahora que $\tilde{d}(v_{i-1}) \notin \{1, 2\}$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \in \{1, 2\}$. Notamos que $v_{i+1} \in S$ para cada conjunto S que percola a v_i tal que $v_i \notin S$ por la observación 3.1.7. Si $\tilde{d}(v_{i-1}) = 4$, entonces $\tau_S(v_i) \leq 2$ para cada conjunto S que percola a v_i tal que $v_i \notin S$. Como $S' = V(T) \setminus \{v_{i+1}, v_i\}$ percola a v_i y $\tau_{S'}(v_i) = 2$, $\tau_T(v_i) = 2$. Simétricamente, si $\tilde{d}(v_{i+1}) = 4$ y $\tilde{d}(v_{i-1}) \in \{1, 2\}$, entonces $\tau_T(v_i) = f_i(T)$. Supongamos ahora que $\tilde{d}(v_{i-1}) = 3$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, si S es un conjunto cápsula convexa y por lo tanto percola a v_i y $v_i \notin S$, entonces $v_{i+1} \in S$ (ver observación 3.1.7). Además, si $\mathcal{L}(T) \subseteq S$ entonces S percola a $v_{n(i)-1} \in S$ siempre que $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) \notin \{1, 2\}$. Por lo tanto, $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)-1}, \dots, v_{i+1}\}$ también percola a v_i cuando $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$, y de lo contrario $R(S) = S \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_{i+1}\}$ también percola a v_i . Así $\tau_S(v_i) \leq \tau_{R(S)} = f_i(T) + 1$ por cada S que percola a v_i . Además, dado que $S' = V(T) \setminus \{v_{n(i)-1}, \dots, v_i\}$ es un conjunto cápsula convexa de T si $\tilde{d}(v_{n(i)-1}) = 4$ y de lo contrario $S' = V(T) \setminus \{v_{n(i)}, \dots, v_i\}$ es un conjunto cápsula convexa de T , y $\tau_{S'}(v_i) = f_i(T) + 1$, se sigue que $\tau_T(v_i) = f_i(T) + 1$. Por simetría, si $\tilde{d}(v_{i-1}) \in \{1, 2\}$ y $\tilde{d}(v_{i+1}) \notin \{1, 2\}$, luego $\tau_T(v_i) = f_{i+1}(T) + 1$. Siguiendo una línea similar de argumentación se puede probar

que si $\tilde{d}(v_{i-1}), \tilde{d}(v_{i+1}) \notin \{1, 2\}$, entonces $\tau_T(v_i) = \max\{f_i(T), f_{i+1}(T)\} + 1$.

Dado que $\tau(T)$ es el máximo $\tau_S(v)$ entre todos los vértices en T y S es conjunto cápsula convexa de T , el resultado se deduce de lo anterior. $\square$

Terminamos la sección presentando un ejemplo para ilustrar el teorema anterior. Consideramos el grafo caterpillar T de la figura 3.4. Observamos que $s(T) = 143333221$, $\ell(T) = 123333456$, $n(T) = 123333789$, $m(T) = 126666789$ y, por lo tanto, $f(T) = 012345610$. Solo tenemos dos posibles conjuntos de percolación minimales, bajo inclusión, R y R' , el que incluye todas las hojas más el primer vértice v de grado dos de izquierda a derecha, y el que incluye todas las hojas más el último vértice w de grado dos de izquierda a derecha. Por lo tanto, $\tau_R(T) = 3$ y $\tau_{R'}(T) = 6 = F(T)$.

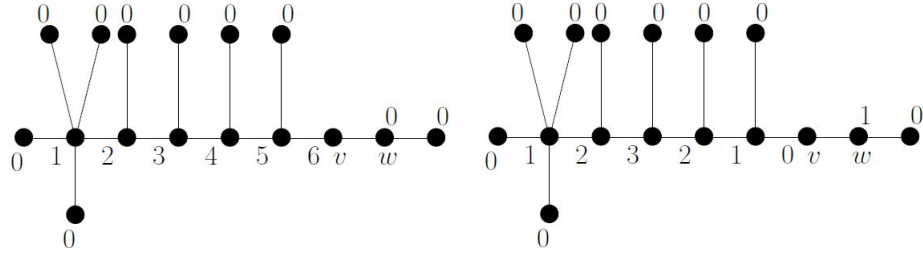


Figura 3.4: Las etiquetas de cada vértice en ambos grafos representan τ_S , donde S está formado por aquellos vértices con etiqueta igual a 0.

3.2.2. Grafos de intervalo unitario

En [8] se demostró que el tiempo de percolación se puede calcular en tiempo polinomial para grafos cordales. A continuación presentamos una fórmula bastante simple para el tiempo de percolación cuando el grafo es de intervalo unitario y por lo tanto cordal. Además, mostramos una conexión entre este parámetro y el diámetro de un grafo de intervalo unitario relacionado con el grafo de intervalo unitario considerado.

Sea $(G, <)$ el orden lineal de los vértices de un grafo G tal que $N[v]$ es un intervalo en ese orden, para cada $v \in V(G)$. Denotamos por v_L y v_R el vértice mínimo y máximo bajo ese orden, respectivamente.

Proposición 3.2.2. Sea G un grafo de intervalo unitario con un orden de intervalo unitario $(G, <)$. Si $u < v$, entonces cada camino mínimo $u = y_1 \dots y_r = v$ verifica que $y_i < y_{i+1}$ para cada entero i tal que $1 \leq i \leq r - 1$.

Demostración. Consideremos un camino mínimo $u = y_1 \dots y_r = v$ en G . Dado que P es un camino mínimo, P resulta ser un camino inducido de G . Supongamos, por el absurdo, que existe un entero j tal que $y_j < u$ y sea i el mayor entero tal que $y_i < u$. Como $y_i < u < y_{i+1}$, u es adyacente a y_{i+1} , lo que contradice que P es un camino inducido. Por lo tanto $u < y_i$ por cada $1 < i \leq r$. Análogamente, se puede demostrar que $y_i < v$ para todo $1 \leq i < r$. Ahora, supongamos por el absurdo que $y_{j+1} < y_j$ para algún entero j tal que $1 < j < r$. Como $y_j < y_r = v$, existe un entero ℓ tal que $j < j+1 \leq \ell < \ell+1 \leq r$ tal que $y_\ell < y_j < y_{\ell+1}$. Por lo tanto, y_j es adyacente a $y_{\ell+1}$, lo que contradice que P es un camino inducido de G . $\square$

Proposición 3.2.3. Sea G un grafo de intervalo unitario conexo con un orden de intervalo unitario $(G, <)$. Si $u < v < w$, entonces $d(u, v) \leq d(u, w)$.

Demostración. Sea $P = u = y_1 \dots y_r = w$ un camino mínimo. Por la proposición 3.2.2, existe un entero j tal que $1 < j < r$ e $y_j \leq v < y_{j+1}$. Si $y_j = v$, entonces $d(u, v) = j - 1 < r - 1 = d(u, w)$. Supongamos ahora que $y_j < v < y_{j+1}$ y, por lo tanto, v es adyacente a y_j . Como $u = y_1 \dots y_j v$ es un camino, $d(u, v) \leq j \leq r - 1 = d(u, w)$. $\square$

Denote por $a_R(v)$ (respectivamente $a_L(v)$) al vértice adyacente más a la derecha (respectivamente más a la izquierda) de v .

Corolario 3.2.4. Sea G un grafo de intervalo unitario.

1. Si $P: u = v_1 \dots v_k = w$ es un camino tal que $v_{i+1} = a_R(v_i)$ por cada $1 \leq i \leq k - 1$, entonces $d(u, w) = k - 1$; es decir, P es el camino mínimo entre u y w .
2. Si $P: u = v_1 \dots v_k = w$ es un camino tal que $v_{i+1} = a_L(v_i)$ por cada $1 \leq i \leq k - 1$, entonces $d(u, w) = k - 1$; es decir, P es el camino mínimo entre u y w .

Demostración. Sea $P': u = v'_1 \cdots v'_s = w$ un camino mínimo; es decir, $s - 1 = d(u, w)$. Claramente, $v'_2 \leq a_R(v_1) = v_2$. Supongamos, por hipótesis inductiva, que $v'_h \leq v_h$ para todo entero h tal que $1 < h < k \leq s$. Probaremos que $v'_k \leq v_k$. Supongamos, por el absurdo, que $v'_k > v_k$. Por hipótesis inductiva, $v'_{k-1} \leq v_{k-1} < v_k < v'_k$. Dado que v'_{k-1} es adyacente a v'_k , v_{k-1} es adyacente a v'_k . Por lo tanto $a_R(v_{k-1}) = v_k < v'_k \leq a_R(v_{k-1})$, contradicción. Esta contradicción provino de suponer que $v'_k > v_k$. En consecuencia $v'_k \leq v_k$. Ya hemos probado por inducción que $v'_i \leq v_i$ por cada $1 \leq i \leq s$ lo que implica que $k \leq s$ y por lo tanto, dado que P' es un camino mínimo que conecta u y w , $d(u, w) = k - 1$, como queremos demostrar. Supongamos, por el absurdo, que $s < k$ y por lo tanto $v_s < w$. Por lo tanto, $v'_{s-1} \leq v_{s-1} < v'_s = w$ lo que implica que v_{s-1} es adyacente a w . Entonces, $v_s = a_R(v_{s-1}) \geq w$, contradiciendo que $v_s < w$. Por lo tanto, $k \leq s$. La segunda afirmación se demuestra simétricamente. $\square$

Combinando la proposición 3.2.3 y el corolario 3.2.4, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.5. Si G es un grafo de intervalo unitario conexo, entonces $d = \text{diam}(G) = d(v_L, v_R)$. Además, $P^L: v_L = v_1 a_R(v_1) \cdots a_R(v_{k-1}) = v_R$ y $P^R: v_R = v_1 a_L(v_1) \cdots a_L(v_{k-1}) = v_L$ son caminos de diámetro de G .

3.2.2.1. Tiempo de percolación de un grafo de intervalo unitario

Si G es un grafo de intervalo unitario, decimos que un subconjunto $S \subseteq V(G)$ es un *intervalo con respecto a ese orden* si todos los vértices en S aparecen consecutivamente. Observemos que las cliques en G son intervalos.

El siguiente resultado de Centeno y otros es una herramienta muy útil para el resto de la sección.

Teorema 3.2.6 ([18]). *Sea G un grafo cordal 2-conexo. Si u y v son dos vértices que comparten al menos un vecino, entonces $H = \{u, v\}$ es un conjunto de P_3 -cápsula convexa de G .*

Dado que todo conjunto de cápsula P_3 -convexa contiene al menos dos vértices que comparten al menos un vecino, el teorema 3.2.6 juega un papel

central en los resultados de esta sección.

Lema 3.2.7. *Sea G un grafo de intervalo unitario 2-conexo. Si $H = \{u, v\}$ es un conjunto cápsula convexa de G tal que $H \neq \{v_L, v_R\}$, entonces $\tau_H(G) = \max\{\tau_H(v_L), \tau_H(v_R)\}$.*

Demostración. A lo largo de la demostración consideraremos que los vértices de G tienen un orden de intervalo unitario “ $<$ ”. Suponemos que $u < v$. Dividiremos la prueba en dos afirmaciones.

Afirmación 1: Si $I^k[H]$ es un intervalo para algún entero no negativo k , entonces $I^{k+1}[H]$ es un intervalo.

Supongamos que $I^k[H] = [a, b]$ para algún entero no negativo k . Por lo tanto, $A = I^{k+1}[H] \setminus I^k[H] = \bigcup C$, donde la unión es tomada sobre todas las cliques C de modo que $|C \cap [a, b]| \geq 2$; observamos que, dado que H es un conjunto cápsula convexa, $A \neq \emptyset$ siempre que $I^k[H] \neq V(G)$. Dado que A es la unión de intervalos que tiene intersección no vacía con $I^k[H]$ que es un intervalo, se deduce que $I^{k+1}[H] = A \cup I^k[H]$ también es un intervalo.

Afirmación 2: $I^2[H]$ es un intervalo.

Primero, supongamos que $uv \notin E(G)$. Observamos que si $x \in I^1[H] \setminus H$, entonces $u < x < v$, porque de lo contrario u sería adyacente a v . Además, $H_1 = I^1[H] \setminus H$ es una clique. Supongamos, por el absurdo, que existen dos vértices no adyacentes $x, y \in H_1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x < y$. Por tanto, dado que $x < y < v$ y $xv \in E(G)$, x es adyacente a y , llegando a una contradicción. Dado que H_1 es una clique, resulta ser un intervalo $[u_L, u_R]$ bajo el orden de intervalo unitario considerado. Si no hay un vértice x tal que $u < x < u_L$ o $u_R < x < v$, entonces $I^1[H]$ es un intervalo y la afirmación sigue por la Afirmación 1. Supongamos ahora que este no es el caso anterior, y que existe un vértice $x \notin I^1[H]$ tal que $u < x < u_L$. Como u es adyacente a u_L , x es adyacente a u y u_L . Análogamente, si existe un vértice x tal que $u_R < x < v$, entonces x es adyacente a u_R y v . Así $[u, v] \subseteq I^2[H]$. Además, si $z < y < u$ y $z \in I^2[H]$, entonces $y \in I^2[H]$. Porque z es adyacente a algún vértice $x \in H_1$ y por lo tanto z también es adyacente a u , lo que implica que y es adyacente a u y a x . Simétricamente, si $v < y < z$ y $z \in I^2[H]$, entonces $y \in I^2[H]$. Por lo tanto, $I^2[H]$ es un

intervalo.

Finalmente, supongamos que u es adyacente a v . Por lo tanto, $x \in H_1$ si y solo si $R = \{x, u, v\}$ está contenido en una clique C en G . Por lo tanto, $I^1[H] = \bigcup C$ donde la unión es tomada sobre todas las cliques que contienen a H . Dado que todas esas cliques son intervalos, $I^1[H]$ resulta ser un intervalo, lo que implica, según la Afirmación 2, que $I^2[H]$ también es un intervalo.

Por un lado, dado que $H \neq \{v_L, v_R\}$, si $\tau_H(G) = 1$, entonces el resultado se cumple. Por otro lado, si $k \geq 2$, dado que $I^k[H]$ es un intervalo para cada $k \geq 2$ debido a las afirmaciones 1 y 2, $v_L \notin I^k[H]$ o $v_R \notin I^k[H]$ por cada $1 \leq k < \tau_H(G)$. El resultado se sigue de estas observaciones. $\square$

Sea “ $<$ ” un orden de intervalo unitario de un grafo de intervalo unitario G . Usamos $v \downarrow$ y $v \uparrow$ para indicar el vértice inmediatamente anterior a v y el vértice inmediatamente posterior a v , respectivamente. Denotamos por $V_k(H)$ el conjunto de vértices con tiempo de percolación k bajo el conjunto cápsula convexa H . Denotamos $L(I)$ y $R(I)$ al vértice más a la izquierda y al vértice más a la derecha del conjunto $I \subseteq V(G)$ bajo el orden “ $<$ ”.

Corolario 3.2.8. Si G es un grafo de intervalo unitario tal que $|V(G)| \geq 3$, con cada dos cliques maximales con intersección no vacía, tienen al menos dos vértices comunes, entonces $\tau(\{v_L, v_L \uparrow\}) = \tau(\{v_R \downarrow, v_R\}) = \text{diam}(G) = \tau(G)$.

Demostración. Observamos que G es 2-conexo. De lo contrario, G tendría un vértice de corte v y, por lo tanto, dado que G es cordal, $\{v\} = C \cap C'$ donde C y C' son cliques maximales de G (ver [46]). Además, dos cliques maximales con intersección no vacía tienen al menos dos vértices comunes y $|V(G)| \geq 3$, la única clique maximal que contiene a v_L (respectivamente a v_R) contiene al menos tres vértices. Por lo tanto, por el Teorema 3.2.6, $\{v_L, \uparrow v_L\}$ (respectivamente $\{\downarrow v_R, v_R\}$) es un conjunto cápsula convexa de G .

Dado que G es un grafo 2-conexo, es fácil ver, aplicando el Teorema 3.2.6, que $\tau(G) = 1$ si y solo si G es un grafo completo. De ahora en adelante, supondremos que $\tau(G) \geq 2$. Sea H un conjunto cápsula convexa de G . Podemos suponer por Teorema 3.2.6 y Lema 3.2.7, sin pérdida de generalidad, que $H = \{u, v\}$ para dos vértices u y v que tienen un vecino

en común, y $\tau(G) = \tau_H(G) = \tau_H(v_R)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u < v$, y por lo tanto $v_L \leq u$ y $v_L \uparrow \leq v$. Por lo tanto $R(I^1[\{v_L, v_L \uparrow\}]) \leq R(I^1[H])$. En consecuencia, se puede demostrar por inducción que $R(I^k[\{v_L, v_L \uparrow\}]) \leq R(I^k[H])$ por cada $1 \leq k \leq \tau(G)$. Así $\tau(G) = \tau_H(v_R) \leq \tau_{\{v_L, v_L \uparrow\}}(v_R)$. Por lo tanto $\tau(G) = \tau(\{v_L, v_L \uparrow\})$. Por simetría, si $\tau(G) = \tau_H(G) = \tau_H(v_L)$, entonces $\tau(G) = \tau(\{v_R \downarrow, v_R\})$.

Observemos que $Q_k = [a_L(R(I^k[H])), R(I^k[H])]$ es una clique maximal. De lo contrario, existiría una clique maximal $Q = [x, y]$ que contiene a Q_k con $R(I^k[H]) < y$, ya que Q_k contiene al menos dos vértices en $I^{k-1}[H]$, $y \in I^k[H]$. Dado que no hay dos cliques maximales con intersección no vacía que tengan como máximo un vértice en común, $a_R(R(I^k[H])) = R(I^{k+1}[H])$. De lo contrario, existiría un vértice x adyacente a $R(I^k[H])$ y no adyacente a $R(I^k[H]) \downarrow$ y por lo tanto la clique maximal $[R(I^k[H]), a_R(R(I^k[H]))]$ sería una clique maximal que tiene exactamente un vértice en común con la clique maximal $[a_L(R(I^k[H])), R(I^k[H])]$, que es precisamente el vértice $R(I^k[H])$. Por el corolario 3.2.5, el camino $v_L R(I^1[H]) \dots R(I^{\tau(G)}[H]) v_R$ es un camino de diámetro. Por simetría, si $H' = \{v_R \downarrow, v_R\}$, entonces el camino $v_R L(I^1[H']) \dots L(I^{\tau(G)}[H']) v_L$ también es un camino de diámetro. Finalmente, por el lema 3.2.7 y la discusión anterior, concluimos que $\tau(G) = \text{diam}(G) = \tau(\{v_L, v_L \uparrow\}) = \tau(\{v_R \downarrow, v_R\})$. $\square$

Leyendo detenidamente la primera parte de la demostración del corolario 3.2.8 podemos derivar la siguiente observación, donde se descarta la hipótesis de que cada par de cliques maximales que se intersecan comparten al menos dos vértices.

Observación 3.2.9. Si G es un grafo de intervalo unitario 2-conexo tal que $|V(G)| \geq 3$, entonces $\tau(G) = \tau(\{v_L, v_L \uparrow\})$ o $\tau(G) = \tau_G(\{v_R \downarrow, v_R\})$.

Teorema 3.2.10. Si G es un grafo de intervalo unitario 2-conexo tal que $|V(G)| \geq 3$, entonces existe un grafo de intervalo unitario 2-conexo G^* tal que cada intersección no vacía de dos cliques maximales tiene al menos dos vértices comunes y $\tau(G) = \tau(G^*) = \text{diam}(G^*)$. Además, $\tau(G) = \tau(\{v_L, v_L \uparrow\}) = \tau_G(\{v_R \downarrow, v_R\})$.

Demostración. Dado que G es 2-conexo y no contiene ningún ciclo inducido con al menos cuatro vértices, cada clique máxima de G tiene al menos tres vértices. En efecto, si $C = [a, b]$ es una clique con dos vértices, entonces ab es un puente de G , es decir, una arista cuya eliminación desconecta el grafo, y por lo tanto, ya que $|V(G)| \geq 3$, a o b es un vértice de corte, lo que contradice que G es 2-conexo. Por tanto, ab es una arista de un grafo completo con tres vértices. Sea $v_1, v_2, \dots, v_n$ un orden de intervalo unitario para $V(G)$. Recuerde que una clique maximal de G es un intervalo máximo de vértices adyacentes de a pares. Además, dos vértices son adyacentes si y solo si pertenecen a al menos uno de estos intervalos máximos de vértices adyacentes de a pares. En otras palabras, estos intervalos definen las adyacencias de G , una vez establecido el orden de intervalo unitario de $|V(G)|$. Vamos a definir los intervalos máximos de un grafo G^* obtenido a partir de G añadiendo adecuadamente algunos vértices sin modificar el orden relativo de esos vértices en $V(G)$. Ver ejemplo en la figura 3.5.

Primero, ponemos $w_i = v_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Recorreremos los vértices de G desde w_1 hasta w_n . Establecemos $G = G_1$; y cada vez que encontremos un vértice w_h tal que $\{w_h\} = C \cap C'$, donde C y C' son cliques maximales de G_i , aplicamos la siguiente transformación; llamaremos a tales vértices, *vértices singulares*. Agregamos un vértice w_{n+k} al final, donde $k-1$ representa el número de vértices singulares previamente agregados, uno para cada grafo G_j por cada $1 \leq j \leq i-1$, y reemplazamos cada clique $C = [a, b]$ por $C' = [a, b]$ si $b \leq w_h$, por $C' = [a, b\uparrow]$ si $a < w_h < b$, por $C' = [a\uparrow, b\uparrow]$ si $a \geq w_h$. Observamos que si $b = w_{n+k-1}$, entonces $b\uparrow = w_{n+k}$. Las nuevas cliques definen un grafo de intervalo unitario G^* con el conjunto de vértices $\{v_1 \dots, v_{n+m}\}$, donde m es el número de vértices singulares de G . Observamos que el número máximo de cliques de G y G^* coinciden. Si $C_1, \dots, C_r$ denotan el conjunto de cliques maximales de G , denotamos por $C_1^*, \dots, C_r^*$ las cliques maximales obtenidas por la transformación de G en G^* , donde C_i^* es la clique correspondiente a C_i para cada $1 \leq i \leq k$, bajo la transformación descrita anteriormente. Además, el orden relativo de los extremos izquierdos (respectivamente extremos derechos) de las cliques maximales de G no se modifica al transformar G en G^* , y $C_i^* \cap C_j^* \neq \emptyset$ si y solo si $|C_i \cap C_j| \geq 2$.

Es fácil probar que dos cliques con intersección no vacías en G^* tienen al menos dos vértices en común. Además, G^* es 2-conexo. Dado que cada par de cliques que se intersecan tiene al menos dos vértices en común, basta con probar que G^* es conexo. Vamos a proceder a demostrarlo por inducción. Recordemos que, si G^* tiene un vértice de corte v , dado que G^* es cordal [46], entonces $\{v\} = C \cap C'$ donde C y C' son cliques maximales de G^* . Supongamos, por el absurdo, que G^* es desconexo. Por tanto, existe un entero positivo i tal que $1 < i < n + m$ en G^* , tal que cada vértice v de G^* tal que $v \leq w_i$ no es adyacente a cada vértice w de G^* tal que $w_{i+1} \leq w$. Por lo tanto, existe un índice j tal que la clique maximal $[w_{i+1}, a_R(w_{i+1})]$ de G_{j+1} proviene de la clique maximal $[w_i, a_R(w_i)]$ y por lo tanto $w_{i+1} = w_i \uparrow$, $a_R(w_{i+1}) = a_R(w_i) \uparrow$ y w_i es un vértice singular de G_j . Dado que G_j es 2-conexo, por hipótesis inductiva, y por lo tanto w_i no es un vértice de corte de G_j , existe una clique maximal $[x, y]$ en G_j tal que $a_L(w_j) < x < w_j$ y $w_j < y < a_R(w_j)$. Por construcción, $x < w_j$ en G_{j+1} , $w_{j+1} < y \uparrow$ en G_{j+1} , y x es adyacente a $y \uparrow$ en G_{j+1} , contradicción. Por lo tanto, G_{j+1} es conexo.

Queda por probar que $\tau(G^*) = \tau(G)$. Consideramos $C_1, \dots, C_s$ y $C_1^*, \dots, C_s^*$ las cliques maximales de G y G^* respectivamente ordenadas por sus extremos izquierdos. Dado que G y G^* son 2-conexos, basta con probar que $\tau_{G^*}(\{w_1, w_2\}) = \tau_G(\{v_1, v_2\}) = \tau_G(\{v_{n-1}, v_n\}) = \tau_{G^*}(w_{n+m-1}, w_m)$ (ver el corolario 3.2.8 y la observación 3.2.9). Para probarlo, tenemos que notar que $I^k[\{v_1, v_2\}] = I[[v_1, v_{k-1}]] = [v_1, v_k]$ y $I^k[\{w_1, w_2\}] = I[[w, w_{k-1}]] = [w_1, w_k]$, donde $v_k = a_R(v_{k-1} \downarrow)$ y $w_k = a_R(w_k) = a_R(w_{k-1})$, y además existe un entero i tal que $1 < i \leq s$ y si C y C^* son las cliques maximales de G y G^* respectivamente, que contienen $a_R(v_{k-1} \downarrow)$ y $a_R(w_k)$ como su extremo izquierdo, entonces $C = C_i$ y $C^* = C_i^*$. Por lo tanto, $\tau_{G^*}(\{w_1, w_2\}) = \tau_G(\{v_1, v_2\})$. Recordemos que el orden relativo de los extremos derechos e izquierdos de las cliques maximales correspondientes de G^* no sufrió ninguna modificación respecto a las cliques maximales de G . Por lo tanto, por simetría, $\tau_G(\{v_{n-1}, v_n\}) = \tau_{G^*}(\{w_{n+m-1}, w_m\})$. $\square$



Figura 3.5: Solo dibujamos los vértices de los dos grafos de intervalos unitarios, siendo dos vértices adyacentes si y solo si pertenecen a la misma elipse. Las elipses representan las cliques máximas del grafo G a la izquierda y su grafo correspondiente G^* a la derecha. Los números indican el tiempo de percolación de cada vértice dado el conjunto cápsula convexa de esos vértices etiquetados con 0.

Teorema 3.2.11. *Sea G un grafo de intervalo unitario. Si G es 2-conexo, entonces $\tau(G) = k$ donde k es la longitud del camino $P = w_0 \dots w_k$ definida como: $w_0 = v_L$, $w_1 = a_R(w_0)$ y $w_i = a_R(v_{w-1}) \downarrow$, por cada $2 \leq i \leq k$.*

Demostración. Observe que si cada dos cliques de intersección no vacía tienen al menos dos vértices comunes, entonces $w_i = v_i$ para cada $0 \leq i \leq k$, donde $v_0 = w_0$ y $v_i = a_R(v_{i-1})$ por cada $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto $\text{diam}(G) = \tau(G)$. En caso contrario, por el Teorema 3.2.10, $k = \text{diam}(G^*) = \tau(G^*) = \tau(G)$. $\square$

Ahora tenemos que considerar el caso en el que G tiene al menos un vértice de corte.

Proposición 3.2.12. *Sea G un grafo conexo. Si $C_1, \dots, C_r$ son las componentes 2-conexas de G , entonces $\tau(G) \leq \sum_{i=1}^r \tau(C_i)$.*

Demostración. Sea S un conjunto cápsula convexa de G . Denotamos por s_i el mínimo $h > 0$ tal que $V(C_i) \cap V_h[S]$ es un conjunto cápsula convexa de C_i ; y denotamos por t_i el mínimo h tal que $V(C_i) \subseteq I^h[S]$. Observamos que para cada $1 \leq i \leq r$, si $v \in C_i$, $t_S(v) > 0$ y no es un vértice de corte de G , entonces v es adyacente al menos a dos vértices en $V(C_i)$. Por lo tanto

$$\tau(G) \leq \sum_{i=1}^r (t_i - s_i + 1) \leq \sum_{i=1}^r \tau(C_i). \quad \square$$

Teorema 3.2.13. *Si G es un grafo de intervalo unitario conexo sin vértices de corte de grado 2 y sin vértices de grado 1, entonces $\tau(G) = \sum_{i=1}^r \text{diam}(C_i^*)$. Además, $\tau(G) = \tau(v_L) = \tau(v_R)$.*

Demostración. Como G no tiene vértices de grado 1, $gr(v_1) \geq 2$ y $gr(v_n) \geq 2$. Cada componente 2-conexa es un intervalo de vértices consecutivos en el orden de intervalo unitario $v_1, \dots, v_n$ de G , donde ambos extremos son vértices de corte excepto v_1 y v_n ; es decir, $V(C_i) = [v_{m_{i-1}}, v_{m_i}]$ por cada $1 \leq i \leq r$, donde $m_i = \sum_{j=1}^i |V(C_j)| - i + 1$ ($m_0 = 1$). Como G no tiene vértices de corte de grado 2, es fácil ver, usando el teorema 3.2.10, que $S = \{v_1, v_2, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_{r-1}+1}\}$ (respectivamente $\{v_n, v_{n-1}, v_{m_{r-1}-1}, \dots, v_{m_1-1}\}$) es un conjunto cápsula convexa, y $\tau_G(S) = \sum_{i=1}^r \tau(C_i) = \tau(v_n)$ (respectivamente $\tau_G(S) = \sum_{i=1}^r \tau(C_i) = \tau(v_1)$). Por tanto, por la proposición 3.2.12, $\tau(G) = \sum_{i=1}^r \text{diam}(C_i^*) = \tau(v_L) = \tau(v_R)$. $\square$

Sea G un grafo de intervalo unitario conexo cuyas componentes 2-conexas son $G_1, \dots, G_r$ y $x \leq y$ para cada $x \in V(G_i)$ e $y \in V(G_j)$ tal que $1 \leq i < j \leq r$. Definimos G^* como los grafos de intervalo unitario cuyas componentes 2-conexas son $G_1^*, \dots, G_r^*$ y $x \leq y$ para cada $x \in V(G_i^*)$ e $y \in V(G_j^*)$ tales que $1 \leq i < j \leq r$. Observamos que en ambos casos la igualdad se cumple cuando $x = y$ es un vértice de corte. Además, si G no tiene vértices de grado 1 y no tiene vértices de corte de grado 2, por el teorema 3.2.13, $\tau(G) = \tau(G^*) = \sum_{i=1}^r \text{diam}(G_i^*)$.

Sea G un grafo de intervalo unitario conexo con al menos tres vértices que tienen un orden de intervalo unitario de sus vértices $v_1, \dots, v_n$. Si u es un vértice de grado 1, dado que G es conexo, $u = v_1$ o $u = v_n$. Además, si u es un vértice de corte de grado 2 cuyos únicos vecinos son v y w , entonces v no es adyacente a w y $v < u < w$ o $w < u < v$. Llamaremos *subgrafo especial* a un subgrafo inducido por esos vértices en un intervalo maximal $[a, b]$ tal que $2 < gr(v)$ por cada vértice de corte v de G tal que $a < v < b$ y también se cumple una de las siguientes afirmaciones: (i) a (respectivamente b) pertenece a $\{v_1, v_n\}$ o (ii) a (respectivamente b) es un vértice de corte de grado 2 de G . A tal intervalo $[a, b]$ lo llamaremos *intervalo especial*.

Si H es un subgrafo especial de G inducido por $[a, b]$ definimos $t(H)$ como sigue:

- $t(H) = 1$, si $|V(H)| = 2$.
- $t(H) = \tau(H^*)$, si $v_1 = a$, $v_n = b$, $2 \leq gr(v_1)$ y $2 \leq gr(v_n)$.

- $t(H) = \tau((H - a)^*) + 1$, si $[(v_1 = a \text{ y } gr(v_1) = 1) \text{ o } v_1 < a]$, $v_n = b$, y $2 \leq gr(v_n)$.
- $t(H) = \tau((H - b)^*) + 1$, si $v_1 = a$, $2 \leq gr(v_1)$ y $[(gr(v_n) = 1 \text{ y } v_n = b) \text{ o } b < v_n]$.
- $t(H) = \tau((H - \{a, b\})^*) + 1$, si $v_1 = a$, $v_n = b$, $gr(v_1) = gr(v_n) = 1$.
- $t(H) = \tau((H - \{a, b\})^*) + 2$ si $(v_1 < a, v_n = b, \text{ y } gr(v_n) = 1)$, o $(v_1 = a, b < v_n, \text{ y } gr(v_1) = 1)$, o $(v_1 < a \text{ y } b < v_n)$.

Definimos $\epsilon(G)$ como el máximo $t(H)$ entre todos los subgrafos especiales H de G . Note que si G es un camino de n vértices con $n \geq 3$ entonces $\epsilon(G) = 1$. En la figura 3.6 se puede ver un ejemplo de un grafo de intervalo unitario G con dos subgrafos especiales y $\epsilon(G) = 6$.

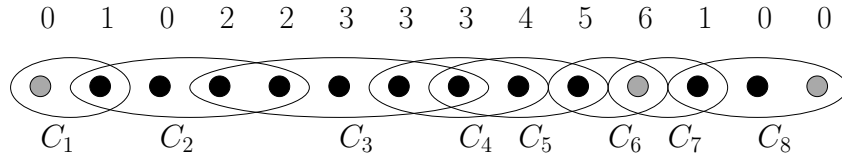


Figura 3.6: En este ejemplo, el grafo de intervalo unitario G contiene dos intervalos especiales cuyos extremos son vértices grises, considerando los vértices ordenados de izquierda a derecha. Para las aristas de G seguimos la convención de la figura 3.5. Además, $\tau(G) = 6$.

Teorema 3.2.14. *Si G es un grafo de intervalo unitario conexo tal que $|V(G)| \geq 3$, entonces $\tau(G) = \epsilon(G)$.*

Demostración. Supongamos primero que G no tiene un vértice de corte de grado 2. Si G no tiene un vértice de grado 1, el resultado sigue el teorema 3.2.13. Supongamos ahora que G tiene al menos un vértice de grado 1. Dicho vértice podría ser v_1 o v_n . Supongamos que $gr(v_1) = 1$ y $gr(v_n) \geq 2$. Por lo tanto, $v_1 \in S$ para cada conjunto cápsula convexa S de G . Dado que $G \setminus \{v_1\}$ es un grafo de intervalo unitario 2-conexo y no tiene un vértice de corte de grado 2 ni un vértice de grado 1, si $S \setminus \{v_1\}$ es un conjunto cápsula convexa de $G \setminus \{v_1\}$, entonces $\tau_S(G) = \tau_{S \setminus \{v_1\}}(G \setminus \{v_1\}) \leq \tau((G \setminus \{v_1\})^*) < t(G)$.

Supongamos que $S \setminus \{v_1\}$ no es un conjunto cápsula convexa de $G \setminus \{v_1\}$. Así existe un vértice $u \in V(G \setminus \{v_1\})$ tal que v_1 y u tienen un vecino común en G , este vértice sólo puede ser v_2 ; es decir, $u = v_2$, lo que implica que $\{v_2, v_3\} \subseteq I_{P_3}^1[S]$. En consecuencia, por el teorema 3.2.13, $\tau_S(G) \leq \tau((G \setminus \{v_1\})^*) + 1 = t(G)$. Como $S = \{v_1, v_3\}$ es un conjunto cápsula convexa e $I_{P_3}^1[S] \setminus \{v_1\} = \{v_2, v_3\}$, se sigue que $\tau_S(G) = \tau((G \setminus \{v_1\})^*) + 1$. Por lo tanto, $\tau(G) = t(G)$. Simétricamente, si $gr(v_1) \geq 2$ y $gr(v_n) = 1$, entonces $\tau(G) = t(G)$. Siguiendo la misma línea de argumentación, se puede probar que el resultado también se cumple si $gr(v_1) = gr(v_n) = 1$. Por eso se omiten los detalles.

Supongamos ahora que G tiene al menos un vértice de corte v de grado 2 y sea $[a, b]$ un intervalo especial tal que $|[a, b]| \geq 3$ y $H = G[[a, b]]$. Supongamos que a o b es un vértice de corte de grado 2 en G , digamos a . Utilizando técnicas similares a las del párrafo anterior, se puede demostrar que:

- $\tau(H \setminus \{a\}) = \max\{\tau_G(a\uparrow), \tau_G(b)\} = \max\{\tau((H \setminus \{a\})^*), \tau((H \setminus \{a\})^*) + 1\} = \tau((H \setminus \{a\})^*) + 1$, si $gr(b) \geq 2$,
- $\tau(H \setminus \{a, b\}) = \max\{\tau_G(a\uparrow), \tau_G(b\downarrow)\} = \max\{\tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1, \tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1\} = \tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1$, si $gr(b) = 1$ o b es un vértice de corte de grado 2.

Análogamente, si b es un vértice de corte de grado 2, entonces se cumplen las dos siguientes condiciones.

- $\tau(H \setminus \{b\}) = \max\{\tau_G(a), \tau_G(b\downarrow)\} = \max\{\tau((H \setminus \{b\})^*) + 1, \tau((H \setminus \{b\})^*)\} = \tau((H \setminus \{b\})^*) + 1$, si $gr(a) \geq 2$,
- $\tau(H \setminus \{a, b\}) = \max\{\tau_G(a\uparrow), \tau_G(b\downarrow)\} = \max\{\tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1, \tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1\} = \tau((H \setminus \{a, b\})^*) + 1$, si $gr(a) = 1$ o a es un vértice de corte de grado 2.

El resultado se sigue combinando estos hechos con lo siguiente: si v es un vértice de corte de G tal que $gr(v) = 2$ entonces $\tau(v) = \max\{\tau(v\downarrow), \tau(v\uparrow)\}$.

□

3.3. Una clase especial de grafos

Un grafo G satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si $I_{P_3}^2[S] = I_{P_3}[S]$ para todo conjunto $S \subset V(G)$. Es fácil ver que esta propiedad es hereditaria y todo grafo G perteneciente a esta clase satisface $\tau(G) \leq 1$. El siguiente resultado caracteriza, mediante subgrafos inducidos prohibidos minimales, aquellos grafos que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$.

Teorema 3.3.1. *Sea G un grafo. Entonces, G satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si y solo si no contiene como subgrafo inducido ningún grafo representado en la figura 3.7.*

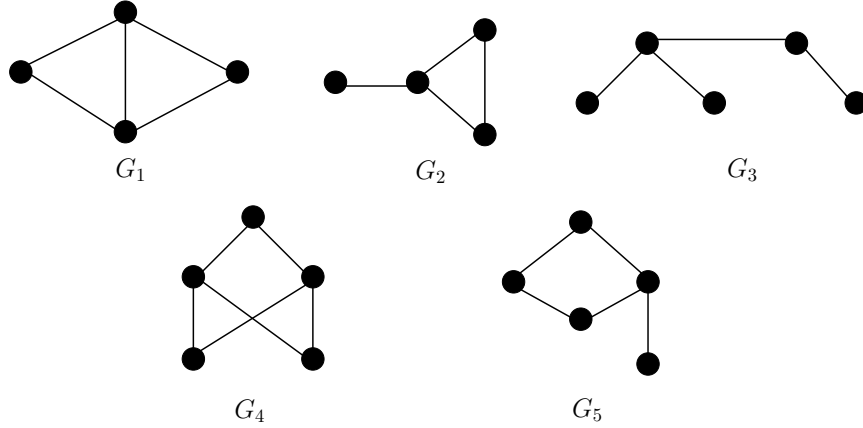


Figura 3.7: G_1 es el diamante, G_2 es la pata, G_3 es la silla, y G_4 es $K_{2,3}$.

Demostración. Es fácil comprobar que G_i no satisface la propiedad $\mathcal{P}$ para cada $1 \leq i \leq 5$.

Por el contrario, si G no satisface la propiedad $\mathcal{P}$, entonces G contiene, como subgrafo inducido, uno de los grafos representados en la figura 3.7. Sea S un subconjunto de vértices de G tal que $I_{P_3}[S]$ esté totalmente contenido en $I_{P_3}^2[S]$. Por lo tanto existen dos vértices u y v tales que $u \in I_{P_3}[S] \setminus S$ y $v \in I_{P_3}^2[S] \setminus I_{P_3}[S]$. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1: $N(v) \cap S \neq \emptyset$.

Supongamos primero que existe $z \in N(v) \cap N(u) \cap S$. Dado que $u \in I_{P_3}[S]$, existe un vértice w distinto de z que es adyacente a u y no es adyacente a v ,

porque de lo contrario $v \in I_{P_3}[S]$. Si w es adyacente a z , entonces $\{z, u, v, w\}$ induce G_1 (si v es adyacente a u) o $\{z, u, v, w\}$ induce G_2 (si v no es adyacente a u). Por lo tanto, w no es adyacente a z . Además, u no es adyacente a v , porque de lo contrario $\{u, v, w, z\}$ induce a G_2 . Como $v \in I_{P_3}^2[S]$, existe un vértice $x \in I_{P_3}^1[S] \setminus \{u\}$ que es adyacente a v . Si x es adyacente a z , entonces $\{u, v, x, z\}$ induce G_1 (si x es adyacente a u) o induce G_2 (si x no es adyacente a u). Por lo tanto, x no es adyacente a z . Por un lado, si x es adyacente a u y a w , entonces $\{u, v, w, x\}$ induce G_1 . Por otro lado, si x es adyacente a u y no es adyacente a w , entonces $\{u, v, w, x, z\}$ induce G_5 . Por tanto, x no es adyacente a u . Dado que $x \in I_{P_3}[S] \setminus S$, existe un vértice $s_1 \in S \setminus \{w, z\}$ que es adyacente a x . Si x es adyacente a w y w no es adyacente a s_1 , entonces $\{v, w, x, s_1, z\}$ induce G_3 . Además, si x es adyacente a w y w es adyacente a s_1 , entonces $\{v, s_1, w, x\}$ induce G_2 . Por lo tanto, x no es adyacente a w . Observemos también que s_1 no es adyacente a z . Si s_1 es adyacente a z y a u , entonces $\{s_1, u, x, z\}$ induce G_2 . Si s_1 es adyacente a z y no adyacente a u , entonces $\{s_1, u, v, x, z\}$ induce G_5 . Por lo tanto, s_1 no es adyacente a z . Dado que x no es adyacente a z y a w , existe un vértice $s \in S \setminus \{s_1, w, z\}$ que es adyacente a x . Por simetría, s_2 no es adyacente a v y a z . Si s_1 es adyacente a s_2 , entonces $\{s_1, s_2, v, x\}$ induce G_2 . Por lo tanto, si s_1 no es adyacente a s_2 , entonces $\{s_1, s_2, x, v, z\}$ induce G_3 , contradicción.

Supongamos ahora que $N(v) \cap N(u) \cap S = \emptyset$ y por lo tanto existe un vértice $z \in S$ adyacente a v pero no adyacente a u , y existen dos vértices $w_1, w_2 \in S$ adyacentes a u y no adyacentes a v . Supongamos, por el absurdo, que u es adyacente a v . Por lo tanto, w_1 no es adyacente a w_2 , porque de lo contrario $\{u, v, w_1, w_2\}$ induce G_2 . Por un lado, si z es adyacente a w_1 y a w_2 , entonces $\{u, v, w_1, w_2, z\}$ induce G_4 . Por otro lado, si z es adyacente exactamente a uno de los vértices w_1 o w_2 , entonces $\{u, v, w_1, w_2, z\}$ induce G_5 . Por lo tanto, z no es adyacente a w_1 ni a w_2 . Así $\{u, v, w_1, w_2, z\}$ induce G_3 , contradicción. Por lo tanto, u no es adyacente a v lo que implica que existe un vértice $x \in I_{P_3}^1[S] \setminus S$ adyacente a v . Podemos suponer, por lo dicho en el párrafo anterior, que x no es adyacente a z , de lo contrario $N(v) \cap N(x) \cap S \neq \emptyset$. En consecuencia, existen dos vértices a y b en $S \setminus \{z\}$ adyacentes a x . Dado que G no tiene a G_2 como subgrafo inducido, a no es adyacente a b . Además, como

G no tiene a G_4 ni a G_5 como subgrafo inducido, a y b no son adyacentes a z . Por lo tanto, $\{a, b, x, v, z\}$ induce G_3 .

Caso 2: $N(v) \cap S = \emptyset$. Existen dos vértices $u_1, u_2 \in I_{P_3}[S] \setminus S$ que son adyacentes a v . Además, existen dos vértices $x_1, x_2 \in S$ que son adyacentes a u_1 . Si x_1 es adyacente a x_2 , entonces $\{u_1, v, x_1, x_2\}$ induce G_2 . Por lo tanto, x_1 no es adyacente a x_2 . Por un lado, si x_1 es adyacente a u_2 y u_1 es adyacente a u_2 entonces $\{u_1, v, u_1, u_2\}$ induce G_1 . Por otro lado, si x_1 es adyacente a u_2 y u_1 no es adyacente a u_2 entonces $\{u_1, v, u_1, u_2\}$ induce G_2 . Por lo tanto, x_1 no es adyacente a u_2 . Por simetría, x_2 no es adyacente a u_2 . En consecuencia, u_1 no es adyacente a u_2 , porque de lo contrario $\{u_1, u_2, v, x\}$ induce a G_2 y, por lo tanto, u_1 no es adyacente a u_2 . Por lo tanto, $\{u_1, u_2, v, x_1, x_2\}$ induce G_3 .

Ya hemos probado que en todos los casos posibles el grafo G que no satisface la propiedad $\mathcal{P}$ contiene uno de los grafos representados en la Figura 3.7 como un subgrafo inducido. $\square$

Corolario 3.3.2. Sea G un grafo. Si G satisface la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $g_{P_3}(G) = h_{P_3}(G)$.

El corolario 3.3.2 muestra que el Teorema 3.3.1 es una caracterización de una subclase de esos grafos G tal que $h(H) = g(H)$ para cada subgrafo inducido de G , caracterizado en[19].

Capítulo 4

Fórmulas para calcular parámetros en grafos de Hamming

En este capítulo trabajaremos solamente con grafos de Hamming,
 $H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$, con $n > 1$ y $r_i \geq 1$ para $1 \leq i \leq n$.

Si $r_i = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$, es decir, $V(K_{r_i}) = \{x\}$, notamos
 $H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square \dots \square K_{r_{i-1}} \square x \square K_{r_{i+1}} \square \dots \square K_{r_n}$.

Cuando el contexto sea claro escribiremos H_n en vez de $H_n(r_1, \dots, r_n)$.

4.1. P_3 -convexidad

En esta sección vamos a presentar una fórmula para calcular el número de Carathéodory en grafos de hamming bajo la P_3 -convexidad, cuando el contexto sea claro vamos a omitir el prefijo P_3 dado que esta sección está dedicada a dicha convexidad.

El siguiente resultado de Barbarosa recopila varias propiedades elementales de los conjuntos Carathéodory que vamos a utilizar en nuestros resultados.

Proposición 4.1.1. *[7, Proposición 2.1]. Sea G un grafo y sea S un conjunto de Carathéodory de G .*

1. Si G tiene al menos 2 vértices y es completo, un camino o un ciclo, entonces $c(G) = 2$.
2. Si S tiene al menos 2 vértices, entonces todo vértice u en S se encuentra en un camino de 3 vértices, uvw , tal que $\{v, w\} \subseteq V(G) \setminus \mathcal{H}_G(S \setminus \{u\})$.
3. Ningún subconjunto propio S' de S satisface $\mathcal{H}_G(S') = V(G)$.
4. La cápsula convexa de S , $\mathcal{H}_G(S)$, induce un subgrafo conexo de G .

Los siguientes dos resultados de Brešar y Valencia-Pabon son sobre conjuntos P_3 -convexos en grafos de Hamming que nos dan una idea de cómo se puede construir la cápsula P_3 -convexa en grafos de Hamming. Estas son otras propiedades que también usaremos en nuestros resultados y constituyen una herramienta central para probar el principal resultado de este capítulo.

Sea H_n un grafo de Hamming. El primer resultado nos muestra una idea de cómo se forma el conjunto cápsula convexa entre un conjunto P_3 -convexo $S \subset V(H_n)$ y un vértice $\{x\}$, es decir, $\mathcal{H}(S \cup \{x\})$, dependiendo de la distancia del vértice al conjunto S y la dimensión de $H[S]$.

Lema 4.1.2. [11, Lema 3]. Sea $H_n = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \cdots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming, con $n > 1$ y $r_i > 1$ para $1 \leq i \leq n$, y $S \subset V(H_n)$ un conjunto P_3 -convexo de H_n tal que el subgrafo $H[S]$ es isomorfo a un grafo de Hamming de dimensión k .

- Si $x \in V(H_n)$ tal que $d_{H_n}(x, S) = 1$, entonces $\mathcal{H}(S \cup \{x\})$ induce un subgrafo Hamming de dimensión $k + 1$.
- Si $x \in V(H_n)$ tal que $d_{H_n}(x, S) = 2$, entonces $\mathcal{H}(S \cup \{x\})$ induce un subgrafo Hamming de dimensión $k + 2$.
- Si $x \in V(H_n)$ tal que $d_{H_n}(x, S) > 2$, entonces $\mathcal{H}(S \cup \{x\})$ es la unión disjunta de $H[S]$ y $\{x\}$.

El segundo resultado nos muestra una idea de cómo se forma la cápsula convexa de dos conjuntos P_3 -convexos, $H^1 \subset V(H_n)$ y $H^2 \subset V(H_n)$, es decir, $\mathcal{H}(V(H^1) \cup V(H^2))$, dependiendo de la distancia entre H^1 y H^2 y la dimensión de H^1 y H^2 .

Lema 4.1.3. [11, Lema 4]. Sea $H_n = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \cdots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming, con $n > 1$ y $r_i > 1$ para $1 \leq i \leq n$, y sean H^1 y H^2 dos subgrafos Hamming de H_n con dimensión k y k' , respectivamente.

- Si $d_{H_n}(V(H^1), V(H^2)) = 1$, entonces $\mathcal{H}(V(H^1) \cup V(H^2))$ induce un subgrafo Hamming de dimensión a lo sumo $k + k' + 1$.
- Si $d_{H_n}(V(H^1), V(H^2)) = 2$, entonces $\mathcal{H}(V(H^1) \cup V(H^2))$ induce un subgrafo Hamming de dimensión a lo sumo $k + k' + 2$.
- Si $d_{H_n}(V(H^1), V(H^2)) > 2$, entonces $\mathcal{H}(V(H^1) \cup V(H^2))$ es la unión disjunta de $V(H^1)$ y $V(H^2)$.

La siguiente observación nos da una cota inferior para el número de Carathéodory de un grafo de Hamming de dimensión n . En el caso de $n \in \{1, 2, 3\}$ nos da el número de Carathéodory exacto.

Observación 4.1.4. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \cdots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n \geq 1$ y $r_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

1. $c(H_1(r_1)) = c(H_2(r_1, r_2)) = 2$ y $c(H_3(r_1, r_2, r_3)) = 3$.
2. $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \geq n$, para todo $n \geq 4$.

Demostración. 1. Como $G = H_1(r_1)$ es un completo con al menos 2 vértices, entonces $c(H_1(r_1)) = 2$, ver la proposición 4.1.1.

Usaremos en reiteradas ocasiones el lema 4.1.2 pero no lo citaremos.

Caso 1:

Vamos a probar el resultado para $n = 2$.

Supongamos que $G = H_2(r_1, r_2) = K_{r_1} \square K_{r_2}$, con $r_i > 1$. Sea $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, S es un conjunto de Carathéodory de G porque $\partial\mathcal{H}(S) =$

$V(G) \setminus \{(1, 0), (0, 1)\} \neq \emptyset$, luego $c(G) \geq 2$. Supongamos por el absurdo que $c(G) \geq 3$. Sea S un conjunto de Carathéodory de G tal que $|S| \geq 3$. Afirmamos que S es una cápsula convexa de G . Pues, si no lo fuera, tendría un conjunto de Carathéodory de cardinal 3 de un grafo completo K_{r_1} y eso sería absurdo, ya que sabemos por la proposición 4.1.1 que $c(H_1) = 2$. En efecto, si S no es un conjunto de cápsula convexa de G , nos queda que $G[\mathcal{H}(S)] = K_{r_1} \square b \cong K_{r_1}$ o $G[\mathcal{H}(S)] = a \square K_{r_2} \cong K_{r_2}$, es decir, el subgrafo Hamming inducido por la cápsula convexa de S tiene dimensión 1. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $G[\mathcal{H}(S)] = K_{r_1} \square b \cong K_{r_1}$, y sabemos que $c(K_{r_1}) = 2$, absurdo. Entonces S es un conjunto de cápsula convexa de G .

Sea $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq S$. Supongamos que $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_1\})] = K_{r_1} \square b$, porque no es posible que $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_1\})]$ sea un grafo con un único vértice (a, b) . Si $x_1 = (a, b)$ entonces $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_1\})] = G[\mathcal{H}(S)] \subsetneq K_{r_1} \square K_{r_2}$ pero S es un conjunto cápsula convexa, luego $x_1 = (a, c)$ con $b \neq c$. Como $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_1\})] = K_{r_1} \square b$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_2 = (a', b)$, $x_3 = (a'', b)$ con $a \neq a'$ o $a \neq a''$. Suponemos que $a \neq a'$, luego $d(x_1, x_2) = d((a, c), (a', b)) = 2$ y por el lema 4.1.2, $G[\mathcal{H}(\{x_1, x_2\})] = G$, contradicción. Entonces $c(G) = 2$.

Caso 2:

Vamos a probar el resultado cuando $n = 3$.

Supongamos que $G = H_3(r_1, r_2, r_3) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square K_{r_3}$ y $S = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ es un conjunto de Carathéodory de G , porque $\partial\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(S) \setminus \bigcup_{u \in S} \mathcal{H}(S \setminus \{u\}) = V(G) \setminus (\mathcal{H}((1, 0, 1), (1, 1, 0)) \cup \mathcal{H}((0, 1, 1), (1, 1, 0)) \cup \mathcal{H}((0, 1, 1), (1, 0, 1))) = V(G) \setminus (V(1 \square K_{r_2} \square K_{r_3}) \cup V(K_{r_1} \square 1 \square K_{r_3}) \cup V(K_{r_1} \square K_{r_2} \square 1))$, luego tenemos que $(0, 0, 0) \in \partial\mathcal{H}(S)$ con lo cual $c(G) \geq 3$. Supongamos por el absurdo que $c(G) \geq 4$. Sea S un conjunto de Carathéodory de G tal que $|S| \geq 4$, sabemos que S es un conjunto cápsula convexa de G . Sea $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k\}$.

Si $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_j\})] = K_{r_1} \square b \square c$. Sea $S' = \{x_1, x_2\} \subseteq S$ tal que $G[\mathcal{H}(S')] = K_{r_1} \square b \square c$, y sea $x_3 \in S$ tal que $1 \leq d(x_3, S') \leq 2$. Luego, si $d(x_3, S') = 1$, por el lema 4.1.2, tenemos que $G[\mathcal{H}(S' \cup \{x_3\})] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square c \cong$

$K_{r_1} \square K_{r_2}$, es decir, $S' \cup \{x_3\}$ es un conjunto de cápsula convexa de $K_{r_1} \square K_{r_2}$, contradicción. Si $d(x_3, S') = 2$, por el lema 4.1.2, tenemos que $G[\mathcal{H}(S' \cup \{x_3\})] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square K_{r_3} = G$, es decir, $S' \cup \{x_3\}$ es un conjunto de cápsula convexa de G , luego S no es un conjunto de Carathéodory, contradicción. Entonces $c(G) = 3$.

2. Si $n \geq 4$. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n)$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con $(v_i)_j = 0$ si $j = i$ y $(v_i)_j = 1$ si $j \neq i$. Es claro que S es un conjunto cápsula convexa de G , es decir, $G[\mathcal{H}(S)] = G$. Vamos a ver como está formada la $\partial H(S) = \mathcal{H}(S) \setminus \bigcup_{u \in S} \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$ y con eso concluir que S es un conjunto de Carathéodory de G .

- $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})] = 1 \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$,
- $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_i\})] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_{i-1}} \square 1 \square K_{r_{i+1}} \square \dots \square K_{r_n}$ si $2 \leq i \leq n-1$,
- $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_n\})] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_{n-1}} \square 1$.

Entonces, $v = (0, 0, \dots, 0) \in \partial H(S)$, con lo cual S es un conjunto de Carathéodory de G y $c(G) \geq n$.

□

El siguiente resultado nos da un cota inferior para la dimensión de un conjunto cápsula convexa de un conjunto máximo de Carathéodory.

Lema 4.1.5. *Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n > 1$ y $r_i > 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Si S es un conjunto de Carathéodory máximo de G , entonces $\dim(G[\mathcal{H}(S)]) \geq n-1$ para todo $n \geq 4$.*

Demostración. Si S es un conjunto de Carathéodory máximo de G , entonces $H = G[\mathcal{H}(S)]$ es un subgrafo conexo de G , por proposición 4.1.1.

Supongamos por el absurdo que $\dim(G[\mathcal{H}(S)]) \leq n-2$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $H = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_h} \square 0 \square \dots \square 0$ con $h \leq n-2$.

Sea $u = (d_1, \dots, d_h, 0, \dots, 0) \in \partial\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(S) \setminus \bigcup_{v \in S} \mathcal{H}(S \setminus \{v\})$, con $0 \leq d_i \leq r_i - 1$ para todo $1 \leq i \leq h$, sabemos que el vértice u existe porque S es un conjunto de Carathéodory.

Sea $S' = S \cup \{w\}$, donde $w = (d_1, \dots, d_h, 1, 1, 0, \dots, 0)$; por definición

$$\partial\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(S') \setminus \bigcup_{v \in S'} \mathcal{H}(S' \setminus \{v\}) = \mathcal{H}(S') \setminus \left(\bigcup_{v \in S} \mathcal{H}(S' \setminus \{v\}) \bigcup \mathcal{H}(S) \right)$$

es fácil ver que $d(w, \mathcal{H}(S)) = 2$, luego por el lema 4.1.2 podemos afirmar que $G[\mathcal{H}(S')] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_h} \square K_{r_{h+1}} \square K_{r_{h+2}} \square 0 \square \dots \square 0$.

Afirmamos que $w' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_h, 1, 1, 0, \dots, 0) \in \partial\mathcal{H}(S')$, con $0 \leq d'_1 \leq r_1 - 1$ y $d'_1 \neq d_1$.

Es claro que $w' \in \mathcal{H}(S')$. Vamos a probar que

$$w' \notin \bigcup_{v \in S} \mathcal{H}(S' \setminus \{v\}) \bigcup \mathcal{H}(S' \setminus \{w\}).$$

Primero observamos que $w' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{w\}) = \mathcal{H}(S)$ porque

$$G[\mathcal{H}(S)] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_h} \square 0 \square \dots \square 0.$$

Como $u \in \partial\mathcal{H}(S)$, entonces $u \notin \mathcal{H}(S \setminus \{v\})$ para todo $v \in S$ y por lo tanto $d(u, \mathcal{H}(S \setminus \{v\})) \geq 1$ para todo $v \in S$. Claramente $d(u, w) = 2$ y por lo tanto $d(w, \mathcal{H}(S \setminus \{v\})) \geq 3$ para todo $v \in S$. Combinando esto con el lema 4.1.2 podemos concluir que $\mathcal{H}(S' \setminus \{v\}) = \mathcal{H}(S \cup \{w\} \setminus \{v\}) = \mathcal{H}(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ para todo $v \in S$. Como $w' \notin \mathcal{H}(S \setminus \{v\})$ para todo $v \in S$, porque $d(w', \mathcal{H}(S \setminus \{v\})) > 2$ para todo $v \in S$ y $w' \neq w$, es claro que $w' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{v\})$, luego podemos afirmar que $w' \in \partial\mathcal{H}(S')$. Por lo tanto S' es un conjunto de Carathéodory y $|S'| > |S|$, contradicción. $\square$

El siguiente resultado indica que si, dado un grafo de Hamming G , existe un conjunto de Carathéodory de dimensión $k < n$ en $V(G)$, entonces existe otro conjunto de Carathéodory de dimensión $k + 1$ en $V(G)$.

Lema 4.1.6. *Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n > 1$ y $r_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Si S es*

un conjunto de Carathéodory de G tal que $\dim_G(G[\mathcal{H}(S)]) = k < n$, entonces existe un conjunto de Carathéodory T de G tal que $\dim_G(G[\mathcal{H}(T)]) = k + 1$.

Demostración. Sea $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto de Carathéodory de G .

Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\dim(G[\mathcal{H}(S)]) = n-1$ y $G[\mathcal{H}(S)] = K_{r_1} \square \dots \square K_{r_{n-1}} \square 0$. Como S es un conjunto de Carathéodory de G , $0 < d(v_i, \mathcal{H}(S \setminus \{v_i\})) \leq 2$ para todo $1 \leq i \leq r$, por el lema 4.1.2.

Caso 1:

Supongamos que existe i , $1 \leq i \leq r$, tal que $d(v_i, \mathcal{H}(S \setminus \{v_i\})) = 1$, digamos que $i = 1$. Sea $v_1 = (d_1, \dots, d_{n-1}, 0)$ y $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})] = C_1 + \dots + C_k$, donde C_i es una componente conexa de $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})]$ para cada $1 \leq i \leq k$. Existe un solo $1 \leq i \leq k$ tal que $d(v_1, C_i) = 1$ y v_1 es adyacente a un solo vértice $w \in C_i$. Por lo tanto $d(v_1, C_j) > 1$ para todo $j \neq i$. Definimos $v_{r+1} = (d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$. Sea $S' = (S \setminus \{v_1\}) \cup \{v_{r+1}\}$. Como $d(v_1, C_i) = 1$ y v_1 es adyacente a v_{r+1} , podemos afirmar que $v_1 \in \mathcal{H}(S')$. Luego $G[\mathcal{H}(S')] = G[\mathcal{H}((S \setminus \{v_1\}) \cup \{v_{r+1}\})]$. Concluimos que $\dim(G[\mathcal{H}(S')]) = \dim(G[\mathcal{H}(S)]) + 1$, es decir, $G[\mathcal{H}(S')] = G$.

Vamos a probar ahora que S' es un conjunto de Carathéodory de G . Supongamos que $v = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \partial\mathcal{H}(S)$, afirmamos que $v' = (y_1, \dots, y_{n-1}, 1) \in \partial\mathcal{H}(S')$. Es claro que $v' \in \mathcal{H}(S') = V(G)$ y $v' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{v_{r+1}\})$. Si $u \in S$, como $v \in \partial\mathcal{H}(S)$, entonces $v \notin \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$ y $d(v, G[\mathcal{H}(S \setminus \{u\})]) \geq 1$. Sea $u \in S$, para cada $w \in \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$, al menos una de las primeras $n-1$ coordenadas de v es diferente de las primeras $n-1$ coordenadas de w . Además, v es adyacente a lo sumo a un vértice $w \in \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$ para cada $u \in S$. Como las primeras $n-1$ coordenadas de v son las mismas que las de v' , al igual que sucede con v_1 y v_{r+1} , las primeras $n-1$ coordenadas son iguales. Por lo tanto para cada $w \in \mathcal{H}(S' \setminus \{v_j\})$, para todo $2 \leq j \leq r$, al menos una de las primeras $n-1$ coordenadas de v' es diferente de las primeras $n-1$ coordenadas de w y v' es adyacente a lo sumo a un vértice $w \in \mathcal{H}(S' \setminus \{v_j\})$ para todo $2 \leq j \leq r$. Luego, $v' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{u\})$ para todo $u \in S'$, entonces S' es un conjunto de Carathéodory.

Caso 2:

Si $d(v_i, \mathcal{H}(S \setminus \{v_i\})) = 2$ para todo $1 \leq i \leq r$, en particular, $d(v_1, \mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})) = 2$. Sea $v_1 = (d_1, \dots, d_{n-1}, 0)$ entonces $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})] = C_1 +$

$\dots + C_k$, con C_i componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})]$. Definimos $v_{r+1} = (d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$. Es claro que $d(v_1, v_{r+1}) = 1$ y la última coordenada de v_{r+1} es diferente de la última coordenada de todo $v \in \mathcal{H}(S)$, entonces $d(v_{r+1}, \mathcal{H}(S \setminus \{v_1\})) = 3$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $d(v_1, C_1) = 2$, entonces $d(v_{r+1}, C_1) = 3$, y por el lema 4.1.2, sabemos que $\dim(G[\mathcal{H}(C_1 \cup \{v_1\} \cup \{v_{r+1}\}])) = \dim(G[\mathcal{H}(C_1 \cup \{v_1\})]) + 1$. Por lo tanto, si $S' = S \cup \{v_{r+1}\}$, entonces, $\dim(G[\mathcal{H}(S \cup \{v_{r+1}\})]) = \dim(G[\mathcal{H}(S)]) + 1$, es decir, $G[\mathcal{H}(S \cup \{v_{r+1}\})] = G$.

Vamos a probar que S' es un conjunto de Carathéodory de G . Supongamos que $v = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \partial\mathcal{H}(S)$, afirmamos que $v' = (y_1, \dots, y_{n-1}, 1) \in \partial\mathcal{H}(S')$. Es claro que $v' \in \mathcal{H}(S') = V(G)$. Sabemos que $v' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{v_{r+1}\})$, porque la última coordenada de v' es 1 y la última coordenada de todo $w \in \mathcal{H}(S' \setminus \{v_{r+1}\})$ es 0. Como $v \in \partial\mathcal{H}(S)$, $v \notin \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$ y $d(v, \mathcal{H}(S \setminus \{u\})) \geq 1$ para todo $u \in S$. Si $u \in S$, entonces para cada $w \in \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$, al menos una de las primeras $n - 1$ coordenadas de v es diferente de las primeras $n - 1$ coordenadas de w . Además, v es adyacente a lo sumo a un vértice $w \in \mathcal{H}(S \setminus \{u\})$ para cada $u \in S$. Como las primeras $n - 1$ coordenadas de v son las mismas que las de v' , al igual sucede con v_1 y v_{r+1} , luego para cada $w \in \mathcal{H}(S' \setminus \{v_j\})$, para todo $2 \leq j \leq r$, al menos una de las primeras $n - 1$ coordenadas de v' es diferente de las primeras $n - 1$ coordenadas de w y v' es adyacente a lo sumo a un vértice $w \in \mathcal{H}(S' \setminus \{v_j\})$ para todo $2 \leq j \leq r$. Luego, $v' \notin \mathcal{H}(S' \setminus \{u\})$ para todo $u \in S'$, entonces S' es un conjunto de Carathéodory. $\square$

De este lema se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.1.7. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n > 1$ y $r_i > 1$ para $1 \leq i \leq n$. Si S es un conjunto máximo de Carathéodory de G , entonces S es un conjunto de cápsula convexa de G .

Recordemos que un *conjunto de cápsula convexa minimal* de G es un conjunto cápsula convexa que no contiene un subconjunto propio de otra cápsula convexa de G , es decir, $\mathcal{H}(S) = V(G)$ y $\mathcal{H}(R) \subsetneq V(G)$ para todo $R \subset S$.

Definimos $p(H_n(r_1, \dots, r_n))$ como el cardinal máximo de un conjunto cápsula convexa minimal S de $H_n(r_1, \dots, r_n)$.

De la misma manera en que demostramos el lemma 4.1.6, se demuestra la siguiente observación:

Observación 4.1.8. Sean $H_{n-1}(r_1, \dots, r_{n-1})$ y $H_{n-2}(r_1, \dots, r_{n-2})$ dos grafos de Hamming de dimensión $n-1$ y $n-2$ respectivamente, con $n > 3$ y $r_i > 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $p(H_{n-1}) \geq p(H_{n-2})$.

La siguiente observación nos da una relación entre $c(H_n(r_1, \dots, r_n))$ y $p(H_n(r_1, \dots, r_n))$.

Observación 4.1.9. Sea G un grafo. Si S es un conjunto de Carathéodory máximo de G , entonces S es un conjunto cápsula convexa minimal de G , con lo cual, $c(G) \leq p(G)$.

Demostración. Si S es un conjunto de Carathéodory máximo de G , es decir, $\mathcal{H}(S) = V(G)$, entonces S es un conjunto cápsula convexa minimal de G , por la proposición 4.1.1. Luego, $c(G) \leq p(G)$. $\square$

Usaremos el siguiente lema, más adelante, para encontrar una cota superior para el número de Carathéodory de los grafos de Hamming.

Lema 4.1.10. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n > 1$ y $r_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, $p(H_n) \leq \max\{2p(H_{n-3}), p(H_{n-1}) + 1\}$ para todo $n \geq 4$.

Demostración. Sea S una cápsula convexa minimal de máximo cardinal de G . Y sea T un subconjunto propio máximo de S , tal que $\mathcal{H}(T)$ es conexo y $\dim(G[\mathcal{H}(T)]) < n$.

Caso 1:

Si $\dim(G[\mathcal{H}(T)]) = n-1$. Afirmamos que $|S \setminus T| = 1$. Supongamos por el absurdo que $|S \setminus T| \geq 2$. Sea $v \in S \setminus T$, es claro que $d(v, \mathcal{H}(T)) \leq 2$ porque S es un conjunto de cápsula convexa. Y por lo tanto $\dim(G[\mathcal{H}(T) \cup \{v\}]) = n$. Definimos $S' = T \cup \{v\}$ entonces $\dim(G[\mathcal{H}(S')]) = n$, contradicción. El conjunto T es minimal, porque si existe $T' \subset T$, tal que $\mathcal{H}(T') = \mathcal{H}(T)$,

entonces $\mathcal{H}(T' \cup (S \setminus T)) = \mathcal{H}(S)$ y $|T' \cup (S \setminus T)| < |S|$ contradicción, porque S es una cápsula convexa minimal de G . Podemos afirmar, por la observación 4.1.8, que $p(H_{n-1}) \geq p(H_{n-2})$. Luego $p(H_n(r_1, \dots, r_n)) = |S| = |S \setminus T| + |T| \leq 1 + p(H_{n-1})$.

Caso 2:

Si $\dim(G[\mathcal{H}(T)]) = n - 2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{H}(T) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_{n-2}} \square 0 \square 0$. Afirmamos que $|S \setminus T| = 1$. Supongamos por el absurdo que $|S \setminus T| \geq 2$. Sea $v \in S \setminus T$, es claro que, $d(v, \mathcal{H}(T)) \leq 2$ porque S es un conjunto de cápsula convexa. Si $d(v, \mathcal{H}(T)) = 2$, por lo tanto, $\dim(G[\mathcal{H}(T) \cup \{v\}]) = n$ se sigue igual que en el caso 1. Si $d(v, \mathcal{H}(T)) = 1$ para todo $v \in S \setminus T$, sean $v_1 = (v_{1_1}, \dots, v_{1_{n-1}}, v_{1_n}) \in S \setminus T$ y $v_2 = (v_{2_1}, \dots, v_{2_{n-1}}, v_{2_n}) \in S \setminus T$, tal que $v_{1_{n-1}} = 0$, $v_{1_n} = 1$, $v_{2_{n-1}} = 1$ y $v_{2_n} = 0$. Definimos $v' = (v_{1_1}, \dots, v_{1_{n-2}}, 1, 1)$, luego $d(v', \mathcal{H}(T)) = 2$, por lo tanto $\dim(G[\mathcal{H}(T) \cup \{v'\}]) = n$. Definimos $S' = T \cup \{v'\}$, y se sigue igual que en el caso 1.

Caso 3:

Si $\dim(G[\mathcal{H}(T)]) \leq n - 3$. Como en el caso 1, T es minimal y se deduce que $|T| \leq p(H_{n-3})$. Afirmamos que $G[\mathcal{H}(S \setminus T)]$ es conexo. Si $G[\mathcal{H}(S \setminus T)]$ no fuera conexo, $G[\mathcal{H}(S \setminus T)] = C_1 + \dots + C_k$ y $d(C_i, \mathcal{H}(T)) \leq 2$ para algún $1 \leq i \leq k$ porque $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}((S \setminus T) \cup T) = V(G)$. Entonces $G[\mathcal{H}(T \cup C_i)]$ es conexo, $(T \cup C_i) \subset S$ y $\dim(G[\mathcal{H}(T)]) < \dim(G[\mathcal{H}(T \cup C_i)]) < n$, contradicción, entonces $G[\mathcal{H}(S \setminus T)]$ es conexo. Como, T es máximo, entonces $|S| = |S \setminus T| + |T| \leq p(H_{n-3}) + p(H_{n-3})$, luego $p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_{n-3}) + p(H_{n-3}) = 2p(H_{n-3})$.

Luego, $p(H_n) \leq \max\{2p(H_{n-3}), p(H_{n-1}) + 1\}$ para todo $n \geq 4$. □

Corolario 4.1.11. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $4 \leq n \leq 6$ y $r_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = n$.

Demostración. Por las observaciones 4.1.4 y 4.1.9, sabemos que $n \leq c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n))$.

Si $n = 3$, entonces $G = H_3(r_1, r_2, r_3) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square K_{r_3}$ y $p(G) \geq 3$. Supongamos que $p(G) \geq 4$ y sea S' un conjunto cápsula convexa mini-

mal de G . Sea $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq S'$. Si $G[\mathcal{H}(S' \setminus \{x_1\})] = K_{r_1} \square b \square c$, entonces $\{x_2, x_3, x_4\} \subseteq K_{r_1} \square b \square c$ y $x_1 = (a', b', c')$ con $b \neq b'$ y $c \neq c'$. Podemos suponer que $x_2 = (a, b, c)$ y $x_3 = (a'', b, c)$ con $a \neq a''$, entonces $\mathcal{H}(\{x_1, x_2, x_3\}) = V(G)$, contradicción. Si $G[\mathcal{H}(S \setminus \{x_1\})] = K_{r_1} \square K_{r_2} \square c$, entonces $\{x_2, x_3, x_4\} \subseteq K_{r_1} \square K_{r_2} \square c$ y $x_1 = (A, B, c')$ con $c \neq c'$. Podemos suponer que $x_2 = (a, b, c)$, $x_3 = (a', b', c)$ y $x_4 = (a'', b'', c)$. Si $a \neq a'$ y $b \neq b'$, entonces $\mathcal{H}(\{x_1, x_2, x_4\}) = V(G)$, contradicción. Si $a'' \neq a'$, $a' \neq a$, $b = b'$ y $b' \neq b''$, entonces $\mathcal{H}(\{x_1, x_3, x_4\}) = V(G)$. Si $a'' = a'$ y $b \neq b''$ entonces $\mathcal{H}(\{x_1, x_2, x_4\}) = V(G)$, contradicción. Luego $p(H_3(r_1, r_2, r_3)) = 3$.

Combinando esto con el lema 4.1.10

$$4 \leq c(H_4) \leq p(H_4) \leq \max\{2p(H_1), p(H_3) + 1\} = 4$$

$$5 \leq c(H_5) \leq p(H_5) \leq \max\{2p(H_2), p(H_4) + 1\} = 5$$

$$6 \leq c(H_6) \leq p(H_6) \leq \max\{2p(H_3), p(H_5) + 1\} = 6,$$

se concluye que, $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = n$ para todo $4 \leq n \leq 6$. $\square$

El siguiente lema nos da una cota superior para el número de Carathéodory de los grafos de Hamming de dimensión mayor o igual a 7 y lo usaremos para probar el resultado principal de este capítulo.

Lema 4.1.12. Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n \geq 7$ y $r_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Si $n \equiv 1(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq 2^{\frac{n-1}{3}+1}$.

Si $n \equiv 2(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq 5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$.

Si $n \equiv 0(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq 3 \cdot 2^{\frac{n}{3}-1}$.

Demostración. De la observación 4.1.9 y de el lema 4.1.10 sabemos que

$$c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq \max\{2p(H_{n-3}), p(H_{n-1}) + 1\}.$$

Consideramos $q_n \in \mathbb{Z}$, tal que $q_n = n$ para todo $1 \leq n \leq 6$ y $q_n = \max\{2q_{n-3}, q_{n-1} + 1\}$ para todo $n \geq 7$. Afirmamos que para todo $n \geq 7$, $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq \max\{2p(H_{n-3}), p(H_{n-1}) + 1\} \leq q_n$.

Lo probamos por inducción en n . Primero probamos los casos base.

Si $n = 7$, entonces $q_7 = \max\{2q_4, q_6 + 1\} = 8$. Luego, tenemos que $c(H_7(r_1, \dots, r_7)) \leq p(H_7(r_1, \dots, r_7)) \leq \max\{2p(H_{7-3}), p(H_{7-1}) + 1\} = \max\{2 \cdot 4, 6 + 1\} = 8 \leq q_7$.

Si $n = 8$, entonces $q_8 = \max\{2q_5, q_7 + 1\} = 10$. Luego, tenemos que $c(H_8(r_1, \dots, r_8)) \leq p(H_8(r_1, \dots, r_8)) \leq \max\{2p(H_{8-3}), p(H_{8-1}) + 1\} = \max\{2 \cdot 5, 8 + 1\} = 10 \leq q_8$.

Si $n = 9$, entonces $q_9 = \max\{2q_6, q_8 + 1\} = 12$. Luego, tenemos que $c(H_9(r_1, \dots, r_9)) \leq p(H_9(r_1, \dots, r_9)) \leq \max\{2p(H_{9-3}), p(H_{9-1}) + 1\} = \max\{2 \cdot 6, 10 + 1\} = 12 \leq q_9$.

Consideramos la hipótesis inductiva $p(H_{n-3}) \leq q_{n-3}$ y $p(H_{n-1}) \leq q_{n-1}$ para todo $9 < k < n$, luego $p(H_n(r_1, \dots, r_n)) \leq \max\{2p(H_{n-3}), p(H_{n-1}) + 1\} \leq \max\{2q_{n-3}, q_{n-1} + 1\} = q_n$.

Es fácil ver que $q_n = \max\{2q_{n-3}, q_{n-1} + 1\} = 2q_{n-3}$ para todo $n \geq 7$, de donde se deduce:

si $n \equiv 1(3)$, entonces $q_n = 2 \cdot q_{n-3} = 2^{\frac{n-1}{3}+1}$,

si $n \equiv 2(3)$, entonces $q_n = 2 \cdot q_{n-3} = 5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$,

si $n \equiv 0(3)$, entonces $q_n = 2 \cdot q_{n-3} = 3 \cdot 2^{\frac{n}{3}-1}$. □

Ahora si estamos en condiciones de probar nuestro resultado principal.

Teorema 4.1.13. *Sea $G = H_n(r_1, \dots, r_n) = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ un grafo de Hamming de dimensión n , con $n \geq 7$ y $r_i \geq 3$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Si $n \equiv 1(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = 2^{\frac{n-1}{3}+1}$.

Si $n \equiv 2(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = 5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$.

Si $n \equiv 0(3)$, entonces $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = 3 \cdot 2^{\frac{n}{3}-1}$.

Demostración. Por el lema 4.1.12 tenemos una cota superior para $c(H_n(r_1, \dots, r_n))$. Construiremos conjuntos de Carathéodory de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ del tamaño de la cota superior que tenemos para todo $n \geq 7$. Usaremos en reiteradas ocasiones el lema 4.1.2 pero no lo citaremos.

1. Caso $n \equiv 1(3)$

Sea $n = 3q + 1$ con $q \in \mathbb{N}$.

Construimos el conjunto $S^{(n)} = S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)}$; donde

$$S_1^{(n)} = \{(w_i^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_2^{(n)} = \{(w_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_3^{(n)} = \{(v_i^{(n)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_4^{(n)} = \{(v_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

con

$$w_1^{(7)} = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$w_2^{(7)} = (0, 1, 0, 0, 0)$$

$$w_3^{(7)} = (1, 2, 1, 1, 0)$$

$$w_4^{(7)} = (1, 2, 2, 1, 0)$$

$$v_1^{(7)} = (2, 2, 2, 2, 2)$$

$$v_2^{(7)} = (2, 2, 2, 1, 2)$$

$$v_3^{(7)} = (2, 1, 1, 0, 1)$$

$$v_4^{(7)} = (2, 1, 0, 0, 1)$$

y luego para todo $n \geq 10$ recursivamente construimos

$$w_i^{(n)} = (0, w_i^{(n-3)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1};$$

$$w_{2^{q-1}+i}^{(n)} = (1, v_i^{(n-3)}, 1, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1};$$

$$v_i^{(n)} = (2, v_i^{(n-3)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1} \text{ y}$$

$$v_{2^{q-1}+i}^{(n)} = (2, 1, w_i^{(n-3)}, 1), 1 \leq i \leq 2^{q-1}.$$

Vamos a probar que $S^{(n)}$ es un conjunto de Carathéodory de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ con $|S^{(n)}| = 2^{\frac{n-1}{3}+1}$.

En primer lugar, vamos a considerar los conjuntos de vértices $S_w^{(n)} = \{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\}$ y $S_v^{(n)} = \{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\}$ y la siguiente hipótesis que vamos a probar por inducción y consideramos verdadera para todo $7 \leq k < n$, $k \in \mathbb{N}$, $k \equiv 1(3)$.

H: { El conjunto de vértices $S_w^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_{n-3} \square 0$ y además todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-2})$, de cada componente conexa de $\mathcal{H}(S_w^{(n)} \setminus \{w_j^{(n)}\})$ para cada $1 \leq j \leq 2^q$, es tal que x_1 es constante y además $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$.

El conjunto de vértices $S_v^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $2 \square H_{n-3}$ y además todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-2})$, de cada componente conexa de $\mathcal{H}(S_v^{(n)} \setminus \{v_j^{(n)}\})$ para cada $1 \leq j \leq 2^q$, es tal que x_{n-2} es constante y además $x_{n-2} = 1$ o $x_{n-2} = 2$.

Probaremos primero el caso base para $n = 7$.

Observamos que $G[\mathcal{H}(\{w_1^{(7)}, w_2^{(7)}\})] = 0 \square K_{r_2} \square 0 \square 0 \square 0$ y $G[\mathcal{H}(\{w_3^{(7)}, w_4^{(7)}\})] = 1 \square 2 \square K_{r_3} \square 1 \square 0$; como $d(\mathcal{H}(\{w_1^{(7)}, w_2^{(7)}\}), \mathcal{H}(\{w_3^{(7)}, w_4^{(7)}\})) = 2$, entonces $G[\mathcal{H}(S_w^{(7)})] = H_4 \square 0$.

Además $S_w^{(7)}$ es un conjunto minimal de $H_4 \square 0$ ya que $G[\mathcal{H}(S_w^{(7)} \setminus \{w_i^{(7)}\})] = \{w_j^{(7)}\} \cup 1 \square 2 \square K_{r_3} \square 1 \square 0$ si $i = 1$ y $j = 2$, o $i = 2$ y $j = 1$, y $G[\mathcal{H}(S_w^{(7)} \setminus \{w_i^{(7)}\})] = 0 \square K_{r_2} \square 0 \square 0 \square 0 \cup \{w_j^{(7)}\}$ si $i = 3$ y $j = 4$, o $i = 4$ y $j = 3$. Queda claro que las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_w^{(7)} \setminus \{w_i^{(7)}\})]$ para todo $1 \leq i \leq 4$ están a distancia al menos 3 entre ellas. Observamos también que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_5)$, de cada componente conexa de $\mathcal{H}(S_w^{(7)} \setminus \{w_i^{(7)}\})$ para todo $1 \leq i \leq 4$, son tales que la coordenada x_1 es constante y es $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$.

Por otra parte, observamos que $G[\mathcal{H}(\{v_1^{(7)}, v_2^{(7)}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square K_{r_3} \square 2$ y $G[\mathcal{H}(\{v_3^{(7)}, v_4^{(7)}\})] = 2 \square 1 \square K_{r_3} \square 0 \square 1$; como $d(\mathcal{H}(\{v_1^{(7)}, v_2^{(7)}\}), \mathcal{H}(\{v_3^{(7)}, v_4^{(7)}\})) = 2$, tenemos que $G[\mathcal{H}(S_v^{(7)})] = 2 \square H_4$.

De manera similar a lo anterior, tenemos que $G[\mathcal{H}(S_v^{(7)} \setminus \{v_i^{(7)}\})] = \{v_j^{(7)}\} \cup 2 \square 1 \square K_{r_3} \square 0 \square 1$ si $i = 1$ y $j = 2$, o $i = 2$ y $j = 1$, y $G[\mathcal{H}(S_v^{(7)} \setminus \{v_i^{(7)}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square K_{r_4} \square 2 \cup \{v_j^{(7)}\}$ si $i = 3$ y $j = 4$, o $i = 4$ y $j = 3$. Tenemos que las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_v^{(7)} \setminus \{v_i^{(7)}\})]$ para todo $1 \leq i \leq 4$ están a distancia al menos 3 entre ellas. Observamos también que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_5)$, de cada componente

conexa de $\mathcal{H}(S_v^{(7)} \setminus \{v_i^{(7)}\})$ para todo $1 \leq i \leq 4$, son tales que x_5 es constante y $x_5 = 1$ o $x_5 = 2$. Con lo cual $S_v^{(7)}$ es un conjunto minimal de $2 \square H_4$.

Para todo $n > 7$ y $n \equiv 1(3)$ es decir, $n = 3q + 1$, $q \in \mathbb{N}$.

Vemos que los vértices como los definimos cumplen las hipótesis:

Usamos la H para $n - 3$ que dice $G[\mathcal{H}(S_w^{(n-3)})] = H_{n-6} \square 0$ y $G[\mathcal{H}(S_v^{(n-3)})] = 2 \square H_{n-6}$. Entonces nos queda $G[\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})] = 0 \square H_{n-6} \square 0 \square 0 \square 0$ y $G[\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})] = 1 \square 2 \square H_{n-6} \square 1 \square 0$. Como $d(\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}), \mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})) = 2$ tenemos que $G[\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\})] = H_{n-3} \square 0$. De la misma forma vemos que $G[\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square H_{n-6} \square 2$ y $G[\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})] = 2 \square 1 \square H_{n-6} \square 0 \square 1$. Como $d(\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}), \mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})) = 2$ tenemos que $G[\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\})] = 2 \square H_{n-3}$.

Por construcción, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_w^{(n)} \setminus \{w_j^{(n)}\})]$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$ son tales que $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$. Y, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_v^{(n)} \setminus \{v_j^{(n)}\})]$ para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que $x_n = 1$ o $x_n = 2$, con lo cual vale H para n .

Ahora probaremos que $S^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ con $|S^{(n)}| = 2^{\frac{n-1}{3}+1}$. Vemos que

$G[\mathcal{H}(S^{(n)})] = H_n(r_1, \dots, r_n)$, pues usando la H, sabemos que $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})] = H_{n-3} \square 0 \square 0 \square 0$ y $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})] = 2 \square H_{n-3} \square 2 \square 2$. Como $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)}), \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})) = 2$ tenemos que $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})] = H_n(r_1, \dots, r_n)$.

Además vemos que es minimal pues, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \setminus \{(w_j^{(n)}, 0, 0)\})]$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$, $x_{n-1} = 0$ y $x_n = 0$ y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})]$ son tales que $x_1 = 2$, $x_{n-1} = 2$ y $x_n = 2$, con lo cual $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \setminus \{(w_j^{(n)}, 0, 0)\}), \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})) \geq 3$, para $1 \leq j \leq 2^q$. Además obser-

vamos que, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \setminus \{(v_j^{(n)}, 2, 2)\})]$ para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que $x_{n-3} = 1$ o $x_{n-3} = 2$ y $x_{n-1} = 2$ y $x_n = 2$ y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})]$ son tales que $x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 0$ y $x_n = 0$, con lo cual $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)}), \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \setminus \{(v_j^{(n)}, 2, 2)\})) \geq 3$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$.

Entonces probamos que $S^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ de cardinal $2^{\frac{n-1}{3}+1}$. Además observamos que $(1, \dots, 1) \notin \mathcal{H}(S^{(n)} \setminus \{u\})$ para todo $u \in S^{(n)}$, por construcción de $S^{(n)}$, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $S^{(n)}$ son tales que $\{x_{n-1}, x_n\} \in \{0, 2\}$, entonces $(1, \dots, 1) \in \partial\mathcal{H}(S^{(n)}) = \mathcal{H}(S^{(n)}) \setminus \bigcup_{u \in S^{(n)}} \mathcal{H}(S^{(n)} \setminus \{u\})$, con lo cual $S^{(n)}$ es un conjunto de Carathéodory. Luego $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = 2^{\frac{n-1}{3}+1}$.

2. Caso $n \equiv 2(3)$

Cambia un poco la idea, pero es casi la misma. Para $n = 3q + 2$, $q \in \mathbb{N}$.

Nos formamos el conjunto cápsula convexa minimal de $H_n(r_1, \dots, r_n)$, $S^{(n)} = \{u_1^{(n)}\} \cup S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \cup \{u_2^{(n)}\}$; donde:

$$S_1^{(n)} = \{(0, w_i^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_2^{(n)} = \{(0, w_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_3^{(n)} = \{(v_i^{(n)}, 1, 2, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

$$S_4^{(n)} = \{(v_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 1, 2, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}$$

con:

$$u_1^{(8)} = (1, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$$

$$w_1^{(8)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$w_2^{(8)} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$w_3^{(8)} = (1, 2, 1, 1, 0, 0)$$

$$w_4^{(8)} = (1, 2, 2, 1, 0, 0)$$

$$v_1^{(8)} = (2, 2, 2, 2, 2, 0)$$

$$v_2^{(8)} = (2, 2, 2, 1, 2)$$

$$v_3^{(8)} = (2, 1, 1, 0, 1)$$

$$v_4^{(8)} = (2, 1, 0, 0, 1)$$

$$u_2^{(8)} = (2, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$$

y recursivamente nos construimos los vértices

$$u_1^{(n)} = (1, 2, \dots, 2, 0, 0, 0)$$

$$w_i^{(n)} = (0, w_i^{(n-3)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}$$

$$w_{i+2^{q-1}}^{(n)} = (1, v_i^{(n-3)}, 1, 0), 1 \leq i \leq 2^{q-1}$$

$$v_i^{(n)} = (2, 2, v_i^{(n-3)}, 2), 1 \leq i \leq 2^{q-1}$$

$$v_{i+2^{q-1}}^{(n)} = (2, 1, w_i^{(n-3)}, 1), 1 \leq i \leq 2^{q-1}$$

$$u_2^{(n)} = (2, 0, \dots, 0, 2, 2, 2)$$

Probamos que $S^{(n)}$ es un conjunto de Carathéodory de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ con $|S^{(n)}| = 5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$.

Vamos a considerar en este caso los conjuntos de vértices $S_w^{(n)} = \{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\}$ y $S_v^{(n)} = \{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^q\}$ y la siguiente hipótesis que probaremos que vale para todo n y consideraremos verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$, $8 \leq k < n$ y $k \equiv 2(3)$:

H: $\left\{ \begin{array}{l} \text{El conjunto de vértices } S_w^{(n)} \text{ es un conjunto cápsula convexa minimal de } H_{n-4} \square 0 \text{ y además todos los vértices, } x = (x_1, \dots, x_{n-3}), \text{ de cada componente conexa de } \mathcal{H}(S_w^{(n)} \setminus \{w_j^{(n)}\}) \text{ para cada } 1 \leq j \leq 2^q, \\ \text{es tal que } x_1 \text{ es constante y además } x_1 = 0 \text{ o } x_1 = 1. \\ \\ \text{El conjunto de vértices } S_v^{(n)} \text{ es un conjunto cápsula convexa minimal de } 2 \square H_{n-4} \text{ y además todos los vértices, } x = (x_1, \dots, x_{n-3}), \text{ de cada componente conexa de } \mathcal{H}(S_v^{(n)} \setminus \{v_j^{(n)}\}) \text{ para cada } 1 \leq j \leq 2^q, \\ \text{es tal que } x_{n-3} \text{ es constante y además } x_{n-3} = 1 \text{ o } x_{n-3} = 2. \end{array} \right.$

Probamos el caso base para $n = 8$.

De manera análoga a la del caso $n \equiv 1(3)$ para los $w_i^{(7)}$, ya que son los mismos vértices, tenemos que $\mathcal{H}(S_w^{(8)}) = H_4 \square 0$. Y $S_w^{(8)}$ es un conjunto minimal de $H_4 \square 0$.

También tenemos que $\mathcal{H}(S_v^{(8)}) = 2 \square H_4$. Y $S_v^{(8)}$ es un conjunto minimal de $2 \square H_4$.

Para todo $n > 8$ y $n \equiv 2(3)$ es decir $n = 3q + 2$, $q \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver que los vértices, $w_i^{(n)}, v_i^{(n)}$, como los definimos cumplen las hipótesis. Usamos la H para $n - 3$ que dice $G[\mathcal{H}(S_w^{(n-3)})] = H_{n-7} \square 0$ y $G[\mathcal{H}(S_v^{(n-3)})] = 2 \square H_{n-7}$.

Entonces observamos que

$G[\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})] = 0 \square H_{n-7} \square 0 \square 0 \square 0$, $G[\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})] = 1 \square 2 \square H_{n-7} \square 1 \square 0$. Como $d(\mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}), \mathcal{H}(\{w_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})) = 2$ tenemos que $G[\mathcal{H}(S_w^{(n)})] = H_{n-4} \square 0$. Además vemos que $G[\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square H_{n-7} \square 2$, $G[\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})] = 2 \square 1 \square H_{n-7} \square 0 \square 1$. Como $d(\mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\}), \mathcal{H}(\{v_i^{(n)} : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})) = 2$ tenemos que $G[\mathcal{H}(S_v^{(n)})] = 2 \square H_{n-4}$. Con lo cual se cumple la H.

Todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-3})$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_w^{(n)} \setminus \{w_j^{(n)}\})]$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$. Además observamos que, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-3})$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_v^{(n)} \setminus \{v_j^{(n)}\})]$ para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que, $x_{n-3} = 1$ o $x_{n-3} = 2$, con lo cual se cumple la H para todo n .

Ahora vemos que $G[\mathcal{H}(S^{(n)})] = H_n(r_1, \dots, r_n)$. Usando la H, sabemos que $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})] = 0 \square H_{n-4} \square 0 \square 0 \square 0$ y $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})] = 2 \square H_{n-4} \square 1 \square 2 \square 2$.

Vemos también que $d(\{u_1^{(n)}\}, (0, w_i^{(n)}, 0, 0)) \geq 3$ para todo $1 \leq i \leq 2^q$. También $d(\{u_1^{(n)}\}, \mathcal{H}(\{(0, w_i^{(n)}, 0, 0) : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})) \geq 3$ y $d(\{u_1^{(n)}\}, \mathcal{H}(\{(0, w_i^{(n)}, 0, 0) : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})) \geq 3$. Además $d(\{u_1^{(n)}\} \cup \mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})) = 2$, entonces $G[\mathcal{H}(\{u_1^{(n)}\} \cup S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})] = H_{n-3} \square 0 \square 0 \square 0$. Vemos que $d(\{u_2^{(n)}\}, (v_i^{(n)}, 1, 2, 2)) \geq 3$ para todo $1 \leq i \leq 2^q$,

$d(\{u_2^{(n)}, \mathcal{H}(\{(v_i^{(n)}, 1, 2, 2) : 1 \leq i \leq 2^{q-1}\})\}) \geq 3$, $d(\{u_2^{(n)}, \mathcal{H}(\{(v_i^{(n)}, 1, 2, 2) : 2^{q-1} + 1 \leq i \leq 2^q\})\}) \geq 3$ y $d(\{u_2^{(n)}, \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})\}) = 2$, entonces $G[\mathcal{H}(\{\{u_2^{(n)}\} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)}\})] = 2 \square H_{n-3} \square 2 \square 2$. Como $d(\mathcal{H}(\{\{u_1^{(n)}\} \cup S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)}\}), \mathcal{H}(\{\{u_2^{(n)}\} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)}\})) = 2$, tenemos que $G[\mathcal{H}(\{\{u_1^{(n)}\} \cup S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \cup \{u_2^{(n)}\} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)}\})] = H_n(r_1, \dots, r_n)$.

Además vemos que es minimal pues, todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \setminus \{(0, w_j^{(n)}, 0, 0)\})]$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$ son tales que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ o $x_2 = 1$, $x_{n-3} = 0$ o $x_{n-3} = 1$, $x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 0$ y $x_n = 0$, y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})]$, son tales que $x_1 = 2$, $x_{n-1} = 2$ y $x_n = 2$, con lo cual $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \setminus \{(0, w_j^{(n)}, 0, 0)\}), \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)})) \geq 3$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$. Además también vemos que $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \setminus \{(0, w_j^{(n)}, 0, 0)\}), \{u_k^{(n)}\}) \geq 3$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$ y para todo $1 \leq k \leq 2$.

Además observamos que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \setminus \{(v_j^{(n)}, 1, 2, 2)\})]$ para todo $1 \leq j \leq 2^q$, son tales que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ o $x_2 = 2$, $x_{n-3} = 1$ o $x_{n-3} = 2$, $x_{n-1} = 2$ y $x_n = 2$, y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $G[\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)})]$, son tales que $x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 0$ y $x_n = 0$, con lo cual $d(\mathcal{H}(S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)}), \mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \setminus \{(v_j^{(n)}, 1, 2, 2)\})) \geq 3$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$. Además observamos que $d(\mathcal{H}(S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)} \setminus \{(v_j^{(n)}, 1, 2, 2)\}), \{u_k^{(n)}\}) \geq 3$, para todo $1 \leq j \leq 2^q$ y para todo $1 \leq k \leq 2$.

Entonces probamos que $S^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ de cardinal $5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$. Además obsevamos que $(1, \dots, 1) \notin \mathcal{H}(S^{(n)} \setminus \{u\})$ para todo $u \in S^{(n)}$, ya que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $S^{(n)}$ son tales que $\{x_{n-1}, x_n\} \in \{0, 2\}$, entonces $(1, \dots, 1) \in \partial \mathcal{H}(S^{(n)}) = \mathcal{H}(S^{(n)}) \setminus \bigcup_{u \in S^{(n)}} \mathcal{H}(S^{(n)} \setminus \{u\})$, con lo cual $S^{(n)}$ es un conjunto de Carathéodory. Luego $c(H_n(r_1, \dots, r_n)) = 5 \cdot 2^{\frac{n-2}{3}-1}$.

3. Caso $n \equiv 0(3)$

Se prueba de manera casi análoga al caso $n \equiv 1(3)$.

Si $n = 3q$, $q \in \mathbb{N}$. Nos formamos el conjunto cápsula convexa minimal

de $H_n(r_1, \dots, r_n)$, $S^{(n)} = S_1^{(n)} \cup S_2^{(n)} \cup S_3^{(n)} \cup S_4^{(n)}$ con

$$S_1^{(n)} = \{(w_i^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}\}$$

$$S_2^{(n)} = \{(w_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}\}$$

$$S_3^{(n)} = \{(v_i^{(n)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}\}$$

$$S_4^{(n)} = \{(v_{2^{q-1}+i}^{(n)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}\}$$

donde:

$$w_1^{(9)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$w_2^{(9)} = (0, 1, 2, 2, 0, 0, 0)$$

$$w_3^{(9)} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

$$w_4^{(9)} = (1, 2, 2, 2, 2, 1, 0)$$

$$w_5^{(9)} = (1, 2, 0, 0, 1, 1, 0)$$

$$w_6^{(9)} = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$$v_1^{(9)} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

$$v_2^{(9)} = (2, 2, 2, 0, 0, 1, 2)$$

$$v_3^{(9)} = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2)$$

$$v_4^{(9)} = (2, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$v_5^{(9)} = (2, 1, 1, 2, 2, 0, 1)$$

$$v_6^{(9)} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$$

y construimos los vértices de la siguiente forma recursiva usando los de la cápsula convexa minimal de H_{n-3} para todo $n > 10$:

$$w_i^{(n)} = (0, w_i^{(n-3)}, 0, 0), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3};$$

$$w_{2^{q-1}+i}^{(n)} = (1, v_i^{(n-3)}, 1, 0), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}$$

$$v_i^{(n)} = (2, v_i^{(n-3)}, 2, 2), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}$$

$$v_{2^{q-1}+i}^{(n)} = (2, 1, w_i^{(n-3)}, 1), 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-3}$$

Probamos que $S^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_n(r_1, \dots, r_n)$ con $|S| = 3 \cdot 2^{\frac{n}{3}-1}$.

Vamos a considerar los conjuntos de vértices $S_w^{(n)} = \{w_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-2}\}$ y $S_v^{(n)} = \{v_i^{(n)} : 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^{q-2}\}$ y la siguiente hipótesis que probaremos que vale para todo n y suponemos que es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$, $9 \leq k < n$ y $k \equiv 0(3)$:

H: { El conjunto de vértices $S_w^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $H_{n-3} \square 0$ y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-2})$, de cada componente conexa de $\mathcal{H}(S_w^{(n)} \setminus \{w_j^{(n)}\})$, para cada $1 \leq j \leq 3 \cdot 2^{q-2}$, son tales que x_1 es constante y además $x_1 = 1$ o $x_1 = 0$.
El conjunto de vértices $S_v^{(n)}$ es un conjunto cápsula convexa minimal de $2 \square H_{n-3}$ y todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_{n-2})$, de cada componente conexa de $\mathcal{H}(S_v^{(n)} \setminus \{v_j^{(n)}\})$, para cada $1 \leq j \leq 3 \cdot 2^{q-2}$, son tales que x_{n-2} es constante y además $x_{n-2} = 1$ o $x_{n-2} = 2$.

Observamos que $G[\mathcal{H}(\{w_1^{(9)}, w_2^{(9)}, w_3^{(9)}\})] = 0 \square K_{r_2} \square K_{r_3} \square K_{r_4} \square 0 \square 0 \square 0$ y $G[\mathcal{H}(\{w_4^{(9)}, w_5^{(9)}, w_6^{(9)}\})] = 1 \square 2 \square K_{r_3} \square k_{r_4} \square K_{r_5} \square 1 \square 0$; como $d(\mathcal{H}(\{w_1^{(9)}, w_2^{(9)}, w_3^{(9)}\}), \mathcal{H}(\{w_4^{(9)}, w_5^{(9)}, w_6^{(9)}\})) = 2$, entonces $G[\mathcal{H}(S_w^{(9)})] = H_6 \square 0$, con lo cual cumple la H.

Además $\{S_w^{(9)}\}$ es un conjunto minimal de $H_6 \square 0$ ya que $G[\mathcal{H}(S_w^{(9)} \setminus \{w_i^{(9)}\})] = \{w_j^{(9)}\} \cup 1 \square 2 \square K_{r_3} \square k_{r_4} \square K_{r_5} \square 1 \square 0$ para todo $1 \leq i \neq j \leq 3$. Además $G[\mathcal{H}(S_w^{(9)} \setminus \{w_i^{(9)}\})] = 0 \square K_{r_2} \square K_{r_3} \square K_{r_4} \square 0 \square 0 \square 0 \cup \{w_j^{(9)}\}$ si $3 \leq i \neq j \leq 6$. Queda claro que las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_w^{(9)} \setminus \{w_i^{(9)}\})]$ para todo $1 \leq u \leq 6$, están a distancia al menos 3 entre ellas. Observamos también que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_7)$, de cada componente conexa de $G[\mathcal{H}(S_w^{(9)} \setminus \{w_i^{(9)}\})]$ para todo $1 \leq i \leq 6$, es tal que, x_1 es constante y además $x_1 = 0$ o $x_1 = 1$, y cumple la H.

Observamos ahora que, $G[\mathcal{H}(\{v_1^{(9)}, v_2^{(9)}, v_3^{(9)}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square K_{r_4} \square K_{r_5} \square K_{r_6} \square 2$ y $G[\mathcal{H}(\{v_4^{(9)}, v_5^{(9)}, v_6^{(9)}\})] = 2 \square 1 \square K_{r_3} \square k_{r_4} \square K_{r_5} \square 0 \square 1$; como $d(\mathcal{H}(\{v_1^{(9)}, v_2^{(9)}, v_3^{(9)}\}), \mathcal{H}(\{v_4^{(9)}, v_5^{(9)}, v_6^{(9)}\})) = 2$, entonces $G[\mathcal{H}(S_v^{(9)})] = H_6 \square 0$, con lo cual cumplen la H.

De manera similar al caso anterior, tenemos que $G[\mathcal{H}(S_v^{(9)} \setminus \{v_i^{(9)}\})] = \{v_j^{(9)}\} \cup 2 \square 1 \square K_{r_3} \square 0 \square 1$ si $1 \leq i \neq j \leq 3$ y además $G[\mathcal{H}(S_v^{(9)} \setminus \{v_i^{(9)}\})] = 2 \square 2 \square 2 \square K_{r_4} \square 2 \cup \{v_j^{(9)}\}$ si $i = 3$ y $4 \leq i \neq j \leq 6$. Tenemos que las componentes conexas de $G[\mathcal{H}(S_v^{(9)} \setminus \{v_i^{(9)}\})]$ para todo $1 \leq i \leq 6$, están a distancia al menos 3 entre ellas. Observamos también que todos los vértices, $x = (x_1, \dots, x_7)$, de cada componente conexa de $G[\mathcal{H}(S_v^{(9)} \setminus \{v_i^{(9)}\})]$ para todo $1 \leq i \leq 6$, son tal que, x_7 es constante y además $x_7 = 1$ o $x_7 = 2$. Con lo cual $S_v^{(9)}$ es un conjunto minimal de $2 \square H_6$.

Para $n > 9$ y $n \equiv 0(3)$, la demostración se sigue igual que en el caso $n \equiv 1(3)$.

□

Capítulo 5

Problemas abiertos y futuros trabajos

5.0.1. Problemas de cubrimientos y particiones de grafos con conjuntos convexos

En el capítulo 2 consideramos dos problemas de decisión asociados: en un caso, donde la entrada es solo un grafo G y, en el otro caso, donde la entrada es un grafo G y un número entero $p \geq 2$. En ambos casos, el problema de decisión es: ¿Tiene el grafo G un p -cubrimiento C -convexo (resp. p -partición C -convexa)? Estudiamos la complejidad computacional de los problemas de cubrir con conjuntos convexos y de particionar en conjuntos convexos los vértices de un grafo bajo la convexidad digital. Presentamos los resultados de la complejidad computacional de el problema de particionar los vértices de un grafo en conjuntos convexos bajo la P_3 -convexidad y bajo la P_3^* -convexidad, y también de la complejidad computacional de el problema de cubrir los vértices de un grafo con P_3 -conjuntos convexos. Nos quedaron algunos problemas abiertos para seguir estudiando que son:

- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene una p -partición d -convexa con $p \geq 3$. Si se asume que el grafo G es bipartito con diámetro al menos tres y fijamos $p = 2$, entonces el problema se puede resolver en tiempo polinomial, [35].

- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G y un entero p , el grafo G tiene una p -partición d-convexa.
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene un p -cubrimiento d-convexo para $p \geq 3$.
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene un p -cubrimiento P_3 -convexo para $p \geq 2$.
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene un p -cubrimiento P_3^* -convexo para $p \geq 2$.
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene un p -cubrimiento m-convexo para $p \geq 3$. Sabemos que el problema es polinomial si $p = 2$, [35].
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G y un entero p , el grafo G tiene una p -partición m-convexa.
- La complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene una 2-partición m-convexa. Sabemos que es NP-completo decidir si, dado un grafo G y un entero $p \geq 3$, el grafo G tiene una p -partición m-convexa, [35].

El último problema de la lista, encontrar la complejidad computacional del problema de decidir si, dado un grafo G , el grafo G tiene una 2-partición m-convexa, fue estudiado y resuelto en el año 2024 casi de manera simultánea por dos grupos distintos de investigadores, en los trabajos [9, 32] ambos llegan a que es polinomial y describen un algoritmo polinomial que encuentra la 2-partición.

5.0.2. Fórmulas para calcular parámetros

En el capítulo 3 encontramos una fórmula para calcular el número de P_3 -intervalo, otra para el número de P_3 -cápsula y otra para el tiempo de percolación bajo la P_3 -convexidad, para los grafos caterpillar. Encontramos también una fórmula para el tiempo de percolación de los grafos de intervalo

unitario, en términos del diámetro de un determinado grafo de intervalo unitario relacionado con él. Luego, presentamos una clase de grafos hereditarios para la cual el tiempo de percolación de cualquier grafo en la clase es 1. Nos queda por realizar un análisis sobre otras familias de grafos bien estructuradas que den lugar a fórmulas cerradas para algunos de los parámetros considerados.

- Realizar el análisis de los parámetros en la familia de los grafos de Kneser, donde el *grafo de Kneser*, $K(n, k)$, es el grafo cuyos vértices corresponden a los subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos, y donde dos vértices son adyacentes si y solo si los dos correspondientes conjuntos son disjuntos. En [38], Grippo y otros, estudian el número de P_3 -cápsula en los grafos de Kneser, pero quedan por estudiar los otros parámetros.
- También nos queda por estudiar los parámetros en otras convexidades.

5.0.3. Fórmulas para calcular parámetros en grafos de Hamming

En el capítulo 4, buscamos fórmulas cerradas para el número de Carathéodory en los grafos de Hamming. Calculamos una fórmula para calcular el número de Carathéodory bajo la P_3 -convexidad en los grafos de Hamming de dimensión menor a 7 y otra fórmula para cierta subfamilia de los grafos de Hamming de dimensión mayor o igual a 7, que cumplen que son el producto cartesiano de grafos completos de 3 o más vértices. Nos queda por resolver los problemas de:

- Encontrar una fórmula cerrada para número de Carathéodory en los hipercubos, que son los grafos de Hamming donde los completos son todos K_2 , problema que estamos estudiando pero todavía no pudimos resolver.
- Encontrar una fórmula cerrada para el número de Radon en los grafos de Hamming. El *número de Radon* $r(G)$ de un grafo $G = (V, E)$ es el

mínimo entero r tal que para todo $R \subset V(G)$ con $|R| \geq r$, R se puede particionar en dos conjuntos $R = R_1 \cup R_2$ tal que $H(R_1) \cap H(R_2) \neq \emptyset$.

- Encontrar una fórmula cerrada para el número de Helly en los grafos de Hamming. El *número de Helly* es el mayor entero k tal que toda familia de k conjuntos convexos mutuamente intersecantes tienen al menos un vértices en común.
- Encontrar una fórmula cerrada para el número de percolación en los grafos de Hamming.

Bibliografía

- [1] B. S. Anand, S.V. Chandran, M. Changat, M. C. Dourado, F. H. Nezhad and P. G. Narasimha-Shenoi. On the Carathéodory and exchange numbers of geodetic convexity in graphs, *Theoretical Computer Science*, 804, (2020), 46-57.
- [2] J. Araujo, V. Campos, D. Girao, J. Nogueira, A. Salgueiro and A. Silva. Cycle convexity and the tunnel number of links. (2020). arXiv preprint arXiv:2012.05656.
- [3] J. Araujo, G. Ducoffe, N. Nisse and K. Suchan. On interval number in cycle convexity. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 20(1), (2018), 1-28.
- [4] D. Artigas, S. Dantas and M. Dourado. Geodesic Convexity of graphs: partition and geodetic sets. *Cadernos do IME-Série Informática*, 47, (2022), 11–13.
- [5] D. Artigas and S. Dantas and M. C. Dourado and J. L. Szwarcfiter. Partitioning a graph into convex sets, *Discrete Math.*, *Discrete Mathematics*, 311, (2011), 17, 1968–1977.
- [6] D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado and J. L. Szwarcfiter. Convex covers of graphs, *Mat. Contemp.*, 39, (2010), 31–38.
- [7] R. M. Barbosa, E. M. M. Coelho, M. C. Dourado, D. Rautenbach and J. L. Szwarcfiter, On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three, *SIAM J. Discrete Math.*, 26(3), (2012), 929-939.

- [8] F. Benevides, V. Campos, M. C. Dourado, R. M. Sampaio and A. Silva. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: algorithmic aspects, *European J. Combin.*, 48, (2015), 88-99.
- [9] M. Bressan, E. Esposito and M. Thiessen. (2024). Efficient algorithms for learning monophonic halfspaces in graphs. *arXiv preprint arXiv:2405.00853*.
- [10] B. Brešar, M. Kovše and A. Tepeh. Geodetic sets in graphs. *Structural Analysis of Complex Networks*, (2011), 197-218.
- [11] B. Brešar and M. Valencia-Pabon. On the P_3 -hull number of Hamming graphs, *Discrete Applied Mathematics* (2019). <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.11.011>.
- [12] L. R. Bueno, L. D. Penso, F. Protti, V. R. Ramos, D. Rautenbach and U. S. Souza, On the hardness of finding the geodetic number of a subcubic graph, *Inform. Process. Lett.*, 135, (2018), 22-27.
- [13] Buzatu, Radu and Cataranciuc, Sergiu, Convex graph covers, *Comput. Sci. J. Moldova*, 23, (2015), 3, 251–269.
- [14] J. R. Calder. Some elementary properties of interval convexities. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3),(1971) 422-428.
- [15] M. R. Cappelle, E. M. M. Coelho, H. Coelho, B. R. Silva, F. Protti and U. S. Souza. P_3 -hull number of graphs with diameter two, In G. Coutinho, Y. Kohayakawa, V. F. dos Santos and S. Urrutia, editors, *Proceedings of the tenth Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, LAGOS 2019, Belo Horizonte, Brazil, June 2-7, 2019*, volume 346 of *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, Elsevier, (2019), 309-320.
- [16] M. T. Carvalho, S. Dantas, M. C. Dourado, D. F. D. Posner and J. L. Szwarcfiter. On the computational complexity of the Helly number in the P_3 and related convexities. In G. Coutinho, Y. Kohayakawa, V. F. dos Santos and S. Urrutia, editors, *Proceedings of the tenth Latin and*

American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, LAGOS 2019, Belo Horizonte, Brazil, June 2-7, 2019, volume 346 of Electron. Notes Theor. Comput. Sci., Elsevier, (2019), 285-297.

- [17] C. C. Centeno, S. Dantas, M. C. Dourado, D. Rautenbach and J. L. Szwarcfiter. Convex partitions of graphs induced by paths of order three, Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 12(5), (2010), 175-184.
- [18] C. C. Centeno, M. C. Dourado, L. D. Penso, D. Rautenbach and J. L. Szwarcfiter. Irreversible conversion of graphs, Theoret. Comput. Sci., 412(29), (2011), 3693-3700.
- [19] C. C. Centeno, L. D. Penso, D. Rautenbach and V. G. Pereira de Sá. Geodetic number versus hull number in P_3 -convexity, SIAM J. Discrete Math., 27(2), (2013), 717-731.
- [20] M. Changat and J. Mathew. On triangle path convexity in graphs. Discrete Mathematics, 206(1-3), (1999), 9195.
- [21] V. Chepoi. Separation of two convex sets in convexity structures. Journal of Geometry, 50, (1994), 30-51.
- [22] V. D. Chepoi, V. P. Soltan. Conditions for invariance of set diameters under d-convexification in a graph. Cybernetics, 19(6), (1983), 750-756.
- [23] E. M. M. Coelho, H. Coelho, J. R. Nascimento and J. L. Szwarcfiter. On the P_3 -hull number of some products of graphs, Discrete Appl. Math., 253, (2019), 2-13.
- [24] E. M. M. Coelho, M. C. Dourado, D. Rautenbach and J. L. Szwarcfiter. The Carathéodory number of the P_3 convexity of chordal graphs, Discrete Appl. Math., 172, (2014), 104-108.
- [25] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures, Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM Press (1971), 151-158

- [26] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein. Introduction to Algorithms, 3 edition, MIT Press and McGraw-Hill, (2010), (page 1049).
- [27] M. C. Dourado and R. A. de Oliveira. Complexity aspects of ℓ -chord convexities, *Discrete Appl. Math.*, 284, (2020), 585-591.
- [28] M. C. Dourado, F. Protti and J. L. Szwarcfiter. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12), (2010), 1268–1274.
- [29] M. A. Duarte, L. Penso, D. Rautenbach and U. d. S. Souza. Complexity properties of complementary prisms, *J. Comb. Optim.*, 33(2), (2017), 365-372.
- [30] M. E. Dyer and A. M. Frieze. Planar 3DM is NP-complete, *J. Algorithms*, 7, (1986), 2, 174–184.
- [31] P. Duchet. Convex sets in graphs. II. Minimal path convexity, *J. Combin. Theory Ser. B*, 44, (1988), 3, 307–316.
- [32] M. Elaroussi, L. Nourine and S. Vilmin. (2024). Half-space separation in monophonic convexity. *arXiv preprint arXiv:2404.17564*.
- [33] S. P. Franklin. Some results on order-convexity. *The American Mathematical Monthly*, 69(5), (1962), 357-359.
- [34] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, (1979), 28-28.
- [35] L. M. González, L. N. Grippo, M. D. Safe and V. F. dos Santos. Covering graphs with convex sets and partitioning graphs into convex sets, *Inform. Process. Lett.*, 158, (2020), 105944.
- [36] L. M. González, L. N. Grippo and M. D. Safe. Formulas in connection with parameters related to convexity of paths on three vertices: caterpillars and unit interval graphs. *Australasian J Comb.* 79: 401-423 (2021)

- [37] S. J. Goss and H. Harris. New method for mapping genes in human chromosomes. *Nature*, 255(5511), (1975), 680-684.
- [38] L. N. Grippo, A. Pastine, P. Torres, M. Valencia-Pabon and J. C. Vera. (2021). On the P_3 -Hull Number of Kneser Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, P3-32.
- [39] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar. *Handbook of Product Graphs*, CRC Press, Boca Raton, FL, (2011).
- [40] R. M. Karp. *Combinatorics. Complexity, and Randomness*. (1985) Turing Award Lecture.
- [41] R M. Karp. *Reducibility Among Combinatorial Problems, Complexity of Computer Computations*, New York: Plenum, (1972), 85-103.
- [42] D. Kempe, J. Kleinberg and E. Tardos. Maximizing the spread of influence through a social network. In *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, (2003, August), (pp. 137-146).
- [43] R. Laskar, J. Pfaff, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi. On the algorithmic complexity of total domination, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 5, (1984), 3, 420–425.
- [44] C. V. G. C. Lima, F. Protti, D. Rautenbach, U. S. Souza and J. L. Szwarcfiter. And/or-convexity: a graph convexity based on processes and deadlock models, *Ann. Oper. Res.*, 264(1-2), (2018), 267-286.
- [45] T. Marcilon and R. Sampaio. The maximum time of 2-neighbor bootstrap percolation: complexity results, *Theoret. Comput. Sci.*, 708, (2018), 1-17.
- [46] T. A. McKee and F. R. McMorris. *Intersection graph theory*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, (1999).

- [47] L. D. Penso, F. Protti, D. Rautenbach and U. dos Santos Souza. Complexity analysis of P_3 -convexity problems on bounded-degree and planar graphs, Theoret. Comput. Sci., 607(part 1), (2015), 83-95.
- [48] L. D. Penso, F. Protti, D. Rautenbach and U. D. S. Souza. Corrigendum to Complexity analysis of P_3 -convexity problems on bounded-degree and planar graphs, Theoret. Comput. Sci., 704, (2017), 92-93.
- [49] S. Poljak and M. Sura. On periodical behaviour in societies with symmetric influences. Combinatorica, 3(1), (1983), 119-121.
- [50] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential Operations in Digital Picture Processing, J. ACM, 13, 4, (1966), 471-494.
- [51] R. E. Tarjan. Decomposition by clique separators, Discrete Math., 55, (1985), 221-232.
- [52] J. V. C. Thompson, L. T. Nogueira, F. Protti, R. S. F. Bravo, M. C. Dourado and U. S. Souza. A general framework for path convexities, J. Comb. Optim., (2020). <https://doi.org/10.1007/s10878-020-00618-9>.
- [53] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proceedings, London Mathematical Society. (1936), 2(42):230-265.
- [54] V. B. Le and B. Randerath. On stable cutsets in line graphs, Theoret. Comput. Sci., 301, (2003), 463-475.
- [55] D. B. West. Introduction to graph theory (2nd edition), Pearson, (2000).
- [56] S. H. Whitesides. An algorithm for finding clique cut-sets, Inform. Process. Lett., 12, (1981), 31-32.