Universidad Nacional de General Sarmiento

Posibles errores en el aprendizaje de números reales a raíz del tratamiento propuesto en un texto de nivel secundario

Mariana Inés Tabare

Directora: Dra. Mabel Rodríguez

Memoria presentada para optar por el título Especialista en Didáctica de las Ciencias con orientación en Matemática.

Julio de 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO
Instituto del Desarrollo Humano
Especialización en Didáctica de las Ciencias con orientación en Matemática

Resumen

En este trabajo realizamos un análisis didáctico de la propuesta de un libro de texto de nivel secundario en relación al tema *números reales*, poniendo un especial énfasis en los *números irracionales*. A partir de dicho análisis buscamos identificar posibles errores que pueden producirse en los estudiantes originados por el tratamiento allí realizado. Es decir, nos centramos en las cuestiones teóricas y actividades que el texto propone pretendiendo identificar cómo a partir de lo que el libro muestra u omite se podrían promover concepciones erróneas en los estudiantes relacionadas a la comprensión del concepto de número real y, en particular, el de número irracional; así como también aquellos relacionados a la demostración y la imagen de la Matemática.

Realizamos un recorrido histórico sobre algunos aspectos presentes en el desarrollo del concepto de número real, poniendo el foco en el surgimiento de los números irracionales. Elaboramos un desarrollo matemático particular referido a $\sqrt{2}$, realizando una interpretación de este número a partir de áreas, construyendo su desarrollo decimal mediante distintos métodos y probando su irracionalidad.

Para el análisis didáctico, consideramos algunas herramientas que brindan el Enfoque Cognitivista y el Enfoque Ontosemiótico, así como también las nociones de errores, obstáculos (epistemológicos y didácticos) y validación. La importancia de este análisis radica en ofrecerle herramientas al profesor sobre los posibles errores que podrían cometer los estudiantes si se utilizara este texto sin un tratamiento adecuado.

Palabras claves: *número irracional, error, obstáculo, imagen conceptual, norma y argumentación.*

Abstract

In this paper we present a didactic analysis of a high school level textbook proposal in relation to the subject of real numbers, with special emphasis on irrational numbers. From this analysis we seek to identify possible errors that can occur in students due to the approach of the book. We focus on the theoretical aspects and the exercises that the textbook presents trying to identify, from what it shows or omits, how it could lead to misconceptions in students related to the understanding of the concept of real numbers and, in particular, irrational numbers; as well as those related to demonstration and the image of mathematics in general.

We conducted a historical overview of several aspects regarding the development of the concept of a real number, focusing on the emergence of irrational numbers. We developed a particular mathematical treatment referred to $\sqrt{2}$, in relation to areas, constructing its decimal expansion through different methods and proving its irrationality.

For the didactic analysis, we consider several tools that provide the Cognitivist Approach and Onto-Semiotic Approach, as well as notions of errors, obstacles (epistemological and didactic) and validation. The importance of this analysis lies on providing teachers with tools that they can use to detect potential mistakes students might make if this text is used without proper treatment.

Keywords: *irrational number, error, obstacle, conceptual image, norm and argumentation.*

Índice

1. Introducción

La experiencia docente, así como diversas investigaciones educativas (Crespo, 2009; Fischbein, Jehiam y Cohen, 1995; Sirotic y Zazkis, 2007) dan cuenta de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes sobre conceptos asociados a los números reales. Entre ellos son particularmente difíciles de ser aprendidos los números irracionales, la densidad, los desarrollos decimales, etc. Es sabido que sobre estos contenidos los estudiantes cometen errores sostenidamente y suele ser claro para el docente que no terminan de comprender algunos de estos conceptos.

En este trabajo analizamos la propuesta didáctica de un libro de texto de nivel secundario para el contenido de números reales, focalizando en los números irracionales, y mostramos cómo el tratamiento propuesto fomenta la construcción de concepciones erróneas alrededor de la irracionalidad. Por lo tanto, teniendo en cuenta el importante rol del libro como portador de saberes legalizados para ser enseñados y aprendidos, nos planteamos las siguientes preguntas que orientaron el trabajo: ¿en qué medida el docente debe estar alerta a la hora de seleccionar y usar un libro de texto? ¿qué errores en el aprendizaje de los números reales pueden ser inducidos desde la propuesta de un libro?

Los libros de texto tienen un papel muy importante en la educación, siendo útiles tanto para profesores como para alumnos y padres. El profesor puede utilizarlos como una herramienta en su labor de desarrollar y organizar los contenidos, los alumnos como un complemento de lo desarrollado en clase junto con los compañeros en el aula o individualmente en casa, y a los padres les puede servir de orientación en el seguimiento de las enseñanzas que reciben sus hijos, así como para permitirles colaborar en un determinado momento ante alguna dificultad en el proceso de aprendizaje de los mismos. En consecuencia, teniendo en cuenta que los libros de texto podrían ser utilizados por el docente como una herramienta de acompañamiento al estudiante en el proceso de aprendizaje, el análisis de éstos puede proporcionar conocimiento del enfoque de la Matemática que le subyace.

Desde la perspectiva constructivista, el aprendizaje se considera como un proceso de construcción activo y personal. El conocimiento es construido al activar estructuras cognitivas en la mente del individuo y se van transformando mediante la actividad educativa. Esta perspectiva asigna al profesor y, como consecuencia, al libro de texto en el que él se apoya, un papel relevante ya que permite, mediante la actividad didáctica llevada a cabo en el aula y fuera de ella, intervenir en el desarrollo cognitivo del alumno. Teniendo en cuenta esto último, resulta interesante analizar el tratamiento del contenido matemático realizado en un determinado libro de texto sobre una noción compleja como es la de números reales de la que sabemos que los estudiantes suelen manifestar dificultades en su aprendizaje. Aquí nos detenemos a examinar cómo a partir del tratamiento del contenido en un texto se podrían estar favoreciendo concepciones erróneas en los estudiantes.

En consecuencia, nos interesa analizar aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de número real, a la luz de algunos conceptos de la Didáctica de la Matemática, con el fin de identificar cómo pueden promoverse concepciones erróneas en los estudiantes a partir de lo que en el libro de texto se muestra u omite. Entendemos que este tipo de análisis aporta a la comprensión de los diversos errores que los alumnos manifiestan a la hora de construir el concepto de número real a la vez que es de utilidad

para los docentes pues estando advertidos de esto, podrían mejorar partes del texto o atender en la clase ciertas cuestiones clave.
Este trabajo se organiza del siguiente modo: comenzamos realizando un breve recorrido histórico sobre el surgimiento de los números irracionales seguido de un tratamiento matemático a un número irracional en particular $\sqrt{2}$. Dicho tratamiento consiste en interpretar a este número utilizando la noción de área, construir su desarrollo decimal mediante el Método de Bisección y el de Newton Raphson, seguido de distintas demostraciones de su irracionalidad.
Pretendiendo que el análisis realizado en este trabajo aporte a la reflexión sobre la enseñanza de los números reales, describimos algunos conceptos de los enfoques Cognitivista y Ontosemiótico, las nociones de errores, obstáculos (epistemológicos y didácticos) y validación. Esto último teniendo en cuenta que el análisis realizado al libro de texto será "a la luz" de estos elementos teóricos.
Finalmente, realizamos un análisis en términos didácticos de la propuesta de un libro de texto de nivel secundario sobre el tema números reales con el fin de identificar posibles errores que pueden producirse en los estudiantes originados por el tratamiento allí realizado.

2. Desarrollo histórico de números irracionales

2.1. *El problema de los inconmensurables*

Históricamente, los números irracionales surgen vinculados a la geometría (siglo IV a.C.), más precisamente asociados a las mediciones. Sin embargo, no es sino hasta el siglo XIX que comienzan a tener una identidad propia como números y a concebirse bajo el nombre de irracionales como actualmente los conocemos.
En época de los Pitagóricos se consideraba a los números como la esencia del Universo. Esto condujo a la creencia de la absoluta conmensurabilidad de los segmentos, es decir, en la existencia de una medida común para dos segmentos distintos cualesquiera que permite establecer entre ellos una proporción expresable al final como razón de números enteros (Jiménez, 2006). Esta creencia entra en crisis al descubrir que entre el lado de un cuadrado y su diagonal no hay un submúltiplo de ambos que pueda tomarse como unidad para medir a ambos segmentos, en otras palabras, se descubre que en el cuadrado la diagonal no es conmensurable con su lado y se denominan a estas magnitudes como *inconmensurables*.
Esta aparición de inconmensurables pone fin a las creencias filosóficas del número como esencia del universo y elimina la posibilidad de medir siempre con exactitud, marcando así un cambio de rumbo en la evolución de la geometría griega (González Urbaneja, 2008). Teniendo en cuenta que la teoría de las proporciones de los Pitagóricos se basaba en la conmensurabilidad, de repente queda invalidada una extensa parte de su geometría ya que se convierten en falsas o incompletas muchas suposiciones y demostraciones, acarreando de esta manera la primera crisis de fundamentos de la Historia de las Matemáticas.
Para los Pitagóricos todo procedía de la unidad y a ella se podía reconducir todo. Su orden estaba basado en la finitud, siendo cualquier número racional p/q retornable a la unidad pitagórica mediante operaciones de fragmentación y adición (González Urbaneja, 2008). Teniendo en cuenta esto, es comprensible la gran inquietud que introducen los

inconmensurables ya que se escapan al dominio de la unidad pitagórica. En consecuencia, se los consideró fuera del Logos[1] por ser algo ininteligible en la aritmética racional pitagórica produciéndose de esta manera un gran quiebre en su filosofía. De esta manera, la conmoción que produjo el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables fue tal que llegaron a plantearse la posibilidad de mantenerlos en secreto por el hecho de contradecir su doctrina.
Un hecho interesante de la Historia de las Matemática es que el problema de la inconmensurabilidad, al ser imposible de constatar sobre la figura de manera perceptiva, obliga a recurrir a argumentos teóricos, dando origen a demostraciones de tipo deductivas. Es decir, visualmente no se puede verificar que no siempre dos segmentos tienen una parte alícuota común por lo cual inevitablemente se tiene que recurrir a argumentos teóricos, de allí el estrecho vínculo con las demostraciones deductivas. De esta manera se establece un paradigma de actuación en la Matemática que nunca ha sido sustituido hasta ahora. Al respecto González Urbaneja (2008) menciona:

> A partir del descubrimiento de los inconmensurables, la demostración deductiva, con base en los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de la matemática, que renuncia a la experiencia física y a los datos aportados por los sentidos como base del conocimiento y establece un paradigma de actuación en esta ciencia que nunca ha sido sustituido hasta ahora. (p. 112)

Tal como vimos hasta el momento, el surgimiento de las magnitudes inconmensurables produjo un quiebre en las principales concepciones matemáticas y filosóficas de la Matemática griega. Pero esto no es todo, la no conmensurabilidad también enfrenta a los Pitagóricos a uno de sus miedos más profundos, el infinito (Jiménez, 2006).

2.2. La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$

Según Nápoles (2009), la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado de un cuadrado es una de las demostraciones matemáticas más antiguas de cuya calidad efectivamente demostrativa tenemos constancia (siglo V a. C.). La misma fue dada a conocer por Aristóteles en su obra "Primeros analíticos" (Lógica. Analítica Primera. Libro I, Cap. 23, 41a): "Se demuestra que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con los lados, mostrando que si se supone que es conmensurable, los números pares serán igual los números impares."
Esta prueba se desarrolla por el método de reducción al absurdo donde se niega la tesis y si asumiendo esto se arriba a una contradicción matemática o lógica se concluye que la tesis es verdadera.
Veamos en un lenguaje actual una aproximación a esta demostración:
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces tendremos dos números naturales p y q, con $q \neq 0$tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ y con M.C.D. $(p,q)=1$ (tener en cuenta que como $\frac{p}{q}$ es irreducible, p y q no pueden ser ambos pares).

[1] El término Logos en griego significa razón. Los inconmensurables fueron considerados fuera del Logos, -*alogon*-, ya que debido a su carácter ininteligible representaban la sinrazón.

Por lo tanto, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, $p^2 = 2q^2$. De esto último podemos observar que p^2 es un número par por contener al factor 2 y teniendo en cuenta la siguiente propiedad que dice que si p^2 es par (con p un número natural) entonces p es par[2], se concluye que p es un número par.

De esta manera, considerando la expresión $p^2 = 2q^2$ podemos observar que como$p$ es un número par también lo ha de ser entonces su cuadrado y por contener éste el factor 4, q^2 ha de contener el factor 2 y, por lo tanto, teniendo en cuenta la propiedad utilizada anteriormente podemos afirmar que también q es par. Luego, p y q son ambos pares, hemos llegado a una contracción ya que eran primos entre sí, esto implica la inexistencia de p y q.

Este es el máximo alcance que los griegos pudieron establecer mediante esta prueba indirecta. Recién en la moderna teoría de los números, Löwenhein (1946) demostró de manera directa un resultado paralelo (que la raíz cuadrada de un entero o es entero o es irracional), el cual es mucho más informativo e interesante (Nápoles Valdés, 1996).

2.3. La solución de Eudoxo al problema de la inconmensurabilidad

Teniendo en cuenta la crisis producida en la Matemática griega por la imposibilidad de medir de manera exacta algunas magnitudes geométricas surge la necesidad de realizar una revisión profunda de ciertos fundamentos de la matemática pitagórica.
Eudoxo de Cnido, uno de los matemáticos más importantes de la academia platónica, presenta una solución al problema de la inconmensurabilidad y el infinito mediante su Teoría de la Proporción al introducir la idea de "tan pequeño como se quiera" (González Urbaneja, 2008). Al respecto, Nápoles (1996) señala lo siguiente:

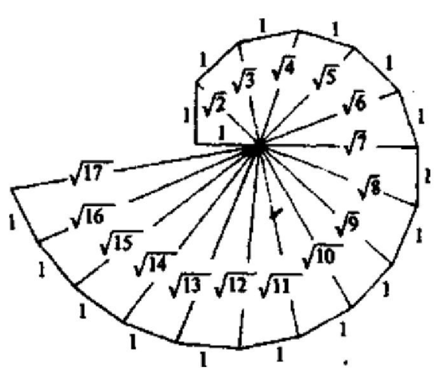
> El principio se formula en términos de magnitudes, no de números ya que tal como está formulado, tiene una aplicación general y se elimina el problema de tener que tratar con números irracionales: dada una línea cualquiera, por ejemplo, sea ésta racional o irracional, siempre es posible determinar cuál sea su mitad por medios puramente geométricos. (p. 76)

La solución que encontró Eudoxo consiste en un recurso que posee tres estadios: una definición, un axioma y un método. El primer estadio presenta una definición de igualdad de razones, que generaliza la noción pitagórica de proporción. El segundo consiste en el axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad, el cual prescinde del número irracional y opera con magnitudes que se hacen menores que otras arbitrariamente

[2]Propiedad *"Si p^2 es par (con p un número natural) entonces p es par"*
Demostración:
Si p no fuera par, entonces sería impar. En ese caso, p se podría escribir así:
$p = 2k + 1$, donde k es algún número natural.
Pero entonces, al elevarlo al cuadrado no puede ser par tampoco ya que $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4m + 1$ (siendo $m = k^2 + k$).
Luego, si $p^2 = 4m + 1$, es p^2 un número impar.
Por lo tanto p tiene que ser par porque si fuese impar su cuadrado también lo sería.

prefijadas. El último estadio es el Método mediante el cual se transforman en rigurosos los argumentos infinitesimales simplemente inductivos.
De esta manera, mediante la Teoría de la Proporción de Eudoxo, la Matemática griega logra hacerle frente a la dificultad existente de no poder expresar la razón de dos magnitudes inconmensurables ya que define la igualdad entre razones y no la razón en sí misma (González Urbaneja, 2008). Al no poder manejar numéricamente longitudes y áreas, los griegos comienzan a operan directamente con las figuras que se tratan como magnitudes. Así aparece el Álgebra Geométrica del Libro II de Los Elementos de Euclides como un algoritmo geométrico para resolver los problemas sin cálculo literal.
Para ellos los números son segmentos de recta y las operaciones se realizan mediante construcciones geométricas –la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto es el área del rectángulo de lados las longitudes de esos números y una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado de área igual a la de un rectángulo dado–. En las primeras diez proposiciones del Libro II, Euclides establece la equivalencia geométrica de las principales identidades algebraicas muy habituales en la práctica escolar. Las figuras geométricas que utiliza Euclides permiten utilizar el Álgebra Geométrica como un eficaz instrumento para la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante el método de la aplicación de las áreas, lo que supone que el Libro II juegue un papel fundamental en la Geometría griega.
En este sentido, podríamos decir que el álgebra geométrica viene a solucionar el problema de los inconmensurables y a través de ella se logra perpetuar la Matemática griego-helenística (Valdés, 2009).

Teodoro de Cirene fue otro matemático vinculado a la escuela platónica quien realizó grandes contribuciones al álgebra geométrica. Al respecto Nápoles (2009) señala que en el año 399 a. C. demuestra que las diagonales de los cuadrados de tres y cinco pies de superficie no son conmensurables con la longitud de los cuadrados de un pie de superficie y así fue sacando cada uno hasta el cuadrado de 17 pies. Es decir, Teodoro logró demostrar que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{17}$ son números irracionales. Si bien no se tienen pruebas acerca de cómo realizó la demostración, una suposición es que se detuvo en $\sqrt{17}$ porque su método consistía en una aplicación continua del Teorema de Pitágoras en triángulos en los cuales un cateto tenía como longitud la unidad y el otro $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y así sucesivamente. En la siguiente figura se puede observar la construcción en forma de espiral que podría explicar por qué terminó en $\sqrt{17}$.



Posterior a esto, los matemáticos griegos fueron estudiando inconmensurables más complicados pero nunca llegaron a tener la noción general de número irracional tal cómo se conoce actualmente.

2.4. De los griegos a Dedekind

Los griegos descubrieron la existencia de números inconmensurables en trabajos vinculados a la geometría y mediante construcciones con regla y compás trataron de brindar demostraciones que se fueron completando con el álgebra y finalmente con el análisis. La introducción del rigor en el análisis puso de manifiesto la falta de claridad y la imprecisión del sistema de los números reales, y exigía su estructuración lógica sobre bases aritméticas.
Según Nápoles (2009) el camino iniciado por Eudoxo se continuó recién en el siglo XIX con los trabajos del matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916), quien mediante las cortaduras que llevan su nombre permitió identificar a los números irracionales y sus propiedades. Si bien en el siglo XVI se comienza a considerar la idea de números decimales cuyas cifras se sucedan indefinidamente sin obedecer a ningún patrón no fue hasta el siglo XIX que los números irracionales comenzaron a tener identidad propia.
Dedekind abordó el continuo a través de un tratamiento puramente aritmético, en contraposición al geométrico que tenía desde la antigüedad griega (Nápoles, 2009). Mediante el concepto de *cortaduras* este matemático logra identificar a los números irracionales con ayuda de los racionales y formalizar sus propiedades. En su trabajo "*Continuidad y números irracionales*" (1872), publica cómo mediante "las cortaduras" en el dominio de los números racionales se generan los números irracionales marcando un punto culminante en el proceso de fundamentación del análisis (Valdés, 1996).
La fundamentación de los irracionales con ayuda de los racionales también se realizó por otra vía diferente, recorrida por Cantor (1883), el fundador de la teoría de conjuntos. Este matemático introdujo las ahora llamadas "sucesiones fundamentales" en el dominio de los racionales que al no tener un valor límite racional proporcionan los números irracionales, como por ejemplo la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Según Corry (1994) el concepto de cortadura de Dedekind se basa en la observación de que todo punto a de la recta la divide en dos partes de manera tal que otro punto de la recta está a la izquierda de a o a su derecha.

En este sentido, Pareja Heredia (2007) señala que el concepto de cortaduras pretende asociar a cada número real r el conjunto de los racionales menores a r y el conjunto de los racionales mayores a r, de esta manera resulta que uno de estos conjuntos tiene a r como cota superior y el otro lo tiene como cota inferior. En base al axioma de continuidad, este autor concluye que el extremo superior coincide con el extremo inferior, o sea r. De esta manera, se define al número real como el límite de sucesiones racionales que aproximan al real r por defecto y por exceso (Pareja Heredia, 2007).
Asimismo, las cortaduras de Dedekind no se limitan a una simple definición del sistema de los números reales, sino que mediante este concepto este matemático también fue capaz de definir y estudiar las propiedades de orden de los reales y sostener que las propiedades de aritmética de los reales son deducibles del mismo concepto (Corry, 1994).

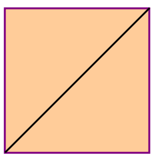
Tal como vimos, un real puede definirse como una suma infinita de racionales y, a su vez, puede aproximarse por defecto o por exceso tanto como se quiera utilizando como base la suma de racionales. De esta manera, se viene a resolver el problema filosófico iniciado por los pitagóricos de expresar a los irracionales en términos de racionales. Para que esto fuese posible fue necesaria la utilización del concepto de infinito actual, el cual difiere bastante al infinito potencial manejado por los griegos, concepto que poseía sólo una connotación simbólica a la cual nunca se puede acceder (Pareja Heredia, 2007). El infinito actual es ya, desde el tiempo de Cantor, un objeto matemático que permite manipularse a través de ciertas convenciones.

De esta manera se cierra un interesante capítulo de la Historia de la Matemática, en el cual participaron filósofos y matemáticos en un período de más de dos mil años llegándose a comprobar que los números reales tienen existencia fuera de la geometría y que se puede establecer una relación biunívoca entre puntos de una recta y números reales gracias a la geometría analítica.

Se cierra así el fugaz recorrido histórico realizado a lo largo de nociones matemáticas de alto nivel de abstracción que han sido fundamentales en el desarrollo de la Matemática. Es comprensible que su aprendizaje sea difícil por su lejanía a cuestiones intuitivas, por lo cual sería lógico pensar que un estudio de los procesos de construcción de un concepto con estas características puede ser un factor altamente positivo en la comprensión del mismo.

3. Elementos matemáticos sobre números irracionales

3.1. Existencia de $\sqrt{2}$: interpretación de $\sqrt{2}$ mediante el cálculo de áreas



Deseamos determinar la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1u.
Consideramos dos de estos cuadrados y observamos que quedan determinados cuatro triángulos isósceles (Fig. 1). Al disponer estos triángulos de la manera que muestra la Fig. 2 se forma un cuadrado cuyo lado tiene la medida de la diagonal de cuadrado original (lado 1 u).

Fig 1

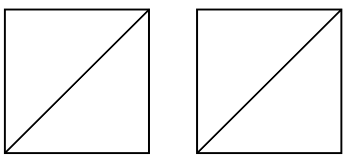
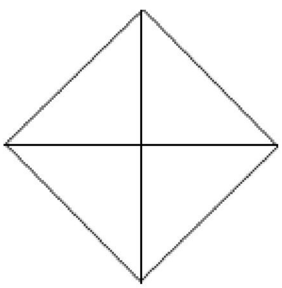
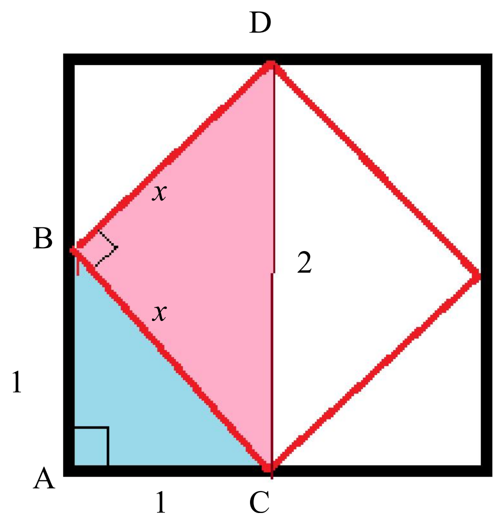


Fig 2



Observamos que el cuadrado de la figura 2 tiene área igual a la suma de las áreas de los cuadrados originales, cada uno de los cuales a su vez tiene área 1, de lo cual se deduce que el área es igual a 2. Se concluye que la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1u es igual a la medida del lado de un cuadrado cuya área es igual a 2, es decir, es un número positivo l que $l^2 = 2$, a ese número se lo define como raíz cuadrada de 2 y se escribe $\sqrt{2}$.

3.2. Existencia de $\sqrt{2}$ sin utilizar el Teorema de Pitágoras



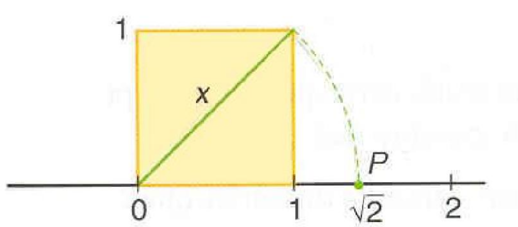
Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 u es equivalente determinar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden uno, para ello recurriremos a la semejanza de triángulos.
Consideremos a los triángulos ABC y CBD, por criterio
AA ambos semejantes ya que son triángulos rectángulos
isósceles (los ángulos correspondientes son iguales).
Planteando la proporcionalidad entre lados correspondientes
resulta:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x^2 = 2$$

El conjunto solución de esta ecuación está formado por números que elevados al cuadrado den por resultado dos, por definición ese número corresponde a la raíz cuadrada de dos o con su opuesto, es decir:

$x = \sqrt{2}$ ó $x = -\sqrt{2}$

Dado que la medida de la diagonal es positiva, la única solución posible es $x = \sqrt{2}$.
Una vez más, pero esta vez sin recurrir al teorema de Pitágoras, se concluye que la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 u es igual a un número positivo cuyo cuadrado es igual a 2. Tal como vimos, a este número se lo designa con el símbolo $\sqrt{2}$.
De esta manera, la Geometría nos brinda la primera aproximación para la raíz cuadrada de dos al trasladar la diagonal del cuadrado de lado unidad sobre la recta numérica.
Con el compás se toma la longitud de la diagonal y se la marca en la recta como se ve en la figura.



De esta manera, tenemos un modo de ubicar en la recta real a $\sqrt{2}$ aunque no se conozca su valor exacto. Desde el punto de vista práctico, se puede notar que 1 el valor exacto de $\sqrt{2}$ es un número entre 1 y 2, teniendo así un primer acercamiento a su expresión decimal.

3.3. *Desarrollo decimal de* $\sqrt{2}$

Con el fin de conocer con más precisión al número $\sqrt{2}$, estudiamos el siguiente problema: determinar la(s) solución(es) positiva(s) de $x^2 - 2 = 0$. Para ello estamos considerando en este apartado ideas expresadas en Matera (2012).

En primer lugar, observamos que solo puede tener una solución positiva, dado que si α, β son posibles soluciones positivas distintas, supongamos $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$, con lo cual solo una de ellas puede ser solución. Por lo tanto, nos interesa indagar acerca de la solución positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ que, tal como "sabemos", es $x = \sqrt{2}$. Es más, de esta manera se define habitualmente a $\sqrt{2}$: la única solución positiva de $x^2 - 2 = 0$. Sin embargo, desde el punto de vista práctico esta solución podría resultar poco significativa ya que simplemente hemos utilizado un símbolo para denotar la solución que estamos buscando (Matera, 2012).

Con el objetivo de "resolver de manera exacta" esta ecuación podríamos preguntarnos si existe un número racional positivo α tal que $\alpha^2 - 2 = 0$. Según el criterio de Gauss, si *a/b* es una raíz racional del polinomio $x^2 - 2$ con (*a, b*) = 1, entonces *b* divide a 1 y *a* divide a 2, lo cual nos deja a *a/b* = ±1, ±2 como únicas posibles raíces racionales. Resulta evidente que ninguno de estos valores es raíz de $x^2 - 2$ por lo cual podemos concluir que la solución no es un número racional.

Surge entonces naturalmente la idea de aproximar la solución (evidentemente irracional) de la ecuación, supuesto que ésta existe. Tomaremos el éxito de tales estrategias de aproximación como una indicación "efectiva" de la existencia de una solución del problema que consideramos.

3.3.1. *Una aproximación de* $\sqrt{2}$*: Método de bisección*

Suponiendo que la ecuación tiene solución, observamos que ésta es mayor que 1 y menor que 2, dado que $1^2 < 2 < 2^2$ y g(x) = x^2 es una función (estrictamente) creciente en los positivos. Además, *f (1) < 0 y f (2) > 0,* con lo cual sería "esperable" que hubiera una solución α con 1 ≤ α ≤ 2, es decir, en el intervalo "inicial" $I_0 := [a_0; b_{0=}] := [1;2]$.

Como aproximación inicial, vamos a elegir (arbitrariamente) al punto medio $c_0 := (a_0 + b_0)/2 = 1{,}5$ de I_0. Gracias a esta elección, tenemos la siguiente estimación del error | α - c_0 | que cometemos al aproximar a por c_0: | α - c_0 | ≤ 0,5.

A fin de mejorar nuestra aproximación inicial c_0, vamos a refinar I_0 sucesivamente con intervalos más chicos I_n que contengan siempre una solución de la ecuación, de manera que "colapsen" a un punto. Si c_n es el punto medio de I_n para cada n en N, es de esperar que c_n aproxime nuestra solución a medida que crece *n*.

Para esto, aplicamos un proceso conocido como bisección: dividimos a I_0 "por c_0", y nos quedamos con la mitad izquierda $[a_0; c_0]$, o derecha $[c_0; b_0]$, según sea el caso, en la cual la función f cambia de signo. En este caso f (c_0) > 0, con lo cual definimos $I_1 = [a_1; b_1] :=$ [1; 1,5]. Como antes, nuestra nueva aproximación es $c_1 := (a_1 + b_1)/2 = 1{,}25$, y tenemos

que |a - c_1 |< 0,25. En la siguiente etapa, aplicamos la misma idea a I_1: dado que c_1 = ($a_1 + b_1$)/2 = 1,25 y f (c_1) < 0, definimos $I_2 = [a_2;b_2] := [c_1;b_1]$. Este proceso puede proseguirse indefinidamente, obteniendo de esta manera valores c_n que aproximan cada vez más a la solución de la ecuación.
Los primeros 10 intervalos con sus correspondientes puntos medios están tabulados en la tabla 1.

Tabla 1. *El método de bisección aplicado a* x^2 - 2 = 0

n	*An*	*Bn*	*Cn*	$f(c_n)$
0	1.00000000000	2.00000000000	1.50000000000	0.250000000
1	1.00000000000	1.50000000000	1.25000000000	-0.437500000
2	1.25000000000	1.50000000000	1.37500000000	-0.109375000
3	1.37500000000	1.50000000000	1.43750000000	0.066406250
4	1.37500000000	1.43750000000	1.40625000000	-0.022460938
5	1.40625000000	1.43750000000	1.42187500000	0.217285160
6	1.40625000000	1.42187500000	1.41406250000	-0.000427246
7	1.41406250000	1.42187500000	1.41796875000	0.010635376
8	1.41406250000	1.41796875000	1.41601562500	0.005100250
9	1.41406250000	1.41601562500	1.41503906250	0.002335547
10	1.41406250000	1.41503906250	1.41455078125	0.000953913

La cuarta columna (donde los resultados han sido redondeados a 9 dígitos decimales) es fundamental para verificar que efectivamente estamos aproximando $\sqrt{2}$. Lo único que sabemos de $\sqrt{2}$ es que es la (hipotética) solución positiva de la ecuación, y en tal sentido, el hecho que las entradas en la cuarta columna van progresivamente acercándose a 0 es una fuerte indicación de que c_n va aproximándose sucesivamente a α, aunque esta percepción no es suficiente justificación, como bien sabemos.
Por lo tanto, tenemos que mediante el método de bisección hemos producido una sucesión de intervalos (con extremos racionales) $(I_n)_{n \in N}$ encajados, es decir, tales que $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $b_n - a_n = 2^{-n}$ para cada $n \geq 0$ dado que $b_0 - a_0 = 1$ y la longitud de cada nuevo intervalo $I_n := [a_n, b_n]$ es la mitad del anterior,
2. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ dado que la elección de I_n se realiza de forma tal que $a_n^2 - 2 < 0 < b_n^2 - 2$.

A fin de justificar los argumentos dados sobre la convergencia de la sucesión $(c_n)_{n\in N}$ de puntos medios a la solución positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, realizamos el siguiente análisis:
Siendo a_n, b_n y c_n racionales positivos tales que $a_n < c_n < b_n$ y $f(x) = x^2 - 2$ una función estrictamente creciente en los positivos, deducimos que

$$a_n^2 - 2 < c_n^2 - 2 < b_n^2 - 2.$$

Dado que $a_n^2 - 2 = f(a_n) < 0$ y $b_n^2 - 2 = f(b_n) > 0$, concluimos que

$|c_n^2 - 2| < máx\{b_n^2 - 2,\ a_n^2 - 2\} \le b_n^2 - 2 + 2 - \ a_n^2 = b_n^2 - \ a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n).$

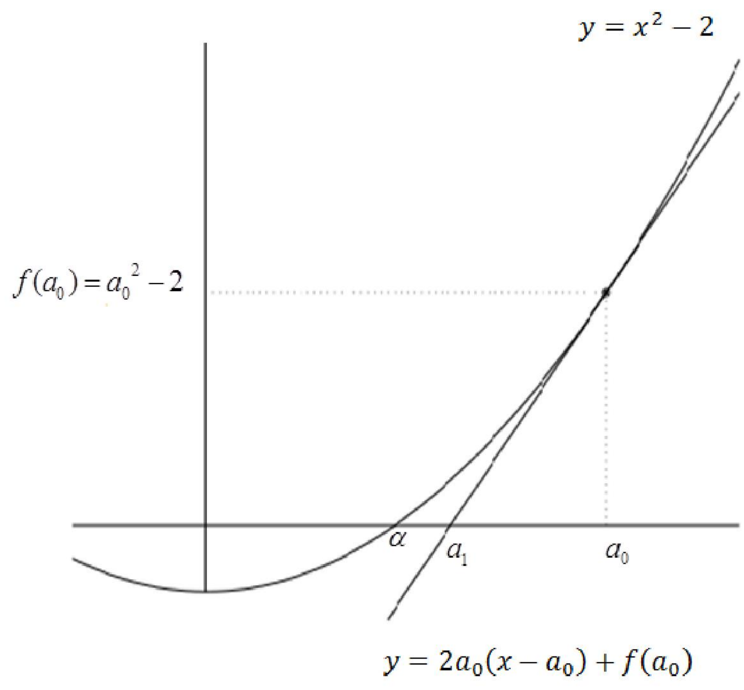
Por otro lado, la suma $a_o + b_0$ es igual a 3, en tanto que $a_n \le b_n \le 1{,}5$ para $n \ge 1$. En consecuencia, $a_n + b_n \le 3$ para cada $n \ge 0$. Concluimos que $|c_n^2 - 2| \le 3$ para cada $n \ge 0$. Concluimos que $|c_n^2 - 2| \le 3/2^n$, es decir, tenemos el siguiente resultado.

Lema: La estimación $|c_n^2 - 2| \le 3.2^{-n}$ es válida para cada $n \ge 0$.

De este resultado deducimos que el valor absoluto de $f(c_n)$ puede hacerse "tan chico como uno quiera" con tal de tomar *n* suficientemente grande.

3.3.2. Otra aproximación de $\sqrt{2}$: Método de Newton Raphson

En esta sección desarrollamos un método alternativo que permite obtener una aproximación de la solución positiva (a la que llamaremos α) de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, tan precisa como sea necesario. El método tiene una geometría sencilla, como se observa a continuación:



Se comienza por suponer que se tiene una aproximación inicial a_0 de la solución α de la ecuación. El método consiste en reemplazar la función $f(x) = x^2 - 2$ por una función lineal que la aproxime para valores del dominio "cercanos" a a_0, y buscar la raíz a_1 de esta última. Esta idea de "linealizar", es decir, de reemplazar un problema no lineal por uno lineal, es una estrategia de aproximación general, que en particular nos va a conducir a la deducción del conocido método de Newton Raphson.
Veamos, en primer lugar, cómo obtener la recta que utilizaremos para aproximar la parábola; para ello conviene reinterpretar nuestro problema en términos geométricos. La solución positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ puede ser vista como el lado de un cuadrado cuya área es 2; además, resultará útil observar que aproximar el gráfico de $y = x^2$ por una recta, alrededor de un punto cercano a la solución, es equivalente a aproximar el valor de la fórmula por el valor obtenido mediante el reemplazo en la recta. En otras palabras, en vez de aproximar la curva por una recta tenemos que aproximar la fórmula por una función lineal, aproximación que puede obtenerse directamente del modelo geométrico propuesto. Consideremos un cuadrado de longitud $L + \delta$. Su área es $(L+\delta)^2 = L^2 + 2L\delta + \delta^2$ que, para valores pequeños de δ, ofrece la aproximación requerida: $(L+\delta)^2 = L^2 + 2L\delta$ aproximación que resulta lineal en el incremento δ.
Supongamos que partimos de una solución aproximada del problema, digamos $a_0 = 1{,}5$. Si expresamos a α en términos de la aproximación a_0 y el error e_0 que cometemos en dicha aproximación, es decir, $\alpha = a_0 + e_0 = 1{,}5 + e_0$, entonces $\alpha^2 = (1{,}5 + e_0)^2 = 2$.
Aplicando la fórmula aproximada **1** tenemos que

$$2 \approx 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot e_0. \qquad \boxed{\mathbf{1}}$$

de donde obtenemos la aproximación

$$e_0 \approx -\frac{1{,}5^2 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = -\frac{f(1{,}5)}{2 \cdot 1{,}5} = -\frac{f(a_0)}{2a_0}$$

Finalmente, la nueva aproximación a_1 de la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ será

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{2a_0} = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{a_0}.$$

Prosiguiendo el argumento, sería esperable obtener una mejor aproximación que a_1 por medio de $a_2 := \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1}$, y así sucesivamente. De esta manera, obtenemos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ definida de la siguiente manera, comenzando en $a_0 := 1{,}5$:

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

que esperamos que converja a la hipotética solución α de la ecuación.
Lo que hicimos hasta el momento de un modo geométrico es exactamente haber considerado la recta tangente a la gráfica de la función en el punto.

Cuadro 2: *El método Newton Raphson aplicado* a $x^2 - 2 = 0$.

n	a_n	$f(a_n)$
0	1.50000000000000	0.250000000
1	1.41666666666667	0.006944444
2	1.41421568627451	0.000006007
3	1.41421356237469	0.000000000
4	1.41421356237309	0.000000000
5	1.41421356237309	0.000000000
6	1.41421356237309	0.000000000

Observamos que sólo 4 iteraciones del método –representado por los valores de la primer columna– son necesarias para conseguir una valor a_3 que se "comporta como una raíz de *f*", en el sentido que $f(a_3)$ redondeado a 9 dígitos decimales, es 0. Más no podemos pretender, en una cantidad finita de pasos logramos que los resultados se repitan, ofreciendo un valor que sin ser el de la solución verdadera se le parece bastante.

3.4. La irracionalidad de $\sqrt{2}$

En el apartado correspondiente al desarrollo histórico se realizó una demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. A continuación se presentan dos demostraciones alternativas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que se suman a la anterior.

3.4.1. Una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces existen dos números naturales a y b tales que $a^2 = 2b^2$.

Si descomponemos a^2 en factores primos es claro que aparecerán los factores de a pero duplicados. Y lo mismo ocurrirá con b^2. Sin embargo, en la expresión $2b^2$ hay un 2 desparejado. Contradicción, que parte de suponer que $\sqrt{2}$ era racional.

3.4.2. Otra demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, existen a y b números enteros tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\boxed{\mathbf{1}}$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b > 0$. Al elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad anterior se cumple que:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 2b^2 = a^2$$

Luego, restando "*ab*" en cada miembro se obtiene:

$$a^2 - ab = 2b^2 - ab \Rightarrow a(a-b) = b(2b-a) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b} \qquad \boxed{\mathbf{2}}$$

Por **1** y **2**, se cumple que: $\sqrt{2} = \dfrac{2b-a}{a-b}$

Por otra parte, siendo $p = 2b - a$ y $q = a - b$ tenemos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow 1 < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{p}{q} < 2 \Rightarrow q < p < 2q \Rightarrow 0 < p - q < q$$

Luego, hemos encontrado otra fracción para $\sqrt{2}$ cuyo denominador es un entero positivo, menor al inicial. Repitiendo este procedimiento podemos construir una sucesión de números enteros positivos decreciente, formada por los denominadores de cada una de las fracciones. Sin embargo, esto es imposible pues contradice el principio de buena ordenación, que dice que todo subconjunto no vacío de números enteros positivos tiene un primer elemento.

La contradicción vino de suponer que $\sqrt{2}$ era un número racional.

4. Elementos teóricos de Didáctica de la Matemática

4.1. *Los obstáculos en el aprendizaje matemático como origen del error*

La presencia de dificultades y errores en la adquisición y en el desarrollo del conocimiento es una constante a lo largo de la historia. Sin embargo, la manera de actuar ante estas dificultades y errores ha estado en continuo cambio y evolución.

El avance de la ciencia, como modelo indiscutible de fiabilidad y de verdad, ha estado plagado de conocimientos incompletos, insuficientes, deficientes y erróneos. En consecuencia, la preocupación sobre el papel central que tienen las ideas equivocadas en la evolución de la ciencia ha estado y está presente de forma constante.

Sócrates ya afirmó que "todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la fiabilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva (…); si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica" (Rico, 1995, p.2).

El filósofo francés Gastón Bachelard (1938) introduce por primera vez el concepto de obstáculo en el contexto de las ciencias experimentales, bajo la denominación de *obstáculo epistemológico*, para dar una explicación a los errores que aparecen en forma inevitable en el progreso de la ciencia.

Los diferentes enfoques del constructivismo coinciden en que el conocimiento es construido mediantes estructuras cognitivas que se activan en la mente del individuo y se van transformando mediante la actividad educativa. Las dificultades y errores aparecerán en el proceso de construcción del conocimiento debido al conflicto producido entre el antiguo y el nuevo conocimiento. Por lo tanto, resulta necesario incluir el diagnóstico de errores, su detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan la práctica evaluadora del profesor y el ejercicio autocrítico por los propios alumnos (Rico, 1995).

Si se pone el centro de atención en el aprendizaje de la Matemática, la mayoría de los autores aseguran que los errores no se producen de manera accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas por los alumnos en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de sus experiencias previas en la materia (Socas, 2007). Según este autor, es necesario diagnosticar los errores de los alumnos con el fin de poder diseñar procedimientos y remedios que los ayuden en la corrección de dichos errores.

Teniendo en cuenta que los errores se comenzaron a considerar consustanciales a los procesos de enseñanza y aprendizaje, surgió la necesidad de indagar sobre los equívocos de los alumnos, pero no solo a través de su clasificación, sino profundizando en su pensamiento durante el proceso de construcción de los objetos matemáticos.

Es importante considerar aquellos errores motivados por los distintos elementos del proceso educativo, como por ejemplo la propuesta didáctica del docente o libro de texto, el currículum, etc. El estudio de errores no se centra únicamente en las producciones de los alumnos, también lo hace en los procesos de enseñanza-aprendizaje y en todos los elementos que intervienen en ambos.

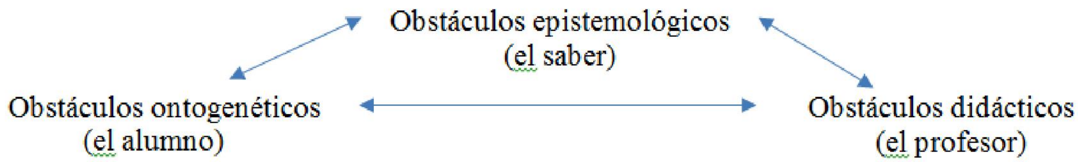
Respecto al origen de los errores en el aprendizaje de la Matemática, Socas (2007) sostiene que éstos aparecen en los alumnos cuando han de resolver nuevos problemas que los obligan a hacer una revisión o re-estructuración de los conocimientos que tienen adquiridos. Se consideran tres ejes de análisis en el origen de los errores que cometen los alumnos: debidos a un obstáculo, motivados por una ausencia de sentido o producidos por actitudes afectivas y emocionales (Socas, 1997).

Como se ha mencionado anteriormente, la noción de obstáculo fue introducida por primera vez por Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y enmarcada en el concepto de *obstáculo epistemológico.* Este concepto es retomado por Guy Brousseau en Didáctica de la Matemática, adaptándolo al contexto de la enseñanza. La redefinición de dicho concepto se produce en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas tratando de determinar las causas que conducen a los errores de aprendizaje.

Al respecto, Brousseau (1983) menciona que los obstáculos epistemológicos no están asociados necesariamente a conocimientos erróneos sino a tipos de conocimientos que están obstaculizando la construcción de otros nuevos. En este sentido, el error se produce como efecto de un conocimiento que, a pesar de aceptarse como adecuado en un momento, resulta falso en un nuevo contexto. Dicho de otra manera, un conocimiento que era funcional en un contexto puede resultar disfuncional dentro de otro más amplio convirtiéndose así en un obstáculo. Para Brousseau, los errores de este tipo no son erráticos e impredecibles sino más bien son considerados como manifestaciones de obstáculos.

En este sentido, se tiene que los nuevos obstáculos, antes conocimientos, se deben a la interacción del alumno con el *medio* en una situación que hace que esos antiguos conocimientos que eran correctos en un determinado dominio resultan erróneos en el nuevo problema planteado (Brousseau, 1983).

Este autor distingue tres obstáculos diferentes teniendo en cuenta si el origen está en el alumno, el profesor o el saber. Lo hace de la siguiente manera:



Los *obstáculos de origen ontogenético* son los que se deben a las limitaciones y características propias del alumno. Los *obstáculos de origen didáctico* son los vinculados a la metodología que caracterizó a la enseñanza, entre los cuales se incluyen las elecciones que realiza el profesor en el momento de plantear la situación de enseñanza. Por último, los *obstáculos de origen epistemológico*, tal como se ha mencionado anteriormente, son los relacionados con la dificultad intrínseca del concepto matemático. Este tipo de obstáculo es inherente a la noción a la que se refiere y se puede rastrear a lo largo de la Historia de la Matemática. En este sentido, es posible hallar los obstáculos que se han presentado en la comunidad de matemáticos de una determinada época y las vías que se han buscado para superarlos, tarea que suelen llevar a cabo los investigadores que se dedican a la Historia de la Matemática y que produce resultados muy valiosos para la Educación Matemática.
Según Brousseau (1989), para poder calificar a una concepción que produce errores en los alumnos bajo el concepto de *obstáculo* se deben cumplir las siguientes condiciones:

a) Ser un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
b) Producir respuestas ciertas en determinado contexto pero falsas fuera de dicho contexto.
c) Resistir a las contradicciones con las que se confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor.
d) Aún después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose.

Resulta interesante estudiar las condiciones que cumplen las situaciones o problemas propuestos al estudiante que favorecen la aparición, el funcionamiento y el resultado de esas concepciones erróneas, de esta manera explicitar los obstáculos que podrían presentarse en los alumnos con el objetivo de superarlos.

4.2. Elementos teóricos del Enfoque Cognitivista

Dentro de la Didáctica de la Matemática el Enfoque Cognitivista se basa en una visión constructivista del conocimiento individual, siendo algunos de sus elementos de análisis las representaciones o esquemas mentales de objetos matemáticos y el aprendizaje significativo, entendido como proceso mediante el cual un nuevo contenido se integra a un esquema cognitivo ya existente en la mente del individuo (Font, 2002).
Uno de los propósitos del Enfoque Cognitivista es el estudio de las representaciones mentales que un estudiante puede tener sobre objetos matemáticos. Enmarcados en este enfoque mencionamos dos líneas: el Pensamiento Matemático Avanzado y la Teoría APOS (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas).
En el pensamiento Matemático Avanzado (PMA) consideramos los aportes de Tall y Vinner (1981), quienes mencionan que cuando el alumno escucha o ve el nombre de un concepto, algo es evocado en su memoria pero que aquello que evoca no es la definición

del concepto sino algo que denominaron *imagen conceptual.* Introducen esta noción para describir "a la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye a todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 151).

Para estos autores las representaciones visuales tienen un predominio por sobre las verbales, por tal motivo ante un determinado concepto llegarán primero a la mente del alumno las representaciones visuales y/o expresiones relacionadas con el mismo, y posteriormente podrá expresarlo en forma verbal (Font, 2002).

Tall y Vinner distinguen la imagen conceptual de la *definición conceptual*, entendiendo esta última como el conjunto de palabras usadas para especificar un concepto (Font, 2002). En la estructura cognitiva ambas se encuentran en dos celdas distintas que pueden interactuar o no. Teniendo en cuenta que la imagen conceptual no necesariamente refleja todos los aspectos de la definición conceptual el comportamiento deseable es que imagen y definición actúen de manera complementaria para producir una respuesta (Tall y Vinner, 1981).

La Teoría APOS, desarrollada por Ed Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores, se basa en la integración de algunas de las ideas desarrolladas por Piaget acerca de la manera en que se pasa de un estado de conocimiento a otro. En esta teoría se hace una construcción, o modelo, para hablar de la forma en la que se aprenden los conceptos matemáticos, estableciendo que la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto (Trigueros, 2005).

Entre estas ideas retomadas de Piaget se encuentra la de *abstracción reflexiva*, entendida como el mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático, dicho mecanismo es activado a través de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento (Trigueros, 2005). Los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones problemáticas. Tal como se mencionó anteriormente, dichas construcciones se caracterizan bajo los conceptos de *acción*, *proceso* y *objeto*.

En el nivel más básico se encuentra la acción, entendida como la transformación de un objeto por estímulo externo. El individuo reacciona a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se deben seguir (Trigueros, 2005). Esta autora agrega que "cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser internalizada como un proceso" (p. 9). Por lo tanto, el proceso también resulta ser una transformación pero en este caso es interna, en consecuencia, el estudiante tiene más control sobre lo que hace y puede determinar qué es lo que le conviene hacer y de qué manera. Es decir, el alumno toma sus propias decisiones, incorpora la acción y la lleva a cabo por su cuenta, aplicándola cuando lo considera necesario y no por indicación externa.

Una manera de construir un objeto matemático es mediante la encapsulación de un proceso para que el sujeto pueda hacer nuevas transformaciones sobre él (Trigueros, 2005). En otras palabras, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del concepto si es consciente del proceso como una totalidad y es capaz de actuar sobre él. Otra manera de construir un objeto ocurre cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema (Trigueros, 2005).

Para el aprendizaje de la Matemática se considera necesario que los alumnos realicen la construcción de esquemas, que se fomenta a través de lograr relacionar las acciones, procesos y objetos. Estos esquemas son los que los que el alumno evoca cuando intenta resolver un problema matemático específico, poniendo en juego aquellos conceptos de los que dispone y utilizando la relación entre éstos.

4.3. *Normas y Metanormas*

Para este análisis se utilizan como herramientas teóricas los conceptos de normas y metanormas tomados del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) desarrollada por Juan Díaz Godino y colaboradores.
El Enfoque Ontosemiótico plantea un modelo teórico que pretende articular las facetas semiótica, epistemológica, antropológica y psicológica implicadas en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. El mismo surge en la Didáctica de la Matemática como un marco que intenta articular diferentes puntos de vistas y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.
Esta línea propone distintos niveles de análisis pero aquí nos limitaremos al uso de la dimensión normativa, relacionada con las *normas* y *metanormas* que acontecen en los procesos de enseñanza–aprendizaje.
Se trata de identificar la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones. En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se muestran diferentes criterios de clasificación de las normas, según el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad, etc.), etc.
Las *normas epistémicas* pueden identificarse en los elementos de las configuraciones de objetos: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; las cuales regulan la práctica matemática en un marco institucional específico (Godino, 2009).
Teniendo en cuenta que las prácticas matemáticas e interacciones están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas que regulan las acciones se considera que es importante realizar un análisis de las mismas.

4.4. *Formas de argumentar en la clase de Matemática*

Se considera a la validación como una actividad fundamental en la construcción del conocimiento matemático, por este motivo, resulta de capital interés abordarla con el fin de lograr un aprendizaje significativo en Matemática (Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez, 2008).
El término *validación*, en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, toma mayor presencia a partir de su uso en el marco de la Escuela Francesa. Según Brousseau (citado por Calderón y Corredor, 2001), “la validación es una situación en la que se trata de demostrar la verdad de un enunciado o de una teoría y lograr la adhesión de un público a ese enunciado o teoría” (p. 7). Una distinción que suele hacerse es si la validación es *externa* o *interna* al sujeto. La primera se da en los casos en los que el sujeto deja en otro (docente, par experto, libro de texto, etc.) la responsabilidad del porqué es válido lo que responde, mientras que en el segundo caso se hace cargo el sujeto de expresar las razones. En la clase, claramente el interés está puesto en lograr la validación interna en los

estudiantes. Teniendo en cuenta el uso dado por distintos autores de la noción de validación se considera la siguiente definición:

> Un sujeto en situación de aprendizaje valida un conocimiento matemático si es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícita la asignación de sentidos de los objetos matemáticos que manipula y ésta debe corresponderse con significados matemáticos aceptados por la Institución Matemática (González y Rodríguez, 2006, p.104).

Dentro de la validación tiene un papel clave la *explicación*, entendida como el discurso que hace inteligible a otro sujeto una proposición, un hecho, un procedimiento, el resultado de una experiencia, etc. En palabras de Balacheff (1987), la explicación se encuentra situada al nivel del sujeto locutor, dicho sujeto considera que la explicación establece y garantiza la validez de una proposición pretendiendo, a través de ella, hacer inteligible la verdad ya adquirida por él. La explicación no se reduce necesariamente a una cadena deductiva y su base es esencialmente la lengua natural (Balacheff, 1987).

Cuando la explicación busca convencer a otro sujeto y se dan razones del porqué de ese hecho, resultado, aseveración, etc., se la considera como *argumento*, que es utilizado para justificar o refutar una producción. Si las explicaciones y los argumentos son aceptados por la comunidad a la que va dirigida en un momento dado, toman status de *prueba,* esto exige que las razones dadas trasciendan el nivel subjetivo, que sí puede tener el argumento, y se basen en normas, prácticas, terminología, etc., instituidas en esa comunidad.

Según Balacheff (1987) el tipo de prueba que se organiza siguiendo un conjunto bien definido de reglas se denomina *demostración*. Es decir, si las pruebas respetan una cierta estructura deductiva estamos frente a una demostración matemática, en este tipo de pruebas se toma un cierto número de enunciados que son aceptados como verdaderos (axiomas o propiedades ya validadas) y otros que se deducen de éstos (teoremas) a partir de razonamientos lógicos.

Balacheff (1987) propone distintos niveles y tipos de pruebas, haciendo referencia a la transición de una "problemática de la eficacia" a una "problemática del rigor". Dicha transición se basa en que alumno cambia su papel en la práctica por uno que le da mayor acceso a la teoría, permitiéndole "conocer más". Este autor distingue dos tipos de pruebas que le permiten al estudiante convencer o convencerse acerca de una conjetura, éstas se conocen como *pruebas pragmáticas* y *pruebas intelectuales*.

Pruebas pragmáticas: los estudiantes recurren a la acción u ostensión para establecer o validar conjeturas. Se fundamentan en observaciones y construyen razones personales o grupales para tener confianza en ellas. En este tipo de pruebas lo que el estudiante trata de mostrar es la eficacia de la conjetura que propone y el modo de llegar a ella. Aquí se puede tipificar el *empirismo ingenuo* y la *experiencia crucial*.

- Empirismo ingenuo: consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. Los estudiantes expresan la aceptación del enunciado con frases como: "lo veo en la figura", "lo medí", o "ya lo comprobé con estos valores". El alumno extrae la conclusión a partir de un pequeño número de casos.

- Experiencia crucial: se consolida una conjetura porque se escoge un caso que reconoce tan poco particular como le es posible. Es decir, surge la necesidad de generalizar un hecho, apostando a la realización de un caso lo menos particular posible, ya sea para lograr un convencimiento personal y generar una conjetura o para defenderse contra una posición.

Según Balacheff (1987), estos dos tipos de pruebas no permiten establecer la verdad de una aserción y su condición de pruebas es reconocida únicamente por aquellos que la consideran como tales.

Pruebas intelectuales: son aquellas pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones. El proceso se fundamenta en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas. Los alumnos se alejan de las acciones que dan solución a casos específicos y del proceso de solución, para convertir el conocimiento en objeto de reflexión y discusión.

- Ejemplo genérico: se produce una conjetura y se llega a la validez de ésta después de estudiar un caso que se supone es representativo de la clase. Si bien se plantea el análisis sobre un objeto en particular se evoluciona hacia una formulación más general.
- Experiencia mental: se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular (Balacheff, 1987). Es decir, se evoca la acción desprendiéndola de su realización en un contexto y en una representación particular.

Según Balacheff (1987), la transición de los procedimientos pragmáticos a los intelectuales está marcada por el ejemplo genérico al pasar de acciones efectivas sobre las representaciones hacia la descontextualización y eliminación de la atención en lo particular, siendo esto último necesario para la demostración.

4.5. Sobre la noción de heurísticas

Con el fin de entender un problema y abordar su resolución, los estudiantes podrían recurrir a una diversidad de estrategias denominadas heurísticas (Marino y Rodríguez, 2009). Se definen las *heurísticas* como "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución" (Verschaffel, 1999 citado por Marino y Rodríguez, 2009). Cabe resaltar que dichas estrategias son personales y no necesariamente conducen a la resolución exitosa del problema.

La aparición de heurísticas suele darse en esos momentos de incertidumbre, exploración, indecisión y su uso no es necesariamente válido desde el punto de vista matemático. En este caso esto nos alerta que el uso de heurísticas se da ante un cierto tipo de actividad, que en la Escuela Anglosajona se denominan *problemas.* Dichas tareas generan en el sujeto un bloqueo inicial y lo ubican en una situación de no conocer el camino que debe utilizar para abordar o resolver la actividad.

5. Análisis didáctico de la propuesta de un libro de texto

En el recorrido histórico, realizado en una de las primeras secciones, se hicieron evidentes las enormes dificultades presentes en el desarrollo del concepto de número irracional y las vías que se han buscado para superarlas. En este sentido, los investigadores en Historia de la Matemática advierten acerca de los obstáculos inherentes a esta noción, considerando a los números irracionales como obstáculos epistemológicos. Esto se convierte en un valioso aporte para la Educación Matemática, ya que posibilita prever dificultades de aprendizaje en los estudiantes y considerar diversas estrategias que permitan superarlas.

El problema de la irracionalidad surge en un contexto muy específico, el de la geometría griega, de medición teórica, y en él subyace el problema de los procesos infinitos. Por lo tanto, el problema del infinito y su aceptación se presenta como un concepto clave en la construcción de la noción de número real, teniendo en cuenta que su evolución conceptual es parte esencial de esta construcción.

Consideremos también, que la aparición de las magnitudes inconmensurables en la antigua Grecia resultó ser devastadora para la filosofía pitagórica, ya que destruía su creencia más sagrada: la conmensurabilidad de los segmentos. Este nuevo conocimiento se convirtió en una novedad desconcertante que puso en crisis los conocimientos adquiridos precedentemente, produciendo un cambio de visión que revoluciona para siempre el pensamiento matemático. Este proceso estuvo lejos de ser rápido y sencillo. Durante por lo menos dos siglos tuvieron que remontar un cúmulo de dificultades para poder expresar muchas de las ideas que actualmente son objeto de enseñanza en la escuela secundaria.

Por lo tanto, si históricamente los matemáticos se rehusaron a admitir a los números irracionales es esperable que los alumnos presenten dificultades a la hora de construir este concepto. Un docente que conoce dichas dificultades, sabrá que es muy posible que también surjan en el aula y esto le permitirá estar mejor preparado para afrontarlas. Asimismo, puede suceder también que, sin advertirlo, desde la propia enseñanza se promuevan concepciones en los estudiantes que fomenten ideas erróneas. Estos obstáculos de tipo didácticos, sumados a los anteriormente mencionados, pueden conllevar a que los estudiantes manifiesten diversidad de errores con notables consecuencias. En este trabajo se realiza un análisis, desde el área de la Didáctica de la Matemática, de la propuesta de un libro de texto intentando identificar cómo a partir de lo que allí se muestra u omite se podrían promover concepciones erróneas en los estudiantes. Esto último referido a cuestiones particulares vinculadas al tema número irracional, pero también considerando cuestiones generales relacionadas al quehacer matemático como, por ejemplo, concepciones erróneas referidas a la validación.

Resulta de especial interés analizar en profundidad e identificar los diversos obstáculos asociados al aprendizaje de los números reales con el fin de anticipar posibles errores que puedan ser causados, para luego alcanzar los nuevos conocimientos a partir de su superación. Es importante tener presente que un abordaje superficial del tema es muy posible que promueva en los alumnos una construcción del concepto totalmente carente de significado.

Estas dificultades en el aprendizaje significativo de los números irracionales podrían estar relacionadas con los siguientes motivos:

- Ser anti intuitivos.
- Estar alejados de la realidad (salvo longitudes) y vinculados a lo infinito.
- Requerir Matemática avanzada para las demostraciones que alejan del problema físico.

Teniendo en cuenta esto, resulta indispensable que el tratamiento otorgado a la enseñanza del concepto de número real y, en particular, al de número irracional contemple los posibles obstáculos (tanto epistemológicos como didácticos) y permita que los alumnos construyan esta noción de manera significativa, no mediante ideas vagas, incoherentes y fragmentarias. En muchas ocasiones, estas deficiencias podrían relacionarse con el tipo de abordaje que se propone en el libro de texto utilizado por los alumnos para el estudio del tema o bien por los docentes para extraer ejercitación o definiciones que luego utilizarán en su propuesta didáctica. Este problema se agrava si se utiliza un único texto, en lugar de una multiplicidad de ellos, ya que se generan escasas posibilidades de confrontación, asumiendo que sólo es posible construir el conocimiento a partir de lo que ese texto "dice". Se tiene en cuenta que el tratamiento realizado por el docente a las actividades propuestas por el libro interviene directamente en las concepciones del alumno. Aún así, habría que tener especial cuidado en la selección de dichas actividades porque pueden obstaculizar el cumplimiento de los objetivos planteados por el docente, si es que promueven que los alumnos saquen conclusiones sobre el tema alejadas al sentido del concepto institucionalmente aceptado.

En la sección del libro bajo análisis uno de los objetivos que hacen explícitos los autores es que los alumnos logren *"comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento, interpretando los resultados y justificando los procedimientos empleados"* (p.17) sin aclarar la definición de "problema" en la cual se basan. Si consideramos que el texto se alinea con los documentos curriculares vigentes, podemos suponer que el enfoque debería estar próximo a la Teoría de Situaciones Didácticas y que los *problemas* serían situaciones a-didácticas o de consolidación o balance (Brousseau, 1986).
Sin embargo, los problemas presentados en el libro se encuentran bastante alejados de este enfoque ya que, como veremos más adelante, no parecen propiciar que el alumno actúe, hable, reflexione y evolucione por sí mismo, posibilitando que emerja el conocimiento, requisitos indispensables en dichas situaciones a-didácticas.

A continuación se realiza una descripción y análisis de algunas actividades relacionadas al tema números reales. Tal como mencionamos anteriormente, veremos que dichas actividades no podrían ser consideradas como problemas en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas sino más bien como ejercicios rutinarios.
En primer lugar, en relación a los números racionales y el tratamiento del infinito se opta por una actividad de baja complejidad como la siguiente:

2. Con la calculadora realicen los siguientes cocientes escritos en forma fraccionaria y escriban la expresión decimal que aparece en el visor.

$\frac{275}{10} =$ $\frac{175}{100} =$ $\frac{-255}{10} =$ $\frac{7}{-2} =$ $\frac{4}{9} =$ $\frac{7}{6} =$ $\frac{37}{33} =$

3. Observen, identifiquen y escriban los números racionales cuyas expresiones decimales tienen un número de cifras decimales finito (se pueden contar, las cifras decimales no cubren todo el visor de la calculadora).

4. Observen, identifiquen y escriban los números racionales que tienen una expresión decimal en la que se observan (en el visor de la calculadora) infinitas cifras después de la coma (las cifras decimales cubren todo el visor de la calculadora).

En esta actividad se busca el trabajo con las distintas escrituras de un número racional y la noción de infinito a partir de la aplicación directa de un procedimiento conocido previamente que consiste básicamente en observar lo que muestra el visor de la calculadora. Este método permite arribar de manera inmediata a una respuesta, teniendo en cuenta esta característica, la actividad se podría enmarcar de lo que se denomina *ejercicio rutinario* en contraposición de lo que se entiende por problema que, como mencionamos, debería generar un bloqueo en el estudiante.

En el comienzo de la actividad se pide a los alumnos que con la calculadora realicen los cocientes escritos en forma fraccionaria y escriban la expresión decimal que aparece en el visor. Teniendo en cuenta que las últimas tres fracciones tienen expresiones decimales periódicas y que se espera que resuelvan el ejercicio simplemente completando del otro lado del igual con la expresión decimal que aparece en el visor, los alumnos podrían inferir erróneamente que la expresión con varios decimales (pero no infinitos) que observan en el visor de la calculadora corresponde a la expresión decimal de la fracción. Este hecho puede verse reforzado por el símbolo de igualdad que separa la expresión fraccionaria de la expresión decimal.

Otro posible error que se puede favorecer con esta actividad podría ser el pensar que un número que no es periódico pero que tiene dígitos que se repiten a lo largo del visor, coincidiendo con lo que la calculadora puede mostrar, sea confundido con un número periódico por el hecho que las cifras decimales cubren todo el visor de la calculadora.

Tal como mencionamos anteriormente, si consideramos que para los alumnos la aceptación del infinito no es un tema menor, habría que tener especial cuidado en el diseño de la actividad con la que se pretende trabajar esta cuestión y evitar sumar obstáculos didácticos que lleven a errores como los anteriormente mencionados. Los alumnos podrían preguntarse: ¿qué significa que sean infinitas las cifras decimales?, ¿cómo saben que no se acaban de golpe?

Se fundamenta que la expresión decimal tiene infinitas cifras decimales por el simple hecho de cubrir completamente el visor de la calculadora. En este caso, se promueve la validación externa, donde se deposita en la calculadora la fuente de la verdad y autoridad. A partir de este argumento se podría estar conformando o potenciando la imagen conceptual errónea de “si el número que muestra el visor de la calculadora cubre todos los lugares, entonces tiene infinitas cifras decimales”. Este tratamiento superficial de una cuestión tan compleja como es la aceptación de la existencia de infinitas cifras decimales y la comprensión del infinito podría fomentar errores en las concepciones de los estudiantes. Por un lado, la afirmación es falsa por lo que podrían asociar expresiones decimales que no representan las fracciones introducidas.

Por otro lado, al dividir dos números naturales y observar que las cifras decimales cubren el visor buscarán reconocer el período pero si no pueden observarlo podrían concluir que la expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas, es decir, estarían asociando a fracciones números irracionales. Estos errores pueden atribuirse a que el significado que el estudiante otorga está limitado por la imagen conceptual de "asociar al visor completamente cubierto con expresiones con infinitas cifras decimales" y nada más.
La actividad no da lugar a que se puedan manifestar contradicciones entre las distintas partes de la imagen conceptual y tampoco a que los alumnos contemplen la definición del concepto ya que desde la misma se promueve la operación desde un nivel más intuitivo y menos formal. Al no hacerse evidentes dichas contradicciones no se genera un conflicto cognitivo por lo cual el estudiante no tomaría conciencia del error.
En general los estudiantes recurren en primer lugar a actuar de manera más intuitiva y menos formal por una cuestión de complejidad, a partir de tratamientos como el recientemente mencionado se refuerzan actitudes de este tipo, promoviendo que el estudiante responda a una actividad apelando únicamente a su imagen conceptual. Teniendo en cuenta que dicha imagen conceptual no necesariamente refleja todos los aspectos de la definición conceptual, el comportamiento deseable es que imagen y definición actúen de manera complementaria para producir una respuesta (Tall y Vinner, 1981). Esto último no pareciera promoverse en el tratamiento realizado por este libro ya que las conclusiones se apoyan de lo observado en la calculadora únicamente. De esta manera, los alumnos pierden la posibilidad de intentar desarrollar estrategias que les permitan argumentar acerca de las afirmaciones que realizan tales como estudiar la relación entre la cantidad de cifras decimales y los restos del cociente. De haber hecho esto, ante la pregunta ¿cómo sabemos que son infinitas las cifras decimales? habría explicaciones que les permitan validar de manera interna, que es donde debería estar puesto el interés de la clase.
Desde la perspectiva de la relación entre el alumno y el saber matemático, es necesario tener en cuenta que respuestas como las mencionadas anteriormente no revelarían ausencia de conocimiento sino una forma de conocer ligada a lo que la institución matemática (en este caso el libro) acepta como válido. Podría analizarse el funcionamiento de este alumno respecto a la noción del infinito únicamente a partir de la imagen conceptual "para saber si la expresión decimal de un número tiene infinitas cifras decimales tengo que observar que el visor de la calculadora se encuentre completamente cubierto".
Los errores que son producto de estas concepciones podrían no ser considerados como tales por los alumnos ya que su accionar no estaría alejado de lo que la institución matemática considera correcto. Es decir, para los estudiantes que tienen este libro de estudio como material de referencia no serían errores pues lo que está institucionalmente aceptado en el mismo lo da por correcto. Como el libro funciona en este caso como la institución matemática, no habría distancia entre lo que el sujeto hace y lo que la institución matemática expresa, entonces no se identificaría el error.
Sólo se advierte el error cuando la institución matemática toma algo más allá del libro como por ejemplo el uso de otro libro o la explicación del docente posterior a identificar lo que allí figuraba mal. Teniendo en cuenta esto último, es importante que el docente esté atento a todas las cuestiones analizadas para poder intervenir y hacer un tratamiento de dicho error que no llega a hacerse evidente por sí solo. Recién en ese momento el sujeto podría advertir que "cometió un error" porque vería esa distancia entre lo que hace y lo que la institución matemática dice (más allá del libro errado).

Por otra parte, si se enfoca el análisis en la relación entre el alumno y la actividad matemática, se observa que podrían promoverse concepciones erróneas acerca la misma debido a que una norma que pareciera establecerse es que “en Matemática hay que observar y eso permite identificar o clasificar objetos”. Esta norma persiste en las actividades que se analizan más adelante, de esto se puede inferir que un estudiante que utiliza este libro como referencia podría no contemplar que el explorar, probar, equivocarse, argumentar, etc., también son acciones que forman parte del quehacer matemático. Es decir, para los estudiantes el simple hecho de “mirar la pantalla” de la calculadora sería una actividad matemática, cuando en realidad para el docente no lo es pues dicha actividad conlleva un análisis de lo observado, búsqueda de sentido, explicaciones, etc.
Se incentiva a que los alumnos acepten sin cuestionamientos el saber matemático presentado a través de la calculadora o el libro de texto ya que en ningún momento se los previene de las cuestiones que se están omitiendo y se hacen afirmaciones basadas en la simple observación. No hay tratamiento alguno sobre razones en las cuales se basan las afirmaciones que, tal como vimos anteriormente, en muchos casos pueden llegar a ser falsas. De esta manera, al no justificar utilizando argumentos válidos la razón de ser de estos objetos se podría fomentar la concepción errónea de que para hacer Matemática simplemente se necesita entender los mecanismos de funcionamiento y no prestar atención a las argumentaciones o estructuras lógicas o teóricas que permiten dar cuenta del porqué de dicho funcionamiento.
Por lo tanto, teniendo en cuenta que el alumno en ningún momento debe hacerse cargo de expresar razones para validar una cierta afirmación podemos afirmar que la validación interna no se promueve explícitamente en el texto y se recurre únicamente a la externa, ya que se deja en la calculadora la responsabilidad de por qué es válido lo que responde. Se desencadenan así obstáculos didácticos, motivados por la ausencia de sentido, que podrían promover la diversidad de concepciones erróneas previamente desarrolladas. En los fragmentos analizados, podemos identificar la siguiente metanorma que podría condicionar el proceso de instrucción: “Basta dar la solución de un problema, no es necesario justificar la validez de la respuesta”. Esto debido a que tanto en la parte teórica del texto como en las actividades propuestas se prescinde de la argumentación, en ningún momento se dan razones o se piden que se den razones del porqué la cantidad de cifras decimales es infinita o finita.
Al pie de la actividad se incluye el siguiente apartado donde se muestran las conclusiones que se esperaban de la misma:

$\frac{275}{10} = 27,5$

$\frac{175}{100} = 1,75$

$\frac{-255}{10} = -22,5$

$\frac{7}{-2} = -3,5$

$\frac{4}{9} = 0,44444444444444... = 0,\overset{\frown}{4}$

$\frac{7}{6} = 1,166666666666666... = 1,1\overset{\frown}{6}$

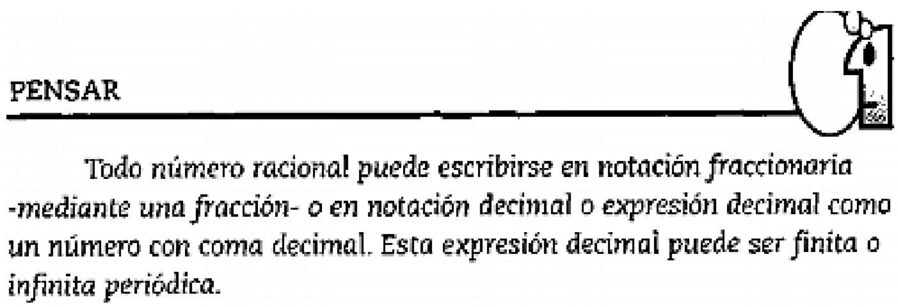
$\frac{37}{33} = 1,121212121... = 1,\overset{\frown}{12}$

Estos números racionales en su expresión decimal tienen una cantidad finita de cifras decimales, lo que indica que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria se llegará a un resto cero.
Estos números racionales se llaman **números racionales decimales o simplemente números decimales**. Por lo que, por ejemplo, los números $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1,75; 0,23 son números decimales.

Estos números racionales, en su expresión decimal, tienen infinitas cifras decimales, lo que muestra que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria, nunca se llegará a un resto cero.
Recuerde que con el arco se indican las cifras decimales que se repiten infinitamente, es decir, el período.

Observamos cómo se realizan afirmaciones que no se encuentran en relación a la propuesta de la actividad, por ejemplo, se dice que *como la expresión decimal tiene infinitas cifras decimales al realizar la división entre el numerador y el denominador de la expresión fraccionaria nunca se llegará a un resto cero.* Teniendo en cuenta que la actividad se basa en lo que los alumnos ven en el visor de la calculadora, la conclusión antes mencionada difícilmente pueda surgir de la misma ya que estarían resolviéndola (sin advertir que eso es incorrecto) prescindiendo totalmente de estudiar la relación entre la cantidad de las cifras decimales y el resto de la división.
No se realiza un análisis de lo que sucede con los restos al realizar la división ni se los hace reflexionar acerca del hecho de que estos restos se repiten indefinidamente por lo cual las cifras del cociente también lo harán. Tal como mencionamos anteriormente, los alumnos no se ven obligados a recurrir a la argumentación sino que simplemente se generaliza a partir de la observación y se fomenta la construcción de afirmaciones tales como que si el visor está cubierto significa que hay infinitas cifras decimales, hecho que no siempre es cierto.
Es posible identificar una cierta limitación al nivel de la explicación, dejando de lado aspectos imprescindibles para el logro de un aprendizaje significativo como el promover la realización de validaciones de tipo internas. El alumno en ningún momento debe hacerse cargo de expresar razones para validar una cierta afirmación, por lo cual podemos decir que la validación interna se encuentra ausente y se recurre únicamente a la externa ya que se deja en la calculadora la responsabilidad de por qué es válido lo que responde. Podríamos identificar en esto un obstáculo didáctico que promueve diversidad de concepciones erróneas en los estudiantes, desencadenando los diversos errores previamente desarrollados.
En consecuencia, teniendo presente que la validación es una actividad fundamental en la construcción del conocimiento matemático (Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez, 2008)

y que en libro no se aborda, depende del docente prever que su propuesta didáctica la incluya si quiere lograr un aprendizaje significativo del tema.
Si tenemos en cuenta que los posibles errores hasta ahora identificados se encuentran ligados a las concepciones que desde el libro de texto se fomentan, es muy posible que dichos errores se encuentren profundamente arraigados y no puedan ser superados por medio de una simple charla u observación por parte del docente. En este sentido, es necesario diagnosticar los errores con el fin de poder diseñar procedimientos y remedios que los ayuden en la corrección de los mismos (Socas, 2007), así como también pensar en dispositivos específicos que impliquen nuevas mediaciones entre el alumno y el saber.
Así como la inconmensurabilidad dio lugar a la necesidad de la demostración, en el aula puede resultar interesante posibilitar distintas pruebas matemáticas, como inicio en el proceso hacia la demostración. Es decir, es necesario brindarles a los alumnos una conceptualización más completa del tema y favorecer la realización de pruebas por parte de ellos.
A diferencia de lo que ocurre en el trabajo matemático, a lo largo de la unidad bajo análisis de este libro de texto es posible observar que se realizan afirmaciones generales a partir de algunos ejemplos como si el hecho de que suceda en algunos casos necesariamente implica que sucede siempre. A modo de ejemplo, podemos citar la siguiente afirmación:


PENSAR

Todo número racional puede escribirse en notación fraccionaria -mediante una fracción- o en notación decimal o expresión decimal como un número con coma decimal. Esta expresión decimal puede ser finita o infinita periódica.

Tal como mencionamos anteriormente, se concluye que *la expresión decimal de todo número racional puede ser finita o infinita periódica* sin fundamento alguno más allá de la observación de lo sucedido en algunos ejemplos. Se omite, por ejemplo, el tratamiento de lo que sucede con los restos, hecho que podría permitirle a los alumnos arribar a la conclusión dada.
Algo que se puede observar en reiteradas ocasiones es que se presentan una sucesión de afirmaciones que no se fundamentan más allá de la observación de algunos ejemplos y de “resultados” mostrados por la calculadora, sin esbozar ni requerir argumentos que justifiquen la validez de cada una de ellas.
Este tratamiento superficial, conectado a muy pocos ejemplos y sin argumentos válidos que justifiquen las afirmaciones realizadas proporciona a los alumnos una idea totalmente contraria a lo que realmente sucede en la Matemática en cuanto a una ciencia formal en la que la validación cumple un rol fundamental. De esta manera se podrían estar fomentando concepciones erróneas como por ejemplo “todo lo que se observa a partir de algunos casos, es válido en general” y promover, una vez más, errores en el modo de argumentar de los estudiantes.
Anteriormente reconocimos que imágenes conceptuales como la siguiente “para saber si la expresión decimal de un número tiene infinitas cifras decimales tengo que observar que el visor de la calculadora se encuentre completamente cubierto”, podrían promover en los

estudiantes errores en la argumentación también. En este caso la argumentación estaría dada por influencia externa o autoridad, ya que el carácter de verdad estaría sustentado en razones externas al proceso derivadas de lo observado en la calculadora. Por otro lado, los errores producidos en la argumentación a partir de la concepción "todo lo que se observa a partir de algunos casos, es válido en general" estarían dados por influencia interna en este caso. Los estudiantes podrían utilizar un tipo de argumentación inductiva, ya que la verdad de un resultado se afirmaría después de verificar para algunos casos, siendo este un tipo de prueba lo que Balacheff (1987) denomina pruebas pragmáticas del tipo empirismo ingenuo. Según este autor, este tipo de prueba no permite establecer la verdad de una aserción y su condición de prueba es reconocida únicamente por aquellos que la consideran como tales. El estudiante debería aprender que en Matemática no es suficiente el realizar comprobaciones empíricas para dar por válida una afirmación, el proceso de validación requiere elaborar explicaciones. Teniendo en cuenta los aportes de Brousseau y Balacheff, se conocen formas en las que los estudiantes pueden ir aproximándose a las demostraciones aceptadas por la comunidad, como ya hemos mencionado identificando distintos tipos de pruebas que los alumnos pueden ir desarrollando en el proceso de aprendizaje hasta obtener una prueba intelectual o una demostración.
Respecto a posibles errores que podrían producirse a partir de las concepciones promovidas en las definiciones, citamos el siguiente fragmento en el que se aborda el concepto de número irracional:

> Ahora le proponemos trabajar con el cálculo de la siguiente raíz cuadrada: $\sqrt{3}$ (raíz cuadrada de 3). Recuerde que si usted desea calcular esa raíz tendrá que buscar un número que elevado al cuadrado, es decir multiplicado 2 veces por sí mismo, dé por resultado 3. Si prueba con $1{,}5^2$ $(1{,}5 \cdot 1{,}5)$ obtiene 2,25 y es menor que tres. Si ahora prueba con $1{,}7^2$ $(1{,}7 \cdot 1{,}7)$ da como resultado 2,89 y es menor que tres. Quizás pensó en probar con $1{,}8^2$ $(1{,}8 \cdot 1{,}8)$: da por resultado 3,24 y resulta ser mayor que tres.
>
> Si sigue probando con otros valores puede obtener resultados más próximos a tres, pero le será imposible encontrar un número racional que elevado al cuadrado dé exactamente tres.

En primer lugar, al no aclarar que es el número no negativo que al cuadrado da por resultado 3 cabe la posibilidad de que los alumnos asocien a $\sqrt{3}$ una expresión decimal negativa también. Si los alumnos lo llegaran a concebir como número, podrían pensar que tiene dos expresiones decimales asociadas por lo cual en la recta numérica le corresponderían dos puntos.
En segundo lugar, se observa que, a partir de la definición de raíz cuadrada, se intenta realizar un acercamiento al desarrollo decimal de $\sqrt{3}$. Se dice que si se desea calcular esa raíz se debe buscar un número que elevado al cuadrado dé por resultado 3 y propone distintas expresiones decimales que elevadas al cuadrado se van aproximando a 3, como

una manera de mostrarle al alumno cómo podría “buscar el verdadero valor de $\sqrt{3}$” y finaliza asegurando que ningún número racional elevado al cuadrado da exactamente 3.
A lo largo de la actividad el foco se encuentra en el cálculo de la raíz cuadrada por lo cual una imagen conceptual que se podría generar en el alumno es que éste identifique “ver una raíz cuadrada” con probar valores para ver si al cuadrado dan el valor del radicando. Es decir, se podría quedar con la idea de que la raíz representa algo que “tienen que resolver” porque “no saben cuánto da” y nada más.
Esto se ve reforzado en actividades posteriores, a modo de ejemplo citamos la siguiente:

1. *Exprese el resultado de las raíces anteriores en notación decimal:*

a) $\sqrt{7}=$ ....

b) $\sqrt{5}=$ ....

c) $\sqrt{2}=$ ....

a) $\sqrt[3]{7}=$ ....

2. *¿Qué ocurre con la parte decimal de estos números?*

....

Posiblemente pensó en que es infinita, es decir, que tienen infinitas cifras decimales. Pero a esta característica se le agrega otra: las cifras decimales no son periódicas.

En esta actividad se les pide a los alumnos que “expresen el resultado de las raíces” y se pone un símbolo de igualdad, teniendo en cuenta que es muy probable que los alumnos recurran al uso de la calculadora, nuevamente se puede observar cómo los estudiantes podrían inferir erróneamente que lo que se muestra en el visor de la misma es la expresión decimal que tiene “como resultado la operación raíz” y que esas raíces son iguales a esas expresiones cuando en realidad están obteniendo expresiones decimales aproximadas de esos números irracionales.
Esto último puede desencadenar errores importantes acerca del concepto de número irracional en las concepciones de los estudiantes como puede ser el hecho de no diferenciar un número real de su expresión decimal aproximada.
Como consecuencia, la utilización por parte de los alumnos de imágenes conceptuales como las siguientes: “$\sqrt{2}$ es una cuenta a realizar” y “hacer Matemática es observar lo que muestra el visor de la calculadora”, podrían promover la aparición de diversos errores en temas posteriores también. Los alumnos pueden no aceptar que $\sqrt{2}$ se trate de un número y al resolver problemas como, por ejemplo, determinar los ceros de la función $f(x) = x^2 - 2$ interpreten que dichos ceros deben ser expresados en notación decimal, tal como la calculadora lo expresa. Para ellos $\sqrt{2}$ no sería una posible raíz ya que no se trata de un número debido a que una imagen conceptual promovida a la hora de construir este concepto es que es una “cuenta a realizar”.
Otro error posible que puede producirse como consecuencia de imágenes conceptuales como la mencionada podría ser que ante la presencia del límite de una función de valor $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ sientan la necesidad de utilizar la calculadora para realizar los cálculos y devolver un

resultado en el que no aparezcan operaciones ya que tendrían la sensación de que quedan cuentas por hacer. En este caso, un error esperable podría ser el considerar correcto el resultado que da la calculadora ya que no tendrían en cuenta el concepto de irracionalidad por la falta de significatividad que adquirió para ellos en su construcción.

Por lo tanto, tenemos que estos posibles errores podrían provenir de la creencia errónea de que hacer Matemática es solo "observar lo que la calculadora nos muestra", teniendo en cuenta que a lo largo de las distintas actividades el método de resolución se basó únicamente en el uso de la misma, evidenciando una alta autoridad puesta en el recurso tecnológico. A esto se sumaría la imagen errónea de número irracional como "cuenta a realizar", motivando a que los estudiantes consideren a números irracionales tales como $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ como una "cuenta sin terminar".

Ahora bien, los alumnos también podrían concebir a las expresiones dadas no como "cuentas a realizar" sino como números pero, teniendo en cuenta que el signo igual establece la equivalencia entre dos expresiones, es posible que infieran erróneamente que lo observado en el visor de la calculadora corresponde a la expresión decimal del número irracional en cuestión.

Asimismo, tal como se trabajó en la parte de los números racionales se fundamenta que la cantidad de cifras decimales de estas expresiones es infinita por el simple hecho de cubrir completamente el visor de la calculadora. Finalmente, se afirma que la cantidad de cifras no son periódicas sin justificación alguna.

En relación a esto último, es importante destacar que el hecho de tener infinitas cifras decimales no periódicas y no poder expresarse como fracción son aspectos que ya sabíamos, gracias a los aportes de la Historia de la Matemática, colaboraron para que los historiadores concluyan que los irracionales constituyen un obstáculo de origen epistemológico. En consecuencia, si históricamente la aceptación de los números irracionales se obstaculizó por estas cuestiones es importante que se tenga especial cuidado en el tratamiento de las mismas si no se quiere obtener efectos no deseados como los identificados anteriormente.

Al preguntarnos sobre el grado de comprensión que los alumnos pueden llegar a tener de los números irracionales a partir del trabajo con este libro de texto, podríamos conjeturar que debido al contexto poco significativo mediante el cual se pretende trabajar este nuevo conocimiento la construcción que los estudiantes harán del mismo resultará ser muy poco sólida. Si las actividades propuestas no capacitan a los alumnos para ir más allá de su mera reproducción ni los ayudan a dotar de sentido el conocimiento producido sino que, al contrario, dan lugar a múltiples interpretaciones alejadas del significado institucionalmente aceptado de concepto, en lugar de favorecer el aprendizaje pueden terminar favoreciendo errores en las concepciones de los estudiantes y obstaculizar su aprendizaje.

Considerando nuevamente el tipo de pruebas utilizado, podemos ver que aquí tampoco se promueve algún tipo de prueba válida ya que sin realizar tratamiento alguno se afirma que será imposible encontrar un número racional que elevado al cuadrado dé exactamente 3, simplemente se menciona y no se justifica la validez de la afirmación.

En ningún momento se demuestra que el desarrollo decimal no puede ser finito ni la imposibilidad de escribir a este tipo de número como fracción. Tengamos en cuenta que en el apartado donde se trabajaron los números racionales no se reflexionó acerca de la imposibilidad de que las expresiones infinitas no periódicas provengan de una fracción por

lo cual los alumnos deberían simplemente creer lo que el libro afirma, promoviendo una vez más la validación externa pero en este caso con la autoridad puesta en el libro de texto.
Si bien la argumentación que justifica la validez de las afirmaciones anteriores puede ser que exceda los objetivos del curso podrían mínimamente mencionarse las cuestiones que se omiten. De esta manera, el aprendizaje que se produce en los alumnos es superficial y poco significativo. Esta ausencia de significado podría provocar en ciertos casos la manipulación errónea en el mismo uso del texto y posteriormente.
Veamos otra tarea del texto:

> Si emplea la calculadora encontrará que $\sqrt{3}$, cifras más o cifras menos, es igual a un número en notación decimal como el siguiente:
>
> $\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415O5$..... puede observar que las cifras decimales son infinitas y no periódicas, por lo que no es un número racional.

En este caso, se recurre una vez más a las herramientas tecnológicas para asegurar que $\sqrt{3}$ es "igual a un número en notación decimal como el siguiente $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415O5\ldots$" agregando que el número no es racional porque "según se observa" las cifras decimales son infinitas y no periódicas. Una vez más la observación de lo que aparece en el visor de la calculadora se utiliza como medio para realizar afirmaciones importantes como el hecho de que las cifras decimales no son periódicas. Sumado a esto se puede notar que nunca se concibe que el número tenga un período con varios dígitos o que a partir de un determinado momento las cifras decimales comiencen a repetirse. En esto último podría identificarse como norma que "el período de un número periódico debe visualizarse en el visor de la calculadora, no verlo significa no tener". Las imágenes conceptuales gestadas en los estudiantes, referidas a números periódicos, nunca incluirían períodos con una gran cantidad de cifras que se repitan.
Por otro lado, podemos identificar posibles errores asociados al tipo de notación. En el caso $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415O5\ldots$, mediante el uso de los puntos suspensivos se trata de significar que la parte decimal continúa sin período mientras que en la parte de números racionales indicaban que la parte decimal "seguía con la misma tendencia". Es decir, los puntos suspensivos son usados con dos significados diferentes. En números periódicos significan que "continúa con la misma tendencia" mientras que en números irracionales indican que continúan pero "no con la misma tendencia". Una norma que podría identificarse en esto es que "en Matemática un mismo símbolo puede tener significados diferentes y no hace falta aclararlo porque debe entenderse en cada caso".
Esto requiere un tratamiento pues los estudiantes podrían no advertir este cambio de significado y concebir erróneamente que a partir de un determinado momento las cifras comienzan a repetirse, tal como sucedía con los números racionales. Sin embargo, el único tratamiento que se realiza al hecho de no ser periódicas consiste en mencionarlo debido a que en la expresión decimal mostrada no se ven regularidades y el autor espera que se concluya de allí que "la falta de regularidades en las cifras que *se ven* significa que el número tiene infinitas cifras decimales no periódicas".

Teniendo en cuenta esto último, es muy probable que esta simple mención no sea tenida en cuenta por los estudiantes pues no hay sustento alguno más allá de lo pueden ver, de allí en adelante queda a criterio del estudiante el significado otorgado a los puntos suspensivos pues ¿qué garantía tienen de que en esa parte que no llegan a observar no comienzan a repetirse?, o que esos últimos dígitos sean los que se repiten, tal como sucedía antes.
Algo similar ocurre en relación al recurso utilizado de observar que "el visor de la calculadora esté completamente cubierto" para justificar que una expresión decimal tiene infinitas cifras decimales. En un primer momento "cubrir el visor" debía ser interpretado por los alumnos como "el número es periódico", pero en estas últimas actividades significa que "es irracional".
En relación a las dudas que los alumnos podrían presentar respecto al infinito es muy probable que ellos tengan diversas dificultades en su aceptación y comprensión. Tal como sucedió a lo largo de la Historia, la idea de infinito potencial podría manifestarse también en el aula. Los alumnos pueden considerar una cantidad de cifras decimales tan grande como se desee involucrando el infinito potencial y no el infinito actual. Es decir, aceptar que los números irracionales tienen infinitas cifras decimales pero creer que es posible cortar la cantidad con "tantas cifras como se deseen" y operar con estas aproximaciones sin comprender que no se trata del número correspondiente, sino de una aproximación.
En relación a la definición de número irracional se menciona lo siguiente:

PENSAR

El conjunto de los números irracionales se simboliza así: II.

Los elementos de este conjunto son raíces no exactas (raíces cuyos resultados no son enteros) o bien números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.

Al decir "raíces cuyos resultados no son enteros" se refuerza la concepción de número irracional como "cuenta a realizar", perdiendo la entidad de número. De esta manera, se corre nuevamente el riesgo de que los estudiantes no diferencien el número irracional de su aproximación.
Realizando un análisis de la redacción de esta definición, podemos identificar posibles errores relacionados a la interpretación que los alumnos hagan de la misma. Al decir "raíces no exactas o bien números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas" podrían presentarse dos posibles errores según la interpretación que le otorguen al "o" que separa la afirmación raíces no exactas de números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.
Por un lado, al interpretar que el "o" funciona en sentido excluyente (una cosa u otra) un error que podría promoverse consiste en pensar que "las raíces no exactas" no entran dentro de "los números con infinitas cifras decimales no periódicas", por eso fue necesario en la definición incluirlas aparte. Por otro lado, en el caso de que el "o" se entienda como una especie de aclaración (lo que sigue explica lo anterior) el error estaría en pensar que todos los números irracionales provienen de raíces cuyos resultados no son enteros, hecho que se

ve reforzado al haber trabajado en las actividades previas solamente estos casos sin contemplar aquellos únicamente que tienen expresión decimal. Podemos observar cómo la definición formal dada puede provocar confusión en los estudiantes ya que aparece impuesta de repente ante una necesidad de definir el objeto matemático, pero sin un trabajo que le permita al estudiante comprender realmente el significado que allí se define.
Asimismo, podría suceder también que los alumnos interpreten correctamente que los números irracionales son los que tienen expresiones decimales no periódicas pero teniendo en cuenta el tratamiento realizado para ubicar a $\sqrt{2}$ en la recta numérica vemos cómo no se refuerza esta concepción tal como analizamos a continuación. Citamos el siguiente fragmento:

> Para representar números irracionales emplearemos su expresión decimal para ubicarlo en la recta numérica. Así, para ubicar el número irracional $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de 2) se considera su expresión decimal: $\sqrt{2} = 1{,}414213$...... ¿Entre qué números

La ubicación de números irracionales en la recta numérica se realiza a partir de su expresión decimal solamente. En el enunciado no se aclara que no es posible representar de manera exacta este número a partir de la misma por lo cual nuevamente aparece la no diferenciación entre el número y la expresión decimal aproximada del mismo. Si tenemos en cuenta que se trabaja con sus aproximaciones de manera indistinta podemos identificar una contradicción entre la definición y la imagen conceptual, ya que según la definición la expresión decimal de $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales pero podemos representarla en la recta numérica a partir de esta expresión decimal. El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera *comprensión* del concepto. En este caso, si hubiese una verdadera comprensión del concepto los alumnos podrían preguntarse ¿cómo puedo representarlo en la recta numérica si el número tiene infinitas cifras decimales? reforzando la imagen previamente construida de que entonces es lo mismo el número $\sqrt{2}$ que su aproximación. De esta manera, vemos cómo el alumno debe enfrentarse a diversos obstáculos didácticos que dificultan el aprendizaje del concepto.
Los alumnos no llegan a preguntarse ¿qué es $\sqrt{2}$?, simplemente se realiza un tratamiento empírico del mismo a partir de su expresión decimal aproximada. Asimismo, se evita el conflicto entre la intuición y la teoría provocado por el hecho de que $\sqrt{2}$ que depende de dos números enteros no puede expresarse como razón de dos de ellos.
Observamos que el tratamiento que se le da a este número se reduce al trabajo con una aproximación del mismo a partir de lo que muestra la calculadora sin diferenciación alguna entre esta expresión decimal aproximada y el concepto del $\sqrt{2}$. Es más, se omite totalmente el tratamiento teórico de este número irracional como creación de nuestra mente para dar solución a un problema concreto.
Tengamos en cuenta que históricamente la crisis producida por el surgimiento de los irracionales provocó el auge de la geometría por sobre la aritmética ya que, por ejemplo, la geometría nos brinda una mejor aproximación para la raíz cuadrada de dos al trasladar la diagonal del cuadrado de lado unidad sobre la recta numérica. A pesar de esto, en la propuesta del libro se opta por representar una aproximación de este número, hecho que podría ser favorable si se hubiese realizado una construcción previa de la aproximación

numérica de $\sqrt{2}$, ya que de esta manera el concepto de este número con su aproximación podría adquirir cierto significado.

Es de esperar que así como se reflejó en la historia de los pitagóricos, los estudiantes se rehúsen a admitir que números como $\sqrt{2}$ no sean racionales y que intenten sostener por todos sus medios que es un número racional. Si además se agregan obstáculos didácticos, como los mencionados anteriormente, se contribuye a esta creencia errónea de que $\sqrt{2}$ es racional ya que en la calculadora se observa el número 1,414213562 y, además, esto es lo que se pide que representen en la recta numérica. Al no hacer explícito que lo que van a representar es una expresión decimal aproximada del número los alumnos podrían pensar que lo que están representando es el número $\sqrt{2}$ que sería racional ya que la cantidad de cifras decimales es finita. Es decir, desde la actividad se estarían promoviendo imágenes conceptuales incorrectas desde el punto de vista matemático y contrarias a lo que dice la definición formal dada previamente, como por ejemplo que $\sqrt{2} = 1{,}414213562$.

Por más que en el libro de texto figure la definición de número irracional y se haya indicado que $\sqrt{2}$ es uno de ellos es muy probable que los alumnos incurran en errores como el antes mencionado porque la representación visual tiene predominio sobre la verbal. Por lo tanto, resulta de especial interés estar atentos al tipo de imágenes conceptuales que se promueven desde el tratamiento realizado a un determinado tema independientemente de que se dé la definición correcta pues las imágenes mentales persisten más allá de la enseñanza de la definición formal.

Una vez más se estarían dando significados distintos a un mismo hecho. Se observa que $\sqrt{2}$ tiene un desarrollo decimal que cubre todo el visor por lo cual se esperaría que los alumnos interpreten que tiene infinitas cifras decimales pero a la vez se dice que se lo va a representar en la recta numérica a partir de su expresión decimal, por lo cual en algún momento debería tener una última cifra decimal. Este tipo de procedimiento es probable que promueva en el alumno el reconocimiento del procedimiento algorítmico como el único valioso, dando lugar a interpretaciones erróneas como pensar que $\sqrt{2}$ es igual a 1,41.

Si tenemos en cuenta los registros seleccionados por el libro de texto para abordar el tema vemos que todas las actividades propuestas se encuentran focalizadas únicamente en el registro numérico, dejando de lado demás representaciones que puedan dar una conceptualización más completa del objeto matemático. Tal como mencionamos anteriormente, históricamente el surgimiento de los números irracionales se dio en contextos geométricos, sin embargo, no se considera esto como un recurso para abordar el tema. No se realiza ninguna mención al surgimiento ni se utiliza la geometría a lo largo de las distintas actividades y explicaciones.

Duval (1996) establece que sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante representaciones semióticas, entendiendo esto como representaciones que utilizan signos, símbolos, letras, lenguaje natural, etc. Estas representaciones se dan en diferentes registros semióticos tales como el verbal, algebraico, numérico y gráfico, siendo éstos imprescindibles para comprender el objeto matemático.

Un problema clave en el aprendizaje de la Matemática es la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación. La confusión conduce a una especie de aprisionamiento del objeto por el registro donde se ha producido su representación y difícilmente podrá aplicarse fuera del contexto donde ha sido ha generado.

Según Guzmán (1998) retomando los aportes de Duval, para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas. El trabajo con los diferentes registros de representación de un concepto y el proceso de convertir un registro en otro permite construir la noción del concepto evitando que se confunda al objeto matemático con su representante, lo cual suele ocurrir cuando no se da la comprensión conceptual del mismo.

El uso de diversos de diversos sistemas de representación semióticos en un mismo objeto matemático fortalece la capacidad cognitiva del individuo enriqueciendo sus representaciones mentales. Para Duval (1996), "en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización" (p.181). En el marco de esta teoría, las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.

Si nos preguntamos acerca de la conceptualización que realizan los estudiantes del objeto matemático $\sqrt{2}$ a partir de este libro de texto y tenemos en cuenta que, según los trabajos de Duval, el proceso de comprensión se favorece por el uso de al menos dos registros, podríamos decir que al privilegiar únicamente el registro numérico no se estaría favoreciendo realmente la comprensión del concepto. Es decir, el hecho de trabajar en un único registro podría favorecer errores como confundir el objeto con su representación y en este caso la representación utilizada es una expresión decimal aproximada del mismo dada por la calculadora por lo cual los estudiantes fácilmente podrían confundir el objeto matemático $\sqrt{2}$ con una representación decimal aproximada.

De esta manera, la conceptualización deficiente del objeto estaría en no darle la entidad de número, ya que no se trabaja sobre el sentido del mismo, y pensar que es simplemente el resultado de una cuenta que se puede visualizar en el visor de la calculadora.

Estos errores de naturaleza cognitiva, serían consecuencia, en algún grado, del tratamiento del tema que realiza el docente, de los ejemplos que representa, de los ejercicios y problemas que selecciona y propone, por lo cual lo podemos clasificar como errores didácticos. Siguiendo únicamente este libro de texto, se corre el riesgo de que los estudiantes queden atados a una única representación por lo que debería estar atento el docente a proponer actividades extras que permitan la conversión entre los distintos registros de representación.

Por lo tanto, vemos que se fomenta la mecanización de procedimientos y se recurre al registro verbal para realizar afirmaciones que no tienen correlación con lo que los alumnos pueden interpretar de lo trabajado en registro numérico. De esta manera, los alumnos podrían no comprender el concepto de número irracional pues es preponderante el método de la observación de lo que muestra el visor de la calculadora por sobre cualquier otro que esté más vinculado a la definición.

En relación al papel de la definición en el libro de texto y su utilización, podemos decir que la misma aparece totalmente desvinculada de las actividades. Observamos que en las actividades previas no se realiza un tratamiento que les permita a los estudiantes aproximarse a la comprensión del concepto de número irracional que posteriormente se define y las actividades posteriores a la definición tienen una complejidad tan baja que pueden abordarse prescindiendo de cualquier tipo de definición. Todas las actividades apuntan a una resolución donde apelar únicamente a la imagen conceptual daba por válida la respuesta, sin pretender la formalización de la respuesta utilizando la definición

conceptual. A partir de este tratamiento, se podría identificar como norma que "alcanza con observar lo que está de manifiesto, no hace falta utilizar las definiciones".
De esta manera, teniendo en cuenta que la imagen conceptual es a lo primero que apela un estudiante en el plano intuitivo, puede suceder que a partir de esta norma los estudiantes se queden únicamente en este plano. Es decir, podría suceder que en actividades futuras el estudiante considere más operativo y accesible poner en juego solamente modelos superficiales como el de la simple observación y prescindir de definiciones y argumentos válidos matemáticamente, ya que este es el tipo de argumentos que se promovieron y aceptaron como válidos en este libro de texto.
Si se tiene en cuenta el vínculo del alumno con el quehacer matemático, resulta interesante indagar sobre una posible visión de la actividad matemática fomentada en este libro de texto. Los estudiantes podrían no concebir a la Matemática como una disciplina en la que sus objetos deben tener significado y sentido, sino como una colección de símbolos, reglas y procedimientos de forzosa aplicación que se manipulan mecánicamente. Esto debido a que en el libro de texto pareciera favorecerse la idea de que "la Matemática se aprende por repetición de ejercicios".
Es decir, bajo la norma de que "hacer Matemática consiste en realizar procedimientos de forma mecánica", los alumnos tendrían una concepción falsa de lo que la Matemática es. Se estaría promoviendo una visión de la Matemática como algo mecánico y acabado, donde los estudiantes tienen que llevar a cabo procedimientos de manera automática y no ser un pensador independiente con juicio crítico. Esto se encuentra vinculado a una visión *absolutista* de la Matemática (Ernest, 2000), "bajo este punto de vista las Matemáticas son consideradas como un cuerpo de sabiduría objetivo, absoluto, cierto e inmutable" (p. 2). Estas concepciones absolutistas que se extienden en el aula juegan un papel muy importante en la posible formación de una imagen negativa de la Matemática en los alumnos. Tareas rutinarias como las analizadas, que sirven para la aplicación de procedimientos mostrados anteriormente lejos de incentivar a los estudiantes pueden promover en ellos una "fobia a la Matemática". Al respecto, Ernest (2000) señala que "la opinión generalizada de los profesores de matemáticas es que las matemáticas escolares deben estar en contra de esa mala imagen y contrarrestarla con una imagen atractiva, demostrando que son útiles y despertando la motivación de alguna otra forma" (p. 3). Esta forma limitada de concebir a la Matemática, que la circunscribe sólo a la resolución de ejercicios, excluye acciones como estimar, comparar, anticipar, argumentar, etc., las cuales podrían no ser consideradas como parte del hacer matemático por los alumnos que tengan como referencia este libro de texto. De esta manera, se estaría percibiendo a la Matemática como algo fijo, pensando que su trabajo se limita a la resolución de ejercicios. Esta concepción obstaculiza, por ejemplo, la enseñanza por medio de una situación-problema, ya que ante la mínima dificultad o incertidumbre sobre qué se debe hacer, el alumno posiblemente decida que el grado de dificultad es muy elevado, y que no cuenta con los conocimientos necesarios para resolver el problema.
En el análisis realizado se identifica cómo se favorece el aprendizaje memorístico y mecánico sin promover situaciones en las que el alumno tenga que argumentar. Estas tareas de baja complejidad podrían promover en los estudiantes la formación de diversas imágenes conceptuales incorrectas desde el punto de vista matemático, como por ejemplo que $\sqrt{2}$=1,414213562.

Predomina la utilización de argumentos que no pueden clasificarse como pruebas matemáticas:

- En un caso por influencia externa, depositando la autoridad en la calculadora. Por ejemplo, “si el número que muestra el visor de la calculadora cubre todos los lugares, entonces tiene infinitas cifras decimales”.
- En el otro, por influencia interna, extrayendo conclusiones a partir de lo observado en un pequeño número de casos. Promoviendo la siguiente norma: “todo lo que se observa a partir de algunos casos, es válido en general”.

La propuesta didáctica se centra en la operación en un nivel más intuitivo y menos formal por una cuestión de complejidad, pero esto en lugar de facilitar la comprensión del número real parece añadir dificultades para entender el concepto.

Si bien en el libro de texto se incluye la definición formal de número irracional, ésta no tiene correlación con lo desarrollado en el resto del libro. Teniendo en cuenta que la representación visual tiene predominio sobre la verbal, es muy probable que los estudiantes tiendan a resolver las actividades apelando únicamente a sus imágenes conceptuales y no a la definición. Si a esto le agregamos un abordaje en el que el vínculo entre la imagen conceptual y su definición conceptual está totalmente ausente, no se estaría dando lugar a que se puedan manifestar las contradicciones entre las distintas partes de la imagen conceptual. En consecuencia, al no hacerse evidentes dichas contradicciones no es posible que se genere conflicto cognitivo que le permita al estudiante tomar conciencia del error.

Por lo tanto, es importante estar atentos a las imágenes conceptuales que desde este libro de texto se promueven ya que a partir de las mismas se pueden promover diversos errores en las concepciones de los estudiantes de manera inconsciente. En resumen, las imágenes conceptuales identificadas en este análisis presentaron distintas componentes:

- *Vinculadas al visor de la calculadora:*

1. Ver cualquier número que llene el visor de la calculadora y pensar que es irracional. Por ejemplo, el número 2,367891682 como cubre completamente el visor de la calculadora eso implica que es irracional.
2. Ver cualquier número con cifras repetidas y pensar que es periódico. Por ejemplo, el número 2,367367367 como llena el visor de la calculadora eso implica que es un “número periódico de período 367”.

- *Vinculadas a frases:*

1. “Lo que muestra el visor de la calculadora siempre es correcto”.
2. “La tendencia que se observa en el visor de la calculadora siempre se mantiene en las siguientes cifras decimales”
3. “Para saber si la expresión decimal de un número tiene infinitas cifras decimales tengo que observar que el visor de la calculadora se encuentre completamente cubierto”.
4. Ver a $\sqrt{2}$ o a $\frac{1}{3}$ y no darle la entidad de número pensando que son “cuentas por realizar”. Por ejemplo, al ver $\sqrt{2}+1$ podrían interpretarlo como una cuenta a realizar y no como un número irracional. Lo que podría llevar a que los alumnos no diferencien un número de su aproximación, interpretando que lo que aparece en visor de la calculadora es el valor que representa el número y no una aproximación del mismo.
5. “Todo lo que se observa a partir de algunos casos, es válido en general”. Lo que llevaría a que los estudiantes justifiquen afirmaciones que no siempre son válidas por el simple hecho de que en algunos casos se verifican.

6. “Hacer Matemática consiste en realizar procedimientos de forma mecánica”.

- *Vinculadas a la notación:*

1. Los puntos suspensivos son usados con dos significados diferentes. En números periódicos significan que “continúa con la misma tendencia” mientras que en números irracionales indican que continúan pero “no con la misma tendencia”. Esto refuerza la idea que “En Matemática un mismo símbolo puede tener significados diferentes y no hace falta aclararlo porque debe entenderse en cada caso”.

6. A modo de cierre

Observamos que en este libro de texto se realiza una introducción a los números irracionales en un entorno aritmético, apoyándose fuertemente en el uso de la calculadora. Teniendo en cuenta que el surgimiento a lo largo de la Historia de este tipo de números se ha dado en contextos geométricos podría haberse considerado alguno de los problemas históricos que dieron origen a estos conocimientos matemáticos como herramientas para construir el significado de estos números. Este tipo de abordaje podría permitirles a los alumnos que tengan una mirada de la Matemática como construcción social y no como algo rígido completamente construido tal como pareciera desprenderse de las actividades analizadas anteriormente.

En relación a la construcción del concepto de número real observamos que se opta por un tratamiento superficial del tema, conectado a muy pocos ejemplos y sin argumentos válidos que justifiquen las afirmaciones realizadas, hecho que puede desencadenar en que los estudiantes no comprendan plenamente el concepto de número real. Además, pudimos observar cómo estos errores didácticos pueden fomentar concepciones erróneas en los estudiantes, hecho que posteriormente puede verse reflejado en usos incorrectos derivados posiblemente de la falta de significatividad para los alumnos que tiene este concepto.

Asimismo, también pudimos identificar posibles errores asociados a las concepciones erróneas relacionadas a lo que significa hacer Matemática, para los alumnos que estudian a partir de este libro de texto podrían creer erróneamente que validar en Matemática significa indicar lo que observan en el visor de la calculadora o dar algunos ejemplos que muestren lo que se afirma, hecho que no puede considerarse como prueba matemática y que puede producir diversos errores.

Sería interesante ofrecer la posibilidad de que sean los estudiantes quienes en su afán de resolver se encuentren ante el desafío de justificar la validez de alguna de las tantas afirmaciones que se dan por ciertas sin argumento alguno o en el mejor de los casos a partir de ciertos ejemplos. Con el fin de evitar fomentar los diversos errores identificados en el presente trabajo, habría que explorar las posibilidades didácticas en la introducción de los números reales que permitan construir su significado. Para ello, resulta interesante tener en cuenta los diversos obstáculos que se presentaron en la construcción de este concepto a lo largo de la Historia como así también los obstáculos del tipo didácticos que desde la propuesta didáctica del libro se pueden dar, previendo los diversos errores que a causa de dichos obstáculos se pueden producir.

7. Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas. *Estudios educativos en Matemáticas, 18 (2)*. Francia.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques. *Rechetches en didactique des Mathématiques*, *4 (2)*, 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherchesen didactique des mathématiques 7 (2)*, 33-115.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs* (pp. 41-63). Ottawa: CIRADE.

Calderón, D. y Corredor, L. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(1)*, 5-21.

Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez M. (2008). Un estudio de aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. *Suma 58*, 25-40.

Corry, L. (1994). La Teoría de las Proporciones de Eudoxio Vista por Dedekind, *Mathesis, 10*, 35-68.

Crespo Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa, 11(41)*, 21-30.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hit (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ernest P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno. Revista de Didáctica de la Matemática, 23,* 9-28.

Fischbein, E., Jehiam R. y Cohen, C. (1995). The concept of irracional numbers in high – school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics 29*, 29 – 44.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA 7(2*), 127-170.

Godino, J. , Font, V., Wilhelmi, M. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque Ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27(1)*, 59-76.

González Urbaneja, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Revista Sigma 33,* 101- 130.

González V. y Rodríguez M. (2006). Un modelo para evaluar la validación matemática. *Educación Matemática 18 (3)*, 103-124.

Guzmán, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5-21.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* XIII No. 1, 7-103.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad, Vol.1.

Marino T. y Rodríguez M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma XXX (2)*, 165-186.

Matera, G. (2012). *Análisis matemático: Un enfoque constructivo*. Los Polvorines. Universidad Nacional de General Sarmiento.

Nápoles Valdés, J. (2009). Elementos para una historia de las Matemáticas Griegas.

Pareja Heredia, D. y Urrea Henao, J. (2007). *Matemáticas y filosofía en el aula de clase*.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J. Kilpatrick y L. Rico Romero (Eds.)*, Educación matemática: errores y dificultades de los estudiantes* (pp.69-96). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sirotic, N. y Zazkis, R. (2007). Irrational Numbers: The Gap Between Formal And Intuitive Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 49-76.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico Romero (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154*)*. Barcelona: Universidad de Barcelona. ICE.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 19-52.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

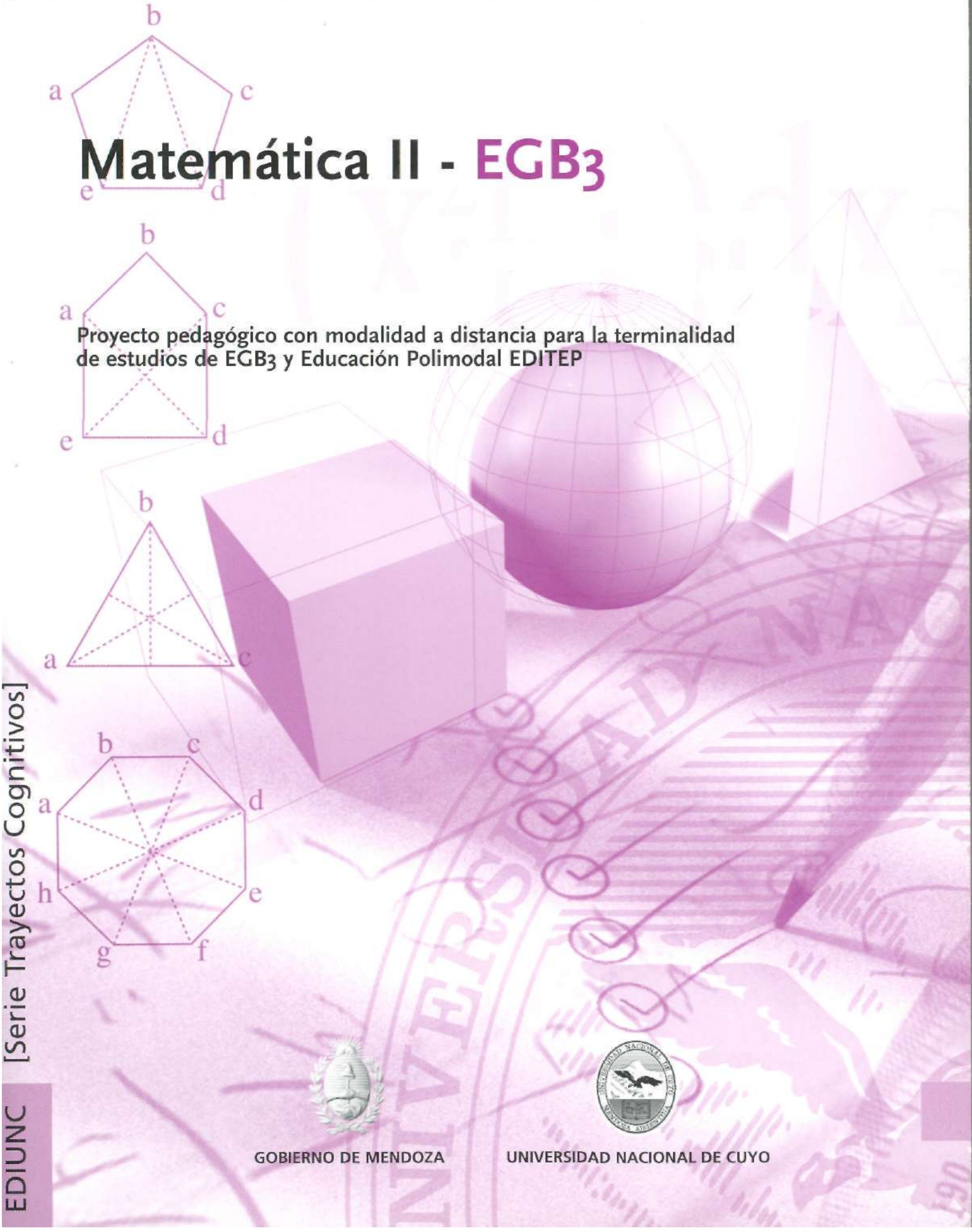
Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17,* 5-31.

Anexo

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello, Adriana Moreno, Ana Repetto

Matemática II - EGB3

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP



GOBIERNO DE MENDOZA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

[Serie Trayectos Cognitivos]

EDIUNC

Matemática II - EGB3

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

Universidad Nacional de Cuyo (Mendoza, República Argentina)

Rectora: Dra. María Victoria Gómez de Erice
Vicerrector: Ing. Agr. Arturo Somoza
Secretaria de Extensión Universitaria: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú
Directora General del CICUNC: Lic.. Martina Funes
Directora de Educación a Distancia: Mgter. Fernanda Ozollo
Director de Nuevas Tecnologías: Mgter. Ornar Arancibia

Gobierno de Mendoza

Gobernador: Ing. Julio Cobos
Ministro de Justicia y Seguridad Social: Dr. Osvaldo Tello
Directora General de Escuelas: Lic. Emma Cunietti
Subsecretario de Relaciones con la Comunidad, -MJyS-: Lic. Gabriel Conte
Subsecretario de Administración y Gestión Educativa, -DGE-: Lic. Flavio Arjona

Proyecto EDITEP

Responsables del Proyecto
Responsable Institucional: Mgter. Rosa Fader de Guiñazú
Directora de Proyecto: Mgter. Fernanda Ozollo
Coordinadora General del Proyecto: Lic. Mónica Matilla
Coordinador Tecnológico: Mgter. Omar Arancibia

Comité Estratégico del Proyecto
Gobierno de Mendoza -Ministerio de Seguridad y Justicia-: Lic. Luis Romero
Gobierno de Mendoza -Dirección General de Escuelas-: Prof. Eduardo Andrade
Universidad Nacional de Cuyo: Lic. Mónica Matilla, Mgter. Fernanda Ozollo

EDIUNC

Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo
Director: Prof. René Gotthelf

CICUNC

EDIUNC
Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo

REUN

Dirección General de Escuelas
Gobierno de Mendoza

Ministerio de Justicia y Seguridad
Gobierno de Mendoza

Universidad Nacional de Cuyo
Secretaría de Extensión Universitaria

Matemática II - ECB3

Proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal EDITEP

Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriana Moreno, Ana Repetto

EDIUNC
Mendoza, 2005

Matemática II - EGB3

Coordinación de la elaboración del libro
Marcela Orlando

Asesora experta
Norma Pacheco

Producción de textos y procesamiento didáctico
Cristina Adunka, Gabriela Mattiello,
Adriano Moreno, Ana Repetto

Procesamiento didáctico final
Diego Díaz Puppato

Corrección de estilo
Luis Emilio Abraham, Gonzalo Casas, Pilar Piñeyrúa

Diseño de cubierta e interior
Coordinador
Claudio E. Cicchinelli
Diseñadores
Carolina Chiconi, Fabricio de la Vega, Natalia Lobarbo,
Julieta Martín, Lorena Pelegrina
Ilustradores
Matías Arges, J. Mariano Ruszaj

Primera edición. Mendoza, 2005

Publicación de la Secretaría de Extensión Universitaria de la Universidad Nacional de Cuyo
Serie Trayectos Cognitivos, N° 29

Matemática II : EGB 3 : proyecto pedagógico con
modalidad a distancia para terminalidad de estudios de EGB 3
y Educación Polimodal EDITEP / Cristina Adunka ... [et al.] -- I[a]. ed. -
Mendoza: EDIUNC, 2005.
302.; 29,7 cm. - (Trayectos cognitivos; 29)

ISBN 950-39-0195-2
1- Matemática 2- Geometría
I- Adunka, Cristina II- Mattiello, Gabriela III- Moreno, Adriana IV-Repetto, Ana

O

Impreso en Argentina - Printed in Argentina
ISBN 950-39-0195-2
Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723
EDIUNC, 2005
Centro Universitario, 5500 Mendoza
República Argentina

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Si usted se detiene a pensar en su vida de todos los días, verá que en muchas ocasiones se encuentra con situaciones en las que necesita hacer uso de los conocimientos matemáticos que aprendió en la escuela primaria o, tal vez, después. Esto nos sucede en la economía del hogar (que nos enfrenta al delicado equilibrio entre el dinero que ingresa y el que se gasta), al hacer una compra o solicitar un crédito. También en el ámbito del trabajo, cuando tenemos que hacer un croquis, medir distancias o leer un gráfico. Es decir, constantemente tenemos que utilizar lo que aprendimos en matemática para resolver pequeños o grandes inconvenientes.

En este curso le proponemos profundizar lo que sabe y avanzar en el aprendizaje de nuevos conceptos y procedimientos que le sirvan de herramientas para su trabajo y su vida cotidiana y que a su vez, le permitan resolver con más seguridad las situaciones que se presentan en los contenidos propios de esta área de estudio.

¿Qué esperamos de usted al finalizar este curso?

Al final de este curso esperamos que usted pueda: identificar, interpretar y utilizar, en la resolución de problemas, algunos conceptos matemáticos relacionados con: los números racionales, sus cálculos y operaciones, figuras planas y tridimensionales, las medidas y la medición, los gráficos y los distintos lenguajes matemáticos.

Esto significa que al finalizar el curso usted podrá:

• Comprender y saber resolver problemas justificando los procedimientos empleados.

• Identificar e interpretar números racionales, sus cálculos y operaciones.

• Identificar, describir e interpretar algunos conocimientos geométricos referidos a figuras planas y tridimensionales y a sus propiedades.

• Describir, comunicar e interpretar información matemática utilizando distintos lenguajes.

• Interpretar y usar nociones relacionadas con las medidas y los procedimientos de medición.

¿Qué vamos a estudiar? ¿Cómo vamos a hacerlo?

El curso se ha organizado en tres ejes de contenidos: el primero se denomina Conjuntos numéricos, en el segundo nos abocaremos a Relaciones y funciones y en el tercero trabajaremos las Nociones geométricas más importantes.

Durante el cursado estudiaremos la resolución de distintas situaciones cotidianas, utilizando esencialmente dos conjuntos numéricos: enteros y racionales, sus cálculos y operaciones. También abordaremos el sistema de referencias cartesianas en el plano. Vamos a reconocer algunas figuras y entes geométricos, sus propiedades y clasificaciones. Asimismo, trabajaremos con algunas nociones de relaciones y funciones numéricas: variables, tablas, diagramas, expresiones algebraicas, gráficas, fórmulas y algunas nociones de estadística.

Esperamos que con este curso usted pueda descubrir los porqués de algunos procedimientos matemáticos. Generalmente, será usted el que, a través de algunas actividades o propuestas, construirá distintas nociones y conceptos.

Por ello, es muy importante que siga, paso a paso, las indicaciones de este material, para que pueda construir, junto con sus compañeros y profesores, cada uno de los aprendizajes.

Las actividades que se proponen tienen dos funciones principales: que pueda aplicar y relacionar lo que sabe o ha estudiado anteriormente y que pueda construir nuevos aprendizajes de contenidos, que ahora probablemente desconoce. Le recomendamos que no saltee partes del material porque las necesitará para poder avanzar con lo que se encuentre más adelante.

En algunos casos trabajaremos con nociones que por su complejidad o por su origen no vamos a comprobar, las aceptaremos como verdaderas.

Por último, le queremos decir que en matemática, como en muchas materias, el error es parte del aprendizaje. Necesitará, para avanzar en el material, hacer algunas "pruebas" de lo que está estudiando. Realice todos los intentos necesarios, pero nunca baje los brazos.

¿Cómo está organizado este material?

El material entonces está organizado en tres capítulos, uno para cada eje de contenidos, según señalábamos anteriormente.

EJE I: Conjuntos numéricos

EJE II: Relaciones y funciones. Nociones de probabilidad y estadística

EJE III: Nociones geométricas

Recuerde que todas las actividades que realizará se presentan con un icono . Estos iconos son:

PENSAR. Este icono indica que tiene que detenerse un momento a analizar lo que ha leído. En el caso de Matemática es fundamental que lea la información que indica este icono y la memorice también, porque en ella se incluye la "formalización" de lo trabajado, es decir, su conceptualización en términos matemáticos.

TRABAJAR EN FORMA INDIVIDUAL. Le indica que la actividad de aprendizaje propuesta la realizará usted solo.

TRABAJAR EN FORMA GRUPAL. Significa que la actividad de aprendizaje propuesta la realizará con sus compañeros.

RECORDAR. Este icono significa que usted leerá información importante a la que tiene que prestar especial atención.

LEER. Indica la lectura de otros textos especiales para comprender los temas.

Le recordamos también que usted, dentro del material, dispone de espacios en blanco (en cada hoja) para realizar los cálculos que necesite a fin de resolver los ejercicios que se le presenten. También tendrá, al finalizar cada eje, hojas con líneas de punto para tomar apuntes de las explicaciones de su profesor. Puede anotar también allí sus dudas, preguntas o las ideas que vayan apareciendo a medida que lee el material; justamente para esto está reservado el espacio de NOTAS.

¿Cómo trabajaremos?

Esta propuesta que le hacemos está pensada con modalidad a distancia. Se preguntará ¿qué características tiene esta modalidad? Pues bien, esto significa que no asistirá todos los días a clases durante cuatro o cinco horas, sino que irá realizando el curso apoyado fundamentalmente por tres ayudas valiosas que le sugerimos aproveche al máximo:

a) Por un lado, las clases con su profesor y su grupo de compañeros, donde recibirá las explicaciones de los contenidos y se realizarán las actividades previstas. En estos encuentros usted podrá preguntar todo lo que no entiende. No dude en hacerlo, su profesor está para ayudarlo y apoyarlo en su proceso.

b) Por otro lado, tendrá a su disposición este material, para que lo lea y vaya siguiendo el curso, tanto en las clases como en las horas de estudio que deberá dedicarle diariamente. Este curso le demandará entre 4 y 6 horas de estudio por semana. Comience a organizar sus tiempos para llevarlo al día.

c) Y de ahora en adelante aparece una nueva figura en su proceso de aprendizaje: EL TUTOR. El tutor es un profesional que lo acompañará en todo su proceso de aprendizaje, tanto en este curso como en todos los que realice dentro del **noveno** año. Seguramente usted se preguntará: ¿cómo hago para estudiar?, ¿cómo organizo mi tiempo para llevar al día el estudio de los cinco cursos que forman el noveno año?, ¿de qué se trata esto de una modalidad a distancia?, ¿qué hago si tengo dudas sobre los textos del material o alguna de sus actividades y falta tiempo hasta que vea al profesor en las clases?

noveno año

Usted empieza ahora el noveno año de la EGB3 y en él tendrá que hacer y aprobar cinco cursos: Lengua II, Matemática II, Ciencias Naturales II, Ciencias Sociales II y Tecnología II.

Seguramente éstas y otras cuestiones pueden aparecer a medida que vaya realizando el material. Es justamente el tutor el que estará para solucionar esto. Usted se comunicará con él a través del "campus virtual" que la Universidad Nacional de Cuyo ha creado especialmente para este proyecto. Recuerde que en el último curso estudiamos de qué forma realizarlo. Si tiene dudas, vuelva sobre ese material y las explicaciones que le dio el profesor oportunamente.

No dude en consultarle a su tutor; él será su compañero en este camino y su tarea es fundamentalmente colaborar con usted para que tenga la menor cantidad de inconvenientes y dudas en su recorrido.

¿Cómo vamos a evaluar este curso?

En este curso vamos a tener dos tipos de evaluaciones:

a) de proceso y
b) de resultado.

a) Evaluaciones de proceso

Como usted sabe cada curso se organiza en ejes de contenidos dentro de los cuales hay distintas actividades de aprendizaje. Por cada eje de contenidos usted tendrá que realizar "trabajos prácticos" que entregará a su tutor vía mail (campus virtual). Él le indicará cuáles son y en qué momentos se los debe entregar. Por eso resulta importantísimo que no pierda el contacto con él y entre al campus periódicamente. Estos trabajos prácticos serán corregidos y se les asignará una nota numérica.

A su vez, para cada eje de contenidos, le propondremos una evaluación sobre todos los contenidos desarrollados dentro del mismo y que usted ha ido estudiando con el material. Esta evaluación podrá resolverla de dos formas distintas:

• con el profesor durante las clases.

• O bien en su casa. En este caso, su tutor le enviará a través del campus virtual la evaluación y usted la resolverá y entregará en papel a su profesor durante las clases.

Tanto su profesor como el tutor le irán indicando las fechas y cuál de estas dos formas se utilizará para realizar las evaluaciones. Estas evaluaciones de eje serán corregidas y también se les asignará una nota numérica.

RECORDAR

Con las notas de los trabajos prácticos entregables y de la evaluación de eje, se hará un promedio numérico y así se obtendrá la calificación que le corresponde a ese eje de contenidos. De la misma manera se procederá con todos los ejes previstos para el curso.

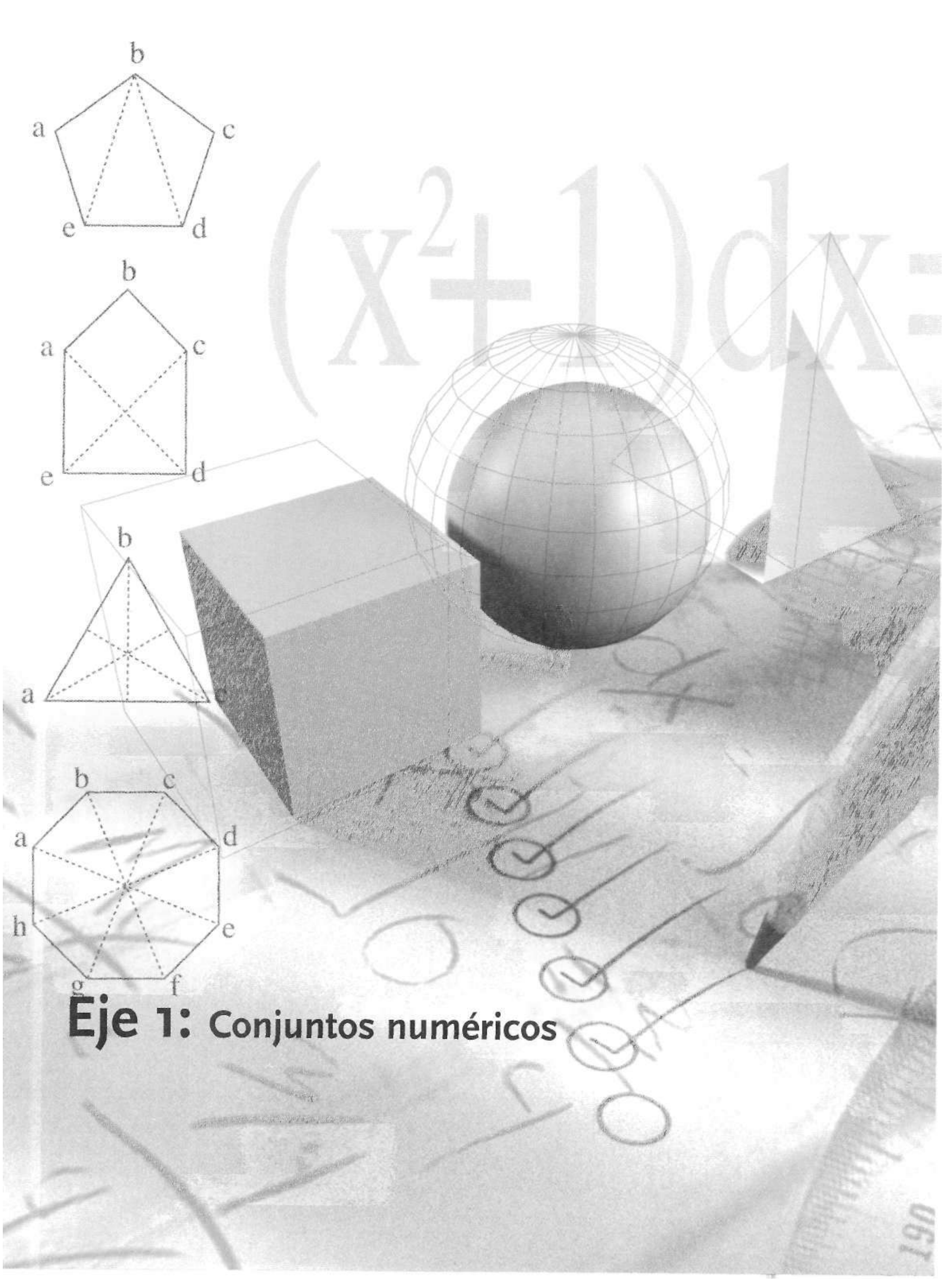
b) Evaluación de resultado

Al finalizar el curso se realizará una evaluación integradora, es decir, una evaluación que nos permita conocer cómo ha sido su proceso en el aprendizaje de todos los contenidos del curso. Esta evaluación se hará siempre en las clases con su profesor y también serán corregidas con una calificación numérica.

RECORDAR

La calificación definitiva del curso resultará de promediar las notas que obtuvo en cada eje de contenidos junto con la que obtuvo en la evaluación integradora.

En todos los casos, para calificar utilizaremos una escala numérica de 1 a 10, debiendo obtener como mínimo siete para aprobar el curso. En caso de no aprobar en esta instancia, usted tendrá derecho a una "evaluación recuperatoria", es decir, tendrá tiempo para volver a estudiar el material antes de que sea evaluado nuevamente. Esto también se lo informará su tutor.



Eje 1: Conjuntos numéricos

¿Qué esperamos que usted logre cuando termine este eje?

Al final de este eje esperamos que usted pueda:

• Comprender y saber resolver problemas, seleccionando el tipo de razonamiento, interpretando los resultados y justificando los procedimientos empleados.

• Identificar e interpretar conocimientos referidos a números racionales, sus cálculos y operaciones.

¿Qué vamos a estudiar?

Algunos de los contenidos más importantes que vamos a estudiar son:

• Números reales, racionales e irracionales. Intervalos.

• Criterios de divisibilidad.

• Las cuatro operaciones básicas con números racionales bajo distintas notaciones. Potencia. Radicación. Propiedades.

• Expresiones algebraicas. Operaciones sencillas con expresiones algebraicas. Ecuaciones.

Un pequeño comentario acerca de lo que usted va a realizar en este comienzo. Trabajaremos con los distintos conjuntos de números o conjuntos numéricos. Para referirnos a cada uno de esos conjuntos utilizaremos letras mayúsculas. Así por ejemplo usaremos **IN** para designar el conjunto de números naturales, es decir el conjunto formado por los números: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; etc.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

ACTIVIDADES

1. Lea con atención y *resuelva cada una de* las siguientes situaciones:

Situación 1

EQUIPOS	PUNTOS
River	33
Boca	31
Racing	27
Talleres	25
Quilmes	24
Vélez	23
Banfield	22
Arsenal	21
Colón	19
San Lorenzo	17
Estudiantes	15

La siguiente tabla muestra algunos equipos de fútbol y los puntos que tienen hasta la fecha:

a) ¿Por qué *cree que* los equipos *aparecen en la tabla en ese orden?*

b) ¿De qué depende la posición *de los* equipos en *la* tabla?

Los equipos están ordenados según los puntos alcanzados hasta la fecha, desde el equipo que tiene más puntos al que tiene menos. Este orden de los equipos permite determinar qué lugar ocupa cada equipo en la tabla de posiciones.

c) Así por ejemplo: ¿qué lugar ocupa en la tabla el equipo de Arsenal? ....

d) ¿Y el equipo de Quilmes? ....

e) Para responder a las preguntas: ¿Qué hizo?, ¿qué estrategia utiliza?

....

....

Coincidirá en que para indicar el lugar de un equipo lo que se hace es contar-numerar o simplemente numerar (1, 2, 3, ...) desde el primer lugar hasta llegar al lugar del nombre del equipo que se quiere ubicar. Por ejemplo, para decir qué lugar de la tabla ocupa el equipo de Colón, se numera desde el lugar que ocupa el primer equipo (River) hasta llegar al lugar que ocupa Colón, de esta manera: "1" (River), "2" (Boca), "3" (Racing), y así hasta llegar a "9" (Colón). Es decir que Colón ocupa el lugar número nueve en la tabla de posición. Esto también se expresa indicando el nombre del lugar número nueve, es decir noveno y se suele decir que "Colón es el noveno en la tabla de posiciones".

De manera similar, se puede decir que Arsenal ocupa el lugar número 8 en la tabla de posiciones, es decir el octavo lugar (el lugar número 8 recibe el nombre de octavo) y también que Quilmes ocupa el lugar número 5, es decir el quinto lugar en la tabla de posiciones (el lugar número 5 se llama quinto).

f) ¿Cuál equipo ocupa el tercer lugar?, ¿y cuál ocupa el décimo lugar?

....

....

Situación 2

Martín nació en el año 1987. ¿Cuántos años tenía en 1997?

....

Para averiguar los años que tenía Martín en 1997 usted pensó en el cálculo: 1997 - 1987= 10, o lo que bien pudo hacer es contar los años transcurridos desde 1987 hasta 1997.

En estas dos situaciones sencillas se han utilizado expresiones como "están ordenados", "es el quinto en la tabla", "numerar", "contar".

Los números que se utilizan para contar - enumerar, es decir para responder a la pregunta ¿Cuántos? y para numerar, es decir para responder a la pregunta ¿En qué lugar? (contar-numerar) son los números naturales.

NOTAS

PENSAR

El conjunto de los números naturales se simboliza con la letra $\mathbb{N}$, *y en símbolos se puede expresar:*

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$

Se lee: el conjunto $\mathbb{N}$ *es igual al conjunto formado por los elementos 0, 1, 2,....*

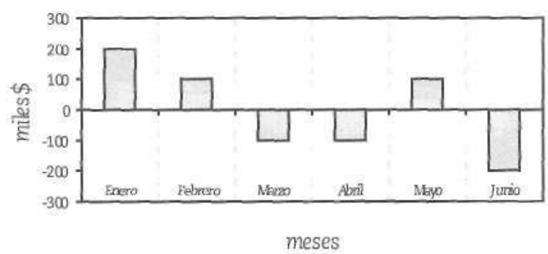
Recuerde que los puntos suspensivos indican que se pueden seguir escribiendo más elementos.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

ACTIVIDADES

Situación 1

Variación de Finanzas



1. En el gráfico se muestran las pérdidas y ganancias, o sea la variación de las finanzas, de una empresa durante el primer semestre.

a) Indique en qué meses la empresa tuvo pérdidas y en qué meses tuvo ganancias.

....

b) ¿Cómo se diferencian las cantidades que indican pérdidas de las que indican ganancias?

....

c) Analice si entre mayo y junio la empresa tuvo pérdidas o ganancias.

....

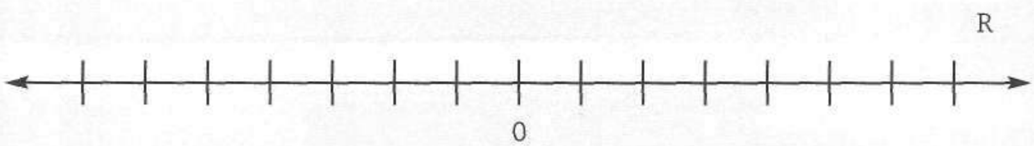
d) Calcule la diferencia del estado financiero entre los meses de enero y febrero.

Está claro que utilizando los números naturales solamente no es posible describir la variación de finanzas. Tampoco sería posible calcular la diferencia del estado financiero de los meses de enero y febrero con la siguiente resta de números naturales: 100 - 200 =A partir del análisis de esta situación se ve la necesidad de "ampliar"el conjunto de los números naturales. ¿Cómo se lleva a cabo esta ampliación?

¿Cuál es el número opuesto al número 5? ....

¿Cuál es el número opuesto al número -3? ....

Para encontrar el número opuesto al número 5, hay que pensar en un número que, ubicado en la recta numérica, esté a la misma distancia del 0 que el número 5. Este número es el número -5. Es decir, que tanto el 5 como el -5 están a la misma distancia del cero. Ubique en la siguiente recta numérica los números 5 y -5.



2. Ubique en la recta numérica anterior el número -3 y su opuesto.

3. ¿Por qué el número 3 es el opuesto del número -3?

....

....

NOTAS

PENSAR

Para cada número natural "a", distinto de cero, existe su opuesto "-a".

El conjunto formado por los números naturales y todos los números opuestos a ellos forman un nuevo conjunto que es el de los números enteros. También podemos decir que el conjunto de números enteros está formado por los números enteros positivos (o naturales) y los números enteros negativos (números opuestos a los números naturales).

El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$, cuya notación es:

$\mathbb{Z}$= { ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Se lee: el conjunto de los números enteros es igual al conjunto formado por los elementos ...-3, -2, -1, 0, 1, ...

Los números enteros sirven para expresar cantidades de temperatura sobre y bajo cero, montos de deudas como también para resolver el punto d) de la situación 1, que pide calcular la diferencia en el estado financiero de los meses de enero y febrero.

Recuerde que el cálculo a resolver es: 100 - 200 y que en el conjunto de los números enteros es posible resolverlo:

- 100 - 200= -100

El resultado es -100. Este número es negativo, lo que indica que la empresa tuvo pérdidas en un monto de $100.000 entre los meses de enero y febrero. Puede observar, a través de este ejemplo, que es posible resolver restas entre dos números enteros cualesquiera y que se obtiene otro número entero.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Hasta el momento con el conjunto de los números naturales y enteros hemos solucionado problemas propios del quehacer cotidiano tales como ordenar, interpretar con cantidades negativas situaciones como temperatura bajo cero, profundidad y altura con respecto al nivel del mar, interpretación de las finanzas de una empresa, por nombrar sólo algunas. Como verá ahora, a partir del análisis de las siguientes situaciones, será necesario ampliar el conjunto de los números enteros.

Situación 1

Usando los números enteros no es posible escribir expresiones como las que se muestran a continuación:

a) La temperatura exterior es de 25,5°C bajo cero.

RECORDAR

Recuerde que 25,5 °C es una cantidad de temperatura, donde el 25,5 es la medida de dicha cantidad (el número) y °C (grados centígrados) es la unidad usada para medir la temperatura.

b) El 70% de los accidentes automovilísticos se deben al exceso del consumo de alcohol del conductor. Esto significa que de cada 100 accidentes automovilísticos, 70 de ellos se deben a excesos de consumo de alcohol de los conductores.

c) La selva americana ocupa las cinco novenas partes de los 9.300.000 km^2 de la superficie de las selvas del mundo.

d) Por último, se pretende encontrar el cociente exacto entre

NOTAS

NOTAS

el número 8 y 5, es decir resolver la división 8 : 5 y encontrar un número que multiplicado por 5 dé por resultado 8. Está claro que dicho cociente no es un número entero ya que no existe ningún número entero que multiplicado por 5 dé por resultado 8.

Usted observará, a través de los ejemplos mencionados, que en a) la medida de cantidad de temperatura exterior es 25,5 y éste no es un número entero, en b) que 70%, es equivalente a expresar este porcentaje con el número $\frac{70}{100}$, (expresado en forma fraccionaria) y que tampoco es un número entero, en c) que para indicar qué parte del total de la cantidad de superficie de selvas del mundo corresponde a la selva americana se usa el número $\frac{5}{9}$, que no es un número entero y finalmente que, en d), el cociente de la división entre los números enteros 8 y 5 no es exacto en el conjunto de los números enteros. Pues ningún número entero multiplicado por 5 da 8.

El cociente exacto entre 8 y 5 es $\frac{8}{5}$. Puesto que: $8 : 5 = \frac{8}{5}$,

porque $\frac{8}{5} \cdot 5 = 8$ (pues $8 \cdot 5 = 40$ y $40 : 5 = 8$).

Los números que se han empleado tanto para expresar la medida de una cantidad de temperatura, para indicar un porcentaje de accidentes con determinadas características, para señalar una parte de un todo (superficie total de selva del mundo), como para encontrar el cociente exacto de dos números enteros, son números racionales. Los números que pertenecen al conjunto de los números racionales se simbolizan con la letra **Q**.

En las situaciones anteriores se han utilizado números racionales escritos (o expresados) mediante una fracción y también mediante escritura decimal (el caso de 25,5). Más adelante profundizaremos sobre las formas de expresar un número racional.

Por ahora diremos que: **un número racional escrito en forma fraccionaria es el cociente exacto de dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero.**

Por ejemplo:

En un número racional escrito como fracción:

$\frac{a}{b}$, a y b son números enteros y b es distinto de cero, se tiene que:

$\frac{a \longrightarrow \boxed{\text{Numerador (numera, indica cuántas partes)}}}{b \longrightarrow \boxed{\text{Denominador (denomina, da el nombre a las partes)}}}$

Una pregunta: ¿los números naturales y los enteros son también números racionales?

ACTIVIDADES

1. *Resuelva los siguientes cocientes:*

a) $\frac{8}{-2}$ = ... *b)* $\frac{-10}{-5}$ = ... *c)* $\frac{30}{2}$ = ... *e)* $\frac{20}{1}$ = ... *e)* $\frac{-54}{1}$ = ...

Resultados:

a) *-4 porque -4 . (-2) = 8,* ***b)*** *2 porque 2 . (-5) = -10,* ***c)*** *15 porque 15 . 2 = 30,* ***d)*** *20 porque 20 . 1 = 20*
e) *-54 porque -54 . 1 = -54*

A partir de los cocientes obtenidos podemos asegurar que:

1. Cualquier número entero, es posible expresarlo siempre como un cociente exacto de dos números enteros con la condición de que el denominador o divisor sea distinto de cero.

2. Todo número entero se puede expresar como fracción con numerador igual a dicho número y denominador igual a uno.

PENSAR

Podemos asegurar que todo entero es un número racional, por ello se dice que el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) está incluido en el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Esta conclusión se indica simbólicamente: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Se lee: el conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números racionales.

DISTINTAS ESCRITURAS DE UN NÚMERO RACIONAL (FRACCIONARIA, DECIMAL). EXPRESIONES DECIMALES FINITAS Y PERIÓDICAS

ACTIVIDADES

1. *¿Los números 27,5; 1,75 y -25, 5 son números racionales?*

....

2. *Con la calculadora realicen los siguientes cocientes escritos en forma fraccionaria y escriban la expresión decimal que aparece en el visor.*

Notación fraccionaria	*Notación decimal*
$\frac{275}{10} =$	27,5
$\frac{175}{100} =$	
$\frac{-255}{10} =$	
$\frac{7}{-2} =$	
$\frac{4}{9} =$	
$\frac{7}{6} =$	
$\frac{37}{33} =$	1,121212121...

3. Observen, identifiquen y escriban los números racionales cuyas expresiones decimales tienen un número de cifras decimales finito (se pueden contar, las cifras decimales no cubren todo el visor de la calculadora).

....

....

Si en lugar de usar la calculadora realiza el cálculo en un papel, observarán que llegan a un resto cero. Los números racionales que poseen esta característica son ***racionales decimales*** *o simplemente* ***decimales****. Por ejemplo, al realizar el cociente 275 : 100 se obtiene el número racional 2,75 y el resto es cero.*

4. Observen, identifiquen y escriban los números racionales que tienen una expresión decimal en la que se observan (en el visor de la calculadora) infinitas cifras después de la coma (las cifras decimales cubren todo el visor de la calculadora).

....

....

En las expresiones decimales de estos números racionales se observa que algunas cifras después de la coma se repiten indefinidamente. Por ejemplo: 1,12121212.... Por ello, se llaman expresiones decimales periódicas y a la cifra o cifras que se repiten se las denomina período.

Estas expresiones decimales periódicas se pueden expresar de esta forma: $1,\overset{\frown}{12}$.

A continuación se muestran dos cuadros referidos a los puntos 3) y 4), en los que se muestra cada número racional expresado como fracción y en notación decimal, con el propósito de que ustedes comparen las expresiones decimales.

$\frac{275}{10} = 27{,}5$

$\frac{175}{100} = 1{,}75$

$\frac{-255}{10} = -22{,}5$

$\frac{7}{-2} = -3{,}5$

$\frac{4}{9} = 0{,}44444444444444... = 0{,}\overset{\frown}{4}$

$\frac{7}{6} = 1{,}1666666666666666... = 1{,}1\overset{\frown}{6}$

$\frac{37}{33} = 1{,}121212121... = 1{,}\overset{\frown}{12}$

Estos números racionales en su expresión decimal tienen una cantidad finita de cifras decimales, lo que indica que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria se llegará a un resto cero.
Estos números racionales se llaman **números racionales decimales o simplemente números decimales**. Por lo que, por ejemplo, los números $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1,75; 0,23 son números decimales.

Estos números racionales, en su expresión decimal, tienen infinitas cifras decimales, lo que muestra que al realizar la división entre el numerador y denominador de la expresión fraccionaria, nunca se llegará a un resto cero.
Recuerde que con el arco se indican las cifras decimales que se repiten infinitamente, es decir, el período.

PENSAR

Todo número racional puede escribirse en notación fraccionaria -mediante una fracción- o en notación decimal o expresión decimal como un número con coma decimal. Esta expresión decimal puede ser finita o infinita periódica.

ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES

Lea los siguientes ejemplos:

a) $\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b) $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

Al calcular la raíz cuadrada de 4, en el ejemplo a), se busca un número racional positivo que elevado al cuadrado (multiplicado dos veces por sí mismo) dé por resultado 4; dicho número es 2 (resultado de la raíz). De manera similar se procede en el ejemplo b).

NOTAS

NOTAS

Ahora le proponemos trabajar con el cálculo de la siguiente raíz cuadrada: $\sqrt{3}$ (raíz cuadrada de 3). Recuerde que si usted desea calcular esa raíz tendrá que buscar un número que elevado al cuadrado, es decir multiplicado 2 veces por sí mismo, dé por resultado 3. Si prueba con $1{,}5^2$ $(1{,}5 \cdot 1{,}5)$ obtiene 2,25 y es menor que tres. Si ahora prueba con $1{,}7^2$ $(1{,}7 \cdot 1{,}7)$ da como resultado 2,89 y es menor que tres. Quizás pensó en probar con $1{,}8^2$ $(1{,}8 \cdot 1{,}8)$: da por resultado 3,24 y resulta ser mayor que tres.

Si sigue probando con otros valores puede obtener resultados más próximos a tres, pero le será imposible encontrar un número racional que elevado al cuadrado dé exactamente tres.

Si emplea la calculadora encontrará que $\sqrt{3}$, cifras más o cifras menos, es igual a un número en notación decimal como el siguiente:

$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415O5$..... puede observar que las cifras decimales son infinitas y no periódicas, por lo que no es un número racional.

Lo mismo ocurre con otras raíces que tienen la misma característica, es decir, que no dan por resultado un número racional, como son las raíces: $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

A estos números se los denomina **números irracionales**.

ACTIVIDADES

1. *Exprese el resultado de las raíces anteriores en notación decimal:*

a) $\sqrt{7}=$ ....

b) $\sqrt{5}=$ ....

c) $\sqrt{2}=$ ....

a) $\sqrt[3]{7}=$ ....

2. *¿Qué ocurre con la parte decimal de estos números?*

....

Posiblemente pensó en que es infinita, es decir, que tienen infinitas cifras decimales. Pero a esta característica se le agrega otra: las cifras decimales no son periódicas.

Hay otros números que tienen esta misma característica en su parte decimal, como el conocido número pi (π) que es utilizado para calcular la medida de la longitud de la circunferencia ($\pi \cdot d$, donde d es el diámetro) y la medida de la cantidad de superficie de un círculo ($\pi \cdot r^2$, donde r es el radio). La escritura decimal del número "pi" tiene infinitas cifras decimales no periódicas, como se muestra a continuación: $\pi = 3{,}141592653589793238462643383279...$ Dadas las características de este número, podemos decir que es un número irracional.

Estos números analizados pertenecen al conjunto de los números irracionales.

PENSAR

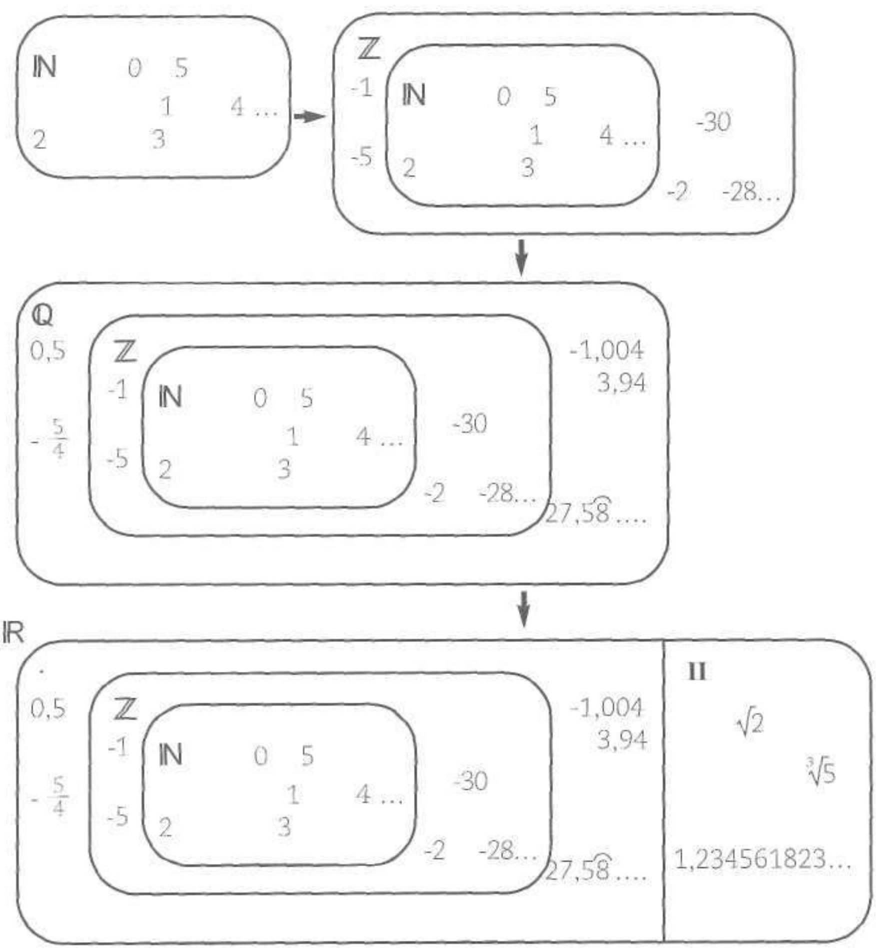
El conjunto de los números irracionales se simboliza así: II.

Los elementos de este conjunto son raíces no exactas (raíces cuyos resultados no son enteros) o bien números que expresados en notación decimal tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Si se reúnen todos los números racionales y los números irracionales se obtiene un nuevo conjunto numérico llamado conjunto de los números reales, que se simboliza así: **IR**.

En el siguiente esquema se muestra una síntesis de las sucesivas ampliaciones de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales.



NOTAS

NOTAS

PENSAR

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ *y se define como:*

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Se lee: el conjunto de los números reales es igual al conjunto de los números racionales más el conjunto de los números irracionales.

RECORDAR

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

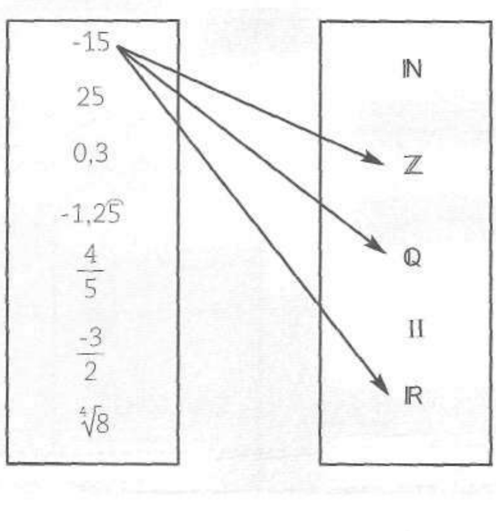
Se lee: el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros y éste está incluido en el conjunto de los números racionales.

El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales no tienen elementos en común. Es decir, no existe un número que sea racional e irracional a la vez.

Un número real es un número racional (se puede expresar como el cociente de dos números enteros con el denominador distinto de cero) o es un número irracional (número que expresado en notación decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

ACTIVIDADES

1. Realicen la siguiente actividad uniendo con flechas cada número con el o los conjuntos al que pertenece. Les puede ayudar la observación del diagrama de los números reales. Se muestra un ejemplo.

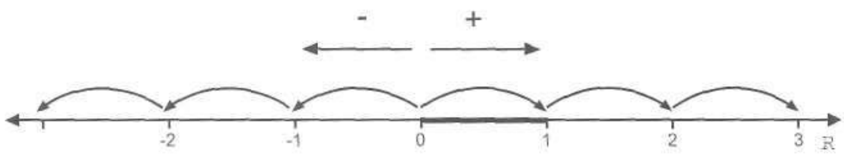


LA RECTA REAL

Los números pueden ser representados en una recta R, llamada recta real. Para ello se graduará la recta a partir de una unidad, como muestra la figura.

Para graduar la recta se considera un punto "o" y se elige un segmento U como unidad para medir. Luego se dibujan segmentos congruentes al segmento U en forma consecutiva a partir del punto o a izquierda y derecha del mismo y a cada punto se le asigna un número entero.

Fig. 1



RECORDAR

Recuerde: una recta puede pensarse como un conjunto de infinitos puntos.

Observe la recta numérica **R** y responda: ¿cada punto de la recta **R** tiene asignado un número entero?

Por ello, suele decirse que los números enteros al ser ubicados en la recta numérica "no cubren" toda la recta, ya que quedan puntos de la misma a los que no se les puede hacer corresponder un número entero.

¿Entre dos números enteros siempre es posible encontrar otro número entero? Piense por ejemplo en los números enteros 2 y 3 ¿hay otro número entero entre ellos?

Si ahora tiene que ubicar en la recta numérica un número racional, por ejemplo el número $\frac{3}{5}$: ¿entre qué números enteros lo ubicaría? ¿Por qué?

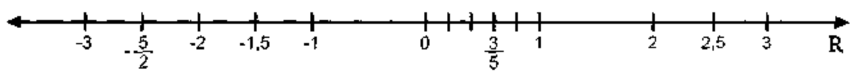
Para representar números racionales, como por ejemplo, $\frac{3}{5}$, y como es un número racional que es menor que uno y mayor a cero (tiene el numerador menor al denominador 3<5), se ubica en

NOTAS

NOTAS

la recta numérica entre los puntos correspondientes al número 0 y al número 1. Por ello se fracciona el segmento a cuyos extremos le corresponden los números 0 y 1 en tantos segmentos o partes como lo indica el denominador. Observe que las partes son todas congruentes, es decir son segmentos congruentes (segmentos equivalentes en longitud). En este caso el segmento unidad está fraccionado en 5 partes equivalentes porque el denominador del número racional a representar es 5 y se señala la tercer "marca" o parte, porque el número a ubicar en la recta tiene numerador tres. De esta forma queda ubicado el punto al cual se le asigna el número $\frac{3}{5}$.

Fig. 2



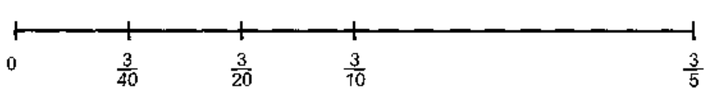
Ahora marque el punto medio del segmento cuyos extremos tienen asignados los números 0 y $\frac{3}{5}$. A ese punto asígnele el número racional $\frac{3}{10}$.

De esta manera, si procede de forma similar y marca el punto medio del segmento cuyos extremos tienen asignados los números 0 y $\frac{3}{10}$.

A dicho punto le debe asignar el número racional $\frac{3}{20}$, y así se podría continuar esta asignación indefinidamente.

Seguramente, si ubicó los puntos que le corresponden a los números 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{20}$ debe haber obtenido una representación como la siguiente; en la que se muestra sólo el segmento de la recta numérica que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números 0 y $\frac{3}{5}$.

Fig. 3

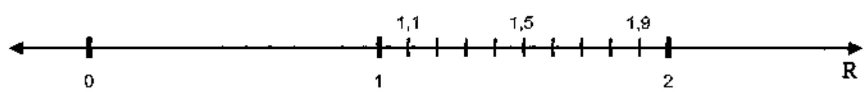


Notará que se pueden seguir señalando infinidad de puntos más, a los que se les asigna su correspondiente número racional siguiendo este procedimiento de señalar el punto medio de cada segmento que se considera, como se efectuó en el análisis anterior.

Esta característica señala que siempre es posible encontrar entre dos números racionales otro número racional. Pero a pesar de poseer esta característica, si se representaran todos los números racionales en la recta numérica no alcanzarían a "cubrir" toda la recta numérica. Es decir, hay puntos que no tienen asignado ningún número racional. Esos puntos son los que corresponden a los números irracionales. De esta manera, si se representan todos los números racionales y todos los números irracionales, es decir los números reales, sucede que a cada punto de la recta numérica R le corresponde un número real y viceversa, a cada número real le corresponde un punto en la recta.

Para representar **números irracionales** emplearemos su expresión decimal para ubicarlo en la recta numérica. Así, para ubicar el número irracional $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de 2) se considera su expresión decimal: $\sqrt{2} = 1{,}414213......$ ¿Entre qué números racionales lo ubicaría? Marque en la siguiente recta numérica los puntos correspondientes a los números racionales entre los que ubicaría el número irracional $\sqrt{2}$.

Fig. 4



En la recta numérica anterior marque aproximadamente el punto al que le corresponde el número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414213......$

Conclusiones

En la fig.1 se observa que al ubicar los números enteros en la recta numérica quedan puntos que no tienen asignado un número entero, es decir que los números enteros "no cubren" toda la recta numérica. Entre un par de números enteros consecutivos no existe otro número entero.

PENSAR

*1. Por esta característica se dice que el conjunto de los números enteros es **discreto**.*

En las fig.2 y 3, se observa que entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional.

PENSAR

*2. Por esta característica el conjunto de los números racionales es **denso**.*

NOTAS

NOTAS

De todos modos, si se ubicaran todos los números racionales quedarían puntos de la recta a los que no les correspondería ningún número racional, es decir que no es posible "cubrir" toda la recta numérica.

PENSAR

Para cubrir toda la recta numérica es necesario representar a todos los números racionales y a todos los irracionales, es decir ubicar los números reales.

A partir de esta última observación podemos asegurar que la recta está completa.

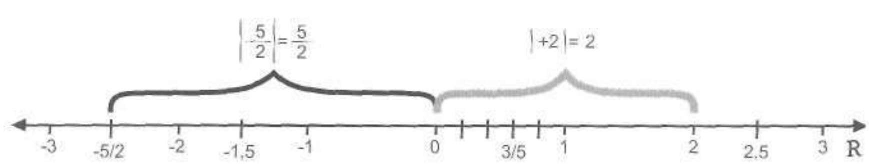
Al ubicar los números reales en la recta numérica "se cubren" todos los puntos de la misma, ya que a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

RECORDAR

En adelante cuando nos refiramos a un número y no aclaremos a qué conjunto numérico pertenece dicho número, es decir, cuando no se especifique: "número racional", "número natural", "número entero" o "número irracional", es porque el número considerado es un "número real". Estudiaremos estos números por lo que acordaremos que cuando consideremos un número, estaremos considerando un número real.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Seguimos trabajando sobre la recta numérica. Observe el siguiente gráfico y particularmente cada una de las llaves.



Cada una de las llaves está indicando la distancia en la recta numérica de los números $-\frac{5}{2}$ y 2 al número cero. A esta distancia se la llama **módulo o valor absoluto** del número $-\frac{5}{2}$ y módulo o valor absoluto del número 2.

Simbólicamente el módulo se indica:

- $|-2| = 2$ se lee: el módulo o valor absoluto del número -2 es