Notas de
Álgebra Lineal

Maestripieri, Alejandra
Notas de álgebra lineal / Alejandra Maestripieri ; Martín Pavón ; Paula Resmesar - 1a ed. 4a reimp. - Los Polvorines : Univ. Nacional de General Sarmiento, 2017.
144 p. ; 23x17 cm.

ISBN 978-987-630-015-5

1. Álgebra. 2. Educación Superior. I. Pavón, Martín II. Resmesar, Paula III. Título
CDD 512.071 1

J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507 Fax: (54 11) 4469-7504
e-mail: ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Notas de Álgebra Lineal

para el primer ciclo universitario

Alejandra Maestripieri
Martín Pavón
Paula Resmesar

Colección Textos Básicos

Universidad Nacional de General Sarmiento

Índice general

Capítulo 1

Vectores

1 Introducción

Informalmente, un *vector* es un segmento orientado, es decir un segmento donde se toma uno de los extremos como punto origen y a otro como punto final, gráficamente lo representamos como muestra la figura

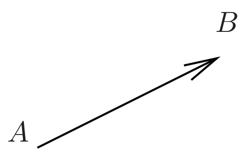

Figura 1: Vector con punto origen A y punto final B.

Un vector queda determinado por la dirección (la “inclinación”), el sentido (la orientación del segmento) y la longitud. Cuando dos vectores tienen el mismo sentido, la misma dirección y la misma longitud decimos que son vectores *equivalentes* .

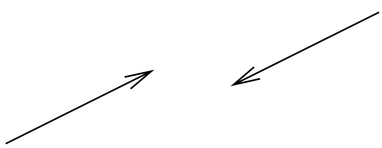

Figura 2: Los vectores tienen la misma dirección y longitud pero no tienen el mismo sentido.

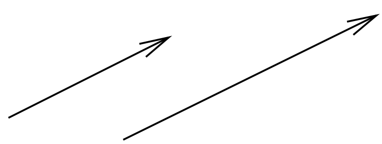

Figura 3: Los vectores tienen la misma dirección y sentido pero no la misma longitud.

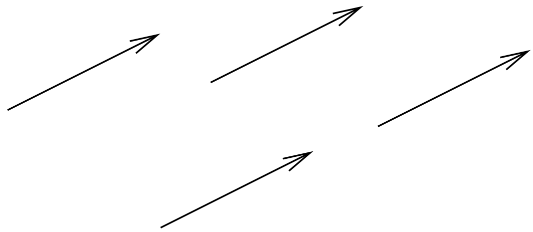

Figura 4: Cuatro vectores equivalentes.

En estas notas, vamos a trabajar con vectores en el plano y en el espacio.

2 Vectores en el plano y en el espacio

Antes de comenzar con vectores, repasemos brevemente como se representan puntos del plano. Usualmente, los puntos vienen dados por un par de números reales ordenados de la forma $P = (x, y)$. Estos números son las *coordenadas cartesianas* del punto P. Para calcular estas coordenadas, trazamos primero dos rectas perpendiculares una horizontal y otra vertical (los *ejes* del sistema de coordenadas) la coordenada x es la intersección del eje horizontal (o eje de las x) con la recta paralela al eje vertical que pasa por P. Análogamente se obtiene la coordenada y en el eje vertical. Llamamos *origen* del sistema de coordenadas al punto $O = (0, 0)$. La figura siguiente muestra el punto $(2, 3)$.

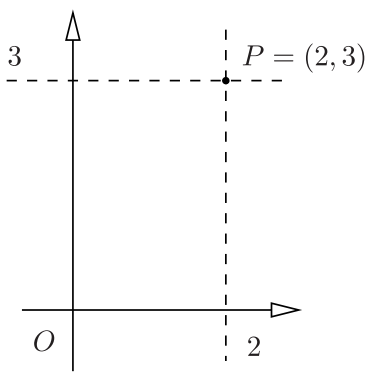

Figura 5: Representación del punto $P = (2, 3)$.

Dados los puntos A, B la siguiente figura muestra el vector con punto origen A y punto final B, que notamos $\overrightarrow{AB}$.

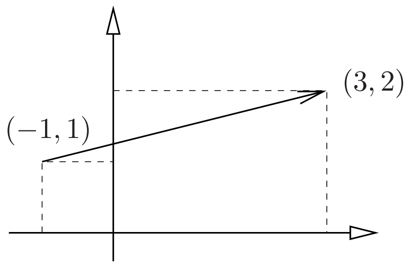

Figura 6: Vector $\overrightarrow{AB}$ con $A = (-1, 1)$ y $B = (3, 2)$.

Dado que un vector cualquiera siempre es equivalente a uno con origen O, de ahora en más consideraremos esta clase de vectores. Con $V = (v_1, v_2)$ representamos al vector del plano con punto origen en $(0, 0)$ y punto final (v_1, v_2). La figura siguiente muestra el vector $(2, 3)$.

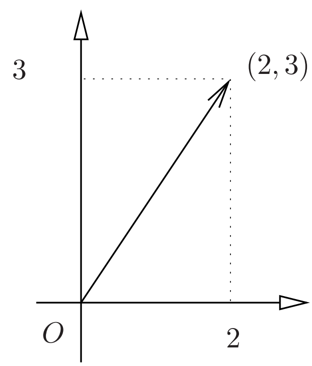

Figura 7: El vector $V = (2, 3)$.

Notemos que tenemos una correspondencia biunívoca entre vectores con punto origen en O y puntos del plano: a cada vector le asignamos su punto final y a cada punto A del plano le asignamos el vector con origen en O y punto final A. En ocasiones nos referiremos a un punto A dando por sobreentendido que hablamos del vector con punto final A . Con $\mathbb{R}^2$ notamos al conjunto de todos los puntos del plano, o sea

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \quad : \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cuando digamos el "vector $V = (v_1, v_2)$ en $\mathbb{R}^2$" nos referimos al vector del plano con punto origen en O y punto final en (v_1, v_2).

Para ubicar un punto en el espacio, necesitamos dar tres valores que son las coordenadas del punto. El modo usual de graficar en el espacio consiste en trazar tres rectas "ortogonales" como muestra la figura. El punto de intersección de las rectas es el origen $O = (0, 0, 0)$.

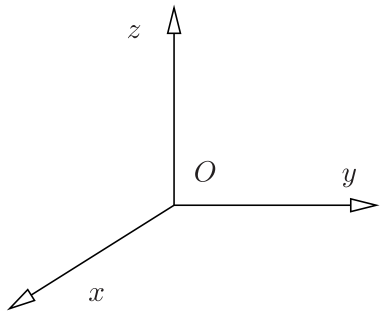

Figura 8: Ejes en el espacio.

Veamos cómo graficar un punto del espacio, por ejemplo el punto $(2, 3, 1)$. Para esto, dibujamos un paralelepípedo con uno de sus vértices en O, una arista sobre el eje x que una 0 con 2, otra sobre el eje y que una 0 con 3 y otra sobre el eje z que una 0 con 1. El punto es el vértice opuesto a O. En general, para graficar un punto $P = (x, y, z)$ procedemos de la misma manera reemplazando 2 por x, 3 por y y 1 por z.

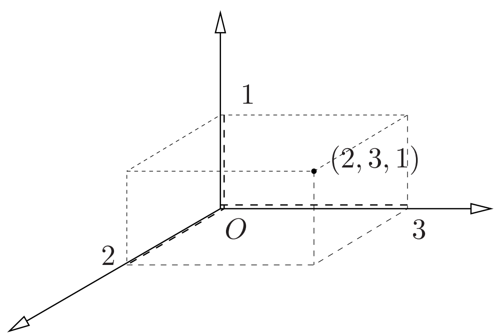

Figura 9: Punto $P = (2, 3, 1)$.

Con $V = (v_1, v_2, v_3)$ representamos al vector con punto origen en O y punto final en (v_1, v_2, v_3). La figura 10 muestra el vector $(2, 3, 1)$.

Notamos $\mathbb{R}^3$ al conjunto de puntos del espacio y, al igual que en $\mathbb{R}^2$, en ocasiones nos referiremos a puntos dando por sobreentendido que hablamos de vectores.

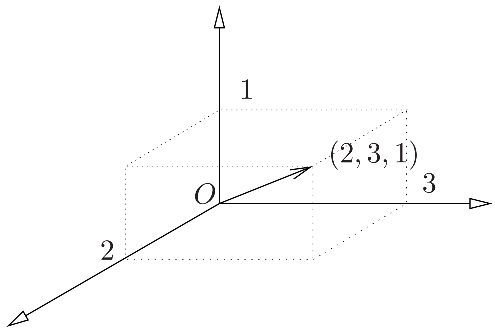

Figura 10: Vector $V = (2, 3, 1)$.

3 Operaciones y propiedades

Definición 1.1.

(*a*) *Dados* $V = (v_1, v_2)$ *y* $W = (w_1, w_2)$ *llamamos vector suma de* V *y* W *al vector*

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

(*b*) *Dados* $V = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $W = (w_1, w_2, w_3)$ *llamamos vector suma de* V *y* W *al vector*

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3).$$

Podemos sumar gráficamente dos vectores mediante la *regla del paralelogramo*; dados los vectores V y W, dibujamos un paralelogramo que tenga a estos vectores por lados; el vector suma tiene punto final en el vértice opuesto al origen como muestra la figura siguiente.

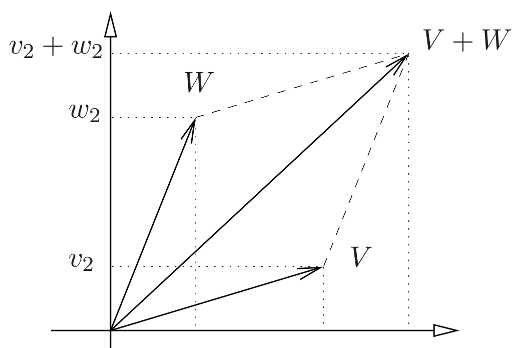

Figura 11: Regla del paralelogramo.

Definición 1.2.

(a) *Dados* $V = (v_1, v_2)$ *y* $k \in \mathbb{R}$, *llamamos producto de* k *por* V *al vector*

$$k\,V = (kv_1, kv_2).$$

(b) *Dados* $V = (v_1, v_2, v_3)$ *y* $k \in \mathbb{R}$, *llamamos producto de* k *por* V *al vector*

$$k\,V = (kv_1, kv_2, kv_3).$$

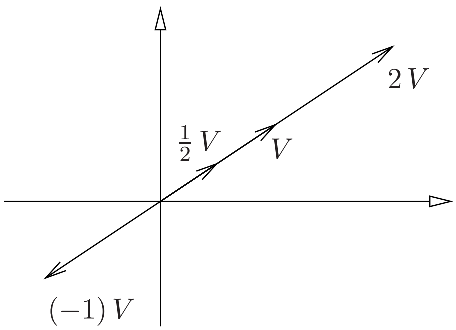

Figura 12: Producto de un escalar por un vector.

Observación 1.3. Si $V \neq O$ y $\lambda \neq 0$, λV es un vector que tiene la misma dirección que V. Si $\lambda > 0$, V y λV tienen el mismo sentido, si $\lambda < 0$ tienen sentidos opuestos.

Propiedades 1.4. *Sean* U, V, W *vectores y* k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$. *Entonces*

(a) $U + (V + W) = (U + V) + W$.

(b) $U + V = V + U$.

(c) $k\,(U + V) = k\,U + k\,V$.

(d) $(k_1 + k_2)\,V = k_1\,V + k_2\,V$.

(e) $O + V = V$.

(f) $1\,V = V$.

(g) $V + (-1)\,V = O$.

(h) $0\,V = O$.

Observación 1.5. De la propiedad (g) puede deducirse que $(-1)\,V$ es el *inverso aditivo* de V y se nota $-V$. Esto nos permite restar vectores de las siguiente forma

$$V - W = V + (-W) = V + (-1)\,W.$$

Ejemplo 1.6. Si $U = (2,3,1)$ y $V = (-1,4,2)$, calcular $2\,U + V$ y $U - 3\,V$.

Para el primer cálculo, multiplicamos U por 2 y obtenemos

$$2\,U = (2\,.\,2,\; 2\,.\,3,\; 2\,.\,1) = (4,6,2),$$

luego sumamos

$$2\,U + V = (4,6,2) + (-1,4,2) = (4 + (-1),\; 6 + 4,\; 2 + 2) = (3,10,4).$$

En el segundo cálculo

$$-3\,V = ((-3)\,.\,(-1),\; (-3)\,.\,4,\; (-3)\,.\,2) = (3,-12,-6)$$

y

$$U - 3\,V = U + (-3)V = (2,3,1) + (3,-12,-6) = (5,-9,-5). \qquad \nabla$$

Veamos la representación geométrica de la resta de dos vectores. Sean U el vector con punto final A y V con punto final B. Para calcular $V - U$ graficamos el vector $-U$ como muestra la figura y luego calculamos la suma de V y de $-U$ por la regla del paralelogramo. Si observamos atentamente el gráfico, vemos que el vector $V - U$ es equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$.

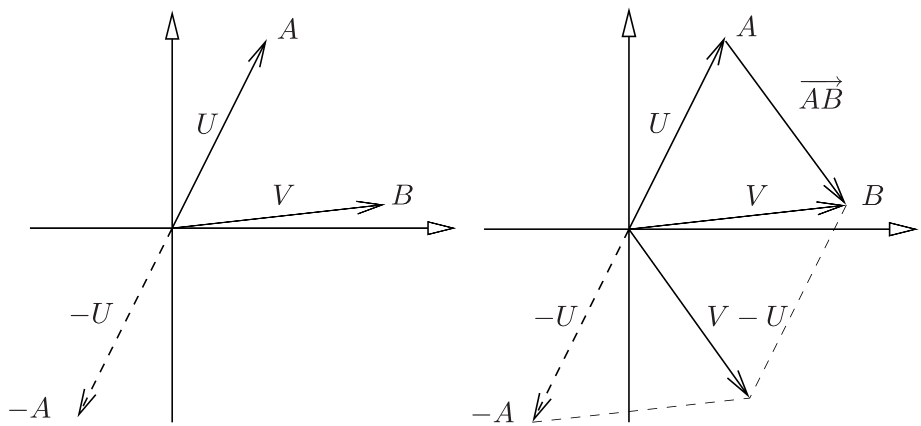

Figura 13: Resta de vectores

Definición 1.7. *Sea V un vector. Llamamos norma de V a la longitud del vector V y la notamos $\|V\|$.*

Si $V = (v_1, v_2)$, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

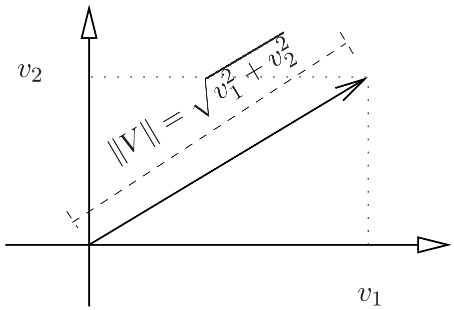

Figura 14: Norma de V.

Si $V = (v_1, v_2, v_3)$ la fórmula se extiende a

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Notemos que, como muestra la figura 14 en el caso del plano, la norma es la distancia entre el origen y el punto final del vector.

Ejemplo 1.8.

(a) Si $V = (2, -3)$, entonces $\|V\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

(b) Si $V = (1, -3, -2)$, $\|V\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$. ∇

Propiedades 1.9. *Sean V, W vectores y $k \in \mathbb{R}$; entonces*

(a) $\|V\| \in \mathbb{R}$ *y* $\|V\| \geq 0$.

(b) $\|V\| = 0$ *si y sólo si* $V = O$.

(c) *Desigualdad triangular:* $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$.

(d) $\|k\, V\| = |k|\, \|V\|$.

Demostración. Veamos la demostración de estas propiedades en el caso $n = 2$.

(a) Claramente $\|V\|$ está bien definida ya que $v_1^2+v_2^2 \geq 0$ y por lo tanto podemos calcular $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ que es, por definición, un número real no negativo.

(b) Tenemos que

$$\|V\|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{v_1^2+v_2^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1^2+v_2^2=0,$$

y la única manera en que la suma de dos números al cuadrado sea cero, es que cada uno de ellos sea cero, en conclusión,

$$\|V\|=0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1=v_2=0 \quad \Leftrightarrow \quad V=O.$$

(c) Basta probar que

$$\|U+V\|^2 \leq (\|U\|+\|V\|)^2.$$

Sean $U=(u_1,u_2)$ y $V=(v_1,v_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|U+V\|^2 &= (u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2 \\ &= u_1^2+v_1^2+2u_1v_1+u_2^2+v_2^2+2u_2v_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\|U\|+\|V\|)^2 &= \|U\|^2+\|V\|^2+2\|U\|\,\|V\| \\ &= u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2+2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Luego, por (1) y (2),

$$\|U+V\|^2 \leq (\|U\|+\|V\|)^2$$

si, y sólo si,

$$\begin{aligned} u_1^2+v_1^2+2u_1v_1+u_2^2+v_2^2+2u_2v_2 \leq{}& u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2 \\ &+2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \end{aligned}$$

Cancelando, esto es equivalente a que se verifique la desigualdad

$$u_1v_1+u_2v_2 \leq \sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}. \qquad (3)$$

Si $u_1v_1+u_2v_2<0$, (3) es trivial. En caso contrario, la desigualdad se verifica si, y sólo si

$$(u_1v_1+u_2v_2)^2 \leq \left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^2. \qquad (4)$$

En la última desigualdad, el miembro de la izquerda queda

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 = u_1^2u_2^2 + u_2^2v_2^2 + 2u_1v_1u_2v_2$$

y el de la derecha

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)\\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + v_1^2u_2^2 + u_2^2v_2^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, (4) se reduce a probar que

$$2u_1v_1u_2v_2 \le u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2. \tag{5}$$

Pasando de miembro, (5) es equivalente a

$$0 \le u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2$$

y esta desigualdad es verdadera ya que el miembro de la derecha es igual a $(u_1v_2 - u_2v_1)^2$. Por lo tanto (5) es verdadera y, por las equivalencias planteadas, se verifica $\|U + V\| \le \|U\| + \|V\|$.

(d) Si $V = (v_1, v_2)$, tenemos que $k\,V = (k\,v_1, kv_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|k\,V\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2} = \sqrt{k^2(v_1^2 + v_2^2)}\\ &= \sqrt{k^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\\ &= |k|\|V\|.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.10. Sean $U = (4, 3)$, $V = (6, 8)$. Calcular $\|U\|+\|V\|$ y $\|U+V\|$.

Tenemos que $\|U\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ y $\|V\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; entonces $\|U\| + \|V\| = 15$.

Por otra parte, $U+V = (10, 11)$, entonces $\|U+V\| = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221}$. Dado que $\sqrt{221} < 15$, este ejemplo muestra que la desigualdad de (c) puede ser estricta. ∇

Definición 1.11. *Dado un vector V, decimos que V es un vector unitario si $\|V\| = 1$.*

Proposición 1.12. *Sea V un vector no nulo, entonces $\dfrac{V}{\|V\|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que V.*

Ejemplo 1.13. Graficar en $\mathbb{R}^2$ el conjunto $\{A \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|A\| = 1\}$.

Según el enunciado, debemos graficar un conjunto de puntos ($A \in \mathbb{R}^2$) pero la condición que aparece está dada por la norma, que sólo definimos para vectores. Por la correspondencia entre puntos y vectores que mencionamos en la página 11, entendemos por la norma del punto A a la norma del vector con punto final A; entonces $\|A\| = 1$ equivale a pedir que la distancia entre A y O valga 1, por lo tanto A está en la circunferencia con centro O y radio 1. El gráfico es

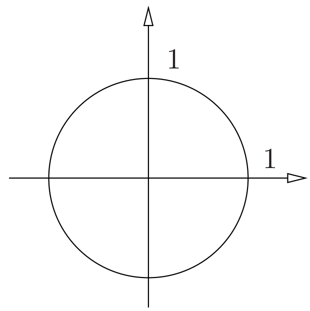

Figura 15: El conjunto de puntos con norma 1.

Ejemplo 1.14. Sea $V = (1, 2)$. Hallar un vector W con igual dirección y sentido que V tal que $\|W\| = 3$.

Dado que buscamos W con igual dirección y sentido que V, debe existir $k > 0$ tal que $W = k\,V$. Entonces, tenemos que

$$\|W\| = \|k\,V\| = |k|\,\|V\| = 3, \quad \text{por lo tanto} \quad |k| = \frac{3}{\|V\|}.$$

Como $k > 0$, debe ser $k = 3/\|V\|$. Dado que $\|V\| = \sqrt{5}$, $k = 3/\sqrt{5}$ y

$$W = \tfrac{3}{\sqrt{5}}(1, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right). \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.15. Hallar todos los valores de k tales que $\|V\| = 5$, si $V = (0, k, 3)$.

Tenemos que $\|V\| = \sqrt{0^2 + k^2 + 3^2}$, luego, buscamos k tal que $\sqrt{k^2 + 9} = 5$. Elevamos al cuadrado y obtenemos $k^2 + 9 = 25$, entonces $k^2 = 16$, por lo tanto, $k = 4$ o $k = -4$. ∇

Definición 1.16. *Dados dos puntos A y B, definimos la distancia entre A y B como la norma de $A - B$.*

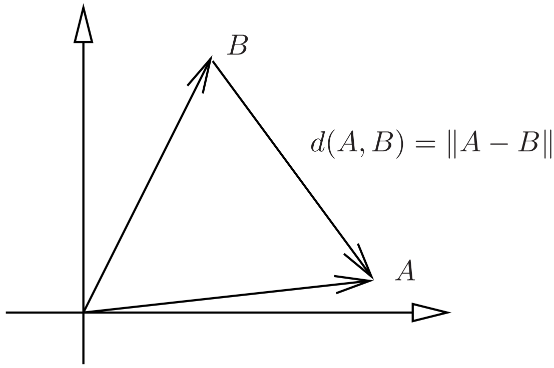

Figura 16: Distancia entre A y B.

Observemos que en la definición usamos la identificación entre puntos y vectores con punto origen en O: la resta $A - B$ es el punto final de la diferencia entre los vectores con punto origen O y puntos final en A y B.

Ejemplo 1.17. Calcular la distancia entre $A = (3, 2)$ y $B = (4, -3)$.

Hallamos $A - B$ y después calculamos la norma:

$$A - B = (3 - 4,\ 2 - (-3)) = (-1, 5)$$

entonces

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}\ . \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.18. Hallar todos los valores de k tales que la $d(A, B) = \sqrt{6}$ si $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, k, k)$.

Como $A - B = (1, 1 - k, -k)$, entonces

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{1 + (1 - k)^2 + (-k)^2} = \sqrt{1 + 1 - 2k + k^2 + k^2} \\ &= \sqrt{2 - 2k + 2k^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sqrt{2 - 2k + 2k^2} = \sqrt{6} \Rightarrow 2 - 2k + 2k^2 = 6 \Rightarrow 2k^2 - 2k - 4 = 0.$$

Resolvemos la última ecuación y resulta que $k = 2$ o $k = -1$. ∇

Ejemplo 1.19. Graficar el conjunto $\{(x,y)\ :\ d\big((x,y),(2,3)\big)\leq 2\}$.

Tenemos que graficar el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto $(2,3)$ es menor o igual que 2. Si en vez de considerar la desigualdad consideramos la igualdad (es decir, los puntos (x,y) tales que $d\big((x,y),(2,3)\big)=2$) el conjunto es una circunferencia con centro en $(2,3)$ y radio 2; y los puntos que distan de $(2,3)$ en menos de 2, deben estar en el interior de dicha circunferencia. En conclusión, la figura siguiente muestra el conjunto pedido:

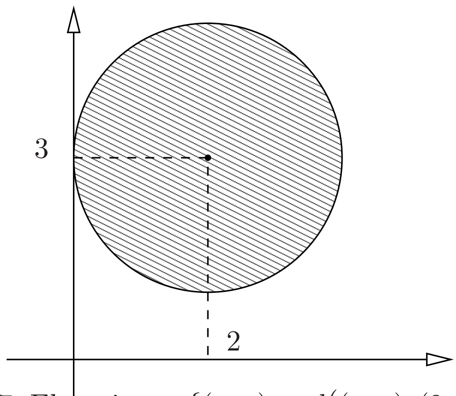

Figura 17: El conjunto $\{(x,y)\ :\ d\big((x,y),(2,3)\big)\leq 2\}$.

Definición 1.20.

(a) *Sean $U=(u_1,u_2)$ y $V=(v_1,v_2)$; llamamos producto interno entre U y V al número*

$$U\cdot V = u_1\,v_1 + u_2\,v_2\ .$$

(b) *Sean $U=(u_1,u_2,u_3)$ y $V=(v_1,v_2,v_3)$; llamamos producto interno entre U y V al número*

$$U\cdot V = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3\ .$$

Ejemplo 1.21. Sean $U=(2,3)$, $V=(1,-1)$ y $W=(-6,4)$. Calcular $U\cdot V$ y $U\cdot W$.

Aplicamos directamente la definición; entonces

$$U\cdot V=(2,3)\cdot(1,-1)=2\,.\,1+3.(-1)=-1$$

y

$$U\cdot W=(2,3)\cdot(-6,4)=2.(-6)+3\,.\,4=0\ . \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.22. Calcular el producto interno entre $V = (3, -2, 7)$ y $W = (5, 7, 1)$.

$$V \cdot W = (3, -2, 7) \cdot (5, 7, 1) = 3 \,.\, 5 + (-2) \,.\, 7 + 7 \,.\, 1 = 8 \,. \qquad \nabla$$

Propiedades 1.23. *Sean U, V, W vectores y $k \in \mathbb{R}$. Entonces*

(*a*) $U \cdot V = V \cdot U$.

(*b*) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$.

(*c*) $k\,(U \cdot V) = (k\,U) \cdot V = U \cdot (k\,V)$.

(*d*) $V \cdot V = \|V\|^2$.

(*e*) $|U \cdot V| \leq \|U\|\,\|V\|$

Demostración. Veamos las demostraciones de las propiedades (d) y (e) en el caso $n = 2$.

(d) Sea $V = (v_1, v_2)$, entonces

$$V \cdot V = v_1^2 + v_2^2 \quad \text{y} \quad \|V\|^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

por lo tanto $\|V\|^2 = V \cdot V$.

(e) Primero, notemos que si $\|U\| = 0$, entonces la desigualdad se satisface trivialmente ya que

$$\|U\| = 0 \quad \Rightarrow \quad U = O.$$

Por lo tanto

$$U \cdot V = 0 \quad \text{y} \quad \|U\|\,\|V\| = 0.$$

Luego, podemos suponer que $\|U\| \neq 0$.

Sea $k \in \mathbb{R}$, primero calculemos $(k\,U - V) \cdot (k\,U - V)$. Aplicando las propiedades (a), (b), (c) y (d) tenemos que

$$\begin{aligned}(k\,U - V) \cdot (k\,U - V) &= \big\{(k\,U - V) \cdot k\,U\big\} - \big\{(k\,U - V) \cdot V\big\} \\ &= k^2\,U \cdot U - k\,U \cdot V - k\,U \cdot V + V \cdot V \\ &= k^2\,\|U\|^2 - 2k\,U \cdot V + \|V\|^2.\end{aligned}$$

Si ahora tomamos $k = (U \cdot V)/\|U\|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}(k\,U - V)\cdot(k\,U - V) &= \frac{(U \cdot V)^2}{\|U\|^4}\,\|U\|^2 - 2\frac{(U \cdot V)^2}{\|U\|^2} + \|V\|^2 \\ &= \frac{(U \cdot V)^2 - 2(U \cdot V)^2 + \|U\|^2\,\|V\|^2}{\|U\|^2} \\ &= \frac{-(U \cdot V)^2 + \|U\|^2\,\|V\|^2}{\|U\|^2}\end{aligned}$$

Como $(k\,U - V)\cdot(k\,U - V) = \|k\,U - V\|^2 \geq 0$, entonces

$$-(U \cdot V)^2 + \|U\|^2\,\|V\|^2 \geq 0,$$

por lo tanto

$$(U \cdot V)^2 \leq \|U\|^2\,\|V\|^2.$$

Luego,

$$\sqrt{(U \cdot V)^2} \leq \sqrt{\|U\|^2\,\|V\|^2};$$

es decir,

$$|U \cdot V| \leq \|U\|\,\|V\|$$

□

Definición 1.24. *Sean U, V vectores no nulos; llamamos ángulo entre U y V al ángulo α determinado por U y V que verifica $0 \leq \alpha \leq \pi$.*

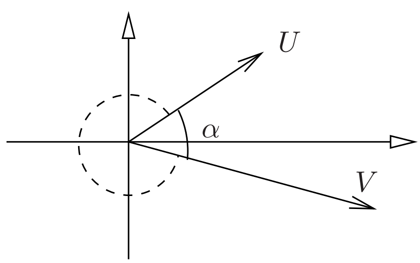

Figura 18: El ángulo marcado con trazo continuo es el ángulo entre U y V.

Notemos que, por la propiedad (e) de 1.23, tenemos que

$$-1 \leq \frac{U \cdot V}{\|U\|\,\|V\|} \leq 1.$$

Luego, existe α tal que $\cos\alpha = U \cdot V/(\|U\|\|V\|)$.

Proposición 1.25. *Sean U, V vectores no nulos. Si α es el ángulo entre U y V, entonces*

$$\cos\alpha = \frac{U \cdot V}{\|U\|\,\|V\|}.$$

Ejemplo 1.26. Calcular el ángulo entre U y V con

(a) $U = (1, -1)$, $V = (0, 3)$.

Tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{U \cdot V}{\|U\|\,\|V\|} = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

así que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y el único ángulo que verifica esta igualdad, entre 0 y π, es $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

(b) $U = (1, 2, 3)$, $V = (-1, -1, 1)$.

En este caso

$$\cos\alpha = \frac{U \cdot V}{\|U\|\,\|V\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\,. \qquad \nabla$$

Notemos que dos vectores forman un ángulo recto (es decir $\alpha = \pi/2$) si, y sólo si, $\cos\alpha = 0$. Luego, por la proposición, resulta $V \cdot W = 0$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.27. *Dados los vectores V y W; decimos que V y W son ortogonales o perpendiculares si $V \cdot W = 0$.*

Ejemplo 1.28. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales.

(a) $U = (1, 2)$, $V = (3, -2)$.

Tenemos que $U \cdot V = (1, 2) \cdot (3, -2) = 3 - 4 = -1$. Dado que $U \cdot V \neq 0$, U y V no son perpendiculares.

(b) $U = (1, 2)$, $V = (4, -2)$.

En este caso $U \cdot V = (1, 2) \cdot (4, -2) = 4 - 4 = 0$, por lo tanto U y V son perpendiculares. ∇

Ejemplo 1.29. Sea $V = (6, -3)$.

(a) Hallar un vector no nulo ortogonal a V.

Consideremos un vector genérico $U = (x, y)$. Para que U sea ortogonal a V, debe ocurrir que $U \cdot V = 0$, pero

$$U \cdot V = 6x - 3y \quad \Rightarrow \quad 6x - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x.$$

Con esto obtenemos la relación que debe verificarse entre las componentes del vector U para que sea ortogonal a V. Como tenemos que hallar un vector no nulo, damos a x un valor cualquiera distinto de 0 y obtenemos cuanto debe valer y. Por ejemplo, si elegimos $x = 1$, entonces $y = 2 \,.\, 1 = 2$ y resulta $U = (1, 2)$.

(b) Hallar todos los vectores ortogonales a V.

Vimos en el inciso anterior que, para que U sea ortogonal a V, las componentes de U deben verificar $y = 2x$; por lo tanto, $U = (x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dado que x es un número real, tenemos que $(x, 2x) = x\,(1, 2)$. Esto muestra que los vectores perpendiculares a V son los múltiplos del vector $(1, 2)$ y forman una recta como muestra la figura siguiente.

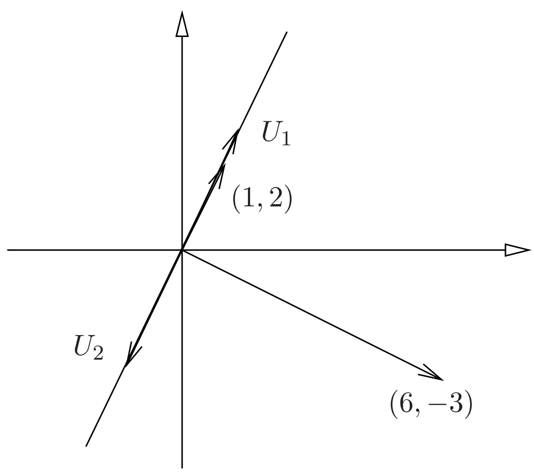

Figura 19: Vectores ortogonales al vector $(6, -3)$.

(c) Hallar un vector ortogonal a V que tenga norma igual a 3.

Por (b) sabemos que U se escribe como $x\,(1, 2)$. Para encontrar x planteamos

$$3 = \|x\,(1, 2)\| = |x|\,\|(1, 2)\| = |x|\sqrt{5}$$

Entonces $|x| = \frac{3}{\sqrt{5}}$ y despejando x obtenemos dos vectores que verifican lo pedido:

$$U_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}(1,2) = \left(\tfrac{3}{\sqrt{5}},\ \tfrac{6}{\sqrt{5}}\right) \ \text{ y } \ U_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}(1,2) = \left(-\tfrac{3}{\sqrt{5}},\ -\tfrac{6}{\sqrt{5}}\right).$$

∇

Definición 1.30. *Sean V, W vectores en $\mathbb{R}^3$, $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$. Llamamos producto vectorial entre V y W a*

$$V \times W = (v_2\, w_3 - v_3\, w_2,\ v_3\, w_1 - v_1\, w_3,\ v_1\, w_2 - v_2 w_1).$$

Ejemplo 1.31. Sean $V = (1,2,3)$ y $W = (-2,1,-1)$. Calcular $V \times W$.

Aplicamos la definición:

$$\begin{aligned}(1,2,3) \times (-2,1,-1) &= (2.(-1) - 3.1,\ 3.(-2) - 1.(-1),\ 1.1 - 2.(-2)) \\ &= (-5,\ -5,\ 5).\end{aligned}$$

∇

Propiedades 1.32. *Sean U, V, W vectores en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces,*

(*a*) $U \times V = -V \times U$.

(*b*) $U \times (V + W) = U \times V + U \times W$.

(*c*) $k\,(U \times V) = (k\,U) \times V = U \times (k\,V)$.

(*d*) $U \times V = O$ *si, y sólo si, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $U = \lambda V$.

(*e*) $(U \times V) \cdot U = 0$ *y* $(U \times V) \cdot V = 0$.

La última propiedad es una de las que más utilizaremos ya que dados dos vectores permite hallar un tercero perpendicular a ambos de una forma sencilla.

Ejemplo 1.33. Sea $U = (3,1,-2)$ y $V = (0,-1,4)$. Hallar un vector W, no nulo, ortogonal a U y a V.

Por la propiedad (e) basta calcular el producto vectorial entre U y V.

$$\begin{aligned}(3,1,-2) \times (0,-1,4) &= (1.4 - (-2).(-1),\ (-2).0 - 3.4,\ 3.(-1) - 1.0) \\ &= (2,-12,-3).\end{aligned}$$

Si bien no es necesario, es conveniente verificar que el vector hallado cumple con lo pedido; tenemos que calcular el producto interno entre el vector hallado y los vectores dados

$$(3,1,-2)\cdot(2,-12,-3)=6-12+6=0$$

y

$$(0,-1,4)\cdot(2,-12,-3)=12-12=0. \qquad \nabla$$

4 Rectas

Como vimos en la figura 12 los vectores V, $2\,V$, $1/2\,V$, $-V$ pertenecen a una misma recta. Generalizando, si consideramos el vector λV con $\lambda\in\mathbb{R}$, éste también está en la misma recta y viceversa; dado un vector W cualquiera contenido en la recta, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $W=\lambda V$.

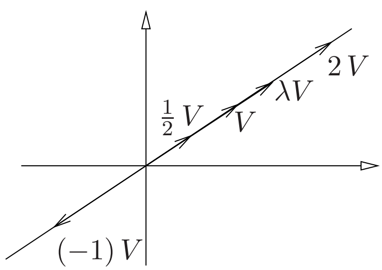

Figura 20: Recta que contiene a los vectores λV.

Ejemplo 1.34. Dado $V=(-3,2)$, graficar la recta $\{\lambda V,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

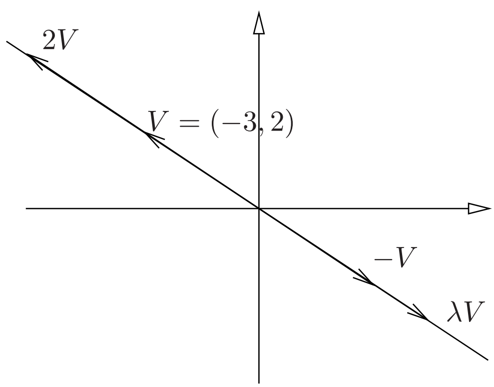

Figura 21: Recta $\lambda(-3,2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.35. Dados $V = (-3, 2)$ y $P = (2, 2)$ graficar el conjunto $\{\lambda V + P,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Para hacer el gráfico, damos algunos valores a λ y calculamos $\lambda V + P$.

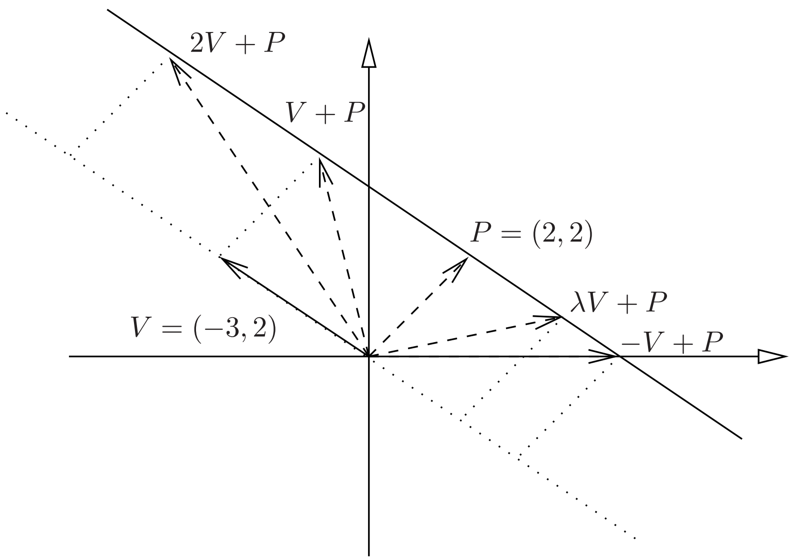

Figura 22: Recta $\lambda(-3, 2) + (2, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Observemos que el conjunto es una recta, paralela a la del ejemplo anterior, que pasa por el punto P. Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.36. *Sean V un vector no nulo y P un punto. Llamamos ecuación vectorial o paramétrica de la recta que pasa por P con la dirección de V a*

$$X = \lambda V + P, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Al vector V lo llamamos vector director de la recta.

La definición anterior es válida tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$. En el primer caso $X = (x, y)$ y en el segundo $X = (x, y, z)$.

Observación 1.37. Es importante notar que dada una recta, la ecuación paramétrica no es única; la recta de ecuación $X = \lambda(9, -6) + (2, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$ es igual a la recta del ejemplo anterior dado que $(9, -6)$ es un vector con la misma dirección que el $(-3, 2)$.

Ejemplo 1.38. Hallar una ecuación paramétrica de la recta con vector director $(2, -1)$ que pasa por $(1, 3)$.

Tenemos que $V = (2, -1)$ y $P = (1, 3)$, por lo tanto una ecuación es

$$X = \lambda(2, -1) + (1, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.39. Hallar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(2, -1, 0)$ con dirección $(-1, 1, 4)$.

En este caso $P = (2, -1, 0)$ y $V = (-1, 1, 4)$, así que una ecuación es

$$X = \lambda(-1, 1, 4) + (2, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.40. Sea $\mathbb{L}$ la recta de ecuación $X = \lambda(2, -3, 4) + (1, 0, 3)$. El punto $(5, -6, 8)$, ¿pertenece a $\mathbb{L}$? ¿Y el punto $(-3, 6, -5)$?

La recta está formada por los puntos de la forma $\lambda(2, -3, 4) + (1, 0, 3)$, por lo tanto para responder la pregunta debemos determinar si existe o no $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(5, -6, 8) = \lambda(2, -3, 4) + (1, 0, 3)$ (y lo mismo con $(-3, 6, -5)$). Ahora bien, igualando componente a componente

$$(5, -6, 8) = \lambda(2, -3, 4) + (1, 0, 3) = (2\lambda + 1, -3\lambda, 4\lambda + 3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 &= 2\lambda + 1 \\ -6 &= -3\lambda \\ 8 &= 4\lambda + 3. \end{cases}$$

Si despejamos λ de la primera ecuación, obtenemos

$$2\lambda + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Veamos si $\lambda = 2$ verifica las restantes ecuaciones: la segunda ecuación se verifica pues $-3.2 = -6$, pero la tercera no ya que $4.2 + 3 = 11 \neq 8$. Dado que no se satisface la última ecuación, el punto $(5, -6, 8)$ no pertenece a la recta.

Para el punto $(-3, 6, -5)$ procedemos de la misma manera.

$$(-3, 6, -5) = \lambda(2, -3, 4) + (1, 0, 3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3 &= 2\lambda + 1 \\ 6 &= -3\lambda \\ -5 &= 4\lambda + 3. \end{cases}$$

De la primera ecuación resulta $\lambda = -2$ y en este caso se verifican las restantes ecuaciones ya que $-3.(-2) = 6$ y $4.(-2) + 3 = -5$. Por lo tanto, $(-3, 6, -5)$ pertenece a la recta. ∇

Ejemplo 1.41. Sean $A = (2, 3)$ y $B = (-1, 2)$. Hallar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B.

Para dar una ecuación paramétrica de una recta, necesitamos un punto de paso P y un vector director V. Como P podemos tomar tanto A como B, de modo que sólo tenemos que determinar V. Si observamos la figura,

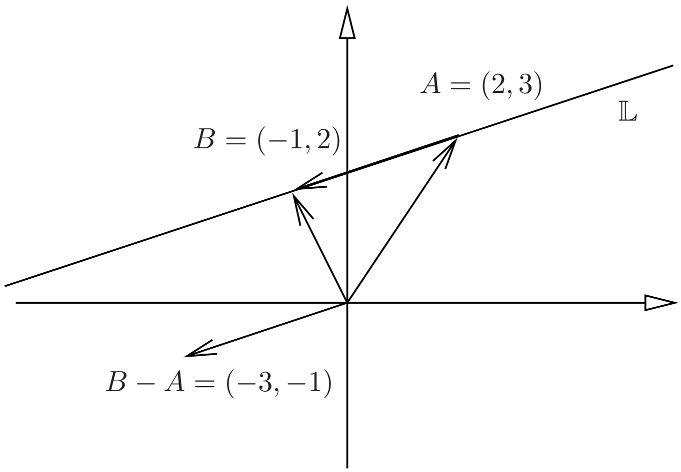

Figura 23: Recta que pasa por A y B.

vemos que podemos tomar $V = B - A$, entonces

$$V = (-1, 2) - (2, 3) = (-3, -1),$$

por lo tanto la ecuación queda

$$\mathbb{L} : X = \lambda(-3, -1) + (2, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Observación 1.42. En general, tanto en $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$, una ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B $(A \neq B)$ es

$$\mathbb{L} : X = \lambda(B - A) + A, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En efecto, tomando $\lambda = 0$, obtenemos A y con $\lambda = 1$, B; por lo tanto los puntos A y B están en la recta.

Ejemplo 1.43. Sean $A = (3, 2, -4)$ y $B = (1, 2, -3)$. Dar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B.

Aplicamos directamente la observación anterior; $B - A = (-2, 0, 1)$, por lo tanto la recta tiene ecuación

$$\mathbb{L} : X = \lambda(-2, 0, 1) + (3, 2, -4). \qquad \nabla$$

Definición 1.44. *Decimos que un conjunto de puntos está alineado si todos ellos pertenecen a una misma recta.*

Ejemplo 1.45. Determinar si $A = (2, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 4, -1)$ están alineados. Como muestra el gráfico que sigue, si los puntos están alineados, entonces $B - A$ y $C - A$ son vectores directores de la recta que los contiene y, por lo tanto, son múltiplos entre sí. Entonces, para determinar si están alineados o no basta ver si $B - A$ y $C - A$ son múltiplos entre sí. En este caso,

$$B - A = (-1, 1, -2) \quad \text{y} \quad C - A = (-3, 3, -6).$$

Como

$$(-3, 3, -6) = 3\,(-1, 1, -2)$$

concluimos que los tres puntos están alineados.

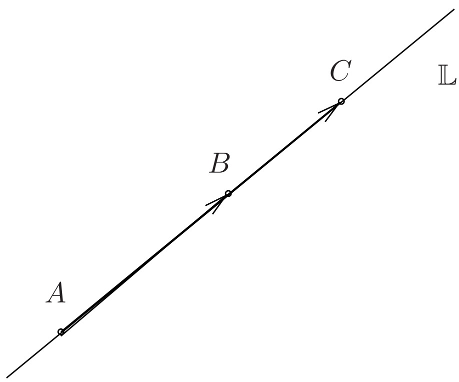

Figura 24: Tres puntos alineados.

Definición 1.46. *Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ dos rectas con vectores directores V_1 y V_2 respectivamente.*

(*a*) *Decimos que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son perpendiculares si $V_1 \cdot V_2 = 0$.*

(*b*) *Decimos que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas si existe $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $V_2 = k\,V_1$.*

Ejemplo 1.47. Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ paralela a $\mathbb{L}_1 : X = t(3, 2) + (1, -1)$, que pasa por $P = (3, 4)$.

Para dar una ecuación paramétrica de $\mathbb{L}$, basta hallar un vector director y un punto en la recta. Dado que se pide $\mathbb{L}$ paralela a $\mathbb{L}_1$, podemos tomar como vector director el de $\mathbb{L}_1$ y el punto está dado, de modo que una ecuación de $\mathbb{L}$ es

$$\mathbb{L} : X = t(3,2) + (3,4), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.48. Sea $\mathbb{L} : X = \lambda(1,2,-1) + (3,7,0)$. Hallar ecuaciones de dos rectas perpendiculares a $\mathbb{L}$ que pasen por $P = (2,0,1)$.

Dado que tenemos el punto de paso, sabemos que cada recta se puede representar paramétricamente como $X = \lambda V_1 + (2,0,1)$ y sólo debemos encontrar V_1 ortogonal al vector director de $\mathbb{L}$, es decir, tal que $V_1 \cdot (1,2,-1) = 0$.

Sea $V_1 = (x,y,z)$, entonces

$$(x,y,z) \cdot (1,2,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x + 2y.$$

Dando valores a x y a y obtenemos z y, por lo tanto, el vector director de $\mathbb{L}_1$; tomando $x = 1$ e $y = 0$, resulta $z = (1,0,1)$ y obtenemos la ecuación

$$\mathbb{L}_1 : X = \lambda(1,0,1) + (2,0,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dando otros valores a x y a y, obtenemos otros vectores directores. Si $x = 0$ e $y = 1$ obtenemos el vector $(0,1,2)$. La ecuación de la recta queda

$$\mathbb{L}_2 : X = \lambda(0,1,2) + (2,0,1), \lambda \in \mathbb{R},$$

que es distinta a $\mathbb{L}_1$ ya que no tienen la misma dirección. ∇

Ejemplo 1.49. Encontrar una ecuación paramétrica de una recta perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(1,-1,1) + (3,4,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(2,0,1) + (-1,1,3)$ que pasa por $P = (6,-1,4)$.

El vector director V de la recta que buscamos tiene que ser perpendicular a los vectores directores de $\mathbb{L}_1$ y de $\mathbb{L}_2$; para resolver este problema, es cómodo trabajar con el producto vectorial (ver la proposición 1.32 (e)). Tomamos $V = (1,-1,1) \times (2,0,1) = (-1,1,2)$ y la ecuación resulta

$$\mathbb{L} : X = \lambda(-1,1,2) + (6,-1,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

5 Planos

Sean U y V dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que no son múltiplos entre sí. Si consideramos todas las sumas posibles $\alpha U + \beta V$, con α, $\beta \in \mathbb{R}$, vemos que todos los puntos que se obtienen están contenidos en un plano que pasa por el origen.

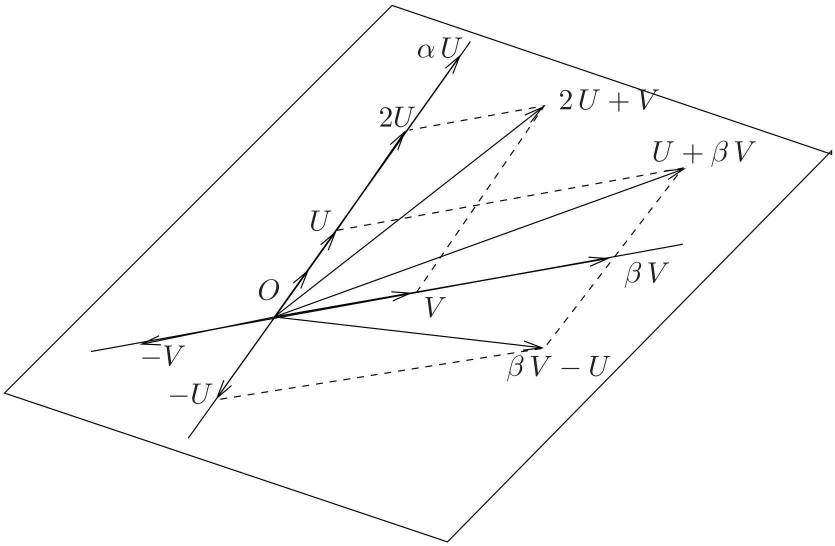

Figura 25: El plano formado por los vectores $\alpha\,U+\beta\,V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Si P es un punto que no está en el plano y queremos conseguir el plano paralelo al anterior que pasa por P, lo que tenemos que hacer es sumar P. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.50. *Sean* U *y* V *dos vectores que no son múltiplos entre sí y* P *un punto. Llamamos ecuación paramétrica del plano que pasa por* P *paralelo a* U *y* V *a*

$$\Pi : X = \alpha\,\mathrm{U} + \beta\,\mathrm{V} + P, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Los vectores U *y* V *se llaman vectores directores del plano.*

Ejemplo 1.51. Hallar una ecuación del plano paralelo a los vectores $(1,2,3)$ y $(3,0,5)$ y que pasa por el punto $(4,3,1)$.

Dado que $(1,2,3)$ y $(3,0,5)$ no son múltiplos entre sí, podemos tomar $U=(1,2,3)$, $V=(3,0,5)$ y $P=(4,3,1)$. Entonces, una ecuación es

$$\Pi : X = \alpha(1,2,3) + \beta(3,0,5) + (4,3,1), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.52. Hallar una ecuación del plano que pasa por $A=(1,2,-1)$, $B=(3,1,1)$ y $C=(-2,3,2)$.

Como punto de paso podemos elegir cualquiera de los tres puntos dados. Para determinar a las vectores U y V procedemos de manera similar a lo que hicimos en rectas (ver ejemplo 1.41), tomamos $U=B-A=(2,-1,2)$ y $V=C-A=(-3,1,3)$. Por lo tanto, una ecuación del plano es

$$\Pi : X = \alpha\,(2,-1,2) + \beta\,(-3,1,3) + (1,2,-1), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Observación 1.53. Sean A, B y C tres puntos no alineados. Una ecuación paramétrica del plano que pasa por A, B y C es

$$\Pi : X = \alpha\,(B - A) + \beta\,(C - A) + A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como los puntos A, B y C no están alineados, los vectores $B-A$ y $C-A$ no son múltiplos entre sí, de modo que podemos tomar a estos vectores como paralelos al plano. Además, el plano cumple con lo pedido; si $\alpha = \beta = 0$, obtenemos A; si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, B y si $\alpha = 0$, $\beta = 1$, C.

Es importante notar que, al igual que ocurre con las rectas, los planos no poseen una única ecuación paramétrica. Es posible verificar que

$$X = \alpha(A - C) + \beta(B - C) + C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es otra ecuación paramétrica del plano que pasa por A, B y C.

Hasta ahora trabajamos con ecuaciones paramétricas de planos, pero esto en ocasiones no es del todo cómodo; por ejemplo, para verificar si un punto pertenece o no a un plano o para determinar si dos planos son paralelos. A continuación, vamos a introducir una ecuación similar a la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$, donde la dirección normal del plano juega un rol central. Veremos también que este tipo de ecuación permite resolver fácilmente los problemas anteriores.

Comencemos con un ejemplo, sea el plano $\Pi : X = \alpha\,(1, 0, 0) + \beta\,(0, 1, 0)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ (ver figura 26), éste es el plano que contiene a los ejes x e y y es perpendicular al eje z. Si tomamos un vector sobre este eje, por ejemplo $N = (0, 0, 1)$, podemos decir que el plano Π está formado por todos los vectores perpendiculares a él. O sea,

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \}.$$

Como $(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z$, entonces

$$(x, y, z) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

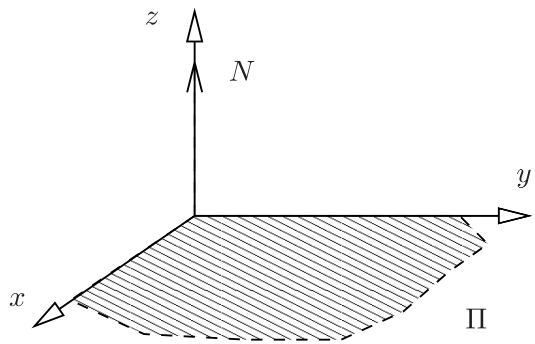

Figura 26: El plano Π, que contiene a los ejes x e y y es perpendicular al eje z.

Tomemos ahora el plano Π_1 paralelo a Π que pasa por $P = (1, 2, 2)$. Si (x, y, z) es otro punto de Π_1, $(x, y, z) - (1, 2, 2)$ es un vector paralelo a Π_1 que está contenido en Π y por lo tanto es ortogonal a N (ver figura 27). Es decir,

$$(x, y, z) \in \Pi_1 \quad \Leftrightarrow \quad [(x, y, z) - (1, 2, 2)] \cdot N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - 2 = 0;$$

y decimos que Π_1 es el plano que satisface la ecuación $z = 2$.

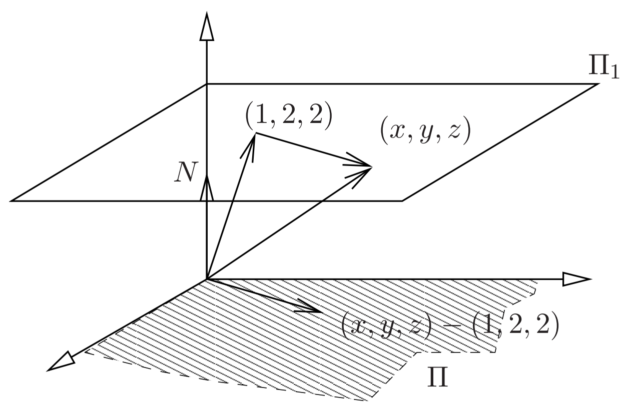

Figura 27: Plano paralelo al plano xy que pasa por $(1, 2, 2)$.

Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.54. *Sea N un vector no nulo. Llamamos ecuación implícita del plano Π perpendicular a N que pasa por P a*

$$\Pi \,:\, X \cdot N = P \cdot N$$

y decimos que N es un vector normal al plano.

Observación 1.55. Si $N = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ entonces

$$X \cdot N = (x, y, z) \cdot (a, b, c) = a\,x + b\,y + c\,z$$

y la ecuación tiene la forma

$$\Pi : a\,x + b\,y + c\,z = k, \quad \text{donde } k = P \cdot N.$$

Vale la pena señalar que dada la ecuación del plano, los coeficientes que multiplican a las variables x, y, z son los coeficientes de un vector normal al plano.

Ejemplo 1.56. Dado el plano de ecuación $x - 2y + z = 3$, hallar un vector normal al plano ¿Es único?

Por la observación anterior, $N = (1, -2, 1)$ es un vector normal al plano.

Este no es único. Por ejemplo, si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 3, obtenemos

$$3x - 6y + 3z = 9$$

que es otra ecuación implícita del mismo plano y a partir de esta, vemos que $N_1 = (3, -6, 3)$ es otro vector normal. ∇

Ejemplo 1.57. Hallar una ecuación implícita del plano perpendicular al vector $(3, -2, 4)$ que pasa por el punto $(1, 3, 1)$.

Como el plano es perpendicular al vector $(3, -2, 4)$, tomamos $N = (3, -2, 4)$ y el punto de paso es $P = (1, 3, 1)$. Por la observación anterior,

$$X \cdot N = 3x - 2y + 4z \quad \text{y} \quad P \cdot N = 3 - 6 + 4 = 1,$$

y la ecuación resulta $3x - 2y + 4z = 1$.

Otra manera posible de resolver el problema es la siguiente:

Dado que el vector $(3, -2, 4)$ es normal al plano, la ecuación del plano tiene la forma

$$3x - 2y + 4z = k,$$

y lo único que nos falta hacer es determinar k. Para esto, usamos que el punto $(1, 3, 1)$ está en el plano y, por lo tanto, debe verificar la ecuación, entonces

$$k = 3.1 - 2.3 + 4.1 = 1$$

y la ecuación del plano resulta $3x - 2y + 4z = 1$. ∇

Ejemplo 1.58. Hallar una ecuación implícita del plano Π de ecuación

$$\alpha(1,-3,2)+\beta(1,1,2)+(-1,0,4), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Para dar la ecuación implícita, necesitamos un vector normal y un punto en el plano. Como punto de paso podemos tomar $P=(-1,0,4)$. Como el vector normal es perpendicular al plano, en particular debe ser perpendicular a los vectores $(1,-3,2)$ y $(1,1,2)$, así que podemos tomar

$$N=(1,-3,2)\times(1,1,2)=(-8,0,4).$$

Entonces

$$X\cdot N=-8x+4z \quad \text{y} \quad P\cdot N=24.$$

Por lo tanto, una ecuación del plano es $-8x+4z=24$. ∇

Ejemplo 1.59. Hallar una ecuación implícita del plano que pasa por $A=(2,1,-1)$, $B=(1,2,1)$ y $C=(-1,1,1)$.

Podemos tomar como punto de paso cualquiera de los tres, por ejemplo A. Falta determinar un vector normal y para esto usamos que los vectores

$$B-A=(-1,1,2) \qquad \text{y} \qquad C-A=(-3,0,2)$$

son paralelos al plano y procedemos como en el ejemplo anterior. Sea

$$N=(B-A)\times(C-A)=(2,-4,3)\,;$$

entonces

$$X\cdot N=2x-4y+3z \quad \text{y} \quad A\cdot N=-3$$

y una ecuación del plano es $2x-4y+3z=-3$. ∇

Definición 1.60. *Decimos que dos planos son paralelos si sus vectores normales son múltiplos.*

Ejemplo 1.61. Los planos $\Pi_1: 3x-2y+z=8$ y $\Pi_2: -6x+4y-2z=1$ son paralelos ya que sus vectores normales, $N_1=(3,-2,1)$ y $N_2=(-6,4,-2)$ son múltiplos pues $N_2=(-2)\,N_1$. ∇

Definición 1.62. *Sean Π un plano con vector normal N y $\mathbb{L}$ una recta con vector director V.*

Decimos que $\mathbb{L}$ y Π son paralelos si V es ortogonal a N.

Decimos que $\mathbb{L}$ es ortogonal o perpendicular a Π si V y N son múltiplos.

Ejemplo 1.63. Dado el plano $\Pi : 3x - 2y + 4z = 2$, hallar una recta perpendicular a Π que pasa por el punto $P = (2, 1, 1)$.

Un vector normal al plano es $(3, -2, 4)$. Como el vector director de la recta tiene que ser un múltiplo de éste, podemos tomar $V = (3, -2, 4)$ y una ecuación de la recta es

$$\mathbb{L} : X = \lambda(3, -2, 4) + (2, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.64. Sean $\Pi_1 : x - 4y = 6$ y $\Pi_2 : 3x - y + 2z = 0$. Hallar la recta paralela a los planos Π_1 y Π_2 que pasa por $P = (3, 1, 1)$.

Los vectores $N_1 = (1, -4, 0)$ y $N_2 = (3, -1, 2)$ son vectores normales a los planos. Como la recta es paralela a Π_1 y Π_2, si V es un vector director de dicha recta, V tiene que ser ortogonal a N_1 y a N_2, por lo tanto podemos tomar $V = N_1 \times N_2$. Entonces,

$$V = (1, -4, 0) \times (3, -1, 2) = (-8, -2, 11)$$

y una ecuación de la recta es

$$\mathbb{L} : X = \lambda(-8, -2, 11) + (3, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Observación 1.65.

(a) Una recta $\mathbb{L}$ es paralela a un plano Π si, y sólo si, $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$ o $\mathbb{L} \subset \Pi$.

(b) Una recta $\mathbb{L}$ esta contenida en un plano Π si, y sólo si, $\mathbb{L}$ es paralela a Π y existe $P \in \mathbb{L}$ tal que $P \in \Pi$.

Ejemplo 1.66. Sean
$$\mathbb{L}_1 : X = \lambda(2, 1, 3) + (0, 1, 1) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : X = \lambda(1, -1, 3) + (2, 0, -2)$$
dos rectas. Hallar un plano Π tal que $\Pi \cap \mathbb{L}_1 = \emptyset$ y $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$.

Por la observación anterior, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas a Π de modo que sus vectores directores deben ser ortogonales a cualquier vector normal al plano. Luego, podemos tomar

$$N = (2, 1, 3) \times (1, -1, 3) = (6, -3, -3)$$

como vector normal al plano.

Dado que $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$, todo punto de $\mathbb{L}_2$ pertenece a Π, por lo tanto podemos elegir a cualquiera de ellos como punto de paso, por ejemplo $P = (2, 0, -2)$. Como $(6, -3, -3) \cdot (2, 0, -2) = 18$, una ecuación del plano es

$$6x - 3y - 3z = 18. \qquad \nabla$$

6 Otros ejemplos

Ejemplo 1.67. Si Π es el plano que pasa por los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 2, 0)$ y $C = (3, 2, 2)$, hallar todos los valores de b tales que

$$(2b + 3, -b^2 + 3b - 1, b^2) \in \Pi.$$

Para determinar si un punto pertenece a un plano, es más fácil trabajar con una ecuación implícita; luego, procedemos como en el ejemplo 1.59. Escogemos como vector normal $N = (B - A) \times (C - A)$, entonces

$$B - A = (-1, 2, -1), \quad C - A = (1, 2, 1) \qquad \text{y}$$

$$N = (-1, 2, -1) \times (1, 2, 1) = (4, 0, -4).$$

Dado que el plano pasa por A y que $N \cdot A = 4$ y una ecuación implícita del plano es

$$4x - 4z = 4.$$

Si $(2b + 3, -b^2 + 3b - 1, b^2) \in \Pi$, debe satisfacer la ecuación que acabamos de hallar. Entonces, teniendo en cuenta que $x = 2b + 3$, $y = -b^2 + 3b - 1$ y $z = b^2$, reemplazamos en la ecuación

$$4(2b + 3) - 4(b^2) = 4.$$

Luego, para que el punto este en el plano debe verificarse que

$$-4b^2 + 8b + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 3 \ \text{ o } \ b = -1.$$

Por lo tanto, los valores de b para los que el punto está en el plano Π son 3 y -1. ∇

Ejemplo 1.68. Sea Π el plano de ecuación $2x + y - 3z = 2$, hallar una ecuación paramétrica de Π.

Recordemos que para dar una ecuación paramétrica del plano, necesitamos encontrar dos vectores V_1 y V_2 (que no sean múltiplos) paralelos al plano y P un punto de paso. Podemos hacer esto al menos de dos formas distintas; la primera, tal vez la más larga, consiste en hallar tres puntos que estén en dicho plano y que no estén alineados. Una vez que tengamos los puntos, procederemos según la observación 1.53.

Para hallar los puntos, primero despejamos una de las variables de la ecuación del plano

$$2x + y - 3z = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - 2x + 3z$$

y luego obtenemos los puntos dando valores a x y a z.

$$x = 0 \text{ y } z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 5 \quad \Rightarrow \quad (0,5,1) \in \Pi,$$

$$x = 1 \text{ y } z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (1,0,0) \in \Pi,$$

$$x = 1 \text{ y } z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad (1,3,1) \in \Pi.$$

Entonces, una ecuación es

$$\Pi : X = \alpha\,[(1,0,0) - (0,5,1)] + \beta\,[(1,3,1) - (0,5,1)] + (0,5,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es decir

$$\Pi : X = \alpha(1,-5,-1) + \beta(1,-2,0) + (0,5,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(Observemos que las distintas elecciones de x e z aseguran que los puntos hallados no están alineados.)

Otra forma: comenzamos despejando una de las variables como antes

$$2x + y - 3z = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - 2x + 3z$$

y después utilizamos que esta relación determina si un punto está en el plano o no: un punto está en Π si es de la forma

$$(x, 2 - 2x + 3z, z), x, z \in \mathbb{R}.$$

Y ahora escribimos este vector como la suma de tres vectores, uno cuyas coordenadas dependen x, otro cuyas componentes dependen z y el tercero formado sólo por números

$$(x, 2 - 2x + 3z, z) = (x, -2x, 0) + (0, 3z, z) + (0, 2, 0), x, z \in \mathbb{R}.$$

Por último, notemos que podemos escribir la suma de la siguiente manera

$$x(1,-2,0) + z(0,3,1) + (0,2,0), \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

dado que $(1,-2,0)$ y $(0,3,1)$ no son múltiplos entre sí, ésta es una ecuación paramétrica del plano. ∇

Ejemplo 1.69. Sean $\Pi : 3x - y + 2z = 2$ y $P = (0,1,1)$.

(a) Sea $\mathbb{L}_1$ la recta tal que $\mathbb{L}_1 \perp \Pi$ y que pasa por P. Hallar una ecuación paramétrica de $\mathbb{L}_1$.

Dado que la recta pasa por $P = (0, 1, 1)$, una ecuación paramétrica tiene la forma $\mathbb{L}_1 : X = \lambda V + (0, 1, 1)$ y sólo nos falta hallar un vector director V; como $\mathbb{L}_1$ es perpendicular a Π, V es un múltiplo de un vector normal al plano, por lo tanto podemos tomar $V = (3, -1, 2)$. Luego, una ecuación paramétrica es

$$\mathbb{L}_1 : X = \lambda(3, -1, 2) + (0, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Sea $\mathbb{L}_2 : X = t(2, 1, 2) + (0, 1, 1)$. Hallar una ecuación implícita del plano Π_2 tal que $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi_2$.

Para hallar la solución de b), debemos tener en cuenta que $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \subset \Pi$, implica que $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas a Π, por lo tanto podemos elegir como vector normal al plano a

$$N = (3, -1, 2) \times (2, 1, 2) = (-4, -2, 5).$$

Como ambas rectas pasan por $P = (0, 1, 1)$, el plano también debe pasar por este punto y como $P \cdot N = 3$ una ecuación implícita del plano es

$$-4x - 2y + 5z = 3. \qquad \nabla$$

Ejemplo 1.70. Sea Π el plano que contiene a las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \lambda(3, 1, -2) + (1, 0, 4) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : X = \lambda(-6, -2, 4) + (2, 2, 1).$$

Dar una ecuación paramétrica y una implícita de Π.

Este ejemplo es similar al inciso (b) del ejemplo anterior: buscamos un plano que contenga a dos rectas, sin embargo no podemos repetir lo hecho. En este caso los vectores directores de las rectas son múltiplos entre sí y no podemos elegir como un vector normal al producto vectorial de los vectores directores pues este producto da el vector nulo. En cambio, procedemos de la siguiente manera (que también puede emplearse en el ejemplo anterior).

Dado que $\mathbb{L}_1 \subset \Pi$, una ecuación paramétrica de Π tiene la forma

$$\Pi : X = \alpha(3, 1, -2) + \beta V_2 + (1, 0, 4), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y sólo nos falta determinar V_2. Como $(1, 0, 4)$ y $(2, 2, 1) \in \Pi$, entonces $(2, 2, 1) - (1, 0, 4) = (1, 2, -3)$ es un vector paralelo al plano que no es múltiplo de $(3,1,-2)$. Entonces tomamos $V_2 = (1,2,-3)$ y una ecuación implícita de Π es

$$\Pi : X = \alpha(3,1,-2) + \beta(1,2,-3) + (1,0,4), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para hallar una ecuación implícita, repetimos lo hecho en ejemplos anteriores; tomamos $N = (3,1,-2) \times (1,2,-3) = (1,7,5)$, $N \cdot (1,0,4) = 21$ y la ecuación resulta

$$\Pi : x + 7y + 5z = 21. \qquad \nabla$$

7 $\mathbb{R}^n$

En secciones anteriores estudiamos los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y definimos operaciones en cada uno de ellos. En ocasiones, es útil contar con estas operaciones no sólo para pares o ternas de números, si no también para conjuntos de n números reales ordenados $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ llamados n-uplas. Notamos $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n-uplas, es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;:\; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Dados $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ y $k \in \mathbb{R}$ definimos

(a) *La suma de X e Y* como

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

(b) *El producto de k por X* como

$$k\,X = (k\,x_1, k\,x_2, \dots, kx_n).$$

(c) *La norma de X* como

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

(d) *El producto interno entre X e Y* como

$$X \cdot Y = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n.$$

Tanto la norma como las operaciones definidas gozan de las mismas propiedades que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (ver 1.4, 1.9 y 1.23). Una excepción importante es el producto vectorial: éste está definido sólo para para vectores de $\mathbb{R}^3$.

8 Ejercicios

1) Sean $A = (1, -2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 4)$ vectores en el plano

   a) Graficar A, B y C.

   b) Efectuar las siguientes operaciones y graficar
   i) $A + B$, ii) $2A$, iii) $-A$, iv) $\frac{1}{3}A$, v) $2A + 3B$, vi) $A - 2C$,
   vii) $2A + C$, viii) $A - (B - 3C)$, ix) $-A + 2(B + 4C)$

2) Sea $W = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$

   a) Graficar αW con $\alpha \geq 0$.

   b) Graficar βW con $-1 \leq \beta \leq 2$.

   c) Graficar tW con $t \in \mathbb{R}$.

3) Dados los vectores $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (-1, 2, -4)$

   a) Graficar A, B y C.

   b) Efectuar las siguientes operaciones:
   i) $A + C$, ii) $3C$, iii) $-A + B$, iv) $5A - \frac{1}{2}B$,
   v) $-2A+3B-5C$, vi) $-A-2(7B+C)$, vii) $(A-C)+(B-C)$.

4) Calcular la longitud de los siguientes vectores:

   $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(-3, 4)$, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $(1, 1, -1)$, (1,1-2)+(3,5,6), (2,-1,3), -2(2,-1,3), 2(2,-1,3).

5) Graficar en el plano los siguientes conjuntos $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$,

   $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| > 2\}$,

   $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|A\| \leq 3\}$.

6) Hallar la distancia entre A y B si

   a) $A = (1, -3)$, $B = (0, 0)$ b) $A = (1, -3)$, $B = (4, 1)$

   c) $A = (4, -2, 6)$, $B = (3, -4, 4)$ d) $A = (1, 2, -3)$, $B = (0, 3, 1)$.

7) Determinar todos los valores de k tales que:

   a) $\|A\| = 5$ si $A = (4, k)$.

   b) $\|A\| = 2$ si $A = (1, k, 0)$.

   c) $d(A, B) = 2$ si $A = (1, 1, 1)$ y $B = (k, -k, 2)$.

d) $\|A\| = 1$ si $A = k(2,2,1)$.

8) Sean $A = (1,2)$; $B = (-1,-2)$; $C = (-2,1)$; $D = (1,0)$ y $E = (0,0)$

Calcular $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A \cdot E$, $B \cdot C$, $B \cdot (C+D)$, $(D-C) \cdot A$.

9) Sean $A = (1,1,1)$, $B = (1,-1,0)$, $C = (2,-1,-1)$ y $D = (2,3,-1)$

Calcular $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot (B+C)$; $A \cdot (2B-3C)$; $A \cdot D$; $(A-2B) \cdot C$.

10) Determinar si A y B son perpendiculares

a) $A = (1,1)$, $B = (-2,2)$.

b) $A = (2,-3)$, $B = (0,0)$.

c) $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$.

d) $A = (1,-2,4)$, $B = (-2,1,1)$.

11) a) Hallar 3 vectores del plano que sean ortogonales al $(2,-3)$ ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.

b) Hallar todos los vectores perpendiculares al $(2,-2)$ que tengan norma 1. Graficar.

c) Hallar tres vectores del espacio que sean perpendiculares al vector $(1,3,-4)$.

d) Hallar un vector ortogonal al $(-1,0,2)$ que tenga norma igual a 2.

12) Dados $A = (1,1,1)$, $B = (1,2,-1)$, $C = (-2,-4,2)$, $D = (0,0,0)$, $E = (-1,3,4)$,

hacer las siguientes operaciones: $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$, $B \times C$, $D \times E$, $(A \times B) \times E$, $A \times (B \times E)$, $(A \times B) \cdot E$.

13) Encontrar un vector no nulo que sea ortogonal a $(1,2,-3)$ y a $(-1,5,-2)$ ¿Cúantos hay?

14) Idem anterior para $(1,-2,4)$ y $(2,-4,8)$.

15) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L} : X = \alpha(-2,3) + (2,2)$

$P_1 = (2,2)$, $P_2 = (-2,3)$, $P_3 = (0,0)$, $P_4 = (12,-13)$, $P_5 = (2,-1)$. Graficar.

16) Idem ejercicio anterior para la recta $\mathbb{L} : X = t(-1, 1) + (3, -3)$ y los puntos $P_1 = (3, -3)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (-1, 1)$, $P_4 = (3, 4)$, $P_5 = (6, 6)$.

17) Encontrar una ecuación paramétrica de:

    a) La recta que pasa por el punto $P = (-1, 2)$ y que tiene dirección $V = (3, 1)$.
    b) La recta que tiene dirección $W = (0, 3)$ y pasa por el punto $Q = (4, 5)$.
    c) La recta que pasa por los puntos $A = (1, -4)$ y $B = (-1, -3)$.
    d) La recta que es paralela a $L : X = t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por el punto $P = (1, -4)$.
    e) La recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(4, -5)$ y $(\frac{1}{2}, 3)$.
    f) La recta que es perpendicular a $\mathbb{L} : X = t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por el punto $P = (1, -3)$
    g) La recta de ecuación $y = 3x - 2$.
    h) La recta de ecuación $2x - 3y = 5$.
    i) La recta de ecuación $y = 4$.
    j) La recta de ecuación $x = -5$.

    Graficar cada una de las rectas halladas.

18) Encontrar, si es posible, la ecuación explícita de las siguientes rectas:

    a) $\mathbb{L} : X = \alpha(3, -2) + (1, 7)$.
    b) $\mathbb{L} : X = \beta(1, 0) + (3, 4)$.
    c) $\mathbb{L} : X = m(0, 1) + (2, -6)$.

19) Encontrar una ecuación paramétrica de:

    a) La recta que tiene dirección $V = (-4, 5, 2)$ y que pasa por $(-4, 6, 8)$.
    b) La recta que pasa por los puntos $(-2, 3, 4)$ y $(-1, 3, 1)$.
    c) La recta que es paralela al eje z y que pasa por $(1, 2, 3)$.
    d) La recta paralela a $\mathbb{L} : X = t(2, 4, -5) + (0, 3, -1)$ que pasa por $(3, -1, 2)$.

e) Dos rectas distintas perpendiculares a

$$\mathbb{L} : X = \alpha(1, -2, 1) + (3, 5, 6)$$

y que pasen por $(1, 9, -3)$.

20) Determinar si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 2, 0)$ están alineados (pertenecen a una misma recta).

21) Dado el plano $\Pi : 2x - 5y + 3z = 11$,

a) calcular a para que el punto $(2, a, 7) \in \Pi$.

b) ¿Existe a tal que $(0, 3a, 5a) \in \Pi$?

22) Encontrar una ecuación paramétrica de:

a) El plano que pasa por $(1, 3, 4)$, $(-1, 5, -7)$ y $(3, -1, 2)$.

b) El plano que contiene a la recta $\mathbb{L} : X = t(-1, 2, 3) + (3, 4, 1)$ y que pasa por el punto $(1, 1, -1)$.

c) El plano $\Pi : 2x - 3y + 6z = 3$

d) El plano $\Pi : x - 5y + z = 0$.

e) El plano que contiene a los ejes x y z.

f) El plano paralelo a la recta $\mathbb{L} : X = \alpha(1, 2, -3) + (3, 5, 6)$ y que contiene a la recta $\mathbb{L}' : X = \beta(3, -5, 6) + (1, -2, 3)$.

23) Encontrar una ecuación implícita de:

a) El plano que pasa por $(2, -1, 4)$, $(6, 8, -1)$ y $(1, -3, 1)$.

b) El plano $\Pi : X = \alpha(1, -3, 2) + \beta(9, -1, 2)$.

c) El plano $\Pi' : X = \alpha(1, -3, 2) + \beta(9, -1, 2) + (4, -3, 2)$.

d) El plano paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + 6z = -1$ y que pase por el $(1, -2, 1)$.

e) El plano perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \beta(1, -3, 4) + (1, 6, 7)$ y que pase por el origen.

f) El plano que contiene a la recta $\mathbb{L} : X = t(2, 1, 0) + (1, -4, 1)$ y al punto $P = (1, -2, -2)$.

24) Comprobar si los puntos $(8, 2, 4)$, $(4, 2, 8)$, $(-2, 0, 1)$ y $(1, -1, 3)$ son coplanares (pertenecen a un mismo plano).

25) Sea Π el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda(-1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda(-2, 4, -2) + (0, 1, 1)$.

Dar una ecuación paramétrica y una implícita de Π.

26) Encontrar una recta que sea perpendicular al plano $\Pi : 2x - 3y + z = 8$ y que pase por $(-1, 0, 2)$.

27) Encontrar una recta $\mathbb{L}$ que sea perpendicular a $\mathbb{L}' : X = \lambda(1, -3, 4) + (1, -2, 1)$, paralela al plano $\Pi : -x + y - 2z = 9$ y que tenga un punto en común con $\mathbb{L}_1 : X = t(-1, 4, 5) + (0, 3, 2)$.

28) Sea Π el plano dado por $X = \alpha(0, 2, 1) + \beta(2, 3, 0) + (-1, 0, 1)$. Encontrar las ecuaciones de

a) dos rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, perpendiculares entre sí, ambas contenidas en Π.

b) una recta $\mathbb{L}'$ contenida en Π que sea perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = t(-2, 3, 1) + (2, 1, 2)$.

29) Dadas las rectas

$$\mathbb{L} : \; X = t(1, -1, 2) + (0, 1, 3) \qquad\qquad \mathbb{L}_1 : \; X = \lambda(1, 1, 0) + (1, 5, 9)$$

y los puntos: $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (3, 0, 0)$,

a) hallar una ecuación implícita de un plano Π tal que $\mathbb{L} \perp \Pi$ y $P \in \Pi$.

b) Hallar una ecuación paramétrica de una recta $\mathbb{L}_2$ tal que $\mathbb{L}_2 \perp \mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$ y $Q \in \mathbb{L}_2$.

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

1 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.1. *Una ecuación lineal con incógnitas* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b *son números reales dados. Los números* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *se llaman los coeficientes de la ecuación. Si* $b = 0$ *decimos que la ecuación es homogénea.*

Un sistema lineal de m *ecuaciones con* n *incógnitas es un conjunto de* m *ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\ . \end{array}\right.$$

El sistema es homogéneo si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Definición 2.2. *Dado un sistema lineal de ecuaciones con* n *incógnitas, decimos que* $(s_1, \ldots, s_n)$ *es una solución si satisface todas las ecuaciones del sistema, es decir, si al reemplazar* x_i *por* s_i *se verifican todas las igualdades para* $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 2.3. Determinar si $(1, 2, -1)$ es solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 6\ . \end{array}\right.$$

En este caso, dado que el sistema tiene sólo tres incógnitas hemos reemplazado la notación de la definición x_1, x_2, x_3 por x, y, z, de modo que debemos reemplazar x por 1, y por 2 y z por -1 y comprobar si se verifican todas las igualdades. La primera ecuación se verifica pues

$$1 + 2 + (-1) = 2,$$

y lo mismo ocurre con la segunda y la tercera pues

$$2.1 - 2 = 0, \qquad 1 + 2 - 3(-1) = 6.$$

Por lo tanto, $(1, 2, -1)$ es una solución del sistema. ∇

Ejemplo 2.4. Determinar si $(0, 2, 3)$, $(1, 1, -1)$ y $(2, 0, 1)$ son soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 2 \\ 4x & & & + & z & = & 3\,. \end{array} \right.$$

Como en el ejemplo anterior, reemplazamos y comprobamos si se verifican las ecuaciones. El punto $(0, 2, 3)$ es solución pues

$$0 + 2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 4.0 + 3 = 3$$

y $(1, 1, -1)$ también es solución pues

$$1 + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad 4.1 - 1 = 3.$$

En cambio, $(2, 0, 1)$ no es solución: al reemplazar en las ecuaciones tenemos

$$2 + 0 = 2 \qquad \text{y} \qquad 4.2 + 1 = 9 \neq 3,$$

por lo tanto $(2, 0, 1)$ no es solución ya que no verifica una de las ecuaciones. ∇

Ejemplo 2.5. Encontrar, si existen, a y b tales que $(1, 1, 2)$ sea solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 4 \\ bx & - & y & + & z & = & 3 \\ ax & - & 3y & + & bz & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Si $(1, 1, 2)$ es solución, debe verificar cada una de las ecuaciones que forman el sistema. Entonces, de la primera ecuación,

$$1 + 1 + 2\,a = 4 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1\,.$$

De la segunda,

$$b - 1 + 2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2\,.$$

Por lo tanto, $(1, 1, 2)$ satisface las dos primeras ecuaciones si $a = 1$ y $b = 2$. Sin embargo, para que sea solución del sistema, debe satisfacer todas las ecuaciones, así que falta comprobar la tercera. Dado que ya encontramos los valores posibles de a y b, los reemplazamos en la ecuación, queda

$$x - 3y + 2z = 0 \quad \text{y} \quad 1 - 3.1 + 2.2 = 2 \neq 0,$$

luego, no existen valores de a y b para los cuales $(1, 1, 2)$ sea solución del sistema. ∇

En el ejemplo 2.4 vimos un sistema que tiene dos soluciones distintas; es posible demostrar que si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones, entonces tiene infinitas; más adelante interpretaremos geométricamente esta afirmación. Esto motiva la siguiente clasificación:

Definición 2.6. *Sea*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Decimos que el sistema es

(a) *Compatible determinado si tiene solución única.*

(b) *Compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.*

(c) *Incompatible si no tiene solución.*

Ejemplo 2.7. En el ejemplo 2.4 mostramos un sistema que tiene al menos dos soluciones, por lo tanto tiene infinitas soluciones y es un sistema compatible indeterminado. Consideremos ahora el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3\,. \end{array} \right.$$

Dado que es imposible que dos números sumen 1 y 3 al mismo tiempo, este sistema no tiene solución, es un sistema incompatible. ∇

En los ejemplos anteriores, las soluciones de los distintos sistemas estaban dadas y no hicimos ninguna mención a cómo se obtuvieron; ahora veremos cómo hallarlas. Comencemos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 6\,. \end{array}\right.$$

Este sistema tiene una gran ventaja: en la tercera ecuación sólo aparece la incógnita z, en la segunda y y z, y sólo en la primera aparecen las tres incógnitas. Esta clase de sistemas se resuelven despejando "de abajo hacia arriba".

De la tercera ecuación despejamos z,

$$2z = 6 \quad \Rightarrow \quad z = 3.$$

En la segunda ecuación, dado que ya conocemos el valor de z, basta reemplazar y despejar para obtener y:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2y & + & z & = & 1 \\ & & z & = & 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2y + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1.$$

Y ahora reemplazamos los valores hallados de y y z en la primera ecuación y despejamos x

$$\left.\begin{array}{ccccccr} x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & & & y & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x - (-1) + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

por lo tanto, la única solución del sistema es $(1, -1, 3)$ y el sistema es compatible determinado. ∇

Lamentablemente, no todos los sistemas tienen el aspecto del ejemplo anterior; supongamos que tenemos que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{cccccccr} 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & = & 12\,. \end{array}\right.$$

En este caso no es posible despejar una variable directamente y así pasar a despejar las otras. Lo que haremos en este caso es transformarlo en un sistema similar al del ejemplo 2.8 sin alterar el conjunto de soluciones. Primero introduzcamos la siguiente definición.

Definición 2.9. *Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Para pasar de un sistema a otro equivalente podemos efectuar las siguientes *operaciones sobre las ecuaciones del sistema*:

(a) Intercambiar dos ecuaciones de lugar.

Por ejemplo, los siguientes sistemas son equivalentes

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 2 \\ 2x & + & y & = & -1 \end{array}\right. .$$

(b) Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.

Por ejemplo,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ 2x & - & 6y & = & 4 \end{array}\right. ,$$

son sistemas equivalentes.

(c) Reemplazar una ecuación por la ecuación que obtenemos al sumarle un múltiplo de otra.

Por ejemplo,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & -5 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right.$$

son sistemas equivalentes. Notemos que obtenemos el segundo sistema a partir del primero al sumar a la primera ecuación la segunda multiplicada por -3. El conjunto de soluciones de ambos sistemas es $\{(-5, 2)\}$.

Ejemplo 2.10. Resolver

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & = & 12 \end{array}\right. .$$

En general, es muy cómodo que en la primera ecuación, la primera incógnita esté multiplicada por 1, para esto intercambiamos la primera y la segunda ecuación. Obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ 3x & + & y & + & z & = & 12 \end{array}\right. .$$

A continuación, "eliminamos" la x de la segunda ecuación; para esto restamos a la segunda fila dos veces la primera, el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 12\ . \end{array}\right.$$

Y ahora, restando a la tercera ecuación tres veces la primera, "eliminamos" la x de la tercera ecuación. El sistema se transforma en

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 5y & + & 4z & = & 3\ . \end{array}\right.$$

Finalmente, restamos a la tercera ecuación la segunda. Obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & z & = & 2\ . \end{array}\right.$$

Dado que obtuvimos este sistema a partir del sistema original realizando las operaciones (a), (b) y (c), los sistemas son equivalentes; por lo tanto basta resolver el último sistema. Procedemos como en el ejemplo 2.8.

Es inmediato, por la última ecuación que $z = 2$. Reemplazamos en la segunda ecuación y despejamos y

$$-5y + 3.2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1.$$

Y para terminar reemplazamos y y z en la primera ecuación

$$x + 2.1 - 2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3.$$

Por lo tanto el sistema resulta compatible determinado y la única solución es $(3, 1, 2)$. ∇

En general el procedimiento que seguiremos para hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es el que utilizamos en el ejemplo anterior.

Por otra parte, vale la pena notar que en la mayoría de los pasos seguidos, sólo nos interesaron los coeficientes del sistema. Teniendo en cuenta esto podemos simplificar la notación introduciendo la *matriz ampliada del sistema*.

Definición 2.11. *Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

llamamos matriz ampliada o aumentada del sistema a la siguiente tabla

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ejemplo 2.12. La matriz ampliada del sistema del ejemplo anterior es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right),$$

la matriz ampliada del sistema que obtuvimos al realizar las operaciones entre las ecuaciones del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right). \qquad \nabla$$

Observemos que, cuando una incógnita no aparece en la ecuación, en la matriz ampliada ponemos 0. Notemos además que el proceso de transformar un sistema en uno equivalente más simple se traduce en que cada fila de la matriz tiene, contando de izquierda a derecha por lo menos un cero más que la anterior (a menos que la fila tenga todos ceros, estas filas las agrupamos en la parte de abajo). Formalizamos esta idea en la siguiente definición.

Definición 2.13. *Decimos que una matriz ampliada es escalonada reducida por filas si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) *Si una fila no tiene todos* 0*, entonces su primer elemento no nulo es un* 1*.*

(b) *Las filas que constan sólo de* 0 *están agrupadas en la parte inferior de la matriz.*

(c) *Si dos filas consecutivas son no nulas, el primer coeficiente no nulo de la fila inferior está más a la derecha que el primer coeficiente no nulo de la fila superior.*

(d) *Los coeficientes de la matriz que están debajo del primer coeficiente no nulo de una fila son* 0.

Ejemplo 2.14. Decidir si las siguientes matrices están reducidas escalonadas por filas.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Esta matriz no está escalonada reducida por filas pues no verifica la condición (c) de la definición: el primer coeficiente no nulo de la tercera fila no está más a la derecha que el primer coeficiente no nulo de la segunda fila.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz es escalonada reducida por filas: El primer elemento no nulo de cada fila es un uno, el primer elemento no nulo de la segunda fila está más a la derecha que el de la primera, y el primero no nulo de la tercera está más a la derecha que el de la segunda, y debajo de los primeros coeficientes no nulos de cada fila sólo tememos ceros.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz no está escalonada pues no se cumple la condición (b) de la definición, la tercera fila contiene todos ceros y no está en la parte inferior de la matriz; en cambio, si intercambiamos la fila 3 con la 4 queda una matriz reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verifica todas las condiciones de la definición. ∇

Observación 2.15. Al trabajar con la matriz ampliada, las operaciones sobre las ecuaciones del sistema se traducen en las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz:

(a) Intercambiar dos filas de lugar.

(b) Multiplicar una fila por un número distinto de 0.

(c) Reemplazar una fila por la fila que obtenemos al sumarle un múltiplo de otra.

Es conveniente anotar al pasar de una matriz ampliada a otra cuál es la operación que realizamos. Usaremos la siguiente notación:

(a) Si intercambiamos la fila i con la j escribimos $F_i \leftrightarrow F_j$.

(b) Si a la fila i la multiplicamos por k, escribimos $k\,F_i$.

(c) Si reemplazamos la fila i por ella más k-veces la fila j escribimos $F_i + k\,F_j$. Es importante observar el orden de la notación; escribimos primero la fila que vamos a reemplazar.

Veamos cómo resolver un sistema transformando la matriz ampliada en una reducida por filas.

Ejemplo 2.16. Volver a resolver el sistema del ejemplo 2.10 usando matrices ampliadas.

Como ya vimos, la matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Lo primero que hacemos es conseguir un uno en la fila 1 columna 1 (este paso no es obligatorio, pero hace las cuentas más fáciles). Para esto intercambiamos la fila 1 con la 2, resulta

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Lo siguiente es conseguir ceros debajo del 1. Estas dos operaciones, como son independientes, las realizamos en un solo paso

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Para obtener una matriz reducida por filas, sólo nos falta conseguir un cero en la columna 2 fila 1. Esto lo logramos realizando operaciones entre las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad F_3 - F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Para que esté escalonada, necesitamos un uno en lugar del -5:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad -\tfrac{1}{5}F_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Para terminar, escribimos y resolvemos el sistema que corresponde a esta última matriz. El sistema es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & & y & - & \frac{3}{5}z & = & -\frac{1}{5} \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

y como ya vimos, $(3, 1, 2)$ es su única solución. ∇

Ejemplo 2.17. Resolver los siguientes sistemas y clasificarlos de acuerdo a la cantidad de soluciones.

(a) $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 42 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 23 \end{array}\right..$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 42 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 23 \end{array}\right).$$

Primero conseguimos un uno en la fila 1 columna 1 multiplicando la primera fila por 1/2

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 4 & -2 & 6 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 42 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 23 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2}F_1 \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 42 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 23 \end{array}\right).$$

Para reducir la matriz, el próximo paso es conseguir ceros debajo del 1 de la primera columna. Tenemos

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -4 & 2 & 42 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 23 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 6F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 24 \\ 0 & 5 & -10 & 5 & 17 \end{array}\right).$$

Colocamos un uno en la columna 2 fila 2

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 24 \\ 0 & 5 & -10 & 5 & 17 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{8}F_2 \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 5 & 17 \end{array}\right).$$

Ahora necesitamos un cero en fila 3 columna 2.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 5 & 17 \end{array}\right) \quad F_3 - 5F_2 \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Ya tenemos la matriz escalonada, el sistema que corresponde a esta matriz es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & - & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 2\,. \end{array}\right.$$

Es evidente que la última ecuación del sistema no tiene solución, sea cual fuere el valor de x_1, x_2, x_3 y x_4, el miembro de la izquierda de la ecuación da 0 y $0 \neq 2$. Dado que una ecuación no tiene solución, el sistema no tiene solución; por lo tanto es un sistema incompatible.

En general, cuando obtenemos al escalonar una matriz una fila similar a la fila 3 de este ejemplo (todos ceros a la izquierda de la barra y distinto de cero a la derecha) es sistema resulta incompatible y no es necesario escribir el sistema.

(b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Dado que ya tenemos un uno en la fila 1 columna 1, el primer paso es conseguir ceros debajo de éste:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

La matriz está escalonda y el sistema que corresponde a esta matriz es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & z & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Por la última ecuación, $z = 0$. Reemplazamos en la segunda y obtenemos $y = 1$; finalmente, reemplazamos los valores de y y z en la primera ecuación. Nos queda,

$$x + 1 + 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Por lo tanto única solución del sistema es $(1, 1, 0)$.

(c) $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & & & = & -3 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & + & 5y & + & z & = & 7 \\ x & - & y & - & z & = & -1\,. \end{array}\right.$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Dado que ya tenemos un uno en la fila 1 columna 1, buscamos conseguir ceros debajo de este:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1 \\ F_4-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Intercambiamos las filas 2 y 4 para obtener un uno en la fila 2 columna 2

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad F_2 \leftrightarrow F_4 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right).$$

Y ahora conseguimos ceros en la columna 2, debajo del 1:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ F_3 + F_2 \\ F_4 - 3F_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obtuvimos una matriz escalonada reducida por filas, el sistema que corresponde a esta matriz es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

En este caso, cualquier terna x, y, z satisface a las dos últimas ecuaciones, de modo que estas ecuaciones no imponen ninguna restricción a los valores de las incógnitas y nuestro problema se reduce a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ & & y & - & z & = & 2\,. \end{array}\right.$$

De la última ecuación obtenemos $z = y - 2$ y de la primera $x = 2y - 3$. Es importante comprender el resultado al que hemos llegado. Para que (x, y, z) sea una solución del sistema, debe ocurrir que $x = 2y - 3$ y $z = y - 2$. Reemplazando obtenemos $(2y - 3, y, y - 2)$ y no hay ninguna condición sobre el valor de y; de este modo para cada valor posible de y obtenemos distintas soluciones del sistema, por ejemplo, si $y = 0$, $(-3, 0, -2)$ es una solución, si $y = 1$, $(-1, 1, -1)$ es otra solución, si $y = -1$, $(-5, -1, -3)$ es otra. Dado que y puede tomar cualquier valor real, el sistema tiene infinitas soluciones y, por lo tanto, es compatible indeterminado. Podemos expresar a todas las soluciones como

$$(2y - 3, y, y - 2), \qquad y \in \mathbb{R};$$

Otro modo posible de presentar las soluciones es el siguiente; primero escribimos a $(2y - 3, y, y - 2)$ como la suma de dos vectores, uno que contenga a la variable y sus coeficientes y otro que contenga a los términos que no están multiplicando a la variable. Nos queda

$$(2y - 3, y, y - 2) = (2y, y, y) + (-3, 0, -2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

(cuando una componente no contiene a la variable o términos que no están multiplicando a la variable, ponemos cero) Y ahora, escribimos al vector de la variable como el producto de la variable por el vector de los coeficientes:

$$(2y-3, y, y-2) = y(2,1,1) + (-3,0,-2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

De esta manera vemos que las soluciones del sistema forman una recta con una ecuación paramétrica dada por

$$X = y(2,1,1) + (-3,0,-2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

(d) $$\begin{cases} -3x + 4y - z = -6 \\ 2x - y - 2z = 10 \\ x - y = 3 \\ x + y - 3z = 10\,. \end{cases}$$

Primero armamos la matriz ampliada del sistema, al armarla, intercambiamos los coeficientes de la primera y tercera ecuación para tener un uno en la fila 1 columna 1:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 10 \\ -3 & 4 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right),$$

Y comenzamos el proceso:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 10 \\ -3 & 4 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right).$$

Ya tenemos un uno en la fila 2 columna 2, de modo que procuramos ceros debajo de este:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_3 - F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Para que la matriz sea escalonada reducida por filas, debe haber un cero en la fila 4 columna 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right). \qquad F_4 - F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como en el ejemplo anterior, la última fila es nula de modo que no la tenemos en cuenta. El sistema asociado a esta matriz es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & & & = & 3 \\ & & y & - & 2z & = & 4 \\ & & & & z & = & -1\ . \end{array}\right.$$

Por la última ecuación, $z = -1$. Reemplazamos este valor en la segunda y obtenemos

$$y + 2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2,$$

y sustituyendo los valores hallados de z e y en la primera nos queda

$$x - 2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = 5.$$

Luego, $(5, 2, -1)$ es la única solución del sistema y, por lo tanto, es compatible determinado. ∇

2 Aplicaciones

En el capítulo anterior, estudiamos ecuaciones de rectas y planos. Ahora vamos a utilizar lo visto en este capítulo para resolver problemas simples como calcular la intersección entre dos rectas, entre dos planos o entre rectas y planos.

Intersección de planos

Si tenemos dos planos no paralelos, los puntos en común (es decir la intersección entre los planos) forman una recta. Si queremos hallar una ecuación paramétrica de dicha recta, basta con resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por las ecuaciones de los planos. Por ejemplo, si Π_1 es el plano de ecuación $-x + 3y + 2z = 0$ y Π_2 el de ecuación $2x + y + 3z = 14$, los puntos comunes a los dos planos, deben verificar ambas ecuaciones; es decir, ser soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 14\,. \end{array}\right.$$

En el próximo ejemplo veremos cómo hallar una ecuación paramétrica de la recta definida por la intersección de estos planos.

Ejemplo 2.18. Hallar una ecuación paramétrica de la recta

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 14\,. \end{array}\right.$$

Resolvamos el sistema. Tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \end{array}\right) \; {-F_1} \; \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

$$F_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \end{array}\right) \; \tfrac{1}{7}F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

El sistema que corresponde a la última matriz ampliada es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2\,. \end{array}\right.$$

De la última ecuación obtenemos $y = 2 - z$ y al reemplazar en la primera y despejar x nos queda

$$x - 3(2 - z) - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - z\,.$$

Por lo tanto, para que un punto satisfaga el sistema debe ser de la forma $(6 - z, 2 - z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$(6 - z, 2 - z, z) = (6, 2, 0) + (-z, -z, z) = (6, 2, 0) + z(-1, -1, 1)\,.$$

Luego, una ecuación paramétrica de la recta es

$$X = \lambda(-1, -1, 1) + (6, 2, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \qquad \nabla$$

Al revés de lo hecho en el ejemplo anterior, toda recta en $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como la intersección de dos planos; es decir como la solución de un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. A este sistema lo llamamos *ecuaciones implícitas de la recta.*

Ejemplo 2.19. Encontrar ecuaciones implícitas de la recta

$$X = (-1, 2, 3) + t(4, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si (x, y, z) es un punto de la recta, entonces, para algún t,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-1, 2, 3) + t(4, -2, 1) \\ &= (-1 + 4t, 2 - 2t, 3 + t) \quad . \end{aligned}$$

Igualando cada componente del vector obtenemos

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \ ; \end{cases}$$

y al despejar t de cada ecuación queda

$$\begin{cases} t = \dfrac{x+1}{4} \\ t = \dfrac{-y+2}{2} \\ t = z - 3 \ . \end{cases}$$

Igualamos la primera ecuación con la segunda y obtenemos una ecuación de un plano

$$\frac{x+1}{4} = \frac{-y+2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(x+1) = 4(-y+2) \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y = 6\,.$$

De la misma manera, igualando la primera ecuación con la tercera obtenemos

$$\frac{x+1}{4} = z - 3 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 4(z-3) \quad \Rightarrow \quad x - 4z = -13\,.$$

De esta manera, la recta resulta la intersección de estos dos planos (obviamente, hay más de una representación; basta por ejemplo elegir otra combinación de ecuaciones cuando igualamos "t"). Es decir,

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 4z = -13\,, \end{cases}$$

son ecuaciones implícitas de la recta. ∇

Intersección de rectas en $\mathbb{R}^2$

Consideremos dos rectas en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{L}_1 : ax + by = c$ y $\mathbb{L}_2 : dx + ey = f$. Si $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no son paralelas, su intersección es un único punto. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales que formamos con las ecuaciones de las rectas,

$$\begin{cases} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{cases},$$

tiene solución única.

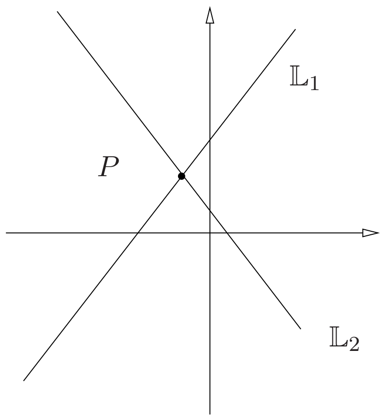

Figura 1: Intersección de dos rectas no paralelas en $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{P\}$.

Si las rectas son paralelas, pueden ser iguales en cuyo caso la intersección es la misma recta o distintas en cuyo caso son disjuntas. En el primer caso, el sistema asociado a las ecuaciones de las rectas tiene infinitas soluciones y en el segundo no tiene solución.

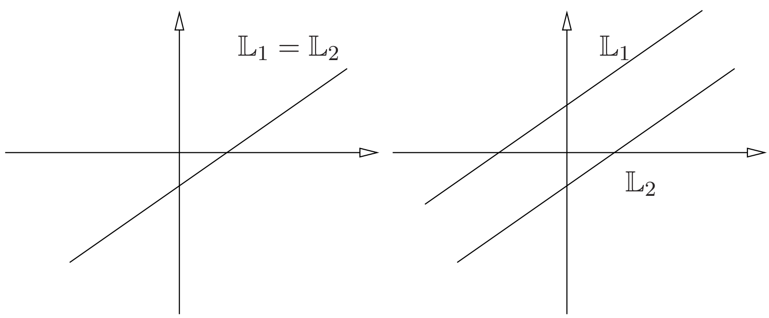

Figura 2: Rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$.

Veremos en los siguientes ejemplos cómo hallar la intersección en los distintos casos, cuando las rectas están dadas en forma paramétrica.

Ejemplo 2.20. Hallar $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ para

(a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha(-1,2) + (3,0), \quad \mathbb{L}_2 : X = \beta(0,1) + (1,-4)$.

Tenemos que

$$(x,y) \in \mathbb{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (-\alpha + 3, 2\alpha)$$

$$(x,y) \in \mathbb{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (1, \beta - 4).$$

Igualamos

$$(-\alpha + 3, 2\alpha) = (1, \beta - 4)$$

o sea que

$$\begin{cases} -\alpha + 3 = 1 \\ 2\alpha = \beta - 4 \,. \end{cases}$$

O, escrito en la forma usual,

$$\begin{cases} -\alpha & + & & = & -2 \\ 2\alpha & - & \beta & = & -4 \,, \end{cases}$$

observemos que obtuvimos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Lo resolvemos directamente, sin pasar por la matriz ampliada, ya que el sistema es muy simple. De la primera ecuación, $\alpha = 2$. Reemplazamos en la segunda y obtenemos

$$2.2 - \beta = -4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 8 \,.$$

El sistema es compatible determinado, por lo tanto la intersección de las rectas es un único punto. Para terminar, reemplazamos α en la ecuación de $\mathbb{L}_1$ o β en la ecuación de $\mathbb{L}_2$ y obtenemos el punto de intersección

$$(\alpha + 3, 2\alpha) = (-2 + 3, 2.2) = (1, 4) \,.$$

(Si hacemos lo mismo con β, debemos obtener el mismo punto, esto es útil para verificar si resolvimos correctamente el problema.)

En conclusión, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(1,4)\}$.

(b) $\mathbb{L}_1 : X = t(1,-3) + (1,3), \quad \mathbb{L}_2 : X = t(-2,6) + (-1,1)$.

En el ejemplo anterior, vimos que el valor del parámetro del punto de intersección puede ser distinto para cada una de las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, si los parámetros de las ecuaciones están dados por la misma letra, debemos cambiar uno de ellos antes de plantear el sistema a resolver. En este caso por ejemplo, escribimos la ecuación de $\mathbb{L}_2$ como

$$\mathbb{L}_2 : X = s(-2,6) + (-1,1)$$

y repetimos lo que hicimos en (a). Si

$$(t+1, -3t+3) = (-2s-1, 6s+1)\,,$$

entonces,

$$\begin{cases} t+1 = -2s-1 \\ -3t+3 = 6s+1\,, \end{cases}$$

y debemos resolver

$$\begin{cases} \;\;t + 2s = -2 \\ -3t - 6s = -2\,. \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada y resolvemos

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & -2 \end{array}\right) \quad F_2 + 3F_1 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Y al observar la última fila de la matriz vemos que el sistema es incompatible. Esto significa que las rectas no tienen puntos en común; por lo tanto, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$.

(c) $\mathbb{L}_1 : X = t(2,3) + (2,1), \quad \mathbb{L}_2 : X = t(6,9) + (-2,-5)$.

Como en el ejemplo anterior, debemos cambiar la letra que designa al parámetro en una de las ecuaciones, por ejemplo

$$\mathbb{L}_2 : X = s(6,9) + (-2,-5)\,.$$

Los puntos de $\mathbb{L}_1$ tienen la forma $(2t+2, 3t+1)$ y los de $\mathbb{L}_2$ $(6s-2, 9s-5)$, por lo tanto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2t - 6s = -4 \\ 3t - 9s = -6\,. \end{cases}$$

Entonces,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -6 & -4 \\ 3 & -9 & -6 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2}F_1 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -9 & -6 \end{array}\right) \quad F_2 - 3F_1 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vemos que el sistema es compatible indeterminado, es decir, que tiene infinitas soluciones. Para que esto ocurra, la única posibilidad es que las dos rectas sean iguales; por lo tanto, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$. ∇

Intersección de rectas en $\mathbb{R}^3$

La intersección de dos rectas en $\mathbb{R}^3$, al igual que en $\mathbb{R}^2$, puede ser un punto, una recta o el conjunto vacío. La diferencia que encontramos es que en $\mathbb{R}^3$ existen pares de rectas que no son paralelas y cuya intersección es vacía; éstas son rectas *alabeadas*.

Ejemplo 2.21. Calcular $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ en los casos

(a) $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(-1, 1, 2) + (1, 2, -1), \quad \mathbb{L}_2 : X = \lambda(1, -2, 1) + (0, 2, 4).$

Procedemos de la misma manera que en $\mathbb{R}^2$, sólo que ahora nos queda una ecuación más. Primero cambiamos uno de los parámetros,

$$L_2 : X = \mu(1, -2, 1) + (0, 2, 4),$$

luego,

$$(x, y, z) \in \mathbb{L}_1 \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (-\lambda + 1, \lambda + 2, 2\lambda - 1)\,,$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{L}_2 \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (\mu, -2\mu + 2, \mu + 4)\,.$$

Igualamos,

$$\begin{cases} -\lambda + 1 &= \mu \\ \lambda + 2 &= -2\mu + 2 \\ 2\lambda - 1 &= \mu + 4 \ , \end{cases}$$

y obtenemos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas. Lo escribimos en la forma usual:

$$\begin{cases} -\lambda & - & \mu & = & -1 \\ \lambda & + & 2\mu & = & 0 \\ 2\lambda & - & \mu & = & 5 \ . \end{cases}$$

Pasamos a la matriz ampliada y triangulamos

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \quad F_3 + 5F_2 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Las ecuaciones son

$$\begin{cases} \lambda & + & 2\mu & = & 0 \\ & & \mu & = & -1\,. \end{cases}$$

Es claro que $\mu = -1$ y despejando obtenemos $\lambda = 2$. El sistema es compatible determinado y, por lo tanto, la intersección de las rectas es un único punto que determinamos reemplazando $\mu = -1$ en la ecuación de $\mathbb{L}_2$ (o $\lambda = 2$ en la de $\mathbb{L}_1$). Obtenemos el punto $(-1, 4, 3)$; o sea que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(-1, 4, 3)\}$.

(b) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha(1, -1, 1) + (0, 1, 2), \quad \mathbb{L}_2 : X = \alpha(-2, 2, 3)$.

Hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior; los puntos de $\mathbb{L}_1$ tienen la forma $(\alpha, -\alpha + 1, \alpha + 2)$ y los de $\mathbb{L}_2$, $(-2\beta, 2\beta, 3\beta)$. Entonces,

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha & = & -2\beta \\ -\alpha + 1 & = & 2\beta \\ \alpha + 3 & = & 2\beta \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & 2\beta & = & 0 \\ -\alpha & - & 2\beta & = & -1 \\ \alpha & - & 2\beta & = & -3\,. \end{array}\right.$$

Pasamos a la matriz ampliada y escalonamos,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right).$$

La segunda fila corresponde a una ecuación que no tiene solución $(0 = -1)$, de modo que no hace falta hacer nada más; concluimos que el sistema no tiene solución, por lo tanto $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$. Dado que las rectas no son paralelas, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son rectas alabeadas.

(c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha(2, -1, 3) + (0, -1, 1), \quad \mathbb{L}_2 : X = \alpha(4, -2, 6) + (2, -2, 4)$.

Tenemos que

$$(x, y, z) \in \mathbb{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad (2\alpha, -\alpha - 1, 3\alpha + 1),$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (4\beta + 2, -2\beta - 2, 6\beta + 4).$$

Igualando,

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2\alpha & = & 4\beta + 2 \\ -\alpha - 1 & = & -2\beta - 2 \\ 3\alpha + 1 & = & 6\beta + 4 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\alpha & - & 4\beta & = & 2 \\ -\alpha & + & 2\beta & = & -1 \\ 3\alpha & - & 6\beta & = & 3\,, \end{array}\right.$$

y resolvemos

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2}F_1 \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como nos quedó un sistema con infinitas soluciones la única posibilidad es que las rectas sean iguales, en conclusión $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.

(d) $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(-1,1,2) + (0,1,3), \quad \mathbb{L}_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 3\,. \end{array} \right.$

En este caso una de las rectas está dada con ecuaciones implícitas, una forma de calcular la intersección es la siguiente:
Tomamos una punto genérico de $\mathbb{L}_1$,

$$(x,y,z) = (-\lambda, \lambda+1, 2\lambda+3),$$

y lo reemplazamos en las ecuaciones de $\mathbb{L}_2$. Al reemplazar en la primera ecuación obtenemos

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$(-\lambda) - 2(\lambda+1) + 3(2\lambda+3) = 0$$

$$-\lambda - 2\lambda - 2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$3\lambda = -7$$

$$\lambda = -\frac{7}{3}\,.$$

Al reemplazar en la segunda ecuación

$$2x - 2z = 3$$

$$2(-\lambda) - 2(2\lambda+3) = 3$$

$$-2\lambda - 4\lambda - 6 = 3$$

$$-6\lambda = 9$$

$$\lambda = -\frac{3}{2}\,.$$

Dado que obtuvimos diferentes valores para λ, concluimos que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$.
∇

Intersección entre rectas y planos

Tenemos tres posibilidades, la intersección es un único punto, la recta está contenida en el plano, o la recta es paralela al plano y son disjuntos.

Ejemplo 2.22. Calcular $\mathbb{L} \cap \Pi$ en los casos

(a) $\mathbb{L} : X = t(2, -2, 4) + (1, 1, 2), \quad \Pi : 2x - 3y + z = 8.$

Tenemos que

$$(x, y, z) \in \mathbb{L} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (2t + 1, -2t + 1, 4t + 2).$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación de Π y despejamos t:

$$2(2t + 1) - 3(-2t + 1) + (4t + 2) = 8$$

$$4t + 2 + 6t - 3 + 4t + 2 = 8$$

$$14t + 1 = 8$$

$$t = \frac{1}{2} \ .$$

Con el valor de t hallado, obtenemos el punto de intersección

$$\left(2 \, . \, \tfrac{1}{2} + 1, -2 \, . \, \tfrac{1}{2} + 1, 4 \, . \, \tfrac{1}{2} + 2\right) = (2, 0, 4) \ ,$$

o sea, $\mathbb{L} \cap \Pi = \{(2, 0, 4)\}$.

(b) $\mathbb{L} : X = t(1, 4, 4) + (-1, 5, 3)$, $\Pi : 4x + 2y - 3z = -3$.

Procedemos como en el ejemplo anterior, tomamos un punto genérico de la recta y reemplazamos sus coordenadas en la ecuación del plano

$$(x, y, z) \in \mathbb{L} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (t - 1, 4t + 5, 4t + 3)$$

y

$$4x + 2y - 3z = -3$$

$$4(t - 1) + 2(4t + 5) - 3(4t + 3) = -3$$

$$4t - 4 + 8t + 10 - 12t - 9 = -3$$

$$-3 = -3.$$

La última igualdad es verdadera independientemente del valor de t. Esto significa que todo punto de la recta verifica la ecuación del plano, es decir que la recta está contenida en el plano; por lo tanto, $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L}$.

(c) $\mathbb{L} : X = t(-8, 2, 11) + (3, 1, 1)$, $\Pi : 3x + y + 2z = 0$.

Procedemos igual que en los ejercicios anteriores. Un punto genérico de $\mathbb{L}$ tiene la forma $(x, y, z) = (-8t + 3, 2t + 1, 11t + 1)$. Reemplazamos en la ecuación de Π. Obtenemos,

$$3(-8t + 3) + (2t + 1) + 2(11t + 1) = 0$$
$$-24t + 9 + 2t + 1 + 22t + 2 = 0$$
$$12 = 0\ .$$

La última igualdad es falsa no importa cual sea el valor de t. Esto significa que ningún punto de $\mathbb{L}$ satisface la ecuación del plano, es decir que $\mathbb{L}$ y Π son disjuntos, por lo tanto, $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$ y $\mathbb{L}$ es paralela a Π. ∇

Distancia de un punto a un plano

Definición 2.23. *Dados un punto P en $\mathbb{R}^3$ y un plano Π, sea Q el punto de intersección entre Π y la recta perpendicular a Π que pasa por P. Llamamos distancia de P al plano Π a la distancia entre P y Q.*

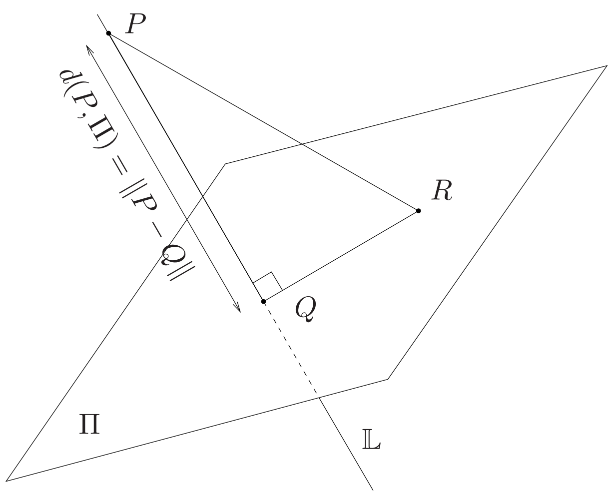

Figura 3: Distancia del punto P al plano Π.

Notemos que, por el teorema de Pitágoras, la distancia entre P y el punto Q de la definición es menor que la distancia entre P y cualquier otro punto de plano (pues $\|P - R\|^2 = \|P - Q\|^2 + \|Q - R\|^2 \geq \|P - Q\|^2$). Notamos $d(P, \Pi)$ a la distancia de P a Π.

Veamos un ejemplo de como calcular la distancia de un punto a un plano.

Ejemplo 2.24. Sean $P = (-1, 1, 2)$ y $\Pi : 2x + 3y - z = 27$. Calcular la distancia entre P y Π.

Primero hallemos una ecuación paramétrica de la recta perpendicular a Π que pasa por P. Como la recta tiene que se perpendicular al plano, podemos tomar como vector director al vector $(2, 3, -1)$ que es normal al plano. Tenemos

$$\mathbb{L} : X = \lambda(2, 3, -1) + (-1, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Después, buscamos la intersección entre la recta hallada y el plano Π.

Un punto genérico de esta recta es $(2\lambda - 1, 3\lambda + 1, -\lambda + 2)$, para que este punto también pertenezca al plano debe verificarse

$$2(2\lambda - 1) + 3(3\lambda + 1) - (-\lambda + 2) = 27$$

$$4\lambda - 2 + 9\lambda + 3 + \lambda - 2 = 27$$

$$14\lambda - 1 = 27$$

$$\lambda = 2.$$

Reemplazamos λ en la ecuación de la recta y obtenemos Q, el punto de intersección entre $\mathbb{L}$ y Π. Tenemos $Q = (2.2 - 1, 3.2 + 1, -2 + 2) = (3, 7, 0)$.

Finalmente, determinamos la distancia entre P y Π calculando la distancia entre P y Q:

$$\|P - Q\| = \|(-1, 1, 2) - (3, 7, 0)\| = \|(-4, -6, 2)\| = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56};$$

luego, la distancia entre P y Π es $d(P, \Pi) = \sqrt{56}$. ∇

Si repetimos lo hecho en el ejemplo anterior para un punto y un plano genéricos, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.25. *Sean $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en $\mathbb{R}^3$ y Π un plano de ecuación $ax + by + cz = k$. Entonces, la distancia de P al plano Π está dada por la fórmula*

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ejemplo 2.26. Volvamos a calcular la distancia entre el punto y el plano del ejemplo anterior aplicando la fórmula de la proposición.

Tenemos que $P = (-1, 1, 2)$ y $\Pi : 2x + 3y - z = 27$; luego,

$$d(P, \Pi) = \frac{|2.(-1) + 3.1 - 2 - 27|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{14}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14},$$

que es el mismo valor que obtuvimos antes ya que $\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$. ∇

3 Otros ejemplos

Ejemplo 2.27. Sean $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$ y $N = (2, 3, 1)$. Sean Π_1 es el plano que pasa por A, B y C, y Π_2 el plano perpendicular a N que pasa por el origen.

(a) Hallar ecuaciones implícitas de Π_1 y Π_2.

Para encontrar una ecuación implícita de Π_1 usamos que un vector normal al plano está dado por $N = (B - A) \times (C - A)$ (ver 1.53, pag. 34). Entonces,

$$N = (B - A) \times (C - A) = (-1, 0, -1) \times (-1, 1, 1) = (1, 2, -1)$$

y

$$N \cdot A = (1, 0, -1) \cdot (1, 0, 0) = 1;$$

por lo tanto, $\Pi_1 : x + 2y - z = 1$.

Como Π_2 es perpendicular a N, tomamos este vector como normal y al pasar por el origen queda $\Pi_2 : 2x + 3y + z = 0$.

(b) Calcular $\Pi_1 \cap \Pi_2$ y dar la solución en forma paramétrica.

Para calcular $\Pi_1 \cap \Pi_2$ planteamos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

y lo resolvemos con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad F_2 - 2F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right);$$

la segunda ecuación es $-y + 3z = -2$, entonces $y = 3z + 2$. Reemplazamos en la primera y obtenemos

$$x + 2(3z + 2) - z = 1$$

$$x + 6z + 4 - z = 1$$

$$x = -5z - 3\,.$$

Luego las soluciones tienen la forma

$$(-5z - 3, 3z + 2, z) = z(-5, 3, 1) + (-3, 2, 0).$$

Por lo tanto,

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 : X = \lambda(-5, 3, 1) + (-3, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 2.28. Sea Π el plano que contiene a la recta $\mathbb{L} : X = t(1,1,2) + (0,1,3)$ y es paralelo a la recta $\mathbb{L}' : X = t(1,2,3) + (3,1,8)$.

(a) Encontrar una ecuación implícita del plano Π.

Buscamos un vector N, normal al plano Π. Como Π contiene a $\mathbb{L}$, N debe ser perpendicular al vector director $\mathbb{L}$; por otra parte, Π es paralelo a $\mathbb{L}'$ con lo cual N también es perpendicular al director de $\mathbb{L}'$. Entonces,

$$N \perp (1,1,2) \qquad \text{y} \qquad N \perp (1,2,3)$$

y podemos tomar

$$N = (1,1,2) \times (1,2,3) = (-1,-1,1).$$

Como $\mathbb{L} \subset \Pi$, todos los puntos de $\mathbb{L}$ deben verificar la ecuación de Π; en particular, $(0,1,3) \in \Pi$. Luego, una ecuación implícita de Π es

$$(-1,-1,1) \cdot (x,y,z) = (-1,-1,1) \cdot (0,1,3)$$

$$-x - y + z = 2.$$

(b) Si $P = (2,0,-2)$, calcular la distancia entre P y Π.

Para calcular la distancia entre el punto $P = (2,0,-2)$ y el plano Π usamos la fórmula (ver 2.25)

$$d(P,\Pi) = \frac{|-2-0+(-2)-2|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 2.29. Sea Π el plano de ecuación $2x + 3y + 2z = 4$. Dar una ecuación implícita del plano Π' que verifique simultáneamente

$$\text{i)}\ \ \Pi \perp \Pi' \qquad \text{y} \qquad \text{ii)}\ \ \Pi \cap \Pi' = \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 2z = 4\ . \end{cases}$$

Si N es el vector normal al plano Π', para que $\Pi \perp \Pi'$, N debe ser perpendicular al vector $(2,3,2)$. Por otro lado, la recta $\Pi \cap \Pi'$ está contenida en Π', para utilizar esta condición es cómodo tener una ecuación paramétrica de $\Pi \cap \Pi'$, y para esto resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 4 \\ 2x \qquad\quad + 2z = 4\ . \end{cases}$$

Entonces,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De la segunda fila obtenemos que $y = 0$ y de la primera $2x+2z = 4$, entonces $x = 2 - z$. Una ecuación paramétrica es

$$(x, y, z) = (2 - z, 0, z) = z(-1, 0, 1) + (2, 0, 0)\,.$$

Como un vector director de $\Pi \cap \Pi'$ es $(-1, 0, 1)$, este vector también debe ser perpendicular a la normal a Π'. Por ende, tomamos

$$N = (2, 3, 2) \times (-1, 0, 1) = (3, -4, 3).$$

El punto $(2, 0, 0)$ está en el plano, así que calculamos

$$(2, 0, 0) \cdot (3, -4, 3) = 6,$$

y una ecuación del plano pedido es

$$\Pi : 3x - 4y + 3z = 6. \qquad \nabla$$

Ejemplo 2.30.

(a) Calcular una ecuación implícita del plano Π que pasa por el origen y es ortogonal a la recta $\mathbb{L}$ que pasa por $(1, 1, 0)$ y $(0, -1, 2)$.

Dado que buscamos un plano Π tal que $\mathbb{L} \perp \Pi$, primero determinamos un vector director de la recta: éste es un vector normal al plano.

Si la recta pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, -1, 2)$, un vector director de $\mathbb{L}$ es $v = (0, -1, 2) - (1, 1, 0) = (-1, -2, 2)$. Como el plano pasa por el origen $O = (0, 0, 0)$, calculamos

$$(-1, -2, 2) \cdot (x, y, z) = -x - 2y + 2z \quad \text{y} \quad (-1, -2, 2) \cdot (0, 0, 0) = 0$$

y una ecuación implícita resulta

$$-x - 2y + 2z = 0.$$

(b) Calcular $\mathbb{L} \cap \Pi$.

Para determinar la intersección, necesitamos una ecuación de $\mathbb{L}$, dado que ya tenemos un vector director es simple determinar una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(1,1,0)$ y $(0,-1,2)$:

$$\mathbb{L} : X = t(-1,-2,2) + (1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, un punto genérico de la recta tiene la forma

$$(x,y,z) = t(-1,-2,2) + (1,1,0) = (-t+1,-2t+1,2t);$$

reemplazamos en la ecuación de Π y despejamos t:

$$-(-t+1) - 2(-2t+1) + 2(2t) = 0$$

$$t - 1 + 4t - 2 + 4t = 0$$

$$9t - 3 = 0$$

$$t = \frac{1}{3}.$$

Luego $(-1/3+1,-2(1/3)+1,2(1/3)) = (2/3,1/3,2/3)$ pertenece tanto a la recta como al plano, por lo tanto $\mathbb{L} \cap \Pi = \{(2/3,1/3,2/3)\}$. ∇

4 Ejercicios

1) Dado el sistema lineal

$$S : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Decidir cuales de las siguientes cuaternas son soluciones de S, y cuales del sistema homogéneo asociado $V_1 = (0,0,0,0)$, $V_2 = (1,1,1,4)$, $V_3 = (-1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$, $V_4 = (-1,-2,3,-7)$.

2) a) Encontrar, si existen, a y b para que $(2,-2,1)$ sea solución de

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 = 3 \\ bx_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ ax_1 + bx_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

b) Idem anterior para

$$S: \begin{cases} x_1 & + & 2ax_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & ax_2 & - & bx_3 & = & -4 \\ bx_1 & + & x_2 & + & (2a-b)x_3 & = & 3. \end{cases}$$

3) Resolver los siguientes sistemas y clasificarlos de acuerdo a la cantidad de soluciones

(a) $\begin{cases} x & + & y & = & -1 \\ 2x & - & 3y & = & 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & -1 \\ -4x & - & 6y & = & 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x & + & 2y & = & 3 \\ -3x & + & 6y & = & -5 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = 0 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 11 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 5x & + & y & - & z & = & 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & y & - & z & = & 17 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 5x & + & y & - & z & = & -5 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 19 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -8 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 12 \\ & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 13 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & + & 10x_5 & = & 44 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} & & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \end{cases}$

$$(1)\begin{cases} -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & -3 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 2 \end{cases}$$

4) Encontrar una ecuación paramétrica de las siguientes rectas

$$(a)\begin{cases} -4x & + & y & - & 2z & = & -4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} -4x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} -x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & 6z & = & 0 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} -x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & 4y & - & 6z & = & 1 \end{cases}$$

5) Encontrar ecuaciones implícitas de las siguientes rectas

a) $X = t(1, -2, 1)$

b) $X = (1, -3, 4) + t(1, 2, 2)$

c) $X = (1, 0, -1) + t(1, 2, 2)$

6) ¿Cúanto deben valer a y b para que la recta $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x - y + bz = 4 \end{cases}$ pase por el punto $(4, -5, 2)$?

Lo mismo para la recta $\begin{cases} -x + ay - 3z = b \\ x - y + bz = 3a \end{cases}$ y el punto $(1, -2, 5)$

7) Calcular $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ en cada caso

a) $\mathbb{L}_1 : X = t(1, -2) + (1, 3)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(2, 3) + (0, 1)$

b) $\mathbb{L}_1 : X = t(1, 2, -1) + (3, 4, 0)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(-3, 4, 2) + (4, -4, 0)$

c) $\mathbb{L}_1 : X = t(2, 2, 2)+(1, 0, 0)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(-1, -1, -1)+(0, -1, -1)$

d) $\mathbb{L}_1 : X = t(1, 3, 1) + (0, -1, 2)$, $\mathbb{L}_2 : X = t(2, -1, 0) + (1, 1, 2)$

e) $\mathbb{L}_1 : X = t(-1,1,2) + (1,2,3)$, $\mathbb{L}_2 : \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

8) Sean $\Pi : 2x - y + 3z = 5$; $\Pi' : x + 3y - z = 2$;

$\mathbb{L} : X = \alpha(1,-1,-1) + (1,0,-2)$; y $\mathbb{L}' : \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$

Calcular $\mathbb{L} \cap \Pi$, $\mathbb{L} \cap \Pi'$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$, $\mathbb{L}' \cap \Pi$, $\mathbb{L}' \cap \Pi'$ y $\Pi \cap \Pi'$

Capítulo 3

Matrices

1 Operaciones y propiedades

Definición 3.1. *Sean m y n dos números naturales. Llamamos matriz de m filas y n columnas a toda tabla rectangular A de nm números reales de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notamos $\mathbb{R}^{m\times n}$ al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas. Por comodidad todo elemento A en $\mathbb{R}^{m\times n}$ se llama matriz de $m \times n$.

Una notación común para matrices es $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ donde cada a_{ij} indica al elemento de la fila i (contada desde arriba) y columna j (contada desde la izquierda). Los números a_{ij} son los *coeficientes* de la matriz.

Dos matrices son *iguales* si tienen el mismo tamaño y son iguales coeficiente a coeficiente.

Ejemplo 3.2. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & -9 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

tenemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ ya que tiene tres filas y cuatro columnas y que, por ejemplo, $a_{14} = 0$, $a_{22} = 5$ y $a_{34} = 7$. ∇

Definición 3.3. *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

definimos

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Notemos que, para poder sumar dos matrices, estas deben tener la misma cantidad de filas y de columnas; y que la matriz suma tiene en el lugar ij la suma de a_{ij} y b_{ij}, es decir, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Observemos además, que si A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejemplo 3.4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \\ 7 & -5 & -9 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 12 \\ 3 & 11 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

∇

Definición 3.5. *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y $k \in \mathbb{R}$. Definimos,

$$k\,A = \begin{pmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & \cdots & k\,a_{1n} \\ k\,a_{21} & k\,a_{22} & \cdots & k\,a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\,a_{m1} & k\,a_{m2} & \cdots & k\,a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es decir, si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matriz $k\,A$ tiene en el lugar ij a $k\,a_{ij}$; es decir $k\,A = (k\,a_{ij})$ y $k\,A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ejemplo 3.6. Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$2\,A = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 2 & 2 \\ 22 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (-1)\,A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -1 & -1 \\ -11 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

∇

Nota 3.7. Notamos con $O_{m\times n}$ a la matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$ que tiene todos sus coeficientes nulos y la llamamos la matriz *nula* de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Cuando no haya posibilidad de confusión respecto a la cantidad de filas y columnas, notaremos a $O_{m\times n}$ simplemente con O.

Propiedades 3.8. *Sean A, B, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$. Entonces*

(*a*) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(*b*) $A + B = B + A$.

(*c*) $k_1\,(A + B) = k_1\,A + k_1\,B$.

(*d*) $(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$.

(*e*) $O + A = A$.

(*f*) $1\,A = A$.

(*g*) $A + (-1)\,A = O$.

(*h*) $0\,A = O$.

Observación 3.9. Al igual que en el caso de vectores, del inciso (g) de la proposición anterior, tenemos que $(-1)\,A$ es el *inverso aditivo* de A. Notamos $-A$ a la matriz $(-1)\,A$. Esto nos permite restar matrices de las siguiente forma

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)\,B.$$

Es decir, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Definición 3.10. *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Llamamos matriz traspuesta de A a la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que tiene en la fila i columna j al coeficiente de la fila j columna i de la matriz original, es decir $a^t_{ij} = a_{ji}$.*

Notemos que, a partir de la definición, las columnas de A^t son las filas de A.

Ejemplo 3.11. Hallar A^t si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 6 & -2 \\ -7 & 6 & -9 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, entonces $A^t \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. Para obtener A^t, simplemente armamos la matriz escribiendo las filas de A como columnas; entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & 5 \\ 7 & -9 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

∇

Propiedades 3.12. *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces*

(a) $(A^t)^t = A$.

(b) $(k\,A)^t = k\,A^t$.

(c) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Ejemplo 3.13. Hallar $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ que verifique $X + 2\,A = B^t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Para resolver esta ecuación, restamos en ambos miembros $2\,A$ y usamos la propiedad asociativa:

$$\begin{aligned} X + 2\,A &= B^t, \\ (X + 2\,A) - 2\,A &= B^t - 2\,A, \\ X + (2\,A - 2\,A) &= B^t - 2\,A, \\ X &= B^t - 2\,A. \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{si} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad 2\,A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix};$$

y si

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad B^t = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

∇

Además de la suma de matrices y del producto de un escalar por una matriz, también es posible definir el producto de dos matrices bajo determinadas circunstancias. Antes de pasar a esta definición, es conveniente establecer la siguiente notación. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, notamos con A_i a la fila i de la matriz A y con A^j a la columna j. Es importante observar que los subíndices corresponden a filas y los supraíndices a columnas.

Supongamos ahora que A es una matriz con n columnas y B una matriz con n filas. En este caso podemos identificar tanto a A_i como a B^j con vectores de $\mathbb{R}^n$ y, desde este punto de vista, calcular su producto interno $A_i \cdot B^j$.

Ejemplo 3.14. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 7 \\ 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Identificándolos con vectores, tenemos

$$A_1 \cdot B^2 = (1, 0, 3, -2) \cdot (4, 7, 1, 5) = 1\,.\,4 + 0\,.\,7 + 3\,.\,1 + (-2)\,.\,5 = -3.$$

∇

Observemos que en este ejemplo $A_i \in \mathbb{R}^4$, pues A tiene cuatro columnas y $B^j \in \mathbb{R}^4$, pues B tiene cuatro filas. En general, vale la pena observar que para calcular los productos $A_i \cdot B^j$ no importa la cantidad de filas de la matriz A ni la cantidad de columnas de B; pero sí que, como vectores, A_i y B^j pertenezcan al mismo espacio, o equivalentemente, importa que la cantidad de columnas de A coincida con la cantidad de filas de B.

Definición 3.15. *Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Llamamos producto de A por B a la matriz $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ definida por*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^{k-1} & A_1 \cdot B^k \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^{k-1} & A_2 \cdot B^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^{k-1} & A_m \cdot B^k \end{pmatrix}.$$

es decir, si $A \cdot B = (c_{ij})$, entonces $c_{ij} = A_i \cdot B^j$.

Es conveniente destacar los siguientes hechos:

(a) Para que esté definido el producto $A \cdot B$, la cantidad de columnas de A debe ser igual a la cantidad de filas de B.

(b) Si la cantidad de columnas de A es distinta a la cantidad de filas de B, el producto de A por B no está definido.

(c) Si es posible calcular el producto de A por B, la matriz producto $A \cdot B$ tiene la misma cantidad de filas que A y la misma cantidad de columnas que B.

Ejemplo 3.16. Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 7}$ y $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ¿Es posible calcular los productos $A \cdot B$, $A \cdot C$ y $C \cdot A$? Cuando la respuesta sea afirmativa, determinar el tamaño de la matriz producto.

Dado que A tiene 3 columnas y que B tiene 3 filas, es posible realizar el producto. Además, $A \cdot B$ tiene 4 filas pues A tiene 4 filas y 7 columnas pues B tiene 7 columnas, por lo tanto, $A \cdot B \in \mathbb{R}^{4\times 7}$.
No es posible calcular el producto de A por C ya que A tiene 3 columnas y C 4 filas.
Es posible calcular el producto de C por A ya que C tiene 4 columnas y A tiene 4 filas. Además, $C \cdot A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

Es interesante notar que es importante el orden de las matrices al realizar el producto; por ejemplo, es posible calcular $C \cdot A$ pero no podemos calcular $A \cdot C$. ∇

Ejemplo 3.17. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcular, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
Es posible calcular $A \cdot B$ pues A tiene 3 columnas y B tiene 3 filas. Además, $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calculemos el producto. Por definición

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{pmatrix},$$

y

$$A_1 \cdot B^1 = (2, 1, 0) \cdot (-2, 1, 0) = -3,$$

$$A_1 \cdot B^2 = (2, 1, 0) \cdot (5, -1, 4) = 9,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1, 4, 7) \cdot (-2, 1, 0) = 6,$$

$$A_2 \cdot B^2 = (-1, 4, 7) \cdot (5, -1, 4) = 19.$$

Por lo tanto,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}.$$

También es posible calcular $B \cdot A$ y en este caso $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Para calcularlo, podemos proceder como antes. Otra manera posible consiste en armar con las matrices el siguiente cuadro

$$\begin{array}{rr|ccc}
 & & 2 & 1 & 0 \\
 & & -1 & 4 & 7 \\
\hline
-2 & 5 & & \downarrow & \\
1 & -1 & \rightarrow & B_2A^2 & \\
0 & 4 & & &
\end{array}$$

es decir, donde se cruzan las lineas de las fila i con la columna j va el producto $B_i \cdot A^j$. En nuestro caso,

$$\begin{array}{rr|ccc}
 & & 2 & 1 & 0 \\
 & & -1 & 4 & 7 \\
\hline
-2 & 5 & (-2)\,.\,2 + 5\,.\,(-1) & (-2)\,.\,1 + 5\,.\,4 & (-2)\,.\,0 + 5\,.\,7 \\
1 & -1 & 1\,.\,2 + (-1)\,.\,(-1) & 1\,.\,1 + (-1)\,.\,4 & 1\,.\,0 + (-1)\,.\,7 \\
0 & 4 & 0\,.\,2 + 4\,.\,(-1) & 0\,.\,1 + 4\,.\,4 & 0\,.\,0 + 4\,.\,7
\end{array}$$

Realizamos los cálculos y llegamos a

$$\begin{array}{rr|rrr}
 & & 2 & 1 & 0 \\
 & & -1 & 4 & 7 \\
\hline
-2 & 5 & -9 & 18 & 35 \\
1 & -1 & 3 & -3 & -7 \\
0 & 4 & -4 & 16 & 28
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 18 & 35 \\ 3 & -3 & -7 \\ -4 & 16 & 28 \end{pmatrix}.$$

∇

En el ejemplo anterior, vimos que es posible calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y que $A \cdot B \neq B \cdot A$ ya que las matrices de los dos productos tienen distinto tamaño. El ejemplo siguiente muestra que puede ocurrir que $A \cdot B \neq B \cdot A$ aunque las dos matrices tengan el mismo tamaño.

Definición 3.18. *Decimos que una matriz A es cuadrada si tiene igual cantidad de filas y columnas, es decir, si $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.*

Ejemplo 3.19. Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dado que A y B son dos matrices cuadradas de 2×2, es posible calcular ambos productos y $A \cdot B$, $B \cdot A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Calculemos $A \cdot B$. Tenemos que

$$\begin{array}{cc|cc} & & -3 & 5 \\ & & -6 & 7 \\ \hline 2 & -1 & 2\,.\,(-3) + (-1)\,.\,(-6) & 2\,.\,5 + (-1)\,.\,7 \\ 3 & 4 & 3\,.\,(-3) + 4\,.\,(-6) & 3\,.\,5 + 4\,.\,7 \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{array}{cc|cc} & & -3 & 5 \\ & & -6 & 7 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -33 & 43 \end{array}$$

Por lo tanto

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -33 & 43 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, calculamos $B \cdot A$ y obtenemos

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 9 & 34 \end{pmatrix}.$$

∇

Los ejemplos anteriores muestran que en general el producto de matrices no es conmutativo.

Definición 3.20. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. Llamamos diagonal de A a los coeficientes a_{ii}, es decir a los coeficientes que están en la fila i, columna i.*

Definición 3.21. *Llamamos matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$, y la notamos I, a la matriz que tiene unos en la diagonal y ceros en los otros lugares; es decir*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si $I_{n\times n} = (c_{ij})$, entonces $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Propiedades 3.22. *Sean A, B y C matrices, k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$.*

(a) *Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ y $C \in \mathbb{R}^{k\times h}$, entonces $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.*

(b) *Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, B, $C \in \mathbb{R}^{n\times k}$, entonces $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.*

(c) *Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $(k_1 \,.\, k_2)A = k_1(k_2\, A)$.*

(d) *Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, entonces $k_1(A\cdot B) = (k_1\, A)\cdot B = A\cdot(k_1\, B)$.*

(e) *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $A\cdot I = I\cdot A = A$.*

(f) *Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, entonces $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$.*

Definición 3.23. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$; definimos*

$$A^0 = I_{n\times n} \quad y \quad A^n = \underbrace{A\cdot\ \cdots\ \cdot A}_{n-veces} \quad si\ n \geq 1.$$

Ejemplo 3.24. Calcular A^3, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que calcular $A^3 = A\cdot A\cdot A$. Entonces,

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -6 & -5 & -3 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} A^3 = A^2\cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -6 & -5 & -3 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -25 & 6 & -1 \\ -3 & -29 & -3 \\ -16 & 4 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

∇

Ejemplo 3.25. Calcular A^3, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos como en el ejercicio anterior, primero calculamos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y ahora calculamos $A^3 = A^2 \cdot A$. Obtenemos

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $A^3 = O$, donde O es la matriz nula. Este ejemplo muestra una diferencia entre el producto de matrices y el producto de números reales: existen matrices no nulas que se anulan al elevarlas a cierta potencia. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifican $A^k = O$ para algún k se llaman matrices *nilpotentes.* ∇

Ejemplo 3.26. Calcular A^2 si

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1 \\ 5/3 & 2/3 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1 \\ 5/3 & 2/3 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1 \\ 5/3 & 2/3 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1 \\ 5/3 & 2/3 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 = A$ se llama *idempotente.* ∇

2 Sistemas en forma matricial

En el capítulo anterior, para resolver sistemas lineales de ecuaciones estudiamos la matriz ampliada del sistema. Ahora, a partir de lo desarrollado hasta el momento, vamos a ver que todo sistema lineal de ecuaciones puede representarse mediante un producto de matrices.

Dado un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

llamamos *matriz del sistema* a la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notamos con B a la matriz de una columna formada por los términos independientes de cada ecuación

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1},$$

y con X a la matriz de una columna formada por las incógnitas,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Con esta notación, el sistema S se escribe como como $A \cdot X = B$. Esta es la *representación matricial* del sistema.

Ejemplo 3.27. Escribir el siguiente sistema como producto de matrices.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 4x & - & 5y & & & = & 10 \\ 3x & - & y & + & 6z & = & -7 \\ -2x & + & y & + & z & = & 9 \end{array} \right. .$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos escribir al sistema como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

∇

Ejemplo 3.28. Determinar el sistema que corresponde al producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sólo debemos calcular el producto de las matrices del término izquierdo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

Entonces, resulta,

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 7x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 5x_4 & = & -3\,. \end{array}\right.$$

∇

Ejemplo 3.29. Resolver el sistema $A \cdot X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Primero escribamos las ecuaciones del sistema. Si llamamos

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

entonces

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ y - z \\ -x + y \end{pmatrix},$$

e igualando obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ -x & + & y & & & = & 4\,. \end{array}\right.$$

Si armamos la matriz ampliada del sistema nos queda

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Es importante notar que la matriz ampliada es $(A|B)$; y esto ocurre siempre, con lo cual, no es necesario escribir las ecuaciones que forman el sistema; el ejercicio se puede resolver escribiendo directamente la matriz ampliada a partir de las matrices A y B.

Una vez que tenemos la matriz ampliada, triangulamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad F_3 + F_1 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Las ecuaciones que corresponden a la última matriz son

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & z & = & 2\,, \end{array}\right.$$

y despejando obtenemos $x = 1$, $y = 5$ y $z = 2$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones del sistema es $\{(1, 5, 2)\}$ y el sistema es compatible determinado. Si deseamos verificar que $(1, 5, 2)$ es solución sólo debemos calcular el producto de las matrices y verificar la igualdad, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

∇

La notación matricial es útil para el caso en que tenemos que resolver varios sistemas con la misma matriz, veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.30. Resolver los siguientes sistemas de la forma $A \cdot X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que resolver tres sistemas de ecuaciones que tienen la misma matriz del sistema. La matriz ampliada que corresponde al primero es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

la del segundo

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

y la del tercero

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

Para resolver cualquiera de los tres sistemas, debemos triangular la correspondiente matriz ampliada y en cada caso las operaciones sobre las filas son las mismas. Para no repetir tres veces lo mismo, vamos a resolver los tres sistemas juntos, esto es lo que se llama *resolución simultánea de sistemas* .

Dado que la matriz del sistema es la misma, construimos una matriz donde en la parte ampliada, colocamos cada uno de los vectores B como columna

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

y triangulamos como de costumbre:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 10 & 5 & 5 & 0 & 25 \end{array}\right)$$

$$F3 - 2F_2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \tfrac{1}{5}F_2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/5 & 3/5 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

La matriz ya está reducida escalonada por filas. Podemos detenernos acá y despejar x, y y z para cada uno de los sistemas, por ejemplo, el primer sistema es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2/5z & = & 3/5 \\ & & & & z & = & -1\,, \end{array}\right.$$

despejamos como siempre de abajo hacia arriba y obtenemos la solución $(0, 1, -1)$. Luego, hacemos lo mismo con el segundo y tercer sistemas. Para evitar despejar en cada sistema, podemos seguir triangulando hasta conseguir, si fuera posible, ceros arriba de la diagonal.

Continuamos la triangulación, entonces

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/5 & 3/5 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) F_1 - 2F_2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 3/5 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 - \frac{1}{5}F_3 \\ F_2 - \frac{2}{5}F_3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

No es necesario hacer ninguna cuenta más; las soluciones están a la vista en la matriz. En la primera columna de la parte ampliada, está la solución del primer sistema: $\{(0, 1, -1)\}$; en la segunda columna la del segundo sistema: $\{(0, 0, 0)\}$ y en la tercera la del tercer sistema: $\{(-2, 1, 3)\}$. ∇

No siempre es posible seguir triangulando hacia arriba como en el caso anterior, hasta obtener la matriz identidad. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.31. Resolver los siguientes sistemas de la forma $A \cdot X = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Armamos la matriz de los tres sistemas juntos de manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior y triangulamos, esta vez hacia arriba y hacia abajo al mismo tiempo

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) F_3 - 2F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \\ F_1 - F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 + 3F_3 \\ F_2 - 2F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 20 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

La triangulación termina aquí. Vemos que al ser nula la última fila, no podemos realizar ninguna operación que anule los coeficientes a_{41} y a_{42} de la matriz ampliada.

Las ecuaciones del primer sistema son

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_4 & = & 20 \\ & x_2 & & + & 3x_4 & = & -13 \\ & & x_3 & & & = & 6\,. \end{array}\right.$$

El sistema es compatible indeterminado. Despejamos y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{ccr} x_1 & = & 20 + x_4 \\ x_2 & = & -13 - 3x_4 \\ x_3 & = & 6\,. \end{array}\right.$$

Las soluciones son

$$X = (20, -13, 6, 0) + x_4(1, -3, 0, 1), \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

En el segundo sistema no hay que hacer nada, en la última fila tenemos $0 = 2$; es decir, un sistema incompatible.

El tercer sistema es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & x_2 & & + & 3x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & & & = & 1\,. \end{array}\right.$$

Que resulta compatible indeterminado, despejamos y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{ccr} x_1 & = & 2 + x_4 \\ x_2 & = & -1 - 3x_4 \\ x_3 & = & 1\,; \end{array}\right.$$

por lo tanto, las soluciones son

$$X = (2, -1, 1, 0) + x_4(1, -3, 0, 1), \quad x_4 \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

3 Matriz inversa

Definición 3.32. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, decimos que* A *es inversible si existe* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_{n\times n}.$$

Es posible probar que si tal B existe, es única; en este caso notamos a B con A^{-1} y la llamamos la *matriz inversa* de A.

A continuación, veremos en ejemplos cómo calcular A^{-1}, en caso que exista.

Ejemplo 3.33. Decidir si A es inversible; en caso afirmativo hallar A^{-1}.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Que A sea inversible significa que existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

luego, multiplicamos las matrices e igualamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para que A sea inversible, debe ser compatible el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_2 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_2 & + & 4x_4 & = & 1\,. \end{array} \right.$$

En principio, obtuvimos un sistema de 4×4, pero una inspección cuidadosa muestra en realidad tenemos dos sistemas de 2×2:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad S_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_2 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_2 & + & 4x_4 & = & 1\,. \end{array} \right.$$

Podemos observar que S_1 tiene como incógnitas a x_1 y x_3, y S_2 a x_2 y x_4; pero la matriz asociada a ambos sistemas es la misma: A. Luego, podemos resolver simultáneamente ambos sistemas

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 - 3F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) -\tfrac{1}{2}F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \; F_1 - 2F_2 \; \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

El primer sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 &= -2 \\ x_3 &= 3/2 \,, \end{cases}$$

y el segundo a

$$\begin{cases} x_2 &= 1 \\ x_4 &= -1/2 \,. \end{cases}$$

Ambos sistemas tiene solución, por lo tanto, A^{-1} existe y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar esto, basta verificar que $A \cdot A^{-1} = I_{2\times 2}$ y $A^{-1} \cdot A = I_{2\times 2}$.

Vale la pena notar que A^{-1} es la matriz que aparece a la derecha de la matriz ampliada en el último paso de la triangulación; es decir, comenzamos con $\left(A \,|\, I \right)$ y terminamos con $\left(I \,|\, A^{-1} \right)$. Esto es general y constituye el método para calcular, si existe, A^{-1}: comenzamos planteando la matriz ampliada $\left(A \,|\, I \right)$ y triangulamos hasta tener la identidad en el lugar de la izquierda; si logramos esto, la matriz que aparece a la derecha es A^{-1}.

(b) $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

Procedemos igual que en (a); plantemos la matriz ampliada y triangulamos, entonces

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \; F_2 + 2F_1 \; \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Como en la segunda fila queda un absurdo, concluimos que no existe A^{-1}, es decir A no es inversible.

(c) $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Planteamos lo mismo que en los ejemplos anteriores, pero en este caso ampliamos con la matriz identidad de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; F_1 \leftrightarrow F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 - 2F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_1 - F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 - 5F_3 \\ F_2 + 3F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Como llegamos a la identidad en el lado izquierdo, A es inversible y la matriz de la derecha es la inversa de A, o sea,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

∇

De acuerdo con la definición, y como hicimos en el inciso (a) del ejemplo anterior, para verificar que hallamos la inversa de una matriz A , debemos multiplicar a ésta a izquierda y a derecha por la matriz hallada y obtener la matriz identidad. La siguiente proposición establece que sólo hace falta calcular uno de los productos.

Proposición 3.34. *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $A \cdot B = I_{n\times n}$, entonces $B \cdot A = I_{n\times n}$.*

Veamos algunas propiedades que satisface la matriz inversa.

Propiedades 3.35. *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices inversibles. Entonces,*

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(c) A^t *es inversible y* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Observación 3.36. Si tenemos un sistema de la forma $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, X, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, y A es una matriz inversible, podemos hallar X multiplicando ambos miembros a la izquierda por la inversa de A:

$$A \cdot X = B \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

Usamos la propiedad asociativa en la última igualdad,

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B\ ,$$

y como $A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$, queda

$$I_{n\times n} \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Dado que $I_{n\times n} \cdot X = X$ cualquiera sea $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, obtenemos

$$X = A^{-1}B.$$

De esta manera, si A es inversible, la solución de $A \cdot X = B$ está dada por $X = A^{-1}B$ y es única.

Ejemplo 3.37. Resolver el sistema $A{\cdot}X = B$ donde A es la matriz inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis, la matriz A es inversible, luego para resolver el sistema basta hallar A^{-1} y multiplicar esta matriz por B.

La inversa de A es (¡ejercicio!)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

por lo tanto la solución es

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

∇

La observación 3.36 muestra que, dado un sistema de ecuaciones lineales $A{\cdot}X = B$, con A inversible, la única solución es $X = A^{-1}{\cdot}B$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado. Por otra parte, puede probarse que vale la afirmación recíproca; es decir, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.38. *Sean $A \in R^{n\times n}$, $X,\ B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Son equivalentes*

(a) *La matriz A es inversible.*

(b) *El sistema $A \cdot X = B$ es compatible determinado cualquiera sea B.*

Observación 3.39. La hipótesis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es esencial. En el ejemplo 2.17 (c) del capítulo anterior, vimos un sistema de la forma $A \cdot X = B$, con $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ que es compatible determinado. Sin embargo, A no puede ser inversible ya que no es una matriz cuadrada. Por otra parte, si repasamos el desarrollo de la observación 3.36, vemos que no usamos las hipótesis X, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, lo único que necesitamos es que estén definidos los productos que aparecen, de modo que podemos aplicar todo lo anterior a resolver *sistemas matriciales.*

Ejemplo 3.40. Resolver la ecuación $A \cdot X - B = C \cdot X$ donde $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primero, agrupamos de un lado de la igualdad los productos donde aparece X y del otro el resto como si se tratase de una ecuación numérica; entonces

$$A \cdot X + B = C \cdot X \quad \Rightarrow A \cdot X - C \cdot X = -B$$

Por la asociatividad del producto, $A \cdot X - C \cdot X = (A - C) \cdot X$. Es importante notar que, dado que X aparece multiplicando a derecha, al aplicar la propiedad debe quedar a la derecha. Tenemos que

$$A - C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad -B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

de modo que la ecuación queda

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Haciendo los cálculos necesarios, vemos que $A - C$ es inversible y que

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación a la derecha por $(A-C)^{-1}$ y tenemos

$$\big((A-C)^{-1}\cdot(A-C)\big)\cdot X=(A-C)^{-1}\cdot(-B),$$

$$I_{3\times 3}\cdot X=(A-C)^{-1}\cdot(-B),$$

$$X=(A-C)^{-1}\cdot(-B).$$

Luego,

$$X=\begin{pmatrix}-1&0&4\\-1&1/2&5/2\\1&0&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-5&-3\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&17\\-9/2&19/2\\2&-13\end{pmatrix}.$$

∇

4 Otros ejemplos

Ejemplo 3.41. Sea $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por

$$A=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

(a) Determinar si A es inversible, en caso afirmativo, calcular A^{-1}.

Planteamos la matriz ampliada $(A\mid I)$ y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&2&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad F_1\leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&1&0\\3&0&2&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}F_2-3F_1\\F_3-F_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&1&0\\0&3&-1&1&-3&0\\0&2&-1&0&-1&1\end{array}\right)\qquad \tfrac{1}{3}F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&0&1&0\\0&1&-1/3&1/3&-1&0\\0&2&-1&0&-1&1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{c}F_1+F_2\\F_3-2F_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad -3F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} F_1 - \frac{2}{3}F_3 \\ F_2 + \frac{1}{3}F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, A es inversible y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Resolver el sistema $A \cdot X = B$.

Por (a), sabemos que A es inversible y que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

por lo tanto

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

∇

Ejemplo 3.42. Sea $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Hallar todas las soluciones de $X = X \cdot A + B^t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Restamos a ambos miembros $(X \cdot A)$ y aplicando las propiedades básicas de la suma de matrices, obtenemos

$$X - (X \cdot A) = X \cdot A + B^t - (X \cdot A),$$

$$X - X \cdot A = X \cdot A - X \cdot A + B^t,$$

$$X - X \cdot A = B^t.$$

Dado que X multiplica a A a la izquierda, reemplazamos X por $X \cdot I$, con I la identidad de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ y aplicamos la propiedad asociativa:

$$X \cdot I - X \cdot A = B^t,$$

$$X \cdot (I - A) = B^t.$$

Tenemos que

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Queda a cargo del lector, verificar que $I - A$ es inversible y que

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Para resolver la ecuación, basta multiplicar ambos miembros por $(I - A)^{-1}$ a la derecha de X, ya que $(I - A)$ aparece a la derecha de X; obtenemos,

$$X \cdot (I - A) = B^t \quad \Rightarrow \quad (X \cdot (I - A)) \cdot (I - A)^{-1} = B^t \cdot (I - A)^{-1}$$

y aplicamos la propiedad asociativa del producto y que $X \cdot I = X$,

$$X \cdot \left((I - A) \cdot (I - A)^{-1}\right) = B^t \cdot (I - A)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

∇

5 Ejercicios

1) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Calcular $A+B$, $2A-B$, $-3A+5C$, $(A+B)+2C$, $A+(B+2C)$.

2) Calcular las matrices traspuestas de

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Para las matrices A y B del ejercicio anterior calcular: a) $2A - 3B^t$ b) $A.B$ c) $B.A$.

4) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ comprobar que $A.B \neq B.A$.

5) ¿Qué puede decir de los tamaños de las matrices A,B y C si se sabe que la operación matricial $AB(C+A)C$ está bien definida?

6) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular: a)$A2 = A.A$, b)$A3$, c)$A4$, d)$A5$, e)$A^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

7) Dado el sistema

   $$S : \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 8w = -2 \\ x + 3y - z - 4w = -6 \\ -x + 2y + z - 6w = 9 \end{cases}$$

   escribirlo como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

8) Resolver los siguientes sistemas de la forma $A \cdot X = B$ donde

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\text{b)}\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9) Determinar cúales de las siguientes matrices son inversibles, exhibir la inversa cuando exista.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

h) $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, i) $G + H$

Capítulo 4

Determinante

1 Determinante

En el capítulo anterior, definimos la noción de inversa de una matriz y la utilizamos como herramienta para resolver ciertos problemas, por ejemplo, hallar las soluciones de una ecuación matricial. Ahora bien, una cuidadosa lectura de lo hecho, muestra un posible inconveniente al tratar de seguir este camino: no sabemos a priori si la matriz cuya inversa queremos calcular es inversible; lo único que podemos hacer es intentar calcular la inversa y ver si tenemos éxito o no. Desde este punto de vista, sería conveniente contar con alguna herramienta que nos permita determinar si una matriz es inversible antes de encarar todos los cálculos que demanda hallar la inversa. Con esta idea, estudiemos el problema en el caso de una matriz de 2×2.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Recordemos que A es inversible si, y sólo si, cualquier sistema de ecuaciones lineales que tenga a A como matriz del sistema es compatible determinado. Por lo tanto, debe ser $a \neq 0$ o $c \neq 0$, pues en caso contrario al triangular llegaríamos a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no corresponde a un sistema compatible determinado. Supongamos que a, el coeficiente a_{11} es distinto de 0 (en caso contrario, simplemente intercambiamos la fila 1 y la fila 2.) Llevemos A a una matriz reducida escalonada por filas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \tfrac{1}{a}F_1 \ \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \ F_2 - cF_1 \ \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}.$$

Como $d - bc/a = (ad - bc)/a$, el sistema es compatible determinado si, y sólo si, $ad - bc \neq 0$ y en este caso A es inversible. Esto motiva la definición siguiente

Definición 4.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Llamamos determinante de A al número real*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Definimos el determinante de una matriz de $n \times n$ por recurrencia, calculando varios determinantes de matrices de $(n-1) \times (n-1)$.

Definición 4.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Llamamos submatriz A_{ij} de la matriz A a la matriz de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene al eliminar de A la fila A_i y la columna A^j.*

Ejemplo 4.3. Calcular las submatrices A_{13} y A_{31} de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la matriz A_{13}, debemos eliminar la fila 1 y la columna 3:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para obtener A_{31}, cancelamos la fila 3 y la columna 1:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \end{pmatrix}.$$

Nos queda

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \nabla$$

Definición 4.4. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$. Llamamos determinante de A al número real*

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}).$$

Observación 4.5. Los determinantes $\det(A_{11}), \ldots, \det(A_{1n})$ que aparecen en la definición son los determinantes de las submatrices $A_{11}, \ldots, A_{1n}$ de A. De esta manera, para calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ debemos calcular los determinantes de n matrices de $(n-1)\times(n-1)$; a su vez, para calcular cada uno de estos determinantes debemos calcular los determinantes de $n-1$ matrices de $(n-2)\times(n-2)$, etc. Así continuamos hasta llegar a determinantes de matrices de 2×2 que sabemos calcular por la definición 4.1.

Es importante notar que las potencias de -1 que aparecen en cada sumando están relacionadas con la submatriz cuyo determinante vamos a calcular: la potencia es la suma de los subíndices de la submatriz.

Antes de estudiar propiedades del determinante que simplifiquen los cálculos, veamos un ejemplo aplicando directamente la definición.

Ejemplo 4.6. Calcular $\det(A)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Una notación alternativa para el determinante consiste en utilizar lineas verticales en lugar de paréntesis, es decir

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dado que

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\det(A) =& (-1)^{1+1}\,1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\,3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\,(0-5) + (-1)\,2\,(-2-40) + 3\,(-1) \\ &= -5 + 84 - 3 \\ &= 76\,.\end{aligned}$$

∇

2 Propiedades

Los cálculos necesarios para obtener el determinante de una matriz pueden ser muy tediosos; a continuación veremos algunas propiedades que pueden simplificarlos en cierta medida.

Propiedades 4.7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces*

(a) $\det(A) = \det(A^t)$.

(b) *Si A tiene filas $A_1, A_2, \ldots, A_n$; es decir si* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}$*, tenemos que*

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Dicho de otra manera, si intercambiamos dos filas de una matriz, cambia el signo del determinante.

Ejemplo 4.8. Sea A la matriz del ejemplo 4.6. Sabiendo que $\det(A) = 76$, calcular los determinantes de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de B basta darse cuenta que esta matriz se obtiene al intercambiar las filas 2 y 3 de A, por lo tanto $\det(B) = -76$.

En el segundo caso, tenemos que $C = A^t$, luego, $\det(C) = \det(A)$. ∇

Ejemplo 4.9. Calcular $\det(A)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz es de 4×4, de modo que si aplicamos la definición debemos calcular los determinantes de cuatro matrices de 3×3. Sin embargo, llamando B a la matriz que obtenemos intercambiando las filas 1 y 2 de A; por la propiedades enunciadas tenemos que $\det(A) = -\det(B)$ y en este último caso los cálculos se simplifican notablemente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

y para calcular este determinante sólo debemos calcular uno de 3×3, ya que los coeficientes b_{11}, b_{13}, b_{14} son nulos.

$$\begin{aligned} \det(B) = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det(B_{11}) + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det(B_{12}) + \\ (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \det(B_{13}) + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot \det(B_{14}) \\ = -\det(B_{12}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} .$$

Ahora podemos repetir lo hecho para calcular el determinante de la matriz de la izquierda, si intercambiamos las filas 1 y 3 tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+3}\, 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -2\,(6+1) = -14 . \end{aligned}$$

Y reuniendo todo lo hecho,

$$\det(A) = -\det(B) = -(-14) = 14 . \qquad \nabla$$

El ejemplo anterior muestra que para calcular el determinante, conviene elegir la fila que tiene más ceros y aplicar las propiedades para calcular el determinante original. Si tenemos en cuenta que $\det(A) = \det(A^t)$, vemos que en realidad conviene elegir la fila o la columna con mayor cantidad de ceros; en el último caso, primero trasponemos y después repetimos lo hecho.

La siguiente proposición simplifica aún más las cosas; nos da una regla para calcular determinantes sin tener que aplicar las propiedades anteriores.

Proposición 4.10. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. *Entonces*

(*a*) $\det(A) = (-1)^{i+1}\, a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}\, a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n}\, a_{in} \det(A_{in})\,.$

(*b*) $\det(A) = (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j}\, a_{2j} \det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j}\, a_{nj} \det(A_{nj})\,.$

Observación 4.11. En el caso (a) decimos que calculamos el determinante *desarrollando por la fila* i y en el caso (b) *desarrollando por la columna* j. Notemos que la fórmula dada en la definición corresponde a desarrollar el determinante por la fila 1.

Ejemplo 4.12. Calcular $\det(A)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La mayor cantidad de ceros está en la columna 3, de modo que desarrollamos el determinante por esa columna; tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot \det(A_{13}) + (-1)^{2+3}\cdot(-2)\cdot\det(A_{23}) + \\ &\qquad (-1)^{3+3}\cdot 0\cdot\det(A_{33}) + (-1)^{4+3}\cdot 0\cdot \det(A_{43}) \\ &= (-1)\cdot(-2)\det(A_{23}) \\ &= 2\det(A_{23}), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el determinante de la matriz de 3×3, vemos que la mayor cantidad de ceros se da en la fila 3 o en la columna 3, de modo que elegimos alguna de ellas para desarrollar el determinante, por ejemplo la fila 3:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(9-2) + (-1)(-5)(-3-2) \\ &= -32.\end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-32) = -64. \qquad \nabla$$

Ejemplo 4.13. Calcular $\det(A)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 9 & 23 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna, queda

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 9 & 23 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Y podemos volver a desarrollar por la primera columna. Si observamos atentamente, vemos que podemos repetir esto hasta llegar al determinante de una matriz de 2×2:

$$\begin{aligned}\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 9 & 23 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \\ = -24. \end{aligned} \qquad \nabla$$

Si repasamos atentamente el ejemplo anterior, vemos que el cálculo del determinante resultó particularmente simple dado que la matriz tenía todos sus coeficiente nulos bajo la diagonal. Además, el determinante resultó el producto de los elementos de la diagonal. Formalicemos este observación

Definición 4.14. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. Decimos que A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $i > j$; es decir, si todos los coeficientes debajo de la diagonal son nulos.*

Decimos que A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $i < j$; es decir, si todos los coeficientes encima de la diagonal son nulos.

Proposición 4.15. *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior o una matriz triangular inferior, entonces el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal; es decir,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots\ a_{nn}.$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots\ a_{nn}.$$

Como consecuencia directa de la proposición tenemos que

$$\det(I_{n\times n}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Propiedades 4.16. *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

(*a*) *Si A tiene una fila (o una columna) nula, entonces* $\det(A) = 0$.

(b) *Si* A *tiene dos filas (o dos columnas) iguales, entonces* $\det(A) = 0$.

(c) *Si* B *es tal que* $B_1 = A_1, \ldots, B_j = k\, A_j, \ldots, B_n = A_n$ *con* $k \in \mathbb{R}$ *y donde* $A_1, \ldots, A_n$ *son las filas de* A*, entonces* $\det(B) = k \det(A)$.

(d) $\det(k\, A) = k^n \det(A)$, *con* $k \in \mathbb{R}$.

(e) $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$.

Ejemplo 4.17. Calcular los determinantes $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(A+B)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dado que A y B tienen una fila de ceros, por (a) tenemos que $\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$. Por otra parte,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

luego, $\det(A+B) = 5$.

Este ejemplo muestra que no es cierto un resultado similar a (e) para la suma: puede ocurrir que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. ∇

Ejemplo 4.18. Calcular los siguientes determinantes usando las propiedades estudiadas:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

En este caso, vemos que todos los coeficientes de la fila 3 son nulos; por la propiedad (a) el determinante es 0.

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

La matriz es triangular superior, por la proposición 4.15, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal, entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6.$$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

En principio, no resulta claro que propiedad aplicar. Dada la cantidad de ceros de la matriz intentamos, intercambiando filas y columnas, llevarla a una matriz triangular.

Intercambiando las filas 2 y 3, tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

y ahora podemos intercambiar las columnas 1 y 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

Y el determinante de la última matriz es -1, luego

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(-(-1)) = -1.$$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Observando la matriz, vemos que la fila 3 es un múltiplo de la fila 1, así que aplicamos las propiedades (c) y (b). Tenemos que la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por -2, entonces por (c)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Las filas 1 y 3 de la última matriz son iguales; por (b) el determinante es 0. Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

∇

El siguiente resultado formaliza lo comentado en la introducción de este capítulo.

Proposición 4.19. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, A es inversible si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.*

Corolario 4.20. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es inversible, entonces*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Ejemplo 4.21. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = -2$. Calcular

(a) $\det(A^3)$.

Por definición, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, de modo que aplicamos la propiedad (e) de 4.16:

$$\det(A^3) = \det(A \cdot A \cdot A) = \det(A)\,\det(A)\,\det(A) = (-2)^3 = -8.$$

Vale la pena señalar que en general se verifica $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

(b) $\det(2A)$.

Tenemos que calcular el determinante de un número por una matriz de 3×3; por (d) de la lista de propiedades 4.16, tenemos

$$\det(2A) = 2^3 \det(A) = 2^3 \cdot (-2) = -16.$$

(c) $\det\left((4\,A)^{-1}\right)$.

Como $\det(A) = -2$, sabemos que $\det(4\,A) = -8 \neq 0$, por lo tanto $4\,A$ es inversible y, por el último corolario, tenemos que

$$\det\left((4\,A)^{-1}\right) = \frac{1}{\det(4\,A)} = \frac{1}{4^3\,\det(A)} = -\frac{1}{128}\,.$$

(d) $\det(4\,A^{-1})$.

Es importante notar la diferencia con el inciso anterior. En este caso estamos multiplicando por 4 a la inversa de A. Como $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, entonces $A^{-1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, de modo que

$$\det(4A^{-1}) = 4^3 \det(A^{-1}) = 4^3 \frac{1}{\det(A)} = 4^3 \left(-\frac{1}{2}\right) = -32.$$

(e) Si $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcular $\det(A^4 \cdot B - A^4)$.

Dado que en ambos sumandos aparece A^4, podemos sacarlo de factor común para transformar el problema en el cálculo del determinante de un producto de matrices. Dado que A^4 multiplica a B a la izquierda, tenemos que

$$A^4 \cdot B - A^4 = A^4 \cdot (B - I_{3\times 3}).$$

Luego,

$$\det(A^4 \cdot B - A^4) = \det(A^4)\,\det(B - I_{3\times 3}) = (\det(A))^4 \det(B - I).$$

Como

$$B - I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$B - I_{3\times 3}$ es una matriz triangular superior, entonces

$$\det(B - I_{3\times 3}) = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6.$$

Por lo tanto,

$$\det(A^4 \cdot B - A^4) = (-2)^4\,(-6) = -96.$$

∇

Ejemplo 4.22. Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que A sea inversible, donde

(a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 4 & k \end{pmatrix}$.

Sabemos que A es inversible si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$; por lo tanto el problema planteado es equivalente a "hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A) \neq 0$". En este caso, tenemos que

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4,$$

y sabemos que

$$k^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \ \text{ o } \ k = -2.$$

No debemos olvidar, que nos interesan los valores de k para los cuales $\det(A) \neq 0$; debe ser $k \neq 2$ y $k \neq -2$, es decir, A es inversible si, y sólo si, $k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} k-2 & 2 & 1 \\ 0 & k+3 & -2 \\ k-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Procedemos igual que en el inciso anterior; primero calculamos el determinante de A y hallamos los valores de k para los que se anula. Si desarrollamos por la primera columna tenemos

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} k-2 & 2 & 1 \\ 0 & k+3 & -2 \\ k-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= (k-2)\begin{vmatrix} k+3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (k-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k+3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (k-2)\,(2(k+3)+4) + (k-2)\,(-4-(k+3)) \\ &= (k-2)\,(2k+10) + (k-2)\,(-7-k).\end{aligned}$$

Sacamos $(k-2)$ de factor común y nos queda

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} k-2 & 2 & 1 \\ 0 & k+3 & -2 \\ k-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= (k-2)(2k+10-7-k) \\ &= (k-2)(k+3).\end{aligned}$$

De esta manera, vemos fácilmente que $\det(A) = 0$ si, y sólo si, $k = 2$ o $k = -3$; por lo tanto, para que A sea inversible, debe ser $k \neq 2$ y $k \neq -3$. Luego, A es inversible si, y sólo si, $k \in \mathbb{R} - \{-3, 2\}$. ∇

3 Sistemas con parámetros

A continuación resolvemos algunos ejercicios, aplicando los resultados estudiados sobre sistemas y determinantes.

Ejemplo 4.23. Sea

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ (a-1)y + z = 2 \\ (a+2)z = 0\,. \end{cases}$$

Resolver el sistema para $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$ y $a = 2$.

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \end{array}\right).$$

Para resolver el ejercicio, reemplazaremos a por los valores pedidos y buscaremos las soluciones de cada uno de los sistemas.

$a = 0$**:**

En este caso, la matriz ampliada del sistema queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

que ya está reducida escalonada por filas. Como el sistema es cuadrado y todos los elementos de la diagonal son no nulos, sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución como de costumbre, despejando de abajo hacia arriba. Por la última ecuación, $z = 0$; si reemplazamos ese valor en la segunda, obtenemos $y = -2$ y al reemplazar en la primera ecuación, $x = 6$; por lo tanto la solución es $(6, -2, 0)$.

$a = 1$**:**

Al reemplazar, la matriz ampliada queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

que no está reducida, pero a fin de hallar las soluciones tampoco es necesario hacerlo; por la última ecuación $z = 0$ y por la segunda $z = 2$. Por lo tanto el sistema no tiene solución, es incompatible.

$a = -2$**:**
La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que corresponde a un sistema compatible indeterminado. Por la segunda fila, tenemos que $-3y + z = 2$, así que $z = 2 + 3y$. Al reemplazar en la ecuación que corresponde a la primera fila, queda

$$x + y + 2(2 + 3y) = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -7y.$$

Para cada valor de y tenemos una solución, de modo que el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-7y, y, 2 - 3y) \\ &= y(-7, 1, -3) + (0, 0, 2), \quad y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$a = 2$**:**
La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Al igual que en el caso $a = 0$, el sistema es compatible determinado. De la última ecuación tenemos $z = 0$. Al reemplazar este valor en la segunda obtenemos $y = 2$ y al hacer $y = 2$, $z = 0$ en la primera obtenemos $x = 2$, de modo que la solución es $(2, 2, 0)$. ∇

Observemos que cada valor de $a \in \mathbb{R}$ da lugar a un sistema de ecuaciones distinto. En este caso, decimos que tenemos un *sistema de ecuaciones lineales con parámetro a* y lo que vamos a hacer es clasificarlo, es decir, decidir si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible según el valor del parámetro.

En el ejemplo anterior vimos que si $a = 0$ o $a = 2$, el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$ el sistema es incompatible y si $a = -2$ es compatible indeterminado. ¿Qué podemos hacer si tenemos que clasificar los sistemas para cada valor posible? Evidentemente no podemos probar con cada valor de a. Para resolver este problema conviene establecer la siguiente proposición, que obtenemos al reunir las proposiciones 3.38 y 4.19.

Proposición 4.24. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, $\det(A) \neq 0$ si, y sólo si, todo sistema de la forma $A \cdot X = B$ es compatible determinado.*

¿Qué sucede si $\det(A) = 0$? En este caso no sabemos a priori si el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna; para averiguarlo procedemos como antes triangulando la matriz para cada uno de los valores del parámetro que anulan al determinante.

Ejemplo 4.25. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}.$$

Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A \cdot X = B$ tiene

(a) Solución única.

(b) Ninguna solución.

(c) Infinitas soluciones (en este caso, resolver el sistema y dar la solución en forma paramétrica).

Para resolver el ejercicio, utilizamos la proposición anterior. Primero calculamos el determinante de la matriz del sistema y vemos para qué valores de a se anula. La matriz del sistema es A, el determinante es (desarrollando por la fila 2)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 3a \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -a(-3a - a) - 4(1 + 3) \\
&= -a(-4a) - 4 \cdot 4 \\
&= 4a^2 - 16.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow a = 2 \text{ o } a = -2.$$

Con esto, ya estamos en condiciones de responder (a); por la proposición 4.24, el sistema es compatible determinado si, y sólo si, $a \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Ahora debemos clasificar los sistemas que obtenemos al hacer $a = 2$ y $a = -2$. Resolvemos el sistema en cada caso planteando la matriz ampliada $(A \mid B)$.

Si $a = 2$, tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

En la última fila llegamos a un absurdo, por lo tanto en este caso el sistema no tiene solución.

Si $a = -2$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -6 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad F_2 + 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad -\tfrac{1}{2}F2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos, el sistema que corresponde a la matriz ampliada es

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & -2 \\ & & y & & & = & 1\ . \end{array} \right.$$

La última ecuación es clara, $y = 1$, reemplazamos en la primera y tenemos

$$x - 1 - 2z = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -1 + 2z.$$

Luego, las soluciones son

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-1 + 2z, 1, z) \\ &= (-1, 1, 0) + z(2, 0, 1), \;\; z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En conclusión

(a) El sistema es compatible determinado si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

(b) El sistema es incompatible si $a = 2$.

(c) El sistema es compatible indeterminado si $a = -2$. En este caso, el conjunto solución es

$$X = \lambda(2, 0, 1) + (-1, 1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \nabla$$

Ejemplo 4.26. Hallar los valores de b tales que el sistema de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & b-1 & 4 & b+2 \\ b & 0 & 2 & -3 \\ 2 & b-1 & b+7 & b+6 \end{array}\right)$$

es

(a) Compatible determinado.

(b) Compatible indeterminado. En este caso, expresar las soluciones en forma paramétrica.

(c) Incompatible.

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & b-1 & 4 \\ b & 0 & 2 \\ 2 & b-1 & b+7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante desarrollando por la segunda fila y obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & b-1 & 4 \\ b & 0 & 2 \\ 2 & b-1 & b+7 \end{vmatrix} &= -b \begin{vmatrix} b-1 & 4 \\ b-1 & b+7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & b-1 \\ 2 & b-1 \end{vmatrix} \\
&= -b\Big[(b-1)(b+7) - 4(b-1)\Big] - 2 \cdot 0 \\
&\qquad \text{(sacamos } (b-1) \text{ como factor común)} \\
&= -b(b-1)\Big[(b+7) - 4\Big] \\
&= -b(b-1)(b+3).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0,\ b = 1 \text{ o } b = -3.$$

Analicemos cada caso.

$b = 0$**:**

Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 6 \end{array}\right) \quad F_3 - F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad 2F_3 - 3F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right).$$

Las dos últimas filas muestran que llegamos a un absurdo; de modo que en este caso el sistema es incompatible.

$b = 1$**:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{array}\right).$$

En este caso el sistema también es incompatible.

$b = -3$**:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad F_3 - F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Nuevamente llegamos a un sistema incompatible.

Por otra parte, si $b \neq 0,\ 1,\ -3$, el sistema es compatible determinado. En resumen

(a) Es compatible determinado si $b \in \mathbb{R} - \{0, 1, -3\}$.

(b) Nunca es compatible indeterminado.

(c) Si $b \in \{0, 1, -3\}$ el sistema es incompatible. ∇

Ejemplo 4.27. Sean Π el plano de ecuación

$$\Pi : x + 4y + 2z = 1$$

y $\mathbb{L}$ la recta

$$\mathbb{L}: \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 10y & + & 5z & = & 5 \\ x & + & 8y & + & \beta^2 z & = & 2\beta+3 \end{array} \right. .$$

Hallar los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

(a) $\mathbb{L} \cap \Pi$ es un punto.

(b) $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

Para buscar $\mathbb{L} \cap \Pi$, debemos resolver el sistema de 3×3,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 10y & + & 5z & = & 5 \\ x & + & 8y & + & \beta^2 z & = & 2\beta+3 \end{array} \right. .$$

Que $\mathbb{L} \cap \Pi$ sea un punto equivale a que el sistema tenga solución única, y que $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$, a que el sistema no tenga solución. Procedemos como en el ejemplo anterior, usando determinante.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 1 & 8 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

la matriz del sistema. Calculamos el determinante desarrollando por la primera fila

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 1 & 8 & \beta^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 8 & \beta^2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \beta^2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 10\beta^2 - 40 - 4(2\beta^2 - 5) + 2(16 - 10) \\ &= 10\beta^2 - 40 - 8\beta^2 + 20 + 12 \\ &= 2\beta^2 - 8. \end{aligned}$$

Luego,

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta^2 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 2 \text{ o } \beta = -2.$$

Entonces, si $\beta \neq -2$ y $\beta \neq 2$, el sistema es compatible determinado y por lo tanto la intersección de $\mathbb{L}$ y Π es un punto. Veamos que ocurre si $\beta = 2$ o $\beta = -2$.

Si $\beta = 2$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 5 & 5 \\ 1 & 8 & 4 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, el sistema tiene infinitas soluciones y esto no es lo pedido.

Si $\beta = -2$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 5 & 5 \\ 1 & 8 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

En este caso el sistema es incompatible, por lo tanto $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

En conclusión,

(a) $\mathbb{L} \cap \Pi$ es un punto si, y sólo si, $\beta \in \mathbb{R} - \{2, -2\}$.

(b) $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$ si, y sólo si $\beta = -2$. ∇

Ejemplo 4.28. Dados los planos

$$\Pi_1 : x - y + 2z = \alpha \ , \qquad \Pi_2 : 2x - y + 3z = 2 + 2\alpha \ ,$$

$$\Pi_3 : 3x - 2y + (\alpha^2 - 20)z = 7 + 4\alpha \ .$$

Determinar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ es una recta. Para cada uno de los valores hallados, dar una ecuación paramétrica de la recta correspondiente.

Para calcular la intersección de los tres planos, debemos resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & \alpha \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 + 2\alpha \\ 3x & - & 2y & + & (\alpha^2 - 20)z & = & 7 + 4\alpha \ . \end{array}\right.$$

Como nos piden que la intersección sea una recta, el sistema debe tener infinitas soluciones y, por lo tanto, el determinante de la matriz del sistema debe ser nulo. Calculamos el determinante desarrollando por la primera fila

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & \alpha^2-20 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & \alpha^2-20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \alpha^2-20 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -\alpha^2+20+6+2\alpha^2-40-9+2(-4+3) \\ &= \alpha^2-25. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\det(A)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2-25=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=5 \ \text{ o } \ \alpha=-5.$$

Ahora debemos ver para cuáles de estos valores el sistema tiene solución.

Si $\alpha=5$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \\ 3 & -2 & 5 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 12 \end{array}\right) \quad F_3-F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right),$$

el sistema es incompatible y no nos interesa.

Si $\alpha=-5$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & -8 \\ 3 & -2 & 5 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad F_3-F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

es un sistema compatible indeterminado. Despejamos para escribir la solución en forma paramétrica. El sistema que corresponde a la última matriz ampliada es

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & -5 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array} \right. .$$

De la última ecuación, $y = 2 + z$. Reemplazamos en la primera y obtenemos

$$x - (2 + z) + 2z = -5,$$

$$x - 2 - z + 2z = -5,$$

$$x = -3 - z.$$

Por lo tanto las soluciones tienen la forma

$$(-3 - z, 2 + z, z) = (-3, 2, 0) + z(-1, 1, 1), \quad z \in \mathbb{R},$$

que es la ecuación de una recta.

Luego, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ es una recta para $\alpha = -5$ y en este caso una ecuación de la recta es $X = (-3, 2, 0) + \lambda(-1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ∇

4 Otros ejemplos

Ejemplo 4.29. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ \lambda^2 & \lambda & 2 \\ 2\lambda & 2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales A no es inversible.

Tenemos que hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A) = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ \lambda^2 & \lambda & 2 \\ 2\lambda & 2 & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 2\lambda & 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 - 4) - (2\lambda^2 - 2\lambda^2) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 4); \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ o } \lambda = 2 \text{ o } \lambda = -2.$$

Luego, A no es inversible si $\lambda = 0$ o $\lambda = 2$ o $\lambda = -2$.

(b) Sea $B = A^t$ para $\lambda = 1$ ¿Es B inversible? En caso afirmativo hallar B^{-1}.

Si $\lambda = 1$, por lo hecho en (a), tenemos que $\det(A) \neq 0$ y como $\det(A) = \det(A^t)$, resulta que $\det(B) \neq 0$ y, por lo tanto, B es inversible.

Reemplazando λ por 1 y trasponiendo obtenemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos B^{-1}

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 + F_1 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} F_1 - F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \; -\tfrac{1}{3}F_3$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \quad F_2 - 2F_3$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

Luego,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

∇

Ejemplo 4.30. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\det(A) = \frac{1}{2}$ y

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

calcular $\det(B^3)$ y $\det(-2B)$.

Usando las propiedades, tenemos que $\det(A\cdot B) = \det(A)\ \det(B)$ y de esta igualdad podemos despejar $\det(B)$. Calculemos $\det(A\cdot B)$.

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Luego, $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B)$ queda

$$1 = \frac{1}{2}\det(B) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = 2.$$

Entonces,

$$\det(B^3) = [\det(B)]^3 = 2^3 = 8$$

y

$$\det(-2B) = (-2)^3 \det(B) = (-2)^3 \cdot 2 = -16\ . \qquad \nabla$$

Ejemplo 4.31. Sea

$$\begin{cases} x & + & y & & & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & (\alpha-2)z & = & \alpha-4 \\ (\alpha+7)x & + & 4y & + & (\alpha-2)z & = & -\beta\ . \end{cases}$$

(a) Hallar todos los α y $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones y $(-1,1,1)$ es solución.

Comencemos usando que $(-1,1,1)$ es solución del sistema. Reemplazamos en las ecuaciones y obtenemos

$$\text{Primera ecuación: } -1+1 = 0.$$

Segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -4+2+\alpha-2 &= \alpha-4 \\ \alpha-4 &= \alpha-4\ . \end{aligned}$$

Tercera ecuación:

$$\begin{aligned} -(\alpha+7)+4+\alpha-2 &= -\beta \\ -7+4-2 &= -\beta \\ -5 &= -\beta \\ \beta &= 5\ . \end{aligned}$$

Vemos que las dos primeras ecuaciones se verifican cualesquiera sean los valores de α y β; pero la tercera impone una condición: $\beta = 5$. Entonces, podemos afirmar que si $\beta = 5$, $(-1, 1, 1)$ es solución del sistema cualquier sea α; sin embargo, no sabemos si esta solución es única o hay otras. Para que el sistema tenga infinitas soluciones, el determinante de la matriz del sistema debe ser nulo, veamos qué condiciones impone esto sobre α.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & \alpha-2 \\ \alpha+7 & 4 & \alpha-2 \end{vmatrix} &= -(\alpha-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+7 & 4 \end{vmatrix} + (\alpha-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -(\alpha-2)(4-(\alpha+7)) + (\alpha-2)(2-4) \\
&= -(\alpha-2)(-3-\alpha) + (\alpha-2)(-2) \\
&\qquad\qquad \text{(sacamos } (\alpha-2) \text{ de factor común)} \\
&= (\alpha-2)(3+\alpha-2) \\
&= (\alpha-2)(\alpha+1)\ .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & \alpha-2 \\ \alpha+7 & 4 & \alpha-2 \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 \ \text{ o } \ \alpha = -1.$$

Por lo tanto, el sistema cumple lo pedido si $\alpha = 2$ o $\alpha = -1$ y $\beta = 5$.

(b) Resolver el sistema para todos los valores hallados.

Tenemos dos sistemas, el que corresponde a $\alpha = 2$ y $\beta = 5$, y el que corresponde a $\alpha = -1$ y $\beta = 5$.

Caso $\alpha = 2$ y $\beta = 5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 9 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 9F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{array}\right) \ -\tfrac{1}{2}F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{array}\right) \ F_3 + 5F_2 \ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema de ecuaciones que corresponde a la última matriz ampliada es

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & 1\ . \end{array}\right.$$

Reemplazando $y=1$ en la primera ecuación, obtenemos $x=-1$. Dado que no hay ninguna restricción sobre z, tenemos que las soluciones son

$$(-1,1,z)=(-1,1,0)+z(0,0,1), \quad z\in\mathbb{R}.$$

Caso $\alpha=-1$ y $\beta=5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-4F_1 \\ F_3-6F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right) F_3-F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2}F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema asociado es

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3/2\,z & = & 5/2\ ; \end{array}\right.$$

de la segunda ecuación tenemos $y=5/2-3/2\,z$ y reemplazando en la primera llegamos a

$$x+(5/2-3/2\,z)=0,$$

$$x=-5/2+3/2\,z.$$

Por lo tanto las soluciones son

$$\begin{aligned}(-5/2+3/2\,z\,,\ 5/2-3/2\,z\,,\ z)&=\\ &=(-5/2,5/2,0)+z(3/2,-3/2,1), \quad z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

∇

Ejemplo 4.32. Dados

$$\mathbb{L}:\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \Pi: 2y+(k^2+2)z=k+2,$$

hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

Nos piden que hallemos los valores de k para los que el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2y + (k^2+2)z = k+2 \end{cases}$$

es incompatible. Primero veamos cuáles son los valores que anulan el determinante de la matriz del sistema.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & k^2+2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k^2+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2 - 6 = k^2 - 4;$$

por lo tanto, el determinante de la matriz del sistema se anula si, y sólo si

$$k^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \text{ o } k = -2.$$

Veamos cuáles de los valores hallados sirve.

Para $k = 2$, queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Como el sistema es incompatible, $k = 2$ verifica lo pedido.

Para $k = -2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado (lo que indica que $\mathbb{L} \cap \Pi$ no es vacío) por lo tanto no sirve.

En conclusión, $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$ si, y sólo si, $k = 2$. ∇

5 Ejercicios

1) Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -3 & -6 \\ 12 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

2) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$, y $\det(A^5B - A^5)$.

3) Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

a) $\det(2A)$, b) $\det((4A)^{-1})$, c) $\det(2A^{-1})$.

4) Determinar los valores de k para los cuales A es una matriz inversible

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Encontrar todos los valores de k para los cuales el sistema S tiene solución única:

a)

$$S : \begin{cases} (k^2-9)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 2y = 3 \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x & - & 2y & + & z & = 0 \\ (2k-2)x & + & 2y & + & z & = 0 \\ (k+2)x & + & (k-3)y & + & 2z & = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 3x & - & y & + & kz & = 2 \\ x & + & 3ky & - & z & = 3 \\ 2x & + & y & & & = 1 \end{cases}$$

6) Encontrar todos los valores de a para los cuales el sistema S es compatible

$$S: \begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = a^2 \end{cases}$$

7) Dado el sistema

$$S: \begin{cases} x & + & \alpha y & + & 2z & = 1 \\ & & y & - & z & = 0 \\ x & & & - & z & = 1 \end{cases}$$

a) Hallar α para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) Estudiar el sistema obtenido para el valor de α hallado en a) y, si existen, hallar todas las soluciones.

8) Determinar los valores de k para los cuales el sistema $A \cdot X = B$ tiene

i) ninguna solución, ii) solución única, iii) infinitas soluciones (en este caso resolver el sistema y dar la solución en forma paramétrica).

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ k^2+k-1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & k^2+8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k+14 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k+1 \\ k & k^2+2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

9) a) Hallar α para que $\mathbb{L}$ sea paralela a Π, donde

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + 3y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \Pi : \alpha x - 2y + 2z = \beta.$$

b) Calcular β para que $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L}$.

10) Sean $\Pi : x - y + 2z = 3$ y

$$\mathbb{L} : \begin{cases} 2x + (a-2)y + 5z = 8 \\ 5x + (a-5)y + (a^2+10)z = a+16 \end{cases}$$

a) Hallar **todos** los $a \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \cap \Pi$ sea un punto.

b) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$.

11) Dados los planos

$$\Pi_1 : x + 2y + z = 3, \qquad \Pi_2 : 2x + 3y + 2z = 2 \quad \text{y}$$
$$\Pi_3 : x + 4y + (k^2 - 8)z = k + 14$$

determinar todos los valores de k para los que la intersección de los tres planos (o sea,

$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$) es una recta. Para cada uno de los valores de k hallados, dar la ecuación paramétrica de la recta correspondiente.

12) Sea $\mathbb{L} : X = \beta(k^2+1, k, k+7)$ y $\Pi : x + 2y - 3z = 2$. Determinar todos los valores de k para los cuales $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$

13) Dada la recta

$$\mathbb{L} : \begin{cases} ax - y + z = 1 \\ x + y + 3az = 1 \end{cases}$$

y el plano $\Pi : \lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,1) + (2,1,1)$, hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{L} \parallel \Pi$ y $\mathbb{L} \not\subset \Pi$

14) Sean las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(0,1,1) + (1,2,3)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1,1,0) + (1,-1,1)$.

Hallar la ecuación implícita de un plano Π que contenga a $\mathbb{L}_1$ y que corte a la recta $\mathbb{L}_2$ en un punto de norma 1.

Índice alfabético