Universidad Nacional de General Sarmiento

Instituto del Desarrollo Humano

ASPECTOS DIDÁCTICOS Y MATEMÁTICOS DEL EMPLEO DE PRUEBAS VISUALES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE

ESPECIALISTA EN DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICA

AUTOR: Prof. VÍCTOR H. GONZÁLEZ

DIRECTORA: Mgter. SANDRA VISOKOLSKIS

FEBRERO DE 2014

Resumen

En este trabajo se presenta un recorrido sobre pruebas visuales, corrientes en filosofía de la matemática, y se abordan rasgos de la técnica heurística de Arquímedes para la producción de conocimiento. La vinculación entre las pruebas visuales y la enseñanza de la matemática será a través del análisis de los procesos y habilidades de visualización requeridos por el lector de una prueba visual.

El propósito de dicho recorrido es fundamentar una propuesta de enseñanza en el ámbito de la formación de profesores en didáctica de la matemática cuyo contenido es la indagación respecto de las formas de producción de conocimiento matemático, las pruebas visuales, y su valor cognitivo en el aula de matemática. El desarrollo de la propuesta es íntegramente en un aula virtual.

Palabras claves: Pruebas visuales – Visualización – Formación de profesores – Aula virtual.

Abstract.

In this work, a path through visual proofs and currents in philosophy of mathematics is presented, as well as the Archimedes heuristic technique for the production of knowledge is approached. The relation between the visual proofs and the teaching of mathematics will be through the analysis of the processes and the visualization skills required by the reader of the visual proofs.

The aim of this path is to base a teaching proposal in the field of teacher training in didactic of the mathematic, whose content is the inquiry on the ways of producing mathematical knowledge, the visual proofs, and its cognitive value in the math class. The development of the proposal is entirely in a virtual classroom.

Keywords: Visual proofs – Visualization – Teachers’ training – Virtual classroom.

Índice general

1 Introducción.

La formación de profesores en didáctica de la matemática tiene como uno de sus desafíos promover discusiones alrededor de cuestiones de la actividad matemática. La intencionalidad final de dichas discusiones es darle a los estudiantes de profesorado elementos teóricos que le permitan la posibilidad de fundamentar la toma de sus decisiones didácticas particulares, en un futuro escenario escolar.

El propósito de este trabajo es abordar la temática de las pruebas visuales en matemática desde el punto de vista de su desarrollo en la historia así como también su incidencia, o su aporte, a la enseñanza de la matemática. Se fundamentará una propuesta de enseñanza en el ámbito de la formación de profesores en didáctica de la matemática cuyo contenido es *la indagación respecto de las formas de producción de conocimiento matemático, las pruebas visuales, y su valor cognitivo en el aula de matemática*. La indagación pretendida será desde la filosofía de la matemática, la educación matemática y la matemática.

Se busca rescatar el valor cognitivo de las pruebas visuales más que sus garantías lógico-deductivas concluyentes. Ello lleva, por un lado, a la consideración de las dos vertientes de fundamentación de esta propuesta: por un lado un posicionamiento filosófico de la matemática y por otro una estrategia pedagógica centrada en la visualización matemática. Y por otro lado, a establecer una modalidad virtual como el medio para que los estudiantes de profesorado indaguen en la búsqueda del valor cognitivo de las pruebas visuales.

La presente propuesta ofrece la oportunidad de permitir confluir en una única perspectiva, dos enfoques desde dos disciplinas afines pero pocas veces asociadas, como son la filosofía de la matemática y la educación matemática. El objetivo central de llevar a cabo una indagación respecto de las pruebas visuales es una tarea vigente de discusión en entornos cognitivos que muestran su actualidad e importancia. Sobre todo es relevante el aporte que eventualmente se pudiera ofrecer desde la combinación de estrategias metodológicas y epistemológicas que se enriquecerían mutuamente.

La propuesta de enseñanza se inscribe en una materia de formación de profesores. Ubicamos la misma en la asignatura *Enseñanza de la Matemática I* correspondiente al Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento. La particularidad de la asignatura es que introduce a los estudiantes en la problemática de la enseñanza de la matemática en el nivel medio y superior. Consideramos que llevar a cabo una propuesta de enseñanza en el que el centro de la misma sea la indagación respecto de las pruebas visuales así como de la formas de producción de conocimiento matemático abonará en la concepción que los estudiantes formarán de la matemática, y les permitirá una reflexión acerca de decidir tomar, o no, una prueba visual para sus futuros diseños de clases de matemática.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: la sección 2. incluye un breve estado del arte acerca de corrientes clásicas en filosofía de la matemática y pruebas visuales, junto con una conclusión respecto al lugar que tendrían las pruebas visuales en cada una de las corrientes filosóficas presentadas; en la sección 3. se presentan dos problemas resueltos por Arquímedes, se describe la forma de argumentar y se complementa dicha argumentación con la rigurosidad de resultados matemáticos demostrados posteriormente; en la sección 4. se presentan algunos elementos teóricos de la visualización matemática, una vinculación entre nuestro posicionamiento filosófico y elementos con base en la socioepistemología, y su adecuación para la propuesta; en la sección 5 se presenta y fundamenta una propuesta de enseñanza – en un aula virtual – para indagar acerca del valor cognitivo de las pruebas visuales en el aula de matemática. Por último, cerramos con una sección de consideraciones finales y discusión acerca de las formas de producción de conocimiento matemático, las pruebas visuales, y su valor cognitivo en contextos escolares.

2 Pruebas visuales y corrientes clásicas en filosofía de la matemática.

En esta sección se presentan algunas corrientes filosóficas de la matemática en vinculación con las pruebas visuales. Para ello, en primer lugar, se define lo que se entiende por prueba visual y se dan algunos ejemplos ilustrativos. En segundo lugar, se describen en forma sintética las principales características de las corrientes filosóficas de la matemática consideradas y se analiza la aceptación de las pruebas visuales a la luz de cada una de ellas.

2.1 Pruebas visuales.

El término "prueba visual" hace referencia a figuras o representaciones pictóricas que permiten expresar alguna propiedad matemática o derivar resultados matemáticos.
En Torres Alcaraz (2004) se presenta una reflexión sobre las pruebas visuales, siguiendo lo desarrollado por Peter Borwein y Loki Jörgenson, quienes establecen la necesidad, pero quizá no suficiencia, de condiciones que debería incluir una prueba visual para ser aceptada como prueba:

> Confiabilidad: que los medios subyacentes para alcanzar la prueba sean confiables, y que el resultado no varíe con cada inspección.
> Consistencia: que los medios y el fin de la prueba sean consistentes con otros hechos, creencias o pruebas conocidas.
> Repetibilidad: que la prueba la puedan confirmar o repetir otros.

Cada requerimiento es difícil de satisfacerse en una representación visual estática y única. Por ello, luego establecen mecanismos adicionales o convenciones que complementan a la imagen, como *dinamismo*, *dirección* y *flexibilidad*[1], entre otras.

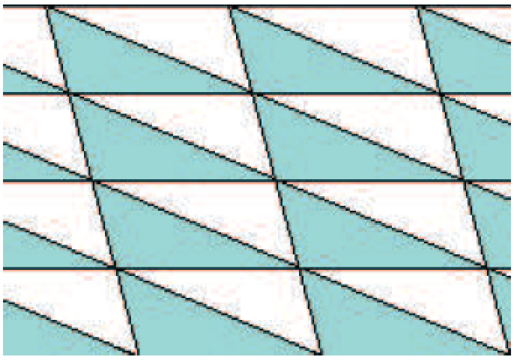
A continuación presentamos tres ejemplos de pruebas visuales[2]. Las hemos ordenado en función del tipo de imágenes utilizadas. La cualidad respecto del tipo de imagen utilizada es abordada en la sección 3.2, sin embargo, al final de cada prueba visual haremos una breve observación en dicha dirección.

---

[1]Para una descripción de estas condiciones ver: Borwen, P. y L. Jörgenson, *Visible Structures in Number Theory*. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/
[2]Estas pruebas visuales se retomarán en otras secciones del presente trabajo.

Prueba visual 1: Acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Una mirada atenta a la figura será suficiente para descubrir un interesante patrón geométrico:



Torres Alcaraz (2004), p.2

Observación: Presenta una imagen concreta.

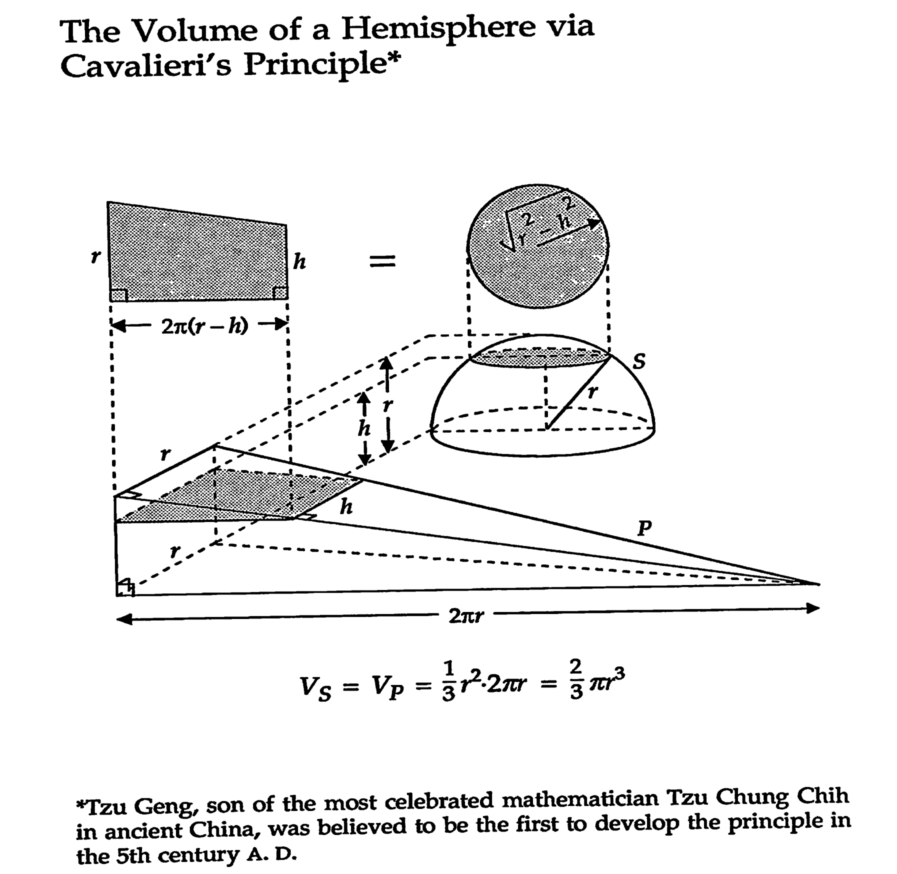
Prueba visual 2: Acerca de la suma de una serie infinita.

Una simple prueba visual de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{3}$

Peter Borwein y LokiJörgenson

Observación: Al tratar con una serie infinita requiere de una imagen en donde es pretendida la iteración.

Prueba visual 3: Acerca del volumen de una semiesfera.



Nelsen (1993)

Traducción del título: *El volumen de un hemisferio a través del principio de Cavalieri.*
Traducción de la nota marcada con **: Tzu Geng, hijo del más célebre matemático Tzu Chung Chih de la antigua China, se cree que fue el primero en desarrollar el principio en el siglo V dC.*
Observación: Al tratar con cuerpos geométricos requerirá imágenes en perspectiva.

Doniez (2000) resume en una ponencia que la matemática integra dos aspectos: el *formal* y el *informal*. La parte formal es el corazón de las "Demostraciones" y la parte informal convoca a figuras, diagramas, esquemas y usualmente ha estado al servicio de la parte formal. En ese mismo trabajo menciona palabras de Miguel de Guzmán en el Prólogo a *El Rincón de la Pi*zarra: "En las imágenes visuales suelen estar sugeridos, cuando no plenamente representados con exacta fidelidad, todos los elementos necesarios para construir con todo rigor formal, si es oportuno y así se desea, las demostraciones de los procesos que representan […]."
Podemos entender a las pruebas visuales como una "demostración sin palabras", ya que las mismas se estructuran en base a un dibujo o diagrama y algunas precisiones matemáticas de tipo simbólico que guíen la lectura de los elementos visuales presentados (Doniez, 2000):

> Lo que se intenta en cada DSP[3] es ayudar al observador a VER por qué un enunciado particular puede ser verdadero, y también a VER cómo podría comenzar a probarlo. Siempre el énfasis está puesto en dar las pistas visuales justas como para estimular en el observador su pensamiento matemático (p.6).

2.2 Corrientes filosóficas de la matemática y producción del conocimiento matemático.

Históricamente, según Torres Alcaraz (2004), el apoyo en lo visual estuvo vinculado a la producción de conocimiento matemático. Ante la imposibilidad de demostrar con evidencia visual la existencia de un número racional tal que al cuadrado dé dos, es que la producción de conocimiento necesitó valerse de otros recursos (en este caso la demostración por reducción al absurdo).
La historia de la matemática da cuenta de las controversias en torno al origen y naturaleza de los objetos matemáticos que definen distintas corrientes filosóficas. Dentro de cada una de ellas se definen los recursos para la producción de conocimiento matemático. Aquí, luego de una breve descripción de algunas de las clásicas corrientes filosóficas de la matemática, valoraremos el recurso de la prueba visual dentro de algunas de ellas.

El Platonismo considera la matemática como un sistema de verdades que preexisten al hombre. De este modo habrá una concepción de lo que hace un matemático: su tarea es descubrir esas verdades matemáticas, ya que en cierto sentido está “sometido” a ellas y las tiene que obedecer.

> El Platonismo reconoce que las figuras geométricas, las operaciones y las relaciones aritméticas nos resultan en alguna forma misteriosas; que tienen propiedades que descubrimos sólo a costa de un gran esfuerzo; que tienen otras que nos esforzamos por descubrir pero no lo conseguimos, y que existen otras que ni siquiera sospechamos, ya que las matemáticas trascienden la mente humana, y existen fuera de ella como una “realidad ideal” independiente de nuestra actividad creadora y de nuestros conocimientos previos. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998).

Hersh (1997), citado en Visokolskis (2012), afirma que el matemático es un científico empírico, no puede inventar, porque todo ya está allí, solo puede descubrir. El conocimiento matemático es objetivo e inmodificable, porque es conocimiento de objetos externos al sujeto, independientes de él, que son de hecho incambiables.

Un ejemplo de esto último es la afirmación atribuida a Arquímedes, en relación a uno de sus resultados respecto al área de una esfera que es demostrado con el rigor euclídeo, citado en Montesino Sirena (1992):

---

[3]Demostración sin palabras.

> Arquímedes es claramente platónico al afirmar que este descubrimiento del área de la superficie esférica “era naturalmente inherente a la esfera, pero que había permanecido oculto a aquellos que antes que yo se habían dedicado al estudio de la geometría” (p.350).

El Logicismo es otra corriente de pensamiento que considera que la matemática es una rama de la Lógica; de esta manera la forma de definir los conceptos matemáticos es mediante términos lógicos, y todo teorema matemático se reduce a un teorema de la lógica mediante el empleo de deducciones. Se le atribuye a Gödel la afirmación “La Lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás, y que contiene las ideas y los principios en que se basan todas las ciencias”.

> Esta corriente reconoce la existencia de dos Lógicas que se excluyen mutuamente: la deductiva y la inductiva. La deductiva busca la coherencia de las ideas entre sí; parte de premisas generales para llegar a conclusiones específicas. La inductiva procura la coherencia de las ideas con el mundo real; parte de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales, siempre provisorias, que va refinando a través de experiencias y contrastaciones empíricas. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998)

El Formalismo es una corriente que reconoce que la matemática es una creación de la mente humana y considera que consisten solamente en axiomas, definiciones y teoremas, como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos.

> […] Para el formalista las matemáticas comienzan con la inscripción de símbolos en el papel; la verdad de la matemática formalista radica en la mente humana pero no en las construcciones que ella realiza internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo. En la actividad matemática, una vez fijados los términos iniciales y sus relaciones básicas, ya no se admite nada impreciso u oscuro; todo tiene que ser perfecto y bien definido. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998)

El Intuicionismo considera la matemática como el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos y también como el estudio de esas construcciones mentales cuyo origen o comienzo puede identificarse con la construcción de los números naturales.

> El principio básico del Intuicionismo es que las matemáticas se pueden construir; que han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998)

El fundador del Intuicionismo moderno es Brouwer (1881-1968), quien considera que en matemática la idea de existencia es sinónimo de constructibilidad y que la idea de verdad es sinónimo de demostrabilidad. Decir de un enunciado matemático que es verdadero equivale a afirmar que tenemos una prueba constructiva de él, esto es, afirmar de un

enunciado matemático que es falso significa que si suponemos que el enunciado es verdadero tenemos una prueba constructiva de que caemos en una contradicción.
Para los intuicionistas no tienen valor las demostraciones indirectas o existenciales puras. Consideran que la única fuente de surgimiento de las ideas matemáticas, y único criterio de verdad es cierta intuición que está afuera del alcance de los sentidos.

El Intuicionismo no se ocupa de estudiar ni de descubrir las formas en que la mente realiza las construcciones y las intuiciones matemáticas, sino que supone que cada persona puede hacerse consciente de esos fenómenos. La atención a las formas cómo estos fenómenos ocurren es un rasgo característico de otra corriente de los fundamentos de la matemática: el Constructivismo.

El Constructivismo está muy relacionado con el Intuicionismo que antes se describió, pues también considera que la matemática es una creación de la mente humana, y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos.

> El Constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía Activa y se apoya en la Psicología Genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma cómo los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998)

2.3 Las pruebas visuales dentro de posiciones clásicas en la filosofía de la matemática.

Las pruebas visuales tal como las definimos, no tienen lugar alguno en posiciones filosóficas formalistas ni en logicistas, dado que la forma de demostrar en matemática en cada una de estas corrientes se identifica con el método axiomático y las cadenas de deducciones. Para el formalismo las demostraciones tienen que ser rigurosas, basadas únicamente en las reglas del juego deductivo respectivo e independiente de las imágenes que asociemos con los términos y las relaciones.

En posiciones realistas en filosofía de la matemática, Visokolskis (2012) hace una caracterización del platonismo como un realismo extremo que presenta ciertas características, una de ellas, en la que queremos hacer foco aquí, es la siguiente:

> P5. Existe un criterio (o método) único de justificación objetiva que determina la existencia (o no) de un supuesto objeto matemático, y la verdad (o falsedad) de una proposición, estipulando si un determinado término refiere o no y si un enunciado o fórmula matemática bien formada es verdadera o no (p.274).

Esta es la forma más tradicional de entender la demostración matemática, casi como única forma de validación, justificación, en matemática. Consideramos al igual que Visokolskis (2012) que ésta es una postura extrema, pues hay situaciones en matemática que no podrían ser caracterizadas de esta manera.
Algunas veces los matemáticos operan con heurísticas y no de manera conclusiva con procedimientos deductivos axiomatizados como propone el realismo extremo. Su objetivo es describir valiéndose de todo cuanto permita dar cuenta de los resultados buscados. Es aquí donde las pruebas visuales podrían ser usadas. En conclusión, pareciera ser que la etapa inicial de los desarrollos matemáticos toma un nivel descriptivo más que inferencial, que el Platonismo no aceptaría.

Por otro lado en posiciones intuicionistas o constructivistas pareciera que la prueba visual por su atributo de repetibilidad, que es condición necesaria para la construcción del objeto matemático, estaría aceptada al menos como fuente de ideas de surgimiento matemático
Cabe destacar que la posición constructivista, al poner atención a las formas cómo el matemático logra cierta intuición sobre los objetos matemáticos, aceptaría de manera completa las pruebas visuales.
Miguel de Guzmán (2004), que nosotros situamos en una posición constructivista, señala que:

> Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo (p.1).

También establece que:

> La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación que llamamos matematización, que se podría describir como sigue: se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de esas percepciones lo que es común, abstraíble y someterlo a una elaboración racional, simbólica que nos permite manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones (p.1).

Las pruebas visuales encuadrarían dentro de una tarea de presentación que usa el matemático y que le permite explicitar un resultado matemático; logrando a través de la prueba visual una visión compacta de las relaciones entre objetos matemáticos.

3 Un ejemplo de producción de conocimiento matemático.

En esta sección se presenta un breve recorrido sobre los argumentos de Arquímedes en cuanto a la solución de dos problemas referidos a volúmenes de sólidos. Se focaliza en la técnica heurística para la obtención de los resultados. Para la solución de uno de los problemas se complementa la argumentación dada por Arquímedes con la rigurosidad de resultados matemáticos demostrados posteriormente a éste.

3.1 Arquímedes y su técnica heurística.

Como hemos señalado en la sección 2.3 algunas veces los matemáticos operan con heurísticas y no de manera conclusiva con el rigor necesario a través de procedimientos deductivos axiomatizados. Esto es, su objetivo es describir valiéndose de todo, incluso utilizando procedimientos faltos de rigor, que le permita dar cuenta de los resultados buscados, que a posteriori adecuará a la rigurosidad matemática pretendida por la comunidad de contexto.

La mayor parte de los resultados de Arquímedes refieren a la determinación de áreas de superficies curvas y volúmenes de sólidos, y en su técnica de demostración aparece el llamado método de exhaución. Dicho método en términos actuales y con el uso del concepto de límite puede ser presentado de la siguiente forma:

> Si para cada *n* natural, dada una cantidad A_n se minora y mayora de manera tal que: $x_n \leq A_n \leq y_n$, $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} A_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$ y si $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, entonces todos los límites son iguales $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A_n = A = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Sin embargo, así como se plantea en Montesino Sirena (1992), para realizar el método de exhaución y la técnica de reducción al absurdo, Arquímedes tiene de antemano la comparación pretendida.

> Durante mucho tiempo se pensó que Arquímedes, al igual que otros matemáticos griegos, escondían la manera de conseguir los resultados que luego probaban con el método de exhaución. En el siglo XVII Wallis, Descartes, Torricelli y otros matemáticos estaban convencidos de que Arquímedes poseía un método heurístico con el que descubría nuevos teoremas y que deliberadamente ocultaba. Cuando en 1906 Heiberg descubrió el Método mecánico, quedó confirmada la existencia de técnicas heurísticas, no legítimas desde el punto de vista del rigor griego, pero plenas de intuición, con las que se conseguían los resultados que después se probaban con todas las de la ley (p.342).

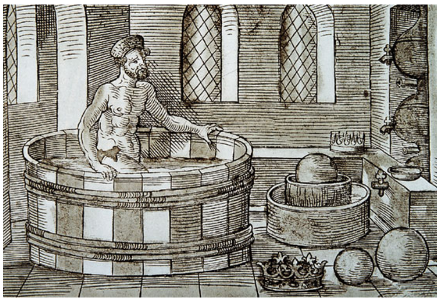
Nos interesa a continuación presentar un problema y la solución dada por Arquímedes; en la resolución del mismo se pone de manifiesto el uso de técnicas heurísticas.

> Problema de la corona: El rey Hierón II de Siracusa le pidió a un joyero local que le hiciera una corona de oro y le dio al artesano el oro que debía usar. Cuando recibió

> la corona ya acabada, el rey sospechó que el joyero había reemplazado parte del oro por plata, un metal más barato. La única forma de determinar la honestidad del joyero era comparar el peso de la corona con su volumen. Cualquier metal tiene un volumen concreto para cualquier peso dado y la relación es diferente para cada metal. La corona se podía medir fácilmente. Pero, ¿cómo se podía medir el volumen?

Según narran los historiadores de la ciencia, para hacer esta tarea, el rey recurrió a uno de sus sabios consejeros, el genial Arquímedes. Este último llegó a una solución del problema de manera casual, mientras se estaba bañando.

Metido en la bañera, Arquímedes observó que en el momento de la inmersión, el agua subió, y se preguntó por qué eso sucedía. Su respuesta fue que el volumen de agua desplazada en la inmersión equivalía al volumen de su propio cuerpo.



Inmediatamente Arquímedes vinculó ambas situaciones, y lo hizo por las semejanzas en ambos. Aplicó un procedimiento heurístico por analogía, a saber:

> Si dos dominios problemáticos son semejantes y uno se soluciona aplicando determinada técnica, entonces es plausible (no necesariamente verdadero) que la misma técnica, rescrita en los términos del otro dominio pueda ser efectiva.

Así, en el caso del problema planteado sobre la corona, Arquímedes determinó que el volumen de este objeto tan preciado para el rey podía medirse colocándolo en un contenedor con agua y calculando la cantidad de agua que se desplazaba.

3.2 Acerca del volumen de una esfera.

Describimos a continuación otro abordaje de Arquímedes para la obtención del volumen de una esfera. Para ello reelaboramos las presentaciones de Helbert y Gay (1998).

Para encontrar el volumen de una esfera Arquímedes compara éste con el volumen de un cierto cono y un cilindro. La forma de compararlo es a través de comparar pesos en una balanza. Para ello utiliza la ley de palancas, a saber:

> *Considere dos objetos, de pesos W_1 y W_2, que se encuentran colgados de una palanca de dos brazos, una a cada lado del centro. Sean L_1 y L_2 las distancias,*

medidas desde el centro, a la que están colgadas dos masas. La balanza se encontrará en equilibrio si el producto de la distancia L y el peso W es el mismo a ambos lados, es decir si $L_1.W_1 = L_2 .W_2.$

La secuencia de argumentos que se presentan pueden ser complementada con las siguientes figuras:

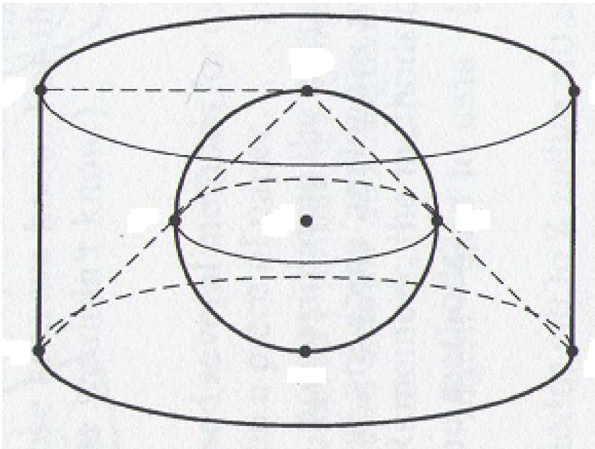


Figura 1 – Gay (p.92).

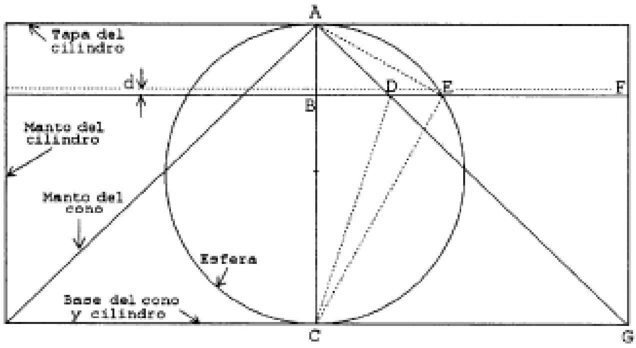


Figura 2 – Massmann (p.34).

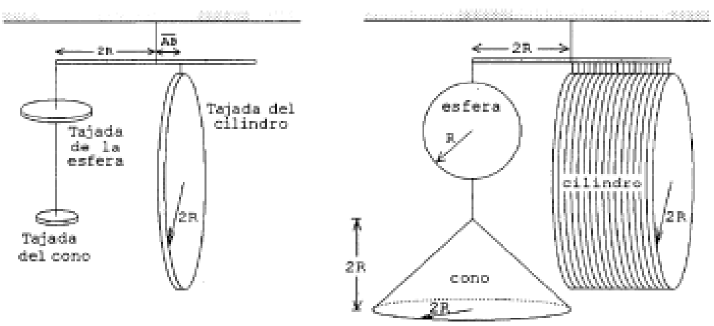


Figura 3 – Massmann (p.35).

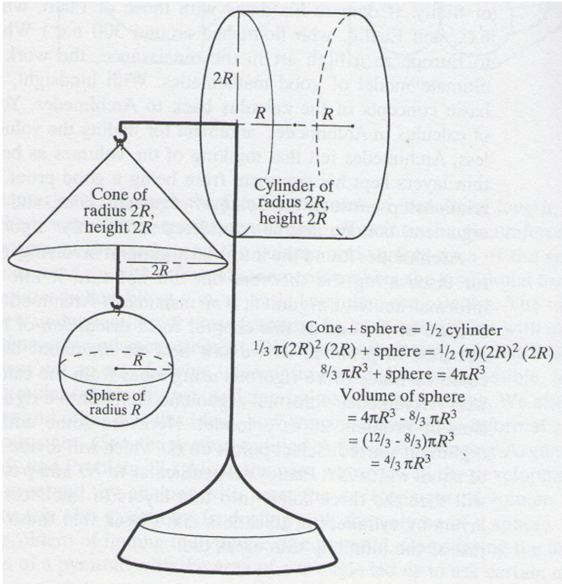


Figura 4 – Gay (p.95).

Para establecer, sin mucho detalle, la comparación que fue realizada por Arquímedes, consideremos una esfera de radio *R*, un cono recto cuya base tiene radio *2R* y un cilindro con la misma base y altura que el cono. Consideremos además la disposición de inclusión de estos cuerpos geométricos tal como lo indica la figura 1.

Consideraremos, tomando la figura 2 para el análisis, una rebanada fina, paralela a la base del cono y a una altura arbitraria. Se obtiene, utilizando el teorema de Pitágoras, el teorema de Apolonio y un simple procedimiento algebraico, que:

$$(BE^2 + BD^2).2R = BF^2.AB$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $\pi.d$ (siendo d el grosor de la tajada) se obtiene finalmente que:

$$(\pi.BE^2.d + \pi.BD^2.d).2R = (\pi.BF^2.d).AB$$

Destacamos en esta igualdad que en el primer paréntesis del lado izquierdo de la igualdad se tiene la suma del volumen de la tajada de la esfera más el de la tajada del cono, mientras que en el paréntesis del lado derecho corresponde al volumen de la tajada del cilindro. Interpretando la igualdad en términos de la ley de palancas tenemos que:

> Si se disponen colgados de una palanca de dos brazos por un lado la masa resultante de la tajada de la esfera junto con la del cono, a una distancia *2R* del centro, y por el otro la masa de la tajada correspondiente al cilindro, a una distancia *AB* del centro, entonces la balanza estará en equilibrio.

Realizando muchísimas tajadas muy finas y realizando para todas ellas el proceso antes descripto, se concluye que tendremos colgadas a un lado de la balanza, a una distancia *2R*, la masa de la esfera y junto con la del cono, mientras que al otro lado, desde el centro de la palanca hasta una distancia *2R*, la masa del cilindro (ver figura 9b).

Sabiendo que el peso es proporcional a su volumen, y usando nuevamente la ley de palanca se deduce que:

(Volumen de la esfera + volumen del cono).(*2R*)=(Volumen del cilindro). (*R)*

Siendo conocidos los volúmenes del cilindro y del cono, se obtiene finalmente el volumen de la esfera.

Utilizando la siguiente generalización del principio de Cavalieri, tomada de Araujo, Keilhauer, Pietrocola y Vavilov (2000), se puede cerrar la argumentación presentada anteriormente.

> Si tres sólidos están comprendidos entre un par de planos paralelos, y si las tres secciones cortadas por los sólidos sobre un plano paralelo a dichos planos son de áreas A, B y C tales que A=B+C, entonces el volumen del primer sólido es igual a la suma de los otros dos volúmenes (p.324).

Para los detalles de la demostración utilizando este principio ver la presentación dada en Araujo y otros (2000) en las páginas 324-326.

4 Las pruebas visuales y elementos teóricos de enfoques de la didáctica de la matemática.

En esta sección se presentan algunas consideraciones de nuestra posición con respecto a la forma de producir conocimiento matemático, en vinculación con un enfoque de la didáctica de la matemática. Se establece el tópico *procesos de visualización* en vinculación con las pruebas visuales. Se aborda además la cuestión acerca de la inclusión de las pruebas visuales en un contexto de enseñanza aprendizaje.

4.1 Nuestro posicionamiento filosófico.

En la sección 2.3 señalábamos al igual que Visokolskis (2012) que hay situaciones en matemática en la que los matemáticos operan con heurísticas, ejemplificamos esto en la sección 3 cuando presentamos la técnica heurística de Arquímedes.
Al igual que Cruz (2006) acordamos en que en el pensamiento de Arquímedes se presentan dos características esenciales:

a. La combinación de consideraciones provenientes de la Matemática Pura y de la Física. Colocando segmentos y secciones de objetos geométricos sobre una balanza, Arquímedes se las ingenió para medir áreas y volúmenes. En otras palabras, sus descubrimientos geométricos fueron hechos bajo un razonamiento físico-experimental.
b. La capacidad de ejecutar sumas infinitas. Por ejemplo, él tomó una esfera y calculó su volumen como la suma infinita de círculos que la componen. Al sumar infinitamente y obtener un valor finito, Arquímedes se adelantó dos milenios, anticipando lo que sería el concepto de límite y el Cálculo Infinitesimal (pp. 12-13).

Esta mirada acerca de la construcción del conocimiento en matemática está en concordancia con un enfoque actual de la didáctica de la matemática como lo es la socioepistemología. Crespo Crespo (2012) establece que desde este enfoque se “ofrece una visión incluyente de las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento, en particular de las argumentaciones matemáticas consideradas como una construcción sociocultural” (p.92).

Así también, referido a la enseñanza de la matemática en contextos escolares, Crespo Crespo, Farfán y Lezama (2010) establecen que “el esquema actual de escuela, inmersa en la sociedad occidental, de base aristotélica, reproduce en la matemática el esquema aristotélico de la ciencia, e intenta que los estudiantes razonen utilizando formas de argumentar deductivas” (p.303).

En las investigaciones realizadas bajo este enfoque, se han detectado en el aula de matemática la presencia de formas de argumentar no deductivas, que dan cuenta de la construcción social de la argumentación matemática, y que por contrapartida en muchas ocasiones no son tenidas en cuenta en el discurso matemático escolar.

Pareciera que las instancias por las que pasa la producción de un conocimiento matemático, la parte formal y la informal, muchas veces no son tenidas en cuenta al momento de enseñar matemática.

4.2 Los procesos de visualización en conexión con las pruebas visuales.

Así como hemos definido el término *prueba visual* en la sección 2.1, aquí haremos hincapié en que la prueba visual requerirá, por parte del lector de la prueba visual, ser mediada por un *proceso de visualización*.

El término *proceso de visualización* es uno de los conceptos que forma parte de un tema de investigación en educación matemática como lo es la *visualización*. Brevemente señalamos que el tema visualización es un campo de investigación con creciente interés actual y ha sido abordado entre otros por Bishop (1989), Clement y Battista (1992), Gutierrez (1996) y Presmeg (2006).

El término “visualización” posee varias acepciones; nosotros entendemos al mismo como el conjunto de procesos y habilidades que el sujeto que aprende realiza al formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, y las utiliza efectivamente para establecer relaciones entre los objetos matemáticos con los que trabaja.

Esta caracterización sobre visualización incluye elementos tales como: imágenes mentales o físicas, procesos para manipular dichas imágenes y habilidades para manipular dichas imágenes. A continuación nos referiremos brevemente a cada uno de estos.

Con respecto a las Imágenes mentales ó físicas:

Gutierrez (1992) señala que en el contexto de la matemática, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

1) Imágenes concretas pictóricas: se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.
2) Imágenes de fórmulas: Consiste en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería por ejemplo en el libro de texto.
3) Imágenes de patrones: Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente) sino alguna relación gráfica de su significado.

4) Imágenes cinéticas: se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
5) Imágenes dinámicas: son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan (pp. 44-45).

Con respecto a los *procesos* para manipular dichas imágenes:

Gutierrez (1992) señala que en la actividad de visualización se manipulan las imágenes visuales según dos tipos de procesos que Bishop (1989) discrimina en *Procesamiento visual e Interpretación de información figurativa*.

A continuación describimos las características de estos procesos tomados de Gutierrez (1992) y ejemplificamos tomando las pruebas visuales ya presentadas en la sección 2, y otras que usualmente aparecen en libros de textos de nivel secundario.

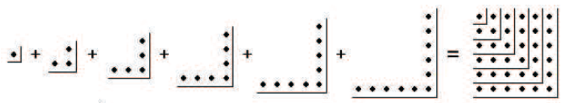
- Procesamiento visual (VP) este es el proceso de conversión, cambio de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras (p.45).

En la prueba visual del ejemplo 2 (presentada en la sección 2. acerca de la suma de una serie infinita) requerirá por parte del lector, entre otros procesos, cambiar de la información abstracta presentada con el símbolo sumatoria y término general, en otra imagen visual con rasgos geométricos (el área de los cuadros pintados en gris).

De $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ en la suma de las áreas de los cuadrados pintados en gris en la siguiente

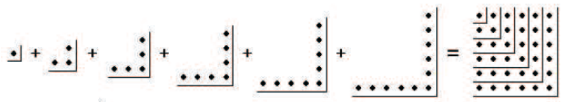
figura

Por otro lado, en la siguiente presentación, que es usual cuando se intenta motivar la demostración utilizando el *principio de inducción matemática*, requerirá por parte del lector de varios procesos.



$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

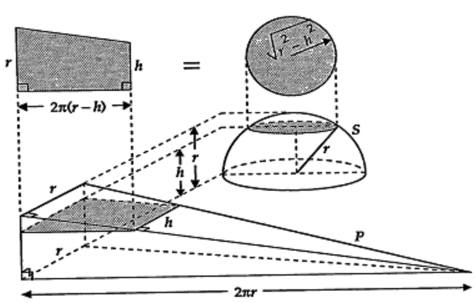
- Uno de ellos es de cambiar del desglose en cuanto “a la forma de contar los puntos” indicado en el primer miembro de la igual en la primera imagen visual, y la otra imagen, al otro lado, que reúne la agrupación espacial de los puntos listados.



- Otro es entender la imagen visual como una representación visual de un caso particular de la información abstracta $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ con n=6.

- <u>Interpretación de información figurativa</u> (IFI): este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen (p.45).

En la prueba visual presentada en la sección 2.1 sobre el volumen de un hemisferio vía el principio de Cavalieri, consideramos a grandes rasgos que el estudiante necesitará extraer la siguiente información.



- La pirámide y la semiesfera trazadas están en un mismo plano.
- Las secciones mostradas refieren a ejemplares genéricos que provienen de la intersección entre un plano paralelo (a una determinada altura) al plano en el que se apoyan las bases de la pirámide y de la semiesfera, con ambos cuerpos.
- Dichas secciones tienen igual área.

Esto a su vez requiere que el lector de la prueba visual tenga diversas habilidades que refieren a la forma de manipular las imágenes visuales.

Con respecto a las habilidades para manipular las imágenes mentales ó físicas:

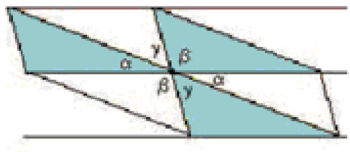
A continuación se describen las siete habilidades consideradas por Del Grande (1990) y que Gutiérrez (1992) las identifica como las que serán utilizadas por los sujetos para la creación y procesamiento de las imágenes visuales.

Para algunas de las habilidades presentadas se pondrá un ejemplo en conexión con una prueba visual, a modo ilustrativo.

1) Coordinación motriz de los ojos: Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
2) Identificación visual: Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.

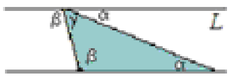
Con respecto a la prueba visual presentada en la sección 2.1 sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, consideramos a grandes rasgos que el estudiante necesariamente requerirá tener ciertas habilidades visuales tales como:

- Identificar en la figura compuesta por mosaicos la disposición de 6 triángulos con un punto en común, 3 celestes y 3 blancos.



Torres Alcaraaz (2004, p.2).

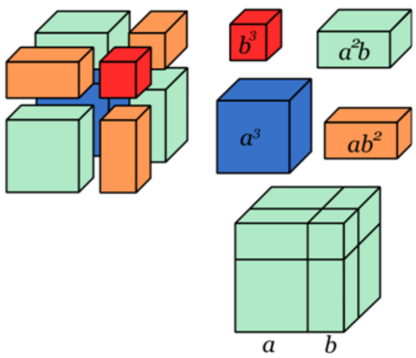
- E identificar en esta figura la siguiente figura.



Torres Alcaraz (2004, p.2).

3) Conservación de la percepción: Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado

En el caso del desarrollo del cubo de un binomio se le presenta al sujeto la necesidad de reconocer la presencia del cubo de arista *a* en las tres imágenes dispuestas.



Consideramos que la presentación con material concreto le permitiría al sujeto prescindir de esta habilidad.

> 4) Reconocimiento de posiciones en el espacio: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador o con otro objeto, que actúa como punto de referencia)
> 5) Reconocimiento de las relaciones espaciales: es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc.
> 6) Discriminación visual: Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
> 7) Memoria visual: Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición (p.46).

En el caso en que el estudiante esté frente a una prueba visual entendemos que el proceso visual involucrará necesariamente el proceso señalado como interpretación de información figurativa, pues deberá reconocer en las representaciones dadas en la prueba las reglas con las que fue construida y así extraer la información que le permite el descubrimiento y comprensión de la propiedad matemática involucrada. Junto con habilidades que se mencionaron anteriormente

Por ejemplo, en cuanto a la prueba visual 3, ya analizada en referencia al proceso de interpretar información figurativa, establecemos además que solamente cuando el lector pueda adicionar la siguiente información le resultará concluyente la prueba visual.

- Utilizando la siguiente proposición, conocida como uno de los principios de Cavalieri, entonces concluirá que ambos cuerpos tienen igual volumen.

Si dos sólidos están comprendidos entre un par de planos paralelos, y cualquier plano secante paralelo a dichos planos corta en figuras de la misma área, entonces los sólidos tienen el mismo volumen.

- Siendo el volumen de la pirámide conocido $Vp = \frac{1}{3} r^2 .2\pi r = \frac{2}{3}\pi r^3$ se tiene que el volumen de la semiesfera es $Vs = \frac{1}{3} r^2 .2\pi r = \frac{2}{3}\pi r^3$

Consideramos aquí brevemente que en un contexto de enseñanza-aprendizaje es imprescindible hacer explícitos los procedimientos que son legítimos realizar y cuáles no. Esta cuestión se retoma en las conclusiones de esta sección.

A continuación describimos algunos de los fragmentos del diálogo que Sócrates encara con el esclavo de Menón. Consideramos que el mismo establece rasgos de una instrucción sobre procesos de visualización.

En el diálogo Sócrates le pregunta al servidor de Menón cómo hay que modificar un cuadrado que es dado inicialmente para duplicar su área, y la solución al problema se consigue en el terreno de la geometría mediante la confrontación e interrogación con figuras en el siguiente orden.

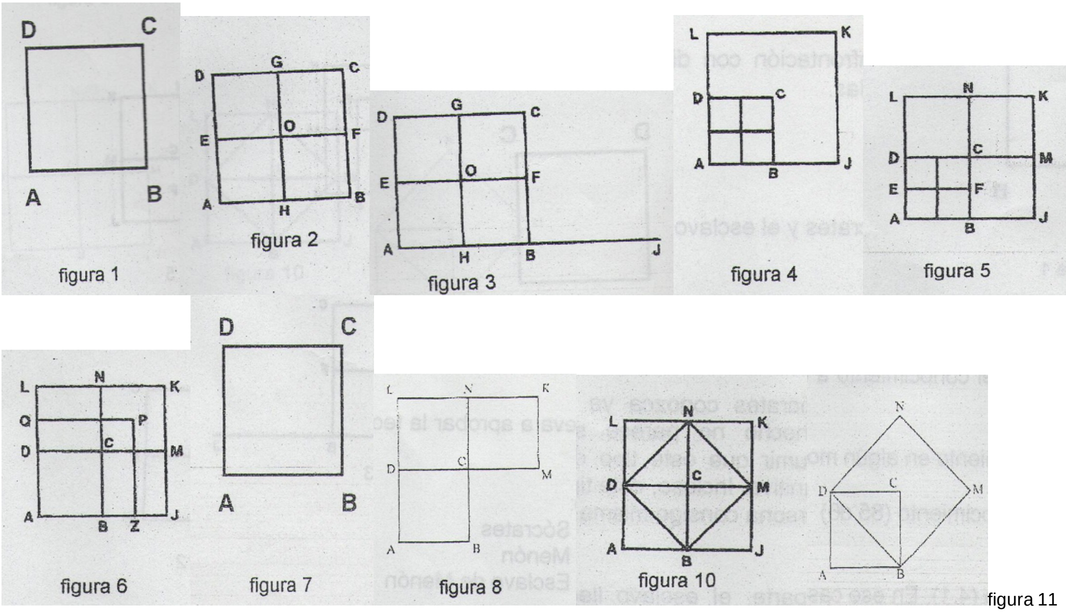


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 figura 5
figura 6 figura 7 figura 8 figura 10 figura 11

En el diálogo Sócrates se asegura que el esclavo tenga presentes las siguientes propiedades que son relevantes para la resolución de problema:

- un cuadrado tiene cuatro lados iguales.
- la diagonal de un cuadrado divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos.
- un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto.

La primera respuesta del servidor de Menón fue un cuadrado de lado dos veces el lado del cuadrado dado (figura 4). Establece luego que la respuesta es incorrecta ya que el área del cuadrado de dos veces el lado, del cuadrado dado, es equivalente al área de cuatro cuadrados equivalentes al dado (figura5). En contraste, lo que él necesita es un cuadrado cuya área sea equivalente al área de dos veces el cuadrado dado, esto es el área de cuatro triángulos (figura 10). Por lo tanto, la solución del problema ahora es evidente: el cuadrado del medio, rotado en 45°, cuyo lado es la diagonal del cuadrado original, contiene cuatro triángulos (figura 11).

4.3 Acerca de la inclusión de las pruebas visuales en la enseñanza de la matemática.

Al igual que Torres Alcaraz (2004) consideramos que en la actualidad aún prevalece una actitud antivisual en referencia a la matemática escrita para la enseñanza.

> Autores como Bourbaki privilegian los aspectos estructurales de la matemática en detrimento de la comprensión intuitiva. Uno de los problemas derivados de este punto de vista es la identificación de la matemática con una de sus facetas. Se le caracteriza, por ejemplo, como una ciencia deductiva en la que el estándar de rigor es la demostración lógica y se le identifica con el método axiomático. De la historia de las matemáticas se resaltan sólo los aspectos que refuerzan el punto de vista adoptado.

Consideramos que la inclusión de las pruebas visuales en la enseñanza de la matemática, en la formación de profesores en didáctica de la matemática, podría resultar enriquecedora para la construcción de una imagen de la matemática separada al menos en una etapa inicial de la rigurosidad matemática pretendida por la comunidad matemática. Teniendo en consideración que la inclusión de las pruebas visuales debiera atender a los siguientes aspectos:

1) No todo conocimiento en matemática se descubre por medio de la inspección y/o análisis de una figura o a través de la evidencia de los sentidos.

2) Para aprehender el contenido matemático de una prueba visual es necesario hacer un trabajo de interpretación de aquello que se presenta a nuestra contemplación.

Una prueba visual posee un nivel de generalidad alto; esto hace que se requiera de un observador activo capaz de realizar procesos[4] y habilidades[5] matemáticas para reconocer las relaciones internas del objeto visto.

Giardino (2010) aporta que las inferencias informales del proceso de visualización toman la forma de transformaciones. Sin embargo, en el rango de todas las posibles transformaciones solo algunas de ellas son legítimas dentro de la teoría considerada. En el caso de las pruebas visuales, solamente cuando el receptor de la misma conoce qué manipulaciones son legítimas y cuáles no lo son, le resultará concluyente la prueba visual.

Las pruebas visuales poseen un nivel de generalidad alto, pues se presenta una combinación de imágenes de distintos tipos y la información que se requiere para derivar la propiedad matemática involucrada no es menor.

---

[4]Como hemos mencionado, Bishop (1989) establece que esta actividad de visualización se realizará según dos tipos de procesos: El procesamiento visual y la Interpretación de información figurativa.
[5]Como hemos señalado, Del Grande (1990) define una serie de habilidades que utilizarían los individuos para la creación y procesamiento de las imágenes visuales.

- Requieren habilidades y procesos de visualización.
- Requiere saber el dominio de transformaciones permitidas.

No dimensionar los procesos y habilidades de visualización implicadas al trabajar con una prueba visual en un contexto de enseñanza-aprendizaje podría posicionar por un lado al estudiante en una desventaja en cuanto a la formas de intervención posibles y por el otro podría darle a la prueba visual solamente un lugar de ilustración.

5 Una propuesta de enseñanza en el ámbito de la formación de profesores en didáctica de la matemática en un aula virtual.

En esta sección se presenta una propuesta de enseñanza en el ámbito de la formación de profesores tomando un posicionamiento filosófico de la matemática y elementos de enfoques de la didáctica de la matemática. Además se presenta un esquema organizativo para el armado de un aula virtual en el que se desarrolla la propuesta de enseñanza.

5.1 Contexto y fundamentación de la propuesta.

Inscribimos la propuesta de enseñanza en una materia de formación de profesores. Ubicamos la misma en la asignatura *Enseñanza de la Matemática I* correspondiente al Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento. La particularidad de la asignatura es que introduce a los estudiantes en la problemática de la enseñanza de la Matemática en el nivel medio y superior.

El contenido de la propuesta es *la indagación respecto de las formas de producción de conocimiento matemático, las pruebas visuales, y su valor cognitivo en el aula de matemática.* La indagación pretendida será desde la matemática, la didáctica de la matemática y la filosofía de la matemática.

Consideramos que llevar a cabo una propuesta de enseñanza en el que el centro de la misma sea la indagación respecto de las pruebas visuales así como de la formas de producción de conocimiento matemático abonará en la concepción que los estudiantes de profesorado formarán de la matemática, y les permitiría una reflexión acerca de decidir tomar, o no, una prueba visual para sus futuros diseños de clases de matemática en el nivel medio y superior.

Consideramos que la discusión en torno a la inclusión de las pruebas visuales en la enseñanza de la matemática podría resultar enriquecedora para la construcción de la imagen de la matemática.
Dentro de las los enfoques actuales de la didáctica de la matemática consideramos los aportes de la socioepistemología. Crespo Crespo (2012) establece que desde este enfoque se ofrece una visión incluyente de las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento, en particular de las argumentaciones matemáticas consideradas como una construcción sociocultural.

Esta mirada acerca de la construcción del conocimiento en matemática está en concordancia con Visokolskis (2012) quien señala que hay situaciones en matemática en la que los matemáticos operan con heurísticas y no de manera conclusiva con procedimientos deductivos axiomatizados.

Por otra parte, el abordaje de las pruebas visuales nos lleva al tema de la visualización en matemática, en particular al análisis de los procesos de visualización que estarán presentes en la tarea de enseñar y aprender cuando es utilizada una prueba visual.

Al finalizar el cursado de la propuesta de enseñanza, esperamos que los estudiantes:

- Reconozcan de forma sintética las principales características de las corrientes filosóficas clásicas de la matemática consideradas.
- Analicen la aceptación de las pruebas visuales a la luz de cada una de las corrientes filosóficas de la matemática consideradas.
- Analicen, con elementos teóricos de didáctica de la matemática una prueba visual para ser trabajada en una situación de enseñanza-aprendizaje.
- Confronten sus hipótesis acerca de
  - la forma de producir conocimiento matemático.
  - la forma de validar un conocimiento matemático en la comunidad matemática.
  - la forma de argumentar apropiada en el aula de matemática dependiendo del escenario escolar.

5.2 Configuración en un contexto virtual

La propuesta se desarrolla en un contexto virtual; la virtud que encontramos en esta modalidad de enseñanza aprendizaje es que le permite al estudiante y al docente tener un registro, continuo y por escrito, de las interacciones que se producen. Esto último es relevante porque nos interesa en particular la evolución que se produce en cuanto a sus hipótesis referidas a la forma de producir y validar un conocimiento matemático, así como la forma de argumentar que él considera apropiada en un contexto áulico (diferenciando o no del escenario escolar considerado). A continuación se ofrece un detalle del material que consideramos necesario para el armado del aula virtual:

- Datos de identificación del aula:

  Asignatura: Introducción a la enseñanza de la matemática I
  Profesor a cargo de la propuesta: Prof. González Víctor.

- Contenidos y recursos de información

  <u>Documentos</u>
  D1) Torres Alcaraz (2004): Lo visual y lo deductivo de las matemáticas.
  D2) Sección 2.1 del trabajo presentado referido a pruebas visuales.
  D3) Sección 2.2 del trabajo presentado referido a corrientes filosóficas.
  D4) Sección 3 del presente trabajo referido a la técnica heurística de Arquímedes.
  D5) Visokolskis, S. (2012). Posiciones realistas en Filosofía de la Matemática. En M. Pochulu, M. Rodríguez (Comps), *Educación*

Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos (pp 269-286). Munro: Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.
D6) Bishop (1989). Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problem in Mathematics.*Vol. 11.1, pp. 7-16.
D7) Crespo Crespo, C. (2007). Los estudiantes ante formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias* 2 (1), 84-100.
D8) Crespo Crespo, C. Farfán, R. M y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educactiva* 13 (3), 283-306.
D9) Del Grande (1990). Spatial sense, *Aritmetic Teacher*. Vol. 37.6, pp. 14-20.

Enlaces
E1)http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/cavalieri/cavalieriesfera.html Breve descripción: se presenta una prueba visual con un deslizador (en geogebra) que permite comparar visualmente el volumen de una semiesfera con el complemento de un cono inscripto en un cilindro.
E2)http://gaussianos.com/video-demostracion-sin-palabras-de-la-formula-para-calcular-el-area-de-un-circulo/ Breve descripción: se presenta un video como prueba visual de la expresión para el área de un círculo, utilizando material concreto (podría ser usado en el foro-clase1 para comenzar el debate)
E3)http://gaussianos.com/la-singular-belleza-de-las-demostraciones-visuales/ Breve descripción: Es un blog referido a pruebas visuales, contiene varias de ellas (podría ser usado en el foro-clase1 para comenzar el debate)
E4) La Prueba visual 3 (prueba sin palabras tomada de Nelsen (1993) sobre el volumen de un hemisferio) presentada en la sección 2.1 del presente trabajo.

- Recursos de comunicación

Dentro de los recursos de comunicación se establecerán encuestas y foros desde el inicio. La participación del estudiante a través de las encuestas y de los foros, le permitirá poner en discusión con sus compañeros, y/o con el docente, sus argumentos entorno a: la forma de producir conocimiento matemático, la forma de validar un conocimiento matemático en la comunidad matemática, y a la forma apropiada de argumentar en el aula de matemática dependiendo del escenario escolar.

Encuestas. La cualidad de las encuestas será que no se podrá ver la siguiente pregunta sin haber respondido a la anterior. Se pretende evitar la posibilidad de inducir una respuesta. Se indagarán tres tópicos al inicio de la propuesta, y se habilitará un foro vinculante a estos tópicos en donde cada participante podrá volver a reformular sus respuestas, a saber:

Tópico 1: Acerca de la forma de producir conocimiento matemático.

¿Hay técnicas de descubrimiento en la actividad de los matemáticos?
¿Tenés información acerca de qué es una prueba visual?
¿Creés que una prueba visual podría ser vista con buenos ojos en la matemática?
¿Usarías una prueba visual en tus clases para la enseñanza de algún contenido particular en la escuela secundaria?

Tópico 2: Acerca de la forma de validar un conocimiento matemático en la comunidad matemática.
¿Depende de la comunidad matemática de contexto?

Tópico 3: Acerca de la argumentación en el aula de matemática.
¿Qué tipos de argumentos consideras apropiados en una clase de matemática? ¿con distinción acerca del nivel educativo?

<u>Foros:</u> Solo dos de las clases tendrán foros de participación. Y habrá un foro específico sobre reflexiones sobre las respuestas dadas a los tópicos de la encuesta inicial, modificando o no sus primeras respuestas.

- Actividades de aprendizaje que requieren una búsqueda en Internet, una elaboración y una publicación a través de un foro, al resto de sus compañeros. También se contempla la entrega directa al docente de algunas actividades.

<u>En la clase 1</u>, se les solicitará una búsqueda simple en Internet sobre *demostraciones visuales* y se les pedirá que compartan los links de los sitios visitados en el foro-clase1, junto con un breve resumen del contenido visitado. Se solicitará además realizar primeramente la lectura del documento D1 del autor Torres Alcaraz, y continuar con la lectura del documento D2.

<u>En la clase 2</u>, se les solicitará tomar una demostración visual de esas que se denominan "demostraciones sin palabras" y ponerle palabras pensando que el compañero deberá entender la propiedad matemática que se presenta; y enviarla al profesor a cargo de la materia.

<u>En la clase 3</u>, se les solicitará tomar la actividad anterior y hacer un análisis de los *procesos de visualización* que llevaría a cabo un estudiante de escuela media para lograr lo pretendido; y enviarla al profesor a cargo de la materia. El análisis realizado deberá fundamentarse con los elementos teóricos a partir de la lectura de los documentos D6 y D9.

Antes de dar comienzo con la clase 4 se compartirá públicamente uno de los trabajos que fueran enviados a partir de lo solicitado en la clase 3 para que entre todos se puedan sumar otros análisis. Uno de los criterios para la elección del trabajo es dependiendo de la precisión del análisis.

En la clase 4, se les solicitará comparar las distintas demostraciones que aparecen en los siguientes enlaces E1 y E4 sobre la expresión que permite conocer el *volumen de una esfera* y ofrecer una reflexión desde la matemática, desde la educación matemática y desde una perspectiva en filosofía de la matemática. Para realizar esta actividad se les solicitará usar los documentos anteriores y sumarle a ellos la lectura del documento D3 y D4 (y para ampliar, de manera optativa, la lectura del documento D5) y del documento D7 (y para ampliar, de manera optativa, la lectura del documento D8).

En la clase 5, se les solicitará tomar un contenido matemático que aparezca en el curriculum de matemática de nivel secundario, buscar una demostración visual referida al tema y diseñar una actividad que permita a los estudiantes de escuela secundaria poner en discusión los argumentos que sostienen o fundamenten lo presentado, junto con la explicitación de los procesos de visualización pretendidos.

- Evaluación.

Se realizará de forma individual a través de la participación en los distintos foros que se presenten. Los criterios para la evaluación que se les harán explícitos a los estudiantes son: 1) Los aportes deberán evidenciar la lectura de las intervenciones previas de sus compañeros, y 2) en el caso de referirse a algún texto leído, ya sea a través de la cita textual o del parafraseo, éstos deberán estar acordes a las normas APA.
Y se evaluará de manera grupal, con no más de tres personas, la producción realizada para la actividad de cierre propuesta en la última clase.

6 A modo de conclusión.

La exploración respecto al uso de las pruebas visuales así como de la formas de producción de conocimiento matemático en conexión con la enseñanza, en un contexto de formación de profesores de matemática, nos permitió:

- Dar cuenta del nivel de generalidad de las pruebas visuales por reunir en la presentación imágenes visuales de diversos tipos, y requerir por parte del lector poner en acción procesos y habilidades de visualización complejas.
- Rescatar de la historia de la matemática las heurísticas de descubrimiento que Arquímedes utilizó, para reforzar la hipótesis de que en la etapa inicial de la producción de conocimiento matemático predomina un desarrollo descriptivo más que inferencial.

El diseño de una propuesta de enseñanza en un contexto virtual nos habilitó a contar con un espacio ágil para poner en discusión escrita cuestiones como la formas de validar un conocimiento matemático y tipos de argumentaciones esperadas en aulas de matemática.

Una cuestión que no fue abordada en este trabajo, por las particularidades del mismo, pero que nos resulta interesante para trabajos posteriores es establecer cómo puede ser aprovechado el trabajo con las pruebas visuales para promover procesos de abstracción y de generalización en matemática.

7 Bibliografía.

Araujo, J., Keilhauer, G. Pietrocola, N. y Vavilov, V. (2000). *Área y Volumen en la geometría elemental*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Borwen, P. & Jörgenson, L. (2002). *Visible Structures in NumberTheory. The American Mathematical Monthly, 108(5), 897-910.* Recuperado el 15 de mayo de 2012 de http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/

Bishop (1989). Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problem in Mathematics.*11 (1), pp. 7-16.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning.En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 161 - 204). NCTM Macmillan, P. C.

Crespo Crespo, C. (2007). Los estudiantes ante formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias* 2 (1), 84-100.

Crespo Crespo. (2012). Socioepistemología. En M. Pochulu, M. Rodríguez (Comps), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp 269-286). Munro: Edumim y Universidad Nacional de General Sarmiento.

Crespo Crespo, C. Farfán, R. M y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educactiva* 13 (3), pp. 283-306.

Cruz, M. (2006). La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana

Doniez S., R. (2000) Integra Nro. 4. Universidad de Viña del Mar.Feldman, D. (2010). La pedagogía de la escolarización. En D. Feldman, *Enseñanza y escuela*. (pp 33-55). Buenos Aires: Paidós.

Del Grande (1990). Spatial sense, *Aritmetic Teacher*.Vol. 37.6, pp. 14-20.

Gay D. (1998). Geometry by Discovery. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Gutierrez, A. (1992). Procesos y Habilidades en visualización espacial, en Gutiérrez A. (ed). Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría. (CINVESTAV, México D.F). pp. 44-59.

Guzmán, M. (2004). LIBRO: Metodología y Aplicaciones de las matemáticas en la E.S.O. ARTÍCULO: El papel de la visualización en el aprendizaje.

Giardino V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. Springer, Topol 29. pp. 29-39

Hanna G. y Sidoli N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. ZDM Mathematics Education 39:73-78.

Massmann H. Arquímedes: El área y volumen de una esfera. Revista del Profesor de Matemáticas. 1: 25-36. Recuperado el 05 de diciembre de 2013 de http://revistadelprofesor.files.wordpress.com/2012/05/revista-del-profesor-de-matematicas_ancc83o-1_nc2b0-1_pag-25-37.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie de Lineamientos Curriculares.* Santa Fe de Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 13 de mayo de 2012 de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Montesino Sirena, J. (1992). Arquímedes y la medida del círculo. Ciencia y cultura en la Grecia Antigua, Clásica y Helenística. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia: La Orotava.

Nelsen, R (1993). Proofs without words. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics. Vol. 6.3. pp 42-46.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education* (pp. 210-213)

Torres Alcaraz, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en las matemáticas. En …, *Miscelánea Matemática 40* (pp 1-27), México: UNAM.

Visokolskis, S. (2012). Posiciones realistas en Filosofía de la Matemática. En M. Pochulu, M. Rodríguez (Comps), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp 269-286). Munro: Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.