

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Métodos de Interpolación en la teoría de las clases de Hölder reversas y de pesos de Muckenhoupt

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Álvaro Corvalán**

Director: Mario Milman

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Fecha: 14 de marzo de 2025

Para los amores de mi vida: Haydeé, Rodrigo, Camila, Leandro y Manuel,
para mi mamá y mi papá.

Agradecimiento

Mi gratitud eterna a Mario por su guía y su *insight*, por su estímulo y su esclarecido consejo, por su periódico acicate y su infatigable paciencia; sin su ayuda este objetivo nunca habría (¡por fin!) llegado a ocurrir.
A mi amiga y coequiper, Ro, por su apoyo constante a lo largo de los años, los proyectos, los informes, y el soporte en los tiempos en que la conclusión de esta tesis me absorbió.

A la matemática y su belleza imperecedera...¹

¹Y alcé mis ojos y miré, y he aquí un hombre con un cordel de medir en la mano. Entonces dije: '¿A dónde vas?' Y me dijo: 'Para medir Ierushalaim, para ver cuál es su anchura y cuál su longitud.' (Zacarías 2 5-6) (Zejariá 2 (5)-(6). Tanaj en Español).

Índice

1. Prefacio	2
2. Definiciones y Notación	4
2.1. Algunas clases de pesos y operadores maximales	4
2.2. Espacios de Banach de Funciones y Reordenamientos decrecientes	8
2.3. Espacios de Lorentz	10
2.4. Interpolación Real y K-funcionales	12
2.5. Clases de Hölder-Reversas para cuplas de espacios de Banach . .	17
2.6. Funciones Casi-Crecientes	19
3. Índices	20
3.1. Índices y casi-crecimiento	20
3.2. Relación con otras definiciones de índices	27
4. Caracterización de clases de pesos por medio de índices	28
4.1. Clases de Hölder-Reversas	29
4.1.1. Clases de Hölder-reversas. Relación entre definiciones clásicas y abstractas	29
4.1.2. Caracterización de clases Hölder-reversas abstractas . . .	36
4.1.3. Caracterización de las clases clásicas RH y RH_p	38
4.2. Clases de Muckenhoupt	40
4.2.1. Índices de reordenamientos versus Índices de K-funcionales y clases de Muckenhoupt	41
4.2.2. Clases A_p y A_∞	44
4.2.3. El caso endpoint	51
4.3. Operadores que actúan en pesos RH y un teorema de interpolación que involucra espacios de extrapolación.	66
4.4. Clases Hölder reversas y pesos no doblantes	71
5. La preimagen de A_p para el Operador de Hardy-Littlewood	72
5.1. La situación en \mathbb{R}^n	72
5.1.1. Algunos resultados	76
5.1.2. Algunas definiciones y propiedades adicionales.	79
5.1.3. Algunos resultados más	81
5.1.4. Algunas aplicaciones	87
5.1.5. La preimagen de $A_p(Q)$ con el operador maximal local . .	91
5.1.6. Una aplicación interesante	97
6. Apéndice	98
6.1. Toolbox	98
6.1.1. Desigualdades integrales y equivalencias	98
6.1.2. Lemas de Cubrimientos y Descomposiciones	99
6.2. Normalización de las normas y un breve tour por los espacios de interpolación y extrapolación	100
6.2.1. Un poco de extrapolación	109
6.2.2. Las constantes en las clases de Hölder abstractas	112
6.3. Marco referencial	119
7. Referencias	121

1. Prefacio

Los tópicos de este trabajo están en la intersección de varias temáticas cada una de interés por si misma. En buena parte giran sobre distintos aspectos acerca de clases de pesos, es decir clases de funciones no-negativas localmente integrables (a menudo conos de funciones), en general agrupadas formando escalas. Ejemplos arquetípicos de esto son las clases A_p de Muckenhoupt y las clases de Hölder reversas RH_r , que en cierto modo están organizadas por mayor o menor integrabilidad o por la posibilidad de revertir -según el exponente- desigualdades obtenidas a partir de la de Hölder. No es nuestra intención repetir aquí el corpus de las teorías de estos pesos, sino, entre otras cosas, observar que dichas escalas pueden en cierto modo interpretarse en términos de las teorías de interpolación y de extrapolación de espacios de Banach de funciones. Cuando se esté tratando con espacios que, además, sean invariantes por reordenamiento es posible señalar la altura en la escala de un elemento mediante índices. A veces es necesario pasar, si es posible, de condiciones locales a condiciones globales, lo que conseguimos mediante una noción de índices para familias de funciones indexadas por conjuntos introducidas en un trabajo recientemente publicado con Mario Milman. Esto permite mirar algunas de las cuestiones planteadas a la luz de este punto de vista. Por otra parte las clases endpoint pueden obtenerse en relación con la teoría de extrapolación de Jawerth-Milman, que de alguna manera resulta el enfoque natural para ello ¹.

Por otra parte, estas clases de funciones están íntimamente ligadas a varios operadores maximales, integrales y singulares. En ese sentido, otro emergente de este trabajo involucra el estudio del comportamiento de los pesos (no solo los de las clases A_p y RH_q) al aplicarles operadores maximales (como M y $M^\#$), en particular acerca de qué se puede decir de aquellos pesos cuya imagen está en dichas clases A_p y RH_q . En particular mostramos que si para un peso u se tiene que $Mu \in A_\infty = RH$, de hecho se tiene la condición, mucho más fuerte: $Mu \in A_1$. Esto lo vemos para pesos u definidos en \mathbb{R}^n y también para el caso local, donde u está definida en un cubo Q_0 y M se toma sobre cubos contenidos en Q -cf. las publicaciones [26] y [27]-. Como corolario del resultado en \mathbb{R}^n obtenemos una caracterización análoga de la clase A_1 análoga a la de Coifman y Rochberg (que afirma que $u \in A_1$ si y solo si $u = k(x) (Mf(x))^\delta$ con k y k^{-1} esencialmente acotadas), pero en términos del operador maximal local y del operador maximal sharp, es decir $w \in A_1$ si y solo si hay constantes $C_1, C_2 > 0$ y $k(x)$ tal que $k, k^{-1} \in L^\infty$ que satisfacen $w(x) = k(x) \left(C_1 \left((w^\alpha(x))^\# \right)^\delta + C_2 (m_\lambda w^\alpha(x))^\delta \right)$. También resulta de esto una nueva demostración del teorema de Wik (que afirma que si $u \in A_p(Q_0)$

¹Una observación sobre terminología: En diversos lugares de este escrito tratamos acerca de espacios o clases de funciones que corresponden a un valor final de ciertos parámetros, y en algunas circunstancias la elección adecuada de cómo interpretar estos casos frontera de manera no ingenua es una cuestión sustancial para obtener resultados no triviales. Para designar estos espacios o clases decidimos incurrir en el anglicismo de importar el adjetivo endpoint, en lugar de hablar de, por ejemplo, “clases límite” ya que “límite” tiene connotaciones adicionales que pueden sugerir interpretaciones ambiguas -no necesariamente se está tomando formalmente límite de alguna manera natural o categórica-.

entonces $u^* \in A_p([0, |Q_0|])$ donde se soslaya, via la equivalencia de Herz-Stein, la necesidad de obtener un cubrimiento ad-hoc de tipo Bagby-Kurtz. Adicionalmente interpretamos en términos de índices la acción sobre los pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood, esto y la condición $A_p(Q_0)$ en términos de funcionales K vincula estos resultados con los de las clases de Hölder reversas RH_p .

También consideramos las clases de Hölder reversas generalizadas $RH_{L^{p,q}}$ definidas en función de las normas de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. Como el análisis general de las clases RH_r muestra que éste está controlado por los índices, que a su vez vienen determinados por el exponente principal de los espacios de interpolación $X_{\theta,q}$, es natural conjeturar que el exponente principal p de las normas $\|\cdot\|_{p,q}$ determinará el orden de las clases de Hölder reversas, en tal sentido se prueba que $RH_{L^{p,q}} = RH_p$ para $1 < p \leq q < \infty$ o $1 < p < q = \infty$.

Otra cuestión interesante es precisar definiciones adecuadas de las clases endpoint para estas familias. En cierta manera, es conveniente eludir el reemplazo trivial del exponente límite en las definiciones de las normas para las clases mencionadas utilizando, en cambio, la norma $LLogL$, y vemos que, de este modo, obtenemos naturalmente las clases adecuadas cuando el exponente p tiende a 1 en términos de la teoría de extrapolación. De hecho, para las clases decrecientes RH_p (es decir $RH_p \supset RH_q$ si $p < q$) se tiene que $RH_{LLogL} = \bigcup_{p>1} RH_p := RH$

-y en ese sentido podríamos decir que $RH_p \rightarrow RH_{LLogL}$ cuando $p \rightarrow 1$). También se tratan las clases de Hölder abstractas $RH_{\theta,p}$. A través del teorema de reiteración de Holmstedt se puede interpretar interpretar $RH_{0,1}$ como un caso límite de $RH_{\theta,1}$. Se tiene que $RH_{0,1} = \{w \in X_0 / \exists C > 0 : \int_0^t K(s, w, X) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, X), \forall t \in (0, n_{0,1})\}$ donde $n_{0,1} = \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$ es la norma de la inmersión $X_1 \subset X_0$. El tipo de desigualdad integral de la definición está estrechamente ligada a la definición que damos de índices a través de un lema clave (Lema 97).

Es muy interesante la caracterización de $RH_{0,1}$ en terminos extrapolatorios. La cuestión de la mejora en la integrabilidad en el sentido del célebre lema de Gehring puede establecerse de manera natural usando la funcional K (como se muestra en [81]), aquí también vemos que en términos de las desigualdades integrales vinculadas a los índices dicho resultado es inmediato. Algunos de los mencionados resultados acerca de índices, clases de Hölder reversas -clásicas y abstractas- fueron difundidos en [32].

Otras clases relacionadas con el lema de Gehring y con la inversión de desigualdades de Hölder se obtienen en términos de las condiciones de Gurov-Reshetnyak, las clases GR_ε (que tienen conexiones interesantes con el operador maximal sharp, las aplicaciones Quasi-Conformes, y propiedades de integrabilidad superior), y la clase de pesos BMO_* (los pesos $w \in BMO$ tales que $\frac{1}{w} \in BMO$). En ambos casos estudiamos la relación entre los índices mencionados más arriba y la pertenencia a GR_ε o a BMO_* .

Hay numerosas relaciones de estos resultados con otros, vinculados en estas teorías, que también iremos mencionando y refiriendo dentro de lo posible en la bibliografía citada. Para organizar un poco estas referencias y para situar el trabajo en el marco de la literatura y el “estado del arte” hemos agregado una sección, en el Apéndice, reuniendo allí la información al respecto.

En fin, este puede ser un buen “endpoint” para la introducción, de modo que proponemos avanzar al texto en sí.

2. Definiciones y Notación

2.1. Algunas clases de pesos y operadores maximales

En esta sección introducimos algunas de las definiciones necesarias, notación y otras convenciones usadas.

Notación 1 Dadas dos expresiones A y B con un mismo dominio de aplicación, denotaremos $A(\cdot) \lesssim B(\cdot)$ cuando existe una constante $C > 0$ tal que $A(X) \leq CB(X)$ para todo X del dominio de dichas expresiones. También escribiremos $A(\cdot) \approx B(\cdot)$ si es $A(\cdot) \lesssim B(\cdot)$ y $B(\cdot) \lesssim A(\cdot)$.

Un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ será siempre un cubo de lados paralelos a los ejes coordenados.

Definición 2 Un peso será una función no negativa, localmente integrable en \mathbb{R}^n .

Nos interesa a continuación presentar algunas clases de pesos que serán relevantes en lo que sigue.

Definición 3 Un peso w pertenece a la clase Hölder reversa RH_p , con $1 < p < \infty$ si existe una constante $C > 0$ que depende de w tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx. \quad (1)$$

Si $w \in RH_p$ se denota

$$\|w\|_{RH_p} = \inf\{C : \text{se cumple (1)}\}. \quad (2)$$

y se lo suele llamar norma RH_p -aunque en general no es una norma-. Está claro que en 2 el ínfimo es de hecho un mínimo.

Observación 4 Nótese que, debido a la desigualdad de Hölder, se cumple siempre que $\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, es decir que la desigualdad opuesta se cumple con constante 1, de ahí el nombre de las clases RH_p .

Observación 5 También, a consecuencia de la desigualdad de Hölder, se tiene que si $p \leq q$ vale que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$ y por lo tanto es inmediato que $RH_p \supset RH_q$

Notación 6 Se nota habitualmente $RH = \bigcup_{p>1} RH_p$

Observación 7 La desigualdad 1 se cumple trivialmente para todo peso si $p = 1$, de modo que una definición adecuada de una clase endpoint requiere otro punto de vista como veremos abajo.

Cabe notar que la desigualdad 1 implica una desigualdad inversa para operadores maximales.

Recordemos primero la siguiente:

Definición 8 Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ el operador maximal de Hardy-Littlewood Mf está dado por $Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$

Análogamente si $r > 1$ se define $M_r f(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}}$.

A veces interesan considera los operadores maximales donde el dominio está restringido a un cubo fijo:

Definición 9 Si Q_0 es un cubo fijo de \mathbb{R}^n , el operador maximal local de Hardy-Littlewood para el cubo Q_0 es:

$$M_{Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q (w\chi_{Q_0}(x)) dx$$

, y análogamente se define también para $1 \leq p < \infty$:

$$M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w\chi_{Q_0}(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Observación 10 Es también una fácil consecuencia de la desigualdad de Hölder que si $s < r$ entonces $M_s f(x) \leq M_r f(x)$ en casi todo punto. En particular para cualquier peso w se tiene $Mw \leq M_r w$ a.e. En caso de que w esté en RH_r , tomando supremos en 1 se tiene una desigualdad reversa $M_r w \leq CMw$ a.e. para alguna constante $C > 1$.

Observación 11 Un resultado importante que detallaremos más adelante, el Teorema de Coifman-Rochberg, implica que para todo peso w y $r > 1$ vale que $M_r w \approx M \circ M_r w$ a.e., es decir $M_r \approx M \circ M_r$; para $r = 1$, sin embargo, se tiene que $M \circ M$ no es equivalente a M sino que se tiene que $M \circ M \approx M_{LL\log L}$ (cf. [34]). Esto está vinculado con la cuestión de que la clase RH vista como unión de las clases anidadas RH_p es $RH_{LL\log L} = RH = \bigcup_{p>1} RH_p$. Veremos enseguida como se define $RH_{LL\log L}$ en términos de las normas $\|\cdot\|_{LL\log L(Q)}$, que a su vez se usan para definir $M_{LL\log L}$. Por otra parte, si tomáramos de manera ingenua $p \rightarrow 1^+$ en 1 quedaría trivialmente cierta con $C = 1$ y valdría para toda $f \in L^1_{loc}$. Las normas $\|\cdot\|_{LL\log L(Q)}$ y el operador $M_{LL\log L}$ se definen en términos de promedios de normas de Luxemburg:

Sea $\Psi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ y $\Psi(\infty) = \infty$ se dice que Ψ es una función de Orlicz. Si además Ψ es convexa diremos que es una función de Young.

Definición 12 Sea Ψ una función de Young y Q un cubo de \mathbb{R}^n , f medible, se define su Ψ -norma de Luxemburg:

$$\|f\|_{\Psi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_Q \Psi \left(\frac{|f(y)|}{\lambda} \right) dy \leq 1 \right\}$$

Definición 13 Se dice que $f \in L^{\Psi}(Q)$ si $\|f\|_{\Psi} < \infty$. Notaremos indistintamente $\|f\|_{\Psi} = \|f\|_{L^{\Psi}} = \|f\|_{L^{\Psi}(Q)}$ si no hay riesgo de confusión.

Observación 14 Es fácil ver que si $\Psi(t) = t^r$ se tiene que $\|f\|_{\Psi} = \|f\|_{L^r(Q)} = \left(\int_Q |f(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}$

De manera semejante se definen los Ψ -promedios:

Definición 15 Sea Ψ una función de Young y Q un cubo de \mathbb{R}^n , se define el Ψ -promedio en Q como: $\|f\|_{\Psi(Q, \frac{dx}{|Q|})}$

$$\|f\|_{\Psi, Q} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|f(y)|}{\lambda} \right) dy \leq 1 \right\} = \|f\|_{\Psi(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

, es decir la norma de Luxemburg de f con Ψ para la medida $\frac{dx}{|Q|}$.

Observación 16 Es una consecuencia inmediata del teorema de Fatou que, en la definición anterior, si $\lambda = \|f\|_{\Psi(Q, \frac{dx}{|Q|})}$ resulta $\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|f(y)|}{\lambda} \right) dy \leq 1$. Si además Ψ cumple la condición (Condición Δ_2):

$$\exists c > 0 : \Psi(2x) \leq c\Psi(x)$$

se tiene que en tal caso vale la igualdad:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{|f(y)|}{\|f\|_{\Psi(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) dy = \|f\|_{\Psi(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

Observación 17 En este contexto si $\Psi(t) = t^r$ es $\|f\|_{\Psi, Q} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}$.

Notación 18 Si $\Psi(t) = t \log(e+t)$ se nota $\|\cdot\|_{L \text{Log} L(Q)}$. Generalizando, también se nota para $p > 0$: $\|\cdot\|_{L^p \text{Log} L(Q)}$ para $\Psi(t) = (t \log(e+t))^p$.

Observación 19 En realidad para cumplir $\Psi(1) = 1$ haría falta multiplicar por una constante tomando $\frac{1}{\log(e+1)} t \log(e+t)$ pero trabajaremos con la definición habitual $\Psi(t) = t \log(e+t)$; la única diferencia es una constante multiplicativa para las normas y promedios. Es decir que se define:

Definición 20

$$\|f\|_{L(\text{Log} L)(Q, \frac{dx}{|Q|})} = \inf \left\{ r : \frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{|f(y)|}{r} \log \left(e + \frac{|f(y)|}{r} \right) dy \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

Hay otras maneras equivalentes de introducir esta norma, más adelante prestaremos algunas consideraciones a esta cuestión.

A continuación ya podemos definir $RH_{L \text{Log} L}$

Definición 21 Un peso w pertenece a la clase $RH_{L \text{Log} L}$ si existe $C > 0$, dependiendo de w , tal que para todos los cubos Q se tiene

$$\|w\|_{L(\text{Log} L)(Q, \frac{dx}{|Q|})} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx, \quad (4)$$

en dicho caso notamos:

$$\|w\|_{RH_{L \text{Log} L}} = \inf \{ C : \text{se cumple (4)} \}. \quad (5)$$

Definición 22 Si Ψ es una función de Young y si una función f medible es tal que $f \in L^\Psi(Q)$ para todo $Q \subset \mathbb{R}^n$ definimos, en término de los Ψ -promedios el operador maximal M_Ψ dado por:

$$M_\Psi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Psi, Q}$$

Observación 23 Con esta notación se tiene que si $\Psi(t) = t^r$ es $M_\Psi f(x) = M_r f(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}}$ y en particular, con $r = 1$, el operador maximal de Hardy-Littlewood M corresponde a M_Ψ para la función identidad $\Psi(t) = t$. Por otra parte, de este modo, queda definido $M_{L \text{Log} L}$ dado por

$$M_{L \text{Log} L} f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{L(\text{Log} L)(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

Observación 24 Como ya mencionamos, usando la desigualdad de Hölder, es trivial ver que si $0 < r < p < \infty$ entonces es $M_r f(x) \leq M_p f(x)$. Además son conocidas (c.f. por ejemplo [34]) las relaciones $M_p \circ M_r \approx M_r \circ M_p \approx M_p$ si $r < p$, y $M_p \circ M_p \approx M_{L^p \text{Log} L}$. En particular $M \circ M_p = M(M_p) \approx M_p$ si $p > 1$ y $M \circ M \approx M_{L \text{Log} L}$.

Hay una estrecha conexión entre las clases de pesos Hölder reversas y las clases de pesos A_p de Muckenhoupt a las que también nos referiremos. Introducimos a continuación las respectivas definiciones:

Definición 25 Se dice que un peso $w \in A_p$ para $1 < p < \infty$ si existe una constante positiva $C > 0$ que depende solamente de w tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ vale que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C. \quad (6)$$

Para $p = 1$ se dice que $w \in A_1$ si existe $C > 0$ que depende solo de w tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in Q$ vale que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq Cw(x). \quad (7)$$

Una condición equivalente para que $w \in A_1$ es que exista $C > 0$ que depende solo de w tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ valga que

$$Mw(x) \leq Cw(x),$$

siendo M el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Observación 26 Las clases A_p se denominan clases de pesos de Muckenhoupt. Dichas clases de pesos han sido extensamente estudiadas ya que, entre otras cuestiones, una condición necesaria y suficiente para que M sea de tipo débil (p, p) con respecto al peso w para $1 \leq p < \infty$ es que $w \in A_p$; además es fácil ver, por interpolación, que para $p > 1$ también la condición $w \in A_p$ es necesaria y suficiente para que w esté acotado en $L^p(w)$.

Observación 27 Al contrario de las clases de Hölder reversas, las clases A_p son crecientes en el sentido de la inclusión, es decir $A_p \subset A_q$ si $1 \leq p < q$.

Notación 28 Se nota habitualmente $A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p = \bigcup_{p > 1} A_p$

Observación 29 Los pesos en A_∞ tienen la útil propiedad de que las medidas que inducen, $\mu := w(x)dx$, son doblantes. Esto significa lo siguiente: una medida definida en un cubo Q_0 de \mathbb{R}^n (finito o infinito, incluyendo o no sus lados, y admitiendo como posible caso a todo \mathbb{R}^n), si existe una constante $c > 0$ tal que si $x \in Q_0$ y $B(x, r)$ y $B(x, 2r)$ están incluidas en Q_0 entonces $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$. Equivalentemente se puede pedir que $\exists c > 0$ tal que si Q y $2Q$ (el cubo con el mismo centro de Q y cuyo lado es el doble del de Q) y $Q \subset 2Q \subset Q_0$ entonces $\mu(Q) \leq c\mu(2Q)$ -en general la c que sirve para las bolas no es necesariamente la misma c que para los cubos-.

Más adelante reseñaremos otras propiedades de las clases de pesos Hölder reversos y de pesos de Muckenhoupt que necesitamos.

2.2. Espacios de Banach de Funciones y Reordenamientos decrecientes

Varios de los espacios de funciones que nos interesará estudiar son Espacios de Banach de Funciones (BFS), y particularmente BFS invariantes por reordenamientos. Introducimos solamente las definiciones que nos serán necesarias y, si hace falta, iremos mencionando en el desarrollo las propiedades elementales que fueren necesarias ([24] es una referencia para el tratamiento general de estos temas)

Definición 30 Sea (R, μ) un espacio de medida totalmente σ -finita, \mathcal{M} la clase de funciones μ -medibles de R en $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (o en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, si requiriremos trabajar con escalares complejos). Sea además $\rho: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que si $h \in \mathcal{M}$ es $\rho(h) := \rho(|h|)$, y si $f \in \mathcal{M}^+$ (es decir $f \in \mathcal{M}$ y $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) ρ cumple:

i) $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$, $\rho(af) = a\rho(f) \forall a \geq 0$, y $\rho(f) = 0$ si y solo si $f = 0$ μ -a.e

ii) $0 \leq g \leq f$ μ -a.e implica $\rho(g) \leq \rho(f)$

iii) $0 \leq f_n \uparrow f$ μ -a.e implica $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ (donde \uparrow indica convergencia monótona creciente)

iv) $\mu(E) < \infty$ implica $\rho(\chi_E) < \infty$ para todo $E \subset R$ medible.

v) $\mu(E) < \infty$ implica $\int_E f d\mu < C_E \rho(E)$ donde $C_E \in (0, \infty)$ depende de E y de ρ , pero no de f , para todo $E \subset R$ medible.

En este caso diremos que $X = \{f \in \mathcal{M} : \rho(f) < \infty\}$ es un espacio de funciones de Banach (BFS), y notaremos $\|f\|_X = \rho(|f|)$, y ρ se dirá una norma de funciones.

Muchos espacios usuales son BFS. Por ejemplo, si $\rho(f) = \left(\int_R f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ para f positiva obtenemos $X = L^p(R, d\mu)$ y si $\rho(f) = \text{ess sup}\{f\}$ (el supremo esencial) para f positiva obtenemos $X = L^\infty(R, d\mu)$. Luego veremos más ejemplos.

Definición 31 Sea (R, μ) como en la definición anterior y $f \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(R, \mu) = \{h \in \mathcal{M} : h \text{ es finita } \mu\text{-a.e.}\}$ se llama función de distribución de f a λ_f :

$[0, +\infty)$ dada por $\lambda_f(t) := \mu(\{x \in R : |f(x)| > t\})$ para $t \geq 0$. Es fácil ver que λ_f es no-negativa, decreciente y continua por derecha.

Definición 32 En la misma situación, sea $f \in \mathcal{M}_0$, llamaremos reordenamiento decreciente de f a la función $f^* : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ dada por $f^*(t) = \inf\{s : \lambda_f(s) \leq t\}$.

Observación 33 Usaremos la convención de que $\inf \emptyset = \infty$.

Observación 34 Una manera equivalente de definir $f^*(t)$ es

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \inf_{x \in E} |f(x)|$$

donde el supremo se toma sobre los conjuntos E medibles.

Observación 35 Es fácil ver que también f^* es no-negativa, decreciente y continua por derecha. Para esta y otras propiedades elementales referiremos a [24]

Definición 36 Sean (R_1, μ_1) y (R_2, μ_2) espacios de medida totalmente σ -finita y sean $f_1 \in \mathcal{M}_0(R_1, \mu_1)$ y $f_2 \in \mathcal{M}_0(R_2, \mu_2)$ se dice que f_1 y f_2 son equimedibles si y solo si $\lambda_{f_1}(t) = \lambda_{f_2}(t) \forall t \geq 0$. Equivalentemente, f_1 y f_2 son equimedibles si y solo si $f_1^* = f_2^*$.

Observación 37 Claramente las funciones f y f^* son equimedibles considerando a f^* con respecto de la medida de Lebesgue, $|\cdot|$, en $[0, +\infty)$ y además se tiene que $\lambda_f(t) = \mu(\{x \in R : |f(x)| > t\}) = |\{s \in [0, +\infty) : f^*(s) > t\}| = \lambda_{f^*}(t)$.

Observación 38 Por la observación anterior, claramente el reordenamiento decreciente de f^* es de nuevo f^* , es decir $(f^*)^* = f^*$. No debe confundirse entonces $(f^*)^*$ con la siguiente:

Definición 39 Sea $f \in \mathcal{M}_0$ y f^* su reordenamiento decreciente, denotamos a $f^{**} := \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$, la función maximal de f .

Observación 40 Es claro que f^{**} es no negativa, decreciente y continua en $(0, +\infty)$, que $f^{**} \geq f^*$ y que $f^{**} \equiv 0$ si y solo si $f = 0$, μ -a.e.

Definición 41 El operador P definido por $Pu(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds$ para $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ se denomina operador de Hardy.

Observación 42 Tenemos entonces que $f^{**} = P(f^*)$.

Definición 43 Sea X un espacio de funciones de Banach con norma de funciones ρ tal que $\rho(f) = \rho(g)$ para todo par de funciones equimedibles entonces diremos que X es un espacio invariante por reordenamientos (r.i).

También haremos uso del siguiente resultado debido a Hertz y Stein que vincula al reordenamiento decreciente del operador maximal de Hardy-Littlewood de una función f , es decir $(Mf)^*$, con el operador maximal de Hardy del reordenamiento decreciente de f , es decir $P(f^*)$, o sea f^{**} (confrontar con [24], teorema 3.8).

Teorema 44 (Herz-Stein) Dada f localmente integrable en \mathbb{R}^n vale que para todo $t > 0$ es:

$$(Mf)^*(t) \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

, donde la equivalencia ocurre con constantes que sólo dependen de n . Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $t \in (0, \infty)$ vale que

$$(Mf)^*(t) \approx f^{**}(t) \quad (8)$$

, donde las constantes de la equivalencia sólo dependen de n .

Pensando en $X = L^1$ el operador maximal de Hardy-Littlewood maximal puede ser escrito en términos de la norma $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1}$ ya que $Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{L^1}}{\|\chi_Q\|_{L^1}} = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_X}{\|\chi_Q\|_X}$. Para un espacio de funciones de Banach en general, se define análogamente:

Definición 45 Sea f medible, llamamos

$$M_X f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_X}{\|\chi_Q\|_X}$$

, donde el supremo, como es de esperar es sobre los cubos de \mathbb{R}^n con lados paralelos a los ejes coordenados.

2.3. Espacios de Lorentz

Definición 46 Sea (R, μ) un espacio de medida, se denota $L(p, q)(R)$ o también $L^{p,q}(R)$ al espacio de funciones medibles que satisfacen que $\|f\|_{L(p,q)} < \infty$ siendo $1 < p \leq \infty$ y $0 < q < \infty$

$$\|f\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} f^*(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} \{t^{1/p} f^*(t)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

, es decir $L(p, q) = \{f \in \mathcal{M}_0(R, \mu) : \|f\|_{p,q} < \infty\}$ y es fácil ver que (cf. [24]) si $p = q$ con $0 < p \leq \infty$ es $L(p, p) = L^p$, y $\|f\|_p = \|f^*\|_p = \|f\|_{L(p,p)}$. Si se sobreentiende el espacio (R, μ) escribiremos simplemente $L(p, q)$ o $L^{p,q}$.

Observación 47 Teniendo en cuenta que el reordenamiento decreciente se escribe en términos de la función de distribución, a veces es útil escribir, a partir de esta, la norma en $L^{p,q}$; tenemos:

$$\|f\|_{L(p,q)} = \begin{cases} \left(p \int_0^\infty \lambda_f(s)^{\frac{q}{p}} s^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < s < \infty} \{s \cdot \lambda_f(s)^{1/p}\} & \text{si } q = \infty \end{cases} \quad (9)$$

Para $q = \infty$ sale de tomar para $t > 0$: $s = f^*(t)$ y $t = \lambda_f(s)$; si $q < \infty$ para funciones simples donde f y por lo tanto también f^* toman valores $a_N >$

$a_{N-1} > \dots > a_1 > a_0 = 0$ y tomando $b_N > b_{N-1} > \dots > b_1 > b_0 = 0$ donde $|b_{j+1} - b_j| = \mu(\{t \in (0, \infty) : f^*(t) = a_{N-j}\})$ sale fácilmente de las igualdades

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L(p,q)} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=0}^N a_{N-j}^q \int_{b_j}^{b_{j+1}} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q} \sum_{j=0}^N a_{N-j}^q (b_{j+1}^{\frac{q}{p}} - b_j^{\frac{q}{p}}) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \sum_{j=0}^N b_j^{\frac{q}{p}} (a_{N-j+1}^q - a_{N-j}^q) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q} \sum_{j=0}^N b_j^{\frac{q}{p}} (a_{N-j+1}^q - a_{N-j}^q) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \sum_{j=0}^N b_j^{\frac{q}{p}} q \int_{a_{N-j}}^{a_{N-j+1}} s^{q-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(p \int_0^\infty \lambda_f(s)^{\frac{q}{p}} s^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Para f medible se toma una sucesión de funciones simples f_n tales que $f_n \uparrow |f|$ en casi todo punto, se usa que en tal caso $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$ (por ejemplo [24] proposiciones I.1.3 y I.1.7) y usando el teorema de convergencia monótona de Lebesgue se obtiene (9) en el caso general.

Observación 48 A pesar de la notación, en general, $\|\cdot\|_{L(p,q)}$ solo es una norma si $1 \leq q \leq p < \infty$ o si $p = q = \infty$, pero si se reemplaza f^* por f^{**} en la definición de $\|f\|_{L(p,q)}$ se obtiene una cantidad equivalente $\|f\|_{p,q}$ que sí es una norma, es decir $\|\cdot\|_{p,q} \approx \|\cdot\|_{L(p,q)}$. Más concretamente, si definimos

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} f^{**}(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} \{t^{1/p} f^{**}(t)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

se tiene que $\|\cdot\|_{p,q}$ es una norma, y si $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ entonces $\|f\|_{L(p,q)} \leq \|f\|_{p,q} \leq p' \|f\|_{L(p,q)}$, y $L(p,q) = \{f \in \mathcal{M}_0(R, \mu) : \|f\|_{p,q} < \infty\}$.

Observación 49 Nótese que $L^p = L^{p,p}$ pero en general $\|f\|_{p,p} \neq \|f\|_p$. Lo que tenemos es $\|f\|_{p,p} \approx \|f\|_p$ ya que $\|f\|_p = \|f\|_{L(p,p)} \leq \|f\|_{p,p} \leq p' \|f\|_{L(p,p)} = \|f\|_p$ (véase más abajo la observación 73)

Definición 50 En términos de los operadores maximales M_X para $X = L(p,q)$ para $0 < p \leq q < \infty$ se define usualmente -y así lo usaremos-:

$$M_{p,q}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{1/p}} \quad ((p,q))$$

Esto difiere ligeramente de la definición dada por 45 es decir $\sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{\|\chi_Q\|_{p,q}}$ pero

puesto que es claro que $\chi_Q^* = \chi_{[0,|Q|)}$ de donde $\|\chi_Q\|_{L(p,q)} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \chi_Q^*(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{|Q|} t^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{q}{p} t^{\frac{q}{p}} \Big|_0^{|Q|} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} |Q|^{1/p}$ y puesto que $\|\chi_Q\|_{L(p,q)} \approx \|\chi_Q\|_{p,q}$

tenemos también $|Q|^{1/p} \approx \|\chi_Q\|_{p,q}$ de donde $M_{p,q}f(x) \approx M_{L(p,q)}f(x)$ y está claro que si $p = q$ también recuperamos una cantidad equivalente a la de la definición de M_p que introdujimos más arriba, es decir

$$M_{p,p}f(x) \approx M_p(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

puesto que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p dy = \|f\chi_Q\|_{L(p,p)}$$

y

$$\|f\chi_Q\|_p = \|f\chi_Q\|_{L(p,p)} \leq \|f\chi_Q\|_{p,p} \leq p' \|f\chi_Q\|_p$$

; la primera desigualdad es inmediata por ser $f\chi_Q^*(t) \leq f\chi_Q^{**}(t)$ para todo $t > 0$ y la segunda sale usando una de las desigualdades de Hardy (ver apéndice).

Definimos ahora clases de Hölder reversas en el contexto de los Espacios de Lorentz:

Definición 51 Sean $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, decimos que un peso w pertenece a la clase Hölder reversa $RH_{p,q}$, con $1 < p < \infty$ si y solo si existe $C > 0$, que depende de w , tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{1/p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx. \quad (10)$$

Si $w \in RH_{p,q}$ denotamos

$$\|w\|_{RH_{p,q}} = \inf\{C : \text{se cumple (10)}\}$$

2.4. Interpolación Real y K-funcionales

En esta sección presentamos algunas cuestiones de interpolación en el contexto de espacios de Banach y la funcional K . Evitando generalizaciones más amplias solamente introduciremos las definiciones que sean necesarias más adelante.

Definición 52 Una dupla de espacios de Banach X_0 y X_1 constituyen una dupla compatible (X_0, X_1) si existe un espacio vectorial topológico de Hausdorff \mathcal{U} tal que $X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}$ y $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}$ (donde $X_j \hookrightarrow \mathcal{U}$ significa que X_j son subespacios de \mathcal{U} y que la inclusión es continua)

Observación 53 Resulta claro que $X_0 \cap X_1 \subset X_i \subset X_0 + X_1$ para $i = 0, 1$.

Observación 54 Además definiendo $\|f\|_{X_0 \cap X_1} = \max(\|f\|_{X_0}, \|f\|_{X_1})$ resulta una norma para $X_0 \cap X_1$, y $\|f\|_{X_0 + X_1} = \inf_{f_0 + f_1 = f} \{\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1}\}$ resulta una norma para $X_0 + X_1$. Con dichas normas respectivas $X_0 \cap X_1$ y $X_0 + X_1$ resultan espacios de Banach.

Definición 55 Un morfismo entre duplas $T : (X_0, X_1) \rightarrow (Y_0, Y_1)$ es un operador lineal acotado: $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ tal que las restricciones $T_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$ con $i = 0, 1$ son operadores lineales acotados.

Observación 56 A veces notaremos $\overline{X}, \overline{Y}$, etc. a las cuplas $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$, etc., y análogamente $T : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ será un morfismo de cuplas: $T : (X_0, X_1) \rightarrow (Y_0, Y_1)$.

Definición 57 Un método de interpolación I asigna a cada par \overline{X} un espacio intermedio $X_0 \cap X_1 \subset I(\overline{X}) \subset X_0 + X_1$ (con inclusiones continuas) de modo tal que si $T : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ es un morfismo de pares, la restricción $T_{I(\overline{X})}$ es un morfismo de espacios de Banach $T_{I(\overline{X})} : I(\overline{X}) \rightarrow I(\overline{Y})$. Es decir que un método de interpolación es un funtor de la categoría de cuplas de espacios de Banach en la categoría de espacios de Banach. En ese contexto los espacios $I(\overline{X}), I(\overline{Y})$ se dicen espacios de interpolación para el método I .

Definición 58 Si I cumple que $\|T\|_{I(\overline{X}) \rightarrow I(\overline{Y})} \leq \max \left\{ \|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1} \right\}$ para todo morfismo de cuplas $T : (X_0, X_1) \rightarrow (Y_0, Y_1)$ diremos que $(I(\overline{X}), I(\overline{Y}))$ es un par de interpolación exacto. En el caso de que $\overline{X} = \overline{Y}$ diremos que $I(\overline{X})$ es un espacio de interpolación exacto para la cupla (X_0, X_1) . Si además $\|T\|_{I(\overline{X}) \rightarrow I(\overline{Y})} \leq \|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}^{1-\theta} \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}^\theta$ para $\theta \in [0, 1]$ diremos que $(I(\overline{X}), I(\overline{Y}))$ es exacto de exponente θ .

Definición 59 Sea una cupla compatible (X_0, X_1) de espacios de Banach. Se define la K -funcional de Peetre de la siguiente manera: Para todo elemento $f \in X_0 + X_1$ y $t > 0$ es $K(t, f, X_0, X_1) := \inf \{ \|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \}$

Observación 60 Si se sobreentiende la cupla (X_0, X_1) escribiremos a veces $K(t, f)$ en lugar de $K(t, f, X_0, X_1)$, si además se fija f podremos notarlo simplemente como $K(t)$. En tal caso K es una función no-negativa, creciente, cóncava y continua. Además $\frac{K(t)}{t} = K\left(\frac{1}{t}, f, X_1, X_0\right)$, de modo que en particular $\frac{K(t)}{t}$ es decreciente.

Definición 61 En el mismo contexto de la definición anterior, si $\theta \in (0, 1)$ y $1 \leq q < \infty$, ó $\theta \in [0, 1]$ y $q = \infty$, se definen los espacios de interpolación $\overline{X}_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} := \{f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}} < \infty\}$ donde $\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}} = \Phi_{\theta, q}(K(t, f, X_0, X_1))$ donde: $\Phi_{\theta, q}(\varphi(t)) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \varphi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ si $q < \infty$, y $\Phi_{\theta, q}(\varphi(t)) = \sup_{t>0} \{t^{-\theta} \cdot \varphi(t)\}$ para $q = \infty$.

Observación 62 Para cada selección de los parámetros θ y q -con $\theta \in (0, 1)$ y $1 \leq q < \infty$ - se tiene que $I(\overline{X}) = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ es un método de interpolación.

Observación 63 Hay otros métodos de interpolación real. En particular, a partir de la funcional J dada por $J(t, v, X_0, X_1) = \max(\|v\|_{X_0}, t \|v\|_{X_1})$ para $v \in X_0 \cap X_1$ y para cada $t > 0$, y definiendo normas

$$\|f\|_{\theta, q, J} = \inf_u \{ \Phi_{\theta, q}(J(t, u(t), X_0, X_1)) \}$$

donde el ínfimo se toma sobre las $u : u(t) \in X_0 \cap X_1$ y $f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$. Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$ se tiene que $(X_0, X_1)_{\theta, q, K} = (X_0, X_1)_{\theta, q, J}$ (normas equivalentes) y escribiremos sencillamente $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ -salvo indicación en contrario asumiremos que la norma es $\|\cdot\|_{\theta, q, K}$ y pondremos simplemente $\|\cdot\|_{\theta, q}$. Ampliaremos estos temas en el apéndice (6.2).

Observación 64 En el marco de la teoría de extrapolación es conveniente renormalizar $\|\cdot\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}}$ multiplicando dicha norma por constantes adecuadas -para tener funciones características que sean exactamente de la forma t^θ , esto también lo detallaremos mejor en el apéndice (6.2)-. Los espacios tienen los mismos elementos que los $\overline{X}_{\theta, q}$ y normas equivalentes; en los primeros trabajos de Jawerth y Milman se solían notar también $\overline{X}_{\theta, q}$ -y el contexto aclaraba la cuestión- (por ejemplo, cf. [58] o [85]). En trabajos posteriores (cf. [62] o [5]) se utiliza una notación diferente para los espacios de interpolación normalizados. Adoptaremos la notación de [5], con la que se tiene $\overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft = c_{\theta, q} \overline{X}_{\theta, q}$, esto significa que $\overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ y $\overline{X}_{\theta, q}$ coinciden como espacios vectoriales y que $\|f\|_{\overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft} = c_{\theta, q} \|f\|_{\overline{X}_{\theta, q, K}}$ donde $c_{\theta, q} = ((1 - \theta)\theta q)^{\frac{1}{q}}$ -con la convención de que $((1 - \theta)\theta q)^{\frac{1}{q}} = 1$ para $q = \infty$ -. Como mencionamos, una ventaja de esta normalización es que con ella la función característica del funtor $\overline{X} \mapsto \overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ es t^θ , y esto juega un papel de estabilidad que permite recuperar los mismos espacios de extrapolación obtenidos mediante el método Δ aplicándolo sobre espacios de interpolación $M(\theta) \overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ o bien sobre espacios $M(\theta) \overline{X}_{\theta, \infty, K}^\blacktriangleleft$ si $M(\theta)$ es temperada² (y análogamente con el método Σ para $M(\theta) \overline{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ o para $M(\theta) \overline{X}_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft$). Remitimos a la sección 6.2 del apéndice para algunas cuestiones asumidas en este párrafo como la funcional J , los métodos Σ y Δ , un sucinto recorrido por las definiciones de los espacios de extrapolación y el papel de las constantes de normalización en los resultados que veremos acerca de las clases Hölder reversas abstractas sobre las que trataremos en la próxima sección.

Observación 65 Hay otros métodos de interpolación real, usando funcionales diferentes, de modo que en un contexto más amplio, para aclarar el uso de la funcional K se escribiría $(X_0, X_1)_{\theta, q, K}$ donde aquí notamos simplemente $(X_0, X_1)_{\theta, q}$.

Algunos resultados bien conocidos para los cuales remitimos a [24] (capítulo 5) son:

Proposición 66 Si (X_0, X_1) es una dupla compatible, $\theta \in (0, 1)$ y $1 \leq q < \infty$, ó $\theta \in [0, 1]$ y $q = \infty$ entonces $\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q}}$ resulta una norma para $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ con la cual $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta, q} \hookrightarrow X_0 + X_1$.

Proposición 67 Si $\theta \in (0, 1)$ y $1 \leq q \leq r \leq \infty$, entonces $(X_0, X_1)_{\theta, q} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta, r}$.

Observación 68 En ciertas situaciones es posible trabajar con duplas ordenadas de espacios de Banach de funciones, lo que simplifica algunos aspectos: Una dupla ordenada (X_0, X_1) de espacios de Banach es una dupla compatible donde $X_1 \subset X_0$. En dicho caso se define la norma de la inmersión $X_1 \subset X_0$ como: $n_{0,1} = \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$. En ese contexto es posible dar la definición natural para el caso endpoint y el espacio obtenido es no trivial:

Definición 69 Sea $X = (X_0, X_1)$ una dupla ordenada, notamos $X_{0,1} = (X_0, X_1)_{0,1}$
 $= \{f : \|f\|_{X_{0,1}} = \int_0^{n_{0,1}} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} < \infty\}$

²Ver 6.2

Observación 70 Los espacios $X_{0,1}$ aparecen naturalmente en la teoría de extrapolación (cf. [4] y [51]). Un sencillo resultado referente a ellos que necesitaremos más adelante es el siguiente:

Lema 71 (cf. [51]) Sea Q un cubo de \mathbb{R}^n , y sea $\vec{X} = (L^1(Q), L^\infty(Q))$. Entonces, $(L^1(Q), L^\infty(Q))$ es una cupla ordenada y

$$\vec{X}_{0,1}(Q) = (L^1(Q), L^\infty(Q))_{0,1} = \{f : \int_0^{|Q|} f^*(s) \log \frac{|Q|}{s} ds < \infty\}. \quad (11)$$

Demostración. La inmersión $L^\infty(Q) \hookrightarrow L^1(Q)$ es trivial ya que si $f \in L^\infty(Q)$ es $\|f\|_{L^1(Q)} \leq |Q| \|f\|_{L^\infty(Q)}$ y además $n_{0,1} = |Q|$, y $K(t, f; L^1(Q), L^\infty(Q)) = \int_0^t f^*(s) ds = t f^{**}(t)$ se vuelve constante cuando $t > |Q|$. Integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^n K(s, f; L^1(Q), L^\infty(Q)) \frac{ds}{s} &= \int_0^{|Q|} s f^{**}(s) \frac{ds}{s} \\ &= \int_0^{|Q|} f^*(s) \log \frac{|Q|}{s} ds, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar . ■

Los espacios L^p proporcionan algunos casos arquetípicos de espacios de interpolación que nos interesarán. Comentamos algunos resultados bien conocidos y remitimos para ellos, a [16], [24], [23], o [68], y las referencias allí citadas.

Un caso particular que nos interesará especialmente está dado por la cupla compatible (X_0, X_1) donde $X_0 = L^1$ y $X_1 = L^\infty$ con las definiciones usuales de espacios L^p en un espacio (R, μ) de medida totalmente σ -finita. Se tiene el siguiente resultado conocido (ver [24]).

Proposición 72 Si $1 < p < \infty$ es $L^p = (L^1, L^\infty)_{1/p', p}$. Si además $q > p$ es $L^q = (L^p, L^\infty)_{1-p/q, q}$

Observación 73 En la igualdad $L^p = (L^1, L^\infty)_{1/p', p}$ -y más abajo al considerar espacios de Lorentz $L^{p,q}$ también como espacios de interpolación entre L^1 y L^∞ - las igualdades son en el sentido de que las normas son equivalentes. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $K(t, f, L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(s) ds = t \cdot f^{**}(t)$ (cf. 75, más abajo) se tiene que con la norma de $(L^1, L^\infty)_{\theta, q}$ es

$$\|f\|_{(L^1, L^\infty)_{\theta, q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1-\theta} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} \{t^{1-\theta} f^{**}(t)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

, y no es difícil probar (cf. [24] Lema IV 4.5) que para $\theta \in (0, 1]$ y $1 \leq q \leq \infty$ es

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq \|f\|_{(L^1, L^\infty)_{\theta, q}} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \|f\|_{L^{p,q}} \quad (12)$$

para $p = \frac{1}{1-\theta}$ donde se definen los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ formados por las f , funciones medibles, tales que $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$ siendo

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1-\theta} f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t>0} \{t^{1-\theta} f^*(t)\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

. En particular si $\theta = \frac{1}{q'}$, y por lo tanto $p = q'$, de la equivalencia 12 resulta $\|f\|_{L^{p,p}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X f^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p} \approx \left(\int_0^\infty (f^{**}(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{(L^1, L^\infty)_{\frac{1}{p'}, p}}$, y es en tal sentido en que en la proposición anterior se entiende que $L^p = (L^1, L^\infty)_{1/p', p}$.

Observación 74 El cálculo de la K – funcional para una cupla arbitraria de espacios de Banach es un problema variacional. Si bien la fórmula exacta se conoce solo para algunos pares de espacios, se conocen cotas superiores e inferiores para muchos de los pares de espacios de funciones que tienen importancia en Análisis (ver, por ejemplo [16], [24]). Una K – funcional bien conocida que usaremos frecuentemente es la que corresponde al par (L^1, L^∞) . Esto es lo que afirma el siguiente teorema (para el cual remitimos a las referencias: [16], [24]).

Teorema 75 (Peetre) Si (R, μ) es un espacio de medida totalmente σ –finita, para toda $f \in L^1 + L^\infty$ respecto de (R, μ) y para todo $t > 0$ se tiene que

$$K(t, f, L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(s) ds = t \cdot f^{**}(t) \quad (13)$$

Observación 76 Complementamos el resultado anterior (75) con otras caracterizaciones de espacios conocidas (ver, por ejemplo [16] o [24]): Para toda f medible en (R, μ) y siendo f^* su reordenamiento decreciente, para todo $t > 0$ se tiene que si $0 < p < \infty$:

$$K(t, f, L^p, L^\infty) \approx \left(\int_0^{t^p} f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad (14)$$

, si además $0 < p < q < \infty$ y $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$:

$$K(t, f, L^p, L^q) \approx \left(\int_0^{t^\alpha} f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + t \left(\int_{t^\alpha}^\infty f^*(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \quad (15)$$

y para espacios de Lorentz se tiene que

$$K(t, f, L(p, q), L^\infty) \approx \left(\int_0^{t^p} s^{q/p} f^*(s)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Observación 77 Otras equivalencias similares pero en términos solo de las K -funcionales pueden obtenerse usando un resultado importante de la teoría de Interpolación: las fórmulas de Holmstedt (ver el apéndice, o las referencias [16] o [24]). Una consecuencia permite reemplazar, en la equivalencia de Krée (14), $f^*(s)$ por $f^{**}(s) = K(s, f, L^1, L^\infty)$ (notar el paralelismo con las normas $\|f\|_{L(p,q)}$ y $\|f\|_{p,q}$ de $L(p, q)$), y entonces $f^{**}(s)^p = \left(K(s, f, L^1, L^\infty) s^{-1/p'} \right)^p \frac{1}{s}$ obteniendo:

$$K(t, f, L^p, L^\infty) \approx \left(\int_0^{t^p} \left(K(s, f, L^1, L^\infty) s^{-1/p'} \right)^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (16)$$

Observación 78 En la equivalencia de arriba las constantes no son independientes de p , mediante una renormalización adecuada (ver la sección 6.2 en el apéndice) podemos obtener:

$$K(t, f, L^p, L^\infty) \approx c_{\theta, p} \left(\int_0^{t^p} \left(K(s, f, L^1, L^\infty) s^{-1/p'} \right)^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde en este caso $\theta = \frac{1}{p'}$ y donde $c_{\theta, p} = (\theta(1-\theta)p)^{\frac{1}{p}}$ ³ y las constantes implícitas en la nueva equivalencia son independientes de θ y de p .

2.5. Clases de Hölder-Reversas para cuplas de espacios de Banach

Los resultados mencionados al final de la sección anterior motivan las definiciones de clases de Hölder reversas en el contextos de cuplas compatibles de espacios de Banach de funciones. Delineamos brevemente la idea que guía las definiciones y postergamos para una sección posterior la explicación completa de la conexión entre estas definiciones y las desigualdades de Hölder-Reversas en el contexto clásico.

Para motivar las definiciones que siguen considérese Q_0 un cubo fijo de \mathbb{R}^n (que eventualmente puede ser todo \mathbb{R}^n). Decíamos que w pertenecía a la clase de Hölder-reversa RH_p si para cierto $p \in (1, \infty)$ existe una constante $C \geq 1$ tal que para cada cubo finito $Q \subset Q_0$ vale que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$. Esto implica que $M_p w(x) \leq C M w(x)$ para cada $x \in Q_0$. Tomando reordenamientos decrecientes se tiene que

$$(M_p w)^*(t) \leq C (M w)^*(t)$$

para $0 < t < |Q_0|$. Teniendo en cuenta la equivalencia de Herz-Stein 8 se tiene que $(M w)^*(t) \approx w^{**}(t)$ y también volviendo a usar dicha equivalencia y la definición de reordenamientos decrecientes y del operador M se tiene que

$$M_p^p(x) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^p dy \right) = M(w^p)(x)$$

, de donde

$$\begin{aligned} C \frac{1}{t} \int_0^t w^*(s) ds &\approx C (M w)^*(t) \geq (M_p w)^*(t) \\ &= (M_p^p w)^*(t)^{1/p} = M(w^p)^*(t)^{1/p} \approx (w^p)^{**}(t)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{t} \int_0^t (w^p)^*(s) ds \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{t} \int_0^t w^*(s)^p ds \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Ahora usando 13 y 14 queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{1/p}} K(t^{1/p}, w, L^p, L^\infty) &\approx \frac{1}{t^{1/p}} \left(\int_0^t w^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \frac{1}{t} \int_0^t w^*(s) ds = C \frac{1}{t} K(t, w, L^1, L^\infty) \end{aligned}$$

³Luego si $\theta = \frac{1}{p'}$ es $p = \frac{1}{1-\theta}$ y resulta $c_{\theta, p} = c_{\frac{1}{p'}, p} = c(p) = \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$

, y teniendo en cuenta que $L^p = (L^1, L^\infty)_{\theta, p}$ para $\theta = 1/p'$, nos queda que para tal θ , y siendo $X = (X_0, X_1)$ con $X_0 = L^1(Q_0)$ y $X_1 = L^\infty(Q_0)$ resulta:

$$\frac{1}{t^{1/p}} K(t^{1/p}, w, X_{\theta, p}, X_1) \leq C \frac{1}{t} K(t, w, X)$$

, o renombrando $t = \tau^{1/p} = \tau^{1-\theta}$ se escribe como

$$\frac{K(\tau, w, X_{\theta, p}, X_1)}{\tau} \leq C \frac{K(\tau^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X)}{\tau^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

para todo $\tau > 0$. Esta interpretación motiva las definiciones del párrafo siguiente; en la referencia [81] se presenta este enfoque para tratar el lema de Gehring.

Definición 79 Sea $\theta \in (0, 1)$, $q \in [1, \infty)$ y $\bar{X} = (X_0, X_1)$ una cupla compatible de espacios de Banach. Llamamos $RH_{\theta, q}(X) \subset X_0 + X_1$, o simplemente $RH_{\theta, q}$ si no hay ambigüedad acerca de la cupla $X = (X_0, X_1)$ a la clase dada por

$$RH_{\theta, q} = \{w \in X_0 + X_1 / \exists C > 0 : \frac{K(t, w, X_{\theta, q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X})}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}, \forall t > 0\} \quad (17)$$

. Se entiende que $C = C_w(X)$ depende de w y de la cupla X , y que el espacio de interpolación $X_{\theta, q}$ es $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ (ver la definición 61, arriba). En este contexto se define la “norma”

$$\| \|_{RH_{\theta, q}} = \inf \left\{ C : \frac{K(t, w, X_{\theta, q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X})}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}, \forall t > 0 \right\} \quad (18)$$

. Es habitual, en este ámbito, llamar “normas” a los ínfimos de las constantes para desigualdades que determinan la pertenencia a una clase (v.g. clases A_p , clases B_p , clases RH_p y $RH_{\theta, q}$) aunque no sean realmente normas.

Además se define $RH(\bar{X}) := \bigcup_{(\theta, q) \in (0, 1) \times [1, \infty)} RH_{\theta, q}(\bar{X})$

Para cuplas ordenadas $\bar{X} = (X_0, X_1)$ con $X_1 \subset X_0$, mirando la definición 69 y teniendo en cuenta que en este caso la funcional K es constante para $t > n_{0,1}$, se define también la clase Hölder-reversa endpoint:

Definición 80 Si X es una cupla ordenada de espacios de Banach de funciones se define:

$$RH_{0,1} = \{w \in X_0 / \exists C > 0 : \int_0^t K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \bar{X}), \forall t \in (0, n_{0,1})\} \quad (19)$$

y con tales $C = C_w(X) > 0$ se define también la “norma”:

$$\| \|_{RH_{0,1}} = \inf \left\{ C > 0 : \int_0^t K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \bar{X}), \forall t \in (0, n_{0,1}) \right\} \quad (20)$$

Observación 81 A través del teorema de reiteración de Holmstedt podemos, en efecto, interpretar $RH_{0,1}$ como un caso límite de $RH_{\theta,1}$ con $\theta = 0$ ya que la desigualdad

$$\frac{K(t, w, X_{\theta,1}, X_1)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X}\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

que permite definir $RH_{\theta,q}$ para $q = 1$ queda:

$$\int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} K(s, w, \bar{X}) s^{-\theta} \frac{ds}{s} \leq Ct \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X}\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

y usando que $s^{-\theta}$ es decreciente esto implica que

$$t^{\frac{-\theta}{1-\theta}} \int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq Ct \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X}\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

, luego

$$\int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq Ct \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X}\right)}{t^{\frac{1-\theta}{1-\theta}}}$$

, es decir:

$$\int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X}\right)$$

. De esta manera la desigualdad que define $RH_{0,1}$ se obtiene reemplazando θ por 0 :

$$\int_0^t K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \bar{X})$$

2.6. Funciones Casi-Crecientes

Una noción que nos será útil al tratar con índices para familias de funciones es la de casi-monotonía. Esta cuestión está vinculada a la escala de integrabilidad de las funciones de pesos. Nos interesará definir cuándo una función es casi-creciente (abreviaremos a.i. por *almost increasing*). La definición de casi-decreciente se puede realizar *mutatis mutandis* de manera obvia. La noción de casi-monotonía fue introducida por S. Bernstein (cf. [13]).

Definición 82 Una función no negativa ϕ en un intervalo $I = (0, l) \subset \mathbb{R}$ (respectivamente $I = [0, l], [0, l)$ o $(0, l]$) se dice que es casi-creciente si existe una constante $C \geq 1$ tal que $\phi(t_1) \leq C\phi(t_2)$ para todo $t_1 \leq t_2$ con $t_1, t_2 \in (0, l)$ (resp. $[0, l], [0, l)$ o $(0, l]$).

Observación 83 La constante C en la definición anterior se llama constante de casi-crecimiento. Evidentemente no es única.

Observación 84 Adelantándonos algo a una discusión posterior, nótese que si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $\phi(t) = t^0 \phi(t)$ es creciente y $\phi(t)/t = t^{-1} \phi(t)$ es decreciente, parece esperable tener $t^{-\delta} \phi(t)$ casi-creciente para ciertos valores de δ con $0 \leq \delta < 1$. La situación “modelo” con $\phi(t)$ creciente y $t^{-1} \phi(t)$ decreciente es la que se presenta si $\phi(t) = K(t, f, X_0, X_1)$.

3. Índices

Una herramienta clave para nuestro estudio de diversas clases de pesos y sus propiedades es una noción de índices referida a una familia de funciones indexada a sus vez por cubos. Esta idea permite vincular propiedades locales de los pesos con el control global de desigualdades que definen la pertenencia o no de un peso a alguna de las clases que nos interesan. Esta noción de índice tiene interés propio de modo que le dedicaremos esta sección, independiente de la anterior en la cuál presentamos otras definiciones y resultados preliminares, y continuaremos en las precedentes con el estudio de las diversas clases de pesos y desigualdades de Hölder-reversas, y sus relaciones con las definiciones clásicas y las definiciones vía interpolación.

En el contexto del estudio de espacios de funciones hay una gran cantidad de nociones de índice; las hay referidas a una función, otras a un espacio, otras a una clase de funciones. Algunas de ellas están fuertemente ligadas, de modo que distintas definiciones son de hecho equivalentes, o son equivalentes si se cumple alguna condición adicional, y otras no están relacionadas de manera obvia. Muchas de ellas tienen además algún vínculo o aplicación en alguna otra rama del análisis. Un tratamiento bastante exhaustivo de distintos índices, sus propiedades y aplicaciones que aparecen referidos a interpolación y espacios de Banach de funciones puede hallarse en [76]. La mayoría de estas nociones de índices empieza a ser estudiada intensamente en la década de 1960, y aún antes en el trabajo de N. K. Bari y S. B. Stechkin (cf. [11]). En cualquier caso, las ideas giran en torno a la comparación con el crecimiento o decrecimiento de alguna familia de funciones cuyo comportamiento esté asintóticamente determinado por algún tipo de exponente (v.g. $\varphi(t) = t^\alpha$).

3.1. Índices y casi-crecimiento

La noción de índice utilizada aquí, que se define en términos de *familias* de funciones casi-crecientes, se apoya en gran parte en los trabajos de Natasha Samko y sus colaboradores (cf. ,por ejemplo, [64], [100], [101]) donde se introduce y se desarrollan índices en términos de casi-crecimiento de funciones; sin embargo, la idea de trabajar sobre familias de funciones indexadas por cubos aparentemente es una novedad (introducida en [32]).

Los resultados presentados aquí podrían extenderse a contextos más generales, por ejemplo cambiando las familias de conjuntos sobre los que se indexa o las funciones de test, pero nos restringiremos a las nociones que necesitaremos utilizar aquí.

Definición 85 *Dada una familia de cubos de \mathbb{R}^n , $\mathcal{Q} = \{Q\}$. Consideramos familias de funciones indexadas por familias de cubos de \mathcal{Q} , $\{\phi_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}}$, o más sencillamente $\{\phi_Q\}_Q$ donde las $\phi_Q : (0, |Q|) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son continuas, positivas, crecientes y tales que $\frac{\phi_Q(s)}{s}$ es decreciente.*

Además, anticipando su uso en el contexto de interpolación consideraremos familias de funciones indexadas por cubos y parametrizadas por $\beta \in [0, 1)$ y $q \geq 1$ definiendo: $\phi_{Q,\beta}(s) = s^{-\beta} \phi_Q(s)$ y además $\phi_{Q,\beta,q}(s) = [s^{-\beta} \phi_Q(s)]^q$, o sea $\phi_{Q,\beta,q}(s) = [\phi_{Q,\beta}(s)]^q$.

Está claro que si $q = 1$ es $\phi_{Q,\beta,1} = \phi_{Q,\beta}$ y si además $\beta = 0$ se tiene $\phi_{Q,0,1} = \phi_{Q,0} = \phi_Q$.

Observación 86 En la mayoría de las aplicaciones de las secciones que siguen \mathcal{Q} será la familia de todos los cubos de \mathbb{R}^n -siempre con lados paralelos a los ejes coordenados-, o bien la familia de todos los cubos incluidos en un cubo Q_0 fijo -con lados paralelos a los de Q_0 -. Se aclarará explícitamente si en algún momento se considera alguna otro tipo de familia \mathcal{Q} (por ejemplo, cubos diádicos respecto de \mathbb{R}^n o de un cubo fijo Q_0 son posibles casos interesantes). Sin embargo, los resultados de la presente sección valen para familias de cubos arbitrarios.

Ejemplo 87 Los ejemplos típicos con los que trabajaremos se obtienen considerando K -funcionales de restricciones a cubos de funciones de pesos tales que dichas restricciones están en la suma de los pares de espacios de Banach de una dupla compatible, con soporte en dicho cubo. Para concretizar esta situación con un ejemplo importante sea w un peso en \mathbb{R}^n , esto es una función no negativa localmente integrable; por lo tanto para cada $Q \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $w\chi_Q \in L^1(Q) \supset L^\infty(Q)$, y tomando

$$\begin{aligned} \phi_Q(t) & : = \phi_{w,Q}(t) = K(t, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q)) = \\ & = \int_0^t w\chi_Q^*(s) ds = t w\chi_Q^{**}(t) \text{ para } t \in (0, |Q|) \end{aligned}$$

se tiene que, debido a las propiedades de las K -funcionales las $\phi_{w,Q}(t)$ son continuas, positivas, crecientes y tales que $\frac{\phi_{w,Q}(t)}{t} = \frac{1}{t} K(t, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q)) = K(t^{-1}, w\chi_Q, L^\infty(Q), L^1(Q))$ es decreciente, de modo que se cumplen las condiciones requeridas arriba.

Presentaremos ahora la definición de índices que necesitamos en términos de casi-crecimiento (a.i.) y después veremos un lema que establece algunas equivalencias que resultan útiles para establecer algunos resultados al respecto.

Definición 88 Sea una familia de funciones $\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$ que cumplen las condiciones de la definición 85, con $\beta \in [0, 1)$ y $q \geq 1$. Definimos su índice

$$\begin{aligned} \text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q & = \sup\{\delta \geq 0 : \exists \gamma \in (0, 1) \text{ y } C \geq 1 \text{ tales que} \\ & \forall Q \in \mathcal{Q} \text{ resulta que } \phi_{Q,\beta,q}(s) s^{-\delta} \text{ es a.i. en } (0, \gamma|Q|)\} \end{aligned}$$

Observación 89 Nótese que en la definición se asume que γ y la constante de casi-crecimiento C son independientes de los cubos Q .

Observación 90 Si $\beta = 0$ y $q = 1$ se tiene $\phi_{Q,0,1} = \phi_Q$ y se nota $\text{ind}\{\phi_Q\}_Q := \text{ind}\{\phi_{Q,0,1}\}_Q$

Observación 91 Cuando la familia $\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q = \{\phi_{w,Q,\beta,q}\}_Q$ se obtiene a partir de un peso como se describe en el ejemplo 87 notaremos correspondientemente $\text{ind}\{\phi_{w,Q,\beta,q}\}_Q$, y $\text{ind}\{\phi_{w,Q}\}_Q$ si $\beta = 0$ y $q = 1$.

Observación 92 Aunque no abundaremos más allá de lo necesario para nuestros objetivos pueden establecerse diversas propiedades de interés que surgen a partir de la definición de índice; por ejemplo, si $\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$ y $\{\psi_{Q,\beta,q}\}_Q$ están en las condiciones definidas en 85, es decir son continuas, positivas, crecientes y

tales que las $\frac{\phi_Q(\cdot)}{s}$ y $\frac{\psi_Q(s)}{s}$ son decrecientes, y si tenemos exponentes conjugados: $p, p' \in (1, +\infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se tiene que $\{\phi_{Q,\beta,q}^{1/p} \cdot \psi_{Q,\beta,q}^{1/p'}\}_Q$ es continua, positiva, creciente y tal que

$$\frac{\phi_{Q,\beta,q}^{1/p} \cdot \psi_{Q,\beta,q}^{1/p'}(s)}{s} = \frac{\phi_{Q,\beta,q}^{1/p} \cdot \psi_{Q,\beta,q}^{1/p'}(s)}{s^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}} = \left(\frac{\phi_{Q,\beta,q}}{s}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{\psi_{Q,\beta,q}}{s}\right)^{1/p'}$$

es decreciente.

Observación 93 Si además $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0$ y $\text{ind}\{\psi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0$, entonces para todos los δ_1 y δ_2 con $0 \leq \delta_1 < \text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$, y $0 \leq \delta_2 < \text{ind}\{\psi_{Q,\beta,q}\}_Q$ con constantes respectivas $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ y $C_1, C_2 \geq 1$ de a.i. vale que

$$\phi_{Q,\beta,q}^{1/p}(s) \psi_{Q,\beta,q}^{1/p'}(s) s^{-(\delta_1/p + \delta_2/p')} = (\phi_{Q,\beta,q}(s) s^{-\delta_1})^{1/p} (\psi_{Q,\beta,q}(s) s^{-\delta_2})^{1/p'}$$

es casi-creciente en $(0, \min\{\gamma_1, \gamma_2\}|Q|)$ con constante de a.i. $C_1^{1/p} C_2^{1/p'}$ independiente de Q . Luego se obtiene que

$$\frac{\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}}{p} + \frac{\text{ind}\{\psi_{Q,\beta,q}\}}{p'} \leq \text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}^{1/p} \cdot \psi_{Q,\beta,q}^{1/p'}\}_Q$$

. En particular, si $p = p' = 2$ se tiene:

$$\frac{\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\} + \text{ind}\{\psi_{Q,\beta,q}\}}{2} \leq \text{ind}\{(\phi_{Q,\beta,q} \cdot \psi_{Q,\beta,q})^{\frac{1}{2}}\}_Q$$

Observación 94 Una definición similar referida a una sola función (o familia dependiente de los parámetros β y q , pero no de los distintos cubos) es útil en ciertos contextos y hay, como ya se mencionó, diversas equivalencias con otras definiciones de índices. La definición correspondiente sería como sigue (cf. [64]):

Definición 95 Sea $\phi : (0, l) \rightarrow (0, +\infty)$ con $\phi(s)$ creciente y $\frac{\phi(s)}{s}$ decreciente, y $\phi_{\beta,q}(s) = (s^{-\beta} \phi(s))^q$, se define

$$i\{\phi_{\beta,q}\} = \sup\{\delta \geq 0 : \phi_{\beta,q}(s) s^{-\delta} \text{ es a.i. en } (0, l)\}$$

Observación 96 Tanto en el caso de las funciones individuales como para las familias indexadas por cubos se tiene que la positividad del índice para $\beta \in [0, 1)$ no depende de $q \geq 1$. Concretamente se tiene:

$$\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0 \Leftrightarrow \text{ind}\{\phi_{Q,\beta}\}_Q > 0$$

y similarmente

$$i\{\phi_{\beta,q}\} > 0 \Leftrightarrow i\{\phi_{\beta}\} > 0$$

. Esto es claro ya que $\phi_{Q,\beta}(s) s^{-\delta} = \phi_Q(s) s^{-\beta} s^{-\delta}$ es a.i. con exponente mayor o igual que δ y constante C de a.i. si y solo si $(\phi_Q(s) s^{-\beta})^q s^{-q\delta} = \phi_{Q,\beta,q}(s) s^{-q\delta}$ es a.i. con exponente $q\delta$ y constante de a.i. C^q ; y de manera similar se ve la equivalencia para $i\{\}$.

Ahora vamos a establecer un lema que vincula el casi-crecimiento de una función ϕ o una familia $\{\phi\}$ con una desigualdad que puede interpretarse como la equivalencia entre $\frac{\phi(t)}{t}$ y $P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)$, para lo cual se necesita que ocurra que $P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right) \leq C\frac{\phi(t)}{t}$, ya que la desigualdad $\frac{\phi(t)}{t} \leq P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)$ es clara dado que $\frac{\phi(t)}{t}$ es decreciente. Es decir que si $P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right) \leq C\frac{\phi(t)}{t}$ resulta de hecho $P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right) \approx \frac{\phi(t)}{t}$.

Teniendo en cuenta que para el operador de Hardy P tenemos $P\left(\frac{\phi(t)}{t}\right) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\phi(s)}{s} ds$, la desigualdad mencionada en el párrafo anterior queda: $\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\phi(s)}{s} ds \leq C\frac{\phi(t)}{t}$, que equivale a $\int_0^t \phi(s) \frac{ds}{s} \leq C\phi(t)$ la cual será una de las instancias del lema.

Como de hecho las desigualdades de la forma $\int_0^t (s^{-\theta}\phi(s))^p \frac{ds}{s} \leq C(s^{-\theta}\phi(s))^p$ se automejoran, en el sentido que siendo si valen para cierto $\theta \in [0, 1)$ y $p \geq 1$ entonces existe un $\theta_1 \in (\theta, 1)$ tal que vale $\int_0^t (s^{-\theta_1}\phi(s))^q \frac{ds}{s} \leq C(s^{-\theta_1}\phi(s))^q$ para $q \geq p$ (cf. [81], lema 2), esto permitirá obtener de manera unificada distintas propiedades de apertura o de automejoramiento conocidas (lema de Gehring, clases RH_p , clases A_p , etc).

Vamos entonces al lema:

Lema 97 *Sea una familia de funciones indexada por cubos $\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$ parametrizada con $q \geq 1$ y $\beta \in [0, 1)$, definida como en 85, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Existe una constante $C > 0$, independiente de β , tal que para todo cubo Q vale que*

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq C\phi_{Q,\beta,q}(t), \text{ para todo } t \in (0, |Q|). \quad (21)$$

(ii) *Existe $\delta > 0$ tal que para todos los cubos Q , $\phi_{Q,\beta,q}(s)s^{-\delta}$ es a.i. en $(0, |Q|)$, con constante de casi-crecimiento $C \geq 1$ independiente de Q y β .*

(iii) *Existen $\delta > 0, \gamma \in (0, 1)$ tales que para todos los cubos Q , $\phi_{Q,\beta,q}(s)s^{-\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$, con constante de casi-crecimiento $C \geq 1$ independiente de Q y β .*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) El argumento de esta implicación está implícito en [81] (lema 2). Lo traducimos, en nuestra notación, para que la demostración esté autocontenida: Sea

$$F_{Q,\beta,q}(t) = \int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} = \int_0^t [s^{-\beta}\phi_Q(s)]^q \frac{ds}{s}$$

Entonces (i) puede reescribirse como

$$F_{Q,\beta,q}(t) \leq Ct(F_{Q,\beta,q}(t))'$$

, o sea

$$\frac{1}{C} \frac{1}{t} \leq \frac{(F_{Q,\beta,q}(t))'}{F_{Q,\beta,q}(t)}$$

Es decir,

$$\left(\frac{1}{C} \ln t\right)' \leq (\ln F_{Q,\beta,q}(t))'$$

luego para $0 < x < y < |Q|$, e integrando entre x e y se obtiene:

$$\ln \left(\frac{y}{x} \right)^{1/C} \leq \ln \frac{F_{Q,\beta,q}(y)}{F_{Q,\beta,q}(x)}$$

Tomando exponencial y usando la hipótesis de la condición (i) se obtienen las desigualdades siguientes:

$$x^{-1/C} F_{Q,\beta,q}(x) \leq y^{-1/C} F_{Q,\beta,q}(y) \leq y^{-1/C} C \phi_{Q,\beta,q}(y) \quad (22)$$

. Combinaremos la última desigualdad con lo que sigue, donde se usa la definición de $F_{Q,\beta,q}$ y que $\frac{\phi_Q(s)}{s}$ es decreciente,

$$\begin{aligned} F_{Q,\beta,q}(x) &= \int_0^x [s^{-\beta} \phi_Q(s)]^q \frac{ds}{s} \\ &= \int_0^x s^{q(1-\beta)} \left[\frac{\phi_Q(s)}{s} \right]^q \frac{ds}{s} \\ &\geq \left(\frac{\phi_Q(x)}{x} \right)^q \frac{x^{q(1-\beta)}}{q(1-\beta)} \\ &= \frac{(\phi_Q(x)x^{-\beta})^q}{q(1-\beta)} = \frac{\phi_{Q,\beta,q}(x)}{q(1-\beta)}, \end{aligned} \quad (23)$$

, luego de 22 y 23 tenemos

$$\begin{aligned} x^{-1/C} \phi_{w,Q,\beta,q}(x) &\leq (1-\beta)qCy^{-1/C} \phi_{w,Q,\beta,q}(y) \\ &\leq qCy^{-1/C} \phi_{Q,\beta,q}(y). \end{aligned}$$

es decir que obtuvimos que para $\delta = -1/C$ y con constante de casi-crecimiento qC se tiene que $\phi_{Q,\beta,q}(s)s^{-\delta}$ es casi creciente en $(0, |Q|)$.

La implicación (ii) \Rightarrow (iii) es inmediata.

Veamos (iii) \Rightarrow (i): Supongamos que existen $\delta > 0$ y $\gamma \in (0, 1)$ tales que para todo Q se tiene que $\phi_{Q,\beta,q}(s)s^{-\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$, con constante de casi-crecimiento C , independiente de Q y β . Dividiremos la situación en dos casos: Primero consideremos $t \leq \gamma|Q|$, entonces si además es $t < \gamma|Q|$ podemos escribir

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} = \int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) s^{-\delta} s^{\delta} \frac{ds}{s} \leq \frac{C}{\delta} \phi_{Q,\beta,q}(t) \quad (24)$$

, y si $t = \gamma|Q|$ se toma la integral entre 0 y $t - \varepsilon = \gamma|Q| - \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$, y se usa la continuidad de la integral y el crecimiento de $\phi_{Q,\beta,q}(t)$ en $\gamma|Q| \in (0, |Q|)$ y se obtiene también (24) para $t = \gamma|Q|$ haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por otro lado, si $t \in (\gamma|Q|, |Q|)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} &= \int_0^{\gamma|Q|} \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} + \int_{\gamma|Q|}^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Usando 24 para $t = \gamma |Q|$ tenemos

$$\begin{aligned}
(I) &= \int_0^{\gamma|Q|} \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{C}{\delta} \phi_{Q,\beta,q}(\gamma|Q|) \\
&= \frac{C}{\delta} (\phi_Q(\gamma|Q|))^q \gamma^{-q\beta} |Q|^{-q\beta} \\
&\leq \frac{C}{\delta} (\phi_Q(t))^q \gamma^{-\beta q} t^{-q\beta} \quad (\text{ya que } \phi_Q \text{ es creciente y } t < |Q|) \\
&= \frac{C}{\delta} \gamma^{-\beta q} \phi_{Q,\beta,q}(t).
\end{aligned}$$

Para estimar la integral que falta se usa en primer término que ϕ_Q es creciente y después que $t < |Q|$, para obtener

$$\begin{aligned}
(II) &= \int_{\gamma|Q|}^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \\
&= \int_{\gamma|Q|}^t (\phi_Q(s))^q s^{-\beta q} \frac{ds}{s} \\
&\leq (\phi_Q(t))^q \int_{\gamma|Q|}^t s^{-\beta q - 1} ds \\
&\leq (\phi_Q(t))^q \frac{1}{-\beta q} \left(\frac{1}{t^{\beta q}} - \frac{1}{(\gamma|Q|)^{\beta q}} \right) \\
&= (\phi_Q(t))^q \frac{1}{\beta q} \frac{t^{\beta q} - (\gamma|Q|)^{\beta q}}{t^{\beta q} (\gamma|Q|)^{\beta q}} \\
&= (t^{-\beta} \phi_Q(t))^q \frac{1}{\beta q} \frac{t^{\beta q} - (\gamma|Q|)^{\beta q}}{\gamma^{\beta q} |Q|^{\beta q}} \\
&= \phi_{Q,\beta,q}(t) \frac{1}{\beta q} \frac{1}{\gamma^{\beta q}} \left(\left(\frac{t}{|Q|} \right)^{\beta q} - \gamma^{\beta q} \right) \\
&\leq \phi_{Q,\beta,q}(t) \frac{1}{\beta q} \frac{1 - \gamma^{\beta q}}{\gamma^{\beta q}}
\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones para (I) y (II) se obtiene

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq \left(\frac{C}{\delta} \gamma^{-\beta q} + \frac{1}{\beta q} \left(\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\beta q} - 1 \right) \right) \phi_{Q,\beta,q}(t)$$

Pero es fácil obtener una cota independiente de β en el miembro derecho: Por un lado

$$\frac{C}{\delta} \gamma^{-\beta q} = \frac{C}{\delta} (\gamma^{-q})^\beta \leq \frac{C}{\delta} \gamma^{-q} \quad (25)$$

porque $\beta < 1$ y $\gamma^{-q} > 1$.

Por otro lado usando cálculo elemental se puede ver que, dados $\gamma < 1$ y $q \geq 1$, el término $g(\beta) = \frac{1}{\beta q} \left(\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\beta q} - 1 \right)$ es siempre creciente como función de

β para $\beta \in [0, 1]$ -completado por continuidad en 0-, y por lo tanto

$$\frac{1}{\beta q} \left(\left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\beta q} - 1 \right) \leq \frac{1}{q} \left(\left(\frac{1}{\gamma} \right)^q - 1 \right) \quad (26)$$

Por lo tanto, de (25) y (26) se obtiene

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq \left(\frac{C}{\delta} \gamma^{-q} + \frac{1}{q} (\gamma^{-q} - 1) \right) \phi_{Q,\beta,q}(t)$$

donde renombrando C a la constante $\left(\frac{C}{\delta} \gamma^{-q} + \frac{1}{q} (\gamma^{-q} - 1) \right)$ que es independiente de β y de Q llegamos a (i). ■

Teniendo en cuenta la definición 88, la condición (i) del lema 97 proporciona otro criterio operativo para caracterizar los índices:

Proposición 98 Sean $q \geq 1$, $\beta \in [0, 1]$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Existe $C > 0$ independiente de Q y de β tal que para todo cubo Q vale que

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq C \phi_{Q,\beta,q}(t), \text{ para todo } t \in (0, |Q|).$$

(ii)

$$\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0$$

Demostración. Supongamos que vale (i): entonces, por el lema 97 (iii), existe $\delta > 0$ y $\gamma \in (0, 1)$ tal que para todo Q se tiene que $\phi_{Q,\beta,q}(s)s^{-\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$, con constante de a.i. independiente de Q , y por lo tanto la definición 88 nos dice que $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q \geq \delta > 0$.

Por otra parte, si se sabe que $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0$ entonces ocurre la condición (iii) del lema 97, por lo cual vale la condición (i). ■

Observación 99 La condición (i) de la proposición anterior, 98, o lo que es lo mismo, la desigualdad (21) de la condición (i) del lema 97, $\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq C \phi_{Q,\beta,q}(t)$, para todo $t \in (0, |Q|)$ en realidad resulta una equivalencia:

$$\int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \approx \phi_{Q,\beta,q}(t), \text{ en } (0, |Q|) \quad (27)$$

. En efecto, usando que $\frac{\phi_Q(s)}{s}$ decreciente y la definición de $\phi_{Q,\beta,q}$ se tiene que para $s \in (0, |Q|)$ es

$$\begin{aligned} \phi_{Q,\beta,q}(s) &= [s^{-\beta} \phi_Q(s)]^q = \left[\frac{s^{-\beta} \phi_Q(s)}{s} \right]_{q s^q} \\ &= \left[\frac{\phi_Q(s)}{s} \right]_{q s^q}^{q-\beta q} \geq \left[\frac{\phi_Q(t)}{t} \right]_{q s^q}^{q-\beta q} \end{aligned}$$

, luego

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} &\geq \left[\frac{\phi_Q(t)}{t} \right]_{q}^{q-\beta q} \int_0^t s^{q-\beta q} \frac{ds}{s} = \\ \left[\frac{\phi_Q(t)}{t} \right]_{q}^{q-\beta q} \frac{t^{q-\beta q}}{(1-\beta)q} &= \frac{1}{(1-\beta)q} [t^{-\beta} \phi_Q(t)]^q = \frac{1}{(1-\beta)q} \phi_{Q,\beta,q}(t) \end{aligned}$$

es decir que tenemos en $(0, |Q|)$

$$\frac{1}{(1-\beta)q} \phi_{Q,\beta,q}(t) \leq \int_0^t \phi_{Q,\beta,q}(s) \frac{ds}{s} \leq C \phi_{Q,\beta,q}(t)$$

lo que nos da la equivalencia (27).

La siguiente proposición reduce a efectos prácticos, de alguna manera, el cálculo de $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$ al cálculo de $\text{ind}\{\phi_Q\}_Q$:

Proposición 100

$$\text{ind}\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q > 0 \Leftrightarrow \text{ind}\{\phi_{Q,\beta}\}_Q > 0 \Leftrightarrow \text{ind}\{\phi_Q\}_Q > \beta.$$

Demostración. La primera equivalencia fue probada en la observación 96, así que solo tenemos que probar la segunda equivalencia. Para ello fijemos un cubo Q arbitrario. El caso $\beta = 0$ se cumple por definición ya que $\phi_{Q,0} = \phi_{Q,0,1} = \phi_Q$. Asumamos entonces que $\beta > 0$, y supongamos, además, que $\text{ind}\{\phi_Q\}_Q > \beta$, entonces podemos hallar $\delta > 0$, y $\gamma \in (0, 1)$, tales que $\delta > \beta$ y $\phi_Q(s)s^{-\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$ con constante de a.i. independiente de Q . Entonces, como

$$\phi_{Q,\beta}(s)s^{-(\delta-\beta)} = \phi_Q(s)s^{-\delta}$$

es casi-creciente en $(0, \gamma|Q|)$, con $\delta - \beta > 0$, y como Q era arbitrario, vemos que $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta}\}_Q > 0$. Recíprocamente, si $\text{ind}\{\phi_{Q,\beta}\}_Q > 0$, entonces podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para todo cubo Q resulta que $\phi_{Q,\beta}(s)s^{-\delta} = \phi_Q(s)s^{-(\delta+\beta)}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$ para cierto $\gamma \in (0, 1)$ fijo resulta que $\text{ind}\{\phi_Q\}_Q \geq \beta + \delta$ de donde

$$\text{ind}\{\phi_Q\}_Q > \beta$$

. ■

3.2. Relación con otras definiciones de índices

Las definiciones usuales de índices en la literatura se refieren al índice de una función individual. Ahora compararemos los resultados de la sección anterior con resultados clásicos usando algunas de las definiciones más comunes de índices. Aunque dichas definiciones se plantean habitualmente con menos restricciones, con el propósito de compararlas con la definición proporcionada arriba mantendremos la hipótesis de que $\phi : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es creciente y que $\frac{\phi(s)}{s}$ es decreciente y consideraremos nuestros resultados solo para funciones de la forma $\Psi(s) = (s^{-\beta} \phi(s))^q$. En esta situación varias definiciones son equivalentes. Sea (cf. [11], [100]),

$$\alpha_\Psi = \sup_{\lambda > 1} \frac{\ln \left(\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(\lambda h)}{\Psi(h)} \right)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(\lambda h)}{\Psi(h)} \right)}{\ln \lambda}$$

(en el contexto de la teoría de espacios de Orlicz, suele denominarse como índice inferior de Matuszewska-Orlicz). Entonces tenemos el siguiente resultado conocido (cf. [11], [68], [76], [80], [100], y las referencias allí contenidas donde se presenta el mismo resultado bajo diferentes definiciones de índices).

Lema 101 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^t \Psi(s) \frac{ds}{s} \leq C\Psi(t), \text{ for all } t \in (0, l). \quad (28)$$

(ii) $\alpha_\Psi > 0$.

Combinando la proposición 98 y el lema 101 se ve que nuestra definición de índice para una función individual (95) es compatible con las clásicas.

Corolario 102 *Sea Ψ una función en $(0, l)$ en las condiciones mencionadas al comienzo de esta sección. Entonces,*

$$\alpha_\Psi > 0 \Leftrightarrow i\{\phi_\Psi\} > 0.$$

Demostración. La demostración de la proposición 98 para funciones individuales nos muestra que la condición (28) vale si y solo si $i\{\phi_\Psi\} > 0$. Por otro lado, por el lema 101 se sabe que (28) se cumple si y solo si $\alpha_\Psi > 0$, con lo que se obtiene el resultado. ■

Observación 103 *La compatibilidad de la definición de índice en términos de a.i. (para una función individual) con los índices clásicos se discute en [64]. Desarrollamos ahora un ejemplo donde se ve un cálculo simple que sugiere la razón por la cual los índices considerados aquí coinciden con los clásicos para las clases de funciones que estamos considerando: Supongamos que $\phi(s)s^{-\delta}$ es casi-creciente (a.i.), entonces, para alguna constante $c \geq 1$, se tiene que para $\lambda > 1$,*

$$(\lambda h)^{-\delta} \phi(\lambda h) \geq \frac{1}{c} h^{-\delta} \phi(h).$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_\phi &= \sup_{\lambda > 1} \frac{\ln \left(\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(\lambda h)}{\Psi(h)} \right)}{\ln \lambda} \\ &\geq \sup_{\lambda > 1} \frac{\ln \left(\frac{1}{c} \lambda^\delta \right)}{\ln \lambda} \\ &= \sup_{\lambda > 1} \left\{ \delta - \frac{\ln(c)}{\ln \lambda} \right\} \\ &= \delta \end{aligned}$$

4. Caracterización de clases de pesos por medio de índices

A continuación utilizaremos los índices definidos en la sección anterior para caracterizar diversas clases importantes de pesos y obtener resultados acerca de ellos. Naturalmente las clases alcanzadas por nuestros índices dependen de cuáles sean las familias de funciones indexadas por cubos sobre las que se consideren

dichos índices. En esta sección consideraremos familias específicas de cubos \mathcal{Q} , $\{\phi_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}}$ consistentes en todos los cubos contenidos en un cubo fijo Q_0 de \mathbb{R}^n , admitiendo que Q_0 sea un cubo infinito como un cuadrante, un semiplano o todo \mathbb{R}^n , y de hecho el caso que se sobreentiende si no se aclara otra cosa es $\mathcal{Q} = \{\text{cubos finitos de } \mathbb{R}^n \text{ con lados paralelos a los ejes coordenados}\}$.

Además las familias de funciones indexadas por \mathcal{Q} serán K -funcionales para cuplas $(L^1(Q), L^\infty(Q))$ de pesos $w\chi_Q$, es decir, restricciones a cubos Q de pesos en Q_0 . En nuestro contexto es irrelevante si los cubos finitos son abiertos o cerrados. Concretamente, si w es un peso en \mathbb{R}^n y $p \in [1, \infty)$, la familia de funciones que usaremos se puede definir como sigue: Dado w un peso en $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, en cada $Q \subset Q_0$ tomamos

$$\phi_{w,Q}(s) = K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty)$$

; y además consideraremos

$$\begin{aligned} \phi_{w,Q,1/p'}(s) &= s^{-1/p'} K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty), 0 < s < |Q| \\ \phi_{w,Q,1/p',q}(s) &= \left(s^{-1/p'} K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty) \right)^q, 0 < s < |Q| \end{aligned}$$

. Con respecto a la notación de la sección anterior, donde $\phi_{Q,\beta,q}(s) = [s^{-\beta} \phi_Q(s)]^q$, convendrá a veces aclarar el peso w con el que generamos las funciones, y tomaremos $\beta = 1/p'$.

En esta situación estaremos en condiciones de obtener resultados acerca de, entre otras, clases de Hölder reversas, pesos de Muckenhoupt, clases dadas por condiciones de Gurov-Reshetnyak, y de BMO_* . En secciones posteriores se podrán estudiar otras clases considerando diferentes familias de funciones indexadas.

4.1. Clases de Hölder-Reversas

Empezaremos tratando con desigualdades de Hölder-reversas y pesos que las satisfacen. Como ya se mencionó, estas cuestiones surgen al tratar con el orden de integrabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Nos interesa tratar con las clases de pesos que cumplen estas desigualdades tanto en el contexto clásico como en el marco abstracto de cuplas compatibles de espacios de Banach.

Empezaremos entonces estableciendo algunos resultados que permiten conectar con precisión las desigualdades clásicas con las definiciones en el marco de la teoría de interpolación. Luego de ello veremos resultados que relacionan los índices con las clases de Hölder-reversas abstractas, y posteriormente usaremos lo anterior para caracterizar las clases de Hölder-reversas clásicas.

4.1.1. Clases de Hölder-reversas. Relación entre definiciones clásicas y abstractas

Veremos por separado, primero el caso $p > 1$ y después el caso $p = 1$, ya que este último requiere algún resultado preliminar.

Teorema 104 *Sea $p > 1$. Se tiene que $w \in RH_p$ si y solo si para todo cubo Q_0 vale que $w\chi_{Q_0} \in RH_{1-1/p,p}(L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))$ y*

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q), L^\infty(Q))} < \infty$$

Demostración. Supongamos primero que $w \in RH_p$. Por definición tenemos que para todo cubo Q se tiene:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|w\|_{RH_p} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$$

(en

Fijemos un cubo Q_0 . Entonces, para todo $x \in Q_0$ se tiene la desigualdad puntual,

$$\begin{aligned} M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) &= \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w\chi_{Q_0}(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|w\|_{RH_p} \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q w\chi_{Q_0}(x) dx \\ &= \|w\|_{RH_p} M_{Q_0}(w\chi_{Q_0})(x). \end{aligned}$$

Por el teorema 44 aplicado a M_{Q_0} , tenemos que para $0 < t < |Q_0|$, valen las siguientes equivalencias con constantes absolutas, independientes de w , y de Q_0 :

$$\begin{aligned} (M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) &\approx \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p}, \\ (M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) &\approx \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \end{aligned}$$

Se sigue de allí que existe una constante universal $C > 0$, independiente de w y Q_0 , tal que para todo $0 < t < |Q_0|$, se tiene que

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p} \leq C \|w\|_{RH_p} \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \quad (29)$$

Además, utilizando resultados bien conocidos de teoría de interpolación (cf. [24, Teorema 3.8, pag 122]), sabemos que $L^p(Q_0) = (L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))_{1-1/p, p}$ y la K - funcional de la cupla compatible $(L^p(Q_0), L^\infty(Q_0))$, $1 \leq p < \infty$, está dado por

$$K(t^{1/p}, w\chi_{Q_0}; L^p(Q_0), L^\infty(Q_0)) \approx \left\{ \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p}, \quad (30)$$

donde la equivalencia ocurre con constantes independientes de $w\chi_{Q_0}$, y podemos reescribir (29) como sigue: Para todo $0 < t < |Q_0|$, se tiene

$$\begin{aligned} &K(t^{1/p}, w\chi_{Q_0}; (L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))_{1-1/p, p}, L^\infty(Q_0)) \\ &\leq \tilde{C} \|w\|_{RH_p} t^{-(1/p-1)} K(t, w\chi_{Q_0}, L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)). \end{aligned} \quad (31)$$

Más aún, como el cubo Q_0 era arbitrario, y la constante en (31) no depende de Q_0 , obtenemos que $w\chi_{Q_0} \in RH_{1-1/p, p}(L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))$ para todo cubo Q_0 y, además,

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p, p}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \leq \tilde{C} \|w\|_{RH_p} < \infty$$

Recíprocamente, supongamos que $\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} < \infty$, y fijemos un cubo Q_0 . Entonces, para todo $t > 0$ vale

$$\begin{aligned} & K(t^p, w\chi_{Q_0}; (L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))_{1-1/p,p}, L^\infty(Q_0)) \\ & \leq \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} \right) t^{-(1/p-1)} K(t, w\chi_{Q_0}, L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)). \end{aligned}$$

Ahora, tomamos $t = |Q_0|$ y usamos la equivalencia (30) para obtener cierta constante absoluta \tilde{C} que no depende de Q_0 , tal que

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p} \\ & \leq \tilde{C} \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} \right) \frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \tilde{C} \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} \right) \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} w(x) dx. \end{aligned} \tag{32}$$

En consecuencia como Q_0 era arbitrario,

$$\|w\|_{RH_p} \leq \tilde{C} \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} \right)$$

y por lo tanto $w \in RH_p$ como queríamos ver. ■

Observación 105 *Se mostró en el curso de la demostración anterior la equivalencia que sigue, con constantes que solo dependen, posiblemente, de $p \in (1, \infty)$:*

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q),L^\infty(Q))} \approx \|w\|_{RH_p}. \tag{33}$$

Para obtener un resultado análogo al anterior en el caso $p = 1$, y relacionar $RH_{0,1}$ con la definición 3 y la condición 4 como caso endpoint de los RH , necesitamos primero comparar diferentes normas para el espacio $LLogL$. Resultados similares al lema que sigue son más o menos parte del folklore del tema pero no podemos señalar una referencia donde la formulación se ajuste exactamente a la que necesitamos, de manera que precisaremos estas cuestiones y las probaremos en el siguiente lema:

Lema 106 *Supongamos que $f \in LLogL_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

(i) *Para todos los cubos Q vale*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log \left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) dy \\ & \leq 2 \|f\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})} \\ & \leq 2 \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log \left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) dy \end{aligned}$$

, donde $\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}$ denota la $L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})$ -norma de Luxemburg de f ,

$$\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})} = \inf\{r : \frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{|f(y)|}{r} \log(e + \frac{|f(y)|}{r}) dy \leq 1\}. \quad (34)$$

(ii) Existe una constante absoluta tal que para todos los cubos Q se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) dy &\leq \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log(e + \frac{|Q|}{s}) ds \\ &\leq c \|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}. \end{aligned}$$

Demostración. (i) Como la función $\Psi(y) = y \log(e + y)$ satisface trivialmente la condición Δ_2 , por ejemplo con constante $c = 4$ entonces (ver 16) el ínfimo en (34) se alcanza y además vale:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) dy = \|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}. \quad (35)$$

Por otra parte, como $\log(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) \geq 1$, de dicha identidad se obtiene la conocida igualdad

$$\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})} = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}. \quad (36)$$

, es decir, resulta $\frac{\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \geq 1$ y debido a ello se tiene,

$$\begin{aligned} e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} &= e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \frac{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \\ &\leq (e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) \frac{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) dy \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log \left\{ (e + \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}) \frac{\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right\} dy \\ &= (I) + (II), \end{aligned}$$

donde

$$(I) = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log \left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) dy = \|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

(por (35)), y

$$\begin{aligned}
(II) &= \log \left(\frac{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \\
&= \log \left(\frac{\|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \right) \|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})} \\
&\leq \|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\log\left(\frac{A}{B}\right) \leq \frac{A}{B}$ para cualesquiera $A, B > 0$.

Por tanto, hemos visto que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \leq 2 \|f\chi_Q\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}.$$

Por otra parte, usando sucesivamente (35) y (36), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})} &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L\text{Log}L(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy.
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la desigualdad de (i) que faltaba.

Veamos (ii). Por la definición de reordenamiento decreciente y teniendo en cuenta que $\phi(y) = y \log\left(e + \frac{y}{A}\right)$, para $A > 0$, es una función estrictamente creciente y positiva en $[0, \infty)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \tag{37} \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(e + \frac{(f\chi_Q)^*(s)}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) ds
\end{aligned}$$

Ahora, como $(f\chi_Q)^*(u)$ es decreciente, se tiene que, para todo $0 < s < |Q|$,

$$\begin{aligned}
(f\chi_Q)^*(s) &\leq \frac{1}{s} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(u) du \\
&= \frac{1}{s} |Q| \|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}.
\end{aligned}$$

Utilizando esto último en (37) vemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{L^1(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(e + \frac{|Q|}{s}\right) ds.$$

Sea $\Omega = \{s \in (0, |Q|) : \left(\frac{e|Q|}{s}\right)^{1/2} \leq \frac{(f\chi_Q)^*(s)}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\}$, entonces podemos ver que, con una constante independiente de f y Q (por ejemplo $c = 2$ ya que $e + \frac{|Q|}{s} \leq \left(\frac{e|Q|}{s}\right)^2$), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(e + \frac{|Q|}{s}\right) ds &\leq \frac{c}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds \quad (38) \\ &= \frac{c}{|Q|} \int_{\Omega} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds \\ &\quad + \frac{c}{|Q|} \int_{(0, |Q|) \setminus \Omega} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Para estimar (I) procedemos como sigue -donde c denota una constante absoluta (que no depende de Q) cuyo valor puede variar de una línea a otra-

$$\begin{aligned} (I) &\leq \frac{c}{|Q|} \int_{\Omega} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{(f\chi_Q)^*(s)}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) ds \\ &\leq \frac{c}{|Q|} \int_0^{|Q|} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{(f\chi_Q)^*(s)}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) ds \\ &= \frac{c}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(\frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \\ &\leq \frac{c}{|Q|} \int_Q |f(y)| \log\left(e + \frac{|f(y)|}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}}\right) dy \\ &= c \|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\frac{c}{|Q|} \int_{(0, |Q|) \setminus \Omega} (f\chi_Q)^*(s) \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds$

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{c}{|Q|} \|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})} \int_{(0, |Q|) \setminus \Omega} \frac{(f\chi_Q)^*(s)}{\|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}} \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds \\ &\leq \frac{c}{|Q|} \|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})} \int_0^{|Q|} \left(\frac{e|Q|}{s}\right)^{1/2} \log\left(\frac{e|Q|}{s}\right) ds \\ &= c \|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})} \int_0^1 \left(\frac{e}{u}\right)^{1/2} \log\left(\frac{e}{u}\right) du \\ &= \tilde{c} \|f\chi_Q\|_{LLogL(Q, \frac{dx}{|Q|})}. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración del lema. ■

Ahora podemos establecer un resultado análogo al teorema 104 que correspondería al caso límite con $p \rightarrow 1$.

Para interpretar adecuadamente la situación hay que tener en cuenta que en un espacio de medida finita (R, μ) -v.g. para $\left(Q, \frac{dx}{|Q|}\right)$ para un cubo finito $Q \subset \mathbb{R}^n$ -, se tienen las siguientes inmersiones continuas (cf. [24] teorema IV-6.5)

$L^\infty \hookrightarrow L_{\text{exp}} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L \log L \hookrightarrow L^1$. El resultado que sigue nos dice, de alguna manera, que el caso endpoint natural en este contexto cuando p se acerca a 1 corresponde en realidad a $L \log L$. Esta situación no es inusitada; más adelante cuando analicemos las imágenes por M de clases de pesos (ver también [26] y [27]) veremos que $M(M_r w) \approx M_r w$ si $r > 1$ pero $M(Mw) \approx M_{L \log L} w$ (cf. [34], [95, ecuación (13) pag 174] y [17]).

Teorema 107 $w \in RH_{L(\log L)}$ si y solo si para todos los cubos Q , la restricción de w en el cubo Q , $w\chi_Q$, pertenece a $RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))$ y

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \approx \|w\|_{RH_{LL \log L}}.$$

Demostración. Sea un cubo fijo Q_0 , tenemos

$$M_{L(\log L), Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_0} \|w\chi_{Q_0}\|_{L \log L(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

Supongamos que $w \in RH_{LL \log L}$, entonces para $x \in Q_0$,

$$M_{L(\log L), Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) \leq \|w\|_{RH_{LL \log L}} M_{Q_0}(w\chi_{Q_0})(x)$$

Combinando la estimación previa con la versión localizada de la estimación de C. Perez para el operador maximal iterado (cf. [95, (13) page 174])

$$M_{Q_0}(M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))(x) \leq C M_{L(\log L), Q_0}(w\chi_{Q_0})(x)$$

se obtiene

$$M_{Q_0}(M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))(x) \leq C \|w\|_{RH_{LL \log L}} M_{Q_0}(w\chi_{Q_0})(x), \text{ a.e. en } Q_0. \quad (39)$$

Tomando reordenamientos decrecientes y usando la equivalencia de Herz-Stein mencionada arriba en 44 para la función maximal de Hardy-Littlewood, vemos que para $0 < t < |Q_0|$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^{**}(s) ds &\approx \frac{1}{t} \int_0^t (M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(s) ds \\ &\approx (M_{Q_0}(M_{Q_0}(w\chi_{Q_0})))^*(t) \\ &\leq C \|w\|_{RH_{LL \log L}} (M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) \\ &\approx C \|w\|_{RH_{LL \log L}} \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \end{aligned}$$

Escrito en términos de K -funcionales tenemos, por tanto, que para $0 < t < |Q_0|$,

$$\int_0^t K(s, w\chi_{Q_0}; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)) \frac{ds}{s} \leq C \|w\|_{RH_{LL \log L}} K(t, w\chi_{Q_0}; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)), \quad (40)$$

donde C es una constante universal. Se sigue de la definición (20), que para todos los cubos Q resulta que $w\chi_Q \in RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))$, y además,

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \leq C \|w\|_{RH_{LL \log L}}.$$

Recíprocamente, supóngase que para todos los cubos Q se tiene que $w\chi_Q \in RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))$, con $\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} < \infty$. Entonces por (19) y (20), para cualquier cubo Q_0 , ocurre que

$$\begin{aligned} & \int_0^t K(s, w\chi_{Q_0}; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)) \frac{ds}{s} \\ & \leq C \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \right) K(t, w\chi_{Q_0}; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)). \end{aligned}$$

Tómese $t = |Q_0|$. Entonces, usando el lema 71, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} (w\chi_{Q_0})^*(s) \log \frac{|Q_0|}{s} ds \\ & \leq C \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \right) \frac{\|w\chi_{Q_0}\|_{L^1(Q_0)}}{|Q_0|}. \end{aligned} \quad (41)$$

Combinando con el lema 106 y la desigualdad (38) se sigue que para cualquier cubo Q_0 ,

$$\|w\chi_{Q_0}\|_{LL\log L(\frac{dx}{|Q_0|}, Q_0)} \leq C \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \right) \frac{\|w\chi_{Q_0}\|_{L^1(Q_0)}}{|Q_0|}$$

. En consecuencia $w \in RH_{LL\log L}$, y

$$\|w\|_{RH_{LL\log L}} \leq C \left(\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \right),$$

como queríamos demostrar. ■

4.1.2. Caracterización de clases Hölder-reversas abstractas

Más arriba hemos visto que las desigualdades de Hölder-reversas implican condiciones sobre las K -funcionales que hemos utilizado para definir clases de Hölder abstractas en cuplas compatibles de espacios de Banach donde quedan definidos espacios de interpolación. Concretamente si $X = (X_0, X_1)$ era una cupla compatible de espacios de Banach definimos $RH_{\theta,q} = \{w \in X_0 + X_1 / \exists C >$

$0 : \frac{K(t, w, X_{\theta,q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}, \forall t > 0\}$, y si además X está ordenado, con $X_1 \subset X_0$ y $n_{0,1} = \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$ también se define $RH_{0,1} = \{w \in X_0 / \exists C > 0 :$

$\int_0^t K(s, w, X) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, X), \forall t \in (0, n_{0,1})\}$. Es natural que al definir $X_{\theta,q}$ por un espacio de parámetros dado por potencias, nuestra definición de índices sea adecuada para caracterizar los $RH_{\theta,q}$. Veremos brevemente en esta sección algunas conclusiones al respecto. Resultados similares en el marco de espacios quasi-Banach pueden verse en [80] usando índices de Matuzsewska-Orlicz.

Teorema 108 *Sea \vec{X} una cupla compatible de espacios de Banach, $\theta \in (0, 1)$, y $q \geq 1$. Entonces,*

$$RH_{\theta,q}(\vec{X}) = \{w \in X_0 + X_1 : i\{K(\cdot, w; \vec{X})\} > \theta\}.$$

Demostración. Usaremos el siguiente caso de la fórmula de Holmstedt (cf. [16] corolario 3.6.2 b)) donde la equivalencia involucra constantes que dependen de θ y q pero no de w :

$$K(t, w; \bar{X}_{\theta, q}, X_1) \approx \left\{ \int_0^{t^{1/(1-\theta)}} [s^{-\theta} K(s, w; \bar{X})]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q}. \quad (42)$$

Fijados $(\theta, q) \in (0, 1) \times [1, \infty)$, sea $w \in RH_{\theta, q}(\bar{X})$. Usando (42) podemos reescribir (17) como

$$\left\{ \int_0^{t^{1/(1-\theta)}} [s^{-\theta} K(s, w; \bar{X})]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} \leq C \|w\|_{RH_{\theta, q}(\bar{X})} t^{\frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, \bar{X})}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}}, \forall t > 0, \quad (43)$$

reemplazando $t^{1/(1-\theta)}$ por t y despaizando

$$\int_0^t [s^{-\theta} K(s, w; \bar{X})]^q \frac{ds}{s} \leq C \|w\|_{RH_{\theta, q}(\bar{X})}^q [t^{-\theta} K(t, w, \bar{X})]^q, \forall t > 0. \quad (44)$$

Como $K(s, w; \bar{X})$ crece y $\frac{K(s, w; \bar{X})}{s}$ decrece, por el lema 101 y el corolario 102 tenemos

$$i\{[(\cdot)^{-\theta} K(\cdot, w; \bar{X})]^q\} > 0. \quad (45)$$

Consecuentemente, por la proposición 100, se obtiene que

$$i\{K(\cdot, w; \bar{X})\} > \theta.$$

Como se ve fácilmente todos los pasos se pueden revertir. De hecho, si se tiene la desigualdad previa, entonces, por proposición 100, vemos que se cumple (45) y, por lema 101, encontramos que ocurre (44) para todo $t > 0$. Intercambiando t por $t^{1/(1-\theta)}$ en la desigualdad y despejando, se ven sucesivamente (43), (42), y, finalmente se tiene 17, como queríamos mostrar. ■

Observación 109 *Nótese que el segundo índice no aparece en la caracterización abstracta de $RH_{\theta, q}(\bar{X})$, por lo tanto se sigue que para todo $q \geq 1$,*

$$\begin{aligned} RH_{\theta, q}(\bar{X}) &= \{w \in X_0 + X_1 : i\{K(\cdot, w; \bar{X})\} > \theta\} \\ &= RH_{\theta, 1}(\bar{X}). \end{aligned}$$

El análisis previo también nos proporciona la siguiente caracterización de la unión de las clases anidadas, $RH(\bar{X})$, definida por

$$RH(\bar{X}) := \bigcup_{\substack{\theta \in (0, 1) \\ q \in [1, \infty)}} RH_{\theta, q}(\bar{X}) = \bigcup_{\theta \in (0, 1)} RH_{\theta, 1}(\bar{X})$$

Como parece natural, esto se vincula con el valor límite de los índices:

Teorema 110

$$RH(\bar{X}) = \{w : i\{K(\cdot, w; \bar{X})\} > 0\}.$$

Demostración. Sea $w \in \bigcup_{\substack{\theta \in (0,1) \\ q \in [1,\infty)}} RH_{\theta,q}(\overline{X})$. Se sigue que existen $\theta \in (0,1)$, y $q \geq 1$, tales que $w \in RH_{\theta,q}(\overline{X})$. Entonces, por el teorema previo,

$$i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > \theta > 0$$

Recíprocamente, supongamos que

$$i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > 0.$$

Sea $q \geq 1$, y elijamos θ tal que $i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > \theta > 0$. Entonces, por el teorema 108, $w \in RH_{\theta,q}(\overline{X}) \subset RH(\overline{X})$. ■

El caso límite $\theta = 0$ se puede obtener usando los mismos argumentos:

Corolario 111 *Sea \overline{X} una cupla ordenada de espacios de Banach. Entonces,*

$$RH_{0,1}(\overline{X}) = RH(\overline{X}).$$

Demostración. Sea $n_{0,1} = \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$ la norma de la inmersión, $X_1 \subset X_0$.

Por definición, $w \in RH_{0,1}(\overline{X})$ si y solo si para todo $0 < t < n_{0,1}$ vale,

$$\int_0^t K(s, w; \overline{X}) \frac{ds}{s} \leq cK(t, w; \overline{X}). \quad (46)$$

Por el lema 101 y corolario 102, (46) es equivalente a

$$i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > 0.$$

Consecuentemente, por teorema 110, $w \in RH(\overline{X})$.

Recíprocamente, si $w \in RH(\overline{X})$, entonces, por teorema 110, $i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > 0$, luego, por lema 101, vemos que vale (46), de donde $w \in RH_{0,1}(\overline{X})$. ■

En este contexto el teorema de Gehring -es decir, su versión interpolatoria- es inmediato:

Teorema 112 (*Gehring's Lemma*) (i) *Sea $\theta \in (0,1)$, $1 \leq q < \infty$. Supongamos que $w \in RH_{\theta,q}(\overline{X})$, entonces existe $\theta' > \theta$, tal que, para todo $1 < p < \infty$, $w \in RH_{\theta',p}(\overline{X})$.*

(ii) *Supóngase que $w \in RH_{0,1}(\overline{X})$, entonces existe $\theta' > 0$, $1 < p < \infty$, tal que $w \in RH_{\theta',p}(\overline{X})$.*

Demostración. (i) Por teorema 108, $i\{K(\cdot, w; \overline{X})\} > \theta$.

Tómese θ' en el intervalo $(\theta, i\{K(\cdot, w; \overline{X})\})$ entonces por teorema 108, $w \in RH_{\theta',p}(\overline{X})$, para todo $p > 1$.

(ii) Se sigue directamente del corolario 111. ■

4.1.3. Caracterización de las clases clásicas RH y RH_p

En esta sección combinaremos los resultados de la sección precedente con los resultados que relacionan las desigualdades de Hölder reversas clásicas y las definidas mediante clases de Hölder abstractas dadas en términos interpolatorios que fueron obtenidas en la Sección 4.1.1.

Recordemos que en esta sección, si no se aclara lo contrario, las familias de funciones sobre las que definiremos los índices vienen dadas por:

$$\phi_{w,Q}(s) = K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty)$$

para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ de lados paralelos a los ejes coordenados, donde w es un peso en \mathbb{R}^n y $p \in [1, \infty)$. Además consideraremos

$$\begin{aligned}\phi_{w,Q,1/p'}(s) &= s^{-1/p'} K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty), 0 < s < |Q| \\ \phi_{w,Q,1/p',q}(s) &= \left(s^{-1/p'} K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty) \right)^q, 0 < s < |Q|\end{aligned}$$

Entonces, la caracterización de las clases de Hölder reversas clásicas en términos de los índices para estas familias de funciones viene expresada en el siguiente

Teorema 113 (i) Sea $p > 1$, entonces

$$RH_p = \{w : \text{ind}\{\phi_{w,Q,1/p',p}\}_Q > 0\} = \{w : \text{ind}\{\phi_{w,Q}\}_Q > 1/p'\}$$

(ii)

$$RH = \{w : \text{ind}\{\phi_{w,Q}\}_Q > 0\}$$

(iii)

$$RH = RH_{L \text{Log} L}.$$

Demostración. (i) Supongamos que $w \in RH_p$. Entonces por el Teorema 104 y la equivalencia (33) que se demuestra en el curso de su demostración (ver observación 105) tenemos que para todos los cubos Q , $w\chi_Q \in RH_{1/p',p}(L^1(Q), L^\infty(Q))$ y

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1/p',p}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \approx \|w\|_{RH_p}.$$

Además, por dicho Teorema 104 existe una constante $c > 0$, tal que para todos los cubos Q vale

$$\int_0^t \phi_{Q,1/p',p}(s) \frac{ds}{s} \leq c \|w\|_{RH_p}^p \phi_{Q,1/p',p}(s), \quad 0 < t < |Q|.$$

Luego, por la proposición 98 seguida por la proposición 100, resulta

$$\text{ind}\{\phi_{w,Q}\}_Q > 1/p'$$

Recíprocamente, supongamos que w es tal que $\text{ind}\{\phi_{w,Q,1/p',p}\}_Q > 0$. Entonces, por proposición 98, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^t \phi_{Q,1/p',p}(s) \frac{ds}{s} \leq c \phi_{Q,1/p',p}(s), \quad 0 < t < |Q|.$$

Se sigue por teorema 104 que

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1-1/p,p}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \preceq c,$$

y, además, $w \in RH_p$, con

$$\|w\|_{RH_p} \preceq c.$$

(ii) Supóngase que $w \in RH$, entonces $w \in RH_p$ para algún $p > 1$. Entonces, por la parte (i) de este teorema, $ind\{\phi_{w,Q}\}_Q > 1/p' > 0$. Recíprocamente, si w es un peso tal que $ind\{\phi_{w,Q}\}_Q > 0$, entonces podemos elegir $p > 1$ tan próximo a 1 como para que $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} < ind\{\phi_{w,Q}\}_Q$. Por lo tanto, por (i) tenemos que $w \in RH_p \subset RH$.

(iii) Primero veremos la inclusión $RH \subset RH_{LL\log L}$. Supongamos que $w \in RH$, entonces existe $p > 1$ tal que $w \in RH_p$. Ahora, es fácil comprobar que para $0 < \alpha < 1$, tenemos que $\log(e + \frac{1}{x}) \preceq x^{-\alpha}$, $x \in (0, 1)$; en consecuencia, por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (w\chi_Q)^*(s) \log(e + \frac{|Q|}{s}) ds \\ & \preceq \left(\frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (w\chi_Q)^*(s)^p ds \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} |Q|^{-\alpha p'} s^{\alpha p'} ds \right)^{1/p'} \\ & \preceq \left(\frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (w\chi_Q)^*(s)^p ds \right)^{1/p} \\ & \preceq \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (w\chi_Q)^*(s) ds \text{ (ya que } w \in RH_p \text{)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la conclusión se sigue del lema 106.

Probemos ahora la inclusión opuesta. Supongamos que $w \in RH_{LL\log L}$. Por el teorema 107, para todos los cubos Q tenemos que $w\chi_Q \in RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))$ y, que, $\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \approx \|w\|_{RH_{LL\log L}}$. Se sigue que

$$\int_0^t K(s, w\chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)) \frac{ds}{s} \leq \|w\|_{RH_{LL\log L}} K(t, w\chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)).$$

En consecuencia, por la proposición 98

$$ind\{K(\cdot, w\chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))\}_Q > 0$$

. ■

4.2. Clases de Muckenhoupt

En esta sección nos ocuparemos de la relación entre los índices y los pesos A_p de Muckenhoupt. Como mencionamos más arriba (ver 26) estos pesos han sido muy estudiados debido a su interés en la acotación de los operadores de Hardy-Littlewood M y de Hilbert H , sus vínculos con los espacios BMO vía el Lema de John-Nirenberg, y con el operador maximal sharp $M^\#$, y la relación con las clases de Hölder-Reversas RH_p y RH . En relación con estas últimas, un conocido resultado de R. Coifman y C. Fefferman establece que $\bigcup_{p \geq 1} A_p = A_\infty = RH =$

$\bigcup_{q > 1} RH_q$ (cf. [30]). En particular $\exists p > 1 : w \in A_p$ si y solo $\exists q > 1 : w \in RH_q$;

nótese que aquí usamos otra letra q en lugar de p al indexar las clases RH para evitar que se establezcan inadvertidamente asociaciones no válidas entre la clase de Muckenhoupt y la clase Hölder-Reversa a la que pertenece un peso $w \in A_\infty = RH$ -algunos resultados al respecto pueden verse en [33] y las referencias allí citadas-.

Empezaremos entonces estableciendo algunas cuestiones vinculando distintos tipos de índices, los resultados obtenidos en las secciones anteriores para las clases RH y RH_q , y la clase A_∞ .

Comenzaremos mirando otra noción de índices introducida en [2], donde se utilizan esos índices para estudiar la clase A_∞ , y analizaremos la relación con los que introdujimos en la sección anterior. Para describir la relación en forma abreviada podemos señalar que en [2] se plantean índices para las k -funcionales para (L^1, L^∞) de las restricciones $w\chi_Q$, de los pesos en los cubos Q , en lugar de hacerlo para las K -funcionales para (L^1, L^∞) de los $w\chi_Q$. Hace falta recordar que la k -funcional de (L^1, L^∞) de una función f viene dada por su reordenamiento decreciente $k(t, f, L^1, L^\infty) = f^*(t)$ mientras que la K -funcional de (L^1, L^∞) de f viene dada por su funcional $K(t, f, L^1, L^\infty) = tf^{**}(t) = \int_0^t f^*(s) ds$, es decir que $\frac{dk(t, f, L^1, L^\infty)}{dt} = K(t, f, L^1, L^\infty)$. El manejo de los índices que propusimos es quizás más flexible; la teoría estudiada aquí abarca todo tipo de familia ϕ de funciones indexadas por cubos tales que $\phi(t)$ sea creciente y $\frac{\phi(t)}{t}$ decreciente, no solo familias de funciones generadas por el funtor $K(\cdot, \cdot, L^1, L^\infty)$, e incluso en este caso al utilizar la equivalencia de Herz-Stein evitamos tener que tratar con lemas de descomposición tipo Calderón-Zygmund como en [2]. De todos modos los autores de dicho trabajo establecen, por otros medios, varios resultados interesantes algunos de los cuales queremos recuperar mediante nuestros índices.

En cualquier caso empezaremos estableciendo la relación entre ambos tipos de índices y algunos resultados.

4.2.1. Índices de reordenamientos versus Índices de K -funcionales y clases de Muckenhoupt

Empecemos estableciendo la noción de índice que se define en [2]:

Definición 114 *Se dice que un peso w tiene índice finito, en el sentido de [2], si existen constantes $r \in (0, 1)$ y $\lambda, \tilde{\gamma} > 0$ tales que, para todos los cubos Q , si $0 < s \leq t < r|Q|$, se cumple*

$$\frac{(w\chi_Q)^*(s)}{(w\chi_Q)^*(t)} \leq \tilde{\gamma} \left(\frac{s}{t}\right)^{-\lambda} \quad (47)$$

Definición 115 *En el contexto de la definición de arriba en [2] los autores definen la siguiente noción de índice⁴:*

$$\widetilde{ind}(w) = \inf\{\lambda > 0 / \exists r \in (0, 1), \tilde{\gamma} > 0 \text{ se cumplen las condiciones de 114}\}$$

donde se entiende que .

Posteriormente en ese trabajo se prueba que

$$A_\infty = \{w : \widetilde{ind}(w) < 1\} \quad (48)$$

⁴En [2] los autores, naturalmente, notan ind , lo que aquí notamos \widetilde{ind} para evitar confusiones.

, aunque en rigor podría escribirse $\widetilde{ind}(k(\cdot, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q)))$, ya que en realidad la definición depende de los reordenamientos decrecientes

$$w\chi_Q^* = k(\cdot, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))$$

más que del propio w en el sentido de que pesos equimedibles tienen el mismo reordenamiento decreciente y por lo tanto el mismo índice; sin embargo es más cómodo escribir $\widetilde{ind}(w)$ de modo que mantendremos la notación. A menudo, para simplificar la notación, escribiremos $ind\{w\}$ para denotar

$$ind\{w\} = ind\{\phi_{w,Q}\}_Q = ind\{K(\cdot, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))\}_Q$$

. Usaremos la notación simplificada, $ind\{w\}$, en esta sección y en las siguientes pero volveremos a las notaciones originales como $ind\{\phi_Q\}_Q$, $ind\{\phi_{Q,\beta}\}_Q$, y $ind\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$ cuando una demostración requiera referirse a ciertos cubos o cuando tengamos que usar otras familias de funciones indexadas por cubos distintas de las $K(\cdot, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))$.

Para comparación, y teniendo en cuenta que

$$A_\infty = RH$$

(cf. [40]) nuestro Teorema 113 se lee en forma simplificada como:

Teorema 116 (i) Sea $p > 1$, entonces

$$RH_p = \{w : ind\{w\} > 1/p'\}$$

(ii)

$$A_\infty = \{w : ind\{w\} > 0\} \quad (49)$$

(iii)

$$RH_{LL\log L} = A_\infty$$

Observación 117 Como es claro, la condición (47) dice que $s^\lambda(w\chi_Q)^*(s)$ es casi creciente. Los índices \widetilde{ind} funcionan, por decirlo así, en sentido opuesto de los ind , ya que las $K(t, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q)) = \int_0^t w\chi_Q^*(s) ds$ son crecientes (con $\frac{K(t, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))}{t}$ decreciente), mientras que las $k(t, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q)) = w\chi_Q^*(t)$ son decrecientes. Otra manera sugestiva de leer 114 es observar que equivale a pedir que para todos los cubos Q , ocurra

$$s(w\chi_Q)^*(s) s^{-(1-\lambda)} \leq \tilde{\gamma} t(w\chi_Q)^*(t) t^{-(1-\lambda)}$$

, siempre que $0 < s \leq t < r|Q|$, es decir que la función $s(w\chi_Q)^*(s) s^{-(1-\lambda)}$ es casi creciente (es decir a.i.) en $(0, r|Q|)$, con constante de casi crecimiento $\tilde{\gamma}$ independiente of Q . En ese sentido el comportamiento de $s(w\chi_Q)^*(s)$ es en cierta forma similar al de $\int_0^t w\chi_Q^*(s) ds$ y la diferencia es análoga a la que se establece entre las nociones de L^1 y débil- L^1 . En ese sentido la definición de \widetilde{ind} se puede reformular como

$$\begin{aligned} \widetilde{ind}(w) &= \sup_{\delta > 0} \{\delta > 0 / \exists \tilde{\gamma} > 0, r \in (0, 1) : \forall Q \text{ cubo} \\ & s(w\chi_Q)^*(s) s^{-\delta} \text{ es a.i. en } (0, r|Q|) \text{ con constante } \tilde{\gamma}\}. \end{aligned}$$

. Si aplicamos nuestra definición a la familia de funciones

$$\{t\phi'_Q(t)\}_Q = \{t(w\chi_Q)^*(t)\}_Q$$

siendo $\phi_Q(t) = \int_0^t w\chi_Q^*(s) ds$ vemos que formalmente se tiene

$$\widetilde{ind}(w) = ind\{t\phi'_Q(t)\}_Q = ind\{t(w\chi_Q)^*(t)\}_Q.$$

El teorema que sigue establece la relación entre ambas nociones de índices.

Teorema 118

$$ind\{K(\cdot, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))\}_Q > 0 \Leftrightarrow \widetilde{ind}(w) < 1. \quad (50)$$

Demostración. Supongamos que $\widetilde{ind}(w) < 1$. Entonces existe $\exists \delta > 0, \gamma \in (0, 1)$ tal que para todos los cubos Q , $t\phi'_Q(t)t^{-\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$. Se sigue que para cualesquiera $0 < t < h < \gamma|Q|$, tenemos

$$\begin{aligned} \phi_Q(t)t^{-\delta} &= t^{-\delta} \int_0^t \phi'_Q(s)s^{1-\delta}s^{\delta-1} ds \\ &\leq Ct^{-\delta}\phi'_Q(t)t^{1-\delta}\frac{t^\delta}{\delta} \\ &\leq \frac{C}{\delta}\phi'_Q(h)h^{1-\delta} \\ &= \frac{C}{\delta}h^{-\delta}(\phi'_Q(h)h) \\ &\leq \frac{C}{\delta}h^{-\delta} \int_0^h \phi'_Q(r) dr \\ &= \frac{C}{\delta}h^{-\delta}\phi_Q(h). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todos los cubos Q , $t^{-\delta}\phi_Q(t)$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$. Luego, $ind\{\phi_Q\}_Q > 0$.

Recíprocamente, si $ind\{\phi_Q\}_Q > 0$, entonces por el Teorema 113 y el Lema 97 existen $p > 1, C > 0$, tales que para $t \in (0, |Q|)$ es

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t [(w\chi_Q)^{**}(s)]^p ds \right\}^{1/p} \leq C \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds \right\},$$

lo que implica

$$\left\{ \int_0^t [(w\chi_Q)^*(s)]^p ds \right\}^{1/p} \leq C \left\{ t^{-1/p'} \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds \right\}. \quad (51)$$

Sea $\rho > 1$ un valor que precisaremos más abajo. Entonces, para $t \in \left(0, \frac{|Q|}{\rho}\right)$, tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds \\
& \leq \left\{ \int_0^t [(w\chi_Q)^*(s)]^p ds \right\}^{1/p} t^{1/p'} \\
& \leq \left\{ \int_0^{t\rho} [(w\chi_Q)^*(s)]^p ds \right\}^{1/p} t^{1/p'} \\
& \leq C \left\{ (t\rho)^{-1/p'} \int_0^{\rho t} (w\chi_Q)^*(s) ds \right\} t^{1/p'} \text{ (por (51))} \\
& = C\rho^{-1/p'} \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds + C\rho^{-1/p'} \int_t^{\rho t} (w\chi_Q)^*(s) ds
\end{aligned}$$

Reordenando términos, y usando el hecho de que $(w\chi_Q)^*$ es decreciente, encontramos que

$$(1 - C\rho^{-1/p'}) \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds \leq C\rho^{-1/p'}(\rho - 1)t(w\chi_Q)^*(t).$$

Por tanto, si elegimos $\rho > 1$ tal que $C\rho^{-1/p'} < 1$ y usamos una vez más el hecho de que $(w\chi_Q)^*$ decrece, obtenemos que en $\left(0, \frac{|Q|}{\rho}\right)$ se tiene

$$t(w\chi_Q)^*(t) \leq \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds \leq \frac{C\rho^{-1/p'}(\rho - 1)}{(1 - C\rho^{-1/p'})} t(w\chi_Q)^*(t). \quad (52)$$

Ahora, como $\text{ind}\{\phi_Q\}_Q > 0$, existen $\delta > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ tales que $t^{-\delta} \int_0^t (w\chi_Q)^*(s) ds$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$. En consecuencia, si además pedimos que $\rho > 1/\gamma$, vemos que (52) implica que $t^{-\delta} [t(w\chi_Q)^*(t)]$ es a.i. y por lo tanto, por la observación 117 encontramos que

$$\widetilde{\text{ind}}(w) < 1$$

, como queríamos demostrar. ■

Observación 119 *Es interesante observar que aunque la noción de [2] fue desarrollada, aparentemente, en forma independiente de la teoría clásica de índices, y de la teoría de interpolación, uno de los primeros resultados que se requiere obtener en [2] es el control de las integrales de la forma $\int_0^t f(t) dt$ por las funciones $tf(t)$, cuando f es decreciente, relación que ya señalamos en la observación 117.*

4.2.2. Clases A_p y A_∞

Para continuar la caracterización de los pesos A_p , con $p > 1$, mediante índices utilizaremos un importante resultado debido a J. O. Strömberg y R. L. Wheeden que podemos recuperar usando índices. La demostración original, por otros medios, se puede ver en [109], y con un argumento diferente en [61].

El resultado en cuestión es el siguiente:

Teorema 120 $w \in RH_p$ si y solo si $w^p \in A_\infty$.

Demostración. Supóngase que $w^p \in A_\infty$. Por la caracterización de $A_\infty = RH$ dada en el Teorema 113 (ii) sabemos que $w^p \in A_\infty$ si y solo si

$$\text{ind}\{K(t, w^p \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))\}_Q > 0. \quad (53)$$

De allí se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $\frac{K(t, w^p \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))}{t^\delta}$ es a.i. en $(0, \gamma|Q|)$; pero la demostración del Teorema 118 muestra que $[(w \chi_Q)^*(s)]^p s^{1-\delta}$ es a.i.; por lo tanto, elevando esta función a la potencia $1/p$, tenemos que $(w \chi_Q)^*(s) s^{\frac{1-\delta}{p}}$ también es casi creciente. Por tanto, si ponemos $\mu = 1 - 1/p + \delta/p$, nos queda $\frac{1-\delta}{p} = 1 - \mu$, y usando otra vez la demostración del Teorema 118, tenemos que $K(s, w \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)) s^{-\mu} = K(s, w \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)) s^{-1/p' - \delta/p}$ es a.i., de donde

$$\text{ind}\{K(\cdot, w \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))\}_Q > 1/p'. \quad (54)$$

, y de allí, por el Teorema 113:

$$w \in RH_p.$$

Para la recíproca, vemos que todos los pasos pueden revertirse. De hecho, supongamos que $w \in RH_p$. Entonces vale (54) y, en consecuencia, para algún $\delta > 0$ resulta que $K(s, w \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)) s^{-1/p' - \delta/p}$ es casi creciente. Ahora, la demostración del Teorema 118 implica que $(w \chi_Q)^*(s) s^{\frac{1-\delta}{p}}$ es a.i.; por lo tanto, $[(w \chi_Q)^*(s)]^p s^{1-\delta}$ es a.i., y usando de nuevo la demostración del Teorema 118, $\frac{K(t, w^p \chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))}{t^\delta}$ es casi creciente. Por ende se cumple (53), lo que nos proporciona que $w^p \in A_\infty$. ■

Observación 121 Recordemos que, en el contexto de la teoría de pesos de Muckenhoupt, para $p > 1$ y para cualquier peso w , se utiliza habitualmente σ para designar otro peso, $\sigma = w^{1-p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y hay una estrecha relación estrecha recíproca entre w y σ ; de hecho, la condición usual A_p

$$\|w\|_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty$$

se puede escribir como

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma(x) dx \right)^{1/p'} < \infty$$

y entonces es obvio que $w \in A_p \Leftrightarrow \sigma \in A_{p'}$. y $\|w\|_{A_p} = \|\sigma\|_{A_{p'}}$

A continuación estableceremos la relación de ind con A_p , y dejaremos asentado previamente un lema que está implícito en las demostraciones de los teoremas 104 y 118, pero que escribimos aislado para mayor claridad:

Lema 122 Si $\text{ind}\{w\} > 0$ entonces $\frac{K(\cdot, w \chi_Q; L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w \chi_Q^*(\cdot)$ en $(0, \gamma|Q|)$ para todo cubo Q con $\gamma \in (0, 1)$ independiente de Q .

Demostración. Por el teorema 116 existen $p > 1$ y $C > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \quad (55)$$

para todo Q y podemos elegir $C = \|w\|_{RH_p}$ (el ínfimo de las constantes para las cuales la desigualdad (55) ocurre para todo Q). Ahora recordando la definición de los operadores M_{p,Q_0} , es decir

$$M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w\chi_{Q_0}(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

, donde si $p = 1$ queda el operador maximal local de Hardy-Littlewood restringido al cubo Q_0 , o sea $M_{Q_0} = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$. Entonces, fijando un cubo Q_0 , tenemos las siguientes desigualdades para todo $x \in Q_0$, tomando supremos en (55):

$$M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) \leq CM_{Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) \quad (56)$$

Por las equivalencias de Herz-Stein (cf. [24, Teorema 3.8, pag 122]) aplicadas a M_{Q_0} , tenemos que, para $0 < t < |Q_0|$, y con constantes absolutas independientes de w , y Q_0 ,

$$\begin{aligned} (M_{p,Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) &\approx \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p}, \\ (M_{Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) &\approx \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \end{aligned}$$

Por las mencionadas desigualdades de Herz-Stein y (56) obtenemos para cualquier cubo Q_0 y con una constante universal C independiente de Q_0 que:

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)^p ds \right\}^{1/p} \leq C \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds \quad (57)$$

para todo $0 < t < |Q_0|$. Ahora, repitiendo un argumento del teorema 118 consideramos $\gamma \in (0, 1)$ a ser elegido más abajo. Usando la desigualdad de Hölder y (57) para t/γ , donde $t \in (0, \gamma|Q_0|]$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds &\leq \left(\int_0^t [(w\chi_{Q_0})^*(s)]^p ds \right)^{1/p} t^{1/p'} \\ &\leq \left(\int_0^{t/\gamma} [(w\chi_{Q_0})^*(s)]^p ds \right)^{1/p} t^{1/p'} \\ &= \left(\frac{1}{t/\gamma} \int_0^{t/\gamma} [(w\chi_{Q_0})^*(s)]^p ds \right)^{1/p} (t/\gamma) \gamma^{1/p'} \\ &\leq C \left(\frac{1}{t/\gamma} \int_0^{t/\gamma} (w\chi_{Q_0})^*(s) ds \right) (t/\gamma) \gamma^{1/p'} \\ &= C \gamma^{1/p'} \int_0^{t/\gamma} (w\chi_{Q_0})^*(s) ds \\ &= C \gamma^{1/p'} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds + C \gamma^{1/p'} \int_t^{t/\gamma} (w\chi_{Q_0})^*(s) ds \end{aligned}$$

$$= C\rho^{-1/p'} \int_0^t (w\chi_Q)^*(s)ds + C\rho^{-1/p'} \int_t^{\rho t} (w\chi_Q)^*(s)ds$$

Reordenando términos y simplificando se tiene

$$\int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)ds \leq \frac{C\gamma^{1/p'}}{1-C\gamma^{1/p'}} \int_t^{t/\gamma} (w\chi_{Q_0})^*(s)ds$$

y entonces usando que $(w\chi_{Q_0})^*$ es decreciente en ambos lados:

$$(w\chi_{Q_0})^*(t)(t-0) \leq \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)ds \leq \frac{C\gamma^{1/p'}}{1-C\gamma^{1/p'}} (w\chi_{Q_0})^*(t)t(1/\gamma-1)$$

por lo tanto, si elegimos $\gamma \in (0,1)$ suficientemente pequeño como para que $C\gamma^{1/p'} < 1$, entonces para $\tilde{C} = \frac{C\gamma^{1/p'}}{1-C\gamma^{1/p'}}(1/\gamma-1)$ se obtiene que

$$(w\chi_{Q_0})^*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)ds \leq \tilde{C}(w\chi_{Q_0})^*(t)$$

Teniendo en cuenta que γ fue elegido en términos de $\|w\|_{RH_p}$ y de las constantes de la equivalencia de Herz-Stein (cf. 8) que no dependen de Q y que $K(t, w\chi_Q, L^1, L^\infty) = \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s)ds$, hemos probado que $\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot)$ en $(0, \gamma|Q|]$ para todo cubo Q . ■

Observación 123 *En el lema de arriba podemos asumir que $\gamma \geq \frac{1}{2}$, pagando el precio de mayores constantes. Esto puede ser demostrado directamente mediante una descomposición diádica adecuada de subconjuntos de Q . Un argumento más corto usando resultados bien conocidos es como sigue: $\text{ind}\{w\} > 0$ implica desigualdades de Hölder reversas para algún $p > 1$ en todo cubo Q y en particular en cualquier cubo $Q \subset Q_0$, para un cubo fijo Q_0 , y entonces $w\chi_{Q_0} \in \bigcup_{p>1} RH_p = A_\infty(Q_0) = \bigcup_{p>1} A_p(Q_0)$, lo que significa que $w\chi_{Q_0}$ satisface una condición A_p para los cubos Q contenidos en Q_0 para algún $p > 1$; entonces es sabido que $w\chi_{Q_0}^*$ es un peso A_p en $(0, |Q_0|]$ (cf. [114]), por lo tanto es doblante (cf. [49]) en $(0, |Q_0|]$.*

Es fácil ver que la propiedad de ser doblante en la recta, para $w\chi_{Q_0}^$, implica que $w\chi_{Q_0}^*(J) \leq r.w\chi_{Q_0}^*(L)$ para alguna constante $r > 1$ si J y L son intervalos adyacentes de la misma longitud. Ahora, para $t > 0$ tal que $(3/2)t \leq |Q|$, usando el decrecimiento de $w\chi_{Q_0}^*$ y la propiedad de ser doblante para los intervalos $J = [t/2, t]$ y $L = [t, (3/2)t]$ tenemos*

$$\begin{aligned} (t/2).w\chi_{Q_0}^*(t) &\geq \int_t^{(3/2)t} w\chi_{Q_0}^*(s)ds \geq \\ r. \int_{t/2}^t w\chi_{Q_0}^*(s)ds &\geq r.(t/2).w\chi_{Q_0}^*(t/2) \end{aligned}$$

, luego

$$w\chi_{Q_0}^*(t) \geq r.w\chi_{Q_0}^*(t/2)$$

. Ahora, si $\gamma < \frac{1}{2}$ y $\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot)$ en $(0, \gamma|Q|]$ entonces para $t \in (0, \frac{1}{2}|Q|]$ fijamos $m \in \mathbb{N}$, con $m > \log_2\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, por tanto $t/2^m \in (0, \gamma|Q|]$ y usando

el resultado del lema anterior en $(0, \gamma |Q|]$ y el decrecimiento de $\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)}$ obtenemos

$$\begin{aligned} w\chi_{Q_0}^*(t) &\geq r^m \cdot w\chi_{Q_0}^*(t/2^m) \geq r^m \tilde{C} \frac{1}{(t/2^m)} \int_0^{t/2^m} w\chi_{Q_0}^*(s) ds \\ &= r^m \tilde{C} \frac{K(t/2^m, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(t/2^m)} \geq r^m \tilde{C} \frac{K(t, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{t} \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{K(t, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{t} \leq w\chi_{Q_0}^*(t) \leq r^m \tilde{C} \frac{K(t, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{t}$$

para $t \in (0, \frac{1}{2} |Q|]$.

Ahora ya podemos ver la caracterización por índices de los pesos A_p :

Teorema 124 (i) Sea $p > 1$, entonces

$$A_p = \{w : \text{ind}\{w\} \cdot \text{ind}\{\sigma\} > 0\}$$

(ii) $A_\infty = \{w : \text{ind}\{w\} > 0\}$

Observación: como por definición $\text{ind} \geq 0$, la condición $\text{ind}\{w\} \cdot \text{ind}\{\sigma\} > 0$ es solo un atajo para decir que $\text{ind}\{w\} > 0$ y $\text{ind}\{\sigma\} > 0$.

Demostración. (ii) Resulta inmediato del teorema 116 ya que, como mencionamos, es bien sabido que $A_\infty = RH$ (ver, por ejemplo, [49]). Así que solo necesitamos probar (i). Además es trivial que si $w \in A_p$ entonces $\sigma \in A_{p'}$, por lo tanto $w, \sigma \in A_\infty = RH$, luego, por (ii) sabemos que $\text{ind}\{w\} > 0$ y $\text{ind}\{\sigma\} > 0$. Entonces solo queda por probar que si $\text{ind}\{w\} > 0$ y $\text{ind}\{\sigma\} > 0$, entonces $w \in A_p$.

Usando el lema 122 tenemos que existen algún $\gamma_1 \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot)$$

en $(0, \gamma_1 |Q|]$ para todo cubo Q , y algún $\gamma_2 \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{K(\cdot, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx \sigma\chi_Q^*(\cdot)$$

en $(0, \gamma_2 |Q|]$. Por la observación 123 podemos tomar $\gamma_j \geq \frac{1}{2}$; entonces eligiendo $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{1}{2}$, para cierta constante C_0 independiente de Q , tenemos

$$\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot), \text{ y } \frac{K(\cdot, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx \sigma\chi_Q^*(\cdot) \quad (58)$$

en $(0, \gamma |Q|]$.

Sea Q un cubo, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma(x) dx \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (w\chi_Q)^*(s) ds \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} (\sigma\chi_Q)^*(s) ds \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{K(|Q|, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{|Q|} \right) \left(\frac{K(|Q|, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{|Q|} \right)^{p-1} \\
&\leq \left(\frac{K(\gamma|Q|, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{\gamma|Q|} \right) \left(\frac{K(\gamma|Q|, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{\gamma|Q|} \right)^{p-1}
\end{aligned}$$

usando en la última desigualdad que las funciones $\frac{K(\cdot)}{(\cdot)}$ son decrecientes.

Ahora, por 58 y el hecho de que $w\chi_Q^*(s) \leq w\chi_{Q_0}^*(s)$ para todo s , porque $w\chi_Q(x) \leq w\chi_{Q_0}(x)$ para todo x se tiene

$$\begin{aligned}
I &\leq \left(\frac{K(\gamma|Q|, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{\gamma|Q|} \right) \left(\frac{K(\gamma|Q|, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{\gamma|Q|} \right)^{p-1} \\
&\leq C_0 w\chi_Q^*(\gamma|Q|) (\sigma\chi_Q^*(\gamma|Q|))^{p-1}
\end{aligned}$$

De la definición de reordenamientos decrecientes, es fácil ver que para $\alpha > 0$ es $(\sigma\chi_Q^*(\alpha|Q|))^{p-1} = (w^{1-p'}\chi_Q^*(\alpha|Q|))^{p-1} \leq \frac{1}{w\chi_Q^*((1-\alpha)|Q|)}$. De hecho si tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos medianas de $w\chi_Q^*$ y $\frac{1}{w\chi_Q^*}$, y siendo $\gamma \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
I &\leq C_0 w\chi_Q^*(\gamma|Q|) (\sigma\chi_Q^*(\gamma|Q|))^{p-1} \\
&\leq C_0 \frac{w\chi_{Q_0}^*(\gamma|Q|)}{w\chi_Q^*((1-\gamma)|Q|)} \leq C_0 \frac{w\chi_{Q_0}^*(\frac{1}{2}|Q|)}{w\chi_Q^*(\frac{1}{2}|Q|)} = C_0
\end{aligned}$$

, esto significa que para una constante C_0 independiente de Q tenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma(x) dx \right)^{p-1} \leq C_0$$

, es decir que $w \in A_p$. ■

Observación 125 La demostración del último teorema nos muestra que $w \in A_p$ si $\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot)$ y $\frac{K(\cdot, \sigma\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx \sigma\chi_Q^*(\cdot)$ en $(0, \frac{1}{2}|Q|]$. En tal caso, si $\alpha \in [0, 1]$ tenemos que $w^\alpha \in A_p$. En efecto: si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$ es trivial, y si $0 < \alpha < 1$ entonces como $\frac{K(\cdot, w\chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)} \approx w\chi_Q^*(\cdot)$ en $(0, \frac{1}{2}|Q|]$ tenemos,

para cualquier Q , que $w^\alpha \chi_Q^*(\cdot) \approx \frac{K(\cdot, w^\alpha \chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)}$. Veamos esto último:

$$\begin{aligned} w^\alpha \chi_Q^*(t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t (w^\alpha \chi_{Q_0})^*(s) ds = \frac{K(t, w^\alpha \chi_Q, L^1, L^\infty)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t ((w \chi_{Q_0})^*(s))^\alpha ds \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t (w \chi_{Q_0})^*(s) ds \right)^\alpha \quad (\text{Hölder}) \\ &= \left(\frac{K(t, w \chi_Q, L^1, L^\infty)}{t} \right)^\alpha \leq C (w \chi_Q^*(t))^\alpha = C w^\alpha \chi_Q^*(t) \end{aligned}$$

y a partir de esto y usando también $\sigma^\alpha \chi_Q^*(\cdot) \approx \frac{K(\cdot, \sigma^\alpha \chi_Q, L^1, L^\infty)}{(\cdot)}$ que se obtiene de manera análoga, se sigue que $w^\alpha \in A_p$.

Observación 126 Cuando $p \in (1, 2]$ podemos reescribir la primera declaración del último teorema en términos de w^{-1} en lugar de $\sigma = w^{1-p'}$. Desde luego, $w^{-1} = \sigma^{p-1}$ y $\sigma = (w^{-1})^{p'-1}$, luego cada uno es una potencia positiva del otro y es fácil de ver que $\text{ind}\{w^{-1}\} > 0$ si y solo si $\text{ind}\{\sigma\} > 0$. Una manera de demostrar esto es por medio del teorema de Strömberg-Wheeden, que probamos arriba -120- utilizando índices, y cuyo enunciado recordamos: $u \in RH_q \Leftrightarrow u^q \in A_\infty$; usando esto junto con 116 tenemos que:

$$\text{ind}\{\sigma\} > 0 \Leftrightarrow \sigma \in RH = A_\infty \Leftrightarrow \sigma = (w^{-1})^{p'-1} \in A_\infty$$

, y si $p' - 1 > 1$ (lo que significa que $p < 2$), por Strömberg-Wheeden tenemos que

$$w^{-1} \in RH_{p'-1}$$

y aplicando el teorema 116 a w^{-1} y $p' - 1$ se tiene:

$$\text{ind}\{w^{-1}\} > 1/(p' - 1)'$$

,o sea

$$\text{ind}\{w^{-1}\} > 2 - p$$

Por otro lado si $p < 2$, es decir $p' - 1 > 1$, y tenemos

$$\text{ind}\{w^{-1}\} > 2 - p = 1/(p' - 1)'$$

, luego

$$w^{-1} \in RH_{p'-1}$$

y por Strömberg-Wheeden queda

$$\text{ind}\{\sigma\} > 0$$

Luego, tenemos que para $1 \leq p < 2$ se tiene que

$$\text{ind}\{\sigma\} > 0 \Leftrightarrow \text{ind}\{w^{-1}\} > 2 - p$$

Además si $p = 2$ entonces $w^{-1} = \sigma$, y de nuevo tenemos

$$\text{ind}\{\sigma\} > 0 \Leftrightarrow \text{ind}\{w^{-1}\} > 0 = 2 - p$$

Tomando en cuenta que $w \in A_p \Leftrightarrow \sigma \in A_{p'}$ y $p > 2 \Leftrightarrow 1 < p \leq 2$ llegamos al siguiente:

Corolario 127 (i) Dado p con $1 < p \leq 2$ vale que

$$w \in A_p \Leftrightarrow \text{ind}\{w\} > 0 \text{ y } \text{ind}\{w^{-1}\} > 2 - p$$

(ii) Dado $p > 2$ vale que

$$w \in A_p \Leftrightarrow \text{ind}\{\sigma\} > 0 \text{ y } \text{ind}\{\sigma^{-1}\} > 2 - p'$$

4.2.3. El caso endpoint

Como ya mencionamos las clases A_p están anidadas por inclusión y $A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$. Ahora queremos ver el otro extremo, considerando las intersecciones de clases A_p . Recordemos que para $p = 1$ se dice que $w \in A_1$ si existe $C > 0$ que depende solo de w tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y para casi todo $x \in Q$ vale que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq Cw(x).$$

, o equivalente $w \in A_1$ si y solo si existe $C > 0$ tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$Mw(x) \leq Cw(x)$$

. Cabe mencionar que $A_1 \subsetneq \bigcap_{p>1} A_p$.

Otra clase de pesos incluidos en todos los A_p con $p > 1$ introducido por R. L. Johnson y C. J. Neugebauer en [33] que nos interesa considerar es $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$, correspondiente a funciones reales en \mathbb{R}^n , positivas que son, junto con su recíproca, de oscilación media acotada. Para mayor precisión vamos a introducir un par de definiciones:

Definición 128 Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ la función maximal sharp de Fefferman-Stein $f^\#$ se define por

$$f^\#(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx.$$

siendo f_Q el promedio de f en Q es decir $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx = \frac{f(Q)}{|Q|}$, donde notamos $f(Q) = \int_Q f(x) dx$.

Observación 129 A veces denotaremos $M^\# f$ en lugar de $f^\#$ cuando queremos enfatizar o estudiar el aspecto de operador de la aplicación $f \mapsto f^\#$. Teniendo en cuenta su uso habitual no reemplazaremos el término “sharp” por algún adjetivo en español.

Definición 130 $BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : f^\# \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ es el espacio de funciones con oscilación media acotada, y $\|f\|_* = \|f^\#\|_\infty$.

Observación 131 Debe observarse que $\|\cdot\|_*$ es una seminorma para $BMO(\mathbb{R}^n)$ puesto que $\|f^\#\|_\infty = 0$ si y solo si f es constante (a.e.). Es usual identificar BMO con las clases cociente respecto de las funciones constantes en casi todo punto con lo que $\|\cdot\|_*$ resulta una norma en el espacio cociente (a veces notaremos $\|f\|_* = \|f\|_{BMO}$ si queremos destacar el papel de BMO como espacio normado).

A continuación consideramos las funciones positivas que son BMO junto con sus recíprocas:

Definición 132 $BMO_* = \{w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : w \in BMO, \frac{1}{w} \in BMO\}$

Observación 133 *A diferencia de lo que pasaba con los promedios de potencias de pesos, donde por la desigualdad de Hölder tenemos que para $p > 1$ es*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

, y solo aquellos pesos $w \in RH_p$ satisfacen una desigualdad reversa de la forma

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)$$

, para las funciones maximales sharp definidas por potencias de $|f(x) - f_Q|$, en cambio, es conocido que son equivalentes para $1 \leq p < \infty$, es decir que:

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q (|f(x) - f_Q|) dx$$

es equivalente a

$$\|f\|_{*,p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (|f(x) - f_Q|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

, o sea $\|f\|_{*,p} \simeq \|f\|_*$, ya que vale

$$\|f\|_* \leq \|f\|_{*,p} \leq c \|f\|_*$$

para $p \in [1, \infty)$ con constante c dependiendo solo de p y n , e independiente de f y Q . La desigualdad izquierda, $\|f\|_* \leq \|f\|_{*,p}$, es trivial por la desigualdad de Hölder, mientras que la de la derecha, $\|f\|_{*,p} \leq c \|f\|_*$, se sigue de la desigualdad de John-Nirenberg (cf. [63], observación 3.19) una de cuyas versiones recordamos a continuación (cf. [24]):

Teorema 134 (John-Nirenberg) *Existen constantes c_1 y c_2 dependientes solo de n tal que para toda $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y para todos los cubos Q*

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ x \in Q : f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q (|f(x) - f_Q|) dx \right) \right) dx > \lambda \right\} \right| \\ & \leq c_1 \exp\left(\frac{-c_2 \lambda}{\|f\|_*}\right) |Q| \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$.

En el artículo [61], citado en el párrafo anterior, de Johnson and Neugebauer, el resultado principal es que $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$. En cierto modo hay una relación entre A_1 y BMO_* que es similar a la que hay entre L^∞ y BMO . De hecho, si w es un peso tal que $w \in A_1$ y $\frac{1}{w} \in A_1$ entonces $w \in L^\infty$ y $\frac{1}{w} \in L^\infty$, lo que

equivale a que $w \approx 1$ a.e., es decir es equivalente a una función constante. Dichos espacios no son iguales y la inclusión mencionada es estricta; un par de ejemplos ilustrativos en \mathbb{R} tomados de [61] muestran que $w = \max\{\log\left(\frac{1}{|x|}\right), e\} \in BMO_*$ pero $w \notin A_1$ y por otra parte para la misma w tenemos que $w^2 \in \bigcap_{p>1} A_p$ pero $w^2 \notin BMO_*$. Recuperaremos algunos de los resultados que vinculan BMO_* , las clases A_p y las clases RH_q desde el punto de vista de los índices.

Algunas cuestiones sobre BMO_* Hemos visto en la observación 127 que si w y $\frac{1}{w}$ pertenecen ambos a A_p con $1 < p \leq 2$ entonces $ind\{w\} > 0$ y $ind\{w^{-1}\} > 0$. Pero es posible mejorar ese resultado para pesos en BMO_* , obteniendo que para tales pesos $ind\{w\} = 1$ y $ind\{w^{-1}\} = 1$. De hecho ese es el significado, desde el punto de vista de la teoría de índices, del resultado principal de [61] que dice que $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$. Revisitaremos tal resultado:

Por supuesto, basta con tratar con $p \in (1, 2]$ ya que si w y $1/w$ están en A_∞ entonces $w \in A_2$, e intercambiando roles también $1/w \in A_2$. Esto es totalmente inmediato de nuestros teoremas 116 y 124 (cf. [32]), veámoslo:

Lema 135 *Si w y w^{-1} están en A_∞ entonces w y w^{-1} están en A_2*

Demostración. Tomando $p = 2$, se tiene que $p' = 2$ y $\sigma = w^{1-p'} = w^{-1}$ y de acuerdo con 124 (i) tenemos que $w \in A_2$ si y solo si $ind\{w\} > 0$ y $ind\{w^{-1}\} > 0$ pero, por 116, esto es equivalente a $w \in RH$ y $w^{-1} \in RH$, lo que es inmediato recordando que $RH = A_\infty$. ■

Observación 136 *De hecho es bastante fácil comprobar directamente que los pesos en BMO_* están, en primera instancia, incluidos en A_2 . Veamos esto:*

Adoptaremos la notación $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$ para aligerar las fórmulas. Siguiendo [61] tenemos que si $p = 2$ y $w, \frac{1}{w} \in BMO$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{w(x)} \right)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{1}{w(x)} dx \right) \\
&= w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \\
&= 1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q - w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q - 1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \\
&= 1 + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) \left(\frac{1}{w} \right)_Q - w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q - w(x) \frac{1}{w(x)} + w_Q \frac{1}{w(x)} dx \right) \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q| \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right| dx \right) \leq (\text{por Hölder})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1 + C \|w\|_* \left\| \frac{1}{w} \right\|_* < \infty
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos la equivalencia $\|f\|_{*,p} \simeq \|f\|_*$ (ver arriba 133), y hemos obtenido que $w \in A_2$ con $\|w\|_{A_2} \leq 1 + C \|w\|_* \left\| \frac{1}{w} \right\|_*$ y lo mismo vale para $\frac{1}{w}$.

Observación 137 Tanto A_p como RH_q son clases abiertas en el sentido de que tienen propiedades de automejoramiento, esto es que si $w \in A_p$ entonces $w \in A_{p-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$, y si $w \in RH_q$ entonces $w \in RH_{q+\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$ (no necesariamente se trata del mismo $\varepsilon > 0$). Tales propiedades de tipo Gehring pueden verse utilizando índices como arriba en 112 (comparar con la versión del lema de Gehring en [32]). Pero en el caso de los pesos BMO_* el mejoramiento nos lleva dramáticamente de A_2 a A_p para cualquier $p \in (1, 2)$. Para ver este punto transcribimos lo que es, esencialmente, la segunda parte del Teorema 6 de la referencia [61] y su demostración corregida (hay un error en la que figura en [61]):

Teorema 138 Si $w \in BMO_*$ entonces $w, \frac{1}{w} \in A_{p_0}$ para cualquier $p_0 \in (1, 2)$.

Demostración. Sea Q cualquier cubo, $p_0 \in (1, 2)$ y $r = \frac{1}{p_0-1}$, por lo que $r > 1$, y considérese

$$\begin{aligned}
I_Q &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^r \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| (w(x) - w_Q) \left(\frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right) \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

■

Observación 139 Demostración. Enmendando un error en [61] usaremos la desigualdad

$$|a - b|^r \geq \frac{a^r}{2^{r-1}} - b^r \quad (59)$$

para $a, b \geq 0$ (en [61] en lugar de $|a - b|^r$ aparece $|a^r - b^r|$ que proporciona otra desigualdad cierta pero que no sirve para demostrar lo que se propone). La desigualdad de arriba, 59, es equivalente a

$$\left(\frac{|a - b|^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \frac{a}{2}$$

, la cual es trivial para $b \geq a$, y para $0 \leq b < a$ se sigue de la desigualdad de Hölder discreta.

Usando (59) para $\left| (w(x) - w_Q) \left(\frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right) \right|^r$ y utilizando también que $(c + d)^r \geq c^r + d^r$ para $r \geq 1, c, d \geq 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left| (w(x) - w_Q) \left(\frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right) \right|^r \\
&= \left| \left(w(x) \left(\frac{1}{w} \right)_Q + w_Q \frac{1}{w(x)} \right) - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right) \right|^r \\
&\geq \frac{\left(w(x) \left(\frac{1}{w} \right)_Q + w_Q \frac{1}{w(x)} \right)^r}{2^{r-1}} - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r \\
&\geq \frac{w(x)^r \left(\frac{1}{w} \right)_Q^r + w_Q^r \left(\frac{1}{w(x)} \right)^r}{2^{r-1}} - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r
\end{aligned}$$

Y volviendo a I_Q , e integrando, se tiene:

$$\begin{aligned}
I_Q &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^r \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{w(x)^r \left(\frac{1}{w} \right)_Q^r + w_Q^r \left(\frac{1}{w(x)} \right)^r}{2^{r-1}} - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{w(x)^r \left(\frac{1}{w} \right)_Q^r + w_Q^r \left(\frac{1}{w(x)} \right)^r}{2^{r-1}} dx - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\frac{1}{2^{r-1}} \left((w^r)_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q^r + w_Q^r \left(\left(\frac{1}{w} \right)_Q^r \right) \right) - \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

y simplificando queda

$$\left((w^r)_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q^r + w_Q^r \left(\left(\frac{1}{w} \right)_Q^r \right) \right) \leq 2^{r-1} \left((I_Q)^r + \left(1 + w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \right)^r \right)$$

. Ahora, teniendo en cuenta que $w_Q \left(\frac{1}{w} \right)_Q \leq \|w\|_{A_2} < \infty$ puesto que ya hemos mostrado que $w \in A_2$ (en la observación 136) y usando Hölder para algún $p > 1$ y la equivalencia entre q -normas of BMO : $\|\cdot\|_{*,q} \simeq \|\cdot\|_*$ para cualquier $q > 1$

(es decir 133) tenemos

$$\begin{aligned}
(I_Q)^r &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^r \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w}\right)_Q \right|^r dx \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w}\right)_Q \right|^{rp'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |w(x) - w_Q|^{rp} dx \right)^{\frac{1}{rp}} \right)^r \left(\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \frac{1}{w(x)} - \left(\frac{1}{w}\right)_Q \right|^{rp'} dx \right)^{\frac{1}{rp'}} \right)^r \\
&\leq \|w\|_{*,rp}^r \left\| \frac{1}{w} \right\|_{*,rp'}^r \leq C \|w\|_*^r \left\| \frac{1}{w} \right\|_*^r = C \left(\|w\|_* \left\| \frac{1}{w} \right\|_* \right)^r < \infty
\end{aligned}$$

porque $w \in BMO_*$ y entonces $w, \frac{1}{w} \in BMO$. Resumiendo tenemos:

$$\left((w^r)_Q \left(\frac{1}{w}\right)_Q^r + w_Q^r \left(\left(\frac{1}{w}\right)_Q^r \right) \right) \leq 2^{r-1} \left(C \left(\|w\|_* \left\| \frac{1}{w} \right\|_* \right)^r + (1 + \|w\|_{A_2})^r \right) < \infty$$

y hemos obtenido que

$$w_Q^r \left(\left(\frac{1}{w}\right)_Q^r \right) \leq C < \infty$$

y también

$$(w^r)_Q \left(\frac{1}{w}\right)_Q^r \leq C < \infty.$$

Recordando que $r = \frac{1}{p_0-1} = p'_0 - 1$ y tomando potencia r llegamos a

$$w_Q \left(w^{1-p'_0} \right)_Q^{p_0-1} \leq C < \infty$$

lo cual es la condición A_{p_0} para w , y además

$$\left(\frac{1}{w}\right)_Q \left(\left(\frac{1}{w}\right)^{1-p'_0} \right)_Q^{p_0-1} \leq C < \infty$$

lo cual es la condición A_{p_0} para $\frac{1}{w}$. Entonces $w, \frac{1}{w} \in A_{p_0}$ para cualquier $p_0 \in (1, 2)$ y por lo tanto para todo $p_0 \in (1, +\infty)$. ■

El argumento de estas dos últimas observaciones reproduce la demostración del teorema de [61] que dice que $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$. Ahora, usando nuestro corolario 127 podemos expresar la propiedad $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$ en términos de índices:

Proposición 140 Si $w \in BMO_*$ entonces $ind\{w\} = 1$ y $ind\{w^{-1}\} = 1$.

Demostración. Hemos visto por 138 que si $w \in BMO_*$ entonces $w, \frac{1}{w} \in A_p$ para todo $p \in (1, 2)$ y por 127 aplicado a w tenemos que $ind\{w\} > 0$ y

$ind\{w^{-1}\} > 2 - p$. Como vale para p arbitrariamente próximo a 1 tenemos que $ind\{w^{-1}\} \geq 1$; recordando que $0 \leq ind\{\phi_Q\}_Q \leq 1$ se tiene que no puede ser $ind\{w^{-1}\} > 1$ luego $ind\{w^{-1}\} = 1$. Análogamente, aplicando 127 a w^{-1} tenemos que $ind\{w\} > 2 - p$ para $p \in (1, 2)$ y de ello llegamos a que $ind\{w\} = 1$. ■

Como es comentado en [61], la relación entre BMO_* y las clases A_p implica un resultado acerca de las clases RH_r por medio del siguiente teorema (Teorema 7 de [61]) el cual también podemos probarlo usando propiedades de nuestros índices:

Teorema 141 Para $1 \leq r < \infty$ los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) $w, \frac{1}{w} \in RH_r$
- ii) $w, \frac{1}{w} \in A_{1+\frac{1}{r}}$
- iii) $w^r \in A_2$

Demostración. Para $r = 1$ la equivalencia es trivial. Supongamos que $r > 1$.

Si $w, \frac{1}{w} \in RH_r$ entonces por 116 es $ind\{w\} > 1/r' > 0$ y $ind\{w^{-1}\} > 1/r' = 1 - \frac{1}{r} = 2 - (1 + \frac{1}{r})$, luego $ind\{w\} > 0$ y $ind\{w^{-1}\} > 2 - p$ para $p = 1 + \frac{1}{r} \leq 2$. Por lo tanto nuestro corolario 127 (i) implica que $w \in A_{1+\frac{1}{r}}$, e intercambiando los roles de w y w^{-1} también obtenemos que $\frac{1}{w} \in A_{1+\frac{1}{r}}$. Por otra parte si $w, \frac{1}{w} \in A_{1+\frac{1}{r}}$, siendo $p = 1 + \frac{1}{r} \leq 2$, y usando de nuevo 127 (i) tenemos que $ind\{w\} > 2 - p = 1/r'$ y $ind\{\frac{1}{w}\} > 2 - p = 1/r'$, y por 116 llegamos a que $w, \frac{1}{w} \in RH_r$. Así i) y ii) son equivalentes.

Además por el teorema de Strömberg-Wheeden (véase la observación 126 arriba) $w, \frac{1}{w} \in RH_r \Leftrightarrow w^r, \frac{1}{w^r} \in A_\infty$ y por el lema 135 es $w^r \in A_2$ y además, por supuesto, $(\frac{1}{w})^r \in A_2$, entonces i) implica iii). Por otra parte, si $w^r \in A_2$ entonces tenemos $w^{-r} = (w^r)^{-1} = (\frac{1}{w})^r \in A_2$ también. Tomando $\alpha = \frac{1}{r} < 1$, de $w^r \in A_2$ tenemos que $w = (w^r)^\alpha \in A_2$ porque si $u \in A_p$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $u^\alpha \in A_p$ como consecuencia fácil de la desigualdad de Hölder. Luego $w \in A_2 \subset A_\infty$, y entonces $ind\{w\} > 0$ por 124. Más aún llamando $p = 1 + \frac{1}{r}$ tenemos que $w^{-r} = w^{1-p'} = \sigma$ y siendo $\sigma = w^{-r} \in A_2 \subset A_\infty$ también tenemos que $ind\{\sigma\} > 0$. Es decir, $ind\{w\} > 0$ y $ind\{\sigma\} > 0$, y por el teorema 124 tenemos que $w \in A_p = A_{1+\frac{1}{r}}$. Por lo tanto iii) implica ii) y la demostración está completa. ■

Corolario 142 Si $w \in BMO_*$ entonces $\forall r \in \mathbb{R} : ind\{w^r\} > 0$.

Demostración. Como $BMO_* \subset \bigcap_{p>1} A_p$, tomando $p = 1 + \frac{1}{r}$ tenemos que $w, \frac{1}{w} \in A_{1+\frac{1}{r}}$ para cualquier $r \in (1, +\infty)$ y por iii) del teorema precedente es $w^r \in A_2$, entonces del corolario 127 se tiene que $ind\{w^r\} > 0$ y $ind\{\frac{1}{w^r}\} > 0$ para todo $r \in (1, +\infty)$, i.e. $ind\{w^r\} > 0$ para $r \in (1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$. Más aún, como ya hemos señalado, si $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $w^\alpha \in A_p \subset A_\infty$ porque $w \in A_p$ para cualquier $p > 1$, y por ende tomando $r = \alpha \in [0, 1]$ tenemos que $w^r \in A_\infty$ y entonces $ind\{w^r\} > 0$ por el teorema 124. El mismo enunciado es cierto para $(w^{-1})^\alpha = w^{-\alpha} = w^r$ con $\alpha \in [0, 1]$, y entonces, para $r \in [-1, 0]$ es $w^r \in A_\infty$, luego $ind\{w^r\} > 0$ también en este caso. Resumiendo hemos visto que $ind\{w^r\} > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$. ■

Condiciones de Gurov-Reshetnyak Otras clases relacionadas se obtienen de las condiciones de Gurov-Reshetnyak que tienen conexiones interesantes con aplicaciones Quasi-Conformes, propiedades de integrabilidad superior, desigualdades de Hölder-Reversas, espacios BMO, entre otras cuestiones. Recordemos la definición (cf. por ejemplo [63])

Definición 143 Sea $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ un cubo fijo, se dice que una función no-negativa $f \in L^1(Q_0)$ satisface una condición de Gurov-Reshetnyak GR_ε para $0 < \varepsilon < 2$ si para todo cubo $Q \subset Q_0$, ocurre que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \right| dx \leq \varepsilon \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \quad (60)$$

Observación 144 La desigualdad 60 ocurre siempre para $\varepsilon = 2$, así que su cumplimiento es relevante solo para $\varepsilon < 2$. En términos de operadores maximales locales implica que

$$f^\#(x) \leq C_\varepsilon Mf(x) \quad (61)$$

para todo $x \in Q_0$ donde Mf es el operador maximal de Hardy-Littlewood de f , y $f^\#$ es su operador maximal sharp. Hay muchas propiedades interesantes relacionadas; por ejemplo en términos de reordenamientos decrecientes de funciones f soportadas en Q_0 se puede probar (ver, p. ej. [24]) que para una constante absoluta c :

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq c(f^\#)^*(t) \quad (62)$$

para $0 < t < \frac{1}{6}|Q_0|$ y cualquier $f \in L^1(Q_0)$. Entonces, usando esto y tomando reordenamientos en (61) y utilizando la equivalencia de Herz-Stein, $(Mf)^*(t) \approx f^{**}(t)$, tenemos

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq C_n \varepsilon f^{**}(t) \quad (63)$$

para $0 < t < \alpha|Q|$ para algún $\alpha \in (0, 1)$, digamos $1/6$ y C_n una constante que solo depende de n . Esto también puede ser interpretado en términos de K -funcionales (cf. [84]):

$$K(t, f; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)) - t \frac{d}{dt} K(t, f; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)) \quad (64)$$

$$\leq C_n \varepsilon K(t, f; L^1(Q_0), L^\infty(Q_0)) \quad (65)$$

Adicionalmente, a partir de (64) se puede mostrar que $f \in L^p(Q_0)$ para $p < \frac{1}{C_n \varepsilon}$, y que

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

para $0 < t < \alpha|Q|$, esto significa que f^* satisface una p -Condición de Hölder Reversa (remitimos a [84] para más detalles al respecto). Más aún, de hecho, para $f \in GR_\varepsilon$ se puede obtener una Condición de Hölder Reversa para la propia f , (cf. [63] observación 5.9.) de manera que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q f(x) dx$$

para cualquier $Q \subset Q_0$, para todo p tal que $1 < p < p_0(\varepsilon, n) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{n(2^{1/n} - 1)}{3 \cdot 2^n \cdot 2^{1/n}}$ y $c = c(\varepsilon, n, p)$. En el caso unidimensional se pueden obtener constantes más precisas,

para el reordenamiento decreciente f^* . Resultados análogos para otras medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue pueden encontrarse en [66].

Nótese que en el siguiente párrafo consideramos clases soportadas en un cubo fijo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ y para aligerar la notación A_p denotará a $A_p(Q)$, y RH_q significará $RH_q(Q)$ -o sea las desigualdades de las condiciones son predicadas acerca de todos los cubos Q incluidos en Q_0 -; los supremos en las definiciones de operadores maximales son para todos los cubos $Q : x \in Q \subset Q_0$, y así en general. También las definiciones de índices sobre familias de cubos, $\{\phi_{Q,\beta,q}\}_Q$, están referidas a cubos $Q \subset Q_0$; en particular $ind\{w\} := ind\{\phi_{w,Q}\}_Q$ con $\phi_{w,Q}(s) = K(s, w\chi_Q, L^1(Q), L^\infty(Q))$ para $Q \subset Q_0$ y la mayoría de las propiedades son todavía ciertas (mutatis mutandis).

Otra condición relacionada con A_∞ viene de las condiciones de Gurov-Reshetnyak, de hecho, $A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p = \bigcup_{q>1} RH_q = \bigcup_{0<\varepsilon<2} GR_\varepsilon$, pero los vínculo entre las clases GR_ε y las clases de pesos de Muckenhoupt o las clases de Hölder Reversas no son tan simples, probablemente porque las condiciones de Gurov-Reshetnyak están relacionadas con la oscilación mientras que las otras hablan acerca de la integrabilidad de w , o la de w junto con la de w^{-1} .

Sin embargo podemos obtener algunas relaciones con los índices:

Proposición 145 *Hay una constante C_n , dependiendo solamente de la dimensión n , tal que $ind\{w\} \geq 1 - C_n\varepsilon$ para todo $w \in GR_\varepsilon$ con $0 < \varepsilon < 2$.*

Demostración. Como hemos visto arriba, en la observación 144 aplicada para $f = w\chi_{Q_0}$, a partir de la condición GR_ε se tiene que hay una constante $C_n > 0$, dependiendo solo de n , pero independiente de w y Q tal que:

$$w\chi_Q^{**}(t) - w\chi_Q^*(t) \leq C_n\varepsilon w\chi_Q^{**}(t) \quad (66)$$

para $0 < t < \frac{1}{6}|Q|$. Ahora tomamos el argumento del teorema 2.1. de [84]: Si $C_n\varepsilon < 1$, de (66) tenemos

$$w\chi_Q^{**}(t) \leq \frac{1}{1 - C_n\varepsilon} w\chi_Q^*(t)$$

para $0 < t < \alpha|Q|$, entonces

$$\frac{1 - C_n\varepsilon}{t} \leq \frac{w\chi_Q^*(t)}{\int_0^t w\chi_Q^*(s) ds}$$

esto es

$$\frac{d}{dt} \log(t^{1-C_n\varepsilon}) \leq \frac{d}{dt} \log\left(\int_0^t w\chi_Q^*(s) ds\right)$$

e integrando entre u y t para $0 < u < t < \alpha|Q|$ se obtiene

$$\log\left(\left(\frac{t}{u}\right)^{1-C_n\varepsilon}\right) \leq \log\left(\frac{\int_0^t w\chi_Q^*(s) ds}{\int_0^u w\chi_Q^*(s) ds}\right)$$

y entonces

$$\frac{t^{1-C_n\varepsilon}}{u^{1-C_n\varepsilon}} \leq \frac{\int_0^t w\chi_Q^*(s) ds}{\int_0^u w\chi_Q^*(s) ds}$$

, por ello:

$$u^{-(1-C_n\varepsilon)} \int_0^u w\chi_Q^*(s) ds \leq t^{-(1-C_n\varepsilon)} \int_0^t w\chi_Q^*(s) ds$$

, o sea que $\phi_{w,Q}(s)s^{-\delta}$ es creciente y a fortiori es casi creciente, con $\delta = 1 - C_n\varepsilon$, para $0 < t < \alpha|Q|$ con α independiente de Q , luego $\text{ind}\{w\} \geq 1 - C_n\varepsilon$. ■

Probablemente no es plausible esperar una caracterización completa de GR_ε en términos del índice. Las sospechas se basan en el hecho de que, la relación del índice con RH_p es más clara puesto que $w \in RH_p \Leftrightarrow \text{ind}\{w\} > 1/p'$ (cf. 116), pero sin embargo la relación entre las condiciones de Hölder Reversas y las de Gurov-Reshetnyak requieren tener en cuenta las constantes de las desigualdades, no solo el exponente. Remitimos, por ejemplo, a [63], donde, en esa línea, se puede ver el siguiente resultado:

Teorema 146 (*Korenovskii*) *Sea w una función no-negativa en el cubo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$, que satisfaga la condición*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq B \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$$

para todo $Q \subset Q_0$, para ciertos $p, B > 1$. Entonces existe ε , con $0 < \varepsilon < 2$ dependiendo únicamente de p y de B tales que $w \in GR_\varepsilon$. Más aún, $\varepsilon = \varepsilon(p, B)$ puede tomarse como:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{2}{p} & \text{if } B < (p/(p-1))^{(p-1)/p} \\ 2(1-B)^{-p/(p-1)} & \text{if } B \geq (p/(p-1))^{(p-1)/p} \end{cases} \quad (67)$$

Observación 147 *La condición mencionada arriba que vincula ε con p y B quizás puede mejorarse pero no parece que pueda ser removida porque $GR_\varepsilon \not\subseteq RH_p$ para todo $\varepsilon < 2$ (cf. [63]).*

Observación 148 *Una línea interesante para ser explorada en el estudio de las clases GR_ε , mediante índices indexados por cubos, puede ser considerar índices para familias de funciones definidas por $\phi_{w,Q}(s) = K(s, w\chi_Q, L^1, BMO)$ en lugar de $K(s, w\chi_Q, L^1, L^\infty)$.*

Desigualdades de Hölder reversas en Espacios de Lorentz Está claro, de las definiciones de los Espacios de Lorentz y de las clases de Hölder reversas para espacios de Lorentz que si $p = q$ es $L^{p,q} = L^p$ (normas equivalentes, cf. 73) y se tiene que $RH_{p,q} = RH_p$. A continuación veremos que, en cierto sentido, el primer índice determina la clase de Hölder reversa.

Teorema 149 *Sean $1 < p \leq q < \infty$ o $1 < p < q \leq \infty$. Entonces*

$$RH_{L^{p,q}} = RH_p$$

Antes de demostrar el teorema necesitaremos algunos lemas cuyas cortas demostraciones incluimos. Los dos primeros son bien conocidos:

Lema 150 Si $f \in L^p$ y $1 < p \leq q < \infty$ entonces $f \in L^{p,q}$ y $\|f\|_{p,q} \leq p' \|f\|_p$.

Demostración. Usando la definición de las normas en $L^{p,q}$ tenemos que $\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} f^{**}(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$. Usando la desigualdad i) del Lema de Hardy, que además trivialmente $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}} \leq \|\cdot\|_{L^p}$, y que $f^* \leq f^{**}$ decreciente y tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,q} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq p' \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq p' \left(\sup_{0 < t < \infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{q-p} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq p' \sup_{0 < t < \infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq p' \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \leq p' \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = p' \|f\|_p \end{aligned}$$

■

Lema 151 Si $1 < p \leq q < \infty$ o $1 < p < q \leq \infty$ y w es localmente integrable, entonces $M_{p,q}w(x) \leq p' M_p w(x)$ para todo x .

Demostración. Si $p = q < \infty$ el resultado es trivial. Supongamos $p < q \leq \infty$. Si $q < \infty$ se tiene $M_{p,q}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{\frac{1}{p}}}$, sea Q un cubo cualquiera y $x \in Q$. Por el lema anterior tenemos

$$\|w\chi_Q\|_{p,q} \leq p' \|w\chi_Q\|_p$$

luego

$$\frac{\|w\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \leq p' \frac{\|w\chi_Q\|_p}{|Q|^{\frac{1}{p}}}$$

de modo que si

$$M_{p,q}w(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|w\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \leq p' \sup_{Q \ni x} \frac{\|w\chi_Q\|_p}{|Q|^{\frac{1}{p}}} = p' M_p w(x)$$

. Por otra parte, si $p < q = \infty$ tenemos

$$M_{p,\infty}w(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{\|w\chi_Q\|_{p,\infty}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} = \sup_{Q \ni x} \frac{\sup_{0 < t < |Q|} t^{\frac{1}{p}} w\chi_Q^*(t)}{|Q|^{\frac{1}{p}}} = \sup_{Q \ni x} \left(\sup_{0 < t < |Q|} \frac{t^{\frac{1}{p}} w\chi_Q^*(t)}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \right)$$

, dado $0 < t < |Q|$, llamando $\lambda = w\chi_Q^*(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{t^{\frac{1}{p}} w\chi_Q^*(t)}{|Q|^{\frac{1}{p}}} &= \frac{(|\{x \in Q : w(x) \geq \lambda\}| \cdot \lambda^p)^{\frac{1}{p}}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{(|\{x \in \mathbb{R}^n : w\chi_Q(x)^p \geq \lambda^p\}| \cdot \lambda^p)^{\frac{1}{p}}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

, luego tomando supremos tenemos

$$M_{p,\infty} w(x) \leq M_p(x)$$

■

Menos conocido es el lema que sigue, que es una versión local de un resultado de [19]:

Lema 152 *Sea $p \in (1, +\infty)$ y $1 < p \leq q \leq \infty$ (evidentemente esto equivale a $1 < p \leq q < \infty$ o $1 < p < q \leq \infty$), w un peso y Q_0 un cubo fijo de \mathbb{R}^n , entonces existe $C > 0$ tal que para todo $0 < t < |Q_0|$ vale que*

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^t \left((w\chi_{Q_0})^*(s) s^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C (M_{L^{p,q}(Q_0)} w\chi_{Q_0})^*(t)$$

Demostración. Necesitamos ver primero que existe una constante $C > 0$ tal que si $\{f_j\}_{j=1}^n \subset L^{p,q}$ es una familia finita de funciones que tienen soportes

disjuntos entonces $\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{L^{p,q}} \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,q}}^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Teniendo en cuenta la

definición de la norma de $L^{p,q}$ en términos de funciones de distribución (ver arriba la observación 47) y que los soportes son disjuntos tenemos que la función de distribución de la suma es la suma de las funciones de distribución, es decir: $\sum_{j=1}^n \lambda_{f_j}(u) = \lambda_f$ donde $f = \sum_{j=1}^n f_j$, entonces escribiendo la norma $L^{p,q}$, para $q < \infty$ es,

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{L^{p,q}}^p = \left(\int_0^\infty \lambda_f(s)^{\frac{q}{p}} s^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{f_j}(u) \right)^{\frac{q}{p}} s^{q-1} ds \right)^{\frac{p}{q}}$$

y usando la desigualdad de Minkowski respecto de $L^{\frac{q}{p}}(\mu)$ con $\mu = s^{q-1} ds$ queda:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{L^{p,q}}^p &= \left(\int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{f_j}(u) \right)^{\frac{q}{p}} s^{q-1} ds \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\left(\int_0^\infty (\lambda_{f_j}(u))^{\frac{q}{p}} s^{q-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \end{aligned}$$

es decir

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{L^{p,q}}^p \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,q}}^p \quad (68)$$

Por otra parte si $q = \infty$ es $\|f\|_{L(p,q)} = \sup_{0 < t < \infty} \{t^{1/p} f^*(t)\}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{L^{p,q}}^p &= \left(\sup_{0 < s < \infty} \{s \cdot \lambda_f(s)^{1/p}\} \right)^p \\ &= \left(\sup_{0 < s < \infty} \left\{ s \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{f_j}(u) \right)^{1/p} \right\} \right)^p = \left(\sup_{0 < s < \infty} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n s^p \lambda_{f_j}(u) \right)^{1/p} \right\} \right)^p \\ &= \left(\left(\sup_{0 < s < \infty} \left\{ \sum_{j=1}^n s^p \lambda_{f_j}(u) \right\} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq \sum_{j=1}^n \sup_{0 < s < \infty} \{s^p \lambda_{f_j}(u)\} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sup_{0 < s < \infty} \{s \cdot \lambda_{f_j}(u)^{\frac{1}{p}}\} \right)^p = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,q}}^p \end{aligned}$$

es decir también obtenemos la desigualdad (68).

Por otra parte, como la desigualdad (68) no depende de n podemos extenderla para una familia numerable de funciones siempre que la serie del miembro derecho converja:

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right\|_{L^{p,q}}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L^{p,q}}^p < \infty$$

Sea ahora un cubo Q_0 , w un peso y tomemos $f = w\chi_{Q_0}$ y sea $0 < t < |Q_0|$. Se toma $\alpha = (M_{L^{p,q}} f)^*(t)$ y $\Omega = \{x \in Q_0 : M_{L^{p,q}} f(x) > \alpha\}$. Como $M_{L^{p,q}}$ es semicontinua superiormente podemos elegir un cubrimiento del abierto $\Omega \subset Q_0$ con las propiedades del Lema de Bennett-Sharpely (ver apéndice), es decir existe una sucesión -finita o numerable- de cubos diádicos $\{Q_j\}$ de interiores dos a dos disjuntos tales que $\Omega \subset \bigcup_j Q_j$ con $Q_j \cap \Omega^c \neq \emptyset$ para todo j y tal que $|\Omega| \leq \sum_j |Q_j| \leq 2^n |\Omega|$. Podemos escribir entonces a f como: $f = g + h$ con $g = f\chi_{\bigcup_j Q_j}$, y $h = f\chi_{Q_0 - \bigcup_j Q_j}$.

Como $Q_j \cap \Omega^c \neq \emptyset$, para cada Q_j existe $x \in Q_j$ tal que $M_{L^{p,q}} f(x) \leq \alpha$ y por lo tanto $\frac{\|f\chi_{Q_j}\|_{L^{p,q}(Q_0)}}{|Q_j|^{1/p}} \leq \alpha$ es decir

$$\|f\chi_{Q_j}\|_{L^{p,q}(Q_0)} \leq \alpha |Q_j|^{1/p} \quad (69)$$

. Luego, para $g = f\chi_{\bigcup_j Q_j} \leq \sum_j f\chi_{Q_j} = \sum_j f_j$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g}{\alpha} \right\|_{L^{p,q}} &\leq \left(\sum_j \frac{1}{\alpha} \left\| f\chi_{Q_j} \right\|_{L^{p,q}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_j (|Q_j|^{1/p})^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_j |Q_j| \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (2^n |\Omega|)^{\frac{1}{p}} = (2^n t)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad (68), el hecho de que $\|g\|_{L^{p,q}} \leq \left(\sum_j \|f_j\|_{L^{p,q}}^p \right)^{\frac{1}{p}}$,

la desigualdad (69), que los Q_j tienen interiores disjuntos y que por la definición de reordenamiento decreciente: $|\Omega| = |\{x \in Q_0 : M_{L^{p,q}} f(x) > (M_{L^{p,q}} f)^*(t)\}| \leq t$. Entonces $\|g\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{n}{p}} \alpha t^{\frac{1}{p}}$ y como $\alpha = (M_{L^{p,q}} f)^*(t)$, en definitiva, se tiene para una constante positiva C que solo depende de n y de p que:

$$\|g\|_{L^{p,q}} \leq C (M_{L^{p,q}} f)^*(t) \cdot t^{\frac{1}{p}} \quad (70)$$

Por otro lado, observése que $Q_0 - \bigcup_j \bar{Q}_j \subset Q_0 - \Omega$, luego si $h = f\chi_{Q_0 - \bigcup_j \bar{Q}_j}$ se tiene que para casi todo $x \in Q_0$ vale que $h(x) \leq \alpha$, ya que si $x \in \bigcup_j \bar{Q}_j$ es $h(x) = 0 \leq \alpha$, y si $x \in Q_0 - \bigcup_j \bar{Q}_j$ entonces $x \notin \Omega$ y por lo tanto $h(x) = f\chi_{Q_0 - \bigcup_j \bar{Q}_j}(x) = f(x) \leq \alpha$ para todo punto de Lebesgue de f -y por lo tanto para casi todo punto- ya que si x es un punto de Lebesgue de f y $f(x) > \alpha$ existirían cubos centrados en x de diámetro arbitrariamente pequeño (y por lo tanto, incluidos en Q_0) tales que $\frac{1}{|Q|} \int_Q f dx > \alpha$ y por lo tanto tendríamos $\alpha < \frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq Mf(x) \leq {}^5 M_{L^{p,q}(Q_0)} f(x)$ lo que contradiría el hecho de que $x \notin \Omega$. Luego

$$\|h\|_{L^\infty} \leq (M_{L^{p,q}} f)^*(t) \quad (71)$$

De las desigualdades (71) y (70) tenemos

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} \left(\|g\|_{L^{p,q}} + t^{\frac{1}{p}} \|h\|_{L^\infty} \right) \leq C (M_{L^{p,q}} f)^*(t)$$

es decir

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} K \left(t^{\frac{1}{p}}, f, L^{p,q}, L^\infty \right) \leq C (M_{L^{p,q}} f)^*(t)$$

Considerando las fórmulas de Holmstedt (ver 200 (c), en el apéndice) para el par de espacios de Banach (L^1, L^∞) y teniendo en cuenta que $L^{p,q}(Q_0) =$

⁵ $\left\| \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q \right\|_X \leq \|f\chi_Q\|_X$ para todo X espacio invariante por reordenamientos (en particular si $X = L^{p,q}$) ya que la aplicación $P(f) = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q$ es una proyección y por lo tanto $\|P\| \leq 1$. Luego $Mf \leq M_{L^{p,q}} f$ puntualmente (para cada x se toma Q con $x \in Q$)

$(L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))_{\theta, q}$ con $\theta = 1 - \frac{1}{p}$ y que $K(s, f, L^1(Q), L^\infty(Q)) = \int_0^s f^*(u) du = s f^{**}(s)$ y que $f^{**} \geq f^*$ tenemos que

$$\begin{aligned} C(M_{L^{p,q}} f)^*(t) &\geq K\left(t^{\frac{1}{p}}, f, L^{p,q}, L^\infty\right) \\ &\approx \left(\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}-1} \cdot s \cdot f^{**}(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} \cdot f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

y recordando que $f = w\chi_{Q_0}$, tenemos:

$$\left(\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} \cdot w\chi_{Q_0}^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C(M_{L^{p,q}(Q_0)} w\chi_{Q_0})^*(t)$$

para cada $0 < t < |Q_0|$, como queríamos ver. ■

Ahora sí, vamos a la demostración del teorema 149:

(Demostración del teorema 149). Por un lado, la inclusión: $RH_p \subset RH_{L^{p,q}}$ se obtiene inmediatamente ya que, para $1 < p \leq q < \infty$, por el lema 150 se tiene $\|w\chi_Q\|_{p,q} \leq p' \|w\chi_Q\|_p$ de donde para cada cubo Q es $\frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{1/p}} \leq \frac{\|f\chi_Q\|_p}{|Q|^{1/p}}$, y entonces $\frac{\|f\chi_Q\|_p}{|Q|^{1/p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$ implica que $\frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{1/p}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$.

Para ver la inclusión opuesta, supongamos que $w \in RH_{L^{p,q}}$. Tomemos Q_0 un cubo fijo. Aplicando la definición (51) a $w\chi_{Q_0}$, obtenemos que para:

$$M_{L^{p,q}, Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) := \sup_{Q_0 \supset Q \ni x} \frac{\|(w\chi_{Q_0}\chi_Q)\|_{L^{p,q}}}{|Q|^{1/p}}$$

se tiene que

$$M_{L^{p,q}, Q_0}(w\chi_{Q_0})(x) \leq C \|w\|_{RH_{L^{p,q}}} M(w\chi_{Q_0})(x). \quad (72)$$

Tomando reordenamientos decrecientes y usando la equivalencia de Herz-Stein (es decir $M^* f \approx f^{**}$) en el lado derecho se tiene:

$$(M_{L^{p,q}, Q_0}(w\chi_{Q_0}))^*(t) \leq \frac{C \|w\|_{RH_{L^{p,q}}}}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds$$

si $0 < t < |Q_0|$.

Por otra parte, por el lema (152) tenemos,

$$\frac{1}{t^{1/p}} \int_0^t [(w\chi_{Q_0})^*(s) s^{1/p}]^q \frac{ds}{s} \leq c(M_{L^{p,q}, Q_0} w(x))^*(t), \quad 0 < t < |Q_0|.$$

Usando las dos desigualdades anteriores llegamos a que existe $C > 0$, tal que para todo $t > 0$ vale:

$$\frac{1}{t^{1/p}} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) s^{q/p} \frac{ds}{s} \leq C \frac{\|w\|_{RH_{L^{p,q}}}}{t} \int_0^t (w\chi_{Q_0})^*(s) ds. \quad (73)$$

Por otro lado, recordando la conocida fórmula para la K – funcional del par (L^1, L^∞) , $K(t, w; L^1, L^\infty) = \int_0^t w^*(s) ds$ y usando la fórmula (c) de Holmstedt (ver Apéndice, más abajo) y que debido a que $L^{p,q}(Q_0) = (L^1(Q_0), L^\infty(Q_0))_{\theta,q}$ con $\theta = 1 - \frac{1}{p}$, y reemplazando t por $t^{\frac{1}{p}}$ se obtiene:

$$K(t, w; L(p, q), L^\infty) \approx \left\{ \int_0^{t^p} [w^*(s) s^{1/p}]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q}.$$

Entonces tomando $\theta = 1 - 1/p = 1/p'$, y usando lo anterior podemos reescribir (73) como

$$\frac{1}{t^{1-\theta}} K(t^{1-\theta}, w\chi_{Q_0}; (L^1, L^\infty)_{\theta,q}, L^\infty) \leq C \frac{\|w\|_{RH_{L(p,q)}}}{t} K(t, w\chi_{Q_0}; L^1, L^\infty)$$

Siendo Q_0 arbitrario, un cambio de variables nos muestra que w satisface una desigualdad similar a la de arriba para $Q \subset Q_0$ arbitrario, es decir:

$$\frac{1}{t^{1-\theta}} K(t^{1-\theta}, w\chi_Q; (L^1, L^\infty)_{\theta,q}, L^\infty) \leq C \frac{\|w\|_{RH_{L(p,q)}}}{t} K(t, w\chi_Q; L^1, L^\infty)$$

Teniendo en cuenta la definición 79 hemos visto que para cada cubo Q tenemos que la restricción $w\chi_Q \in RH_{1/p',q}(L^1(Q), L^\infty(Q))$, y que se cumple que:

$$\sup_Q \|w\chi_Q\|_{RH_{1/p',q}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \leq \|w\|_{RH_{L(p,q)}}.$$

Y entonces, aplicando el teorema 104, llegamos a que $w \in RH_p$, lo que demuestra la inclusión que faltaba. ■

Del teorema anterior, reescribiendo la condición RH_p en términos de las K – funcionales de las restricciones de w a los cubos se obtiene el siguiente:

Corolario 153 Sea $1 < p \leq q < \infty$. Entonces, $w \in RH_{L(p,q)}$ si y solo si existe $C > 0$ tal que para todo cubo Q y para cada t con $0 < t < |Q|$, se tiene:

$$\int_0^t [K(s, w\chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q)) s^{-1/p'}]^q \frac{ds}{s} \leq C [t^{-1/p'} K(t, w\chi_Q; L^1(Q), L^\infty(Q))]^q$$

4.3. Operadores que actúan en pesos RH y un teorema de interpolación que involucra espacios de extrapolación.

Otra forma interesante de caracterizar $RH = A_\infty$, fue considerada por Fujii (cf. [46], [42] y las referencias allí mencionadas). Dicha caracterización es la siguiente: $w \in A_\infty$ si y solo si existe $C \geq 1$ tal que para todo cubo Q ,

$$\int_Q M(w\chi_Q)(x) dx \leq C \int_Q w(x) dx. \quad (74)$$

Estudiamos a a continuación la relación entre (74) y nuestra caracterización de A_∞ usando interpolación. Concretamente, en esta sección se demuestra un teorema de interpolación abstracto que toma como modelo un resultado obtenido en [2] (el resultado también está estrechamente relacionado con una

versión en términos de extrapolation de un teorema de Zygmund (cf. [4], [51], [58] y la discusión, más abajo en la observación 158). Este teorema, aplicado al operador maximal M de Hardy-Littlewood muestra que si $w \in RH$ entonces w satisface la condición de Fujii (74). Posteriormente miraremos la implicación contraria para M .

Sea $\bar{X} = (X_0, X_1)$ una cupla ordenada de espacios de Banach. Recordemos la definición de $\|\cdot\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}$ que dimos más arriba -cf. fórmula (20)-,

$$\|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} = \inf\{c : \int_0^t K(s, w; \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq cK(t, w; \bar{X})\}. \quad (75)$$

Necesitamos también introducir la definición de la noción de “tipo débil generalizado $(1, 1), (\infty, \infty)$ ” como puede hallarse en [39]: Diremos que T es de tipo débil generalizado $(1, 1), (\infty, \infty)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{K(r, Tf; \bar{X})}{r} \leq C\left\{\frac{1}{r} \int_0^r K(s, f; \bar{X}) \frac{ds}{s} + \int_r^\infty \frac{K(s, f; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s}\right\}, \forall r > 0. \quad (76)$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 154 *Sea $\bar{X} = (X_0, X_1)$ una cupla ordenada de espacios de Banach, y sea $n = \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$ la norma de la inmersión $X_1 \subset X_0$. Sea T un operador de tipo débil generalizado $(1, 1), (\infty, \infty)$. Entonces existe una constante absoluta $c > 0$, tal que*

$$\int_0^t \frac{K(r, Tw; \bar{X})}{r} dr \leq c \|w\|_{X_0} (\|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}^2 + \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} + 1), 0 < t < n, \quad (77)$$

$$\|Tf\|_{\bar{X}_{0,1}} \leq c \|w\|_{X_0} (\|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}^2 + 1 + \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}). \quad (78)$$

Demostración. Sea $w \in RH_{0,1}(\bar{X})$. Integrando la desigualdad (76) se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{K(r, Tw; \bar{X})}{r} dr &\leq \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r K(s, w; \bar{X}) \frac{ds}{s} dr + \int_0^t \int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} dr \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Para acotar (I) usamos dos veces la definición de $\|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}$:

$$\begin{aligned} (I) &\leq \int_0^t \frac{1}{r} \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} K(r, w; \bar{X}) dr \\ &\leq \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}^2 K(t, w; \bar{X}) \\ &\leq \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}^2 \|w\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Para acotar (II), vamos a integrar por partes en $\int_0^t \int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} dr$. Para esto tenemos en cuenta que:

$$\frac{d\left(\int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s}\right)}{dr} = -\frac{K(r, w; \bar{X})}{r^2} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K(s, w; \bar{X})}{s^2} = -\frac{K(r, w; \bar{X})}{r^2}$$

puesto que $K(s, w; \bar{X}) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} K(s, w; \bar{X}) = \|w\|_{X_0}$ y entonces $\frac{K(s, w; \bar{X})}{s^2} \leq \frac{\|w\|_{X_0}}{s^2} \rightarrow 0$; y por otra parte como

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(r \int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} \right) \leq r \|w\|_{X_0} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-1}{s} \Big|_r^\infty = \|w\|_{X_0}$$

,y además recordamos que $\int_0^t K(s, w; \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} K(t, w; \bar{X})$. Entonces lo que queda al integrar por partes (II) resulta:

$$\begin{aligned} (II) &= \int_0^t 1 \cdot \left(\int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} \right) dr = r \int_r^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{K(r, w; \bar{X})}{r} dr \\ &\leq t \int_t^\infty \frac{K(s, w; \bar{X})}{s} \frac{ds}{s} + \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} K(t, w; \bar{X}) \\ &\leq \|w\|_{X_0} + \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} \|w\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Juntando las acotaciones de (I) y (II) se obtiene:

$$\int_0^t \frac{K(r, Tw; \bar{X})}{r} dr \leq \|w\|_{X_0} (\|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})}^2 + \|w\|_{RH_{0,1}(\bar{X})} + 1). \quad (79)$$

Entonces tomando haciendo tender t hacia $n = \sup_{f \in \bar{X}_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}$ obtenemos (78). ■

Ejemplo 155 *Aplicaremos el resultado de arriba al operador maximal M y la familia de cuplas $\bar{X} = (L^1(Q), L^\infty(Q))$. Como es bien conocido el operador maximal de Hardy-Littlewood M satisface (76). Esto puede comprobarse rápidamente usando la equivalencia de Herz-Stein (8), veámoslo: Se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{K(r, Mf, \bar{X})}{r} &= (Mf)^{**}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r (Mf)^*(s) ds \\ &\approx \frac{1}{r} \int_0^r f^{**}(s) ds = \frac{1}{r} \int_0^r K(s, f, \bar{X}) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

. Supongamos ahora que $w \in RH_{LL\log L}$, entonces por el teorema 107, tenemos que para todo cubo Q , se tiene $w \in RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))$, con

$$\sup_Q \|w\|_{RH_{0,1}(L^1(Q), L^\infty(Q))} \approx \|w\|_{RH_{LL\log L}}.$$

Entonces aplicando la acotación (79) con $t = |Q|$, se obtiene

$$\int_0^{|Q|} \frac{K(r, M(w\chi_Q); \bar{X})}{r} dr \leq \|w\|_{L^1(Q)} (\|w\|_{RH_{LL\log L}}^2 + \|w\|_{RH_{LL\log L}} + 1).$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_Q M(w\chi_Q)(x) dx &= \int_0^{|Q|} [M(w\chi_Q)]^*(r) dr \\ &\leq \int_0^{|Q|} \frac{K(r, M(w\chi_Q); \bar{X})}{r} dr. \end{aligned}$$

Combinando las dos estimaciones de arriba se llega a que

$$\begin{aligned} \int_Q M(w\chi_Q)(x)dx &\leq \|w\|_{L^1(Q)} (\|w\|_{RH_{LL\log L}}^2 + \|w\|_{RH_{LL\log L}} + 1) \\ &= (\|w\|_{RH_{LL\log L}}^2 + \|w\|_{RH_{LL\log L}} + 1) \int_Q w(x)dx \end{aligned} \quad (80)$$

Esto muestra que nuestra caracterización de $RH_{LL\log L} = RH = A_\infty$, implica la condición de Fujii.

Por otro lado es posible mostrar en forma directa que la condición (74) implica la condición que define la clase $RH_{LL\log L}$, como vemos en la siguiente observación:

Observación 156 *Supóngase que w satisface la condición de Fujii (74). Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q \ni x$ entonces se tiene la siguiente estimación (el argumento de estas acotaciones está implícito en el teorema II-3.4 de [49])*

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q M(w)(y)dy &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q M(w\chi_{3Q})(y)dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q M(w(1-\chi_{3Q}))(y)dy \\ &\leq \frac{3^n}{|3Q|} \int_{3Q} M(w\chi_{3Q})(y)dy + c \inf_{z \in Q} Mw(z) \text{ (ver abajo)} \\ &\leq \frac{3^n}{|3Q|} \int_{3Q} w(x)dx + cMw(x) \text{ (por (74))} \\ &\leq CMw(x). \end{aligned}$$

La justificación de la desigualdad $\frac{1}{|Q|} \int_Q M(w(1-\chi_{3Q}))(y)dy \leq c \inf_{z \in Q} Mw(z)$ puede verse al pie ⁶.

De la estimación de arriba nos queda que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale:

$$M(Mw)(x) \leq CMw(x)$$

y como trivialmente

$$Mw(x) \leq M(Mw)(x)$$

tenemos

$$M(Mw)(t) \approx Mw(t)$$

Tomando reordenamientos decrecientes se obtiene

$$(M(Mw))^*(t) \approx (Mw)^*(t). \quad (81)$$

⁶ **Observación 157** *Sea $x \in Q$ con $M(w(1-\chi_{3Q}))(x) > 0$ y sea $\tilde{Q} : \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} w(1-\chi_{3Q})(x)dx \geq \frac{1}{2}M(w(1-\chi_{3Q}))(x) > 0$. Como $\frac{2}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} M(w(1-\chi_{3Q}))(x)dx > 0$ entonces $\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n - 3Q) \neq \emptyset$ y de ahí es fácil ver que $Q \subset 3\tilde{Q}$. Entonces si $z \in Q$ es $z \in 3\tilde{Q}$, y resulta $Mw(z) \geq \frac{1}{|3\tilde{Q}|} \int_{3\tilde{Q}} w(x)dx = \frac{1}{3^n} \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{3\tilde{Q}} w(x)dx \geq \frac{1}{3^n} \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} w(1-\chi_{3Q})dx \geq \frac{1}{3^n} \frac{1}{2}M(w(1-\chi_{3Q}))(x)$. Es decir que con $c = 3^{n+2}$ es $cMw(z) \geq M(w(1-\chi_{3Q}))(x)$ de donde para cualquier $z \in Q$ fijo tenemos $cMw(z) = \frac{1}{|Q|} \int_Q cMw(z)dx \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q M(w(1-\chi_{3Q}))(x)dx$ luego $c \inf_{z \in Q} Mw(z) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q M(w(1-\chi_{3Q}))(x)dx$*

Ahora, aplicando un par de veces la equivalencia de Herz-Stein y usando que $K(s, f; L^1, L^\infty) = t \cdot f^{**}(t)$, obtenemos las siguientes expresiones equivalentes a los lados izquierdo y derecho de (81):

$$(M(Mw))^*(t) \approx \frac{1}{t} \int_0^t (Mw)^*(s) ds \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^{**}(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t K(s, f; L^1, L^\infty) \frac{ds}{s},$$

$$(Mw)^*(t) \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} K(t, f; L^1, L^\infty).$$

Reescribiendo en consecuencia la acotación no trivial de la equivalencia (81) nos queda que

$$\int_0^t K(s, f; L^1, L^\infty) \frac{ds}{s} \preceq K(t, f; L^1, L^\infty).$$

Así, si w es un peso que satisface (74) se tiene que $w \in RH_{LL\log L}$.

Observación 158 Como ejemplo, es posible destacar una conexión interesante con la teoría de Extrapolación de Jawerth-Milman. De hecho, esta teoría proporciona muchos ejemplos de operadores de tipo débil $(1, 1), (\infty, \infty)$ mediante la extrapolación de desigualdades (cf. [58]). Un resultado prototípico puede enunciarse como sigue: Si T es un operador en una escala de interpolación real $\{\bar{X}_{\theta, q}\}_{\theta, q}$, $\theta \in (0, 1)$, $q \geq 1$, tal que

$$\|T\|_{\bar{X}_{\theta, q} \rightarrow \bar{X}_{\theta, q}} \preceq (1 - \theta)\theta^{-1}$$

entonces T satisface (76). En particular, si \bar{X} está ordenado (es decir $X_1 \subset X_0$ con inclusión continua) y solo nos interesa el comportamiento en espacios cercanos al espacio mayor X_0 , es decir cuando $\theta \rightarrow 0$, entonces los operadores que satisfacen $\|T\|_{\bar{X}_{\theta, q} \rightarrow \bar{X}_{\theta, q}} \preceq \theta^{-1}$ cuando $\theta \rightarrow 0$, pueden ser caracterizados por la desigualdad que sigue (cf. [58])

$$\frac{K(r, Tf; \bar{X})}{r} \leq C \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r K(s, f; \bar{X}) \frac{ds}{s} \right\} \quad (82)$$

En particular, para $\bar{X} = (L^1, L^\infty)$ esto nos lleva a las desigualdades de reordenamiento,

$$\frac{1}{r} \int_0^r (Tf)^*(s) ds \leq \frac{C}{r} \int_0^r f^{**}(s) ds. \quad (83)$$

La idea que subyace al Teorema 154 es que si $f \in RH_{LL\log L}$ tenemos

$$\frac{1}{r} \int_0^r K(s, f; \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq \|f\|_{RH_{LL\log L}} \frac{K(r, f; \bar{X})}{r}$$

por lo tanto si integramos (83) podemos usar la condición $RH_{LL\log L}$ dos veces en el lado derecho para obtener

$$\int_0^t \frac{K(r, Tf; L^1, L^\infty)}{r} dr \leq C \|f\|_{RH_{LL\log L}}^2 K(t, f; L^1, L^\infty)$$

lo cual en efecto revierte la desigualdad de (82).

4.4. Clases Hölder reversas y pesos no doblantes

Para medidas absolutamente continuas $d\mu = w(x) dx$ con w una función positiva y localmente integrable se definen de manera natural las clases Hölder reversas: Así, para $1 < p < \infty$ decimos que $g \in RH_p(w)$, si existe $C \geq 1$ tal que para todo cubo Q , se tiene:

$$\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q g(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq \frac{C}{w(Q)} \int_Q g(x) w(x) dx,$$

siendo $w(Q) = \int_Q w(x) dx$.

Si μ es doblante (es decir que existe cierta constante $c \geq 1$ tal que para toda bola $B(x, r)$ se tiene: $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$) se mantiene la equivalencia de Herz-Stein (con los reordenamientos decrecientes respecto de la medida $w(x) dx$):

$$(M_w g)_w^*(t) \approx g_w^{**}(t), \quad (84)$$

, donde el operador maximal M_w se define como:

$$M_w g(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q g(x) w(x) dx$$

. Esto nos proporciona la correspondiente relación con las K -funcionales:

$$(M_w g)_w^*(t) \approx \frac{K(t, g; L_w^1, L_w^\infty)}{t}$$

, así como

$$\left((M_w g^p)_w^* \right)^{1/p}(t) \approx \frac{K(t^{1/p}, g; L_w^p, L_w^\infty)}{t^{1/p}} \quad (85)$$

, y por lo tanto podemos usar, con los cambios obvios, el análisis de las secciones precedentes. Por otra parte, cuando $w(x) dx$ es un peso no doblante, en general no puede asegurarse la validez de (84), y por lo tanto puede no valer la equivalencia:

$$t g_w^{**}(t) \approx K(t, g; L_w^1, L_w^\infty),$$

por lo que es necesario modificar el enfoque. Esto es posible, mediante una idea introducida en [3], usando empaquetamientos: Un empaquetamiento π es una familia finita o numerable de cubos (de lados paralelos a los ejes coordenados) cuyos interiores no se intersecan. Dado un empaquetamiento se definen las familias de operadores de promediación S_π , donde

$$S_\pi(g)(x) = \sum_{i=1}^{|\pi|} \left(\frac{1}{w(Q_i)} \int_{Q_i} g(y) w(y) dy \right) \chi_{Q_i}(x), \quad g \in L_w^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

y claramente se tiene que

$$M_w g(x) = \sup_{\pi} S_\pi |g|(x)$$

de donde se tiene

$$(M_w g)_w^*(t) = \left(\sup_{\pi} S_\pi |g| \right)_w^*(t)$$

.En este contexto, para restaurar la equivalencia (84), se define un operador maximal modificado invirtiendo el orden del reordenamiento y los supremos: Consideramos $\sup_{\pi} (S_{\pi} |g|)_w^*(t)$ y para $1 \leq p < \infty$, tenemos (cf. [3])

$$\sup_{\pi} ((S_{\pi}(|g|^p))_w^*(t))^{1/p} \approx \frac{K(t^{1/p}, g; L_w^p, L^{\infty})}{t^{1/p}}$$

como sucedáneo de (85).

La clave de esta construcción es que permite expresar en términos de las K -funcionales la información provista por las desigualdades de Hölder reversas sustituyendo por el operador maximal modificado $\sup_{\pi} ((S_{\pi}(|g|^p))_w^*(t))^{1/p}$ allí donde M_w puede no estar acotado. De hecho, si $g \in RH_p(w(x)dx)$, de las definiciones tenemos que

$$t^{1-1/p} K(t^{1/p}, g; L_w^p(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \leq C \|g\|_{RH_p(w(x)dx)} K(t, g; L_w^1(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

Luego, si tomamos $\theta = 1 - 1/p$, se tiene

$$t^{\theta} K(t^{1-\theta}, g; L_w^p(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \leq C \|g\|_{RH_p(w(x)dx)} K(t, g; L_w^1(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$$

lo que en definitiva nos da

$$K(t, g; L_w^p(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \tag{86}$$

$$\leq C \|g\|_{RH_p(w(x)dx)} t^{-\frac{\theta}{1-\theta}} K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, g; L_w^1(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \tag{87}$$

$$= C \|g\|_{RH_p(w(x)dx)} t \frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, g; L_w^1(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n))}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}.$$

Por lo tanto, se obtiene la condición de (17) y obtenemos que $RH_p(w(x)dx) \subset RH_{\theta,p}(L_w^1(\mathbb{R}^n), L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$. Se puede localizar este resultado usando las fórmulas para las K -funcionales para cada cubo (cf. [77]):

$$K(t, g\chi_Q; L_w^p(Q), L^{\infty}(Q)) \leq C \|g\|_{RH_p(w(x)dx)} t \frac{K(t^{\frac{1}{1-\theta}}, g\chi_Q; L_w^1(Q), L^{\infty}(Q))}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

. Usando la fórmula de Holmstedt (ver apéndice) podemos realizar el análisis en el caso con pesos como lo hicimos en el caso sin pesos. De hecho, obtenemos que si $g \in RH_p(w(x)dx)$ entonces, para $0 < t < w(Q)$, vale:

$$\int_0^t [K(s, g\chi_Q; L_w^1(Q), L^{\infty}(Q))s^{-\theta}]^p \frac{ds}{s} \leq C [K(s, g\chi_Q; L_w^1(Q), L^{\infty}(Q))s^{-\theta}]^p.$$

Además de la referencia [3], donde se introduce el operador $\sup_{\pi} ((S_{\pi}(|g|^p))_w^*(t))^{1/p}$ como sustituto de $(M_w g)_w^*(t)$, cabe referir al lector interesado a [77] donde se calcula la K -funcional para el par $(L_w^1(Q), L^{\infty}(Q))$.

5. La preimagen de A_p para el Operador de Hardy-Littlewood

5.1. La situación en \mathbb{R}^n

En esta sección queremos brindar alguna caracterización de los pesos u en \mathbb{R}^n tales que $Mu \in A_{\infty}$. Esta era según parece una cuestión abierta, por ejemplo véase ([36]) donde se refiere a ([35]) donde hay resultados parciales para

funciones monótonas en \mathbb{R} , y hasta donde sabemos ([26] -en \mathbb{R}^n - y [27] -en $Q \subset \mathbb{R}^n$ -) son los primeros que dan resultados sin hipótesis adicionales sobre los pesos. Mostraremos que si para un peso u vale que $Mu \in A_\infty$ de hecho tiene que ocurrir la condición, mucho más fuerte: $Mu \in A_1$. A partir de un resultado debido a Neugebauer se sabe que estos pesos se pueden caracterizar por una condición puntual para el operador maximal: $(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \leq CMu(x)$ para cierta $C > 0$, $r > 1$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a.e., por lo que esto se satisface inmediatamente para un peso perteneciente a cualquier clase Hölder reversa. Remarquemos que en \mathbb{R}^n la condición puntual, $(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \leq CMu(x)$ a.e. para cierto $C > 0$ fijo, es estrictamente más débil que pedir una condición de Gehring: $\exists C > 0$ tal que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q u$ para todo cubo Q ; por ejemplo cualquier u perteneciente a *débil* - A_∞ (definición más adelante) pero no a A_∞ , satisface una condición de Neugebauer pero, para tal u no existe $C > 0$ tal que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q u$ para todo cubo Q . Esta situación contrasta con el caso del operador maximal local -es decir: restringidas a cubos incluidos en un cubo abierto finito fijo Q_0 , donde la condición de Neugebauer a.e. para $x \in Q_0$ es en realidad equivalente a una condición de Gehring con alguna constante fija $C > 0$ para todo $Q \subset Q_0$. Remitimos al lector a la referencia [26] para este caso con el operador maximal local M .

También presentaremos otra condición en términos de las medidas de los conjuntos $\{|u(x) > \lambda|\}$, mediante el uso de algunas desigualdades puntuales útiles encontradas por A. Lerner, que involucran el operador maximal sharp $u^\#$, el operador maximal local $m_\lambda(u)$ y el operador maximal de Hardy-Littlewood Mu . La condición resultante es más débil que algunas condiciones similares que caracterizan los pesos A_∞ . Una consecuencia interesante que podemos obtener de este resultado es una caracterización de los pesos A_1 similar a la conocida construcción de Coifman y Rochberg (que está dada en términos de $k(x)(Mu(x))^\delta$ -con k y k^{-1} pertenecientes a L^∞ - para $\delta \in [0, 1)$), pero involucrando $u^\#$ y $m_\lambda(u)$ en lugar de $Mu(x)$. Como otra consecuencia podemos mejorar, para esos pesos u tales que $Mu \in A_\infty$ -y por lo tanto, como veremos, $Mu \in A_1$ -, algunas desigualdades conocidas para operadores integrales singulares.

Los pesos que pertenecen a A_∞ pueden ser descriptos por varias condiciones. En la referencia [42] se enumeran muchas de dichas condiciones las cuales son mutuamente equivalentes para los pesos habituales de Muckenhoupt (con el operador maximal asociado a las bases de cubos -con lados paralelos a los ejes coordinados en \mathbb{R}^n -) pero que pueden proporcionar diferentes clases de pesos para otras bases⁷. Aquí trataremos con las bases habituales de los cubos y los correspondientes pesos de Muckenhoupt, pero uno podría traducir algunos de los resultados para varias otras bases \mathcal{B} de abiertos para las cuales las clases $A_{p,\mathcal{B}}$ se definen análogamente a las clases A_p (cambiando cubos por conjuntos $B \in \mathcal{B}$) y para los cuales las propiedades que relacionan los pesos y sus normas- A_p aún se mantienen.

⁷Con una base nos referimos a una colección \mathcal{B} de abiertos de \mathbb{R}^n , y en realidad aquí las bases \mathcal{B} serán siempre bases de Muckenhoupt lo que significa que el operador $M_{\mathcal{B}}$ está acotado en $L^p(w)$, donde $M_{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{\{B \in \mathcal{B}: x \in B\}} \frac{1}{w(B)} \int_B |f| w dx$ para cada $w \in A_{p,\mathcal{B}}$ (que se definen como en 25 reemplazando los cubos Q por los abiertos $B \in \mathcal{B}$)

Además también veremos que los pesos tales que $Mu \in A_\infty$ satisfacen una condición puntual análoga a las de tipo Gehring o a las Hölder reversas.

Resumiendo, los principales resultados de esta sección son:

Proposición 159 *Sea u un peso en \mathbb{R}^n , se tiene que $Mu \in A_\infty$ si y solo si $Mu \in A_1$.*

Teorema 160 *Sea u un peso en \mathbb{R}^n , $Mu \in A_\infty$ si y solo si existe $s > 1$ y $C_0 > 0$ tal que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0 Mu(x)$.*

Criterio 161 *Sea u un peso en \mathbb{R}^n , $Mu \in A_\infty$ si y solo si para algún $\lambda \in (0, 1)$ ocurre que $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$.*

Teorema 162 *Sea u un peso en \mathbb{R}^n , entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe cierto cubo Q_x con $x \in Q_x$, tal que para todo cubo Q con $x \in Q$ vale que:*

$$Mu \in A_\infty \iff \exists \alpha > 0, \beta \in (0, 1) : \left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha (Mu)_Q\} \right| \leq \beta |Q_x|$$

Desde luego que los cuatro resultados previos pueden englobarse en una equivalencia entre $Mu \in A_\infty$ y las condiciones de dichos resultados, pero preferimos desglosarlos de esta manera más manejable. Además tenemos el siguiente resultado análogo:

Teorema 163 (1) *Si $0 < \delta < 1$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $u \in A_1$ y C_1, C_2 son constantes no negativas entonces $C_1 (f^\#(x))^\delta + C_2 (m_\lambda u(x))^\delta \in A_1$.*

(2) *Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $u \in A_1$, constantes no negativas C_1 y C_2 , y $k(x)$ tal que k y $k^{-1} \in L^\infty$ tales que: $w(x) = k(x) \left(C_1 f^\#(x)^\delta + C_2 m_\lambda u(x)^\delta \right)$.*

El teorema de arriba es análogo a un resultado útil ya mencionado debido a Coifman, R. y Rochberg, R. para caracterizar los pesos de la clase A_1 :

Teorema 164 (1) *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Mf(x) < \infty$ a.e. y sea $0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = Mf(x)^\delta$ está en A_1 . Además la constante A_1 depende solo de δ .*

(2) *Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $k(x)$ con k y k^{-1} pertenecientes a L^∞ tal que $w(x) = k(x) Mf(x)^\delta$.*

Observación 165 *La prueba del teorema de Coifman y Rochberg se puede encontrar en [38] (o véase [31] para el trabajo original), usando una descomposición adecuada de f y la desigualdad de Kolmogorov para probar (1). El punto (2) es bastante elemental.*

Recopilamos algunas propiedades conocidas que usaremos a lo largo de esta sección. Las tres primeras se pueden obtener fácilmente usando la definición de las clases A_p , y la definición de las constantes $[A_p]$, y la desigualdad de Hölder (ver, por ejemplo [38]):

A) $A_p \subset A_q$ si $p < q$, y también $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$.

B) $w \in A_p$ si y solo si $w^{\frac{1}{1-p}} \in A_{\frac{1}{1-p}}$.

C) Si $w_0, w_1 \in A_1$ entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.

Otra propiedad que necesitaremos es el recíproco de la propiedad C). Esa propiedad (Teorema de Factorización de P. Jones) es mucho más profunda que la anterior (ver por ejemplo [106]).

D) Si $w \in A_p$ existen $w_0, w_1 \in A_1$ tales que $w = w_0 w_1^{1-p}$.

Finalmente, una última propiedad que necesitaremos es:

E) Si $w \in A_p$ existe $\alpha > 1$ tal que $w^\alpha \in A_p$.

Esta última propiedad suele probarse mediante el uso de desigualdades de Hölder inversas que satisfacen los pesos A_p (ver [38], [50] o [49]); pero se puede obtener fácilmente a partir de la construcción Coifman-Rochberg, algo quizás no tan conocido: Si $w \in A_1$ por (2) es $w(x)^\alpha = k(x)^\alpha Mf(x)^{\delta\alpha}$ y tomando $1 < \alpha < \frac{1}{\delta}$ tenemos, por (1), que $Mf(x)^{\delta\alpha} \in A_1$ y entonces

$$Mw(x)^\alpha \leq M\left(\|k\|_\infty^\alpha Mf(x)^{\delta\alpha}\right) \leq [(Mf)^\delta]_{A_1} \|k\|_\infty^\alpha \left(Mf(x)^{\delta\alpha}\right) \leq$$

$$[(Mf)^\delta]_{A_1} \|k\|_\infty^\alpha \|k^{-1}\|_\infty^\alpha k(x)^\alpha Mf(x)^{\delta\alpha} = [(Mf)^\delta]_{A_1} \|k\|_\infty^\alpha \|k^{-1}\|_\infty^\alpha w(x)^\alpha.$$

Luego $w(x)^\alpha \in A_p$ con $[w]_{A_p} \leq [(Mf)^\delta]_{A_1} \|k\|_\infty^\alpha \|k^{-1}\|_\infty^\alpha$. Por otro lado, para $p > 1$ y $w \in A_p$ por la propiedad D) tenemos $w = w_0 w_1^{1-p}$ con $w_0, w_1 \in A_1$, y para $j = 0, 1$ escribimos $w_j(x) = k_j(x) Mf_j(x)^{\delta_j}$, y para $1 < \alpha < \min\left\{\frac{1}{\delta_j}\right\}$ tenemos que $w_0^\alpha, w_1^\alpha \in A_1$ y usando C) obtenemos que $w^\alpha = w_0^\alpha (w_1^\alpha)^{1-p} \in A_p$.

Por la propiedad A, las clases A_p están anidadas, así que queda bien definida la clase $A_\infty = \bigcup_{p < \infty} A_p$.

Una caracterización de un peso w por pertenecer a A_∞ es la siguiente:

$$w \in A_\infty \iff \exists \alpha, \beta \in (0, 1) : |\{y \in Q : w(y) \leq \alpha w_Q\}| \leq \beta |Q| \quad (88)$$

para todo cubo Q (ver, por ejemplo, [42] para esta y otras caracterizaciones para bases generales).

El mencionado teorema 162 nos muestra una condición necesaria y suficiente para que Mu pertenezca a A_∞ con un enunciado más débil pero bastante similar a (88):

$$Mu \in A_\infty \iff \exists \alpha > 0, \beta \in (0, 1) : \left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha (Mu)_Q\} \right| \leq \beta |Q_x| \quad (89)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ (a.e.), para cierto cubo $Q_x \ni x$, y para cada cubo Q al que x pertenezca.

De la definición de pesos A_p se deduce fácilmente que si $u \in A_p$ entonces o bien u es localmente integrable, o sino $u = \infty$ a.e.

Como llamamos pesos a funciones no negativas localmente integrables, y queremos describir esos pesos w tales que Mw es un peso A_∞ , asumimos que siempre estamos tratando con pesos w tales que Mw es localmente integrable y luego $Mw < \infty$ (a.e.) aunque en alguna ocasión omitamos mencionarlo explícitamente.

5.1.1. Algunos resultados

El primer paso es la proposición 159 que muestra que si $Mu \in A_\infty$, entonces de hecho $Mu \in A_1$, y como $A_1 \subset A_\infty$ se tiene que $Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1$. Entonces, lo que tenemos que hacer es caracterizar los pesos u tales que $Mu \in A_1$.

Naturalmente $A_1 \subsetneq A_\infty$, así que hay pesos w tales que $w \in A_\infty$ and $w \notin A_1$. Este resultado nos muestra que ningún peso w que esté en $A_\infty \setminus A_1$ es de la forma $w = Mu$. En términos de índices lo que nos dice es que si $Mu \in A_\infty$ entonces $\text{ind} \left\{ (Mu)^{-1} \right\} = 1$.

Demostración de la Proposición 159:

Demostración. La implicación $Mu \in A_1 \implies Mu \in A_\infty$ es trivial ya que $A_1 \subset A_\infty$.

Solo tenemos que mostrar que $Mu \in A_\infty \implies Mu \in A_1$.

Si $Mu \in A_\infty = \bigcup_{p < \infty} A_p$, se tiene que $Mu \in A_p$ para algún $p \geq 1$. Si $p = 1$ no hay nada que probar. Sea $p > 1$, debido al resultado de Coifman y Rochberg antes mencionado tenemos que $(Mu)^\delta \in A_1$ para algún δ with $0 \leq \delta < 1$ y cualquier u localmente integrable, pero generalmente no es cierto que $Mu \in A_1$, de hecho estamos en el proceso de probar que si además tenemos que $Mu \in A_p$, en efecto $Mu \in A_1$.

Necesitamos el siguiente resultado (ver, por ejemplo, [97], ej 5 d) Cap 3): Para un espacio de probabilidad (Ω, μ) , es decir con medida $\mu(\Omega) = 1$, si $(\int_\Omega |f|^r d\mu)^{\frac{1}{r}} < \infty$ para algún $r > 0$, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_\Omega |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} = \exp \left(\int_\Omega \log(|f|) d\mu \right).$$

Nótese que usando que $\mu(\Omega) = 1$ y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\left(\int_\Omega |f|^{r_1} d\mu \right)^{\frac{1}{r_1}} \geq \left(\int_\Omega |f|^{r_2} d\mu \right)^{\frac{1}{r_2}}$$

si $r_1 \geq r_2$. Entonces para $r > 0$ tenemos que

$$\left(\int_\Omega |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \geq \exp \left(\int_\Omega \log(|f|) d\mu \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_\Omega |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ahora, para todo $q > p$, usando que

$$\sup_Q \frac{Mu(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mu(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} = [Mu]_{A_q} \leq [Mu]_{A_p}$$

(propiedad A), se tiene que para cualquier cubo Q :

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mu(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \leq [Mu]_{A_p} < \infty.$$

Si q tiende a infinito entonces $\frac{1}{q-1}$ tiende a 0^+ , luego tomando $r = \frac{1}{q-1}$ y aplicando el resultado de arriba para $f = w^{-1}$, $\Omega = Q$ y $d\mu = \frac{dx}{|Q|}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mu(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} &= \exp \left(\int_Q \log (Mu(x)^{-1}) dx \right) \\ &= \exp \left(\int_Q -\log (Mu(x)) dx \right) = \frac{1}{\exp \left(\int_Q \log (Mu(x)) dx \right)}. \end{aligned}$$

Tomando límite en

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mu(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \leq [Mu]_{A_p}$$

tenemos que

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \frac{1}{\exp \left(\int_Q \log (Mu(x)) dx \right)} \leq [Mu]_{A_p}$$

luego

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \leq [Mu]_{A_p} \exp \left(\int_Q \log (Mu(x)) dx \right).$$

Además, la observación de arriba aplicada para $f = Mu$ nos da que para cualquier $r > 0$ se cumple que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (Mu)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \geq \exp \left(\int_Q \log (Mu(x)) dx \right).$$

Así

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \leq [Mu]_{A_p} \exp \left(\int_Q \log (Mu(x)) dx \right) \leq [Mu]_{A_p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Mu|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}$$

y entonces

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \leq [Mu]_{A_p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Mu|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Tomando $r = \delta$ con $0 \leq \delta < 1$ y usando que para tal δ vale que $(Mu)^r = (Mu)^\delta \in A_1$, entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Mu|^r dx \leq [(Mu)^r]_{A_1} (Mu(x))^r$$

a.e, para cada $x \in Q$.

Entonces tenemos que para casi todo $x \in Q$

$$\begin{aligned} \frac{Mu(Q)}{|Q|} &\leq [Mu]_{A_p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Mu|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq [(Mu)^r]_{A_1} \left([(Mu)^r]_{A_1} (Mu(x))^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= [(Mu)^r]_{A_1} \left([(Mu)^r]_{A_1} \right)^{\frac{1}{r}} (Mu(x)). \end{aligned}$$

Tomando $C = [(Mu)^r]_{A_1} / ([(Mu)^r]_{A_1})^{\frac{1}{r}}$ independiente de Q , para todo Q se obtiene que

$$\frac{Mu(Q)}{|Q|} \leq C Mu(x)$$

a.e para $x \in Q$.

Entonces casi en todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$M(Mu)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{Mu(Q)}{|Q|} \leq C Mu(x)$$

, es decir,

$$M(Mu)(x) \leq C Mu(x)$$

y por lo tanto llegamos a que $Mu \in A_1$. ■

La proposición anterior junto con un lema debido a Neugebauer (publicado en [35]) nos permite dar una caracterización de todos los pesos u tal que $Mu \in A_\infty$. Hasta hace unos años, este era un problema abierto con interesantes consecuencias para mejorar algunas desigualdades de dos pesos para varios operadores (cf. [36]).

Para completar transcribimos a continuación el lema de Neugebauer y su fácil demostración. En [35] el lema es considerado en \mathbb{R} , pero la demostración funciona, mutatis mutandis, en \mathbb{R}^n .

Teorema 166 (Neugebauer) *Para un peso u se tiene que $Mu \in A_1$ si y solo si existen $s > 1$ y $C_0 > 0$ tales que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0 Mu(x)$.*

Demostración. Si tal $s > 1$ existe entonces $\frac{1}{s} < 1$ y la caracterización de Coifman-Rochberg de los pesos A_1 nos dice que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}$ está en A_1 . Luego $M\left((Mu^s)^{\frac{1}{s}}\right) \leq C_1 (Mu^s)^{\frac{1}{s}}$, y utilizando la hipótesis y el hecho de que por Hölder: $Mu \leq (Mu^s)^{\frac{1}{s}}$, obtenemos $M(Mu) \leq M\left((Mu^s)^{\frac{1}{s}}\right) \leq C_1 (Mu^s)^{\frac{1}{s}} \leq C_1 C Mu$, y entonces $M(Mu) \leq C Mu$, es decir $Mu \in A_1$.

Recíprocamente, si $Mu \in A_1$ entonces Mu satisface una desigualdad de Hölder inversa (RHI), eso significa que para algunos $s > 1$ y $C > 0$ se cumple para cualquier cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q Mu^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q Mu$$

y tomando supremos sobre los cubos tenemos:

$$(Mu^s)^{\frac{1}{s}} \leq C Mu.$$

■

Como ya hemos mencionado del lema de Neugebauer junto con la Proposición 159, que recordamos que establece que $Mu \in A_\infty$ si y solo si $Mu \in A_1$, obtenemos el Teorema 160, cuyo enunciado recordamos:

Sea u un peso en \mathbb{R}^n , $Mu \in A_\infty$ si y solo si existen $s > 1$ y $C_0 > 0$ tales que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0 Mu(x)$.

Demostración. Es inmediato del lema de Neugebauer y la Proposición 159. ■

Observación 167 Observemos que se obtiene una acotación para la constante $[Mu]_{A_1}$, esto es:

$$[Mu]_{A_1} \leq [(Mu)^r]_{A_1} \left([(Mu)^r]_{A_1} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Observación 168 Debido a los resultados anteriores los pesos u con $Mu \in A_\infty$ son aquellos para los que hay algún $C > 0$ tal que (a.e.)

$$M(Mu)(x) \leq CMu(x)$$

Como mencionamos arriba, para los pesos $Mu \in A_\infty$, también tenemos el siguiente resultado en término de índices:

Proposición 169 Si $Mu \in A_\infty$ entonces $\text{ind} \left\{ (Mu)^{-1} \right\} = 1$.

Demostración. Esto es casi inmediato a partir de 127 y 159: Sea $w = Mu \in A_\infty = RH$ es $\text{ind}\{w\} > 0$ y por 159 tenemos que $w \in A_1$ y por lo tanto $w \in A_p$ para cada p entre 1 y 2, por lo que debido a 127 tenemos que $\text{ind}\{w^{-1}\} > 2 - p$ para todo $p > 1$, por lo tanto $\text{ind}\{w^{-1}\} \geq 1$, como por la definición de índices es $\text{ind}\{\cdot\} \leq 1$ nos queda $\text{ind} \left\{ (Mu)^{-1} \right\} = 1$. ■

5.1.2. Algunas definiciones y propiedades adicionales.

Ahora usaremos algunas desigualdades puntuales para ciertos operadores maximales para debilitar la condición anterior. Necesitamos definir la función maximal local (sharp), redescubierta por O. Strömberg ([107]); la noción ya había sido considerada por F. John ([60]).

Definición 170 Sea f una función medible y $\lambda \in (0, 1)$, la función maximal local $m_\lambda(f)$ se define como:

$$m_\lambda f(x) = \sup_{Q \ni x} (f \chi_Q)^* (\lambda |Q|).$$

Señalemos algunas propiedades básicas de f^* , $m_\lambda f(x)$, y $f^\#$, que son inmediatas a partir de sus definiciones:

- (i) $f^\#(x) \leq 2Mf(x)$.
- (ii) Si $c > 0$ entonces $(cf)^*(t) = c(f)^*(t)$.
- (iii) Si $f(x) \geq g(x)$ a.e. entonces $f^*(t) \geq g^*(t)$ para todo $t \geq 0$.
- (iv) Usando iii), si $f(x) \geq g(x)$ a.e. entonces $m_\lambda(f)(x) \geq m_\lambda(g)(x)$ para todo x .
- (v) Si $c > 0$, usando ii) tenemos que $m_\lambda(cf)(x) = cm_\lambda(f)(x)$.

También necesitaremos el resultado (vi) algo menos trivial que presentamos a continuación:

Lema 171 (vi) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $m_\lambda(f)(x) \geq |f(x)|$ en cada punto de Lebesgue de f , y por lo tanto a.e.

Demostración. Tendremos que recordar una definición y un resultado conocido de análisis real. La definición es la siguiente: Una sucesión $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de Borel de \mathbb{R}^n se dice que *se contrae bien* a x si hay un número $\alpha > 0$ tal que hay una sucesión de cubos $\{Q_{(x, r_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n centrados en x de radios $r_i \rightarrow 0$,

tales que $E_i \subset Q_{(x,r_i)}$ y $|E_i| \geq \alpha |Q_{(x,r_i)}|$. El resultado es: Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos que se *contrae bien* a x entonces

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} f(z) dz$$

(ver [97], teorema 7.10 -cambiando cubos por bolas y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ en lugar de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la demostración igual funciona-).

Ahora, para cualquier τ positivo con $\tau < 1$, usando las definiciones de reordenamientos decrecientes y de m_λ tenemos que

$$\forall Q \ni x : |\{y \in Q : |f(y)| > \tau m_\lambda f(x)\}| \geq \lambda |Q|.$$

Entonces, si tomamos $r_i = \frac{1}{i} \rightarrow 0$ y nombramos

$$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{y \in Q_{(x,r_i)} : |f(y)| \leq \tau m_\lambda f(x)\}$$

entonces

$$E_i = Q_{(x,r_i)} \setminus \{y \in Q_{(x,r_i)} : |f(y)| > \tau m_\lambda f(x)\}$$

y obtenemos que

$$|E_i| = |Q_{(x,r_i)} \setminus \{y \in Q_{(x,r_i)} : |f(y)| > \tau m_\lambda f(x)\}| \geq |Q_{(x,r_i)}| - \lambda |Q_{(x,r_i)}|$$

, es decir

$$|E_i| \geq (1 - \lambda) |Q_{(x,r_i)}|$$

y entonces $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos que se *contrae bien* a x . Pero ahora, con estos conjuntos E_i podemos aplicar el resultado mencionado para cualquier punto de Lebesgue para obtener:

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} f(z) dz \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} \tau m_\lambda f(x) dz$$

y usando $|f(x)|$ en lugar de $f(x)$:

$$|f(x)| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\tau m_\lambda f(x)}{|E_i|} \int_{E_i} dz = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\tau m_\lambda f(x)}{|E_i|} |E_i| = \tau m_\lambda f(x).$$

Entonces

$$|f(x)| \leq \tau m_\lambda f(x)$$

$\forall \tau < 1$, y tomando límite para $\tau \rightarrow 1^-$ obtenemos:

$$|f(x)| \leq m_\lambda f(x)$$

para cada punto de Lebesgue de f y por lo tanto a.e. ■

Continuando enumerando unas pocas propiedades más que necesitaremos:

(vii) Para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ hay una constante $c_{\lambda,n}$ (dependiendo solo de λ y n) tal que para todo $u \in L^1_{loc}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene (ver [70] o [71]):

$$m_\lambda(Mu)(x) \leq c_{\lambda,n} u^\#(x) + Mu(x).$$

(viii) Usando vii) y aplicando vi) a $f = Mu$ obtenemos

$$m_\lambda(Mu)(x) \leq cMu(x) \text{ a.e.}$$

para algún $c > 0$.

(ix) $m_\lambda(Mu)$ y Mu son puntualmente equivalentes (a.e.), es decir

$$m_\lambda(Mu) \approx Mu$$

, o sea hay constantes positivas A y B tales que $m_\lambda(Mu)(x) \leq AMu(x)$ y $Mu(x) \leq Bm_\lambda(Mu(x))$ (a.e.). Obtenemos esto tomando $A = c$ en viii), y $B = 1$ en vi).

(x) Es inmediato de la definición de M que $Mf(x) \geq f(x)$ a.e.

5.1.3. Algunos resultados más

De la proposición 159 tenemos que $Mu \in A_\infty$ si y sólo si $Mu \approx M(Mu)$. En realidad, un enunciado más débil es suficiente para garantizar que $Mu \in A_\infty$. Este es el Criterio 161 y se sigue de nuestra proposición 159 y la desigualdad vii). Recordemos su enunciado: $Mu \in A_\infty$ si y solo si $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$ para algún $\lambda \in (0, 1)$. Veámoslo:

Demostración. Por la Proposición 1 tenemos $Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1$, luego $Mu \in A_\infty$ si y solo si hay algún $C > 0 : M(Mu)(x) \leq CMu(x)$ a.e. y usando que $M(f)(x) \geq f(x)$ a.e. para $f \in L^1_{loc}$ tenemos que $M(Mu)(x) \geq Mu(x)$ a.e., y entonces ix) nos da que $Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1 \iff Mu \approx M(Mu) \iff m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$. ■

Observación 172 Podemos observar que es suficiente que $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$ para algún $\lambda \in (0, 1)$ para obtener que $Mu \in A_\infty$ y entonces $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$.

A causa de viii), dado cualquier u siempre podemos asegurar que para un adecuado $c > 0$ vale $m_\lambda(Mu)(x) \leq cMu(x) \leq cM(Mu)(x)$, y así $m_\lambda(Mu)(x) \leq cM(Mu)(x)$ a.e.; de este modo, por el criterio de arriba, una condición necesaria y suficiente sobre u , para que Mu pertenezca a A_∞ es la existencia de una constante $C > 0$ tal que $M(Mu)(x) \leq Cm_\lambda(Mu)(x)$ a.e.

Como mencionamos en la introducción a esta sección, ahora queremos probar que (89) es una condición necesaria y suficiente sobre un peso u para que Mu esté en A_∞ .

Una condición como (89) pero aplicada para un peso arbitrario w en lugar de Mu es más débil que (88), esto es:

Condición 173 Si $w \in A_\infty$ entonces $\exists \alpha_1 > 0, \beta_1 \in (0, 1)$ tales que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un cubo $Q_x \ni x$ que verifica que, para todo cubo $Q \ni x$, se cumple $|\{y \in Q_x : w(y) \leq \alpha_1 w_Q\}| \leq \beta_1 |Q_x|$.

Para ver la implicación de la condición 173 recordemos la siguiente equivalencia conocida (cf. [42]):

Condición 174 $w \in A_\infty$ si y solo si $\exists \alpha, \beta \in (0, 1) :$
 $\forall Q$ cubo se tiene $|\{y \in Q : w(y) \leq \alpha w_Q\}| \leq \beta |Q|$.

Veamos ahora 173: si $w \in A_\infty$ fijamos algún $k \in (0, 1)$, por ejemplo $k = \frac{1}{2}$, y para cualquier x se tiene un cubo $Q_x \ni x$ tal que $w_{Q_x} = \frac{w(Q_x)}{|Q_x|} \geq kMw(x)$. Entonces, tomemos $\alpha_1 = \alpha k$ y para todo $Q \ni x$ tendremos que

$$\begin{aligned} \{y \in Q_x : w(y) \leq \alpha_1 w_Q\} &\subset \{y \in Q_x : w(y) \leq \alpha_1 Mw(x)\} \\ &\subset \{y \in Q_x : w(y) \leq \frac{\alpha_1 w(Q_x)}{k} \frac{|Q_x|}{|Q_x|}\} \end{aligned}$$

luego aplicando la condición 174 a Q_x se tiene

$$\begin{aligned} |\{y \in Q_x : w(y) \leq \alpha_1 w_Q\}| &\leq \left| \{y \in Q_x : w(y) \leq \frac{\alpha_1}{k} w_{Q_x}\} \right| \\ &= |\{y \in Q_x : w(y) \leq \alpha w_{Q_x}\}| \leq \beta |Q_x| \end{aligned}$$

por lo que la condición 173 (LocalAINF) se cumple con $\alpha_1 = \alpha k$, $\beta_1 = \beta$ y con Q_x el cubo elegido para el cual $\frac{w(Q_x)}{|Q_x|} \geq kMw(x)$.

Aunque la condición 173 es más débil que A_∞ para un peso genérico cuando se aplica a un peso que es la función máxima de otro peso, es decir, si $w = Mu$ entonces la condición 173 implica A_∞ , por lo que son condiciones equivalentes para pesos Mu . Ese es el enunciado del teorema 162 cuyo enunciado recordamos:

Sea u un peso en \mathbb{R}^n , entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe cierto cubo Q_x con $x \in Q_x$, tal que para todo cubo Q con $x \in Q$ vale que: para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ para algún cubo $Q_x \ni x$, y para todo cubo Q al que x pertenezca. Probémoslo:

Demostración. Por la observación anterior $Mu \in A_\infty$ si y solo si existe una constante positiva B y un $\lambda \in (0, 1)$:

$$M(Mu)(x) \leq Bm_\lambda(Mu(x)) \text{ a.e.} \quad (90)$$

Luego, garantizar $Mu \in A_\infty$ es equivalente a tener:

$$\alpha M(Mu)(x) \leq m_\lambda(Mu(x)) \quad (91)$$

para algún $\alpha > 0$ y casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora usando la definición de m_λ tenemos que (91) equivale a decir que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\exists Q_x \ni x : (Mu \chi_{Q_x})^* (\lambda |Q_x|) \geq \alpha (Mu)_Q$$

para todo cubo $Q \ni x$. Ahora, por la definición de reordenamientos decrecientes, esto significa que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\exists Q_x \ni x : \left| \{y \in Q_x : Mu(y) > \alpha (Mu)_Q\} \right| > \lambda |Q_x|$$

para todo cubo $Q \ni x$. Tomando complementos respecto a Q_x y llamando $\beta = (1 - \lambda) \in (0, 1)$, tenemos (90), y por lo tanto $Mu \in A_\infty$ es equivalente a la existencia de $\alpha > 0, \beta \in (0, 1)$ tales que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ hay algún cubo $Q_x \ni x$:

$$\left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha (Mu)_Q\} \right| \leq \beta |Q_x|$$

para todo $Q \ni x$. ■

Ejemplo 175 Es fácil ver que una clase de pesos u tal que $Mu \in A_\infty$ es la propia clase A_∞ , es decir, $M(A_\infty) \subset A_\infty$, y por nuestra primera proposición de hecho $M(A_\infty) \subset A_1$. De hecho, podemos proporcionar una prueba elemental de esto usando el teorema anterior y la caracterización (88) de pesos A_∞ : Fijamos algún $k \in (0, 1)$, y para cada x tomamos un cubo Q_x tal que $\frac{Mu(Q_x)}{|Q_x|} \geq kM(Mu)(x)$; debido a (88) y al hecho de que $u \in A_\infty$ tenemos α_1, β_1 tales que para cualquier cubo \tilde{Q} vale que: $|\{y \in \tilde{Q} : u(y) \leq \alpha_1 u_{\tilde{Q}}\}| \leq \beta_1 |\tilde{Q}|$. Entonces para $\tilde{Q} = Q_x$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{k}$, $\beta = \beta_1$ y para cualquier $Q \ni x$, y usando las inclusiones triviales debidas a las desigualdades $\frac{Mu(Q_x)}{|Q_x|} \geq kM(Mu)(x)$; $MMu(z) \geq Mu(z)$ a.e., y $Mu(z) \geq u(z)$ a.e. se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha \frac{Mu(Q)}{|Q|}\} \right| \leq \left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha \frac{MMu(Q)}{|Q|}\} \right| \leq \\ & \leq |\{y \in Q_x : Mu(y) \leq \alpha M(Mu)(x)\}| \leq |\{y \in Q_x : u(y) \leq \alpha M(Mu)(x)\}| \\ & \leq \left| \{y \in Q_x : u(y) \leq \frac{\alpha}{k} \frac{Mu(Q_x)}{|Q_x|}\} \right| \leq \beta |Q_x| \end{aligned}$$

es decir que obtenemos

$$\left| \{y \in Q_x : Mu(y) \leq \frac{\alpha}{k} \frac{Mu(Q)}{|Q|}\} \right| \leq \beta |Q_x|$$

y por el teorema 162 llegamos a que $Mu \in A_\infty$.

Ejemplo 176 En realidad, para las Mu con $u \in A_\infty$ hay una forma más corta de probar que $Mu \in A_1$: Debido a la desigualdad de Hölder tenemos que para todo $r > 1$:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

y tomando supremos

$$Mu(x) \leq (M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}}.$$

Ahora por la caracterización Coifman-Rochberg de los pesos A_1 , para cualquier función g localmente integrable y $\delta \in [0, 1)$ se tiene que $Mg(x)^\delta \in A_1$ y entonces $(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \in A_1$, por lo tanto para alguna constante $C > 1$:

$$MMu(x) \leq M\left((M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}}\right) \leq C(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}}$$

a.e. Pero si $u \in A_\infty$ entonces $u \in A_p$ para algún $p \geq 1$, y luego satisface una desigualdad de Hölder reversa (ver [38]) para algún $r > 1$, esto es

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)$$

para cierto $C > 0$, así

$$(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \leq CMu(x)$$

y entonces

$$MMu(x) \leq CMu(x)$$

a.e. Esto es: $Mu \in A_1$.

Observación 177 Veremos, sin embargo (en el ejemplo que sigue abajo) que el argumento del ejemplo previo no sustituye a la proposición 159 ya que hay pesos $u \notin A_\infty$ tales que $Mu \in A_1$. En el ejemplo de arriba, al demostrar que $M(A_\infty) \subset A_1$ hemos requerido dos fuertes resultados: la caracterización de A_1 y una desigualdad de Hölder reversa para pesos A_p .

Ejemplo 178 Una clase más grande de pesos cuya imagen por M está incluida en A_1 son los pesos débil $- A_\infty$. Antes de introducirla, con fines comparativos, recordemos que $u \in A_\infty$ si y solo si existen constantes positivas C y δ tales que para cualquier cubo Q y cualquier $E \subset Q$ medible se tiene:

$$u(E) \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\delta u(Q).$$

Definamos ahora la clase débil $- A_\infty$.

Definición 179 $u \in$ débil $- A_\infty$ si y solo si existen constantes positivas C y δ tales que para cualquier cubo Q y cualquier $E \subset Q$ medible se tiene:

$$u(E) \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\delta u(2Q). \quad (92)$$

Observación 180 Señalemos que es fácil probar que podemos reemplazar el factor 2 con cualquier constante $k > 1$ obteniendo una definición equivalente de débil $- A_\infty$.

Es evidente que si $u \in A_\infty$ entonces $u \in$ débil $- A_\infty$.

Recordemos también que $u \in A_\infty$ si y solo si está en alguna clase RH , es decir, existen $r > 1$ y $C > 0$ tales que para todo cubo Q se tiene:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q u.$$

Observación 181 Observemos que aquellos pesos que pertenecen a débil $- A_\infty$ pero que no pertenecen a A_∞ son siempre pesos no doblantes.

Un corolario que podemos obtener inmediatamente para pesos A_∞ tomando supremos en la condición para pertenecer a la clase RH_r es que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \leq CMu(x).$$

Se puede obtener fácilmente para pesos en la clase débil $- A_\infty$ una condición análoga a RH , incluimos el enunciado y, por completitud, una demostración:

Lema 182 Si $u \in$ débil $- A_\infty$ existen $r > 1$ y $C > 0$ tales que para cualquier cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} u.$$

Demostración. Sea Q un cubo cualquiera y consideremos los conjuntos: $E_t = \{x \in Q : u(x) > t\}$. Ahora, aplicando la definición de E_t y (92) se tiene que

$t |E_t| \leq u(E_t) \leq C \frac{|E_t|^\delta}{|Q|^\delta} u(2Q)$. Luego, usando que $|2Q| = 2^n |Q|$ e incorporando el factor 2^n a la constante C queda:

$$t |E_t|^{1-\delta} \leq C |Q|^{1-\delta} \frac{u(2Q)}{|2Q|}$$

entonces

$$|E_t| \leq C t^{\frac{-1}{1-\delta}} |Q| \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}.$$

Ahora usamos esta desigualdad en la “layer-cake fórmula”. Sea $k \in (0, \infty)$ que elegiremos más adelante:

$$\int_Q u^r = \int_0^\infty r t^{r-1} |E_t| dt = \int_0^\infty r t^{r-1} |E_t| dt = \int_0^k r t^{r-1} |E_t| dt + \int_k^\infty r t^{r-1} |E_t| dt$$

entonces

$$\int_Q u^r \leq \int_0^k r t^{r-1} |Q| dt + C \int_k^\infty r t^{r-1} t^{\frac{-1}{1-\delta}} |Q| \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} dt$$

esto es:

$$\int_Q u^r \leq |Q| t^r \Big|_0^k + C |Q| \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \frac{r}{r - \frac{1}{1-\delta}} t^{r - \frac{1}{1-\delta}} \Big|_k^\infty$$

entonces, para $r : 1 < r < \frac{1}{1-\delta}$ obtenemos:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \leq k^r + C \frac{r}{\frac{1}{1-\delta} - r} \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} k^{r - \frac{1}{1-\delta}}.$$

Ahora, eligiendo $k = \frac{u(2Q)}{|2Q|}$ resulta:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \leq \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^r + C \frac{r}{\frac{1}{1-\delta} - r} \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^{r - \frac{1}{1-\delta}}$$

, por lo tanto:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \leq \left(C \frac{r}{\frac{1}{1-\delta} - r} \right) \left(\frac{u(2Q)}{|2Q|} \right)^r$$

y renombrando la constante tenemos:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{u(2Q)}{|2Q|}.$$

■

Corolario 183 *Del lema anterior es obvio que la desigualdad puntual*

$$(M(u^r)(x))^{\frac{1}{r}} \leq C M u(x) \tag{93}$$

aún permanece cierta para pesos débil - A_∞ , y usando el lema de Neugebauer los pesos $u \in$ débil - A_∞ satisfacen que $M u \in A_1$.

De hecho, la condición: $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} u$ caracteriza los pesos *débil* - A_∞ ; se puede probar que el recíproco del lema anterior también es cierto, sin embargo no necesitaremos aquí ese resultado. Como mencionamos en un comentario anterior podemos reemplazar la constante 2 por cualquier $k > 1$, entonces $u \in \textit{débil} - A_\infty$ si y solo si existe alguna constante positiva C tal que para cualquier $k > 1$ y todo cubo Q se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|kQ|} \int_{kQ} u. \quad (94)$$

Ya hemos visto que $A_\infty \subset \textit{débil} - A_\infty \subset M^{-1}(A_\infty)$, donde denotamos: $M^{-1}(A_\infty)$, a la clase de pesos u tales que $Mu \in A_\infty$.

Es interesante observar que esta pregunta tiene una estrecha relación con otra que involucra la desigualdad ponderada de Fefferman-Stein en $L^p(w)$:

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq c \|f^\#\|_{L^p(w)} \quad (1 < p < \infty) \quad (95)$$

para algún $c > 0$, y para todo $f \in L^p$ tal que $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$, donde $S_0(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones medibles f en \mathbb{R}^n tales que para cualquier $t > 0$ vale que

$$\mu_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| < \infty.$$

La desigualdad (95) es equivalente a muchas otras interesantes, por ejemplo, con las mismas hipótesis de (95):

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c \|f^\#\|_{L^p(w)} \quad (1 < p < \infty)$$

o para algún $c > 0$, y algún $r > 1$, y para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{p,r}(f, w) |f| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p w dx \quad (1 < p < \infty) \quad (96)$$

donde $\mathcal{M}_{p,r}(f, w) = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|\right)^{p-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r\right)^{\frac{1}{r}}$.

La equivalencia de esas desigualdades se prueba en [72].

Observación 184 *En relación con la cuestión abierta, hasta dónde sabemos, acerca de cuáles son todos los pesos que cumplen las desigualdades anteriores, están las siguientes inclusiones de clases anidadas: $A_\infty \subset \textit{débil} - A_\infty \subset C_{p+\varepsilon} \subset C_p$ donde $\varepsilon > 0$ y la condición C_p significa que existen $c, \delta > 0$ tales que para cualquier cubo Q y cualquier $E \subset Q$ medible ocurre la desigualdad:*

$$u(E) \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta \int_{\mathbb{R}^n} (M\chi_Q)^p u.$$

Recuérdese que para $u \in A_1$ y para cualquier cubo Q y cualquier conjunto medible $E \subset Q$:

$$u(E) \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta u(Q) = c \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_Q)^p u$$

; y para pesos débil $-A_\infty$ se tiene que $u \in \text{débil} - A_\infty$ si y solo si existen constantes positivas C y δ tales que para cualquier cubo Q y cualquier $E \subset Q$ medible:

$$u(E) \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\delta \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{2Q})^p u$$

y las inclusiones mencionadas son inmediatas. Se puede encontrar en [72] (véase también [115]) que C_p es necesario y $C_{p+\varepsilon}$ es suficiente para probar (96) y (95). En [72] se introduce, en lugar de $C_{p+\varepsilon}$, una nueva condición suficiente denotada \widetilde{C}_p pero no se sabe si \widetilde{C}_p o $C_{p+\varepsilon}$ son necesarias. En [73] puede hallarse un tratamiento actual de la cuestión y consideraciones de una diferente condición suficiente, y en [74] se describe en qué espacios de Banach de funciones son equivalentes las desigualdades de Coifman-Fefferman y de Fefferman-Stein.

Las inclusiones $A_\infty \subset \text{débil} - A_\infty \subset M^{-1}(A_\infty)$ y $A_\infty \subset \text{débil} - A_\infty \subset C_{p+\varepsilon} \subset C_p$ y las desigualdades mencionadas en el párrafo anterior parecen estar estrechamente relacionadas: Por ejemplo $u \in C_p$ es necesaria para (96), y (96)

implica que para cualquier Q se tiene que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} (M\chi_Q)^p u$,

que es un poco más débil que $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{2Q})^p u$, lo cual es equivalente a $\text{débil} - A_\infty$.

Además en [72] se prueba que C_p es necesario para $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{p,r}(f, w) |f| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p w dx$, es decir que (96) implica C_p .

Por otro lado, usando el lema de Neugebauer (que dice que $(Mu^r)^{\frac{1}{r}}(x) \leq CMu(x)$ si $u \in M^{-1}(A_\infty)$, para ciertos $C > 0$, $r > 1$) y la definición de $\mathcal{M}_{p,r}(f, u)$ obtenemos que si $u \in M^{-1}(A_\infty)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p,r}(f, w)(u) &= \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^{p-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^{p-1} M_r u(x) \leq \\ &\sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \right)^{p-1} CMu(x) \leq (Mf)^{p-1}(x) CMu(x) \end{aligned}$$

y entonces integrando tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{p,r}(f, w) |f| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p M w dx \quad (97)$$

(compárese con (96)). Luego tenemos que $M^{-1}(A_\infty)$ implica (97), y (96) implica C_p .

5.1.4. Algunas aplicaciones

Usando el criterio: $Mu \in A_\infty$ si y solo si para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ se cumple que $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$, podemos derivar de este resultado una caracterización de los pesos A_1 similar a la construcción de Coifman y Rochberg.

En primer lugar introducimos la definición del operador maximal sharp local; para $0 < \lambda < 1$ definimos:

$$M_\lambda^\# f(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_c ((f - c) \chi_Q)^* (\lambda |Q|).$$

La función maximal sharp local tiene un papel bastante similar al operador maximal de Hardy-Littlewood para las funciones maximales sharp locales porque hay constantes positivas c_1 y c_2 tales que para $f \in L_{loc}^1$:

$$c_1 MM_\lambda^\# f(x) \leq f^\#(x) \leq c_2 MM_\lambda^\# f(x) \quad (98)$$

(ver [59]). Para un panorama actualizado del papel de $M_\lambda^\#$ en el estudio de una escala de diversos espacios, su caracterización mediante índices de Boyd y varias interesantes cuestiones remitimos a [6] y las referencias allí mencionadas.

Usando las desigualdades anteriores obtenemos fácilmente para la función maximal sharp un enunciado similar al primero del teorema de Coifman-Rochberg:

Lema 185 *Sea $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ and $0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = f^\#(x)^\delta$ está en A_1 .*

Demostración. Por (98) se tiene $c_1^\delta (MM_\lambda^\# f(x))^\delta \leq f^\#(x)^\delta \leq c_2^\delta (MM_\lambda^\# f(x))^\delta$,

y también vale $(MM_\lambda^\# f(x))^\delta \in A_1$ por el resultado ya mencionado de Coifman y Rochberg. Ahora

$$\begin{aligned} Mf^\#(x)^\delta &\leq M\left(c_2^\delta (MM_\lambda^\# f(x))^\delta\right) \\ &\leq c_2^\delta [MM_\lambda^\# f(x)]_{A_1} (MM_\lambda^\# f(x))^\delta \leq Cf^\#(x)^\delta \end{aligned}$$

con constante $C = \frac{c_2^\delta}{c_1^\delta} [MM_\lambda^\# f(x)]_{A_1}$, luego $f^\#(x)^\delta \in A_1$. ■

No sabemos si cualquier $w \in A_1$ siempre puede ser escrito como $k(x) f^\#(x)^\delta$ para adecuados: $f \in L_{loc}^1$; $0 < \delta < 1$ y $k, k^{-1} \in L^\infty$, pero podemos obtener un resultado similar a la segunda parte del teorema de Coifman-Rochberg si sumamos un múltiplo de la función maximal local m_λ , en efecto se tiene la siguiente:

Proposición 186 *Si $w \in A_1$ entonces existen $k(x)$ tal que $k, k^{-1} \in L^\infty$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $w(x) = k(x) \left(C_1 \left((w^\alpha(x))^\# \right)^\delta + C_2 (m_\lambda w^\alpha(x))^\delta \right)$.*

Demostración. Si $w \in A_1$ podemos usar la propiedad E) para tomar $\alpha > 1$ tal que $w^\alpha \in A_1$. Luego $M(w^\alpha) \in A_1$. Usando ahora para w^α el criterio visto más arriba, que establece que $Mu \in A_1$ si y solo si $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu)$, entonces, en dicha situación es: $m_\lambda(M(w^\alpha)) \approx M(M(w^\alpha)) \approx M(w^\alpha) \approx w^\alpha$. También tenemos que $Mw \approx w$ ya que $w \in A_1$ y además usando las desigualdades puntuales mencionadas en xi) y vii): $m_\lambda(Mu)(x) \leq c_{\lambda,n} u^\#(x) + Mu(x)$ y $m_\lambda(Mu)(x) \leq c_{\lambda,n} u^\#(x) + Mu(x)$, para $u = w^\alpha$ tenemos:

$$w(x)^\alpha \leq M(w^\alpha)(x) \leq c_{\lambda,n} (w^\alpha)^\#(x) + m_\lambda(w^\alpha)(x).$$

Luego con $\delta = \frac{1}{\alpha}$ es $0 < \delta < 1$ y $\alpha\delta = 1$. Además usaremos la desigualdad puntual (i): $u^\# \leq 2Mu$, las propiedades (vi) y (x), es decir $(|f(x)| \leq m_\lambda f(x))$

y $f(x) \leq Mf(x)$, y también que si $f(x) \leq g(x)$ a.e. para funciones positivas entonces $Mf(x) \leq Mg(x)$ y $m_\lambda(f)(x) \leq m_\lambda(g)(x)$ a.e.

Además por la sublinealidad de M y el hecho de que w^α y w están en A_1 podemos usar el criterio 161 para ver que debido a que $w \in A_1$ entonces se tiene $Mw \in A_1$, y luego ocurre que $m_\lambda(Mw) \approx M(Mw) \approx Mw \approx w$. También usaremos que $M\left((Mw^\alpha)^\delta\right) \leq C(Mw^\alpha)^\delta$ (ya que $(Mf)^\delta \in A_1$ por Coifman-Rochberg). Entonces (numerando o renombrando las constantes que aparecen) tenemos:

$$\begin{aligned}
w(x) &\leq \left(c_1(w^\alpha)^\#(x) + m_\lambda(w^\alpha)(x)\right)^\delta \\
&\leq c_2\left((w^\alpha)^\#(x)\right)^\delta + (m_\lambda(w^\alpha)(x))^\delta \\
&\leq M\left(c_2\left((w^\alpha)^\#(x)\right)^\delta + (m_\lambda(w^\alpha)(x))^\delta\right) \\
&\leq c_2M\left(\left((w^\alpha)^\#(x)\right)^\delta\right) + M\left((m_\lambda(w^\alpha)(x))^\delta\right) \\
&\leq c_2M\left(2^\delta M(w^\alpha)(x)^\delta\right) + M\left((m_\lambda(Mw^\alpha)(x))^\delta\right) \\
&\leq c_3M\left(M(w^\alpha)(x)^\delta\right) + M\left((m_\lambda(Mw^\alpha)(x))^\delta\right) \\
&\leq c_3M\left(c_4(w^\alpha)(x)^\delta\right) + M\left((c_5w(x)^\alpha)^\delta\right) \\
&\leq c_6Mw(x) + c_7Mw(x) = c_8Mw(x) \leq Cw(x).
\end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$w(x) \leq c_1^\delta \left((w^\alpha)^\#(x)\right)^\delta + (m_\lambda(w^\alpha)(x))^\delta \leq Cw(x)$$

y entonces $k(x) = \frac{w(x)}{c_2((w^\alpha(x))^\#)^\delta + (m_\lambda w^\alpha(x))^\delta}$ satisface que $k \in L^\infty$ and $k^{-1} \in L^\infty$.

Por lo tanto $w(x) = k(x) \left(C_1 \left((w^\alpha(x))^\# \right)^\delta + C_2 (m_\lambda w^\alpha(x))^\delta\right)$ con $k, k^{-1} \in L^\infty$ y $\delta \in (0, 1)$ para $C_1 = c_2$ y $C_2 = 1$. ■

Por otro lado tenemos:

Lema 187 Si $0 < \delta < 1$ y $u \in A_1$ entonces $(m_\lambda u(x))^\delta \in A_1$.

Demostración. Usando que $u \in A_1$, entonces $Mu \in A_1$ y $m_\lambda(Mu) \approx M(Mu) \approx Mu \approx u$ y utilizando también que $(MMu)^\delta \in A_1$ (por el resultado de Coifman-Rochberg) tenemos las siguientes desigualdades -con constantes multiplicativas que renumeraremos-:

$$\begin{aligned}
M\left((m_\lambda u)^\delta\right) &\leq M\left((m_\lambda Mu)^\delta\right) \\
&\leq M\left((C_1 MMu)^\delta\right) = C_2 M\left((MMu)^\delta\right) \\
&\leq C_3 (MMu)^\delta \leq C_4 (m_\lambda(Mu))^\delta \\
&\leq C_5 (m_\lambda(C_4 u))^\delta = C_6 (m_\lambda u)^\delta
\end{aligned}$$

y entonces conseguimos: $(m_\lambda u)^\delta \in A_1$. ■

Observación 188 Es elemental que si v_1, v_2 son funciones no negativas con $v_1, v_2 \in A_1$ y si c y d son constantes no negativas entonces $cv_1 + dv_2 \in A_1$ y $[cv_1 + dv_2]_{A_1} \leq \max\{[v_1]_{A_1}, [v_2]_{A_2}\}$.

Compilando los dos últimos lemas, la proposición y la observación anterior hemos obtenido un resultado análogo al resultado de Coifman-Rochberg: nuestro teorema 163, cuyo enunciado repetimos:

(1) Si $0 < \delta < 1$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $u \in A_1$ y C_1, C_2 son constantes no-negativas entonces $C_1 (f^\#(x))^\delta + C_2 (m_\lambda u(x))^\delta \in A_1$.

(2) Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $u \in A_1$, constantes no-negativas C_1 y C_2 , y $k(x)$ con $k, k^{-1} \in L^\infty$ tales que $w(x) = k(x) (C_1 f^\#(x)^\delta + C_2 m_\lambda u(x)^\delta)$.

Con lo visto arriba lo probamos brevemente:

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la última observación y de los lemas que nos dicen que $f^\#(x)^\delta$ y $(m_\lambda u(x))^\delta$ están en A_1 para $f \in L^1_{loc}$ y $u \in A_1$.

El segundo se obtuvo en la última proposición para $f = u = w^\alpha$ tomando un adecuado $\alpha > 1$ tal que $w^\alpha \in A_1$. La existencia de ese α está garantizada por la propiedad E. ■

Aplicación 189 Como otra aplicación de los resultados tenemos que para esos pesos u tales que $Mu \in A_\infty$ y por lo tanto $Mu \in A_1$ podemos mejorar algunas desigualdades conocidas para operadores integrales singulares. Por ejemplo si T es un operador integral singular de Calderón-Zygmund (ver [50] para una definición) se conocen las siguientes desigualdades ponderadas para $1 < p < \infty$ obtenidas por C. Pérez ([96]) -previamente J.M. Wilson había obtenido la primera desigualdad para $1 < p < 2$ (cf. [38])-:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p u \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p M^{P+1}u$$

y entonces

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p M^{P+1}u$$

esto último para el caso $p = 1$ luce así:

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| M^2u$$

donde $P = [p]$ es la parte entera de p y M^k indica k iteraciones aplicando M . La desigualdad fuerte es sharp en el sentido de que $P+1$ no puede ser reemplazada por P , y el caso débil es sharp cuando p no es un número entero; y son preguntas abierta -hasta donde sabemos- si es posible reemplazar M^{P+1} con M^P si $p \in \mathbb{N}$, y si puede reemplazarse M^2 con M en la última desigualdad.

Ahora para un peso u tal que $Mu \in A_\infty$ tenemos que, de hecho, $Mu \in A_1$ y luego hay una constante $C > 0$ tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$: $M^2u(x) \leq CMu(x)$, y usando que si, en casi todo punto vale $f(x) \leq g(x)$, entonces $Mf(x) \leq Mg(x)$, podemos iterar en $M^2u(x) \leq CMu(x)$ para obtener $M^k u(x) \leq$

$C^k Mu(x)$, entonces con $C = C_p^k$ tenemos que para los operadores de Calderón-Zygmund y los pesos u con $Mu \in A_\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p u \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p Mu$$

$$u(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p Mu$$

para cualquier p con $1 < p < \infty$.

5.1.5. La preimagen de $A_p(Q)$ con el operador maximal local

El objetivo de esta subsección es caracterizar los pesos u en un cubo $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $M_{Q_0}u$ está en $A_\infty(Q_0) = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p(Q_0)$ donde $A_p(Q_0)$ son las clases de Muckenhoupt para M_{Q_0} , esto es, el operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a un cubo fijo Q_0 , es decir:

$$M_{Q_0}f(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)| dz$$

Parte de la argumentación de las subsecciones anteriores aún funciona y prestaremos atención a lo que hace falta modificar y dónde las consecuencias difieren. Para aligerar la notación, a lo largo de esta subsección escribiremos $Mf(x)$ en lugar de $M_{Q_0}f(x)$ y recordaremos que los supremos se toman sobre los cubos Q contenidos en Q_0 a los que pertenece un x dado.

Hasta donde sabemos, no existen trabajos previos que caractericen los pesos en la preimagen de A_∞ para el operador maximal local M .

Como en la situación vista antes, con M sobre todo \mathbb{R}^n , si $Mu \in A_\infty(Q_0)$ entonces, $Mu \in A_1(Q_0)$. Entonces, siguiendo las ideas de un resultado de [17] veremos que los pesos u que satisfacen que $Mu \in A_\infty(Q_0)$ (y, a fortiori, $Mu \in A_1(Q_0)$) se pueden caracterizar por medio de una desigualdad para la K -funcional. Dicha condición asegura que u debe satisfacer una condición de Hölder reversa, RH_p , para algún $p > 1$, pero esto implica que u mismo pertenece a $A_\infty(Q_0)$. Esto contrasta con el caso de \mathbb{R}^n , donde hay pesos que no pertenecen a A_∞ pero tales que $Mu \in A_\infty$ -por ejemplo los pesos *débil* - A_∞ -.

Como una aplicación daremos una nueva prueba de un resultado interesante: En [114] I. Wik demostró que si $u \in A_p(Q_0)$ entonces $u^* \in A_p([0, |Q_0|])$, siendo u^* el reordenamiento decreciente de u . Aunque no se menciona en [114], una consecuencia inmediata de esto es el hecho de que si tenemos dos pesos soportados en cubos finitos que sean equimedibles y que estén en A_∞ , estarán en las mismas clases A_p -incluso si están en \mathbb{R}^n para diferentes n -. La prueba que damos aquí es mucho más corta; el original requiere varios lemas previos, incluido uno sobre cubrimientos subsumido aquí en la equivalencia de Herz-Stein. De hecho, cabe llamar la atención sobre un aspecto quizás subestimado de la equivalencia de Herz-Stein, referido a que permite “encapsular” resultados sobre cubrimientos que suelen tener que probarse para diversos resultados (típicamente “desigualdades good- λ ”, ver, por ejemplo [9]), es decir, uno usa uno de tales cubrimientos para probar la equivalencia de Herz-Stein, y luego en algunos casos se usa dicha equivalencia para probar otros resultados eludiendo la necesidad de bajar al

“low-level programming” para demostrar otros lemas de cubrimiento específicos para cada situación.

Luego los principales resultados de esta subsección son los siguientes,

Un resultado para cubos finitos análogo al obtenido para \mathbb{R}^n :

Proposición 190 Sea $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ y u un peso, $Mu \in A_1(Q_0)$ si y solo si $Mu \in A_\infty(Q_0)$.

Un resultado de tipo Hölder Reverso local:

Teorema 191 Un peso u satisface $Mu \in A_\infty(Q_0)$ si y solo si para ciertos $C > 0$, $s > 1$ y para cualquier $Q \subset Q_0$ se tiene

$$\left(\frac{1}{t}K(t, u^s, L^1, L^\infty)\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot \frac{1}{t}K(t, u, L^1, L^\infty) \quad (99)$$

con $0 < t < |Q|$, donde L^1 y L^∞ denotan $L^1(Q)$ y $L^\infty(Q)$.

Y finalmente, ya que se verá que la condición

$$\left(\frac{1}{t}K(t, u^s, L^1, L^\infty)\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot \frac{1}{t}K(t, u, L^1, L^\infty) \quad (100)$$

para $0 < t < |Q|$ implica que $u \in A_\infty(Q_0)$, obtendremos el siguiente:

Teorema 192 Sea u un peso en un cubo Q_0 , los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) $u \in A_\infty(Q_0)$
- ii) $u \in \bigcup_{r>1} RH_r(Q_0)$
- iii) $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C \cdot Mu(x)$ para ciertos $s > 1$, $C > 0$ y a.e. $x \in Q_0$
- iv) $Mu \in A_1(Q_0)$
- v) $Mu \in A_\infty(Q_0)$
- vi) $\exists C > 0, s > 1 : \left(\frac{1}{t}K(t, u^s, L^1, L^\infty)\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot \frac{1}{t}K(t, u, L^1, L^\infty)$ para $0 < t < |Q|$, $\forall Q \subset Q_0$.

Y la mencionada prueba abreviada del teorema de Wik:

Teorema 193 Sea $u \in A_p(Q_0)$ para un cubo finito $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $u^* \in A_p([0, |Q_0|])$.

Algunas definiciones, lemas y demostraciones Las definiciones de las clases $A_p(Q_0)$ y $RH_p(Q_0)$ son análogas a las definiciones de A_p y RH_p en \mathbb{R}^n , pero requiriendo que los cubos estuvieran incluidos en Q_0 .

Un peso $w \in A_p(Q_0)$ para $1 < p < \infty$ si y solo si

$$[w]_{A_p(Q_0)} := \sup_{Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w\right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < +\infty$$

Un peso $w \in A_1$ si y solo si

$$M_{Q_0}w(x) \leq Cw(x) \text{ a.e. } x \in Q_0$$

y $[w]_{A_1(Q_0)}$ es la menor constante $C > 0$ tal que esta desigualdad se cumple.

Por supuesto notaremos $A_\infty(Q_0) = \bigcup_{p < \infty} A_p(Q_0)$.

También definimos las clases Hölder reversas: $w \in RH_r(Q_0)$ para $r > 1$ si y solo si w cumple una desigualdad de Hölder reversa con exponente r para cada $Q \subset Q_0$: $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q w$ con C independiente de Q . Es bien sabido (cf [30]) que también en el caso local $A_\infty(Q_0) = \bigcup_{r > 1} RH_r(Q_0)$.

Para agilizar la notación, a lo largo de esta sección a veces pondremos solamente A_p , A_∞ , RH_p en lugar de $A_p(Q_0)$, $A_\infty(Q_0)$ y $RH_p(Q_0)$.

Como hemos mencionado en la introducción podemos reducir el problema de describir los pesos cuya imagen está en A_∞ a aquellos cuyas imágenes están en A_1 ; de hecho $Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1$ es cierto tanto para el operador maximal local como para el usual de Hardy-Littlewood; la prueba para el operador no local todavía funciona si mostramos que $(Mu)^\delta$ está en A_1 para $0 \leq \delta < 1$ siendo M el operador maximal local respecto de Q_0 . Para el operador maximal habitual de Hardy-Littlewood, esta es la primera declaración de la caracterización de Coifman y Rochberg para los pesos A_1 . El resultado análogo es cierto para el operador local, y además tenemos:

Lema 194 *Sea Q_0 un dominio en \mathbb{R}^n y $Mf(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)| dz$*

(1) *Si $f \in L^1(Q_0)$ es tal que $Mf(x) < \infty$ a.e. y si $0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = (Mf(x))^\delta$ está en A_1 . Además la constante A_1 depende solo de δ .*

(2) *Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces existe $f \in L^1(Q_0)$ y $k(x)$ con k y k^{-1} ambas pertenecientes a L^∞ tales que $w(x) = k(x)(Mf(x))^\delta$.*

El resultado es probablemente parte del folclore del tema, pero no vimos el resultado explícitamente escrito, así que damos la prueba:

Demostración. Para la primera declaración podemos apoyarnos en el resultado correspondiente para \mathbb{R}^n . Entonces escribamos provisoriamente, para distinguir, $M_{\mathbb{R}^n}$ para el operador habitual de Hardy-Littlewood en \mathbb{R}^n y mantengamos M para el operador maximal local con respecto a Q_0 . Además extenderemos f haciéndola nula fuera de Q_0 , y así, si $x \in Q_0$, entonces $M_{\mathbb{R}^n}(f)(x) \leq M(f \cdot \chi_{Q_0})(x) = Mf(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} M\left((Mf)^\delta\right)(x) &\leq M_{\mathbb{R}^n}\left((Mf)^\delta\right)(x) = M_{\mathbb{R}^n}\left((Mf \cdot \chi_{Q_0})^\delta\right)(x) \\ &\leq C \cdot (Mf \cdot \chi_{Q_0})^\delta(x) = C \cdot (Mf(x))^\delta \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se sigue del teorema correspondiente para el caso usual.

Y entonces $(Mf(x))^\delta \in A_1$. La dependencia de la constante solo en δ se hereda del caso usual.

Para la demostración de (2) podemos observar que para cualquier cubo. $Q_1 \subset Q_0$ el operador local respecto de Q_1 : $M_{Q_1}f(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_1} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)| dz$ satisface $M_{Q_1}w \leq Mw \leq cw$ y entonces $M_{Q_1}(M_{Q_1}w) \leq cM_{Q_1}w$; esta condición para el operador M local implica una desigualdad de Hölder reversa para w en Q_1 (veáse, por ejemplo [17] secciones 3 y 4 para dos pruebas diferentes) con r y

C independientes del cubo Q_1 :

$$\left(\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w$$

y entonces de la desigualdad de Hölder:

$$\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w \leq \left(\frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w$$

y tomando supremo para $Q_1 \subset Q$ y usando que es $w \leq Mw \leq cw$ (a.e. en Q), tenemos:

$$w \leq Mw \leq (M(w^r))^{\frac{1}{r}} \leq C.Mw \leq cCw$$

y entonces para $f = w^r$ and $\delta = \frac{1}{r} \in (0, 1)$ tenemos:

$$1 \leq \frac{(M(f))^\delta(x)}{w(x)} \leq cC$$

para casi todo $x \in Q_0$. Luego si $k(x) = \frac{w(x)}{(M(f))^\delta(x)}$ se tiene que $k \in L^\infty(Q_0)$, $k^{-1} \in L^\infty(Q_0)$ y $w(x) = k(x)(Mf(x))^\delta$ como queríamos demostrar. ■

Como mencionamos antes, usando esta versión local del teorema, podemos obtener para el operador local M la proposición que sigue a continuación. El resultado es análogo al obtenido para el operador M en \mathbb{R}^n en la proposición 159 (cf. [27]). La demostración para M local discurre de la misma manera, mutatis mutandis, una vez establecido el enunciado del lema anterior con la caracterización de Coifman-Rochberg para $A_1(Q_0)$:

Proposición 195 *Si u es cualquier peso en un cubo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ y $M = M_{Q_0}$ el operador de Hardy-Littlewood en Q_0 , entonces $Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1$*

Demostración. Basta replicar el argumento de 159 y en el momento en que en dicha proposición se utiliza Coifman-Rochberg, utilizar el lema 194. ■

Un resultado similar al siguiente lema para el operador $M_{\mathbb{R}^n}$ se debe a Neugebauer (ver [35]). Para el operador maximal local M está esencialmente probado a lo largo de [17]; para completar, aislamos aquí su argumento:

Lema 196 *Sea M el operador maximal local de Hardy-Littlewood asociado a Q_0 . Para un peso u se cumple que $Mu \in A_1$ si y solo si existen $s > 1$ y $C_0 > 0$ tales que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0.Mu(x)$*

Demostración. La implicación no trivial: Si $Mu \in A_1$ entonces $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0.Mu(x)$ ya fue mencionada en la segunda parte del lema previo 194, proviniendo de las desigualdades de Hölder-reversas.

La otra implicación es consecuencia de la primera parte del lema:

Si $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0.Mu(x)$, llamamos $u^s = f$, $\delta = \frac{1}{s}$ y como $(Mu^s)^{\frac{1}{s}} = (Mf)^\delta \in A_1$ tenemos que $x \in Q_0$ a.e., entonces

$$\begin{aligned} M(Mu)(x) &\leq M\left((Mu^s)^{\frac{1}{s}}\right)(x) \leq \\ &[(Mu^s)^{\frac{1}{s}}]_{A_1} (Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq [(Mu^s)^{\frac{1}{s}}]_{A_1} C_0.Mu(x) \end{aligned}$$

, luego para $C = [(Mu^s)^{\frac{1}{s}}]_{A_1} C_0$ se tiene $M(Mu)(x) \leq CMu(x)$ para casi todo $x \in Q_0$. Es decir: $Mu \in A_1$. ■

Ahora, juntando el último lema y la proposición 195 tenemos el criterio correspondiente para el operador local M :

Criterio 197 *Sea u un peso en Q_0 . $Mu \in A_\infty$ si y solo si existen $s > 1$, y $C_0 > 0$ tales que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0.Mu(x)$.*

Vinculando los argumentos anteriores para M , el operador maximal local de Hardy-Littlewood asociado con Q_0 y las clases A_p correspondientes, ya tendríamos las siguientes implicaciones del enunciado del Teorema 192:

$$i) \Leftrightarrow ii) \Rightarrow iii) \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow v)$$

La primer equivalencia $i) \Leftrightarrow ii)$ es conocida; la segunda implicación: $ii) \Rightarrow iii)$ es obvia tomando supremos; la equivalencia $iii) \Leftrightarrow iv)$ es el criterio mencionado arriba; y la implicación no trivial de $iv) \Leftrightarrow v)$ se sigue de la Proposición 195.

Para concluir la demostración del Teorema 192 podemos observar que $ii)$ nos da $iii)$ para cualquier $Q \subset Q_0$ con la misma constante RH_r y podemos seguir un argumento de [17] (cf. [17] sección 3) para ver que si $(Mu^s)(x) \leq C.(Mu(x))^s$ para algún $s > 1$, y $C > 0$, entonces existe $C > 0$ tal que para todo $Q \subset Q_0$, y $0 < t < |Q|$ se tiene:

$$\left(\frac{1}{t} K(t, u^s, L^1, L^\infty) \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{t} K(t, u, L^1, L^\infty)$$

; esto es: $iii) \Rightarrow vi)$, y por otra parte se ve que $vi)$ puede ser fácilmente reescrito para obtener $ii)$, y entonces $vi) \Rightarrow ii)$ cerrando la cadena de implicaciones y demostrando el teorema 192.

En la subsección siguiente, para completar la deducción delineamos las pruebas del citado argumento de [17] acerca de las implicaciones restantes del Teorema 192.

Antes, remarquemos de nuevo la diferencia con el caso global, donde para un peso u la condición puntual $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C_0.Mu(x)$ es estrictamente más débil que pertenecer a $\bigcup_{r>1} RH_r$ como podemos ver tomando cualquier peso

no doblante u que esté en *débil* - A_∞ ; esto es, si u satisface $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} u$ para todo $Q \subset \mathbb{R}^n$ para ciertas $C > 0$ y $s > 1$ y entonces $(Mu^s)^{\frac{1}{s}} \leq C.Mu$ y así $Mu \in A_\infty$ pero siendo u no-doblante $u \notin A_p$ para ningún $p < \infty$, entonces $u \notin A_\infty$ y $u \notin RH_r$ para ningún $r > 1$.

Las implicaciones restantes La primera prueba en [17] del hecho que $u \in \bigcup_{r>1} RH_r$ siempre que $Mu \in A_1$ está basada en interpolación, las K -funcionales y las fórmulas de Holmstedt.

Recordamos de las secciones introductorias que si (X, μ) es un espacio de medida totalmente σ -finita y si $A_0 = L^1$, $A_1 = L^\infty$, para cualquier $f \in L^1 + L^\infty$ se tiene la igualdad

$$K(t, f, L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(z) dz = t \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(z) dz \right) = t f^{**}(t)$$

y que si $A_0 = L^p$ y $A_1 = L^\infty$ con $1 < p < \infty$ se tiene la equivalencia (con constantes que no dependen de f)

$$K(t, f, L^p, L^\infty) \approx \left(\int_0^{t^p} f^*(z)^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ahora si u satisface *iii*), es decir $(Mu^s)(x) \leq C.(Mu(x))^s$ para ciertos $s > 1$, $C > 0$ y tomando reordenamientos en la última desigualdad uno tiene que

$$((Mu^s)^*(t))^{\frac{1}{s}} \leq C.(Mu)^*(t)$$

para $0 < t < |Q_0|$. Para cualquier f localmente integrable de la equivalencia de Herz-Stein se tiene

$$(Mf)^*(t) \approx f^{**}(t)$$

, y aplicándolo a la desigualdad $(Mu^s)^*(t) \leq C.((Mu)^*(t))^s$ se obtiene

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^t u^*(z)^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{t} \int_0^t u^*(z) dz$$

lo que en términos de las equivalencias mencionadas para las K -funcionales se escribe así:

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{s}}} K\left(t^{\frac{1}{s}}, u, L^s, L^\infty\right) \leq C. \frac{1}{t} K(t, u, L^1, L^\infty)$$

, o equivalentemente, usando que $K\left(t^{\frac{1}{s}}, u, L^s, L^\infty\right) \approx (K(t, u^s, L^1, L^\infty))^{\frac{1}{s}}$ también podemos escribir

$$\left(\frac{1}{t} K(t, u^s, L^1, L^\infty) \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{t} K(t, u, L^1, L^\infty)$$

para $0 < t < |Q_0|$. Entonces hemos obtenido que *iii*) \Rightarrow *vi*).

Si se vuelve a traducir la última desigualdad obteniendo $\left(\frac{1}{t} \int_0^t u^*(z)^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{t} \int_0^t u^*(z) dz$, entonces para $t = |Q_0|$ resulta

$$\left(\frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} u^*(z)^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} u^*(z) dz$$

y entonces

$$\left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} u(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq C. \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} u(x) dx$$

Como se remarca en [17] el argumento puede ser localizado para cualquier $Q \subset Q_0$ ya que $M(Mu) \approx M_{L(\log L)}$ (cf. [95]) donde recordamos que

$$M_{L(\log L)} = \sup_{Q \subset Q_0, x \in Q} \|u\|_{L(\log L)(Q, \frac{dx}{|Q|})}$$

con $\|u\|_{L(\log L)(Q, \frac{dx}{|Q|})}$ la norma de Luxemburg respecto de la función de Young $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$, siendo $\log^+ t = \max(\log t, 0)$.

Esto es

$$\|u\|_{L(\log L)(Q, \frac{dx}{|Q|})} = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1\}$$

Claramente como para cualquier $Q \subset Q_0$ es $M_{L(\log L)}(x) \approx M(Mu)(x) \leq C.Mu(x)$ para $x \in Q_0$ a.e. tenemos una desigualdad análoga, con la misma constante, para casi todo $x \in Q$, y entonces para la restricción de u a cualquier Q el argumento de [17] nos da una desigualdad de Hölder reversa similar con las mismas constante C y exponente s :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q u$$

de donde se puede recuperar que $(Mu^s)^{\frac{1}{s}}(x) \leq C.Mu(x)$ para $x \in Q_0$ a.e.. Entonces tenemos que $vi) \Rightarrow ii)$ para el enunciado del teorema 192. Ahora, juntando los resultados de esta sección con las implicaciones demostradas en la sección anterior, finalizamos la demostración de dicho teorema.

5.1.6. Una aplicación interesante

Vamos a aprovechar ahora el teorema dado para proporcionar una prueba muy corta del teorema de Wik ya mencionado. Recordemos su enunciado: Sea $u \in A_p(Q_0)$ para un cubo finito $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $u^* \in A_p([0, |Q_0|])$.

El teorema muestra que los reordenamientos decrecientes preservan las clases A_p . La demostración original requiere una demostración considerablemente más larga que se apoya en una descomposición, definida ad-hoc, tipo Calderón-Zygmund. En última instancia, esta cuestión no se elude, ya que la equivalencia de Herz-Stein se prueba también mediante una descomposición de este tipo. Pero apelar a dicha equivalencia -cómo hicimos al demostrar 192- de alguna manera permite encapsular esas descomposiciones y utilizarlas sin tener que hacerlas explícitas y sin tener que adaptarlas al propósito que lo requiere.

Ahora, demos nuestra prueba del Teorema de Wik.

Demostración. A partir de nuestro teorema 192 para Q_0 tenemos que

$$u \in A_\infty \iff Mu \in A_\infty \iff Mu \in A_1$$

Así, tomamos $(Mu)^* : [0, |Q_0|] \rightarrow \mathbb{R}^+$ el reordenamiento decreciente de Mu en Q_0 , y usamos que para funciones positivas decrecientes coinciden el operador de Hardy-Littlewood M y el operador de Hardy P , es decir $Pf(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds$ para $t \in [0, |Q_0|]$, y usamos también la equivalencia de Herz-Stein $(Mf)^*(t) \approx f^{**}(t)$, y el hecho mencionado arriba de que si $u \in A_\infty$ entonces $Mu \in A_1$. Luego tenemos que para algún $c > 0$ vale que

$$\begin{aligned} M((Mu)^*)(t) &= P((Mu)^*)(t) = (Mu)^{**}(t) \\ &\approx (M(Mu))^*(t) \leq (cMu)^*(t) = c(Mu)^*(t) \end{aligned}$$

Por tanto $(Mu)^* \in A_1$, pero usando Herz-Stein nuevamente y que para u^* , que es positiva y decreciente M es lo mismo que P , obtenemos: $(Mu)^* \approx u^{**} = P(u^*) = M(u^*)$, so $M(u^*) \in A_1$. Ahora usamos de nuevo nuestro teorema 192 para $[0, |Q_0|]$ considerado como cubo de \mathbb{R} y para el peso u^* tenemos

que $u^* \in A_\infty([0, |Q_0|])$. Hasta ahora tenemos que $u^* \in A_q$ para algún $q > 1$, pero no podemos asegurar todavía que $q = p$ como en el resultado de Wik. Para obtener esto seguimos de la siguiente manera: Debido a que $u \in A_p$ tenemos que $\sigma = u^{1-p'} \in A_{p'}$, y entonces aplicando el argumento de arriba a $\sigma = u^{1-p'}$ obtenemos que $\sigma^* \in A_\infty([0, |Q_0|])$, pero $\sigma^* = (u^{1-p'})^* = (u^*)^{1-p'}$. Luego conseguimos que $u^* \in A_\infty$ y $(u^*)^{1-p'} \in A_\infty$, y es un resultado bien conocido que $w \in A_p \iff w \in A_\infty$ y $w^{1-p'} \in A_\infty$ para cualquier peso w (ver, por ejemplo [49], teorema 2.17, capítulo IV); así que finalmente tenemos que $u^* \in A_p$. ■

6. Apéndice

6.1. Toolbox

6.1.1. Desigualdades integrales y equivalencias

Aquí transcribimos algunos resultados bien conocidos que usamos a lo largo del texto y alguna idea y/o referencia de alguna demostración de cada uno. No necesariamente son las versiones más fuertes posibles de los mismos, pero sí suficientes para nuestros propósitos.

Lema 198 (Lema de Hardy) Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $-\infty < \alpha < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Valen las siguientes desigualdades:

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_0^\infty (t^\alpha f(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Lema de Hardy (i)})$$

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1-\alpha} \int_t^\infty f(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_0^\infty (t^{1-\alpha} f(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Lema de Hardy (ii)})$$

donde se reemplaza $(\int_\Omega (\phi(x))^p dx)^{\frac{1}{p}}$ por $\text{ess sup}_{x \in \Omega} \{\phi(x)\}$ si $p = \infty$.

Demostración. Ver [24] (Cap. 3, Lema 3.9). La idea es escribir $f(s) = s^{-\frac{\alpha}{p'}} \left(s^{\frac{\alpha}{p'}} f(s) \right)$, usar la desigualdad de Hölder y permutar el orden de integración. ■

Observación 199 Bajo ciertas hipótesis, para funciones decrecientes, se pueden obtener desigualdades que van en sentido opuesto a las de Hardy: Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente y $0 < \alpha < 1$, usando que $f(s) \geq f(t)$ en $[0, t]$ es $\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \geq f(t)$ y queda:

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_0^\infty (t^\alpha f(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para la segunda solo podemos revertirla si $\alpha > 1$, en tal caso $t^{1-\alpha} \int_t^\infty f(s) \frac{ds}{s} \geq f(t) \int_t^\infty s^{1-\alpha} \frac{ds}{s} = \frac{1}{\alpha-1} f(t) t^{1-\alpha}$, luego:

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1-\alpha} \int_t^\infty f(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{\alpha-1} \left(\int_0^\infty (t^{1-\alpha} f(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema 200 Sea (X_0, X_1) una cupla compatible de espacios de Banach y sean $Y_0 = (X_0, X_1)_{\theta_0, q_0}$ y $Y_1 = (X_0, X_1)_{\theta_1, q_1}$ con $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq 1$ y $0 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ (no necesariamente tiene que ser $q_0 \leq q_1$), y sea $\alpha = \theta_1 - \theta_0$. Entonces para todo $f \in X_0 + X_1$:

a)

$$K(t, f, X_0, X_1) \approx \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} (s^{-\theta_0} K(s, f, X_0, X_1))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(s, f, X_0, X_1))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

b) Si $\theta_0 = 0$ y $\alpha = \theta_1$ se puede obtener

$$K(t, f, X_0, X_1) \approx t \left(\int_{t^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(s, f, X_0, X_1))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

c) Si $\theta_1 = 1$ y $\alpha = 1 - \theta_0$ se puede obtener

$$K(t, f, X_0, X_1) \approx \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} (s^{-\theta_0} K(s, f, X_0, X_1))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}}$$

Demostración. Para la demostración remitimos a [16] -teorema 3.6.1 y corolario 3.6.2-. ■

6.1.2. Lemas de Cubrimientos y Descomposiciones

Lema 201 (Bennett, C. y Sharpley, R.) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de medida de Lebesgue finita. Existe una sucesión -finita o numerable- de cubos diádicos $\{Q_j\}$ de interiores dos a dos disjuntos tales que:

- i) $\Omega \subset \bigcup_j Q_j$
- ii) $Q_j \cap \Omega^c \neq \emptyset$ para todo $j = 1, 2, \dots$
- iii) $|\Omega| \leq \sum_j |Q_j| \leq 2^n |\Omega|$

Demostración. Remitimos a [24] (Lema III.3.7) ■

Observación 202 (Versión local del Lema de Bennett y Sharpley) Podemos localizar el resultado anterior para $\Omega \subset Q_0$ un cubo de \mathbb{R}^n y cubos diádicos **respecto de** Q_0 (con los cambios obvios en la demostración de [24]).

Teorema 203 ((Descomposición de Calderón-Zygmund)) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y no negativa, y sea $\alpha > 0$, existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j\}$ disjuntos tales que:

- i) $f(x) \leq \alpha$ para casi todo $x \in \left(\bigcup_j Q_j \right)^c$
- ii) $\left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$
- iii) $\alpha \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \alpha$

Demostración. (ver, por ejemplo, [38], Teorema 2.11) ■

6.2. Normalización de las normas y un breve tour por los espacios de interpolación y extrapolación

Como mencionamos en la observación 64 para ciertos propósitos es conveniente normalizar las normas de los espacios de interpolación multiplicándolas por constantes adecuadas:

Definición 204 En el caso de los espacios dados por la funcional K con $\theta \in (0, 1)$ y $1 \leq q < \infty$, ó $\theta \in [0, 1]$ y $q = \infty$ se define:

$$\overline{X}_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft} = (X_0, X_1)_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft} := \{f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft}} < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft}} = \begin{cases} c_{\theta,q} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q < \infty \\ c_{\theta,q} \sup_{t>0} \{t^{-\theta} \cdot K(t, f, X_0, X_1)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

para $c_{\theta,q} = (q(1-\theta)\theta)^{\frac{1}{q}}$ con la convención de que $c_{\theta,q} = 1$ si $q = \infty$. Es decir $\overline{X}_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft} = c_{\theta,q} \overline{X}_{\theta,q,K}$, siendo $\|\cdot\|_{\overline{X}_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft}} = c_{\theta,q} \|\cdot\|_{\overline{X}_{\theta,q,K}}$.

Por otra parte, otro importante método de interpolación se basa en la funcional J , donde se definen espacios formados por elementos de $X_0 + X_1$ representables mediante una integral de Bochner para una función con rango en $X_0 \cap X_1$. Se define primero la funcional J dada por $J(t, u, X_0, X_1) = \max(\|u\|_{X_0}, t\|u\|_{X_1})$ para $u \in X_0 \cap X_1$ y para cada $t > 0$.

Luego se define el espacio

$$\overline{X}_{\theta,q,J} = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{\overline{X}_{\theta,q,J}} < \infty \right\}$$

$$\text{para } \|f\|_{\overline{X}_{\theta,q,J}} = \inf_u \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, u(t), X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ si } q < \infty \\ \sup_{t>0} \{t^{-\theta} \cdot J(t, u(t), X_0, X_1)\} \text{ si } q = \infty \end{array} \right\}, \text{ donde el}$$

ínfimo se toma sobre todas las representaciones: $f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ donde $u : (0, \infty) \rightarrow X_0 \cap X_1$ es localmente integrable.

En el caso de los espacios dados por la funcional J se define $\overline{X}_{\theta,q,J}^{\blacktriangleleft} = c_{\theta,q}^* \overline{X}_{\theta,q,J}$ donde $c_{\theta,q}^* = (q'(1-\theta)\theta)^{-\frac{1}{q'}}$ si $q \neq 1$ y $c_{\theta,q}^* = 1$ si $q = 1$, siendo q' tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Estas normalizaciones tienen varias ventajas:

Una ventaja es que la función característica de los funtores de interpolación: $(\cdot)_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft}$ y $(\cdot)_{\theta,q,J}^{\blacktriangleleft}$ resulta ser exactamente $\rho(t) = t^\theta$. Esto significa lo siguiente: para $t > 0$ consideramos la acción de un functor de interpolación I sobre los pares de dimensión 1, es decir: $(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})$. Entonces queda definida una función no negativa cuasi-cóncava⁸: la función característica ρ dada por $I((\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})) = \frac{1}{\rho(t)}\mathbb{C}$, para $t > 0$. Si consideramos los funtores $(\cdot)_{\theta,q,K}^{\blacktriangleleft}$ y $(\cdot)_{\theta,q,J}^{\blacktriangleleft}$ en dichos casos, como dijimos, es $\rho(t) = t^\theta$ (si en cambio no normalizamos, para $(\cdot)_{\theta,q,K}$ y $(\cdot)_{\theta,q,J}$ es $\rho(t) = Ct^\theta$ para una "incómoda" constante C que puede depender de θ

⁸Esto significa que ρ es creciente y $\frac{\rho(t)}{t}$ es decreciente.

y de q)⁹. Como veremos enseguida, cuando tenemos una familia de métodos de interpolación $\{I_\theta\}_{0 < \theta < 1}$ tales que la función característica de I_θ es $\rho(t) = t^\theta$ se tienen algunos resultados claves para identificar espacios de extrapolación para los métodos extremales Σ y Δ -continuaremos con esa historia más abajo-.

Otra ventaja de la normalización es que acotamos uniformemente las normas de las inmersiones:

$$\overline{X}_{\theta,1,J} \xrightarrow{1} \overline{X}_{\theta,q,J}, \overline{X}_{\theta,q,K} \xrightarrow{1} \overline{X}_{\theta,\infty,K} \quad (101)$$

, y

$$\overline{X}_{\theta,q,K} \xrightarrow{1} \overline{X}_{\theta,r,J}, \text{ si } q \leq r \quad (102)$$

; donde $X \xrightarrow{1} Y$ significa que la norma de la inmersión de X en Y es menor o igual a 1. Con respecto a 101 vale la pena señalar que, entre los funtores de interpolación $I(\cdot)$ que comparten una función característica dada ρ , los funtores $\overline{X}_{\rho,1,J}$ y $\overline{X}_{\rho,\infty,K}$ son extremales, en el sentido de que

$$\overline{X}_{\rho,1,J} \xrightarrow{1} I(\overline{X}) \xrightarrow{1} \overline{X}_{\rho,\infty,K} \quad (103)$$

donde

$$\overline{X}_{\rho,1,J} = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{\overline{X}_{\rho,1,J}} < \infty \right\}$$

siendo

$$\|f\|_{\overline{X}_{\rho,1,J}} = \inf_u \int_0^\infty \frac{J(t, u(t), X_0, X_1) dt}{\rho(t) t}$$

⁹Miremos el caso con $q < \infty$ -el caso $q = \infty$ es aún más fácil-. Si definimos el método $(\cdot, \cdot)_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft$ dado por una norma definida como: $\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft} = c \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$ con $c > 0$ a determinar, para $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} K\left(s, z, \mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C}\right) &= \inf_{z_0+z_1=z} \{ \|z_0\|_{\mathbb{C}} + s \|z_1\|_{\frac{1}{t}\mathbb{C}} \} = \inf_{z_0+z_1=z} \{ |z_0| + \frac{s}{t} |z_1| \} \\ &= \inf_{\alpha \in [0,1]} \left(|(1-\alpha)z| + \frac{s}{t} |\alpha z| \right) = |z| \inf_{\alpha \in [0,1]} \left(1 + \alpha \left(\frac{s}{t} - 1 \right) \right) \\ &= \begin{cases} |z| \frac{s}{t} & \text{si } 0 \leq s < t \\ |z| & \text{si } t \leq s \end{cases} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|z\|_{(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft} &= c |z| \left(\int_0^t \left(s^{-\theta} \frac{s}{t} \right)^q \frac{ds}{s} + \int_t^\infty \left(s^{-\theta} \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c \left(\frac{1}{t^q} \frac{s^q(1-\theta)}{q(1-\theta)} \Big|_0^t + \frac{s^{-\theta q}}{-\theta q} \Big|_t^\infty \right)^{\frac{1}{q}} |z| \\ &= c \left(\frac{1}{t^q} \frac{t^{q-\theta q}}{q(1-\theta)} + \frac{t^{-\theta q}}{\theta q} \right)^{\frac{1}{q}} |z| \\ &= c \left(t^{-\theta q} \left(\frac{1}{q(1-\theta)} + \frac{1}{\theta q} \right) \right)^{\frac{1}{q}} |z| \\ &= c \left(\frac{1}{q(1-\theta)\theta} \right)^{\frac{1}{q}} t^{-\theta} \|z\|_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que elegir $c = c_{\theta,q} := (q(1-\theta)\theta)^{\frac{1}{q}}$ para que sea $(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft = \frac{1}{t^\theta} \mathbb{C}$ de modo que la función característica es $\rho(t) = t^\theta$. La cuenta con la funcional J para obtener $c_{\theta,q}^* = (q'(1-\theta)\theta)^{-\frac{1}{q'}}$ es similar.

para $u : u(t) \in X_0 \cap X_1$ y $f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$, y donde

$$\bar{X}_{\rho, \infty, K} = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{\bar{X}_{\rho, \infty, K}} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\|_{\bar{X}_{\rho, \infty, K}} = \sup_{t>0} \frac{K(t, f, X_0, X_1)}{\rho(t)}$$

. Referimos, por ejemplo, a [6] para la prueba del teorema anterior, resultado que se debe esencialmente a Lions y Peetre para $\rho(t) = Ct^\theta$, y a S. Janson para la leve generalización donde ρ es cualquier función positiva cuasi-cóncava.

Observación 205 Como mencionamos en la observación previa 63 para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$ se tiene que $(X_0, X_1)_{\theta, q, K} = (X_0, X_1)_{\theta, q, J}$ con normas equivalentes con constantes de equivalencia que se pueden poner en función solo de θ , y lo mismo podemos decir para $(X_0, X_1)_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft = (X_0, X_1)_{\theta, q, J}^\blacktriangleleft$. Pero además para $q = 1$ nos queda que $(X_0, X_1)_{1, q, K}^\blacktriangleleft = (X_0, X_1)_{1, q, J}^\blacktriangleleft$ y se tiene que $\|f\|_{\theta, 1, K}^\blacktriangleleft \leq \|f\|_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft \leq \gamma \|f\|_{\theta, 1, K}^\blacktriangleleft$ donde γ es la constante de la forma fuerte del Lema Fundamental de la Teoría de Interpolación (en particular $\gamma \leq 3 + 2\sqrt{2}$).

Completemos un poco un cuadro acerca de los espacios de interpolación: Nos mantendremos momentáneamente en el ámbito de los pares de espacios de funciones de Banach¹⁰ invariantes por reordenamiento¹¹, que cubre muchos espacios interesantes y donde la situación es bastante transparente. En general, para un par admisible de espacios de Banach de funciones, (X_0, X_1) , no se conoce una caracterización simple de todos los espacios de interpolación. Además, dependiendo del par (X_0, X_1) no siempre es posible obtener todos los espacios de interpolación mediante la funcional K . Sin embargo, es posible considerar una clase bastante amplia de espacios de interpolación donde la descripción es posible: Los espacios de interpolación monótonos.

Definición 206 Un espacio intermedio¹² X del par (X_0, X_1) es monótono si para todos los $f \in X_0 + X_1$ para los cuales existe $g \in X$ que cumple $K(t, f, X_0, X_1) \leq K(t, g, X_0, X_1)$ se tiene que $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \|g\|_X$.

Los espacios de interpolación monótonos se pueden representar en la forma

$$(X_0, X_1)_\Phi = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_\Phi} < \infty \right\}$$

donde

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_\Phi} = \Phi(K(t, f, X_0, X_1))$$

¹⁰Para un espacio de medida (R, μ) una norma de Banach de funciones ϕ es una aplicación desde las (clases de) funciones (iguales a.e.), medibles, a valores en $[0, +\infty]$ tal que: $\phi(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e., $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f) \forall \lambda \geq 0$, $\phi(f + g) \leq \phi(f) + \phi(g)$, para todo conjunto E de medida finita $\phi(\chi_E) < \infty$ y existe C_E con $0 < C_E < \infty$, tal que $\int_E f d\mu \leq C_E \phi(f)$ para toda f en dicho cono de (clases) de funciones positivas medibles, y tal que ϕ tenga las propiedades de Fatou: $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \phi(f_n) \uparrow \phi(f)$ y de monotonía.

En esta situación un espacio de Banach de funciones X está dado por el subespacio del espacio de funciones medibles tal que $\|f\|_X := \phi(|f|) < \infty$.

¹¹Es decir tal que si $f \in X$ y g es equimedible con f entonces $g \in X$ y además $\|f\|_X = \|g\|_X$.

¹²Es decir tal que $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ con inmersiones continuas.

siendo $\Phi(\cdot)$ una norma admisible¹³, este resultado se debe a J. Brudnyi, y N. Krugljak (1981); las ideas, sin embargo, se remontan a A.P. Calderón (1966) que probó el resultado para el par (L^1, L^∞) , y de hecho C. Bennett y R. Sharpley (1986) demostraron el caso general para pares (X_0, X_1) admisibles a partir del resultado para (L^1, L^∞) usando un resultado de Lorentz-Shimogaki (1968) (que anticipa rudimentariamente la noción de divisibilidad utilizada por Brudnyi-Krugljak). La situación es un poco más amigable para un par (X_0, X_1) regular -es decir tal que $X_0 \cap X_1$ es denso en X_0 y en X_1 - y tal que (X_0, X_1) es mutuamente cerrado¹⁴. En esta situación es posible, de hecho, caracterizar cada espacio X de interpolación monótono para el par (X_0, X_1) en términos de la funcional k -es decir $k(t, f, X_0, X_1) = \frac{dK(t, f, X_0, X_1)}{dt}$ -, ya que en tal caso es $X = (X_0, X_1)_{\bar{\phi}}$ siendo $\bar{\phi}$ alguna norma de Riesz-Fischer¹⁵ sobre $((0, +\infty), dx)$, es decir $X = (X_0, X_1)_{\bar{\phi}} = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\bar{\phi}}} = \bar{\phi}(k(t, f, X_0, X_1)) < \infty \right\}$.

En el contexto de un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante podemos trasladar aquellas cuestiones que solo involucren a las normas a otro espacio invariante sobre el espacio $(0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue:

Teorema 207 (*Teorema de representación de Luxemburg*) Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida resonante (R, μ) con norma $\|f\|_X := \phi(|f|)$ dada por una norma de Banach de funciones ϕ , entonces existe una norma de Banach de funciones $\bar{\phi}$ sobre $((0, +\infty), dx)$ -siendo dx , la medida de Lebesgue en $(0, +\infty)$ - tal que $\phi(|f|) = \bar{\phi}(f^*)$ para toda f medible. Si además (R, μ) es no atómico y de medida infinita.

Es de esta forma que, como mencionamos, se pueden reformular las cuestiones acerca de $(X, \|\cdot\|_X)$ que involucren solo a las normas $\|\cdot\|_X = \phi(|\cdot|)$ y tratarlas en términos de $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ donde \tilde{X} es el espacio de funciones medibles sobre $((0, +\infty), dx)$ con $\|g\|_{\tilde{X}} = \bar{\phi}(g^*)$ si $\bar{\phi}$ es la representación de Luxemburg de ϕ .

En esta situación es cómodo clasificar los espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos en términos de su *función fundamental*:

Definición 208 Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida resonante¹⁶ (R, μ) , se define la función fundamental: $\varphi(t) = \|\chi_E\|_X$ para $0 \leq t = \mu(E) \leq \mu(R)$.

Observación 209 Está claro que si $\mu(E) = \mu(F)$ es $\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X$ por ser X invariante por reordenamientos de modo que la elección de E no es relevante. En particular, por ser X un espacio de Banach de funciones es

¹³Una norma σ -subaditiva sobre las clases de funciones iguales a.e., medibles, a valores en $[0, +\infty]$, tal que Φ solo es finita para funciones que no sean infinitas en un conjunto de medida positiva, y que se comporte adecuadamente para funciones cóncavas: $0 < \Phi(\min\{1, t\}) < \infty$ y si ω_1 y ω_2 son positivas, cóncavas y $\omega_1 \leq \omega_2$ entonces $\Phi(\omega_1) \leq \Phi(\omega_2)$. (cf. [24])

¹⁴Esto significa que para $i = 1, 2$: si $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_i$ es una sucesión acotada (con la norma de X_i) y $g \in X_0 + X_1$ es tal que $\|g - g_n\|_{X_0 + X_1}$ entonces $g \in X_i$.

¹⁵Es decir una norma de Banach de funciones que además sea σ -subaditiva.

¹⁶Un espacio de medida totalmente σ -finita es resonante si tiene lugar alguno de los siguientes casos: o bien no tiene átomos (puntos de medida positiva) o bien es completamente atómica y todos los puntos tienen la misma medida.

$\|\chi_E\|_X = \phi(\chi_E) = \bar{\phi}(\chi_E^*)$ donde ϕ es la norma de Banach de funciones que corresponde a X , y como $\chi_E^* = \chi_{[0,t]} = \chi_{[0,t]}^*$ es invariante por reordenamientos se tiene $\varphi(t) = \|\chi_E\|_X = \bar{\phi}(\chi_{[0,t]}) = \bar{\phi}(\chi_{[0,t]}^*)$. Es evidente que la función fundamental de X con $\|\cdot\|_X = \phi(|f|)$ es la misma que la del espacio \tilde{X} dado por las funciones medibles sobre $((0, +\infty), dx)$ con la norma dada por $\|f\| = \bar{\phi}(f^*)$.

Observación 210 No es difícil ver que las funciones fundamentales son cuasi-cóncavas, es decir $\varphi(t)$ es creciente y $\frac{\varphi(t)}{t}$ es decreciente en $(0, +\infty)$ y $\varphi(t) = 0$ si y solo si $t = 0$. Además φ es continua salvo quizás en el origen.

Observación 211 Es fácil observar que si φ es cóncava en $[0, +\infty)$, y nula solo en $t = 0$ entonces φ es cuasi-cóncava.

Observación 212 Por un célebre resultado de A.P. Calderón ([25]) -e independientemente por J.V. Ryff en el caso de $R = [0, 1]$ - los espacios invariantes por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ) son precisamente los espacios de interpolación exactos para el par (L^1, L^∞) , de donde la funcional k viene dado por el reordenamiento decreciente: $k(t, f) = f^*$ de modo que si φ es la función fundamental en vista de la observación anterior tenemos que $\|\chi_E\|_X = \varphi(t) = \bar{\phi}(\chi_{[0,t]}^*) = \bar{\phi}(k(t, f))$.

Para estos espacios hay una relación muy estrecha entre la función característica y la función fundamental: Si identificamos \mathbb{C} con las funciones constantes a valores en \mathbb{C} : $\mathfrak{z}(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con $\mathfrak{z}(s) \equiv z$ con la norma $\|\mathfrak{z}\|_{\mathbb{C}} = |z|$, y en consecuencia para $t > 0$ $\frac{1}{t}\mathbb{C}$ está dado por la norma $\|\mathfrak{z}\|_{\frac{1}{t}\mathbb{C}} = \frac{1}{t}|z|$. Por lo tanto si consideramos el método de interpolación dado por φ , es decir $I((X_0, X_1)) = (X_0, X_1)_\phi$ tenemos que si ρ es la función característica de I tenemos por un lado que $(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})_\phi = \frac{1}{\rho(t)}\mathbb{C}$, es decir $\|z\|_{(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})_\phi} = \frac{1}{\rho(t)}|z|$. Por otro lado es

$$K\left(s, z, \mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C}\right) = \begin{cases} \frac{s}{t}|z| & \text{si } s \leq t \\ |z| & \text{si } s > t \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} k\left(s, z, \mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C}\right) &= K'\left(s, z, \mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C}\right) = \\ \begin{cases} \frac{1}{t}|z| & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{si } s > t \end{cases} &= \frac{1}{t}|z|\chi_{[0,t]}^* \end{aligned}$$

, luego $\|z\|_{(\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})_\phi} = \phi\left(\frac{1}{t}|z|\chi_{[0,t]}^*\right) = \frac{1}{t}|z|\phi\left(\chi_{[0,t]}^*\right) = \frac{1}{t}|z|\varphi(t)$. En conclusión $\frac{1}{t}|z|\varphi(t) = \frac{1}{\rho(t)}|z|$ de modo que $\rho(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$. De hecho, esto nos dice que la función característica ρ es la función fundamental del espacio asociado a X ¹⁷

Revisitemos ahora las inmersiones dadas por 103, es decir

$$\bar{X}_{\rho,1,J} \xrightarrow{1} I(\bar{X}) \xrightarrow{1} \bar{X}_{\rho,\infty,K}$$

¹⁷ X' , el espacio asociado a X es el espacio de Banach de funciones sobre el espacio de medida (R, μ) definido por $\|f\|_{X'} = \rho'(|f|)$ donde ρ' es la norma de Banach de funciones tal que para f medible se toma $\rho'(|f|) = \sup\{\int_R fg d\mu : \rho(|g|) \leq 1\}$ donde el supremo se toma sobre todas las g medibles, siendo ρ la norma de funciones de X .

para cualquier funtor de interpolación $I(\cdot)$ de característica ρ , en el caso de que los espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos se pueden escribir en términos de la función fundamental $\varphi(t) = \frac{t}{\rho(t)}$ teniendo en cuenta algunos resultados conocidos (cf. [24], o también [68]) que a continuación reseñamos:

Teorema 213 *Si X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante entonces*

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$$

. Además X puede renormalizarse (es decir podemos reemplazar $\|\cdot\|_X$ por $c\|\cdot\|_X$ con una constante adecuada c) de modo que las inmersiones tengan norma 1, es decir

$$L^1 \cap L^\infty \xrightarrow{1} X \xrightarrow{1} L^1 + L^\infty$$

Observación 214 *Por el resultado de Calderón y Ryff (ver arriba: 212) el teorema 213 abarca todos los X que sean espacios de interpolación exactos para el par (L^1, L^∞) sobre un espacio de medida resonante. Como dichos espacios X son siempre espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos para ellos está definida la función fundamental $\varphi(t)$. Dentro de los espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos sobre (R, μ) resonante que tengan la función fundamental φ podemos describir aquellos que son extremales respecto de la inclusión. Por un lado tenemos:*

Definición 215 *Sea \mathcal{M} el espacio de funciones medibles sobre un espacio de medida resonante (R, μ) y sea $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ cuasi-cóncava en $[0, +\infty)$. Si definimos $\phi_0(f) = \sup_{t>0} \left\{ \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right\}$ y $M_\varphi = \left\{ f \in \mathcal{M} : \|f\|_{M_\varphi} < \infty \right\}$ donde $\|f\|_{M_\varphi} = \phi_0(f)$ resulta que ϕ_0 es una norma de funciones invariante por reordenamientos y M_φ tiene función fundamental φ . Además se tiene el siguiente:*

Teorema 216 *Si X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante con función fundamental φ entonces $X \xrightarrow{1} M_\varphi$, es decir $\|f\|_{M_\varphi} \leq \|f\|_X$ para toda $f \in X$. Es decir M_φ es el mayor subespacio de \mathcal{M} invariante por reordenamientos de función fundamental φ .*

Observación 217 *Para caracterizar el menor subespacio de \mathcal{M} invariante por reordenamientos hace falta un paso más. Si bien la función fundamental φ no tiene porqué ser cóncava, es posible encontrar una función cóncava equivalente a ella, $\widehat{\varphi}$, tal que $\frac{1}{2}\widehat{\varphi} \leq \varphi \leq \widehat{\varphi}$ ¹⁸. Por otra parte si X tiene función fundamental φ para $f \in X$ definimos $\nu(f) = \max\{\|f\|, 2\phi_0(f)\}$ donde $\phi_0(f) = \|f\|_{M_\varphi}$ definido arriba, y es claro por el teorema anterior que*

$$\|f\|_X \leq \nu(f) = \max\left\{ \|f\|_X, \|f\|_{M_\varphi} \right\} \leq 2\|f\|_X$$

¹⁸Se toma $\widehat{\varphi}$ la menor función cóncava que mayor a φ . Como $\max\{1, t\}$ es cóncava está claro que $\varphi(t) \leq \varphi(1) \max\{1, t\}$ así que el conjunto de mayorantes cóncavas de φ es no vacío. Y como el ínfimo de una familia de funciones cóncavas también es cóncava entonces $\widehat{\varphi}$ está bien definida.

. así que $\nu(f)$ es una norma para X equivalente a $\|\cdot\|_X$. Y además si χ_E es la función característica de un conjunto de medida t resulta

$$\nu(\chi_E) = \max\{\|\chi_E\|_X, \|\chi_E\|_{M_\varphi}\} = \max\{\varphi(t), \widehat{\varphi}(t)\} = \widehat{\varphi}(t)$$

, de modo que con esta renormalización X tiene función fundamental cóncava $\widehat{\varphi}$.

Y ahora sí podemos completar el cuadro:

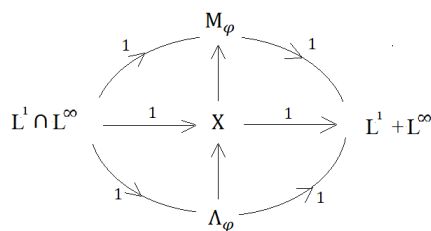
Definición 218 Sea \mathcal{M} el espacio de funciones medibles sobre un espacio de medida resonante (R, μ) y sea $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ cóncava en $[0, +\infty)$, y nula solo en $t = 0$. Si definimos $\phi_1(f) = \int_0^t f^*(s) d\varphi(s)$ y $\Lambda_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : \|f\|_{\Lambda_\varphi} < \infty\}$ donde $\|f\|_{\Lambda_\varphi} = \phi_1(f)$ resulta que ϕ_1 es una norma de funciones invariante por reordenamientos y el espacio de Lorentz Λ_φ tienen función fundamental φ . Además tenemos el siguiente:

Teorema 219 Si X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante con función fundamental cóncava φ entonces $\Lambda_\varphi \xrightarrow{1} X$, es decir $\|f\|_X \leq \|f\|_{\Lambda_\varphi}$ para toda $f \in X$. Es decir Λ_φ es el mayor subespacio de \mathcal{M} invariante por reordenamientos de función fundamental cóncava φ .

Uniendo los teoremas 219 y 216 junto con la observación 217 tenemos el siguiente resultado debido a Semenov E.M. [105] (ver también [24] o [68]):

Teorema 220 Si X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante y lo renormalizamos de modo que su función fundamental φ sea cóncava¹⁹ entonces $\Lambda_\varphi \xrightarrow{1} X \xrightarrow{1} M_\varphi$.

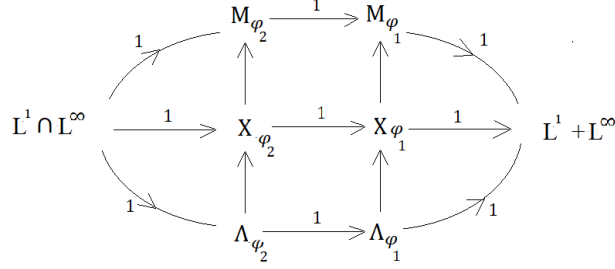
Entonces, para empezar, renormalizando adecuadamente si es necesario, tenemos el siguiente esquema (donde X tiene función fundamental φ):



Si tenemos espacios con funciones fundamentales φ_1 y φ_2 ninguna de las cuales mayor a la otra, tendremos dos esquemas similares pero desvinculados (salvo en el hecho de que en ambos casos "empiezan en $L^1 \cap L^\infty$ y terminan en $L^1 + L^\infty$ ". Sin embargo si fuera el caso de que una de ellas mayor a la otra, digamos $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ y bajo hipótesis más o menos usuales podríamos juntar

¹⁹Con la notación de la observación 217 consideramos la norma ν cuya función fundamental es $\widehat{\varphi}$, pero renombramos su norma como $\|\cdot\|_X = \nu(\cdot)$ y su función fundamntal como φ (en lugar de $\widehat{\varphi}$).

esquemas: Supongamos que $\|\cdot\|_{X_1}$ y $\|\cdot\|_{X_2}$ son absolutamente continuas²⁰ y tales que para $j = 1, 2$, si $t > 0$ y E es medible y tal que $\mu(E) = t$ entonces vale que $\|\chi_E\|_{X_j} = G(\varphi_j(t))$ donde G es creciente entonces $\|\cdot\|_{X_1} \leq \|\cdot\|_{X_2}$ y por lo tanto $X_2 \hookrightarrow X_1$. En ese caso la situación es más o menos así:



Nótese que el orden es parcial, hay pares de funciones en que ninguna de ellas (ni sus múltiplos) es mayor que la otra, en cuyo caso no podemos vincular entre sí los espacios con dichas funciones fundamentales.

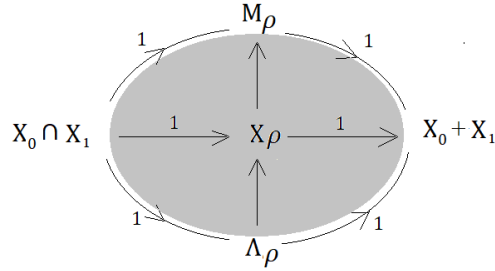
Observación 221 *Es fácil ver que la función fundamental de $L^1 \cap L^\infty$ es $\max\{1, t\}$ y la función fundamental de $L^1 + L^\infty$ es $\min\{1, t\}$ y que para cualquier función positiva cuasi-cóncava con $\varphi(t) = 0$ si y solo si $t = 0$ y tal que $\varphi(1) = 1$ es $\min\{1, t\} \leq \varphi(t) \leq \max\{1, t\}$ (cf. teorema 213 arriba). Además $\Lambda_{\max\{1, t\}} = L^1 \cap L^\infty = M_{\max\{1, t\}}$ y $\Lambda_{\min\{1, t\}} = L^1 + L^\infty = M_{\min\{1, t\}}$.*

Volviendo a mirar lo particular desde una perspectiva más general para $\bar{X} = (X_0, X_1)$, si $X_0 = L^1$ y $X_1 = L^\infty$ para $\theta \in (0, 1)$ tenemos una escala familiar de espacios bien conocidos mediante interpolación (digamos que mediante la funcional K). Si tomamos $\varphi(t) = t^{1-\theta}$ es $\rho_\theta(t) = \frac{t}{\varphi(t)} = t^\theta$ y entonces con $(X_0, X_1)_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ obtenemos, con $p = \frac{1}{1-\theta}$, espacios de Lorentz $L^{p, q}$ (normas equivalentes), y en particular con $(X_0, X_1)_{\theta, q(\theta), K}^\blacktriangleleft$ con $q(\theta) = p = \frac{1}{1-\theta}$ es $(X_0, X_1)_{\theta, q(\theta), K}^\blacktriangleleft = L^p$ con equivalencia de normas independiente de p , concretamente (cf. [86] ejemplo 7) resulta $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, q(\theta), K}^\blacktriangleleft} \leq e \|f\|_{L^p}$.

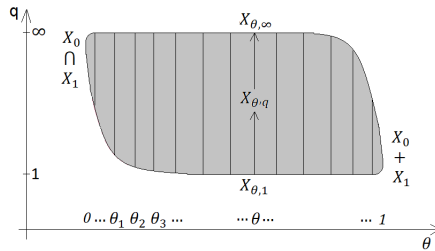
Tener una familia paramétrica de espacios de interpolación $\{I_\theta(\bar{X})\}^{21}$, por ejemplo con $\theta \in (0, 1)$, va a ser útil a la hora de extrapolar. Las inclusiones $\bar{X}_{\rho_1, J} \xrightarrow{1} I_\rho(\bar{X}) \xrightarrow{1} \bar{X}_{\rho, \infty, K}$ y $X_0 \cap X_1 \xrightarrow{1} I_\rho(\bar{X}) \xrightarrow{1} X_0 + X_1$ para I_ρ un método de interpolación con característica ρ ordenan parcialmente los espacios de interpolación (pero recordemos que si para ρ_1 y ρ_2 ninguna mayor a (un múltiplo positivo de) la otra entonces en principio no podemos asegurar ninguna inclusión entre $I_{\rho_1}(\bar{X})$ y $I_{\rho_2}(\bar{X})$) y el esquema tiene el aspecto:

²⁰Esto significa que $\|f\chi_{E_n}\| \rightarrow 0$ para toda secuencia de conjuntos medibles $\{E_n\}$ tales que $E_n \rightarrow \emptyset$ a.e.

²¹Quizás sería aún más sugerente notar $\{I_{\rho_\theta}\}_{\theta \in (0, 1)}$ indicando que el método tiene función característica ρ_θ .



Ahora, si tenemos una escala podemos indexar una familia de inmersiones como referencia:



Observación 222 En el caso de que $\bar{X} = (X_0, X_1)$ sea una dupla ordenada, esto es con $X_0 \subset X_1$ ²² -digamos que con norma de la inmersión igual a 1 (eventualmente renormalizando)- se puede ver que

$$\|f\|_{\langle \bar{X} \rangle_{\theta, q, K}} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q < \infty \\ \sup_{0 < t < 1} \{t^{-\theta} \cdot K(t, f, X_0, X_1)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

es una norma equivalente a la de $\bar{X}_{\theta, q, K}$ o $\bar{X}_{\theta, q, K}^\blacktriangleleft$ -con constantes de equivalencia dependiendo de θ y q -. En este caso, evidentemente, las funciones t^θ en el intervalo $(0, 1)$ están ordenadas decrecientemente respecto de θ -en el sentido de que $t^{\theta_1} \geq t^{\theta_2}$ para $t \in (0, 1)$ si $\theta_1 \leq \theta_2$, en cuyo caso tenemos que

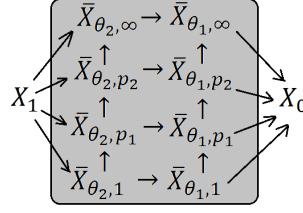
$$\langle X_0, X_1 \rangle_{\theta_2, q, K} \subset \langle X_0, X_1 \rangle_{\theta_1, q, K} \quad (104)$$

para $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$. Por otra parte de un resultado de J. Bergh (posiblemente no publicado cf. [58] pag. 19) se obtiene que

$$\langle X_0, X_1 \rangle_{\theta, q, K} \subset \langle X_0, X_1 \rangle_{\theta, r, K} \quad (105)$$

si $q \leq r$. Mediante 104 y 105 se obtiene en este caso que si $p_1 \leq p_2$ y $p_i = \frac{1}{1-\theta_i}$ $i = 1, 2$ se tiene $\theta_1 \leq \theta_2$ de donde si (R, μ) tiene medida finita y tomamos $X_0 = L^1$ y $X_1 = L^\infty$ entonces $L^{p_1} = \langle L^1, L^\infty \rangle_{\theta_1, p_1, K} \supset \langle L^1, L^\infty \rangle_{\theta_2, p_1, K} \supset \langle L^1, L^\infty \rangle_{\theta_2, p_2, K} = L^{p_2}$, en resumen $L^{p_1} \supset L^{p_2}$ si $p_1 \leq p_2$ cuando (R, μ) tiene medida finita.

²²Este es el caso, por ejemplo, en que (R, μ) es un espacio de medida finita -digamos que de medida 1-, y tenemos $L^1 \cap L^\infty = L^\infty \subset L^1 = L^1 + L^\infty$.



A continuación haremos una pequeña reseña sobre extrapolación:

6.2.1. Un poco de extrapolación

En la teoría de extrapolación (para esta sección referencias fundacionales son [58] y [85]) comenzamos con ciertas familias de espacios de Banach indexadas por cierto conjunto de índices $\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, siendo habitualmente $\Theta = (0, 1)$. Diremos que $X = \{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es compatible si existen dos espacios de Banach \mathbb{X}_0 y \mathbb{X}_1 tales que $\mathbb{X}_1 \subset X_\theta \subset \mathbb{X}_0$ con inclusiones continuas para cada $\theta \in \Theta$. Para un conjunto de índices fijo Θ consideraremos la categoría de familias de espacios de Banach compatibles cuyos morfismos son los operadores entre familias $T : \{X_\theta\}_{\theta \in \Theta} \rightarrow \{Y_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ lo cual significa que hay un operador lineal $T : \mathbb{X}_0 \rightarrow \mathbb{Y}_0$ cuyas restricciones están uniformemente acotadas, y sin pérdida de generalidad pediremos $T : X_\theta \xrightarrow{1} Y_\theta$ ²³ para cada $\theta \in \Theta$. En la práctica es usual que los espacios X_θ sean espacios de interpolación, por ejemplo de la forma $X_\theta = \bar{X}_{\theta, q(\theta), K}$. Diremos que X e Y son espacios de extrapolación respecto de $\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ y $\{Y_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ si $\mathbb{X}_1 \subset X \subset \mathbb{X}_0$, $\mathbb{Y}_1 \subset Y \subset \mathbb{Y}_0$ y $T : X \rightarrow Y$ siempre que $T : \{X_\theta\}_{\theta \in \Theta} \rightarrow \{Y_\theta\}_{\theta \in \Theta}$. Un método de extrapolación \mathcal{E} es un funtor desde una colección de familias compatibles $Dom(\mathcal{E})$ en una colección de espacios de Banach tal que $\mathcal{E}(\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ y $\mathcal{E}(\{Y_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ son espacios de extrapolación respecto de $\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ y $\{Y_\theta\}_{\theta \in \Theta}$. Los más simples pero también más importantes funtores de extrapolación son los métodos Δ y Σ :

Para las familias compatibles tales que las inclusiones $\mathbb{X}_1 \hookrightarrow X_\theta$ están uniformemente acotadas, es decir si $\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{X}_1} \frac{\|x\|_{X_\theta}}{\|x\|_{\mathbb{X}_1}} < \infty$, se define

$$\Delta(\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}) = \left\{ x \in \bigcap_{\theta \in \Theta} X_\theta : \|x\|_{\Delta\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}} : \sup_{\theta \in \Theta} \|x\|_{X_\theta} < \infty \right\}$$

, y entonces Δ nos proporciona un funtor desde la categoría de espacios compatibles en la categoría de espacios de Banach.

El método "dual" Σ , se define para las familias compatibles tales que las inclusiones $X_\theta \hookrightarrow \mathbb{X}_0$ están uniformemente acotadas, o sea $\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in A_\theta} \frac{\|a\|_{\mathbb{X}_0}}{\|a\|_{X_\theta}} < \infty$.

En este contexto se define

$$\Sigma(\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}) = \left\{ x \in \mathbb{X}_0 : \|x\|_{\Sigma\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}} : \inf \sum_{\theta} \|x_\theta\|_{X_\theta} < \infty \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones $x = \sum_{\theta} x_\theta : x_\theta \in X_\theta$ tales que $\sum_{\theta} \|x_\theta\|_{X_\theta} < \infty$, donde se entiende, como es usual que $\inf \emptyset = \infty$.

²³Lo que significa que $\|T\|_{X_\theta \rightarrow Y_\theta} \leq 1$

Bajo hipótesis bastante generales se tiene una relación estrecha entre extrapolación e interpolación: Considérese familias compatibles $\{X_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ donde $X_\theta = \mathcal{F}_\theta(\bar{X})$ para una familia de funtores de interpolación $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ aplicada sobre un par compatible de espacios de Banach $\bar{X} = (X_0, X_1)$. Hay una caracterización debida a Jawerth y Milman (cf. [58]) de aquellas familias de métodos $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ tales que se puede revertir, en cierto sentido, la propiedad de extrapolación: De una familia $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ se dice que es completa si $T : \mathcal{F}_\theta(\bar{X}) \xrightarrow{1} \mathcal{F}_\theta(\bar{Y})$ para todo $\theta \in \Theta$ implica que $T : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ siempre que $\bar{X} = (X_0, X_1)$ es un par regular de espacios de Banach²⁴ siendo además \bar{X} e \bar{Y} mutuamente cerrados²⁵ (\bar{X} y \bar{Y} mutuamente cerrados). La descripción de las familias completas puede hacerse en términos de las funciones características de los funtores \mathcal{F}_θ . Como vimos arriba las funciones características ρ eran cuasi-cóncavas y están definidas por la acción de los funtores \mathcal{F} sobre los espacios de dimensión 1: $\mathcal{F}((\mathbb{C}, \frac{1}{t}\mathbb{C})) = \frac{1}{\rho(t)}\mathbb{C}, t > 0$. Ahora, la caracterización mencionada arriba esta dada por el siguiente teorema para cuya demostración referimos a [58]:

Teorema 223 ([58] Teorema. 2.5) *Una familia funtores de interpolación exactos $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es completa si y solo si $\inf_{\theta \in \Theta} \frac{\rho_\theta(t)}{\rho_\theta(s)} \leq C \min(1, \frac{t}{s})$ para todo $s, t > 0$.*

Observación 224 *Por el teorema de arriba es inmediato que si \mathcal{F}_θ es exacto de exponente θ (i.e. $\rho(t) = t^\theta$) con $\theta \in (0, 1)$ entonces $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es completo.*

Observación 225 *Entre los métodos de interpolación exactos con una función característica dada ρ recordemos que conocíamos los métodos minimal y maximal dados por 103: $\bar{X}_{\rho,1,J} \xrightarrow{1} \mathcal{F}(\bar{X}) \xrightarrow{1} \bar{X}_{\rho,\infty,K}$.*

Observación 226 *Recordemos que los funtores $(\cdot)_{\theta,q,K}$ y $(\cdot)_{\theta,q,J}$ tenían función característica $\rho(t) = Ct^\theta$ y que habíamos renormalizado dichos espacios multiplicando respectivamente por $c_{\theta,q} = ((1-\theta)\theta q)^{\frac{1}{q}}$ (con $c_{\theta,q} = 1$ en el caso $q = \infty$), y por $c'_{\theta,q} = ((1-\theta)\theta q')^{-\frac{1}{q'}}$ (con $c'_{\theta,q} = 1$ en el caso $q = 1$) para obtener los espacios $\bar{X}_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft$ y $\bar{X}_{\theta,q,J}^\blacktriangleleft$ en lugar de $\bar{X}_{\theta,q,K}$ y $\bar{X}_{\theta,q,J}$. Y recordamos que uno de los objetivos de esa normalización era porque las respectivas funciones características de $(\cdot)_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft$ y $(\cdot)_{\theta,q,J}^\blacktriangleleft$ son exactamente $\rho(t) = t^\theta$. Los siguientes teoremas que citamos a continuación, son claves en la teoría de Jawerth-Milman para simplificar la caracterización de espacios de extrapolación, y muestran la importancia de la mencionada renormalización (cf. [85] Teorema 21, y fórmula (4.1) en las observaciones que lo preceden, y también [85] Teorema 5)*

Teorema 227 *Sea $\bar{X} = (X_0, X_1)$ una dupla de espacios de Banach mutuamente cerrada, y sea $M(\theta)$ una función temperada en $\Theta = (0, 1)$ ²⁶. Para cualquier familia $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ de funtores de interpolación exacta de orden θ (i.e. con función*

²⁴Esto es que $A_0 \cap A_1$ es densa en A_0 y en A_1 .

²⁵ $\bar{X} = (X_0, X_1)$ is mutually close if $X_0 = \widetilde{X}_0$ where $\widetilde{X}_0 = \left\{ f \in X_0 + X_1 : \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\inf_{f_0, f_1 : f = f_0 + f_1} [\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1}] \right) < \infty \right\}$ and $X_1 = \widetilde{X}_1$ (defined analogously).

²⁶Decimos que $M(\theta)$ es temperada si $M(2\theta) \approx M(\theta)$ para θ próximo a 0 y $M(\frac{1+\theta}{2}) \approx M(\theta)$ para θ próximo a 1.

característica $\rho(t) = t^\theta$, se tiene que:

$$\Delta_{0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Delta_{0 < \theta < 1} (M(\theta) X_{\theta, \infty, K}^\blacktriangleleft)$$

con normas equivalentes.

Más aún si $X_1 \subset X_0$, o sea si \bar{X} es un par ordenado, se tiene

$$\Delta_{\theta_0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Delta_{0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) \quad (106)$$

para cualquier $\theta_0 \in (0, 1)$ fijo y entonces

$$\Delta_{\theta_0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Delta_{\theta_0 < \theta < 1} (M(\theta) X_{\theta, \infty, K}^\blacktriangleleft)$$

Teorema 228 Sea $\bar{X} = (X_0, X_1)$ una dupla de espacios de Banach mutuamente cerrada, y sea $M(\theta)$ una función temperada en $\Theta = (0, 1)$. Para cualquier familia $\{\mathcal{F}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ de funtores de interpolación exacta de orden θ (i.e. con función característica $\rho(t) = t^\theta$), se tiene que:

$$\Sigma_{0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Sigma_{0 < \theta < 1} (M(\theta) X_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft)$$

con normas equivalentes.

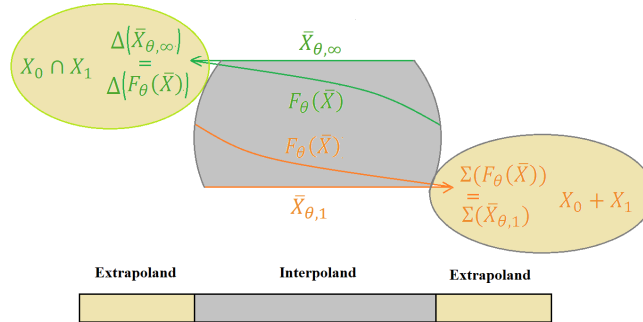
Más aún si $X_1 \subset X_0$, o sea si \bar{X} es un par ordenado, se tiene

$$\Sigma_{0 < \theta < \theta_0} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Sigma_{0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) \quad (107)$$

para cualquier $\theta_0 \in (0, 1)$ fijo y entonces

$$\Sigma_{\theta_0 < \theta < 1} (M(\theta) \mathcal{F}_\theta(\bar{X})) = \Sigma_{\theta_0 < \theta < 1} (M(\theta) X_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft)$$

Observación 229 Mediante los métodos Δ y Σ podemos obtener espacios cercanos respectivamente a $X_0 \cap X_1$ y a $X_0 + X_1$, aunque la elección de $M(\theta)$ "modula" el espacio que obtenemos. Pero, en cualquier caso, los teoremas de arriba muestran que podemos abstraernos de la elección de sobre cuáles espacios de interpolación $\mathcal{F}_\theta(\bar{X})$ (exactos de orden θ) filtramos con Δ , o sobre cuáles espacios de interpolación $\mathcal{F}_\theta(\bar{X})$ (exactos de orden θ) sumamos con Σ , ya que obtenemos los mismos espacios de extrapolación usando Δ sobre los espacios más grandes de orden θ , $X_{\theta, \infty, K}^\blacktriangleleft$; o respectivamente usando Σ sobre los espacios más chicos de orden θ , $X_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft$.



Ejemplo 230 Ilustremos la observación de arriba en un contexto familiar como el de los espacios L^p en un espacio de medida finita, digamos $L^p(R)$ con para (R, μ) con $\mu(R) = 1$ donde $L^p \supset L^q$ si $p \leq q$ para $\theta = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ tenemos que $p \in (1, \infty)$ si $\theta \in (0, 1)$, y $(L^1, L^\infty)_{\theta, \frac{1}{1-\theta}, K}^\blacktriangleleft = (L^1, L^\infty)_{\frac{1}{p}, p, K}^\blacktriangleleft = L^p$ con normas equivalentes con constantes independientes de p -como mencionamos más arriba (cf. [86] ejemplo 7)- y tenemos que para $M(\theta) = M(p) \equiv 1$ obtenemos $L^1 = \Sigma_{1 < p < \infty}(L^p) = \Sigma_{0 < \theta < 1} \left((L^1, L^\infty)_{\theta, \frac{1}{1-\theta}, K}^\blacktriangleleft \right) = \Sigma_{1 < p' < \infty} \left((L^1, L^\infty)_{p', 1, J}^\blacktriangleleft \right)$ y permutando en el último término p' por p -ambos recorren el intervalo $(1, \infty)$ - y usando la equivalencia de la observación 205 entre $\overline{X}_{\theta, 1, J}^\blacktriangleleft$ y $\overline{X}_{\theta, 1, K}^\blacktriangleleft$ nos queda que

$$\Sigma_{1 < p < \infty}(L^{p,1}) = \Sigma_{1 < p < \infty}(L^p) = L^{1,27}$$

y también de manera análoga

$$\Delta_{1 < p' < \infty}(L^{p,\infty}) = \Delta_{1 < p < \infty}(L^p) = L^\infty$$

. Si en cambio, para $\alpha > 0$, tomamos $M(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^\alpha = \frac{1}{(p-1)^\alpha} = M(p)$ tenemos (cf. [85]) que $\Sigma_{1 < p < \infty} \left(\frac{1}{(p-1)^\alpha} L^{p,1} \right) = \Sigma_{1 < p < \infty} \left(\frac{1}{(p-1)^\alpha} L^p \right) = L(\text{Log}L)^\alpha$ y tomando $M(\theta) = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\alpha = p^\alpha = M(p)$ tenemos que $\Delta_{1 < p < \infty}(p^\alpha L^{p,\infty}) = \Delta_{1 < p < \infty}(p^\alpha L^p) = \text{Exp}\left(L^{\frac{1}{\alpha}}\right)$. Nótese que para espacios de medida finita $L^1 \hookrightarrow L(\text{Log}L)^\alpha \hookrightarrow L^p \hookrightarrow \text{Exp}\left(L^{\frac{1}{\alpha}}\right) \hookrightarrow L^\infty$ ²⁸.

6.2.2. Las constantes en las clases de Hölder abstractas

Cómo las definiciones de las clases de Hölder abstractas $RH_{\theta,q}$ hacen referencia a los espacios de interpolación $X_{\theta,q}$ queremos considerar la cuestión del posible papel de las constantes si en lugar de la definición clásica 61 (cf. [16]) usamos en cambio los espacios $\overline{X}_{\theta,q,K}^\blacktriangleleft$ (definición 204, cf. [58]). Recordemos, por ejemplo la definición 79:

Definición 231 Sea $\theta \in (0, 1)$, $q \in [1, \infty)$ y $\overline{X} = (X_0, X_1)$ una dupla compatible de espacios de Banach. Se define $RH_{\theta,q} \subset X_0 + X_1$ a la clase dada por

$$RH_{\theta,q} = \{w \in X_0 + X_1 / \exists C > 0 : \frac{K(t, w, X_{\theta,q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}, \forall t > 0\}$$

, donde C puede depender de w y de \overline{X} . En este contexto se define la “norma”

$$\| \cdot \|_{RH_{\theta,q}} = \inf \left\{ C : \frac{K(t, w, X_{\theta,q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}, \forall t > 0 \right\}$$

²⁷Para los espacios de Lorentz $L^{p,1}$ hay que tomar la norma $\frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \frac{dt}{t}$.

²⁸En realidad $M(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^\alpha$ cumple que $M(\theta) \approx M(2\theta)$ para θ cercano a 0 -y por lo tanto para p próximo a 1-, por el otro lado fijando algún $p_0 > 1$ usamos que $L^{p_0} \supset L^p$ para todo $p \geq p_0$ y eventualmente renombrando $M(p) \equiv 1$ para $p \geq p_0$ tenemos que M es temperada. De manera análoga basta con ver que $M(\theta) = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^\alpha = M(p) = p^\alpha$ cumple $M(\theta) \approx M\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$ para θ próximo a 1 -y por lo tanto p próximo a ∞ -.

En términos de la mencionada definición también se tenía

$$RH(X) := \bigcup_{(\theta,q) \in (0,1) \times [1,\infty)} RH_{\theta,q}(X)$$

Y para el caso de cuplas ordenadas con $X_1 \subset X_0$ en el caso endpoint, para $\theta = 0$ y $q = 1$, se daba la definición 80:

Definición 232 Si $\overline{X} = (X_0, X_1)$ es una cupla ordenada se define

$$RH_{0,1} = \{w \in X_0 / \exists C > 0 : \int_0^t K(s, w, \overline{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \overline{X}), \forall t \in (0, n_{0,1})\}$$

y para dichos $C = C(w, \overline{X})$ se define la “norma”:

$$\| \cdot \|_{RH_{0,1}} = \inf \{C > 0 : \int_0^t K(s, w, \overline{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \overline{X}), \forall t \in (0, n_{0,1})\}$$

Y en las secciones subsiguientes se las caracterizó por medio de índices, se estudiaron las relaciones con clases de Hölder reversas clásicas por ejemplo para pares dados en términos de espacios L^p , $L^{p,q}$, $LLogL$, etc. Consideremos, por lo tanto si reemplazamos, en los pares y en las funcionales K , un espacio por otro equivalente (en el sentido de normas mutuamente comparables) como $\overline{X}_{\theta,q}$ y $\overline{X}_{\theta,q}^{\leftarrow}$.

Empecemos mirando como afecta reemplazar un espacio del par inicial (X_0, X_1) por un múltiplo (es decir multiplicando la norma por una constante).

$$K(t, f, X_0, X_1) := \inf_{f=f_0+f_1} \{ \|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{X_1} \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \}$$

Para $c > 0$, si $\widetilde{X}_0 = cX_0$ (en el sentido de que X_0 y \widetilde{X}_0 representan el mismo conjunto con las mismas operaciones de espacio vectorial y $\|f\|_{\widetilde{X}_0} = c\|f\|_{X_0}$ para todo $f \in X_0$) tenemos que si $f = f_0 + f_1$ con $f_0 \in X_0$ (equivalentemente $f \in \widetilde{X}_0$) y $f_1 \in X_1$ entonces $\|f_0\|_{\widetilde{X}_0} + t \|f_1\|_{X_1} = c\|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{X_1}$.

Tomando ínfimos tenemos que

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \|f_0\|_{\widetilde{X}_0} + t \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in \widetilde{X}_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \right\} \\ &= \inf \left\{ c \left(\|f_0\|_{X_0} + \frac{t}{c} \|f_1\|_{X_1} \right) : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \right\} \\ &= c \inf \left\{ \|f_0\|_{X_0} + \frac{t}{c} \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \right\} \end{aligned}$$

es decir

$$K(t, f, \widetilde{X}_0, X_1) = cK\left(\frac{t}{c}, f, X_0, X_1\right) \quad (108)$$

Por otra parte si $\widetilde{X}_1 = cX_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \|f_0\|_{X_0} + t \|f_1\|_{\widetilde{X}_1} : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in \widetilde{X}_1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \|f_0\|_{X_0} + ct \|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1 \text{ con } f_0 \in X_0 \text{ y } f_1 \in X_1 \right\} \end{aligned}$$

de donde

$$K(t, f, X_0, \widetilde{X}_1) = K(ct, f, X_0, X_1) \quad (109)$$

Teniendo $\widetilde{X}_0 = c_0 X_0$ y $\widetilde{X}_1 = c_1 X_1$ de 108 y 109 tenemos:

$$K(t, f, \widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1) = c_0 K\left(\frac{c_1}{c_0} t, f, X_0, X_1\right) \quad (110)$$

Dada $w \in X_0 + X_1$ decíamos que $w \in RH_{\theta, q}$ si $\exists C > 0$:

$$\frac{K(t, w, X_{\theta, q}, X_1)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}} \quad (111)$$

, $\forall t > 0$. Queremos probar que

$$\exists \widetilde{C} > 0 : \frac{K(t, w, X_{\theta, q}^\blacktriangleleft, X_1)}{t} \leq \widetilde{C} \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

para mostrar que la equivalencia de las normas preserva la pertenencia a las clases $RH_{\theta, q}$ abstractas. Como el miembro derecho es el mismo vamos a prestar atención solo a las desigualdades entre $K(t, w, X_{\theta, q}, X_1)$ y $K(t, w, X_{\theta, q}^\blacktriangleleft, X_1)$.

Como el segundo espacio del par es $\widetilde{X}_1 = X_1$ tenemos $c_1 = 1$ y $X_{\theta, q} = c_{\theta, q} X_{\theta, q}$ con $c_{\theta, q} = [(1-\theta)\theta q]^{\frac{1}{q}}$. Luego usando 108 es

$$K(t, f, X_{\theta, q}^\blacktriangleleft, X_1) = c_{\theta, q} K\left(\frac{1}{c_{\theta, q}} t, f, X_{\theta, q}, X_1\right)$$

Debido a que K es positiva, creciente y cóncava -respecto de t - se tiene

$$K(\tau, f) \leq \max\left\{1, \frac{\tau}{\sigma}\right\} K(\sigma, f)$$

(cf. B-L lemma 3.1.1) o equivalentemente:

$$\min\left\{1, \frac{\sigma}{\tau}\right\} K(\tau, f) \leq K(\sigma, f)$$

; entonces tomando $\tau = t$, $\sigma = \frac{t}{c_{\theta, q}}$ y teniendo en cuenta que

$$c_{\theta, q} \min\left\{1, \frac{t}{c_{\theta, q}}\right\} = c_{\theta, q} \min\left\{1, \frac{1}{c_{\theta, q}}\right\} = \min\{c_{\theta, q}, 1\}$$

tenemos que

$$\min\{1, c_{\theta, q}\} K(t, f, X_{\theta, q}, X_1) \leq c_{\theta, q} K\left(\frac{t}{c_{\theta, q}}, f, X_{\theta, q}, X_1\right) = K(t, f, X_{\theta, q}^\blacktriangleleft, X_1)$$

Recíprocamente

$$K(t, f, X_{\theta, q}^\blacktriangleleft, X_1) = c_{\theta, q} K\left(\frac{t}{c_{\theta, q}}, f, X_{\theta, q}, X_1\right)$$

y tomando $\tau = \frac{t}{c_{\theta,q}}$ y $\sigma = t$ nos queda

$$\begin{aligned} K\left(t, f, X_{\theta,q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right) &= c_{\theta,q} K\left(\tau, f, X_{\theta,q}, X_1\right) \leq \\ c_{\theta,q} \max\left\{1, \frac{t}{c_{\theta,q}}\right\} K\left(t, f, X_{\theta,q}, X_1\right) &= \max\{1, c_{\theta,q}\} K\left(t, f, X_{\theta,q}, X_1\right) \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\begin{aligned} \min\{1, c_{\theta,q}\} K\left(t, f, X_{\theta,q}, X_1\right) &\leq K\left(t, f, X_{\theta,q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right) \\ &\leq \max\{1, c_{\theta,q}\} K\left(t, f, X_{\theta,q}, X_1\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}, X_1\right)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

implica

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right)}{t} \leq \tilde{C} \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

con $\tilde{C} = C \max\{1, c_{\theta,q}\} > 0$ y por otra parte si

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right)}{t} \leq \tilde{C} \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

entonces vale:

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}, X_1\right)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

con $C = \tilde{C} \frac{1}{\min\{1, c_{\theta,q}\}} = \tilde{C} \max\left\{1, \frac{1}{c_{\theta,q}}\right\} > 0$.

Con lo cual la pertenencia de w a $RH_{\theta,q}$ para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q < \infty$ fijos no cambia si reemplazamos la condición

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}, X_1\right)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

por

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta,q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right)}{t} \leq \tilde{C} \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

y las "normas" $\|\cdot\|_{RH_{\theta,q}}$ son equivalentes -las constantes pueden depender de θ y de q .

Como ya se mencionó en la teoría de extrapolación el comportamiento de las normas al variar los parámetros importa, pero los resultados que se obtienen dentro de una clase $RH_{\theta,q}$ con θ y q dados no se ven afectados por las normalizaciones con las constantes $c_{\theta,q}$, lo que sucede en la mayoría de los resultados de este trabajo que refieren a las clases $RH_{\theta,q}$. En el caso límite $RH_{0,1}$ usamos que una versión adecuada del teorema de reiteración de Holmstedt (cf. [18] o [62] lemma 2.2):

Teorema 233 Para una cupla (X_0, X_1) ordenada donde $X_1 \subset X_0$ se tiene que

$$K\left(t, w, X_{\theta, q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right) \approx c_{\theta, q} \left(\int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} (s^{-\theta} K(s, w, \bar{X}))^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}, \forall t > 0$$

Observación 234 En muchos de los resultados hemos tratado con pesos soporados en cubos donde la cupla $(L^1(Q), L^\infty(Q))$ está ordenada.

Volviendo a las clases endpoint, para $q = 1$, la condición

$$\frac{K\left(t, w, X_{\theta, 1}^{\blacktriangleleft}, X_1\right)}{t} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

equivale a

$$\int_0^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} s^{-\theta} K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq C \frac{K\left(t^{\frac{1}{1-\theta}}, w, X_0, X_1\right)}{t^{\frac{1}{1-\theta}}}$$

(con otra constante) y poniendo formalmente $\theta = 0$, en la observación vemos que tiene sentido la definición de $RH_{0,1}$, de manera análoga a lo observado en 81.

Observación 235 De hecho, con la normalización, es posible tomar límites a las funcionales $K\left(t, f, X_{\theta, q}^{\blacktriangleleft}, X_1\right)$ respecto de θ para obtener casos endpoint. Ilustrémoslo con el caso donde $q = 1$, $c_{\theta, 1} = \theta(1 - \theta)$, con $\theta \rightarrow 0$ para un par regular y mutuamente cerrado de espacios de Banach ordenado -es decir (X_0, X_1) con $X_1 \subset X_0$ y X_1 denso en X_0 . Además X_1 será denso en $X_{\theta, q}^{\blacktriangleleft}$ -cf. [16] teo. 3.4.2 b)-. Además podemos eventualmente renormalizar X_1 de modo que la norma de la inmersión $\sup_{g \in X_1} \frac{\|g\|_{X_0}}{\|g\|_{X_1}} = 1$ es decir $X_1 \xrightarrow{1} X_0$.

Sabemos por 101 que $X_{\theta, 1} \xrightarrow{1} X_{\theta, \infty, K}$ y es fácil ver que $X_{\theta, \infty, K} \xrightarrow{1} X_0$ ²⁹ luego $X_{\theta, 1} \xrightarrow{1} X_0$ y por lo tanto

$$\|f\|_{X_{\theta, 1}^{\blacktriangleleft}} \geq \|f\|_{X_0} \quad (112)$$

para todo $f \in X_{\theta, 1}^{\blacktriangleleft}$.

Observemos primero que $\|f\|_{X_{\theta, 1}^{\blacktriangleleft}} \rightarrow \|f\|_{X_0}$ cuando $\theta \rightarrow 0$ para $f \in X_{\theta, 1}^{\blacktriangleleft}$ para algún $\theta_0 \in (0, 1)$. Para ello obsérvese que como $X_1 \xrightarrow{1} X_0$ se tiene $\|f\|_{X_1} \geq$

²⁹ Como $\|f\|_{X_1} \geq \|f\|_{X_0}$ para todo $f \in X_1 \xrightarrow{1} X_0$ tenemos: $\|f\|_{\theta, \infty} = \sup_{0 < t} K(t, f, X_0, X_1) \geq K(1, f, X_0, X_1) = \inf_{f_0 + f_1 = f} (\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1}) \geq \inf_{f_0 + f_1 = f} (\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_0}) \geq \|f\|_{X_0}$

$\|f\|_{X_0}$ y por lo tanto $K(t, f, X_0, X_1) = \|f\|_{X_0}$ si $t > 1$ de donde

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} &= \theta(1-\theta) \int_0^{\infty} t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} & (113) \\ \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} &= \theta(1-\theta) \left(\int_0^1 t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} t^{-\theta} \|f\|_{X_0} \frac{dt}{t} \right) \\ \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} &= \theta(1-\theta) \left(\int_0^1 t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} + \frac{1}{\theta} \|f\|_{X_0} \right) \\ \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} &= \theta \left(\int_0^1 (1-\theta) t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \right) + (1-\theta) \|f\|_{X_0} \end{aligned}$$

Por otro lado si $t < 1$ es $K(t, f, X_0, X_1) = \inf_{f_0+f_1=f} (\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1}) \geq \inf_{f_0+f_1=f} (t\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_0}) \geq t\|f\|_{X_0}$ de donde

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} &= \theta \left(\int_0^1 (1-\theta) t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \right) + (1-\theta) \|f\|_{X_0} \\ &\geq \theta \left(\int_0^1 (1-\theta) t^{-\theta} dt \right) \|f\|_{X_0} + (1-\theta) \|f\|_{X_0} = \|f\|_{X_0} \end{aligned}$$

es decir $\|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} \geq \|f\|_{X_0}$ y $X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft} \xrightarrow{1} X_0$

Por otro lado, nótese que para $t \in (0, 1)$ es $\ln t < 0$ y se tiene que

$$\frac{d((1-\theta)t^{-\theta})}{d\theta} = t^{-\theta}(-1 - (1-\theta)\ln t)$$

de donde

$$\frac{d((1-\theta)t^{-\theta})}{d\theta} > 0$$

si $1 < (1-\theta)(-\ln t)$, o sea si $\theta < 1 - \frac{1}{\ln t} = 1 + \frac{1}{\ln(1/t)}$ lo cual vale para todo $\theta \in (0, 1)$ y $t \in (0, 1)$.

Entonces para $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ y para todo $t \in (0, 1)$ es

$$(1-\theta_1)t^{-\theta_1} \geq (1-\theta_0)t^{-\theta_0}$$

, de donde

$$\int_0^1 (1-\theta_1)t^{-\theta_1} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \geq \int_0^1 (1-\theta_0)t^{-\theta_0} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \geq 0$$

. Luego para cualquier sucesión $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que θ_k tiende decrecientemente a 0 se tiene que

$$\left(\int_0^1 (1-\theta_k)t^{-\theta_k} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

es convergente.

Por lo tanto $\theta_k \int_0^1 (1-\theta_k)t^{-\theta_k} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t}$ tiende a 0.

Luego existe

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \left(\int_0^1 (1-\theta) t^{-\theta} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} \right) = 0$$

y por lo tanto de 113 resulta que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|f\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} = \|f\|_{X_0}$$

Por otra parte dado $f \in X_1$ y $\varepsilon > 0$ y elijamos $f_0 + f_1 = f$ de modo que $K(t, f, X_0, X_1) > \|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1} - \frac{\varepsilon}{2}$, y sea θ_0 tal que para $0 < \theta < \theta_0$ es $\|f_0\|_{X_0} > \|f_0\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} - \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$K(t, f, X_0, X_1) > \|f_0\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} + t\|f_1\|_{X_1} - \varepsilon \geq K(t, f, X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}, X_1) - \varepsilon \quad (114)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por otro lado como $X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft} \xrightarrow{1} X_0$ tenemos trivialmente que si $f = f_0 + f_1$ es

$$\begin{aligned} K(t, f, X_0, X_1) &= \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1}) \\ &\leq \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}} + t\|f_1\|_{X_1}) = K(t, f, X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}, X_1) \end{aligned}$$

es decir

$$K(t, f, X_0, X_1) \leq K(t, f, X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}, X_1) \quad (115)$$

De 114 y 115 se tiene que dada $f \in X_1$ resulta que para todo $\varepsilon > 0$ es $0 \leq K(t, f, X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}, X_1) - K(t, f, X_0, X_1) < \varepsilon$ si $0 < \theta < \theta_0(\varepsilon)$. De modo que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} K(t, f, X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}, X_1) = K(t, f, X_0, X_1) \quad (116)$$

. Como (X_1, X_0) es regular tenemos que X_1 es denso en X_0 y en $X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}$ para cada $\theta \in (0, 1)$ de modo que el límite de 116 vale para todo $f \in \bigcup_{0 < \theta < 1} X_{\theta,1}^{\blacktriangleleft}$ ³⁰.

Observación 236 En el caso de $RH_{0,1}$, en la condición $\int_0^t K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \bar{X})$ si reemplazamos $\bar{X} = (X_0, X_1)$ por un par $(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$ con $\tilde{X}_0 = c_0 X_0$ y $\tilde{X}_1 = c_1 X_1$ -por ejemplo reemplazar la norma de espacios clásicos como L^p o $L^{p,q}$ por un múltiplo que resulte al usar alguna constante de normalización- hay que ajustar la norma de la inmersión de \tilde{X}_1 en \tilde{X}_0 . Así la condición

$$\int_0^t K(s, w, \bar{X}) \frac{ds}{s} \leq CK(t, w, \bar{X}), \forall t \in (0, n_{0,1})$$

³⁰Nótese que si $f \in X_{\theta_1,1}^{\blacktriangleleft}$ y $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ tenemos que $\|f\|_{X_{\theta_0,1}^{\blacktriangleleft}} = \theta_0 \int_0^1 (1-\theta_0) t^{-\theta_0} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} + (1-\theta_0) \|f\|_{X_0}$
 $\leq \theta_1 \int_0^1 (1-\theta_1) t^{-\theta_1} K(t, f, X_0, X_1) \frac{dt}{t} + (1-\theta_1) \|f\|_{X_0} + (\theta_1 - \theta_0) \|f\|_{X_0} \leq (1 + \theta_1 - \theta_0) \|f\|_{X_{\theta_1,1}^{\blacktriangleleft}} < \infty$. Luego $f \in X_{\theta_0,1}^{\blacktriangleleft}$.

es equivalente a la condición

$$\int_0^t K\left(s, f, \widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1\right) \frac{ds}{s} \leq CK\left(t, w, \widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1\right) \forall t \in (0, \widetilde{n}_{0,1})$$

$$\text{donde } \widetilde{n}_{0,1} = \sup_{f \in \widetilde{X}_1} \frac{\|f\|_{\widetilde{X}_0}}{\|f\|_{\widetilde{X}_1}} = \frac{c_0}{c_1} \sup_{f \in X_1} \frac{\|f\|_{X_0}}{\|f\|_{X_1}}.$$

Observación 237 Otro resultado donde utilizamos la fórmula de Holmstedt es en 108, pero si utilizamos la normalización $X_{\theta,q}^\blacktriangleleft$ y la fórmula de Holmstedt correspondiente, 233, como se fijan los parámetros θ y q se obtiene un resultado completamente análogo (con otras constantes).

Por su parte en el teorema 149 y en el lema previo 152 estudiamos la relación entre las clases $RH_{L^{p,q}}$ y RH_p los resultados tampoco se ven afectados -salvo constantes- teniendo en cuenta lo señalado arriba y en 236. Otro tanto pasa en el apartado acerca de clases reversas y pesos no doblantes donde en las desigualdades pueden aparecer, a lo sumo, otros factores que dependen de $\mu = w(x) dx$ pero se obtienen las mismas clases RH_p .

6.3. Marco referencial

Quisiéramos reseñar aquí el contexto en que se insertan algunos de los temas de este trabajo. Dos cuestiones centrales sobre los que tratamos involucran clases A_p de Muckenhoupt y clases de Hölder reversas o generalizaciones de ellas. Los pesos que pertenecen a unas y otras revierten en cada caso desigualdades ciertas que se apoyan en la desigualdad de Hölder. Las clases de Muckenhoupt tienen medio siglo de historia, comenzando con el célebre paper de B. Muckenhoupt [92] (1972), y por sus relaciones (entre otras) con la acotación en $L^p(w)$ y $L^{p,\infty}(w)$ del operador de Hardy-Littlewood, las transformadas de Hilbert y de Riesz, con operadores de Calderón-Zygmund, con el espacio BMO , han dado lugar a un enorme número de trabajos, y se han planteado -y a veces se han resuelto- muchos problemas en torno a ellos. No es posible hacer un compendio sucinto de este corpus; remitimos al “survey paper” de Duoandikoetxea, J. [41] (2013) y las referencias allí citadas como reseña de buena parte de la historia de las clases de Muckenhoupt -pero desde luego, desde ese entonces muchos otros artículos han ido apareciendo-. Entre los problemas que se propusieron sobre el tema y en la que aquí consideramos una respuesta está la cuestión de obtener una caracterización de los pesos u en \mathbb{R}^n tales que $Mu \in A_\infty$. Esto se plantea, por ejemplo, en el trabajo de D. Cruz-Uribe y C. Pérez ([36] -2000-) donde se refiere aun trabajo del primero ([35] -1996-) para un resultado parcial para funciones monótonas en \mathbb{R} .

Las desigualdades de Hölder reversas y las clases de pesos correspondientes están, como vimos, íntimamente ligadas con los pesos de Muckenhoupt y con el lema de Gehring, y tienen relaciones con la regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y su estudio surge más o menos paralelamente en los principios de la década de 1970. En [33] (Cruz-Uribe y Neugebauer, 1995) aparece un estudio sistemático de la estructura de las clases RH_q y su relación con el operador minimal, el lema de Gehring, las clases A_p , etc. El lema de Gehring, de paso, aparece en 1973 en el paper de F.W. Gehring [50]. Desde luego que, desde entonces, han aparecido muchos otros resultados para clases

de Hölder reversas, por ejemplo relacionándolos con extrapolación de desigualdades (en el sentido de Rubio de Francia) con estos pesos (ver, p.ej [1] -2018-). Una de las partes centrales de esta tesis versa acerca de la abstracción (a cuplas de espacios de Banach) de las clases RH . Fue a partir de los años 80 y 90 en que empezó a advertirse que este tipo de situaciones y clases admitían ser consideradas en términos espacios de interpolación, las funcionales K y E , y los reordenamientos -ver los trabajos de M. Milman [82] y de M. Milman y Y. Sagher [88] (1984), donde se vinculan las clases A_p , los espacios BMO y W , y los operadores maximal y maximal sharp, y posteriormente en los trabajos de M. Milman [82], [83], [84], y [87] de M. Milman y B. Opic (publicados a fines de los 90). También durante los 80 se empiezan a considerar los operadores maximales sharp locales (cf. [59] -B. Jawerth y A. Torchinsky-1985) que utilizamos en algunos resultados del capítulo 5. A fines de la década de 1980 y principios de la de 1990 B. Jawerth y M. Milman desarrollan la idea del proceso de Extrapolación, que puede verse en cierto sentido como una operación recíproca a la interpolación de cuplas de espacios (y en otro como interpolación para una familia numerable de espacios) y que proporciona un marco abstracto para la obtención de ciertos espacios “límite” y desigualdades endpoint. En ese sentido, la idea de considerar las clases RH para $\theta = 0$ aparecen por primera vez en un trabajo de J. Bastero, M. Milman y F.J. Ruiz (cita [17]); en forma contemporánea a dicho artículo un caso particular de una idea similar es utilizada en un trabajo R. Fefferman, C.E. Kenig y J. Pipher para el estudio de la teoría de pesos en el problema de Dirichlet para ecuaciones elípticas, aunque el automejoramiento de las clases RH presentado en [17] era nuevo incluso en el caso clásico, lo que ilustra la utilidad de resultados tipo Gëhring usando funcionales K .

A pesar de la coincidencia de nombres, la extrapolación de espacios de Jawerth y Milman no tiene una relación inmediata con la extrapolación “a la Rubio de Francia”, sin embargo J. Martín y M. Milman en 2006 (cf. [79]) mostraron cómo obtener resultados de tipo “Rubio de Francia” via funtores de extrapolación de espacios mediante la noción de operadores factorizables. También en la misma época R. Johnson y C.J. Neugebauer (cf. [61] -1993-) advierten la relación entre clases A_p y BMO_* (la clase de funciones que son BMO junto con sus recíprocas), sobre la que hemos brindado algunos resultados en términos de los índices que definimos sobre familias de conjuntos. La teoría de interpolación y diversas nociones de índices (índices fundamentales, índices de Boyd, índices de Matuszewska-Orlicz, etc...) se entrelazan, quizás desde los tardíos 60, a partir de una serie de artículos de Boyd -por ejemplo: [22] (1967)-, quien mostró su importancia al caracterizar la acotación de la transformada de Hilbert en términos de los índices de los espacios. Para una vista panorámica de diversos índices, sus relaciones mutuas relaciones y los vínculos con la interpolación podemos remitir a la monografía de Maligranda [76] (1985). Posteriormente M. Mastylo y M. Milman -[80] (2000)- mostraron los nexos entre índices de Matuszewska-Orlicz y desigualdades de Gehring. Ese trabajo es en cierto modo precursor de [32] en que presentamos las nociones de clases de Hölder abstractos mediante índices indexados (la redundancia vale aquí) por familias de cubos; estos últimos índices aprovechan el trabajo de N. Samko (cf., por ejemplo: [100] (2010) y [101] (2004/2005)) y sus colaboradores en términos de funciones casi crecientes, que se insertan de manera natural en la escala de funciones, dadas por la funcional K , de la forma: $t^{-\delta}K(f, t, X_0(Q), X_1(Q))$ que son crecientes para $\delta = 0$

y decrecientes para $\delta = 1$. En relación al papel de los índices, la interpolación, las clases de pesos Holder-reversas y de Muckenhoupt hay un antecedente casi simultáneo en el trabajo de I. U. Asekritova, M. J. Carro, N. Kruglyak and J. Soria [2] (2019)-; como mencionamos en el capítulo 4, ambas teorías tienen un vínculo análogo al que relacionan las funcionales k y K . En cierto modo, el uso de la funcional K para las restricciones de los pesos para cubos nos exige de pedir restricciones de invariancia por reordenamiento. Volviendo al método real de interpolación, desde luego que los espacios $L^{p,q}$ de Lorentz proporcionan algunos de los primeros y más importantes ejemplos (introducidos en 1950 por G.G. Lorentz [75]); es interesante observar que así como los índices de Boyd capturan esencialmente el comportamiento del exponente p en el sentido de que los índices superior e inferior de Boyd de $L^{p,q}$ son ambos $\frac{1}{p}$ (para todo q si $1 \leq q \leq p \leq \infty$ o $p = q = \infty$), o sea que son $1 - \theta$ para $(L^1, L^\infty)_{\theta,q} = L^{p,q}$, de manera análoga hemos visto que para nuestra noción de índices, en las clases de Hölder abstractas se tiene que $RH_{L^{p,q}} = RH_p$, y así mismo se tiene que $w \in RH_{\theta,q}(\vec{X})$ si y solo si $i \left\{ K(\cdot, w, \vec{X}) \right\} > \theta$, lo que muestra que lo que se captura depende esencialmente del primer parámetro.

Nos restan mencionar algunos antecedentes de algunas de las generalizaciones que hemos examinado: El recurso de reemplazar el operador maximal por el operador maximal modificado definido mediante empaquetamientos e invirtiendo el orden de los reordenamientos y los supremos aparece en el trabajo [3] de I. Asekritova, N. Ya. Krugljak, L. Maligranda, and L. E. Persson (1997) y fue utilizado poco después (2000) por J. Martin and M. Milman, para proporcionar versiones de lema de Gehring para medidas no doblantes (cf. [77]). Otro manera que consideramos, brevemente, de enfocar una inversión de desigualdades tipo Hölder es la inversión en términos de las condiciones de Gurov-Reshetnyak y las clases GR_ε , que aparecen a mediados de los 70 en el artículo [53] (1976) de L. G. Gurov and Yu. G. Reshetnyak; una referencia monográfica bastante exhaustiva acerca de este tema es el trabajo de A.A. Korenovskii, A.K. Lerner, A. M. Stokolos: [66] (2002). Las clases GR_ε , además, vinculan las desigualdades reversas con el operador maximal sharp, aquí estos operadores se discuten cuando presentamos para la función maximal sharp un resultado análogo a la caracterización de Coifman y Rochberg de A_1 (cf. [27]). El artículo seminal [31] de R. Coifman y R. Rochberg aparece en 1980 y entre otras cuestiones vincula las clases de Muckenhoupt y los espacios BMO . Otras referencias a nexos entre operadores maximales sharp, funciones maximales locales, escalas de espacios en términos de oscilación y en particular espacios de Garsia-Rodemich pueden encontrarse en artículos recientes, por ejemplo [6] (2020) de S. Astashkin y M. Milman.

7. Referencias

Referencias

- [1] T. C. Anderson, D. Cruz-Uribe and K. Moen, *Extrapolation in the scale of generalized reverse Hölder weights*, Rev. Mat. Complut. **31** (2018), 263–286.

- [2] I. U. Asekritova, M. J. Carro, N. Kruglyak and J. Soria, *Rearrangement Estimates for A_∞ Weights*, Rev. Mat. Compl. Vol. 32, 731–743, (2019).
- [3] I. Asekritova, N. Ya. Krugljak, L. Maligranda, and L. E. Persson, *Distribution and rearrangement estimates of the maximal function and interpolation*, Studia Math. **124** (1997), 107–132.
- [4] S. Astashkin, K. Lykov and M. Milman, *Limiting Interpolation Spaces via Extrapolation*, J. Approx. Th. **240** (2019), 16-70.
- [5] S. Astashkin and M. Milman, *Extrapolation: Stories and Problems*, Pure and Appl. Funct. Anal., 6:3 (2021), 651–707
- [6] Astashkin, S. and Milman, M. *Garsia-Rodemich spaces: Local Maximal Functions and Interpolation*, Studia Mathematica 255 (2020), 1-26.
- [7] P. Auscher and J. M. Martell, *Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I. General operator theory and weights*. Adv. Math. **212** (2007), 225–276.
- [8] B. Avelin, T. Kuusi and G. Mingione, *Nonlinear Calderón-Zygmund theory in the limiting case*, Arch. Ration. Mech. Anal. **227** (2018), 663–714.
- [9] Bagby, R. J. and Kurtz, D. S. *Covering Lemmas and the Sharp Function*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 93, No. 2 (Feb., 1985), pp. 291-296.
- [10] J. Bastero and F. Ruiz, *Elementary reverse Hölder type inequalities with application to operator interpolation theory*, Proc. A.M.S. 124 (10) (1996), 3183–3192.
- [11] N. K. Bari and S. B. Stechkin, *Best approximations and differential properties of two conjugate functions* (in Russian). Proc. Moscow Math. Soc. **5** (1956), 483-522.
- [12] F. Bernicot and D. Frey, *Riesz transforms through reverse Hölder and Poincaré inequalities*, Math. Z. **284** (2016), 791–826.
- [13] Bernstein, S. N. *Complete Works, Vol II. Constructive function theory [1931–11953]* (Russian), Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, (1954).
- [14] O. Beznosova and A. B. Reznikov, *Sharp estimates involving A_∞ and $L\text{Log}L$ constants, and their applications to PDE*, St. Petersburg Math. J. **26** (2015), 27-47.
- [15] P. L Butzer and H. Berens, *Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin 1967.
- [16] J. Bergh and J. Löfstrom, *Interpolation Spaces: An Introduction*, Springer-Verlag, 1976.
- [17] J. Bastero, M. Milman and F.J. Ruiz, *Reverse Hölder inequalities and interpolation*, in *Function spaces, interpolation spaces, and related topics*, Israel Math. Conf. Proc. **13**, pp. 11–23, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.
- [18] J. Bastero, M. Milman and F.J. Ruiz, *On sharp reiteration theorems and weighted norm inequalities*, Studia Math. **142** (2000), 7-24.
- [19] J. Bastero, M. Milman and F. J. Ruiz, *Rearrangement of Hardy-Littlewood Maximal Function in Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 65-74.

- [20] J. Bastero, M. Milman and F. J. Ruiz, *On the connection between weighted norm inequalities, commutators and real interpolation*, Mem. Amer. Math. Soc. **154** (2001), no. 731, viii+80 pp.
- [21] D. W. Boyd, *The Hilbert Transform on Rearrangement-Invariant Spaces*, Canadian Journal of Mathematics , Vol. 19 , 1967 , pp. 599 - 616
- [22] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1245-1254.
- [23] Y. Brudnyi and N. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam 1991.
- [24] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics Series, Vol 129, 1988.
- [25] A. P. Calderón: “Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz,” Studia Math. 26 :3 (1966), pp. 273–299.
- [26] A. Corvalán, *The preimage of $A_\infty(Q_0)$ for the local Hardy-Littlewood maximal operator*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. (2022), ISSN: 2008-6822 (electronic).
- [27] A. Corvalán. *Some Characterizations of the Preimage of A_∞ for the Hardy-Littlewood Maximal Operator and Consequences*. Real Anal. Exchange; Volume 44, Number 1 (2019), 141-166
- [28] G. Chen, *Non divergence parabolic equations of second order with critical drift in Morrey spaces*, arXiv:1602.00819, (2016).
- [29] H-M. Chung, R. Hunt and D. Kurtz, *The Hardy-Littlewood Maximal Function on $L(p, q)$ spaces with weights*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 109–120.
- [30] R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241-250.
- [31] R. Coifman and R. Rochberg, *Another characterization of $B.M.O.$* , Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 249-254.
- [32] A. Corvalán and M. Milman *Reverse Hölder Inequalities revisited: Interpolation, Extrapolation Indices and Doubling*, , Pure and Appl. Funct. Anal., Vol. 6 (3), 565-604, (2021).
- [33] D. Cruz-Uribe and C. J. Neugebauer, *The Structure of the Reverse Hölder Classes*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2941–2960.
- [34] M. Carozza, A. Passarelli di Napoli *Composition of maximal operators*. Pubblicacions matematiqes, ISSN 0214-1493, Vol. 40, N° 2, 1996, págs. 397-409
- [35] D. Cruz-Uribe SFO, *Piecewise monotonic doubling measures*, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1-39.
- [36] D. Cruz-Uribe, SFO and C. Pérez *Two weight extrapolation via the maximal operator*, J. Funct. Anal., bf 174 (2000), 1-17.
- [37] M. Cwikel, N. Kalton, M. Milman, and R. Rochberg, *A unified theory of commutators for a class of interpolation methods*, Adv. Math. **169** (2002), 241-312.

- [38] J. Duoandikoetxea, J., *Fourier Analysis*, Graduate studies in Mathematics, bf 29, American Mathematical Society, 2001.
- [39] R. DeVore, S. D. Riemenschneider, R. C. Sharpley, *Weak interpolation in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **33** (1979), 58-94.
- [40] J. Duoandikoetxea, F. J. Martín-Reyes and S. Ombrosi, *Calderón weights as Muckenhoupt weights*, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 891–910.
- [41] J. Duoandikoetxea. Forty years of muckenhoupt weights. In Function Spaces and Inequalities (Paseky nad Jizerou, June 2013). Lecture Notes (J. Lukeš and L. Pick, eds.), Matfyzpress, Prague, pp. 23–75.
- [42] J. Duoandikoetxea, F.J. Martín-Reyes and S. Ombrosi, *On the A_∞ conditions for general bases*, Math. Z. **282(3)** (2016), 955-972.
- [43] R. Fefferman, *A criterion for the absolute continuity of the harmonic measure associated with an elliptic operator*. J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 127-135.
- [44] R. Fefferman, C. Kenig and J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations*. Annals of Math. **134** (1991), 65-124.
- [45] E. V. Ferreyra, G. J. Flores and B. E. Viviani, *Weighted Lebesgue and BMO^γ norm inequalities for the Calderón and Hilbert operators*, Math Zeit., (2019, nro 1-2, pp. 503-518.
- [46] N. Fujii, *Weighted bounded mean oscillation and singular integrals*, Math. Japon. **22** (1977/78), 529–534.
- [47] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate studies in Mathematics, bf 249, Springer, New York, 2008.
- [48] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate studies in Mathematics, bf 250, Springer, New York, 2009.
- [49] J. Garcia-Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland, New York, 1985.
- [50] F. W. Gehring, *The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasi-conformal mapping*, Acta Math. **130** (1973), 265-277.
- [51] M. E. Gomez and M. Milman, *Extrapolation spaces and almost-everywhere convergence of singular integrals*, J. Lond. Math. Soc. **34** (1986), 305–316.
- [52] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 249 (2nd ed.) (2008), Berlin, New York: Springer-Verlag, doi:10.1007/978-0-387-09432-8, ISBN 978-0-387-09431-1, MR 2445437.
- [53] L. G. Gurov and Yu. G. Reshetnyak, *A certain analogue of the concept of a function with bounded mean oscillation*, Sibirsk. Mat. Z. 17 (1976), no. 3, 540–546.
- [54] E. Harboure, O. Salinas and B. Viviani, *Reverse-Hölder classes in the Orlicz spaces setting*, Studia Math. **130** (1998), 245–261.
- [55] R. A. Hunt and D. S. Kurtz, *The Hardy-Littlewood maximal function on $L(p,1)$* , Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), 150–155, Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

- [56] T. Iwaniec, *The Gehring Lemma*, in *Quasiconformal Mappings and Analysis*, Ann Arbor, MI, 1995, pp 181-204, Springer, New York, 1998.
- [57] T. Iwaniec and A. Verde, *On the Operator $\mathcal{L}(f) = f \log |f|$* , J. Funct. Anal. **169** (1999), 391-420.
- [58] B. Jawerth and M. Milman, *Extrapolation theory with Applications*, Mem. of the Amer. Math. Soc. 1991, V. **89**, No. 440.
- [59] B. Jawerth and A. Torchinsky, *Local sharp maximal functions*, J. Approx. Theory, vol 29 (1985), 231-270.
- [60] F. John, *Quasi-isometric mappings*, in “Seminari 1962-1963 di Analisi, Algebra, Geometria E Topologia,” Rome, 1965.
- [61] R. L. Johnson and C.J. Neugebauer, *Properties of BMO Functions whose Reciprocals are also BMO*, vol. 12, issue 1, pp 3-11, 1993.
- [62] G.E. Karadzhov and M. Milman, *Extrapolation theory: new results and applications*, J. Approx. Theory vol 133, Issue 1, March 2005, pg 38-99
- [63] A.A. Korenovskii, *Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangements of Functions*, Lect. Notes Unione Mat. Ital., vol. 4, Springer/UMI, Berlin/Bologna, 2007.
- [64] N. K. Karapetyants and N. Samko, *Weighted theorems on fractional integrals in generalized Hölder spaces via m_w, M_w* , Fractional Calculus and Applied Analysis **7** (2004), 437-458.
- [65] C. E. Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Series **83**, 1994.
- [66] A.A. Korenovskii, A.K. Lerner, A. M. Stokolos, *A note on the Gurov – Reshetnyak condition*. Math. Research Letters. 9(5–6), (2002).
- [67] M. Krbeč and H.-J. Schmeisser, *On dimension-free Sobolev imbeddings II*, Rev Mat Complut **25** (2012), 247–265.
- [68] S. G. Krein, Yu. I. Petunin and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Trans. Math. Monogr. **54**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
- [69] N. Krugljak and M. Milman, *A distance between orbits that controls commutator estimates and invertibility of operators*, Adv. Math. **182** (2004), 128-173.
- [70] A. Lerner, *On some pointwise estimates for maximal and singular integral operators*, Studia Math., **138** (2000), 285-291.
- [71] A. Lerner, *On some pointwise inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **289**(1) (2004), 248-259.
- [72] A. Lerner, *Some remarks on the Fefferman-Stein inequality*, J. Anal. Math., bf 112(1) (2010), 329-349.
- [73] A. Lerner, *A characterization of the weighted type Coifman-Fefferman and Fefferman-Stein Inequalities*, Mathematische Annalen, vol. 378, pp. 425–446 (2020)
- [74] A. Lerner, *A note on the Coifman-Fefferman and Fefferman-Stein inequalities*, Ark. Mat., 58 (2020), 357–367

- [75] G. G. Lorentz, *Some New Functional Spaces*, Ann. of Math. Vol. 51, No. 1 (Jan., 1950), pp. 37-55.
- [76] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. (RozprawyMat.) **234**:49, 1985.
- [77] J. Martin and M. Milman, *Gehring's Lemma for non-doubling measures*, Michigan Math. J. **47** (2000), 559-573.
- [78] J. Martin and M. Milman, *Reverse Hölder inequalities and approximation spaces*, J. Approx. Th. **109** (2001), 82-109
- [79] J. Martin and M. Milman, *Extrapolation methods and Rubio de Francia's extrapolation theorem*, Advances in Mathematics, Vol. 201, Issue 1, 20 March 2006, pp 209-262
- [80] M. Mastylo and M. Milman, *A new approach to Gehring's Lemma*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 655-679.
- [81] M. Milman, *A note on Gehring's lemma*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **21** (1996), 389-398.
- [82] M. Milman, *Rearrangements of BMO functions and interpolation*, Lecture Notes in Math. **1070** (1984), pp. 208-212.
- [83] M. Milman, *A Note on Reversed Hardy Inequalities and Gehring's Lemma*, Comm. on Pure and Appl. Math. **50** (1997), 311-315.
- [84] M. Milman, *A note on interpolation and higher integrability*, Ann. Acad. Sci. Fennicae Math. **23** (1998)
- [85] M. Milman, *Extrapolation and Optimal Decompositions: with Applications to Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, No.1580, 1994.
- [86] M. Milman, *A note on extrapolation theory*, J. Math. Anal. Appl. **282** (2003) 26-47.
- [87] M. Milman and B. Opic, *Real Interpolation and Two Variants of Gehring's Lemma*, J. Lond. Math. Soc. **58** (1998), 394-412.
- [88] Milman, M., Sagher, Y.: *An interpolation theorem*, Ark.Mat. **22**,3-38 (1984).
- [89] M. Mocanu, *On a maximal operator in rearrangement invariant Banach function spaces on metric spaces*, Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform. **27** (2017), 49-59.
- [90] M. Mocanu, *A global version of Gehring lemma in Orlicz spaces on spaces of homogeneous type*, Math. Inequal. Appl. **19** (2016), 61-72.
- [91] G. MoscarIELlo and C. Sbordone, *A_∞ as a limit case of reverse-Hölder inequalities when the exponent tends to 1*, Ricerche Mat. **44** (1995), 131-144.
- [92] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207-226.
- [93] J. Orobítg and C. Pérez, *A_p Weights for Nondoubling Measures in R^n and Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2013-2033.
- [94] V. I. Ovchinnikov, *The method of orbits in interpolation theory*, Mathematical Reports, Vol 1, Part 2, Harwood Academic Publishers 1984, 349-516.

- [95] C. Pérez, *Endpoint estimates of commutators of singular integral operators*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 163-185.
- [96] C. Pérez, *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London Math. Soc., **49(2)** (1994), 296-308.
- [97] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition., McGraw- Hill, New York, London, 1987.
- [98] S. H. Saker and I. Kubiacyk, *Reverse dynamic inequalities and higher integrability theorems*, J. Math. Anal. Appl. **471** (2019), 671–686.
- [99] S. H. Saker and I. Kubiacyk, *Higher Summability and Discrete Weighted Muckenhoupt and Gehring Type Inequalities*, Proc. Edimburgh Math. Soc. (2019), 62(4), 949-973.
- [100] N. G. Samko, *Note on Matuzsewska-Orlicz indices and Zygmund inequalities*, Armenian J. Math. **3** (2010), 22-31.
- [101] N. G. Samko, *On Non-equilibrated almost monotonic functions of the Zygmund-Bary-Steckin Class*, Real Analysis Exchange. Vol. **30 (2)** (2004/2005), 727-746.
- [102] C. Sbordone, *Rearrangement of functions and reverse Jensen inequalities*, Proc. Symp. Pure Math. **45** (1986), 325–329.
- [103] C. Sbordone, *A new tool in the calculus of variations: Gehring's theorem*, in Complex analysis—fifth Romanian-Finnish seminar, Part 2 (Bucharest, 1981), pp. 280–284, Lecture Notes in Math. **1014**, Springer, Berlin, 1983.
- [104] T. Schmidt, *$W^{2,1+\varepsilon}$ estimates for the Monge–Ampère equation*, Adv. Math. **240** (2013), 672-689.
- [105] E.M. Semenov. Imbedding theorems for Banach spaces of measurable functions. Soviet Math. Dokl., 5 (1964), pp. 831-834.
- [106] E. Stein, *Harmonic analysis real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [107] J.O. Strömberg, *Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces*, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 511-544.
- [108] J.O. Strömberg and A. Torchinsky, *Weights, sharp maximal functions and Hardy spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980) 1053-1056.
- [109] J. O. Strömberg and R. L. Wheeden, *Fractional integrals on weighted H^p and L^p spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 287(1):293-293 (1984)
- [110] X. Tolsa, *Analytic capacity and Calderón-Zygmund theory with non doubling measures*, Univ. Sevilla, Lecture notes, 2003.
- [111] A. Torchinsky, *The K -functional for rearrangement invariant spaces*, Studia Math. **64** (1979), 174-176.
- [112] A. Torchinsky, *Real variable methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, New York, 1986.
- [113] H. Triebel, *Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators*, Berlin VEB, 1978.

- [114] Wik, I. *On Muckenhoupt's classes of weight functions*, Studia Math. 94, 1989, pp. 245-255.
- [115] K. Yabuta, *Sharp maximal function and C_p condition*, Arch. Math. (Basel), **55** (1990), 151-155.