Universidad Nacional de General Sarmiento

Instituto del Desarrollo Humano

POLIEDROS REGULARES Y ORIGAMI EN UN MUSEO INTERACTIVO DE CIENCIA

TÍTULO AL QUE ASPIRA

ESPECIALISTA EN DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

AUTOR: Prof. GLADYS CARINA ANTÚNEZ

DIRECTORA: Lic. TAMARA MARINO

LOS POLVORINES

AGOSTO DE 2014

Resumen del trabajo:

Este trabajo presenta una propuesta didáctica fundamentada, para ser desarrollada en un ámbito informal de enseñanza. Para ello aborda un contenido matemático sencillo y atractivo por su versatilidad para ser trabajado no solo desde lo matemático sino también desde lo artístico y lo histórico. Por ello, este trabajo desarrolla el tema de los Sólidos Platónicos focalizando en el por qué sólo son cinco los poliedros regulares. Se abordan las cuestiones matemáticas e históricas de este asunto y se presenta una propuesta didáctica para un museo interactivo de ciencia, describiendo previamente el contexto de implementación. La propuesta didáctica hace uso de la técnica del origami para favorecer por un lado, la exploración y manipulación de poliedros y por el otro, la elaboración de conjeturas sobre por qué son sólo cinco los poliedros regulares y su justificación mediante pruebas y argumentos visuales que emergen de dicha manipulación. La propuesta es fundamentada desde el uso del origami en la enseñanza de la geometría y utilizando elementos teóricos de la didáctica de la Matemática como pruebas visuales, razonamiento visual y demostraciones sin palabras, entre otros.

Palabras claves: poliedros regulares, origami, museo interactivo, sólidos platónicos

Abstract:

This paper presents a founded didactic proposal to be carried out in an informal learning environment. In order to do so, it addresses a simple and attractive content for its versatility, to be worked not only from the mathematical but also from the artistic and historical approaches. Therefore, this paper develops the theme of the Platonic solids by focusing on why regular polyhedra are only five. Mathematical and historical issues regarding this topic are addressed, and a didactic proposal intended for an interactive science museum is presented, having described the context of implementation previously. The methodological approach makes use of the technique of origami to favour, on the one side, the exploration and manipulation of polyhedra and, on the other hand, the making of guesses at why there are only five regular polyhedra and its justification through visual testing and arguments that arise from such manipulation. The proposal is founded on the use of origami in the teaching of geometry, by using theoretical elements of the didactics of mathematics such as visual tests, visual reasoning and wordless proofs, among others.

Keywords: regular polyhedra, origami, interactive museum, Platonic solids"

Dedicatoria y reconocimiento:

A mi familia, Diego, Enzo y Aylén. Diego, mi compañero de vida, me ha apoyado pacientemente a lo largo de toda mi carrera. Él junto a nuestro hijo Enzo han sido mi sostén especialmente en el último tramo de este posgrado, en donde luego de varios vaivenes llegó nuestra tan ansiada y esperada hija, Aylén.

Al Profesor Víctor Hugo González, mi mejor amigo, mi compadre, mi compañero de estudios y gran motivador para transitar esta especialización.

A la Licenciada Tamara Marino, mi directora de trabajo, quien pacientemente a lo largo de la escritura de este trabajo dedicó tiempo y esfuerzo en leer, aportar, explicar y sobre todo enseñar en esta etapa de la especialización, algo que superó mis expectativas ampliamente.

A la Licenciada Andrea Carolina Antúnez, mi hermana, mi mentora. Gracias por acompañarme incansablemente en mi carrera, atender mis consultas, motivarme cuando el ánimo decaía, enseñarme con más ahínco que todos los profesores que he tenido.

A Laura Azcoaga, mi maestra de origami. Emprendedora, defensora obstinada de las bondades del origami. Gracias a ella descubrí en el Museo Imaginario este maravilloso mundo del plegado del papel.

A la Profesora Fabiana Valinotti, por compartir conmigo su experiencia aúlica en torno al tema que aborda este trabajo.

A Julio Amadeo Coiro, por atender mis consultas y pedidos de todo tipo para este trabajo.

Al Museo Interactivo Imaginario de la UNGS, por permitirme seguir estudiando, perfeccionarme y desarrollar lo aprendido en actividades para ese ámbito.

Índice General:

“La razón principal para estudiar los poliedros regulares es todavía la misma que la de los tiempos de los pitagóricos, es decir, que sus formas simétricas resultan atractivas a nuestro sentido artístico” (Coxeter, en Alsina, 2011, p. 13).

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Matemática en contextos informales presenta tantos o más desafíos que su enseñanza formal. Una de las problemáticas compartidas es la vinculada a su imagen de ciencia. Generalmente es asumido el aspecto "útil" de la Matemática pero se la suele percibir como algo destinado a unos pocos, con aptitudes particularmente sobresalientes. Ernest (2000) describe la concepción generalizada de las matemáticas como una ciencia fría, abstracta e inhumana.

Esto constituye un problema a la hora de plantear un abordaje de contenidos matemáticos que se base en la construcción de conocimientos y no solo en su enunciación, pues se suele creer que la mayoría de las personas no cuenta con capacidades para involucrarse en actividades que impliquen la formulación de conjeturas acerca de los conocimientos matemáticos que se quieren enseñar y la elaboración de argumentos para la justificación de dichas conjeturas.

Es así como herramientas didácticas que rescatan lo manipulativo y lúdico e incorporan la historia de la Matemática y el Arte permiten ofrecer propuestas que favorezcan el acercamiento por parte del que aprende a tareas vinculadas a explorar, conjeturar y/o validar resultados matemáticos, al menos los más sencillos. Martínez y Götte (2011), i Edo (sf), Royo Prieto (2002, 2010), Covadonga Blanco y Otero (2005), Hans Martín, Santonja y Fernández-Aliseda Redondo (2004), De la torre Mejía y Prada Vásquez (sf) son algunos autores de referencia del uso de estas herramientas.

La posición falibilista es una tradición en la filosofía matemática que enfatiza la práctica de la parte humana de las matemáticas y está asociada con el pensamiento constructivista y post-modernista de la educación, la filosofía y las ciencias sociales (Ernest, 2000):

> Los puntos de vista falibilistas ven las matemáticas como el producto de procesos sociales. El conocimiento matemático es entendido como algo que puede ser falible y está sujeto a revisión constantemente, tanto en términos conceptuales y teóricos como en sus demostraciones. Consecuentemente, este punto de vista acepta como materia filosóficamente legítima las prácticas de los matemáticos, su historia y sus aplicaciones y el lugar de las matemáticas en la cultura humana, incluyendo cuestiones de valores y la educación (p.4).

En vínculo con lo expuesto anteriormente, existen abordajes teóricos en Didáctica de la Matemática que rescatan el valor formativo en el aprendizaje de la Matemática, de la incorporación de pruebas visuales, razonamiento visual, demostración sin palabras y demostraciones empíricas en la enseñanza. Valorar estos aspectos del quehacer matemático, que no necesariamente están ligados a la formalización rigurosa que se da en la validación matemática, aportan a una imagen más humana y creativa de la Matemática.

Un contenido que brinda posibilidades para este tipo de enfoque es el de poliedros. Estos cuerpos suelen aparecer en contextos no solo matemáticos, sino en ámbitos como la arquitectura, el arte, la mineralogía y la química. Como señalan Martinez y Götte (2011) "Aprender a observarlos y construirlos no sólo debe ser una experiencia alentadora y fascinante, sino que puede ser aprovechada para el desarrollo de actividades matemáticas que involucren la actividad demostrativa" (p. 1). Por otro lado citan a Guillén Soler (1997): "Se ha dicho que la mejor forma de aprender sobre los poliedros es construirlos y después, observarlos, compararlos, transformarlos y modificarlos" (p. 1).

Existen abordajes de este tipo vinculados con el origami, aprovechando las bondades de este arte para la enseñanza de la geometría. Ricotti (2012b) en una dedicatoria pone de manifiesto la riqueza del origami para plantear un abordaje de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que permita a los estudiantes un vínculo más creativo con la Matemática:

> Aquellos docentes de alma, que siguen buscando cómo seducir matemáticamente a sus alumnos, que desafían cada jornada escolar queriendo hacer mucho con poco, que se juegan por oponerse a rutinas y se animan a hacer de la clase de Matemática un paréntesis creativo y vivaz en medio de realidades escolares no siempre atractivas, pueden encontrar en el arte y las técnicas de Origami los recursos para estudiar y resolver problemas relativos a cuestiones elementales de Geometría. Además, éstos pueden ser enriquecidos por incursiones en otros contenidos matemáticos que abren el panorama integrador a la hora de resolver verdaderos problemas. (p.16)

La palabra japonesa para la papiroflexia es origami. Su escritura está compuesta por dos caracteres: En el primero, el radical de la izquierda deriva del dibujo de una mano y significa doblar (ori). El segundo deriva del dibujo de la seda y significa papel (kami). La práctica del *origami* más "ortodoxo" supone la aceptación de unas fuertes condiciones en las que no se admiten cortes ni pegado de piezas diferentes; estrictamente se trata de doblar una única pieza de papel. Una de las ramas modernas de la papiroflexia moderna es el llamado *origami* modular, en donde sí se permite utilizar piezas distintas aunque se mantiene la restricción de no pegar. Casi siempre los motivos de este tipo de origami son geométricos y el plegado de módulos (baldosas, bisagras, módulos con aletas) a encastrar para obtener la pieza final es mucho más sencillo que el origami que usa una sola hoja de papel/pieza.

Si bien en el origami modular los diferentes módulos se han de mantener unidos sin necesidad de ningún tipo de pegamento, estas condiciones pueden obviarse si su práctica tiene fines didácticos matemáticos, por ejemplo, puede permitirse el pegado con cinta adhesiva, además de la utilización de bisagras, para lograr mayor estabilidad en las piezas, favoreciendo una adecuada manipulación y exploración de las formas geométricas.

En este trabajo se presenta y fundamenta una propuesta didáctica referida a contenidos de Geometría básica en la que se propicia un ambiente de trabajo basado en la visualización, manipulación y exploración de cierto tipo de poliedros. Dicha propuesta está diseñada para ser desarrollada en un marco de enseñanza no formal, como es el caso de un museo interactivo de ciencia. De esta manera el objetivo de este trabajo es presentar y fundamentar una propuesta de taller para ser implementado como parte de las visitas guiadas de un museo interactivo con el fin de tratar el tema de por qué son solo 5 los poliedros regulares, utilizando como recurso el origami. Esta propuesta constituye un abordaje didáctico novedoso no solo por el uso del origami como recurso sino por el tratamiento de un problema geométrico en un contexto no formal.

El contexto de la propuesta es el Museo Interactivo Imaginario, perteneciente al Centro Cultural (CC) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). En él se propone generar un espacio de educación no formal donde sus visitantes puedan acercarse al conocimiento científico, explorando los dispositivos interactivos dispuestos en las salas a través de la experimentación y el juego. También se desarrollan talleres, uno de ellos dedicado a la Matemática, donde se trabaja la Geometría vinculada al Arte, más específicamente el tema de los Sólidos Platónicos.

De alguna manera, el Museo Imaginario desea colaborar con los docentes y además brindar oportunidades de aprendizaje también a jóvenes en contextos de exclusión del sistema escolar. Durante los diez años de funcionamiento de este museo, el origami ha abierto puertas de acercamiento con personas de todas las edades en torno a una actividad artística que el Museo supo aprovechar para acercar también a la Matemática. Por otro lado, lo común, sencillo y económico del recurso, hace que esté al alcance de la mano de cualquier interesado.

Con respecto a la estructura del trabajo, luego de la presente *Introducción*, se continúa con el apartado *Sólidos Platónicos* desarrollando el asunto matemático de interés: el por qué sólo son cinco los poliedros regulares, donde no sólo se abordarán las cuestiones matemáticas sino también algo de la historia vinculada a este tema. Luego, recordando que el interés es presentar una propuesta didáctica en el contexto del Museo (ámbito no formal), se presentará brevemente el contexto de la institución y se relatará el abordaje que se hace en dicho ámbito sobre ese asunto matemático. La cuarta parte desarrolla una *Propuesta* basada en las actividades que se realizan actualmente en el Museo, explicando qué tipo de modificaciones se introducen y por qué. Aquí se encontrarán las características, los objetivos y las actividades de la propuesta. La quinta parte lo constituye la *Fundamentación de la Propuesta*, haciendo hincapié en la riqueza didáctica de la misma. En sexto lugar, *A modo de Cierre*, un espacio para mencionar recorridos que el trabajo podría haber tomado o líneas de desarrollo ulterior que se pueden desprender del mismo. El séptimo apartado lo constituye la *Bibliografía* consultada.

2. SÓLIDOS PLATÓNICOS

2.1. Cuestiones Matemáticas

En este apartado se presentarán en primer lugar algunas definiciones y resultados geométricos que luego se utilizarán para realizar un análisis visual, intuitivo y geométrico. En segundo lugar, se realizará dicha exploración geométrica que permite entender por qué el número de poliedros es limitado, más precisamente, permite visualizar geométricamente por qué son exactamente cinco. Finalmente se presentarán dos demostraciones de por qué son sólo cinco los poliedros regulares posibles.

2.1.1. Definiciones y resultados

En un polígono regular se pueden contemplar tres tipos de ángulos: los interiores (β), los exteriores (γ) y los centrales (α). Los interiores son los formados por dos lados consecutivos y los exteriores son sus suplementarios. Si se piensa en el polígono inscrito en una circunferencia el ángulo central se corresponde al que forman dos radios consecutivos del polígono. A continuación, a modo de ejemplo, se identifican estos ángulos en un pentágono regular.

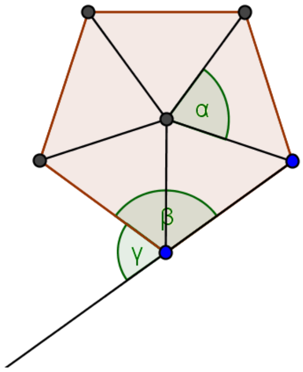


Figura 1

Etimológicamente la palabra poliedro viene del griego clásico πολύεδρον (polyedron) de la raíz πολύς (polys), "muchas" y de έδρα (edra), "base", "asiento", "cara". Un poliedro es un cuerpo geométrico que tiene un número finito de caras poligonales (cada par de caras puede compartir una arista o un vértice), aristas que pertenecen solo a dos caras y vértices en los que concurren diversas aristas y caras (al menos tres).

Las partes de un poliedro son: cara (porción de plano de contorno poligonal, que limita al poliedro), arista (intersección de dos caras), vértice (intersección de las aristas) y ángulos poliedros (los formados por varias caras, al menos tres, que tienen un vértice común).

Una superficie poliédrica es una figura formada por un número finito de polígonos, de forma que cada arista de éstos pertenezca a dos de ellos y que a la vez deberán estos estar en planos diferentes. La siguiente figura muestra algunos ejemplos de superficies poliédricas.

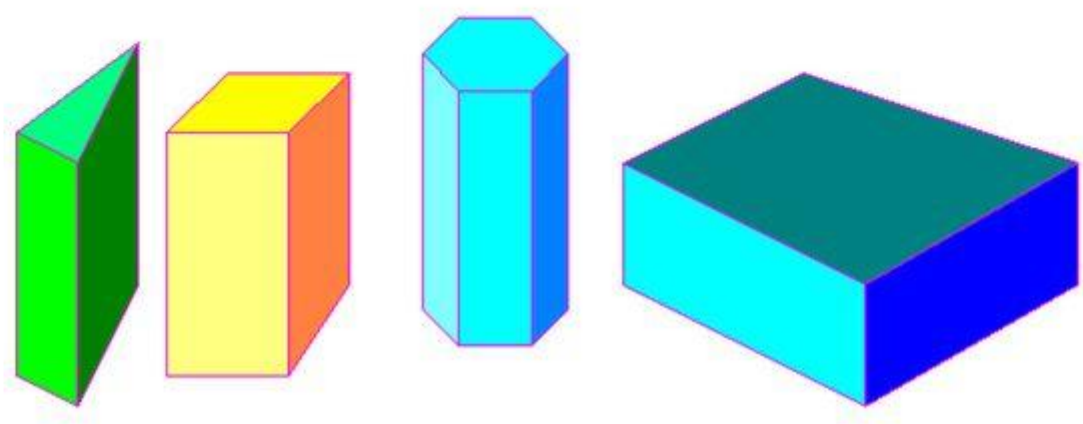


Figura 2

No toda superficie puede constituir un poliedro, por ejemplo:

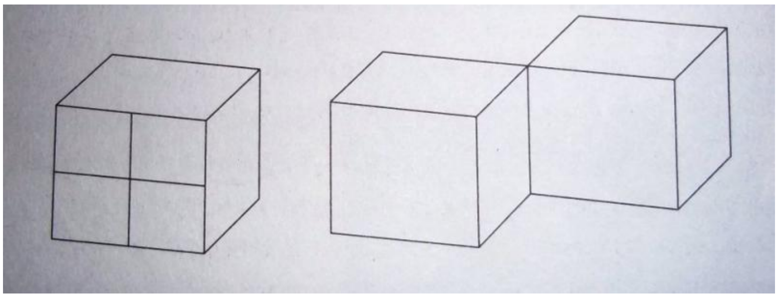


Figura 3 Figura 4

En la figura 3 se puede observar un cubo con una cara dividida en cuatro partes. No constituye un poliedro pues hay caras adyacentes situadas en un mismo plano. La figura 4 tiene una arista que es compartida por más de dos caras, por lo tanto no es un poliedro.

Los poliedros pueden ser convexos o cóncavos. Un poliedro es convexo cuando todo él está ubicado en el mismo semiespacio determinado por los planos que forman sus caras. Siendo cóncavo en caso de no cumplirse lo anterior.

Un poliedro regular es un poliedro convexo tal que todas sus caras son polígonos regulares idénticos (lados y ángulos iguales) y todos sus vértices reciben el mismo número de caras. De esto se deduce también que todos sus vértices reciben el mismo número de aristas y que todos los ángulos poliedros de un poliedro regular son iguales.

Un resultado conocido es que la suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliedro es menor a 360º, pues las caras concurrentes en un vértice del poliedro no pueden estar en un mismo plano.

De estas definiciones y resultados se llega a la conclusión de que el número de poliedros regulares es limitado. En efecto, estas definiciones y resultados actúan como condicionantes geométricos referidos a los ángulos poliedros que configuran los poliedros regulares, recordando, además, que se necesitan al menos tres caras para conformar un ángulo poliedro.

I Los ángulos poliedros de un poliedro regular deben tener como caras polígonos regulares iguales (por definición de poliedro regular).

II La suma de los ángulos de las caras concurrentes en el vértice de un ángulo poliedro debe ser siempre menor que 360º.

2.1.2. Análisis geométrico

Para este apartado se sigue a Romá (2003) y se realiza un análisis geométrico acerca de cuántos poliedros regulares es posible construir a partir de considerar ángulos poliedros cuyas caras sean polígonos regulares. Para ello comprobemos el cumplimiento de las condiciones enunciadas en el apartado anterior.

Exploremos cuántos poliedros regulares es posible construir a partir de ángulos poliedros cuyas caras sean triángulos equiláteros.

Comencemos considerando un ángulo poliedro compuesto por tres triángulos equiláteros, puesto que es el mínimo de caras posibles de considerar. Vemos que verifica el primer condicionante, al ser las caras polígonos regulares e iguales entre sí. También verifica el segundo condicionante pues 3 x 60º = 180º < 360º. De esta manera podemos afirmar que el poliedro formado a partir de este tipo de ángulo poliedro es regular, teniendo en cuenta que todos los ángulos poliedros en un poliedro regular son iguales. En efecto: cuatro triángulos equiláteros unidos de tres en tres dan origen al tetraedro.

Ahora consideremos el ángulo poliedro compuesto por cuatro caras (triángulos equiláteros). Verifica ambos condicionantes pues sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí y además 4 x 60º = 240º < 360º. De esta manera podemos afirmar que el poliedro formado a partir de este tipo de ángulo poliedro es regular. En efecto: ocho triángulos equiláteros unidos de cuatro en cuatro dan origen al octaedro.

El ángulo poliedro compuesto por cinco caras (triángulos equiláteros) verifica el primer condicionante, al ser las caras polígonos regulares iguales entre sí y verifica el segundo condicionante: 5 x 60º = 300º < 360º. En efecto: veinte triángulos equiláteros unidos de cinco en cinco dan origen al icosaedro.

Si intentáramos un nuevo ángulo poliedro compuesto por seis caras (triángulos equiláteros), no verificaría uno de los condicionantes expuestos, en efecto: 6 x 60º = 360º. Imposibilidad, por tanto, de formar un ángulo poliedro y hemos agotado las posibilidades de formación de poliedros regulares que tengan por caras triángulos equiláteros.

Exploremos cuántos poliedros regulares es posible construir considerando que las caras de los ángulos poliedros sean cuadrados.

El ángulo poliedro compuesto por tres caras cuadradas (mínimo de caras a considerar en un ángulo poliedro) verifica el primer condicionante, al ser las caras polígonos regulares iguales entre sí, y verifica también el segundo condicionante: 3 x 90º = 270º < 360º. De esta manera, podemos afirmar que el poliedro formado a partir de este tipo de ángulo poliedro es regular. En efecto: seis cuadrados unidos de tres en tres dan origen al hexaedro o cubo.

Si intentáramos formar un ángulo poliedro con cuatro cuadrados, no verificaría uno de los condicionantes expuestos, en efecto: 4 x 90º = 360º. Imposibilidad, por tanto, de que existan ángulos poliedros y poliedros regulares, compuestos por cuatro caras o más, siendo el polígono de la cara un cuadrado.

Exploremos cuántos poliedros regulares es posible construir considerando que las caras de los ángulos poliedros sean pentágonos regulares. El ángulo poliedro compuesto por tres caras pentagonales verifica el primer condicionante, al ser las caras polígonos regulares iguales entre sí. También verifica el segundo condicionante: 3 x 108º = 324º < 360º. De esta manera, podemos afirmar que el poliedro formado a partir de este tipo de ángulo poliedro es regular. En efecto: doce pentágonos unidos de tres en tres dan origen al dodecaedro.

Si intentáramos formar un ángulo poliedro con cuatro pentágonos, no verificaría uno de los condicionantes expuestos, en efecto: 4 x 108º > 360º. Imposibilidad, por tanto, de que existan ángulos poliedros y poliedros regulares, compuestos por cuatro caras o más, siendo el polígono de la cara un pentágono.

Si intentáramos formar un ángulo poliedro cuyas caras fueran 3 hexágonos regulares, no verificaría uno de los condicionantes expuestos, en efecto: 3 x 120º = 360º. Imposibilidad, por tanto, de que se forme un poliedro regular.

Si intentáramos formar poliedros regulares con ángulos poliedros distintos de los ya analizados, por ejemplo con heptágonos, octógonos, eneágonos regulares, etc.; comprobaríamos que tal intento es infructuoso, ya que en cada caso la suma de los ángulos de tres caras (las mínimas posibles) superaría los 360º y no se verificaría uno de los condicionantes mencionados. De esta manera queda reducido el número de poliedros regulares a cinco.

A continuación se presentan algunas ilustraciones de Azcoaga (sf) que permiten visualizar la explicación:

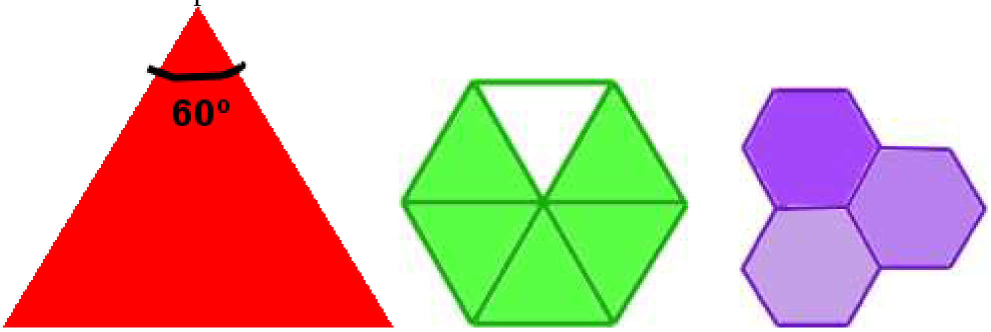


Figura 5. Tres caras triangulares se reúnen en un vértice para el tetraedro, cuatro para el octaedro y cinco para el icosaedro. Con 6 ya se está en el plano (el ángulo se aplana pues el ángulo poliedro es de 360º) y por eso tampoco hay ningún sólido platónico con caras hexagonales, pues lo mismo ocurre cuando se juntan 3 hexágonos regulares.

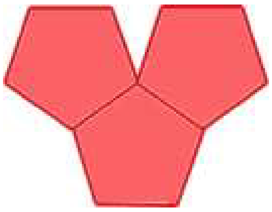


Figura 6. Se puede hacer un poliedro regular con pentágonos, el dodecaedro.

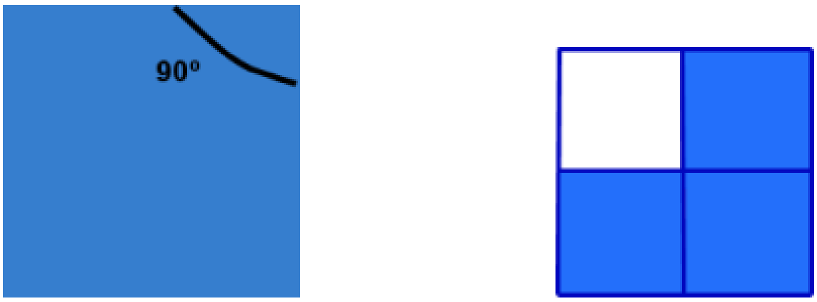


Figura 7. Tres cuadrados concurren en un vértice en el cubo, pero con cuatro se obtiene un plano ya que la suma de los ángulos que forman el ángulo poliedro da 360º.

Para más, un análisis similar a partir de azulejar el plano con polígonos regulares, puede verse Zito (sf). En dicho texto se analiza que para cubrir o azulejar el plano con polígonos regulares únicos es necesario reunir al menos tres vértices de los mismos; el valor de cada ángulo interior es lo que define si "funcionan como azulejos" o no.

2.1.3. Demostración de por qué son sólo cinco los sólidos platónicos

En esta sección se demostrará la imposibilidad de construir más de cinco poliedros regulares. Para ello se arribará primero a una inecuación de dos maneras diferentes: la primera, utilizando resultados relativos a la suma de los ángulos interiores de los polígonos regulares y la segunda forma a través del Teorema de Euler, que relaciona el número de caras, aristas y vértices existentes en un poliedro regular. Por tal razón, en una primera parte demostraremos los resultados requeridos para luego desarrollar las dos demostraciones del teorema que afirma que son sólo cinco los poliedros regulares.

Sobre la suma de los ángulos interiores de un polígono regular

En primer lugar es claro que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º. Veamos una demostración posible de este resultado.

Sea *ABC* triángulo cualquiera (a modo de orientación ver la figura 5). Trazamos una recta *r* paralela al lado $\overline{AB}$ por el punto *C*. Como $\widehat{A} = \widehat{\alpha}$ por ser ángulos correspondientes, y $\widehat{B} = \widehat{\beta}$ por ser alternos internos concluimos que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{C}$ = 180º.

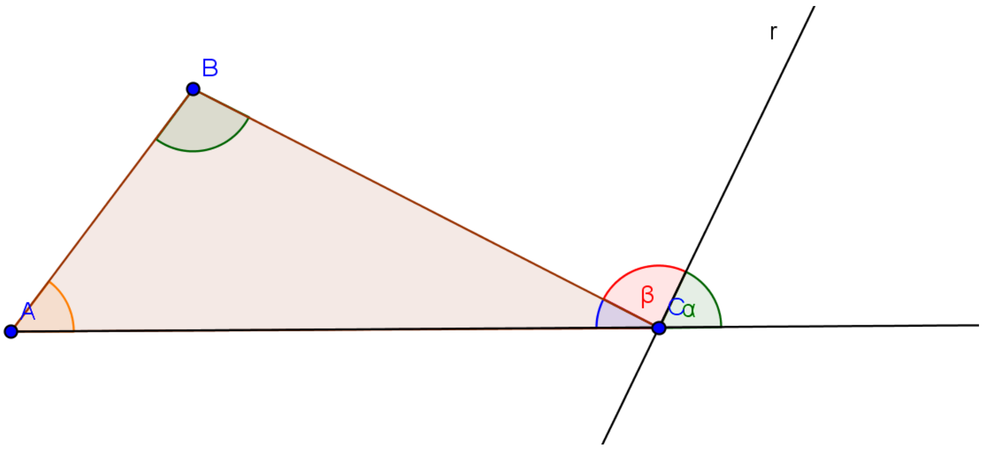


Figura 8

Veamos ahora cuál es la suma de los ángulos interiores en cualquier polígono regular.

<u>Proposición:</u> La medida de cada ángulo interior de un polígono regular de n lados es

$$\beta = 180° \cdot \frac{(n-2)}{n}$$

Vamos a demostrar esta proposición de dos formas diferentes, utilizando distintos recursos, lo que es interesante didácticamente porque permite abordar la demostración según los conocimientos previos. La primera por inducción la segunda utilizando características de los ángulos de un polígono regular.

Demostración 1: Primeramente usaremos inducción completa para demostrar que el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados (con n mayor o igual a 3) es igual a *180º (n-2).*

Para el primer caso, n=3 es claro pues tenemos un triángulo.

Suponiendo que todo polígono con cantidad de lados menor o igual a n, el valor de la suma de sus ángulos interiores es 180º(n-2) queremos ver que para un polígono de n+1 lados se tiene que el valor es *(n+1-2) 180º = (n-1) 180º.*

Considerando dos vértices no consecutivos del polígono de n+1 lados, y trazando un segmento que los une se tiene que el polígono quedó descompuesto en dos polígonos de h y k lados respectivamente, siendo h+k-2 = n+1 y en particular con h<n+1 y k<n+1. Para ambos polígonos se tiene, por hipótesis inductiva, que

La suma para el polígono de h lados es: 180º(h-2)

La suma para el polígono de k lados es: 180º(k-2)

Luego la suma para el polígono de n+1 lados es: 180º (h-2)+180º (k-2)

Que es equivalente a: 180º(h-2+k-2)=180º(n+1-2)=180º(n-1)

En el caso particular de un polígono regular de n lados, como todos sus ángulos son iguales, el valor de uno de los ángulos interiores resultara de hacer la división por la cantidad de ángulos interiores (que es n también) es:

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Demostración 2: Observemos que todos los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes. Sea α el ángulo central de un polígono regular, como ejemplo veáse la figura 9 de un heptágono regular. Para ello veamos que el triángulo *OAB* es congruente al triángulo *OBC*, *OCD*, etc. pues sus lados $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, etc. valen lo mismo (pensemos en que son el radio de la circunferencia en la que se halla inscripto el polígono regular) y su tercer lado $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, etc. son iguales entre sí por ser los lados del polígono regular. Por lo tanto los ángulos interiores de estos triángulos también son iguales. La medida del ángulo central puede obtenerse a partir del número de lados *n* del polígono como sigue:

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

ya que la suma de todos los ángulos centrales es igual a 360º.

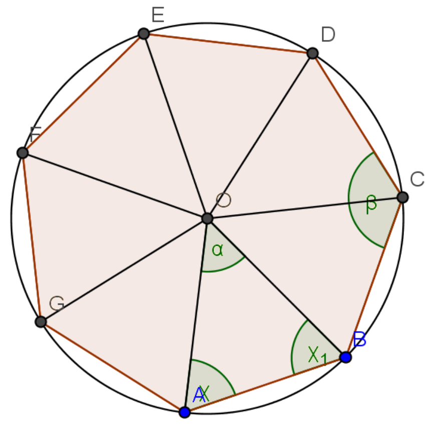


Figura 9

Por otro lado sabemos que α + β = 180º (observemos que los triángulos formados son isósceles, por lo cual los otros dos ángulos χ distintos al central son iguales y su suma, 2 χ, es igual a β), el ángulo interior β de un polígono regular mide 180º – α, o sea β = 180º – 360º /n = 180º (1 – 2/n), concluimos que

$$\beta = 180^\circ \cdot \frac{(n-2)}{n}$$

Con estos resultados, se demostrará finalmente la imposibilidad de construir más de cinco poliedros regulares. Para ello se arribará primero a una inecuación de dos maneras diferentes: la primera, utilizando los resultados previos y la segunda forma a través del Teorema de Euler. Por tal razón, presentaremos primero la demostración de este teorema que relaciona el número de caras, aristas y vértices existentes en un poliedro regular convexo, siguiendo el planteo de Romá (2003).

Sobre el Teorema de Euler

Teorema: ***En todo poliedro regular la suma del número de caras C y el número de vértices V es igual al número de aristas A más 2.***

$$\boldsymbol{C + V = A + 2}$$

Demostración:

Sea una superficie poliédrica ABIERTA según una línea poligonal, por ejemplo *abcdefg* (figura 10), la mencionada superficie cumple en sus elementos la siguiente relación:

$$C + V = A + 1 \quad (1)$$

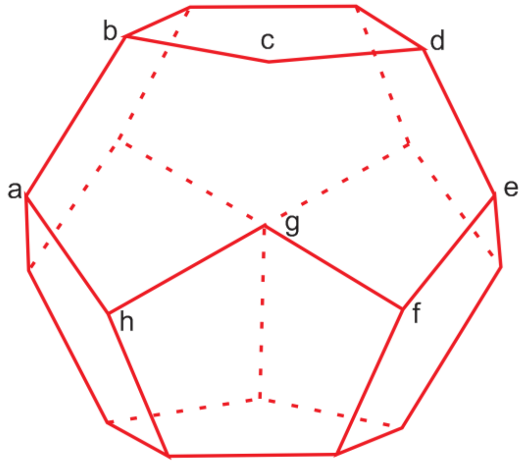


Figura 10

Para demostrar la anterior igualdad utilizaremos el principio de inducción en el número de caras:

Se cumple para una cara: 1 + V = A + 1

En efecto, en el caso de una sola cara el número de vértices es igual al número de aristas.

Supongamos que (1) se cumple para n caras, veamos que se cumple en n + 1 caras.

Si añadiéramos una cara más – por ejemplo la *cdefg* en la figura 10- el poliedro tendría n + 1 caras y estaría abierto por la cara *abcgh*. La cara añadida tiene n lados y n vértices pero como la superficie poliédrica sigue abierta, el contorno de la cara añadida no puede coincidir con la poligonal que existía antes de añadir la cara, únicamente coincidirán q de los n lados, por tener solo q lados comunes con la superficie. La cara añadida y la superficie tendrán q +1 vértices comunes. Luego las caras son ahora C + 1, los vértices V + n – (q + 1) y las aristas A + n – q. Sustituyendo lo anterior en la expresión que intentamos demostrar (1) tenemos:

$$C + 1 + V + n - (q + 1) = A + n - q + 1$$

$$C + 1 + V + n - q - 1 = A + n - q + 1$$

Operando algebraicamente obtendremos:

$$C + V = A + 1$$

Luego la igualdad (1) está demostrada.

Al añadir la última cara que cierra la superficie poliédrica, por ejemplo la abcgh en la figura 10, el número de vértices y aristas no aumenta, pero sí aumenta en una unidad el número de caras. Luego en la fórmula (1) que acabamos de demostrar, si el primer miembro de la igualdad ha aumentado en una unidad, para que se mantenga la igualdad, deberemos de aumentar el segundo miembro en una unidad. Entonces:

$$C + V = A + 2$$

Luego el Teorema de Euler queda demostrado.

Sobre el teorema de existencia de sólo cinco poliedros regulares

Antes de presentar la formulación y demostración de la existencia y unicidad de los cinco poliedros regulares, a continuación se desarrollan dos demostraciones de un lema previo. La primera demostración utiliza el resultado sobre la medida del ángulo interior en un polígono regular y la segunda, el teorema de Euler. Esto es rico didácticamente por los recursos que pone en juego según los conocimientos previos de los estudiantes.

Lema: ***Si m polígonos regulares con n lados han de coincidir en un vértice de un poliedro, (m - 2)(n - 2) < 4.***

Demostración 1: Si m polígonos regulares con n lados han de coincidir en un vértice (y no aplanarse), al valer cada ángulo del polígono regular β, deberá ser $m.180º\ (n-2)/n < 360º$, de donde resulta la inecuación: $m(n-2)<2n$. Para factorizar trabajemos en la expresión $mn - 2m < 2n$:

$-2m - 2n + mn < 0$

$-2m - 2n + mn + 4 < 4$, y obtenemos que

$(m - 2)(n - 2) < 4$. (2)

Más adelante veremos las soluciones de esta inecuación, pero ahora analicemos la otra forma de arribar a este resultado previo, usando el Teorema de Euler.

Demostración 2: Sea P un poliedro regular con C caras, V vértices y A aristas, cada cara con n lados y en cada vértice convergen m caras. Entonces, $m;\ n \geq 3$ y además:

(a) $C + V - A = 2$; por el Teorema de Euler.

(b) $2A = mV$, pues de cada vértice salen m aristas, en todos los vértices concurren la misma cantidad de caras pues es un poliedro regular, y además cada arista pertenece a dos caras y por tanto se cuenta dos veces.

(c) $2A = nC$ dado que cada cara tiene n aristas, y cada arista pertenece a dos caras, por tanto se cuenta dos veces.

Entonces, si multiplicamos $C + V - A = 2$ por mn en ambos lados, obtenemos

$mnC + mnV - mnA = 2mn$ (d)

Y sustituyendo (b) y (c) en (d)

$2mn= m2A + n2A - mnA= A(2m + 2n - mn)$

Como $A;\ mn \geq 0$, tenemos entonces que

$2m + 2n - mn > 0$,

o equivalentemente

$-2m - 2n + mn < 0$

$-2m - 2n + mn + 4 < 4$,

$(m - 2)(n - 2) < 4$. Que es la desigualdad pretendida.

***<u>Teorema:</u>* Existen cinco y sólo cinco poliedros regulares.**

Dado que un poliedro regular es un poliedro convexo tal que todas sus caras son polígonos regulares idénticos y todos sus vértices reciben el mismo número de caras, se tiene por lema anterior que: $(m - 2)(n - 2) < 4$, siendo m la cantidad de polígonos regulares de n lados que concurren en cada vértice del poliedro.

Teniendo en cuenta que un polígono regular al menos tiene 3 lados, y en cada vértice concurren al menos 3 caras, se tiene que tanto m como n son números naturales mayores o iguales a *3*.

Las únicas soluciones de la inecuación bajo estos condicionantes son (m, n)=(3,3), (m, n)=(3, 4), (m, n)=(4, 3), (m, n)=(3, 5) y (m, n)=(5, 3): Dando lugar respectivamente a los poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Como esto constituye un análisis exhaustivo de todas las soluciones posibles, se demuestra que son sólo 5 los poliedros regulares.

A continuación un cuadro en donde se vuelca esta información y se agrega una descripción en cuanto a las caras de cada poliedro regular:

Soluciones a la inecuación $(m - 2)(n - 2) < 4$, *con m,n naturales mayores o iguales a 3.*	Poliedro regular	Descripción en cuanto a la cantidad de caras
m=3 y n=3	Tetraedro	4 caras triangulares, concurren 3 en cada uno de los 4 vértices.
m=3 y n=4	Hexaedro o Cubo	6 caras cuadradas, concurren 3 en cada uno de los 8 vértices.
m=4 y n=3	Octaedro	8 caras triangulares, concurren 4 en cada uno de sus 6 vértices.
m=3 y n=5	Dodecaedro	12 caras pentagonales, concurren 3 en cada uno de sus 20 vértices
m=5 y n=3	Icosaedro	20 caras triangulares, concurren 5 en cada uno de sus 12 vértices.

2.2. Un poco de Historia

En este apartado se busca recoger aspectos de la Historia de la Matemática que puedan ser utilizados en el taller (ver actividad 1 del apartado 4.4), aunque el desarrollo del tema dentro del mismo sea menor por el tiempo que se dispone para desarrollar las actividades. Se presentarán algunos aspectos de la historia de los poliedros regulares: los primeros registros, los poliedros grecorromanos para desarrollar el tema de los sólidos platónicos y Kepler (1571-1630) con su modelo cosmológico.

Según González Urbaneja (sf), el significado simbólico, místico y cósmico de los poliedros regulares se remonta a los primeros estadios de la Civilización. Hay pruebas de que ya eran conocidos por los pueblos neolíticos y por las primeras culturas históricas europeas:

Foto1. Sólidos regulares neolíticos de Escocia (Ashmolean Museum de Oxford). Según Critchlow (1979), «*lo que tenemos son objetos que indican claramente un grado de dominio de las matemáticas que hasta la fecha todo arqueólogo o historiador de la matemática le había negado al hombre neolítico*». Extraído de González Urbaneja (sf).

Foto 2. a. Esfera tetraédrica neolítica (Keith Critchlow: *Time Stands Still*). b. Dodecaedro etrusco (500 a.C. Landes-Museum. Mainz, Alemania). c. Icosaedro romano (Rheinisches Landes-Museum. Bonn). Extraído de González Urbaneja (sf).

Según González Urbaneja (sf):

> El origen de estas piezas puede ser de índole estético, místico o religioso, pero también es posible que fueran observadas en la naturaleza en la forma de algunos cristales como los de pirita, o en esqueletos de animales marinos como la radiolaria.
>
> Según Lawlor (1993), Gordon Plummer en su obra *The Mathematics of the Cosmic Mind,* afirma que la mística hindú asocia el icosaedro con el *Purusha*, la semilla-imagen de Brahma, el creador supremo, la imagen del hombre cósmico, equivalente al antropocosmos de la tradición esotérica occidental, mientras que el dodecaedro es asociado con Prakiti, el poder femenino de la creación, la Madre Universal, la quintaesencia del universo natural. En la mitología hindú, Purusha y

> Prakiti son la eterna dicotomía creadora, representación mística de la dualidad geométrica entre el icosaedro y el dodecaedro (p.4).

Algunos autores apuntan que el tetraedro, el octaedro y el cubo eran poliedros ya conocidos en Babilonia y Egipto.

Pitágoras de Samos (hacia el 582 a.C.-507 a.C.) inició la cosmogonía poliédrica relacionando los poliedros regulares con las distribuciones cósmicas del universo. Del pitagorismo nació la visión mística de identificar estos poliedros con los cuatro elementos esenciales de la naturaleza: el tetraedro con el fuego, el cubo con la tierra, el octaedro con el aire, el icosaedro con el agua y el dodecaedro con la esfera celeste. Las singulares regularidades de los poliedros y las relaciones numéricas escondidas en ellos suscitaron gran interés para los pitagóricos. No hay dudas de que Pitágoras conocía tres poliedros regulares, pero sí las hay de si realmente conocía los otros dos. González Urbaneja (sf) citando a Heat (1956, 1981), menciona que la crítica histórica considera improbable que Pitágoras hubiera planteado la cosmogonía descrita, ya que fue Empédocles de Agrigento el primero que distinguió explícitamente los cuatro elementos primarios (fuego, tierra, aire y agua). Se atribuye el octaedro y el icosaedro a Teeteto (415 a.C.-369 a.C.), brillante matemático griego de *La Academia* (realizó importantes aportaciones sobre los irracionales) y amigo de Platón, quien lo honró dando su nombre a uno de sus *Diálogos*, *Teeteto* (Sobre la Ciencia) y lo coloca como interlocutor principal de Sócrates. A Teeteto, se debe la primera teoría de los cinco sólidos regulares que demuestra que no hay otros. Los *Elementos* de Euclides recogen sus principales contribuciones en relación a los cinco poliedros regulares.

La popularización de los poliedros regulares vino de la mano de Platón al incluirlos en su diálogo *Timeo*. Allí menciona la asociación (de origen pitagórico que anteriormente se comentó) entre los poliedros y los cuatro elementos naturales, elevando el dodecaedro a símbolo místico del Cosmos o sea que encierra a todo el Universo, considerándolo como la *quintaesencia,* el *quinto elemento*, la sustancia de los cuerpos celestiales. Además, Platón asocia poliedros con belleza, no ligada a las formas geométricas de estos cuerpos, sino a las propiedades e ideas matemáticas relacionadas con estos sólidos: la regularidad geométrica como metáfora de orden del universo. Este filósofo define poliedro regular del siguiente modo en *Timeo* 54b-55a: “Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos, […], deben tener la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que están inscritos”. En otro fragmento se puede vislumbrar cómo la denominación de *sólidos platónicos* terminará imponiéndose:

> TIMEO: […] asignaremos los géneros que acaban de nacer en nuestro discurso a fuego, tierra, agua y aire. A la tierra otorgaremos la figura cúbica pues a la tierra es entre los cuatro géneros la más remisa a moverse y la más maleable entre los cuerpos; y es completa necesidad que lo que posee tales características tenga por nacimiento las caras más firmes. Ahora bien, entre los triángulos que en un principio hemos propuesto, la cara de dos lados iguales es por naturaleza más firme que la de lados desiguales, y el plano de cuatro lados iguales [por ella] compuesta resulta necesariamente más estable que el triángulo equilátero, tanto en sus partes como en el todo.
>
> De ahí que, al asignar esta figura a la tierra, preservamos el discurso verosímil. Además, entre las restantes figuras le asignamos al agua aquella especie que es

> menos móvil, al fuego la más móvil, y al aire la intermedia. Y asignamos el cuerpo más pequeño al fuego, el más grande al agua, el intermedio al aire y, a su vez, el más agudo al fuego, el segundo en agudeza al aire, el tercero al agua. Así, pues, siendo todas estas las figuras, la que posee menor número de caras debe ser necesariamente por naturaleza más móvil, por ser la más incisiva y la más aguda en todo sentido, y además ha de ser la más ligera, por estar compuesta de menor cantidad de partículas idénticas. Por su parte, la segunda figura posee tales propiedades en un segundo grado, y la tercera en tercer grado. Acordemos, entonces, tanto conforme con un discurso correcto como con uno verosímil, que la especie sólida de la pirámide es el elemento y la simiente del fuego, y digamos que la especie segunda en el origen de la generación es elemento del aire, y que la tercera lo es del agua. Por cierto que debemos concebir todas estas figuras como tan pequeñas que, individualmente, ninguna de las pertenecientes a cada uno de los cuatro géneros pueda ser percibida por nosotros en virtud de su pequeñez, mientras que podemos ver la masa que forman cuando se reúnen muchas de ellas. Y en lo que concierne a los números, movimientos y demás propiedades de las proporciones, el dios (en la medida que la naturaleza de la necesidad lo concedía de buen grado y persuadida) lo realizó en todas partes así, con precisión, y las armonizó según la razón adecuada. (en Maldonado y Suárez-Álvarez, 2002, p.3)

Como se dijo, en los *Elementos* Euclides recoge las aportaciones de Teeteto y de esta manera en el Libro XIII presenta todo lo relativo a los poliedros regulares. Algunos afirman que el texto euclidiano se vertebra para poder culminar precisamente con esta descripción poliédrica. Prodo en su *Comentario* señala: "Euclides era platónico…, mejoró los trabajos de Teeteto…, se propuso como objetivo final del conjunto de sus *Elementos* la construcción de los cinco poliedros regulares".

Algunas definiciones del Libro XI:

> Definición 1. Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.
>
> Definición 2. Y el extremo de un sólido es una superficie.
>
> Definición 11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.
>
> Definición 12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.
>
> Definición 25. Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.
>
> Definición 26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.
>
> Definición 27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
>
> Definición 28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

El Libro XII consta de 18 proposiciones y tras analizar diversas cuestiones clave sobre polígonos, a partir de la proposición 13 Euclides se centra exclusivamente en los poliedros.

Johannes Kepler (1571-1630) fue un gran matemático y astrónomo que se interesó tanto por las leyes físicas relativas al movimiento de los planetas como por hacer un estudio sistemático de los poliedros. Kepler unió sus aficiones astronómico-poliédricas y creó un curioso modelo relacionando la cosmología con los poliedros regulares. Según González Urbaneja (sf):

> "Kepler fue de tal modo seducido por la cosmogonía pitagórico-platónica que elaboró una Cosmología basada en los cinco sólidos regulares, en la creencia de que éstos serían la clave utilizada por el creador para la construcción de la estructura del Universo. En la época de Kepler sólo se conocían seis planetas, Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Mientras que hay infinitos polígonos regulares sólo existen cinco poliedros regulares. No podía ser una casualidad, la mano de *Dios geómetra* no improvisa. Según Koestler, Kepler pensó que los dos números estaban vinculados: *"hay sólo seis planetas porque hay sólo cinco poliedros regulares*" y da una visión del sistema solar que consiste en sólidos platónicos inscritos, encajados o anidados unos dentro de otros, relacionando los radios de las esferas concéntricas circunscritas que intervienen con las órbitas de los planetas. Al creer que había reconocido el esqueleto invisible del Universo en esas estructuras perfectas que sostenían las esferas de los seis planetas, llamó a su revelación *El Misterio Cósmico*. Dentro de la órbita o esfera de Saturno Kepler inscribió un cubo; y dentro de éste la esfera de Júpiter circunscrita en un tetraedro. Inscrita en éste situó la esfera de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra estaba el dodecaedro; entre la Tierra y Venus, el icosaedro; entre Venus y Mercurio, el octaedro. Y en el centro de todo el sistema el astro rey, el Sol. Según Lawlor, la geometría pitagórica tamizada por el idealismo místico y filosófico de Platón y por la estructuración euclidea, permitió a Kepler vislumbrar una imagen de la perfección esplendente del Cosmos trasunto de la excelsitud del Creador a través de la Sagrada Geometría."

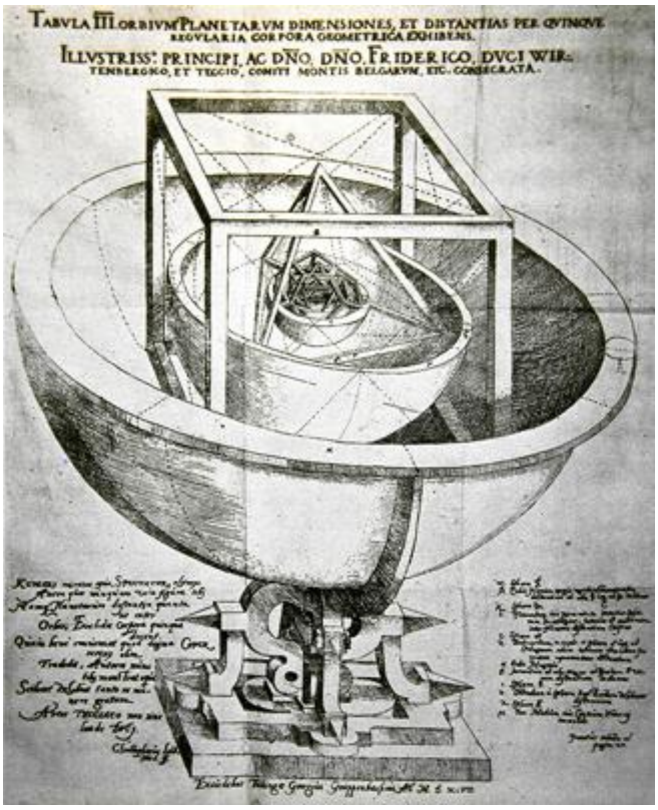


Foto 3. Modelo cosmológico de Kepler basado en los sólidos platónicos e inspirado en los modelos de Leonardo. Grabado de la obra de Kepler *Mysterium Cosmographicum* (1596). Biblioteca Universitaria de Basilea.

La especial geometría de los sólidos platónicos basada en sus particulares características; su estética, y su simbología vinculada a lo místico y a lo cósmico para dar respuesta a las preguntas de los hombres; ha fascinado a todas las civilizaciones. Recoger estos aspectos en la enseñanza de la Matemática no solo contribuye a una imagen más humana de la ciencia sino también, en muchas oportunidades, colaboran a ilustrar formas de pensar matemáticamente problemas.

3. ACERCA DEL MUSEO INTERACTIVO IMAGINARIO

En este apartado se presentará el *Contexto de implementación de la propuesta* y una *Descripción de las actividades desarrolladas* hasta el momento en dicho Museo que sirven de inspiración para la propuesta que se presentará a continuación en este trabajo.

3.1. Contexto de implementación de la propuesta

La UNGS posee un Centro Cultural desde el año 2003, el cual se encuentra ubicado en la localidad de San Miguel, en el conurbano de la provincia de Buenos Aires, República Argentina. Dentro de este CC funciona un Museo Interactivo de

Ciencia, Tecnología y Sociedad llamado Imaginario. Este Museo está estructurado, por un lado, en base a módulos interactivos -artefactos lúdicos generalmente grandes- organizados en salas permanentes y por el otro, posee una sala de exposiciones temporarias, talleres y un Laboratorio de Ciencia. El Museo Imaginario es un espacio lúdico dedicado a la popularización de la ciencia.

La propuesta educativa de “Imaginario” consiste de visitas guiadas, programas de comunicación pública de la ciencia y actividades itinerantes. Para este museo, lo fundamental de su misión y lo que orienta todos sus objetivos, es el tipo de interacción que se da con los visitantes. Es así como es prioritaria la participación de las personas, no sólo en la interacción física con los módulos interactivos de las salas o con el material didáctico de valijas, sino en la reflexión que estos materiales quieren provocar. Estos módulos interactivos ofician de excusas para discutir en torno a un fenómeno, donde el mismo fenómeno tampoco es lo crucial, sino la actitud de reflexión en torno a temas de la ciencia. De esta manera la formulación de inquietudes, preguntas y reflexiones pasan a primer plano, más allá del tema científico abordado.

El Museo posee ocho salas y cuatro talleres. Uno de estos talleres está vinculado a la Geometría y el arte a través del Origami y es el que especialmente se vincula con este trabajo.

Las actividades son administradas por guías animadores científicos, estudiantes o graduados de la UNGS, generalmente de los Profesorados Universitarios en Matemática y/o en Física y de las carreras de Ingeniería Industrial o Licenciatura en Ecología. Los guías reciben una formación inicial de 3 meses, con 50 horas de duración, de carácter teórico-práctico.

3.2. Descripción de las actividades desarrolladas

Como se describió anteriormente, el Museo Imaginario posee dentro de sus visitas guiadas, actividades en salas con módulos interactivos y actividades tipo taller, donde se desarrolla alguna actividad manual con el objetivo de reflexionar sobre algún contenido. Hasta el momento hay talleres de Materiales Granulares (Física), Geometría y Origami (Matemática), Holocausto-Shoá y Dictadura Argentina (Ciencias Sociales).

La temática tratada en el Taller de Geometría y Origami es sobre poliedros y generalmente se lo suele denominar con ese nombre: “Poliedros”. El mismo se desarrolla en un aula, con grupos de no más de 20 personas. El material que se utiliza es una obra artística de Laura Azcoaga, docente de Origami de reconocimiento nacional no solo por su obra y docencia sino también por sus publicaciones y participación en organizaciones de origami. La obra utilizada está realizada en cartón con azulejos pintados de cartón laminado y cada objeto representa distintos poliedros. Estos materiales pueden ser contemplados por los visitantes y para su manipulación hay algunas reproducciones en carta pesta (ver fotos 4 a 25). Por otro lado hay papeles de colores (tipo taco o reutilizados: de revistas, pósters, folletos, etc.), generalmente cuadrados, para la realización de piezas de origami modular sencillas.

El taller suele durar 30 minutos y se realiza dentro de las visitas guiadas, las cuales duran dos horas y media para el público escolar y generalmente menos para el público que no asiste en grupo. El público del Museo es variado, desde niños de 3 años (que pueden ser de Educación Especial) hasta ancianos. El público más habitual de esta propuesta didáctica es el escolar del nivel secundario, pues con él es posible plantear ciertas discusiones acerca del contenido matemático trabajado en el taller.

A continuación se describirán dos de las actividades vinculadas a poliedros regulares que desarrolla actualmente el Museo. Una es la desplegada en el taller que se puede escoger dentro las visitas guiadas y la otra es una de las actividades de la Valija Didáctica de Matemática del Sub Programa Valiciencia, del Programa Imaginario va a la Escuela, que suele desarrollarse en el contexto del aula y también es de tipo taller.

El programa Valiciencia trabaja fundamentalmente con el nivel secundario y la Valija Didáctica de Matemática desarrolla actividades que no pretenden abordar todos los contenidos del nivel, sino aportar algunas actividades innovadoras sobre algunos de los contenidos del diseño curricular actual. Es así como se pueden encontrar actividades relacionadas con la geometría: “Armando triángulos”, “Baldosas” (que se utilizará como insumo en este trabajo) y “Rompecabezas en 3D”. Entre las actividades relacionadas con Probabilidad se pueden encontrar: “En el blanco”, “Lanzamiento de un dado” y “Carreras de dados”. Entre las actividades relacionadas con los campos numéricos están: “Dominó de fracciones”, “Embaldosando el aula” y “La Matemática es bella y ¿te puede decir quién lo es?”. Por último; en las actividades relacionadas con la modelización se encuentra “Embotellando el agua”.

Las salas del Museo (con módulos interactivos o talleres) poseen un guión orientador para los guías animadores científicos que coordinan las visitas guiadas. Las valijas didácticas incluyen un cuadernillo de actividades para los estudiantes con recomendaciones para el docente. A continuación se describirá lo que actualmente se desarrolla en el Museo en torno al tema de poliedros regulares a partir de estos materiales.

El guión de la sala taller de Poliedros tiene un objetivo amplio que abarca aspectos de la geometría en general. En las actividades se pretende una vinculación con la Filosofía y reflexiones amplias sobre el uso de la Matemática y más específicamente de la geometría, abordando temas como cuerpos, figuras, espacio, convexidad y concavidad.

El taller propone la exploración de objetos (cuerpos geométricos construidos por una artista, Laura Azcoaga, que trabaja con origami) y, luego, su caracterización. De esta manera se recorren conceptos como figura y cuerpo geométrico, poliedros, elementos de un polígono (lados, vértices) y un poliedro (cara, vértices, aristas), convexidad y concavidad, poliedros convexos y poliedros regulares. Se distingue entre los objetos que se presentan en el espacio físico y los que se presentan en el espacio geométrico. Si surge curiosidad en los visitantes se hacen algunos comentarios sobre los cuerpos estrellados.

Otra actividad que se propone en el taller es el trabajo con origami. Aquí se propone la construcción de poliedros regulares, generalmente del cubo con módulos sonobe o el cubo de Paul Jackson (para detalle de esta construcción ir al Desarrollo de la Propuesta), por la sencillez de su plegado. Finalmente se hacen algunos comentarios históricos vinculados a la geometría.

Con respecto a la actividad de la Valija Didáctica de Matemática, la misma se llama Baldosas y está diseñada para el nivel secundario en el marco de una hora de clase. El material utilizado también está basado en el origami, pero en esta ocasión en baldosas y bisagras. El objetivo de esta actividad es la definición de cuerpo geométrico y poliedros regulares a partir de su caracterización, proponiendo luego la construcción de algunos con baldosas de origami.

4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Este apartado recogerá *características principales* que contextualizan la propuesta, tales como ámbito, cantidad de estudiantes y requerimientos, *objetivos*, *contenidos* y las *actividades* propiamente. El *instructivo para la construcción de las baldosas y aletas* de origami se encuentra en el *Anexo*.

Esta propuesta retoma algunos elementos de lo que actualmente se desarrolla en el taller de Poliedros del Museo Imaginario y en el programa Valiciencia, para ampliar y profundizar en el análisis de la pregunta sobre por qué son sólo cinco los poliedros regulares.

4.1. Características de la propuesta

No es el objetivo de la esta propuesta didáctica el tratamiento de todos los aspectos matemáticos involucrados con rigurosidad, tal como se hizo en el apartado *Cuestiones Matemáticas* de la segunda parte *Sólidos Platónicos*. En la propuesta se hará foco en la exploración y manipulación del material concreto (utilizando en este caso origami) para la elaboración de conjeturas y su justificación mediante pruebas y argumentos visuales que emergen de la manipulación de dicho material: los estudiantes se convencen de que sólo pueden construirse cinco poliedros regulares, es decir, elaboran la conjetura e intuyen acerca de la veracidad de la misma aunque no desarrollen la demostración matemática de dicha conjetura.

Se propone desarrollar un taller dentro de una visita guiada en el Museo Interactivo, para un grupo de 20 estudiantes de escuela secundaria, dedicándole un tiempo aproximado de media hora.

La modalidad es taller, trabajando en grupos de 3 a 4 integrantes. La actividad es conducida por un guía animador científico del Museo. Los guías ofician de "preguntones más experimentados", una suerte de educadores informales, centrados en motivar la formulación de inquietudes por parte de los visitantes y no tanto en dar las respuestas; aunque orientan en la reflexión. Esto implica que los guías estimulan a los visitantes a formularse preguntas, a veces iniciando ellos con algunas, mostrando posibles contradicciones, etc. Las respuestas están en segundo orden de prioridad. El guía orienta la construcción de respuestas por parte de los grupos, basándose en la colaboración entre todos, pero no es el objetivo primordial llegar a todas las respuestas durante la visita, sino dejar planteados posibles caminos de reflexión para arribar a la misma.

Los materiales a utilizar en el taller son:

- ✓ obra artística de Laura Azcoaga: cuerpos geométricos construidos en cartón y decorados con pintura, espejos, cartones de colores, etc. (sólo para contemplar, no se pueden manipular),

  Poliedros cóncavos:


Foto 4


Foto 5.


Foto 6


Foto 7. Poliedro estrellado de Kepler-Poinsot.

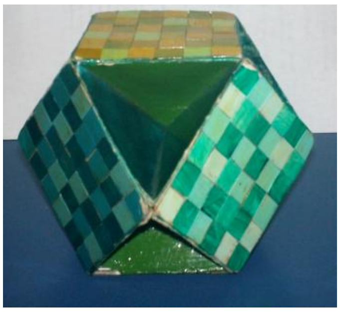


Foto 8


Foto 9


Foto 10


Foto 11

Poliedros convexos:

Foto 12. Poliedro arquimediano[1].

Foto 13. Poliedro arquimediano.

Foto 14. Poliedro arquimediano.

Foto 15. Poliedro arquimediano.

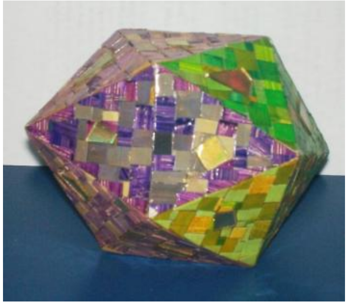


Foto 16

Foto 17

Foto 18. Dodecaedro.

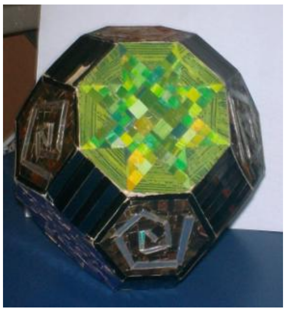


Foto 19. Poliedro arquimediano.

[1] Poliedros de Arquímedes o semirregulares: poliedros convexos (que no son ni primas ni antiprismas) cuyas caras son polígonos regulares idénticos de dos o tres tipos diferentes y en los que cada vértice recibe el mismo número de aristas. Son una extensión de los regulares al admitir más de un tipo de cara regular, pero mantienen la exigencia de iguales incidencias en los vértices. (Alsina, 2011, p.59)

- ✓ poliedros en cartapesta construidos por el Museo Interactivo Imaginario (estos se pueden manipular por los visitantes),

Foto 20. Tetraedro

Foto 21. Cubo

Foto 22. Octaedro

Foto 23. Dodecaedro

Foto 24. Icosaedro

Foto 25.

- ✓ rotafolios: papel afiche y fibrones. Se propone utilizar como rotafolios para la toma de nota de los resultados obtenidos por cada equipo que ayuden a arribar a una conclusión grupal. Los afiches con las reflexiones pueden llevarse por los cursos visitantes para trabajos ulteriores.
- ✓ baldosas (oficiarán de las caras de los poliedros) triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales y heptagonales, y bisagras (serán útiles para unir las caras metiéndose en cada baldosa, constituirán de alguna manera las aristas; en algunos casos se podrá usar cinta de papel para fijar mejor los poliedros) construidas en origami,
- ✓ fotocopias de instrucciones de construcción de baldosas y bisagras para interesados,
- ✓ papeles cuadrados: tipo taco o de papeles reutilizados (revistas, afiches, folletos), de 10 cm x 10 cm o de 15 cm x 15 cm, aproximadamente.

Se tendrá en cuenta la posibilidad de que los estudiantes puedan terminar módulos o piezas en su casa. Por ejemplo, como en la primera parte se experimenta con módulos/baldosas de polígonos regulares, se puede facilitar un instructivo para que construyan sus propios módulos para seguir o profundizar la exploración/experimentación en su casa. Por otro lado si se construye una o varias piezas (poliedros regulares) en grupo, se puede entregar un instructivo para que puedan desarrollar los propios en el hogar o en clase. Hay que tener en cuenta que las primeras piezas suelen ser imperfectas y de menor calidad que las posteriores, por lo que tener la posibilidad de ensayar y volver a construir es importante en origami.

Por lo que hace al desarrollo del taller, es ideal disponer de pizarra digital o de proyector (ambos disponible en el Museo), de manera que los estudiantes tengan en todo momento visible el esquema. De todas maneras en la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo, no será significativa la complejidad de construcción en origami, la pieza será sumamente sencilla, tal vez las variantes pueden ser más complejas.

Se resalta aquí que, también en este tema, la aparición de internet ha supuesto un antes y un después en la difusión de los materiales y técnicas. Los libros de papiroflexia, a veces escasos, caros y difíciles de obtener, han dado paso a una avalancha de materiales audiovisuales disponibles desde cualquier computadora conectada a Internet (algunas de esas páginas se pueden mostrar como ejemplo en el taller).

En resumen la propuesta de taller tiene las siguientes características:

***Nivel**:* Secundario.

★***Dificultad**:* Media.

***Tiempo estimado**:* 30 minutos.

***Cantidad de integrantes por grupo**:* 3 a 4 estudiantes.

Por ejemplo, si el grupo es de 20 estudiantes (máximo), se dividirán en 5 grupos de 4 personas (A a E) con las siguientes baldosas y sus respectivas bisagras (las cantidades exceden las necesarias para la construcción, de esta manera no se los condiciona y se incentiva la experimentación):

A. Baldosas triangulares
B. Baldosas cuadradas
C. Baldosas pentagonales
D. Baldosas hexagonales
E. Baldosas heptagonales (los grupos D y E si concluyen rápido experimentan con las baldosas triangulares también)

Si se arman 4 grupos (A a D):

A. Triangulares
B. Cuadradas
C. Pentagonales

D. Hexagonales y heptagonales (si concluyen rápido experimentan con las triangulares también)

Si se arman 3 grupos (A a C):

A. Baldosas triangulares.
B. Baldosas cuadradas y hexagonales.
C. Baldosas pentagonales y heptagonales.

Si solo se arman 2 grupos (mínimo 6 estudiantes):

A. Triangulares y cuadradas.
B. Pentagonales, hexagonales y heptagonales.

Se ha decidido que la distribución sea de esta manera pues se considera que para garantizar la participación plena de cada estudiante en la discusión de su grupo, este no debe superar los cuatro integrantes. Por otro lado, por el tiempo que se dispone, el taller debe ser desarrollado por al menos seis estudiantes en dos grupos, de manera de poder abordar todas las situaciones y luego compartir las conclusiones.

La distribución del tipo de baldosas está vinculada a los posibles ensayos que pueden realizar con ellas. Es así como se considera que las baldosas triangulares presentan mayor variedad de posibilidades (de hecho se construyen tres poliedros regulares con caras triangulares). Por otro lado se limita el tipo de baldosas hasta las heptagonales por la complejidad que implica su construcción, aunque la misma a priori no debe ser realizada por los integrantes del taller, y porque las utilizadas ya ayudan a predecir qué sucederá con polígonos regulares con un número mayor de lados. Cabe destacar que con la utilización de otros materiales tal vez no es necesario obviar polígonos con más lados; en este caso particular se usa baldosas de origami pero podrían ser de cartón o de otro material como las utilizadas en el Polydron[2]. En Martinez (2011) se puede ver una propuesta desarrollada con este material.

✋***Seguridad****:* Las piezas (baldosas y bisagras) están debidamente construidas para que los estudiantes no sufran ningún tipo de daño. Sin embargo sería conveniente que se tenga cuidado con los bordes y puntas de los papeles y de las estructuras.

4.2. Objetivos de la propuesta

Los objetivos estarán divididos en objetivos centrales y objetivos secundarios, teniendo en cuenta además distinguir aquellos puramente vinculados a aprendizajes

[2] El Polydron es un material didáctico formado por un conjunto de polígonos de distintos tamaños realizados en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares, octógonos regulares.

matemáticos de aquellos más generales. Por otro lado, se han redactado propósitos docentes para los guías animadores científicos. Se ha tenido en cuenta para la formulación, el decálogo del Profesor Antonio Ledesma López, miembro de la Asociación Española de Papiroflexia, citado en Hans Martín (2004).

Los **objetivos centrales** que se pretende alcancen los estudiantes son:

- Tomar conciencia de la imposibilidad de construir más de cinco sólidos platónicos.
- Utilizar los conceptos de regularidad y de ángulo poliedro en la construcción de poliedros.
- Construir en forma colaborativa estructuras (en este caso poliedros).

Objetivos secundarios:

- Conocer los elementos básicos de la geometría del plano y del espacio: punto, recta, polígono, poliedro, elementos de las figuras (lados y vértices) y de los cuerpos geométricos (caras, aristas y vértices).
- Desarrollar la capacidad para interpretar una nueva simbología en instrucciones dadas en forma de gráficos, planos y diagramas.
- Desarrollar la visión espacial asociada a las estructuras geométricas.
- Valorar la interrelación entre la actividad manual y la intelectual.
- Desarrollar habilidades manuales, especialmente la psicomotricidad fina.
- Conocer el origen histórico de los sólidos platónicos.
- Valorar la utilidad del trabajo en equipo.

Los **propósitos** del docente son:

- Fomentar la capacidad para hacer preguntas.
- Facilitar la comprensión de conceptos geométricos.
- Favorecer la percepción espacial.
- Estimular el aprecio por la precisión en el trabajo manual requerido en el plegado de los módulos.
- Incentivar el aprecio de la potencia de la construcción a base de módulos reutilizables en estructuras diferentes.
- Desarrollar la fantasía y la creatividad a través de lo lúdico.
- Estimular el aprecio de la belleza ligada a regularidades.

4.3. Contenidos de la propuesta

☑***Tema****:* Poliedros regulares.

Contenidos previos*:* cuerpo geométrico y sus elementos (caras, aristas y vértices), figura geométrica y sus elementos (lados y vértices), polígono.

Contenidos*:* poliedros cóncavos, poliedros convexos, poliedros regulares, polígonos regulares.

Contenidos relacionados*:* Geometría plana (en particular, cuestiones relacionadas con polígonos regulares).

4.4. Actividades de la propuesta.

Actividades de la propuesta: En este apartado se enuncian las actividades que se desarrollan con los visitantes en el taller, básicamente divididas en tres partes que funcionan como introducción, desarrollo y cierre del taller.

Actividad 1: Cuerpos, figuras y espacio. Convexidad y concavidad. (tiempo estimado: 10 minutos). Se propondrá la exploración de los objetos del taller (cuerpos geométricos construidos por una artista, Laura Azcoaga, que trabaja con origami y otros hechos en cartapesta por el Museo, que permiten su manipulación, ver fotos 4 a 25) y se intentará caracterizar algunos de ellos, identificando otros ejemplos en la vida cotidiana.

Las conclusiones pueden en algunos casos salir naturalmente, en otros casos tal vez necesiten el incentivo del guía animador científico, esto depende de las características del grupo. Para ello en la contemplación y manipulación el guía podrá realizar algunas de las siguientes preguntas según considere necesario: ¿Qué observan?, ¿Qué es un cuerpo geométrico?, ¿Qué es un poliedro?, ¿Qué les llama la atención de estos cuerpos?, ¿Cómo describirían estos poliedros?, ¿Qué elementos poseen?, ¿Qué características tienen?, ¿Cuál es la diferencia entre estos cuerpos? (mostrando algunos cóncavos y algunos convexos) ¿Cómo son sus caras?, ¿Qué pasa con los vértices de cada poliedro?, ¿Qué objetos de la vida cotidiana se parecen a estos cuerpos geométricos?, ¿Cuáles poseen polígonos regulares cómo caras?, ¿Cuáles de estos tienen todas las caras iguales?, ¿Cuáles de estos reciben el mismo número de caras en cada vértice del poliedro?, ¿Saben cómo se llaman estos poliedros?, ¿Creen que puede haber más que los que aquí observamos?

Podemos suponer que el público elegido para esta propuesta didáctica (estudiantes de secundario) puede rápidamente recordar durante la actividad los elementos de una figura geométrica y en particular qué es un polígono, y los elementos de un cuerpo geométrico: caras, aristas, vértices.

Si preguntamos a los visitantes qué es un poliedro tal vez algunos puedan responder que es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos, y tienen aristas rectas que articulan estas caras y vértices donde concurren las aristas. Tal vez utilicen otros términos menos precisos y será necesario indagar qué entienden por cuerpo geométrico y por cada uno de estos elementos.

De esta manera se recorrerán conceptos como figura y cuerpo geométrico, poliedros, elementos de un polígono (lados, vértices) y un poliedro (cara, vértices, aristas), convexidad y concavidad, poliedros convexos y poliedros regulares. En este punto el guía puede preguntar si saben por qué se llaman sólidos platónicos y si les parece curioso lo que ven. También el guía puede preguntar si consideran que para otras personas el tema también podría ser interesante para indagar, realizando algunos comentarios históricos sobre el interés de su estudio, como los mencionados en el apartado *Un poco de historia*.

Se distinguirá entre los objetos que se presentan en el espacio físico y los que se presentan en el espacio geométrico a través de los ejemplos de la vida cotidiana y la diferencia entre los objetos concretos y los abstractos. Si surge curiosidad en los visitantes se harán algunos comentarios sobre los cuerpos estrellados.

Actividad 2: Construcción de poliedros regulares con origami (tiempo estimado: 15 minutos). Luego de una breve introducción a qué es el origami se invitará a los participantes a explorar materiales construidos con esta técnica. Primeramente se recordarán las condiciones que deben cumplir los ángulos poliedros de los poliedros regulares, las mismas pueden estar en un pizarrón, pizarra interactiva, rotafolio, etc. y pueden arribarse a las mismas a través de las siguientes preguntas y acciones orientadoras: ¿Qué es un poliedro regular?, ¿Qué es un ángulo poliedro?, ¿Con cuántas caras se puede formar un ángulo poliedro? (experimentar con las baldosas), ¿Qué condición cumple la suma de los ángulos de las caras que forman un ángulo poliedro? (probablemente se arribe a esta conclusión luego de intentar formar vértices con las baldosas para construir poliedros regulares).

I Los ángulos poliedros de un poliedro regular deben tener como caras polígonos regulares iguales.

II La suma de los ángulos de las caras concurrentes en el vértice de un ángulo poliedro debe ser siempre menor que 360º. Se trabajará con baldosas y bisagras construidas en papel para discutir las posibilidades de construcción de poliedros regulares, en grupos tal como fue indicado en las Características de la propuesta.

A continuación se presentan posibles ensayos de los estudiantes para obtener ángulos poliedros y poliedros regulares. Observar que, como estas piezas son menos estables; además de la utilización de bisagras las construcciones obtenidas están reforzadas con cinta adhesiva.

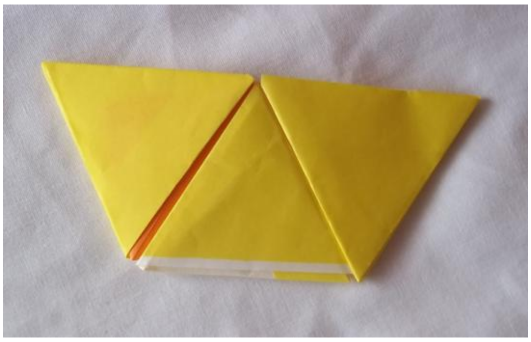


Foto 26. Tres baldosas triangulares forman un ángulo de 180º.

Preguntas del guía al grupo que trabaja con estas baldosas y/o al grupo total del taller: ¿Qué triángulos estamos usando y por qué?, ¿Cómo son los ángulos de un triángulo equilátero?, ¿Cuál es su medida?, ¿Se puede formar un ángulo poliedro con dos triángulos?, ¿Cuál es la medida de un ángulo poliedro de tres triángulos?

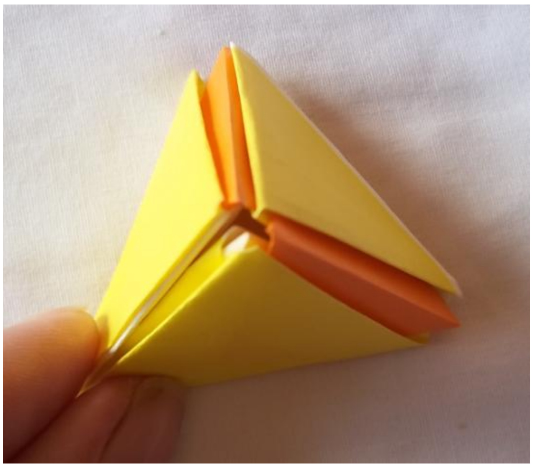


Foto 27. Vértice formado con tres baldosas triangulares.

Consigna del guía: Intenta construir un poliedro usando este vértice.

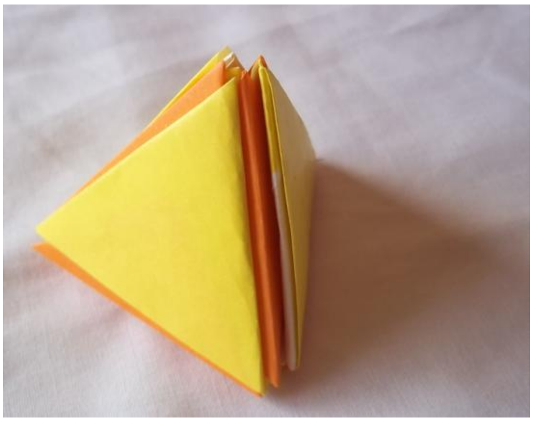


Foto 28. Tetraedro.

Preguntas del guía: ¿Cómo se llama este poliedro regular y por qué?

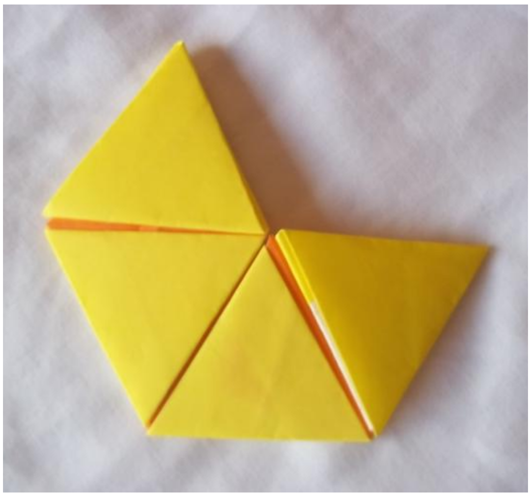


Foto 29. Cuatro baldosas triangulares forman un ángulo de 240º.

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con cuatro triángulos?, ¿Cuál es la medida de un ángulo poliedro de cuatro triángulos?

Foto 30. Vértice formado con cuatro baldosas triangulares.

Consigna del guía: Intenta construir un poliedro usando este vértice.

Foto 31. Poliedro no regular construido con 6 baldosas.

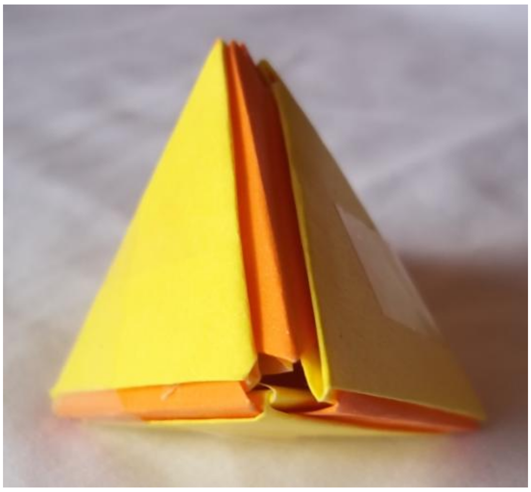


Foto 32. Observar que en un par de vértices convergen tres caras y en los otros tres vértices convergen cuatro caras (foto anterior), por lo que no es un poliedro regular.

Preguntas del guía: ¿Este poliedro es regular y por qué?

Foto 33. Octaedro.

Preguntas del guía: ¿Este poliedro es regular y por qué?, ¿Cómo se llama y por qué?

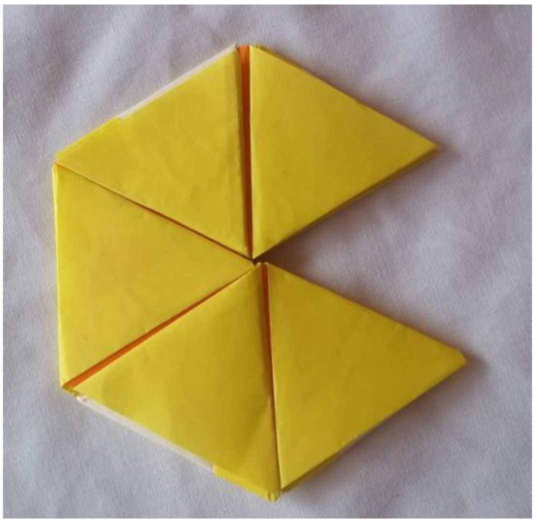


Foto 34. Cinco baldosas triangulares forman un ángulo de 300º.

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con cinco triángulos equiláteros?, ¿Cuánto mide?

Foto 35. Vértice formado con cinco baldosas triangulares.

Consigna del guía: Intenta construir un poliedro usando este vértice.

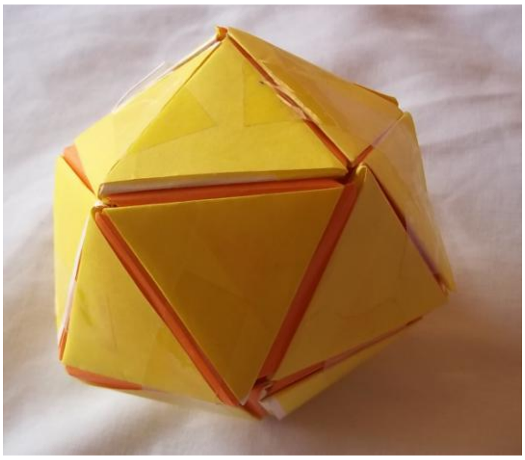


Foto 36. Icosaedro.

Preguntas del guía: ¿Este poliedro es regular y por qué?, ¿Cómo se llama y por qué?, ¿Es otro posible?

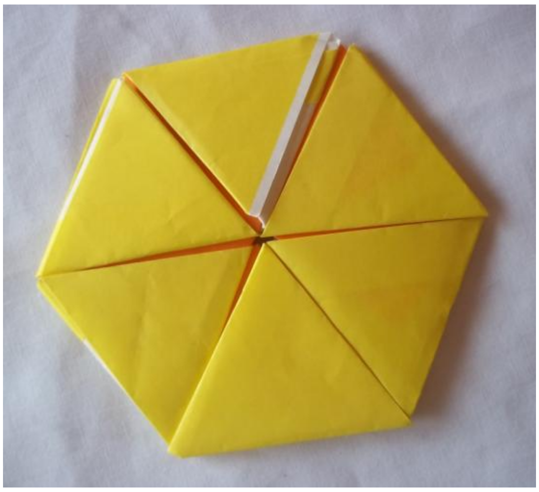


Foto 37. Seis baldosas triangulares forman un ángulo de 360º, o sea que se aplana y no se puede formar un ángulo poliedro.

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con seis triángulos equiláteros?, ¿Cuánto mide el ángulo formado?

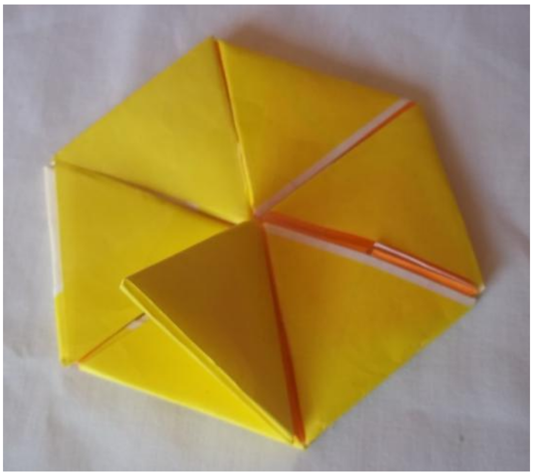


Foto 38. Siete baldosas triangulares superan los 360º.

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con siete triángulos equiláteros?, ¿Cuánto mide?

A continuación algunas fotografías para observar los posibles ensayos de los estudiantes para obtener ángulos poliedros con baldosas cuadradas, se recuerda que al menos se tienen que utilizar 3 baldosas.

Foto 39. Tres baldosas cuadradas formando un ángulo de 270º.

Preguntas del guía al grupo que trabaja con estas baldosas y/o al grupo total del taller: ¿Qué figura representan estas baldosas?, ¿El cuadrado es un polígono regular?, ¿Puede ser cara de un poliedro regular?, ¿Cómo son los ángulos de un cuadrado?, ¿Cuál es su medida?, ¿Se puede formar un ángulo poliedro con dos cuadrados?, ¿Cuál es la medida de un ángulo poliedro de tres cuadrados?

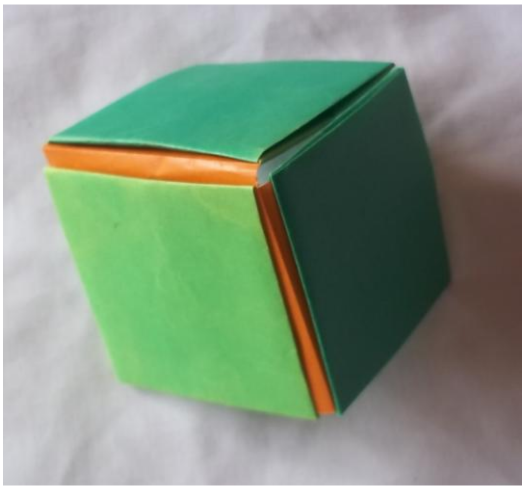


Foto 40. Vértice formado con tres baldosas cuadradas.

Consigna del guía: Intenta construir un poliedro usando este vértice.

Foto 41. Cubo.

Preguntas del guía: ¿Este poliedro es regular y por qué?, ¿Cómo se llama y por qué?, ¿Es otro posible?

Foto 42. Cuatro baldosas cuadradas ya se aplanan, forman un ángulo de 360º, por lo cual no constituye un ángulo poliedro.

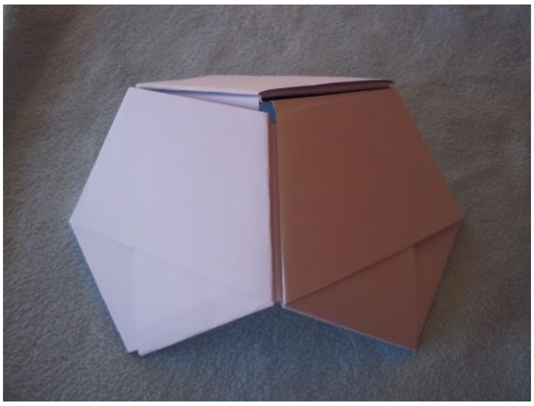
Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con cuatro cuadrados?, ¿Cuánto mide el ángulo formado?

A continuación posibles ensayos de los estudiantes para obtener ángulos poliedros con baldosas pentagonales.

Foto 43. Tres baldosas pentagonales suman menos de 360º, fácilmente se observa que cuatro baldosas ya superan los 360º.

Preguntas del guía al grupo que trabaja con estas baldosas y/o al grupo total del taller: ¿Qué figura representan estas baldosas?, ¿Puede ser cara de un poliedro regular?, ¿Cómo son los ángulos de un pentágono regular?, ¿Cuál es su medida?, ¿Se puede formar un ángulo poliedro con dos pentágonos regulares?, ¿Cuál es la medida de un ángulo poliedro de tres pentágonos?

Foto 44. Aquí se puede apreciar el vértice.



Consigna del guía: Intenten construir un poliedro usando este vértice.

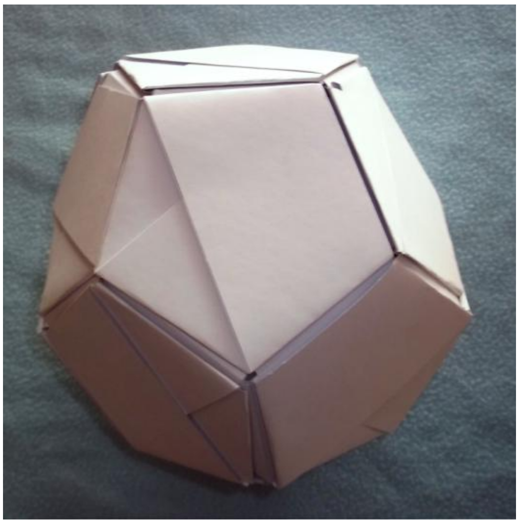


Foto 45. Dodecaedro

Preguntas del guía: ¿Este poliedro es regular y por qué?, ¿Cómo se llama y por qué?, ¿Es otro posible?

Ensayo con baldosas hexagonales.

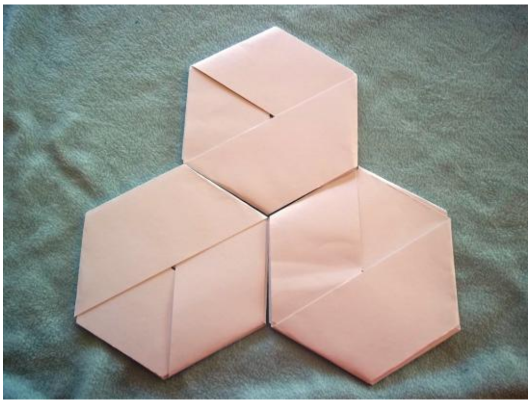


Foto 46. Ensayo con tres baldosas donde fácilmente se puede observar el aplastamiento del vértice, ya que los vértices involucrados de los tres hexágonos regulares suman 360º.

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con dos hexágonos regulares?, ¿Y con tres?, ¿Cuánto mide el ángulo interior de cada hexágono regular?, ¿Y el ángulo que suman los tres hexágonos regulares?

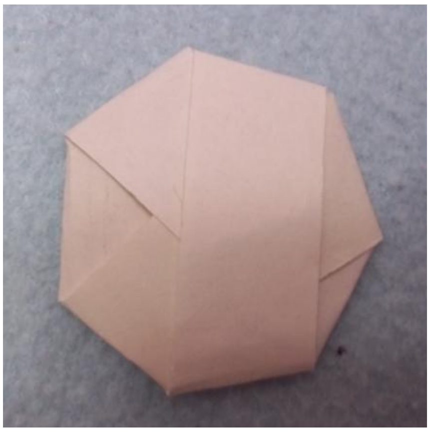


Foto 47. Heptágono regular

Preguntas del guía: ¿Se puede formar un ángulo poliedro con dos heptágonos regulares?, ¿Y con tres?, ¿Cuánto mide el ángulo interior de cada heptágono regular?, ¿Cuánto mide el ángulo formado por tres heptágonos regulares?. ¿Qué sucederá si usamos octógonos regulares?, ¿Y si usamos eneágonos regulares?

Una vez arribado a los cinco poliedros regulares (por exploración lúdica antes descripta), y frente a la imposibilidad de construir otros con las baldosas, nos enfrentamos a las siguientes preguntas: Que hay cinco está claro y los visitantes ya habrán visto cómo son, pero ¿no podría haber más? ¿O son sólo cinco?, y si lo son ¿por qué son sólo cinco?
Se realizará también una reflexión matemática, luego de la reflexión manual, de la imposibilidad de construcción de más de cinco poliedros regulares, que incluya la enunciación de conjeturas y argumentos para la justificación de las mismas, las cuales podrían pensarse como pistas de cómo estructurar la demostración matemática.
Recordando que en un vértice deben converger al menos 3 polígonos regulares iguales, se puede construir con los estudiantes la siguiente tabla para ayudar a la reflexión y favorecer la presentación de los resultados de cada grupo. En esta instancia se propone que cada grupo explique cuántos poliedros armó con las piezas disponibles y por qué no hay otros distintos de los que ellos armaron.

Baldosa	Medida de ángulo interior de la cara	Suma de los ángulos de 3 baldosas que convergen en un vértice	Suma de los ángulos de 4 baldosas que convergen en un vértice	Suma de los ángulos de 5 baldosas que convergen en un vértice
Triángulo equilátero				
Triángulo equilátero				

Triángulo equilátero				
Cuadrado				
Hexágono regular				
Heptágono regular				
Octógono regular				
Eneágono regular				

Por último, si el tiempo lo permite, se enseñará un módulo sencillo para la construcción de un cubo de origami, llamado Cubo de Paul Jackson. Difiere de la forma con baldosas en que aquí los seis módulos ya tienen sus aletas incorporadas, por lo que no hacen falta bisagras. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes puedan llevarse un poliedro regular de fácil plegado como souvenir y que los motive a construir otros con origami. Para detalle sobre este plegado ver Anexo.

Actividad 3: Conclusiones (tiempo estimado: 5 minutos). Se espera que los visitantes puedan expresar con sus palabras qué entienden por poliedros regulares, cuántos son y por qué.
Preguntas del guía animador científico para el cierre: ¿Qué vimos en este taller? ¿Qué les gustó más? ¿Cómo le contarían a alguien que no vino qué hicimos?, ¿Cómo definirían un poliedro regular?, ¿Cuántos son y por qué?

5. FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

En este apartado se fundamentará la propuesta presentada para desarrollar en el Museo, recogiendo elementos teóricos de la Educación Matemática y las virtudes didácticas del Origami.

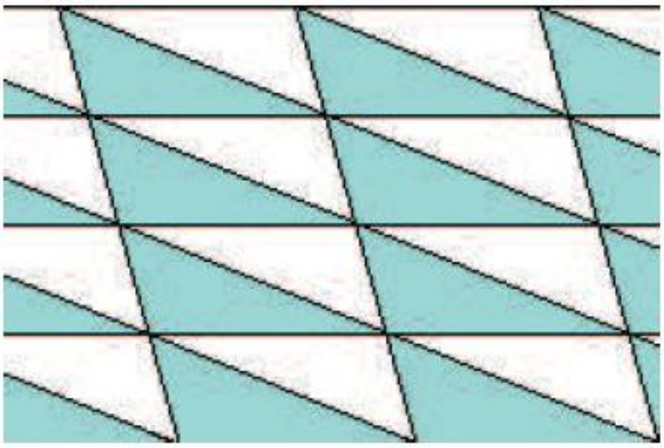
5.1 Elementos teóricos de la Educación Matemática

El objetivo de esta sección es fundamentar desde la Educación Matemática la propuesta didáctica presentada a través de su vinculación con conceptos como pruebas visuales, razonamiento visual, demostraciones empíricas, procesos de exploración-conjetura-demostración.

Prueba Visual

El término *prueba visual* hace referencia a figuras o representaciones pictóricas, pudiéndose también considerar las construcciones con origami, que permiten expresar alguna propiedad matemática o derivar resultados matemáticos, mediado por un proceso de visualización. En este se entiende por visualización al proceso por el cual un individuo reconoce en el registro de acciones y representaciones las reglas con las que fueron construidas y así extrae la información que le permite el descubrimiento y comprensión de la noción matemática involucrada. Es decir, sabe qué se está haciendo y por qué, comprende las reglas implícitas en las acciones y representaciones que está visualizando. A continuación un ejemplo de prueba visual sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Una mirada atenta a la figura será suficiente para descubrir un interesante patrón geométrico:



Torres Alcaraz (2004), p.2

Giardino (2010) aporta que las inferencias informales del proceso de visualización toman la forma de transformaciones. Sin embargo, en el rango de todas las posibles transformaciones solo algunas de ellas son legítimas dentro de la teoría considerada. En el caso de las pruebas visuales, solamente cuando el receptor de la misma conoce qué manipulaciones son legítimas y cuáles no lo son, le resultará concluyente la prueba visual.

En la propuesta presentada, luego de las primeras acciones de experimentación, se garantiza la comprensión de las reglas a través de la enunciación explícita de los condicionantes en la construcción de los poliedros regulares. En este caso en particular, se puede ver cómo el estudiante a partir de la manipulación con las baldosas comprende que respetando la definición de poliedro regular (poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares y convergen en cada vértice el mismo número de caras) la suma de los ángulos de los polígonos que convergen en el vértice tiene que ser menor a 360º para formar un "buen vértice". Así descubre que no son infinitos estos poliedros, y aún más, que puede explorar rápidamente con la misma técnica todas las posibilidades. Asimismo, mediante la manipulación los estudiantes van construyendo las hipótesis de que para cada tipo de polígono regular (en realidad solamente en relación con el polígono con el que está trabajando su grupo) solo pueden construirse los que ellos hicieron: el que trabaja con triángulos equiláteros se convence de que sólo se pueden construir tres poliedros regulares con ese polígono regular, el que trabaja con cuadrados se convence de que solo se puede construir el cubo y así con cada polígono. A la hora de compartir sus resultados con los otros grupos podemos decir que se espera que presenten una prueba visual a sus compañeros para convencerlos a ellos también, y además, como las reglas son compartidas, todos deberían poder comprender la prueba.

En Torres Alcaraz (2004) se presenta una reflexión sobre las pruebas visuales, siguiendo lo desarrollado por Borwen, y Jörgenson (2002), quienes establecen la necesidad, pero quizá no suficiencia, de condiciones que debería incluir una prueba visual para ser aceptada como prueba matemática:

> Confiabilidad: que los medios subyacentes para alcanzar la prueba sean confiables, y que el resultado no varíe con cada inspección.
> Consistencia: que los medios y el fin de la prueba sean consistentes con otros hechos, creencias o pruebas conocidas.
> Repetibilidad: que la prueba la puedan confirmar o repetir otros. (p.19)

En el caso particular de la propuesta de este trabajo podemos decir que la misma cumple con las condiciones mencionadas pues cada vez que algún estudiante repite la inspección el resultado no varía. Puede llegar a encontrar consistencia con conocimientos que ya tenga adquiridos, como por ejemplo los de teselación: saber que se puede embaldosar con triángulos, cuadrados, hexágonos.

Al igual que Torres Alcaraz (2004), en este trabajo se considera que en la actualidad aún prevalece una actitud antivisual en referencia a la matemática escrita para la enseñanza, por ejemplo en los manuales.

> Autores como Bourbaki privilegian los aspectos estructurales de la matemática en detrimento de la comprensión intuitiva. Uno de los problemas derivados de este punto de vista es la identificación de la matemática con una de sus facetas. Se le caracteriza, por ejemplo, como una ciencia deductiva en la que el estándar de rigor es la demostración lógica y se le identifica con el método axiomático. De la historia de las matemáticas se resaltan sólo los aspectos que refuerzan el punto de vista adoptado (pp.21-22).

La inclusión de las pruebas visuales en la enseñanza de la matemática podría resultar enriquecedor para la construcción de la imagen de la matemática como una ciencia en constante evolución. Teniendo en consideración que la inclusión de las pruebas visuales debiera atender a los siguientes aspectos:

- No todo conocimiento en matemática se descubre por medio de la inspección y/o análisis de una figura o a través de la evidencia de los sentidos.
- Para aprehender el contenido matemático de una prueba visual es necesario hacer un trabajo de interpretación de aquello que se presenta a nuestra contemplación.
    - Esta interpretación requiere de un observado activo capaz de realizar procesos[3] y habilidades[4] matemáticas para reconocer las relaciones internas del objeto visto.

Doniez (2000) resume en una ponencia que la Matemática integra dos aspectos: el Formal y el Informal. La parte Formal es el corazón de las “Demostraciones” y la parte Informal convoca a figuras, diagramas, esquemas (o construcciones en papel en

[3] Bishop (1989) establece que esta actividad de visualización se realizará según dos tipos de procesos: el procesamiento visual y la Interpretación de información figurativa.

[4] Del Grande (1990) define una serie de habilidades que utilizarían los individuos para la creación y procesamiento de las imágenes visuales.

este caso) y usualmente ha estado al servicio de la parte formal. En ese mismo trabajo menciona palabras de Miguel de Guzmán en Prólogo a *El Rincón de la Pizarra*: “En las imágenes visuales suelen estar sugeridos, cuando no plenamente representados con exacta fidelidad, todos los elementos necesarios para construir con todo rigor formal, si es oportuno y así se desea, las demostraciones de los procesos que representan […].” Estas imágenes visuales muchas veces constituyen en sí mismas demostraciones.

Se puede entender a las pruebas visuales como una “demostración sin palabras”, ya que las mismas se estructuran en base a un dibujo o diagrama (o construcciones de origami en este caso) y algunas precisiones matemáticas de tipo simbólico que guíen la lectura de los elementos visuales presentados (Doniez, 2000):

> Lo que se intenta en cada DSP[5] es ayudar al observador a VER por qué un enunciado particular puede ser verdadero, y también a VER cómo podría comenzar a probarlo. Siempre el énfasis está puesto en dar las pistas visuales justas como para estimular en el observador su pensamiento matemático. (p.6)

En el cuarto apartado, en Actividades de la propuesta, se puede observar en las fotografías 26 a 46 cómo los ensayos con baldosas pueden ayudar al estudiante a pensar matemáticamente el problema

Razonamiento visual

Meavilla Seguí (2005) define como *razonamiento visual* el uso de representaciones gráficas (diagramas, modelos geométricos, etc.) como método para pensar, hacer y entender Matemáticas. Presenta a modo de ejemplo cómo Pitágoras y sus discípulos, los pitagóricos, allá por el siglo VI a. C., descubrieron interesantes relaciones numéricas valiéndose de una técnica sencilla e ingeniosa: se sirvieron de piedrecillas para ver los números y manipularlos físicamente. De este modo comprobaron, por ejemplo, que la suma de los sucesivos números impares, empezando desde el 1, es un número cuadrado.

Por otro lado, Meavilla Seguí (2005) presenta como uno de los inconvenientes del razonamiento visual, que muchos estudiantes piensan que los aspectos visuales de un concepto o de un procedimiento son algo periférico a él y prefieren las descripciones analíticas de una propiedad a las descripciones visuales. Algunos estudiantes suelen mostrarse reacios al uso del razonamiento visual en las demostraciones matemáticas. Una de las causas puede ser debido a la convicción de que una demostración algebraica es más rigurosa y general. Esta convicción puede basarse en los éxitos obtenidos por los estudiantes al memorizar fórmulas y procedimientos algebraicos. Además, los profesores de Matemáticas suelen tener un marcado sesgo algebraico, adquirido en los estudios universitarios, que transmiten a sus estudiantes.

Este autor menciona la recomendación de que en la enseñanza de las Matemáticas se haga hincapié en la legitimidad del enfoque visual en las demostraciones y en la resolución de problemas. De este modo, se podría desterrar la creencia de que una demostración visual no es una demostración matemática.

La propuesta presentada hace uso del razonamiento visual, ya que utiliza modelos geométricos en origami para primeramente ayudar a pensar los condicionantes para resolver el problema, invitar a “hacer” construyendo los poliedros regulares y

[5] Demostraciones Sin Palabras.

finalmente comprendiendo por qué son solo cinco este tipo de cuerpos geométricos. Por otro lado se tiene presente que según las características de los estudiantes, algunos se pueden sentir más o menos cómodos con este enfoque, pero seguramente la mayoría se sentirá capaz de abordar el desafío. Es importante tener en cuenta que la diversidad de oportunidades ayuda a garantizar el aprendizaje para todos, y no se debe pretender que un solo tipo de actividad satisfaga las necesidades de todos los estudiantes, pues estos están ligados con sus conocimientos y experiencias previas, aptitudes, etc. Para más sobre esto se puede leer el último apartado, *Razonamiento visual y diversidad*, de Meavilla Seguí (2005) en donde amplía sobre orientación cognitiva de los estudiantes.

Corrientes filosóficas de la Matemática y Pruebas Visuales

Como se mencionó en la introducción, un aspecto que este trabajo tiene en cuenta es la imagen de la Matemática que se instala con las actividades de enseñanza que se escogen. La imagen de la Matemática que se forja en las actividades que diseñan en los ámbitos educativos, tanto formales como informales, está íntimamente relacionada con las corrientes filosóficas de la Matemática. Por ello, a continuación, se desarrollan brevemente dos corrientes filosóficas de la Matemática que aceptarían las pruebas visuales como demostraciones matemáticas y reconocerían el quehacer que realizan los estudiantes en el taller como matemático. Se considera que la incorporación de las pruebas visuales en las actividades educativas puede revertir la imagen negativa que tiene en general la Matemática, muchas veces asociada al uso excesivo de símbolos abstractos y de formalismos en el tratamiento de los conceptos matemáticos en detrimento de abordajes más intuitivos y visuales.

El Intuicionismo considera las matemáticas como el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos y también considera a las matemáticas como el estudio de esas construcciones mentales.

> El principio básico del Intuicionismo es que las matemáticas se pueden construir; que han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ellas haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998, p.11)

El fundador del Intuicionismo moderno es Brouwer (1881-1968), quien ha considerado que en matemáticas la idea de existencia es sinónimo de constructibilidad y que la idea de verdad es sinónimo de demostrabilidad. Decir de un enunciado matemático que es verdadero equivale a afirmar que se tiene una prueba constructiva de él, equivalentemente, afirmar de un enunciado matemático que es falso significa que si suponemos que el enunciado es verdadero tenemos una prueba constructiva de que caemos en una contradicción.

Para los intuicionistas no tienen valor las demostraciones indirectas o existenciales puras. Consideran que la única fuente de surgimiento de las ideas matemáticas, y único criterio de verdad es cierta intuición apriorística, suprasensible.

El Intuicionismo no se ocupa de estudiar ni de descubrir las formas en que la mente realiza las construcciones y las intuiciones matemáticas, sino que supone que cada persona puede hacerse consciente de esos fenómenos. La atención a las formas cómo estos fenómenos ocurren es un rasgo característico de otra corriente de los fundamentos de las matemáticas: el Constructivismo.

El Constructivismo está muy relacionado con el Intuicionismo que antes se describió, pues también considera que las matemáticas son una creación de la mente humana, y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos.

> El Constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía Activa y se apoya en la Psicología Genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar. (Ministerio Nacional de Educación de Colombia, 1998, p.11)

Este concepto de construcción de los conceptos matemáticos es muy interesante para la propuesta del trabajo, pues uno de los fines es que el estudiante pueda reconstruir su razonamiento matemático aunque no recuerde el resultado final. Es decir, es más deseable que el estudiante intuya el camino para responder por qué son sólo 5 los poliedros regulares que en sí por qué lo son o siquiera si son 5.

Cabe destacar que la posición constructivista, al poner atención a las formas en cómo el matemático logra cierta intuición sobre los objetos matemáticos, aceptaría de manera completa las pruebas visuales.

Guzmán, (2004), señala que:

> Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. (p.1)

También establece que:

> La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación que llamamos matematización, que se podría describir como sigue: se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de esas percepciones lo que es común, abstraíble y someterlo a una elaboración racional, simbólica que nos permite manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones. (p.1)

Las pruebas visuales encuadrarían dentro de una tarea de presentación que usa el matemático y que le permite explicitar un resultado matemático; logrando a través de la prueba visual una visión compacta de las relaciones entre objetos matemáticos.

Clasificación de las demostraciones

Se utilizará el término *demostración* en el sentido amplio utilizado por Rodríguez Díaz (2006), que incluye "cualquier tipo de argumento o justificación elaborado para convencer de la veracidad de una afirmación matemática" (p.22). La clasificación de las categorías de demostración sobre la que este autor trabaja distingue dos tipos:

Demostraciones de *convicción externa*: aquellas en las que la fuente principal o decisoria de convicción es un agente ajeno a la propia persona, y

Demostraciones de *convicción propia*: en las que el origen de convicción radica en la propia persona.

La propuesta didáctica de este trabajo incentiva la demostración de convicción propia ya que aunque está la presencia de un educador (guía animador científico) que orienta, los propios estudiantes son los que deben convencerse y convencer a los demás de su conjetura. Rodríguez Díaz (2006) diferencia estas demostraciones en dos tipos:

- *Empíricas*, aquéllas en las que la convicción proviene, a modo general, de la comprobación de ejemplos, experiencias físicas o sensitivas y de argumentos inductivos.
- *Deductivas*, en las que la convicción proviene, principalmente, de una argumentación lógico-deductiva. (p.23)

La propuesta didáctica de este trabajo incentiva la demostración de convicción propia empírica, ya que cada grupo trabaja con material concreto para experimentar físicamente con cada tipo de caras (polígonos regulares). Para clasificar las demostraciones empíricas Rodríguez Díaz (2006) analiza tres aspectos distintos: la naturaleza de las comprobaciones realizadas, la forma de escoger los ejemplos y, por último, la presencia o ausencia de argumentos más allá de las comprobaciones empíricas.

I. Una demostración empírica puede ser:
   - *Inductiva*, si la convicción de que la propiedad se cumple, o no, proviene de uno o varios ejemplos en los que se realizan comprobaciones empíricas como, por ejemplo, recuentos, mediciones de los elementos de los ejemplos o identificación de relaciones y propiedades matemáticas observados en los mismos.
   - *Perceptiva*, si la convicción proviene sólo de una experiencia física o sensitiva, como, por ejemplo, el reconocimiento visual de que en un ejemplo la propiedad se satisface, o explicitar la sensación de que así es sin llegar a comprobarlo por otros métodos.

II. Si centramos la atención en la forma de escoger los ejemplos, una demostración empírica la clasificamos en:
   - *Empirismo näif*, si se verifica en uno o varios ejemplos escogidos al azar o sin ningún criterio específico.
   - *Experimento crucial*, si se verifica en un ejemplo escogido de forma que sea “lo menos particular posible”.
   - *Ejemplo genérico*, si se verifica en un ejemplo al que se le da el carácter de representante de su clase.
   - *Exhaustiva*, si se verifica en todos los casos posibles.

   La categoría exhaustiva es solo aplicable en conjuntos finitos (…).

III. Por último, clasificamos una demostración empírica como:
   - *Pura* si la justificación consiste en realizar comprobaciones empíricas de que la propiedad se cumple.
   - *Con inferencia* si, a pesar de seguir basándose en ejemplos, se realizan razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas, como, por ejemplo, la utilización de propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos del ejemplo. (Rodríguez Díaz, 2006, pp.23-24)

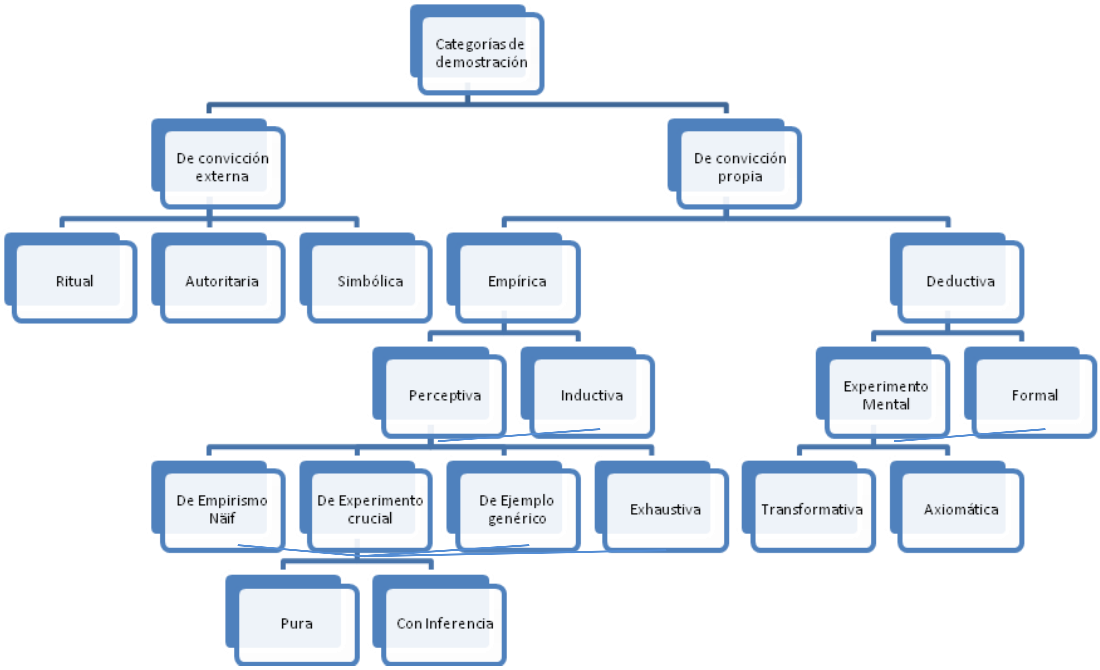


Diagrama de las categorías de demostraciones de Rodríguez (2006).

Se considera que la propuesta didáctica presentada en este trabajo promueve demostraciones de convicción propia empírica perceptiva, exhaustiva y pura, según la clasificación anterior. Son demostraciones perceptivas pues la convicción proviene en su mayor parte de la experiencia física y sensitiva de ensayar con las baldosas la construcción de poliedros regulares, favoreciendo el reconocimiento visual de si los condicionantes se satisfacen o no. Son demostraciones exhaustivas pues se analizan todos los casos posibles, cada grupo se convence de que no puede construir más poliedros regulares con las baldosas que se han facilitado, comparten el resultado con el resto de los compañeros y se convencen que no tiene sentido ensayar con polígonos regulares de más lados. Son demostraciones puras pues se realizan comprobaciones empíricas de que los condicionantes se cumplen.

Esta catalogación de las demostraciones que la propuesta didáctica promueve no excluye que se den otro tipo de demostraciones durante el transcurso de la actividad. Por ejemplo, podría ser que un estudiante desarrolle una demostración de convicción externa por no participar o no comprender las acciones de sus compañeros, y termine aceptándolas por la autoridad de ellos o del guía animador. Otro ejemplo es que un estudiante puede realizar demostraciones de convicción propia, empírica con inferencia, si aún viendo algunos ensayos con baldosas realiza razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas, utilizando las propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos.

Procesos de exploración-conjetura-demostración

Rodríguez Díaz (2006) cita a Marrades y Gutiérrez (2000):

> Las diferentes clasificaciones de demostraciones descritas en esta sección, incluida la nuestra, implícitamente asumen que los estudiantes trabajan de una forma lineal y coherente desde el principio hasta el final de la solución de un problema. Sin embargo, la realidad es, en muchos casos, diferente. Normalmente, muchos

> estudiantes comienzan realizando comprobaciones empíricas y, cuando han entendido el problema y la manera de demostrar la conjetura, continúan escribiendo una justificación deductiva. También es habitual realizar varios saltos entre métodos empíricos y deductivas o durante la resolución de un problema. (p.28)

De este modo Rodríguez Díaz (2006) amplía las clasificaciones de la demostración incluyendo el tipo de trabajo realizado en cada momento de la resolución de un problema y los diferentes saltos entre unas modalidades y otras y define:

- *Fase ascendente:* toda actividad empírica que ayuda a entender el problema, generar conjeturas o verificarlas.
- *Fase descendente:* toda actividad encaminada a construir una demostración deductiva de una conjetura realizada (p.28).

En la propuesta didáctica presentada se favorece la fase ascendente ya que, por un lado, con los primeros ensayos con baldosas se entiende el problema, cuya pregunta puede ser "¿cuántos son los poliedros regulares?". Los estudiantes pueden tener la hipótesis previa de que son pocos, muchos o infinitos; al ensayar intuyen que infinitos no parecen ser. Al construir los tres condicionantes, en base a las definiciones y experiencias empíricas ya definen el camino para resolver el problema y verificar que son sólo cinco los poliedros regulares posibles.

5.2 El Origami y la Enseñanza de la Matemática

Como se ha comentado antes, el origami (o papiroflexia) modular consiste en hacer figuras utilizando varios papeles que darán lugar a piezas individuales que se llaman *módulos*. Cada uno de estos módulos posee solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí. El taller propuesto cierra con un ejemplo de este tipo de origami aprovechando su bondad para representar cuerpos geométricos y el fácil plegado de cada módulo. "Los poliedros son la principal fuente de inspiración de esta modalidad, aunque no la única" afirma Royo Prieto (2002, p.179).

Ricotti (2012a) menciona que las posibilidades pedagógicas del origami son enormes para estudiar y/o ilustrar tanto la geometría plana como la geometría del espacio y que es fundamental que la acción del plegado no se constituya en una simple cuestión de mecánica y de repetición cuando los objetivos que se persiguen son matemáticos, sino en un proceso reflexivo con una cabal interpretación geométrica de lo que se está haciendo. En la propuesta didáctica presentada se atiende especialmente este aspecto, ya que las baldosas y bisagras de origami acuden a resolver una necesidad de reflexión práctica y física para resolver un problema matemático. El educador gestiona de esta manera la construcción de los cuerpos garantizando la enunciación de condicionantes matemáticos, con preguntas que invitan a reflexionar sobre lo que se está haciendo.

Tanto Ricotti (2012a) como i Edo (sf) en sus trabajos mencionan la relación entre el origami y la construcción con regla y compás. Ricotti menciona el trabajo de Auckly y Cleveland (1995) e i Edo, el trabajo de Royo Prieto (2010)[6]. Este último ha puesto de manifiesto la equivalencia entre el mapa de pliegues de la figura y el grafo matemático, encontrando un interesante paralelismo, al igual que Auckly y Cleveland,

[6] Royo Prieto, J. (2010) Matemáticas y papiroflexia. *Revista Sigma, Nº 21*, 175-192.

entre las reglas de plegado y las de construcción de figuras usando únicamente regla y compás.

i Edo (sf) también menciona el trabajo de Covadonga Blanco y Otero (2005), quienes defienden la utilización de las técnicas de origami en la enseñanza por la potencia que aportan a la visualización de las propiedades de los poliedros y a la experimentación.

Ricotti (2012a) menciona:

> Las posibilidades de integración son mayores aún con el origami modular, que nos ofrece un enorme campo de acción en el mundo de los poliedros; estos encuentran un nuevo modo de ser representados. Consiste en la oportunidad de contar con piezas individuales -*módulos*- que poseen "bolsillos y solapas" los cuales permiten el ensamble entre unas y otras. El plegado de cada módulo, generalmente, es una cuestión sencilla, y la forma es específica para cada figura. Si con algunos módulos se construye más de una figura en el espacio, esto tiene que ver con la amplitud de los ángulos diedros[7] que admiten (p. 17).

Por otro lado reitera que la manipulación inteligente de esos módulos con una clara imagen mental del cuerpo, sus aristas, vértices y caras, regularidades y simetrías, es muy importante no solo porque facilita la tarea sino también para evitar la mera repetición mecánica, que puede ser atractiva por el origami en sí, como en el tejido, pero no deseable si el fin es la reflexión matemática.

Hans Martín (2004) reconoce que en los niveles educativos primario y secundario es muy importante el aspecto manipulativo de la Matemática.

> […] Por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como tangram, geoplanos, puzzles, varillas, troqueles, etc. que potencian ese aspecto de hacer Matemáticas. Queremos mostrar uno de los recursos más usuales a nuestro alrededor, pero no por ello menos atractivo: el papel.
> Se considera la papiroflexia (también llamada origami por su ascendencia japonesa) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar. Todos nos hemos sentido atraídos en algún momento por ese arte. Aunque alguien piense que no es propio de personas adultas hacer figuritas de papel, seguro que en otras épocas todos hemos realizado, con verdadero deleite, aviones, pajaritas, barcos o figuras más elaboradas. El trabajar con papel, y conseguir elementos reconocibles después de realizar algunos pliegues, es una actividad altamente gratificante (p.95).

Este autor también afirma que el origami es además un recurso muy motivador para los estudiantes. Un ejemplo de utilización muy sencillo es para demostrar que los tres ángulos de un triángulo suman 180º. Este resultado se utiliza en el taller de la propuesta didáctica y, si el tiempo lo permitiera, rápidamente se podría experimentar con los estudiantes.

En la actividad del taller se pasa del plano al espacio, de los polígonos a los poliedros uniendo módulos (baldosas) previamente doblados. Además se afronta el taller con distintos niveles de dificultad: desde la construcción de poliedros regulares, hasta el estudio matemático de por qué obtenemos solo cinco.

[7] Aquella porción del espacio comprendida y limitada por dos semiplanos que tienen en común la recta que los define.

Royo Prieto (2002) destaca el valor matemático del origami modular, aparte de su valor artístico y estético:

> 1) Nos permite la representación física de entes abstractos. En este sentido, tiene el mismo interés que puede tener un programa de ordenador que dibuje poliedros, si bien es mucho más revelador tener en la mano un icosaedro, palparlo y girarlo, que verlo en una pantalla donde simulamos su giro. Para este fin, hay también recortables y figuras de plástico, aunque a decir verdad, la posibilidad práctica de representar poliedros con origami son mucho mayores que con recortables.
> 2) Tanto en el diseño como en el plegado y ensamblaje de los módulos, se experimentan de una forma muy sencilla las propiedades de los poliedros tales como grado de un vértice, regularidad y simetría, ya que en su diseño intervienen de forma decisiva los conceptos de arista, índice, cara, vértice, y otros más sofisticados como dualidad, colorabilidad, característica de Euler-Poincaré e incluso curvatura (…) (pp.179-180).

De la torre Mejía y Prada Vásquez (sf) señalan algunos beneficios y cualidades del origami:

- Dar al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permita desarrollar diferentes contenidos no solo conceptuales, sino también procedimentales.
- Desarrollar la destreza manual y la exactitud en el desarrollo del trabajo.
- Desarrollar la interdisciplinar de la Matemática con otras ciencias como las artes por ejemplo.
- Motivar al estudiante a ser creativo ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana sino también espacial.

Ricotti (2012b) destaca características del origami como recurso didáctico:

> La propuesta de trabajar con las técnicas de Origami, usar papeles de colores y tijeras se puede enmarcar en esta búsqueda de recursos sencillos, fáciles y económicos que permitan modelizar situaciones, resolver problemas, representar propiedades, construir con precisión, mejorar la visión espacial y por qué no, recuperar o ejercitar la tan venida a menos destreza manual. (p.16)

En línea con Ricotti (2012a), se puede decir que la propuesta presentada facilita el tránsito de lo experimental a lo abstracto, de lo manipulativo con las baldosas y bisagras a lo argumentativo matemático, y así descubrir que ciertas situaciones particulares tienen una estructura general de análisis. Por ejemplo, a partir de los primeros ensayos donde solo puede estar actuando la definición de poliedro regular (igual cantidad de caras idénticas en cada vértice) se logra llegar gracias a la experimentación a los otros dos condicionantes: más de dos caras en cada vértice pues con dos no tengo ángulo poliedro y que la suma de los ángulos del vértice de la caras intervinientes en un ángulo poliedro debe ser menor a 360º.

Otro aspecto que esta autora destaca es diagnosticado también en el Museo:

> Los que hemos transitado aulas sabemos que los conocimientos con que cuentan algunos alumnos sobre cuestiones matemáticas en general y geométricas en particular –conceptos, propiedades, definiciones, etc.- no siempre se ponen en práctica en el momento de resolver situaciones concretas; otras veces, alumnos que no se destacan aparentemente en estas áreas, pero que cuentan con aprendizajes logrados en vivencias cotidianas y con sentido común, pueden desempeñarse con destreza y fundamentar adecuadamente sorprendiendo a los

> más teóricos. Las actividades de resolución de problemas que priorizan la manipulación y la exploración con papeles, obligan a aprender poniendo los conceptos en acción. La cooperación, la comunicación, el trabajo compartido, la paciencia puesta en las propias construcciones, el reconocimiento de limitaciones o errores, el afán de enmienda y corrección, completarían los aspectos formativos (p.16).

La propuesta presentada en este trabajo atiende esta situación que se refleja no solo en las salas taller del Museo sino también en sus otras actividades. En el taller se adopta el origami como un recurso didáctico intuitivo con el fin de visualizar los objetos geométricos y algunas propiedades con rapidez.

En las actividades presentadas, las consignas de construcción de poliedros con las baldosa obliga a cumplir deliberada o intuitivamente ciertas propiedades que responden a la Geometría subyacente. Es tarea del guía animador científico favorecer la explicitación de esos resultados utilizados y ayudar a arribar a nuevas conclusiones.

Con respecto al origami modular y su vinculación con el tema de los poliedros, Ricotti (2012b) afirma:

> Por ejemplo: cuando se construyen las piezas –todas iguales- de algún modelo de Origami Modular, siempre se está frente a una parte que armará un poliedro regular. Algunas piezas representan aristas, o caras, o vértices de alguno de los cinco poliedros llamados “platónicos”; según el tipo de pieza y los ángulos diedros que formen, tal vez se pueda construir alguno de los trece poliedros “arquimedianos”. Es imprescindible la manipulación inteligente de esos módulos con una clara imagen mental del cuerpo, sus aristas, vértices y caras, regularidades y simetrías. El número de piezas que deben hacerse siempre está relacionado con ellos, y –por supuesto- también la forma (p. 17).

6. A MODO DE CIERRE

En esta última parte se pretende comunicar algunas reflexiones realizadas durante la elaboración del presente trabajo, inquietudes o temas no desarrollados en el mismo, posibles futuras líneas de trabajo, etc.

Frente al desafío de la enseñanza de la Matemática, contextos de difusión de la ciencia, como en este caso un museo interactivo, brindan la posibilidad de presentar de manera diferente asuntos matemáticos. Estos espacios centrados en cómo comunican la tienen la posibilidad de incorporar diversidad de actividades que se centren no solo en contenidos sino también en el quehacer científico. La propuesta didáctica presentada en este trabajo para un museo, es un ejemplo de cómo abordar un contenido matemático utilizando herramientas didácticas provenientes del arte, en este caso el origami. Este enfoque estuvo guiado por el objetivo de favorecer el tratamiento de un asunto matemático, por qué son sólo cinco los poliedros regulares, a través de la exploración y manipulación de distintos poliedros, la construcción de poliedros regulares y la elaboración de conjeturas y de argumentos para su justificación. Elementos teóricos de la Didáctica de la Matemática, como las pruebas visuales, el razonamiento visual, las demostraciones sin palabras, las demostraciones empíricas, entre otros, son pertinentes para estos contextos de difusión de la Matemática.

Algunos aspectos que por una limitación de tiempo no son tratados en el taller presentado podrían ser abordados en otras propuestas, incluso este taller puede ser disparador de muchos más. Por ejemplo, en la exploración inicial de los cuerpos geométricos presentados para contemplación, surgirá seguramente curiosidad por los poliedros estrellados. En un taller especial podría trabajarse con ellos, definirlos, construirlos, comprenderlos, indagar cuántos son, etc. Un tema que se vinculan a esto es cómo construirlos a partir de estelaciones poliédricas como las que realizó Kepler a partir de poliedros. De este modo se puede intentar obtener poliedros estrellados a partir de los poliedros regulares.

Otra cuestión que puede ser interesante es clasificar los poliedros no regulares que pueden surgir de la manipulación con las baldosas. Se podrían obviar algunos requisitos como igual cantidad de caras en un vértice y ver qué se obtiene, seguramente algunos de ellos surgirán en los ensayos. De este mismo modo se puede trabajar con los poliedros arquimedianos, permitiendo el trabajo con más de un polígono regular como cara y vincular históricamente la justificación de que sólo sean trece con Kepler.

En este taller no se aborda la construcción de las baldosas, se entrega instructivos de los mismos y se explica rápidamente a los interesados si lo solicitaren y si el tiempo lo permite. Una nueva propuesta podría abordar no solo su construcción sino también la justificación matemática de su plegado, o sea por qué efectivamente lo que obtengo con ese plegado son triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, etc. Más breve y sencillo es el análisis de las bisagras. Idéntica discusión se puede hacer de las instrucciones para la obtención del cubo con módulos con aletas (cubo de Paul Jackson).

Al relatar los aspectos históricos de los sólidos platónicos podría surgir curiosidad de cómo se asocian cada uno de los elementos a un poliedro regular, básicamente basado en una cuestión de “movilidad”. Analizar este aspectos con los textos originales y tratando de entender la lógica interviniente puede ser interesante también. En este mismo aspecto, puede surgir inquietud por saber cómo surgen las primeras representaciones de poliedros regulares y si se encuentran ejemplos en la naturaleza. Tanto esta cuestión como las aplicaciones tecnológicas son muy valoradas en las actividades del Museo Imaginario. Es así como un taller de Matemática y Cristalografía puede ser viable, en particular lo vinculado a poliedros regulares.

Al ensayar con las baldosas la construcción de los posibles ángulos diedros, se puede abordar el tema de la teselación (o embaldosamiento) con las diferentes baldosas. Además del trabajo de Zito (sf) puede verse el tema de mosaicos regulares en Coxeter (1971), en ambos se abordan los poliedros regulares a partir de llenar el plano con polígonos regulares. Este fue abordado por primera vez por Kepler, lo que brinda un aspecto histórico para estudiar. Coxeter (1971) también aborda el tema de los poliedros recíprocos, tema que puede ser interesante para el desarrollo de otro taller vinculado a los poliedros regulares. El cuerpo de la foto 5 podría servir de disparador para la discusión de qué el recíproco de un tetraedro regular es un tetraedro igual.

Por último, el taller propuesto en el presente trabajo podría haber abordado la manipulación de los cuerpos geométricos haciendo hincapié en la cantidad de caras, aristas y vértices de cada poliedro regular, esto llevaría a la demostración de por qué son sólo cinco a través de la relación de Euler. De hecho, también se puede hacer un taller para conocer y demostrar intuitivamente esta relación.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C. (2011). *Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros,* Villatuerta: RBA.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Azcoaga, L. (sf). *Origami en el Aula. Los Sólidos Platónicos.* Recuperado el día 1 de noviembre de 2013 de http://www.origamimodular.com.ar/images/aula/LosSolidosPlatonicos.pdf

Blanco García, Covadonga y Otero Suárez, Teresa. (2005) Geometría con papel (papiroflexia matemática). Recuperado el día 1 de noviembre de 2012 de http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/2/cblanco.pdf

Borwen, P. y Jörgenson, L. (2002). Visible Structures in Number Theory. *The American Mathematical Monthly, 108(5),* 897-910. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/

Bishop (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problem in Mathematics. 11 (1),* 7-16.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Recuperado el 9 de agosto de 2014 de http://es.scribd.com/doc/128630467/Fundamentos-de-geometria-HSM-Coxeter-pdf

De la torre Mejía, H. y Prada Vásquez, A. (sf). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría.* Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado el día 28 de Junio de 2014 de http://funes.uniandes.edu.co/992/1/31Taller.pdf

Doniez S., R. (2000) Integra Nro. 4. Universidad de Viña del Mar. Feldman, D. (2010). La pedagogía de la escolarización. En D. Feldman, Enseñanza y escuela. (pp. 33-55). Buenos Aires: Paidós.

Del Grande (1990). Spatial sense, Aritmetic Teacher. Vol. 37.6, pp. 14-20.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, VII (23),* 9-28.

Flores, G. (2011). *De los poliedros a los polígonos usando herramientas tecnológicas para potenciar el avance entre niveles de razonamiento geométrico.* pág 26. Recuperado el día 1 de noviembre de 2013 de http://www.bdigital.unal.edu.co/4949/1/GloriaJudithFlórez.2011.pdf

Giardino V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. *Springer, Topol 29,* 29-39.

González Urbaneja, P. (sf) *Los Sólidos Platónicos*: Historia de los Poliedros Regulares. Recuperado el día 21 de mayo de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&directory=67&showall=1

Guzmán, M. (2004). El papel de la visualización en el aprendizaje. En *Metodología y Aplicaciones de las matemáticas en la E.S.O.*

i Edo, M. (sf). La papiroflexia como recurso didáctico en la formación de personas adultas. Recuperado el día 1 de noviembre de 2013 de http://mail.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_76/nr_829/a_11214/11214.pdf

Iranzo Sanz, J. (2008). *28. El nudo pentagonal II*. Recuperado el día 6 de junio de 2014 de http://www.divulgamat.net/

Polígonos de papel. (sf). Recuperado el día 11 de Junio de 2014 de http://slideplayer.es/slide/1027901/

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Madrid: Alianza Universidad. Vol.1. Caps. 3.5, 4.9.

Kumayama, H. (2009) *Matemática e Origami: Polígonos com tiras de papel.* Recuperado el día 4 de junio de 2014 de http://origamidb.stagepics.co.uk/diagramlisting.asp

Maldonado, D. y Suárez-Álvarez, M. (2002) *Sólidos Platónicos y Origami.* Recuperado el día 13 de Junio de 2014 de http://mate.dm.uba.ar/~aldoc9/Publicaciones/Varia/poly.ps.gz

Martinez, N. y Götte, M. (2011) *Exploración, construcción y clasificación de poliedros.* Recuperado el 4 de Julio de 2014 de http://www.fceia.unr.edu.ar/matematica/jornadas2010/materiales/exploracion_construccion_clasificacion_poliedros.pdf

Meavilla Seguí, V. (2005). Razonamiento visual y Matemáticas. *Revista Sigma*, *27*, 109-116.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie de Lineamientos Curriculares. Santa Fe de Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el día 13 de mayo de 2012 de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Platón. (1986). El Timeo. En Platón, *Diálogos*, Tomo VI. Madrid: Gredos.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comp.). (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Munro: Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.

Ricotti, S. (2012a). *Geometría y Origami. Una fiesta con papeles para la clase de Matemática.* Santa Fe: Homo Sapiens Ediciones.

Ricotti, S. (2012b). El Origami como un auxiliar potente en la clase de Matemática. *Plegando al Sur, 3,* 16-17.

Rodríguez Díaz, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemática*. Recuperado el día 15 de Julio de 2014 de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/Rodriguez06.pdf

Romá, J. (2003). Poliedros regulares. Geometría descriptiva: geometría descriptiva. San Vicente: Editorial Club Universitario.

Hans Martín, J., Santonja, J. y Fernández-Aliseda Redondo, A. (2004) Polígonos con una tira de papel. *Revista Suma, volumen 46,* 95-98.

Royo Prieto, J. (2002) Matemáticas y papiroflexia. *Revista Sigma, 21,* 175-192.

Royo Prieto, J. (2006) Poliedros y teoremas de papel. Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas. Recuperado el día 18 de Junio de 2014 de http://sctmates.webs.ull.es/modulo2tf/1/jiroyo.pdf

Torres Alcaraz, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en las matemáticas. Miscelánea *Matemática 40,* 1-27.

Zito, Susana. (sf). *Geometría Elemental Intuitiva. Cuadernillo de Divulgación.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Luján.

8. ANEXO

8.1. Sobre la construcción de las baldosas y bisagras

BALDOSAS CUADRADAS
Módulo cuadrado: Se necesitan 6.

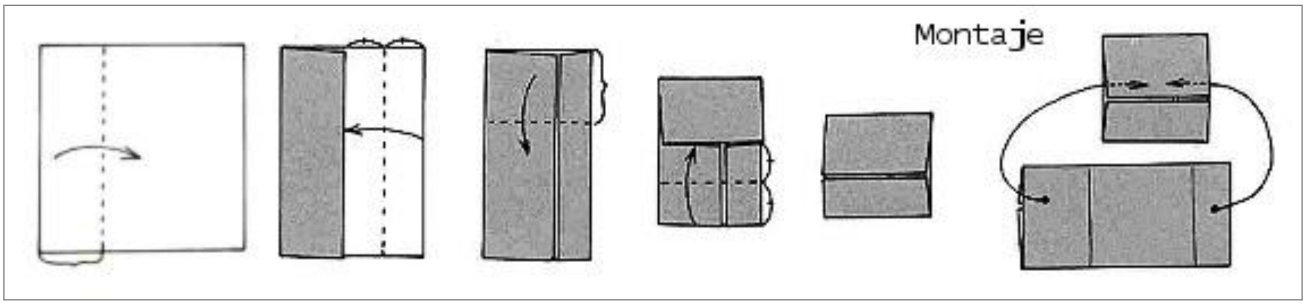


Imagen de apunte de clase de docente de Origami Laura Azcoaga. Instructivo que se ofrece a los estudiantes interesados.

Bisagras: Se necesitan 12. Para el armado se utilizan bisagras del ancho de la baldosa.

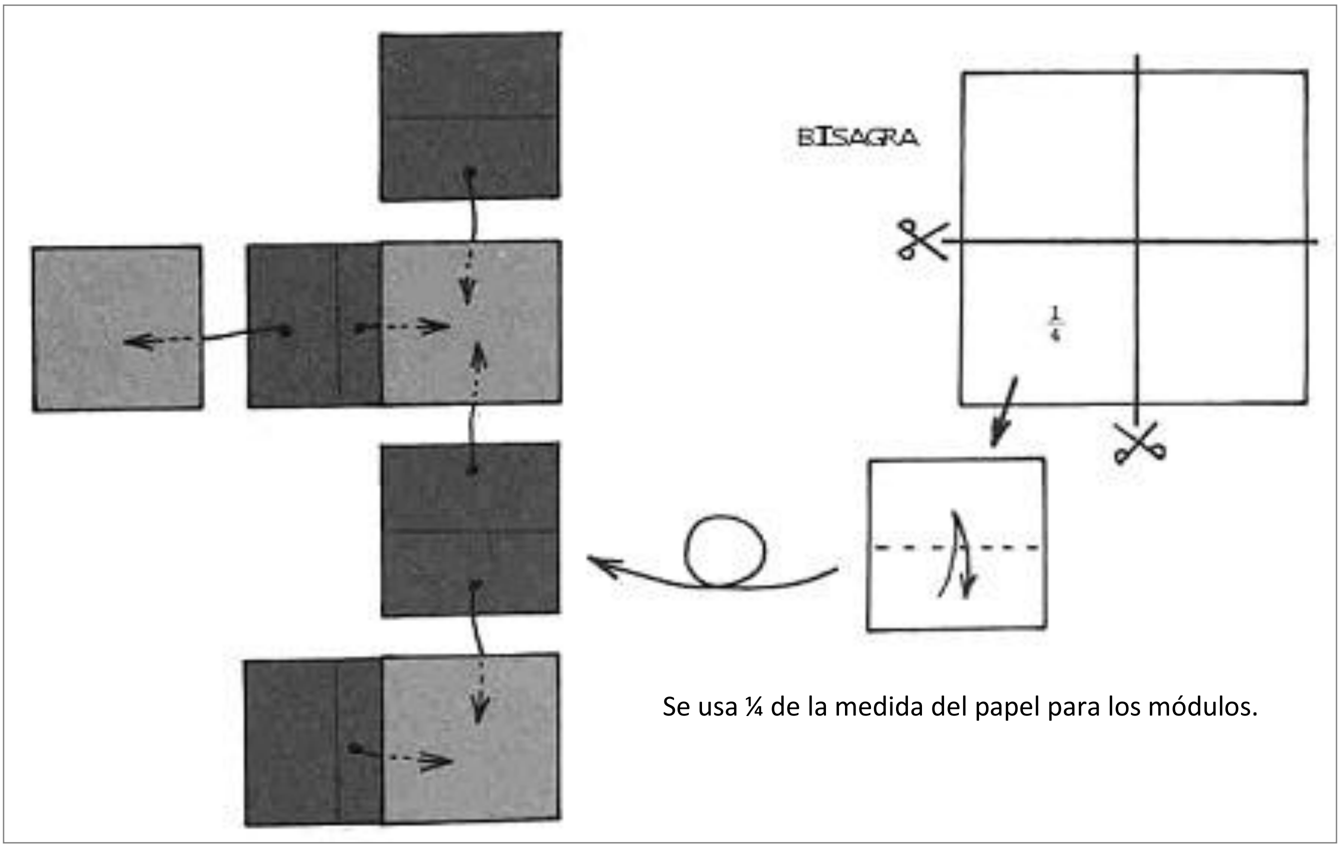
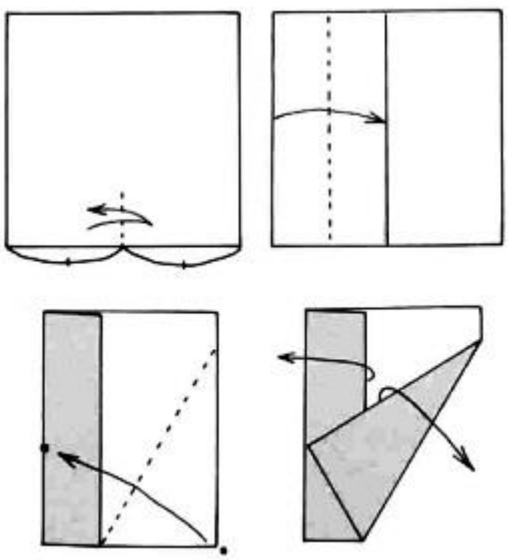


Imagen de apunte de clase de docente de Origami Laura Azcoaga. Instructivo que se ofrecerá a los estudiantes interesados. La explicación de la izquierda de cómo se utilizan se les dará a todos durante el taller.

BALDOSAS TRIANGULARES

Hay 3 poliedros regulares con caras triangulares. Con estos módulos pueden construirse el tetraedro, el octaedro y el icosaedro.



UNIDAD TRIANGULAR GRANDE

Imagen de apunte de clase de docente de Origami Laura Azcoaga. Instructivo que se ofrecerá a los estudiantes interesados durante el taller.

Se pueden plegar los cuadrantes como se ve a continuación. Ambas formas no dejan marca en el módulo baldosa triangular final.

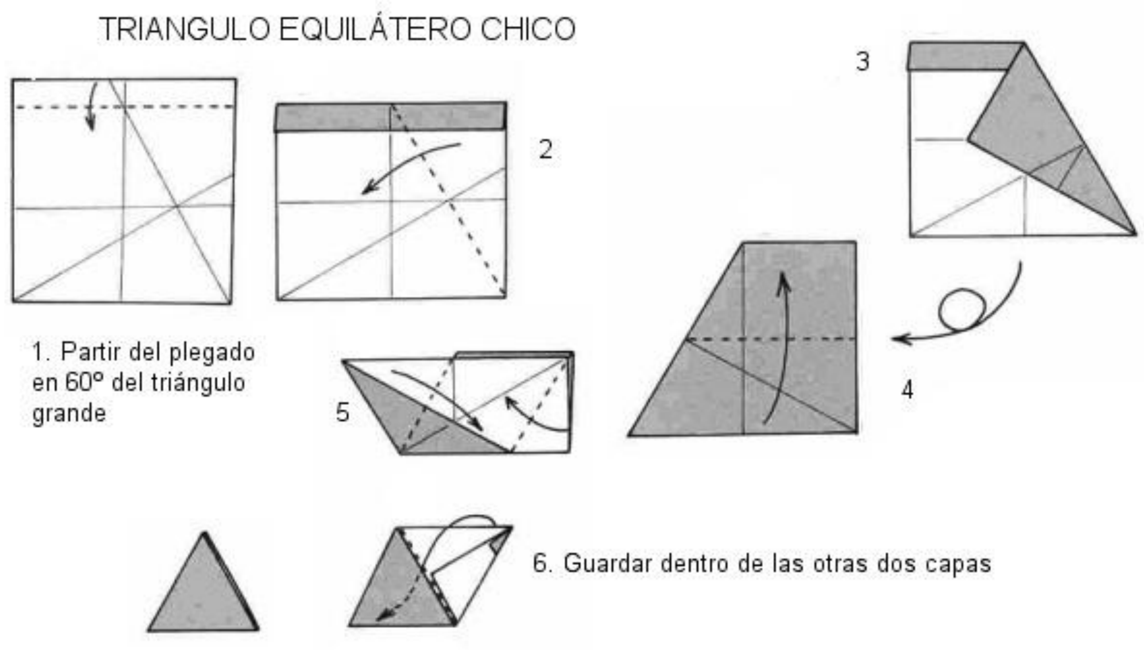


Imagen de apunte de clase de docente de Origami Laura Azcoaga. Este instructivo se entregará a los estudiantes del taller.

Bisagras:

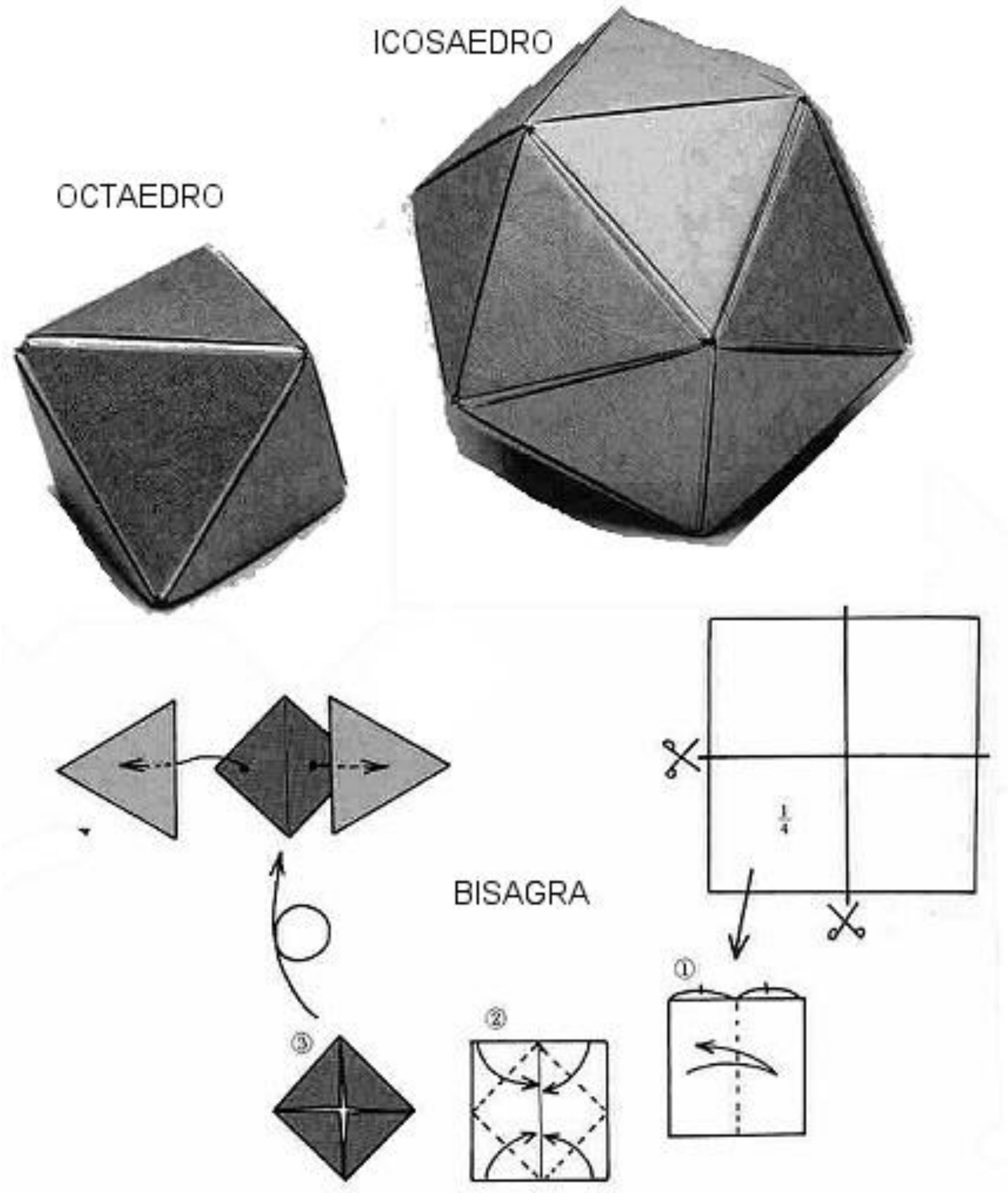


Imagen de apunte de clase de docente de Origami Laura Azcoaga. Instructivo que se le entregará a los estudiantes interesados.

PENTÁGONO

Se sigue a Kumayama (2009) con un método aproximado.

- Dividir un papel cuadrado en 3 partes iguales;
- Marcar y doblar conforme a los esquemas de abajo.

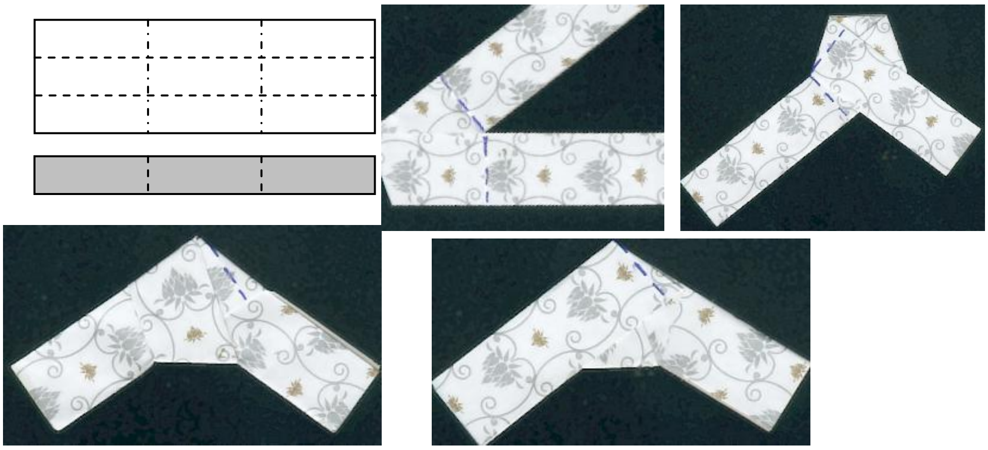


Imagen extraída de Kumayama (2009).

Un modo sencillo de plegar este módulo es a haciendo nudo de papel, de forma que si se tira con cuidado de las puntas del lazo haciendo que coincidan los pliegues se puede observar el pentágono regular, tal como lo menciona Hans Martín (2004).

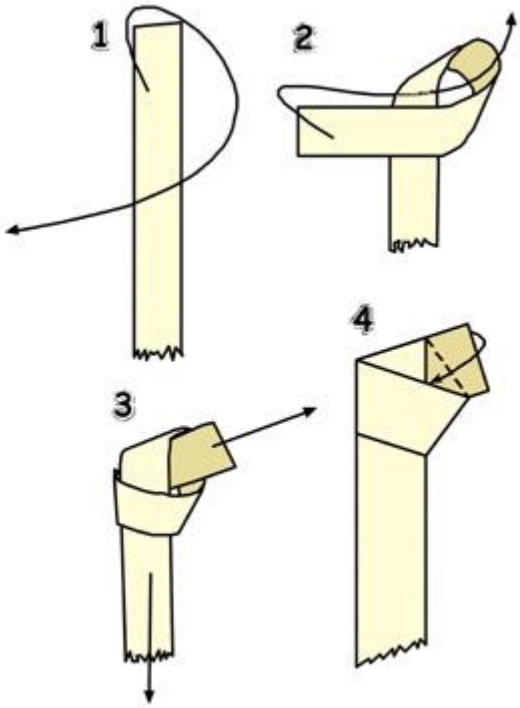


Imagen de Iranzo Sanz (2008).

En el pentágono en necesario tener en cuenta la longitud de la cinta, pues si es corta no puede realizarse bien el nudo, Hans Martín (2004) aconseja que la longitud sea unas ocho veces la anchura de la cinta, para que así se pueda manipular cómodamente.

Este tipo de plegado pentagonal tiene una doble utilidad, ya que si en el paso 4 de la imagen anterior se dejan sin meter los dos extremos de papel, con una pequeña longitud se pueden obtener aletas que oficien de bisagras/aristas para la unión de varios pentágonos en construcciones.

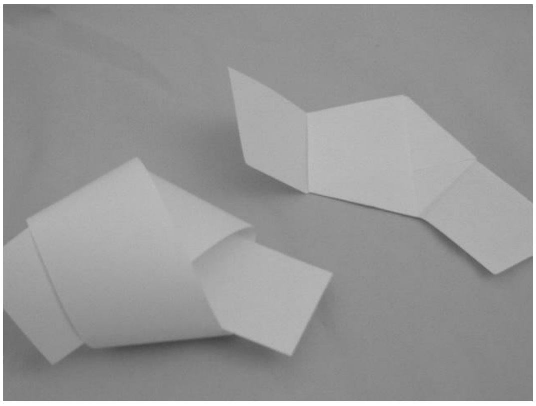


Imagen extraída de Hans Martín (2004).

Con doce piezas iguales, se puede construir un dodecaedro como vemos en la siguiente imagen. Para conseguirlo hay que tener mucha paciencia y cuidado ya que la pieza es inestable pues la construcción no queda rígida. Seguramente haya que reforzar con bisagras similares a las de las baldosas cuadradas, usando las mismas tiras que las utilizadas para hacer los módulos pentagonales. De todas maneras se recomienda en la primera oportunidad trabajar con las baldosas pentagonales y las bisagras, sin aletas en los módulos baldosas, para concentrar la atención en las caras.

Imagen extraída de Hans Martín (2004).

HEXÁGONO

Se sigue también a Kumayama (2009). A continuación instrucciones del método teóricamente exacto (1x4 o 1/4 de papel cuadrado).

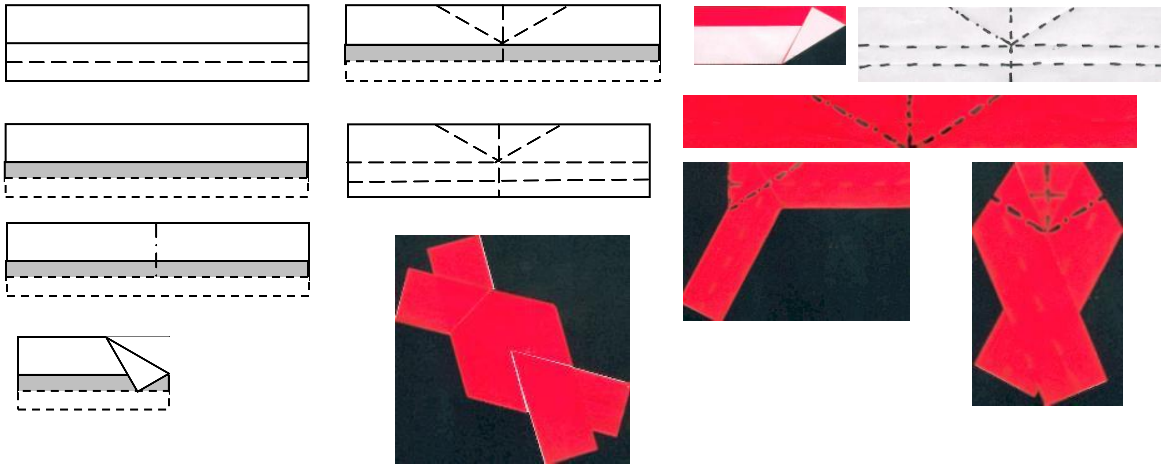
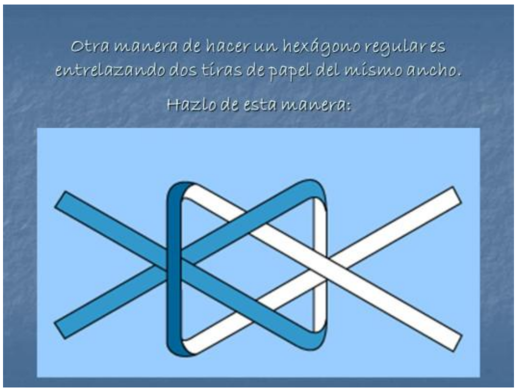
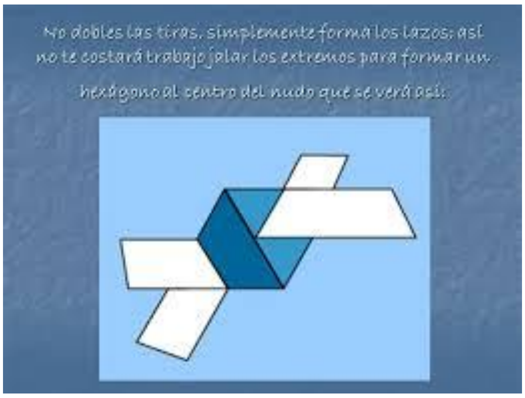
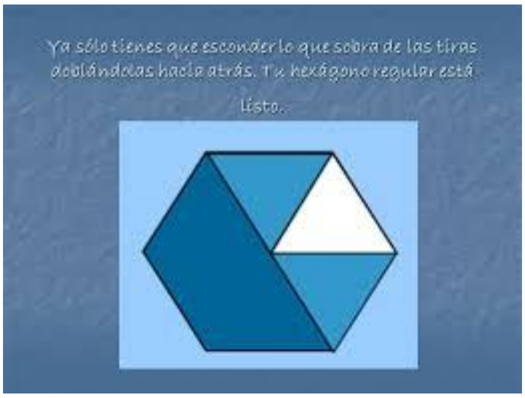


Imagen extraída de Kumayama (2009).

A continuación instructivo de método nudo con dos tiras, extraído de la presentación Polígonos de Papel (sf):







HEPTÁGONO

Se sigue también a Kumayama (2009). A continuación instrucciones del método aproximado.

- Dividir una hoja de papel A_4 en 3 partes iguales y recortar;
- Marcar y doblar siguiendo los esquemas de abajo.

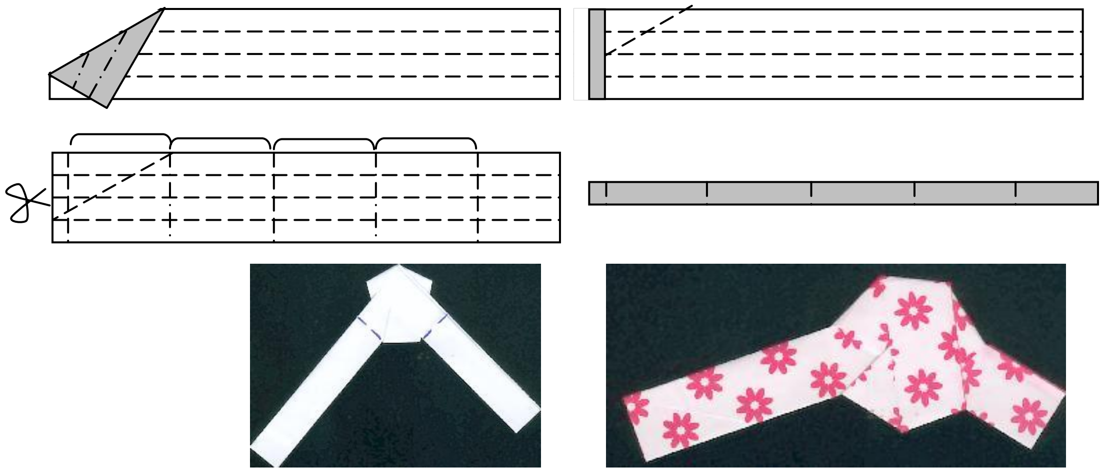


Imagen extraída de Kumayama (2009).

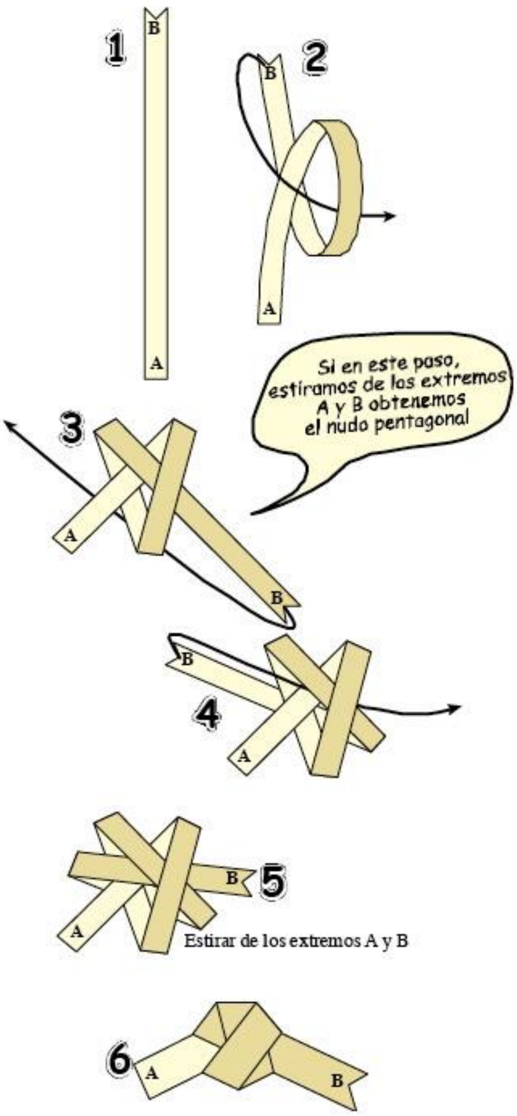
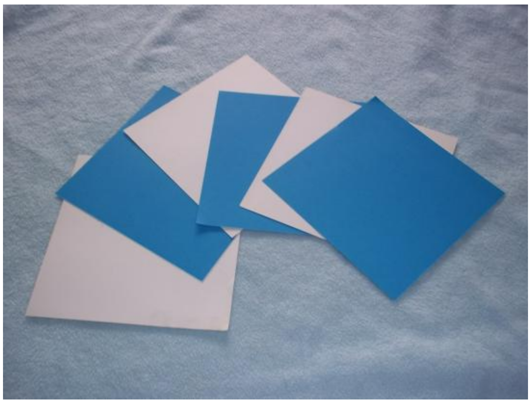


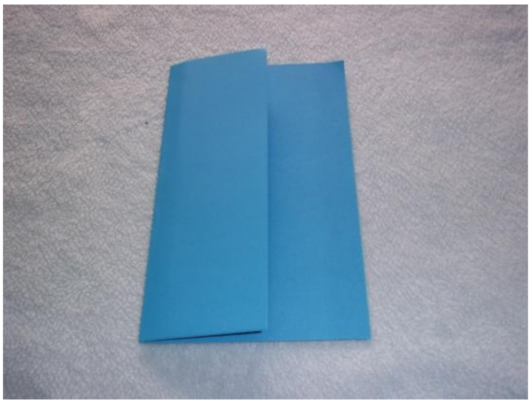
Imagen de Iranzo Sanz (2008).

8.2. Sobre la construcción del Cubo de Paul Jackson

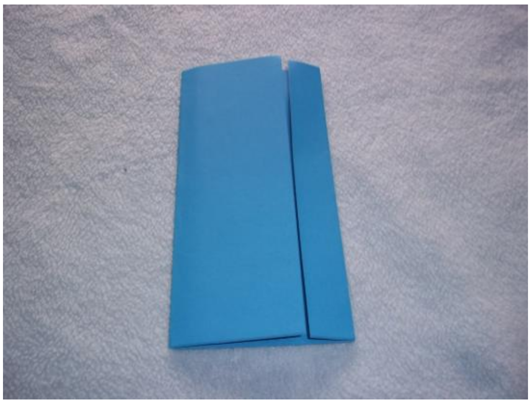
1. Hacen falta 6 cuadrados de papel de 15 x 15 cm, aproximadamente.



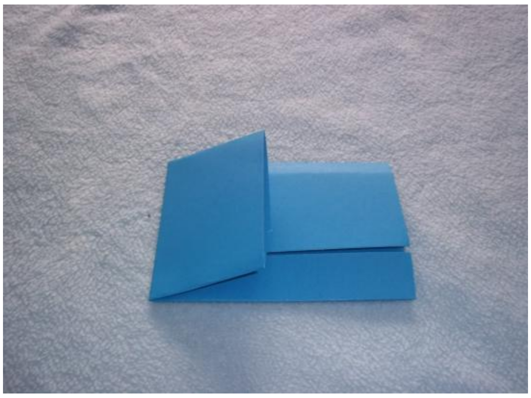
2. Con el lado blanco para arriba, hacer dos marcas en el medio de dos bordes/lados consecutivos del cuadrado y plegar alineando con las marcas. Para este modelo no es necesario marcar el medio, se puede doblar el primer lado aproximadamente al medio, teniendo cuidado de que el doblez mantenga paralelos los lados.

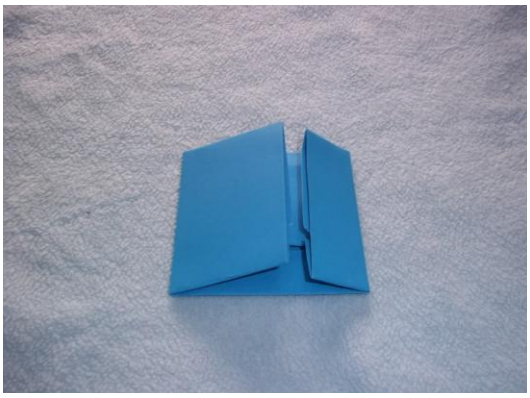


3. Repetir con el borde/lado opuesto.

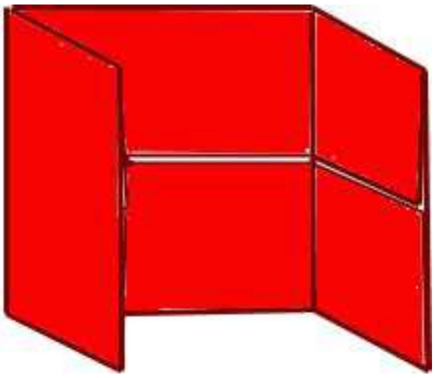


4. Plegar ahora los otros bordes/lados al centro, para que coincidan con la otra marca o aproximadamente hacia el medio.

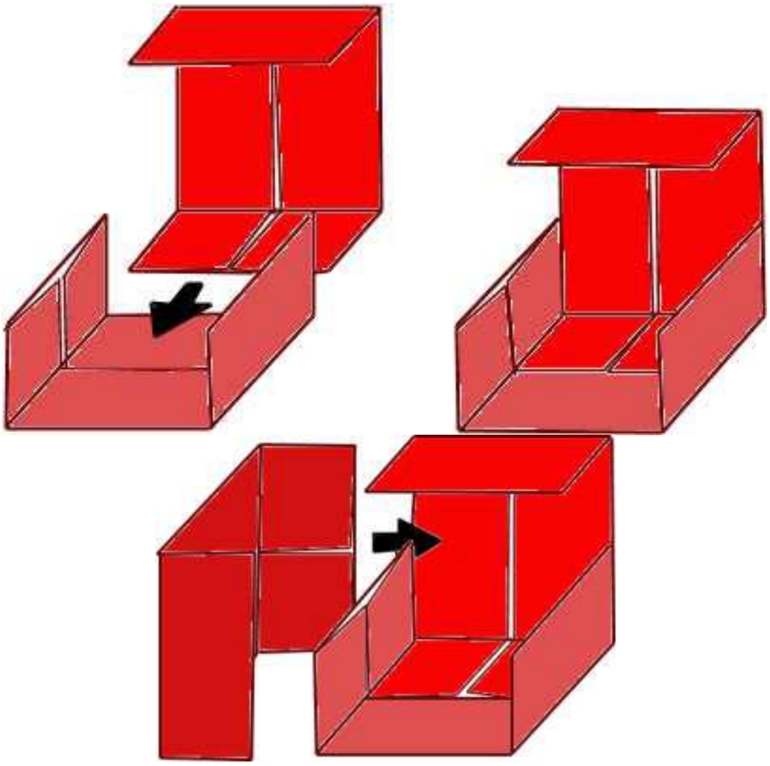




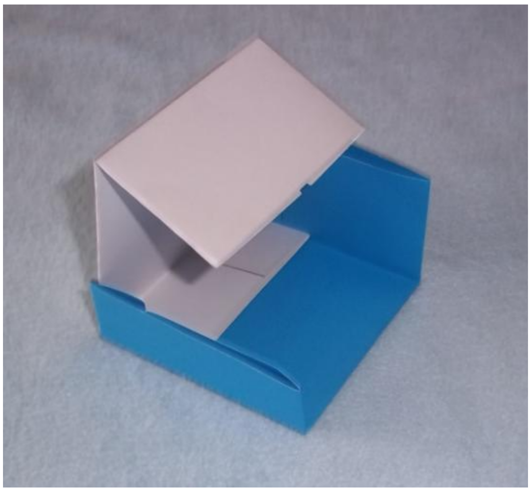
5. Abrir los últimos dos pliegues a 90° y ya tenemos uno de los 6 módulos necesarios. Plegar 5 más.

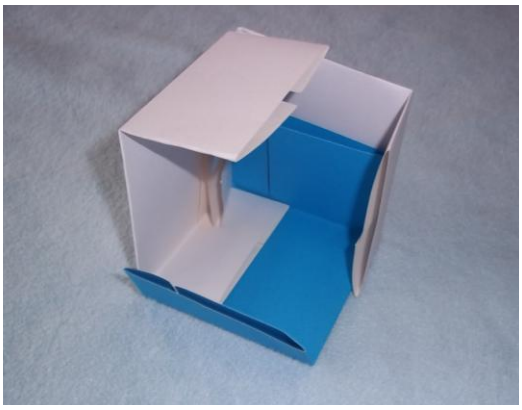


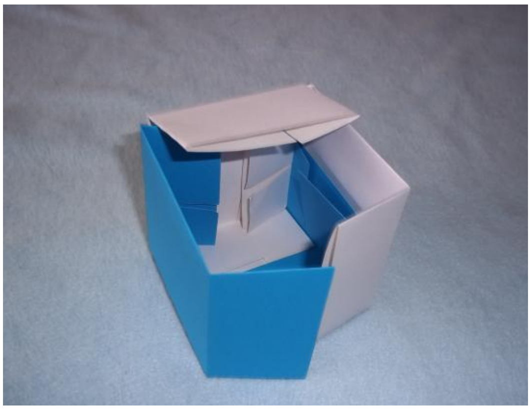
6. La regla para armarlo es: APOYAR ALETA CONTRA CARA INTERNA.

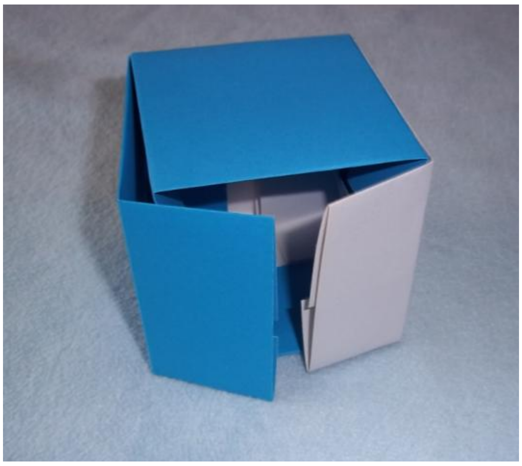


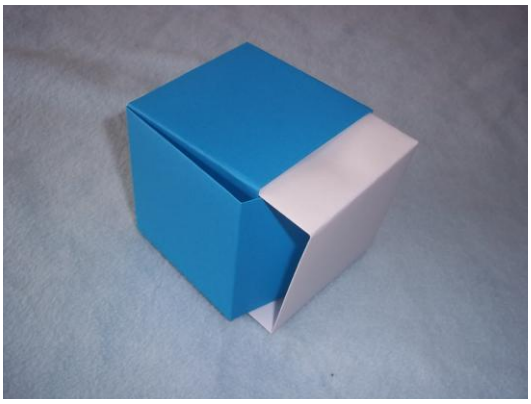
7. Agregar del mismo modo los otros tres lados

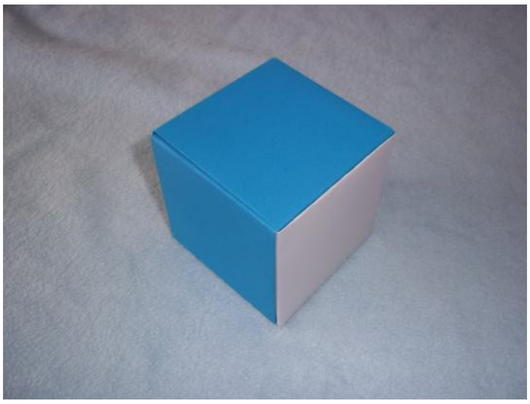












Para los interesados, además de los instructivos de construcción de baldosas y bisagras utilizadas en este taller, habrá instructivos de construcción de los otros cuatro sólidos platónicos con origami, Este material también puede estar colgado de la página web del Museo para su posterior consulta.