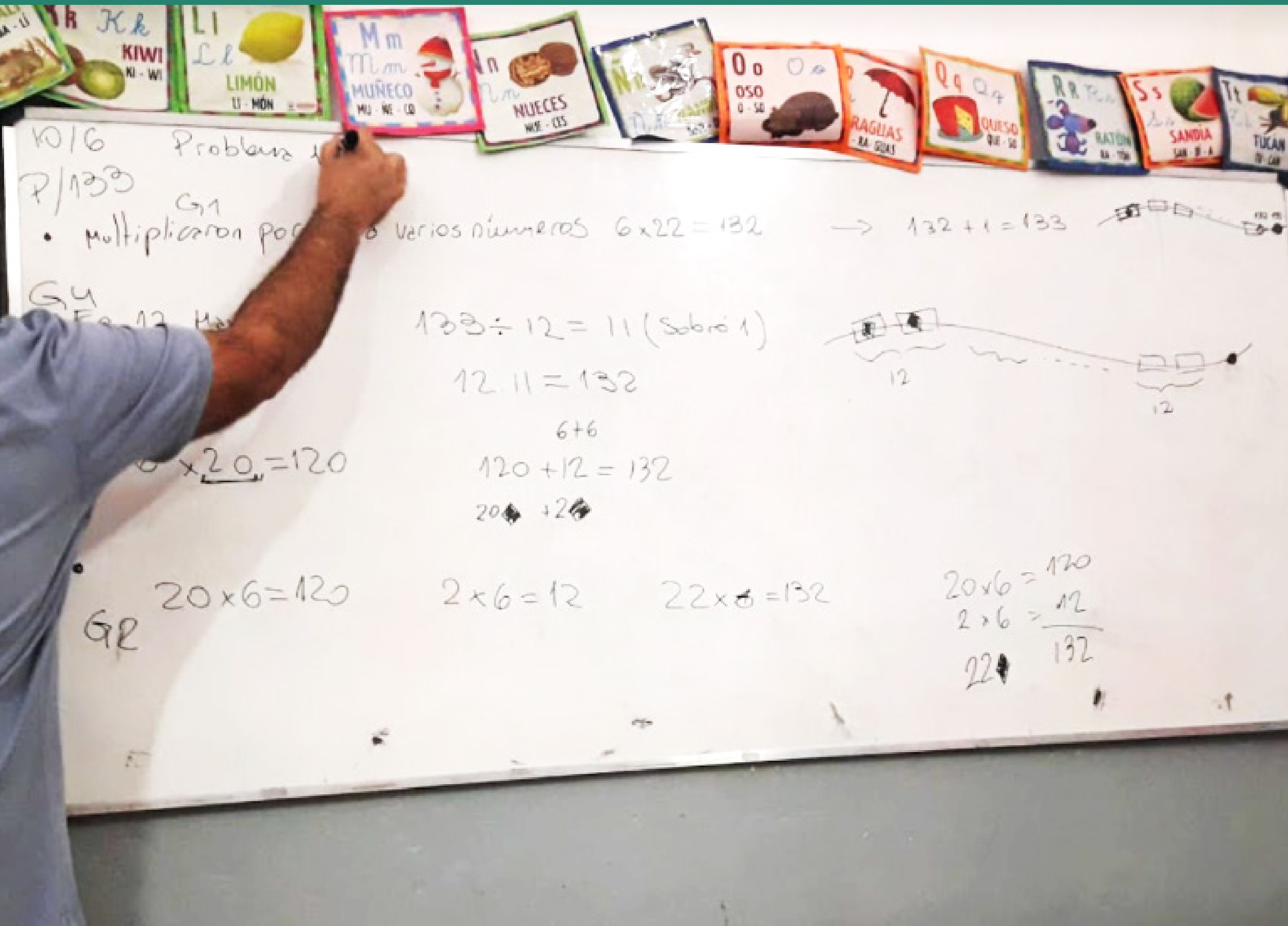
El valor mostrativo de las expresiones numéricas

Tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente



Docente escribiendo en pizarra. Fotografía obtenida por los autores.

Valeria Borsani • Juan Pablo Luna
Carmen Sessa

Revista Científica **EFI · DGES** Volumen 7 · N° 12 Julio 2021

Valeria Borsani

Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática de la Universidad de Buenos Aires. Actualmente es profesora adjunta de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe). Integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en la Unipe. Previamente se desempeñó como profesora de Matemática en escuelas secundarias y en universidades de Buenos Aires, como formadora de maestros y profesores. Es co-autora de textos escolares y de diversos documentos y artículos referidos a la enseñanza de la matemática.

Juan Pablo Luna

Profesor de matemática por la Universidad de Buenos Aires y está cursando la Maestría en Formación Docente en la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe). Con un cargo de Jefe de Trabajos Prácticos en la Unipe, desempeña tareas de docencia en la Especialización y la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Integra el equipo de investigación que dirige Carmen Sessa en la Unipe. Se desempeñó como docente de escuelas secundarias hasta el 2019, llevó adelante diversas tareas en espacio de formación docente, elaboró materiales de apoyo para la enseñanza y artículos de investigación.

Carmen Sessa

De formación inicial en Matemática, comenzó a estudiar Didáctica de la Matemática en 1991 con Patricia Sadovsky y Mabel Panizza. Actualmente es profesora titular en la Universidad Pedagógica Nacional (Unipe), donde dirige la Carrera de Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria. Es también docente en la Carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas – UBA. Desde 2008, integra un grupo colaborativo de investigación, que incluye a investigadores y docentes: el Grupo de los Lunes. Los focos de interés en investigación han sido el álgebra y las funciones con la incorporación de la computadora. Es autora o coautora de libros de texto, libros para docentes y artículos de investigación.

El valor mostrativo de las expresiones numéricas

tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente

The exhibiting value of numerical expressions: tensions between students' and teachers' writings

Valeria Borsani *

Juan Pablo Luna **

Carmen Sessa ***

Fecha de recepción: 9 de Abril 2021

Fecha de aceptación: 19 de Mayo 2021

RESUMEN

En una investigación colaborativa entre docentes de escuela secundaria y docentes investigadores universitaries[1], nos propusimos diseñar y estudiar un trayecto para el primer año de la escuela secundaria que permitiera un tejido entre las experiencias aritméticas de les estudiantes y las prácticas algebraicas en las que se les quiere involucrar. En el contexto de la divisibilidad, comenzamos proponiendo un trayecto que tiene por objetivo introducir a les estudiantes en un tipo de tratamiento algebraico de expresiones numéricas que incluyen varias operaciones. El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios recortados a partir de lo acontecido en un aula cuando les estudiantes resuelven el primer problema de la secuencia. Nuestro estudio permite entender que ese objetivo necesita un recorrido que contemple tanto el inevitable aporte de le docente ofreciendo escrituras como la discusión colectiva en el aula en torno a ellas.

palabras clave

transición aritmética-algebra · expresiones numéricas interacciones en el aula

Contactos

* valeria.borsani@unipe.edu.ar ; ** juan.luna@unipe.edu.ar ; *** carmen.sessa@unipe.edu.ar

1 Teniendo en cuenta el momento histórico que estamos viviendo, elegimos utilizar en nuestro escrito la "e", no simplemente para reemplazar a otras letras, sino como posición política desde la que queremos visibilizar géneros que de otra manera no estarían incluidos.

ABSTRACT

Within a collaborative research among secondary school teachers and university teachers-researchers, we laid out and tracked an educational itinerary for the first year of secondary school that would allow the articulation between students' arithmetic experiences and the algebraic practices they are expected to get involved in. In the context of divisibility, we began by proposing an itinerary that aims to introduce students to a type of algebraic treatment of numerical expressions including several operations. The central core of this article is the analysis of certain episodes selected among the events that took place in a classroom while students were solving the sequence's first problem. Our research allows for the conclusion that such a goal requires an itinerary that includes both the unavoidable contribution of the teacher offering their particular writings as well as the classroom collective discussion around them.

keywords

arithmetic-algebra transition · numerical expressions classroom interactions

Introducción

El desarrollo del álgebra escolar ha sido y es un tema de indagación recurrente en el campo de investigación en Educación Matemática, como demuestran varios números especiales en revistas (por ejemplo, Coulange, Drouhard, Dorier y Robert, 2012) y diversos surveys (visiones de conjunto) que sintetizan diferentes estudios internacionales referidos a esta temática (ver, por ejemplo, Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016; Stacey, Chick y Kendal, 2004; Socas, 2011). En nuestro país, desde fines del siglo XX, varias investigaciones abordan aspectos de esta problemática (Cambriglia, 2018; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996, 1999; Sadovsky, 2004).

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) sostienen que, si bien "se ha avanzado mucho en la caracterización del álgebra escolar, el problema no está completamente resuelto, particularmente en lo que se refiere a la conexión entre el álgebra en Primaria y Secundaria" (p. 3). La tesis de Sadovsky (2004) se ubica en este espacio, considerando la producción en un aula del último año de la escuela primaria, cuando les estudiantes enfrentan actividades que suponen algún grado de ruptura con las prácticas tradicionales aritméticas. Nuestra investigación recoge también la inquietud de Godino et al. (2015) y se propone estudiar condiciones para un "tejido" entre las prácticas aritméticas y algebraicas.[2] Más precisamente, nos proponemos estudiar –en un grupo colaborativo que reúne a profesores de escuela secundaria y docentes/investigadores de la Universidad Pedagógica Nacional– las posibilidades y potencialidades de un tipo de trabajo algebraico, al inicio de la escuela secundaria, que recupere prácticas aritméticas de les estudiantes en su tránsito por la escuela primaria y permita poner en juego modos de abordaje

2 En el marco del proyecto de la Universidad Pedagógica Nacional, Picto 2017-0024. "Las expresiones algebraicas como generalización de los cálculos aritméticos: una posible entrada al álgebra en la escuela secundaria. Investigación colaborativa de diseño y análisis".

propios del experto en álgebra.[3] Asumimos la necesidad de enfrentar a les estudiantes con estas nuevas prácticas aun antes del primer contacto con las expresiones algebraicas.

> *"Nos proponemos estudiar las posibilidades y potencialidades de un tipo de trabajo algebraico, al inicio de la escuela secundaria, que recupere prácticas aritméticas de les estudiantes en su tránsito por la escuela primaria y permita poner en juego modos de abordaje propios del experto en álgebra."*

Con ese objetivo, en una primera etapa de la investigación, hemos diseñado y llevado al aula una secuencia de actividades que se ubican en la zona del tratamiento algebraico de lo numérico e involucran a les estudiantes en un trabajo con expresiones numéricas que incluyen varias operaciones.[4] No esperábamos que la producción de este tipo de expresiones surgiera como respuesta a un tarea dada y, desde el diseño de la propuesta, asumimos la necesidad de pensar en intervenciones docentes que las ofrezcan. Aquí abordaremos la complejidad y la riqueza de los intercambios colectivos en torno a estas escrituras.

3 Un fundamento de este trayecto puede leerse en Borsani y Sessa (2020).

4 Para una segunda etapa de la investigación, hemos diseñado una continuación de la secuencia con actividades que incluyen el estudio de condiciones de validez de enunciados que contienen expresiones con variables (Sackur, Drouhard, Maurel y Pécal, 1997).

El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios en el aula que revelan el necesario carácter colectivo del proceso de apropiación de estas nuevas escrituras por parte de les estudiantes.

> *"El núcleo central de este artículo es el análisis de ciertos episodios en el aula que revelan el necesario carácter colectivo del proceso de apropiación de estas nuevas escrituras por parte de les estudiantes."*

Elementos teóricos que enmarcan nuestro trabajo

Diferentes investigaciones (Vergnaud, Cortés y Favre-Artigue, 1988; Chevallard, 1984; Sadovsky, 2004; Godino et al., 2015; Grugeon-Allys y Pilet, 2017) que toman como objeto de estudio las entradas al álgebra han puesto en evidencia que el pensamiento algebraico se construye con apoyo en el pensamiento aritmético y, al mismo tiempo, con importantes marcas de rupturas con él.

En un texto fundante, Chevallard (1984) señaló que existe una dialéctica en el corazón de la aritmética que se remonta a una distinción hecha por los griegos: la aritmética logística, de los calculadores, y la aritmética "propia de los filósofos". La primera, denominada también aritmética práctica, tiene por objeto la realización de operaciones y está regida por el principio de finalización del cálculo. La segunda se ocupa del estudio de propiedades de los números y las operaciones (teoría de números) y está organizada a partir de la conservación de la traza de las operaciones efectuadas. Mientras que la aritmética práctica utiliza el lenguaje numérico por su poder designativo, la aritmética "algebraica", por el contrario, aprovecha el valor *mostrativo* de las escrituras, que constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. Es así como, en el corazón mismo del lenguaje numérico, existe una tensión entre dos modos de funcionamiento.

Nuestra investigación se ubica en la búsqueda de condiciones para involucrar a les estudiantes en un tratamiento algebraico de lo numérico como vía de entrada al trabajo algebraico.

Más recientemente, Arcavi, Drijver y Stacey (2017) señalan que "una fuerte comprensión de los números y la aritmética es fundamental para aprender álgebra, pero la transición hacia el álgebra requiere considerables reorientaciones de ideas" (p. 49, la traducción es nuestra). Por ejemplo, estos autores subrayan que en el álgebra se opera con los signos > = <, que son muy familiares para les estudiantes desde sus primeras prácticas aritméticas y cuyo nuevo uso incluye "sutilezas"/"subtítulos" que no siempre se explicitan al trabajar en álgebra. En particular, en las prácticas aritméticas, el signo igual se suele interpretar como el anuncio de un resultado. Esta forma de comprender el signo igual puede resultar inapropiada para el álgebra, ya que, al trabajar también con asuntos estructurales de los números y las operaciones, es necesario interpretarlo de una manera relacional, como la afirmación de una igualdad. Estas ideas resultan fundamentales como marco para nuestras indagaciones, que parten de asumir la posibilidad y fertilidad de que les alumnes construyan la idea de equivalencia de expresiones numéricas como un modo de otorgar otro sentido a la igualdad, aun en el campo de la aritmética.

La consideración de la igualdad como relación de equivalencia es una de las ideas que Squalli considera para caracterizar el pensamiento algebraico que, como él señala, puede ser movilizado sin hacer uso del lenguaje simbólico algebraico:

> (...) el pensamiento algebraico se despliega por medio de un conjunto de razonamientos particulares y de modos de acercarse a los conceptos en juego en las actividades algebraicas, por ejemplo, una tendencia a ver la igualdad como una relación de equivalencia, una tendencia a dejar las operaciones en suspenso, una tendencia a simbolizar y a operar sobre los símbolos, una tendencia a tener una visión estructural (ver, por ejemplo, una expresión numérica como un objeto en sí y no únicamente como una cadena de cálculo). (Squalli, 2015, p. 347; la traducción es nuestra)

En consonancia con estas ideas, sostenemos que las actividades que no involucran un lenguaje algebraico pero que enfatizan una mirada sobre la estructura del cálculo ofrecen a les estudiantes experiencias algebraicas mediante el trabajo con expresiones numéricas; en ese sentido, ayudan a construir "puentes" desde la aritmética hacia el álgebra. Es esta vía la que exploramos en nuestra investigación.

Sackur, Drouhard, Maurel y Pécal (1997) retoman la distinción establecida por Frege (1892, 1971) entre sentido y denotación de una expresión algebraica. Estos autores sostienen que modificar el sentido conservando la denotación de las expresiones y de las ecuaciones es una de las características fundamentales del trabajo con el lenguaje algebraico y es lo que le otorga su potencia. Nos interesa señalar que el lenguaje algebraico –gracias a lo que Chevallard (1984) denomina el valor *mostrativo* de las escrituras– ofrece la posibilidad de producir información a partir de la lectura de una expresión; el núcleo central del trabajo algebraico estaría dado por la búsqueda de informaciones diferentes que se logran modificando la escritura de los objetos y conservando su denotación.

Arcavi (2005) destaca que la habilidad de manipular y también de "leer a través" de expresiones simbólicas es un componente fundamental de un "sentido del símbolo".

En un texto precedente (Arcavi, 1994), el autor realiza una descripción y discusión de "conductas" prototípicas que él presenta como ejemplos de "tener sentido del símbolo". Nos interesamos en lo que él llama "Manipulaciones y más allá: la lectura a través de los símbolos" y, particularmente, en dos aspectos específicos de la relación entre leer y manipular:

- leer en lugar de manipular;
- manipular para leer, o la lectura como objetivo de las transformaciones.

Nos interesa resaltar el vínculo estrecho entre la posibilidad de modificar el sentido de las escrituras algebraicas conservando su denotación (Sackur et al., 1997) y las conductas "leer en lugar de manipular" y "manipular para leer" (Arcavi, 1994). Si bien los autores desarrollan estas ideas referidas al trabajo con expresiones algebraicas, retenemos su potencial para nuestro estudio de actividades que implican un tratamiento algebraico de expresiones numéricas.

Arcavi et al. (2017), en un intento de caracterizar "qué es lo que hacemos en realidad cuando hacemos álgebra", introducen también la acción de desimbolizar, que consiste en la inspección de una expresión algebraica con el objetivo de extraer información de ella. En el ejemplo que ellos proponen, a partir de una expresión algebraica que se presenta como modelo de una situación extramatemática, se trata de inspeccionarla para reconstruir su sentido –de cada uno de los elementos y de las operaciones que la componen– en términos de la situación que está modelizando. Retenemos esta idea para el estudio que proponemos en este artículo.

Acerca del problema que resolvieron les estudiantes

Como dijimos en la introducción, hemos diseñado una propuesta de enseñanza que tiene el propósito de introducir a les estudiantes en la práctica de la lectura de información de expresiones numéricas que combinan varias operaciones. La divisibilidad entre números naturales es la zona del currículum en la cual se ubican las diferentes actividades que llevamos al aula. Por ejemplo, en el problema 7 de la secuencia se pide a les estudiantes que decidan, sin hacer la cuenta, si expresiones numéricas como 22x35, 10x42+42, 6x55+10 o 5x13+6x13 son múltiplos de 11. Para poder leer la información pertinente, en algunos casos será necesario transformar la escritura dada, conservando la equivalencia de las expresiones. En el primer problema de la secuencia –en el cual nos vamos a centrar en este artículo–, este tipo de expresiones numéricas no son necesarias para responder, pero estarán presentes en la instancia de la discusión colectiva.

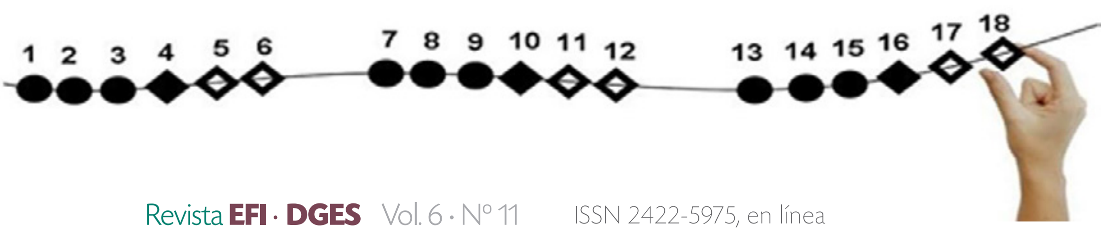
Problema 1

En un hilo se enhebran los siguientes tipos de mostacillas: 3 bolitas negras, 1 cubito negro y 2 cubitos blancos, repitiendo la secuencia que muestra la imagen. Los números que se encuentran arriba del collar indican el orden en el que fueron enhebradas las mostacillas. (Figura 1)

a) Armé un collar con 32 mostacillas siguiendo esta secuencia, ¿de qué tipo será la última mostacilla? ¿Y si el collar tiene 622 mostacillas?

b) Si se quiere armar un collar con 133 mostacillas, ¿cuántos cubitos negros se necesitan? Escriban cómo lo pensaron. Y si se arma uno con 239 mostacillas, ¿cuántos cubitos negros se necesitan? Escriban cómo lo pensaron.

Figura 1



El ítem a) apunta a la identificación de la regularidad del diseño del collar cada 6 mostacillas. Si bien es posible abordar la cantidad 32 desde el conteo sobre un dibujo ampliado del collar, el número 622 obliga a pensar en estrategias de cálculo: avanzar de a seis o múltiplos de seis hasta llegar a un número cercano al 622, o apelar a la división entera de 622 por 6 y utilizar el resto para caracterizar la mostacilla final.

El ítem b) introduce novedades respecto del anterior, ya que, si se buscan múltiplos de 6 cercanos al 133 o al 239, será necesario conocer el factor que multiplica al 6. La escritura de las cuentas intermedias en un procedimiento se constituye en un apoyo necesario para recuperar la cantidad de grupos de 6 que entran en el número de mostacillas en estudio y para analizar si la cantidad de mostacillas restantes agrega o no un cubito negro. En caso de que se apoyen en la división entera, tanto el cociente como el resto son necesarios para producir la respuesta.

En el primer día de trabajo, les estudiantes llegaron a resolver el ítem b) y produjeron escritos grupalmente que contenían cuentas y explicaciones en lenguaje coloquial de las ideas puestas en juego. Como era esperable, les estudiantes no produjeron autónomamente escrituras de un cálculo como síntesis de las cuentas realizadas. La clase finalizó en ese momento y el docente recogió estos escritos.

En este artículo, centraremos nuestra mirada en las discusiones que tuvieron lugar en la segunda clase, en torno a esas resoluciones del ítem b).

La nueva tarea que propone el docente para trabajar con las producciones de les estudiantes

Como ya dijimos, nuestra propuesta tiene el propósito de introducir a les estudiantes en la práctica de la lectura de información de expresiones numéricas que combinan varias operaciones. Eso comienza a desplegarse en el problema siguiente de la secuencia:

Problema 2

Sin obtener el resultado de la cuenta, decidir si los siguientes números son múltiplos de 6. Expliquen sus respuestas.

120 + 600   125 + 600   72 + 18

72 + 186 + 12   1206 + 46

En este problema, se presentan expresiones algebraicas numéricas sin un contexto extramatemático. Les estudiantes tienen que interpretar esas escrituras y obtener información pertinente para responder la pregunta planteada.

Tal como habíamos anticipado, hay una gran distancia entre las producciones escritas de les estudiantes para el ítem b) del primer problema y aquellas escrituras que deberán abordar en el segundo.

Con el objetivo de tender puentes hacia el trabajo que les esperaba, finalizada la clase 1 y a partir del análisis de las producciones de sus estudiantes, el docente elabora una actividad particular para organizar la discusión colectiva del ítem b) del Problema 1: produce, entre clase y clase, diferentes escrituras de cálculos horizontales que reflejan, de algún modo, las estrategias desarrolladas por cada grupo. Las presenta de a una en el pizarrón y, en un primer momento, solicita a los grupos que la analicen para ver si reconocen en esa escritura la estrategia que utilizaron para responder (de algún modo, propone ese cálculo como representación resumida de la estrategia utilizada). En caso de que ese reconocimiento se produzca, planea dar la palabra a les productores, con el objeto de hacer públicas las relaciones e ideas que irían cargando de sentido a esa escritura. Sea o no reconocida por algún grupo, en un segundo momento va a proponer a toda la

 ISSN 2422-5975, en línea

clase el análisis de esa escritura en relación con su eficacia y pertinencia para determinar la cantidad de cubitos negros presentes en cada collar (de 133 y 239 mostacillas). Con esta propuesta, el docente apunta a que se entienda y reconstruya colectivamente el sentido de la expresión en función de la pregunta que todes les chiques ya respondieron, quizás de modos bien diferentes.

Nos interesa señalar el papel del contexto tanto en la instancia de reconocimiento por parte del grupo productor como en el trabajo de toda la clase dotando de sentido a esa escritura. En particular, la construcción colectiva de ese sentido a la cual les estudiantes son convocades requiere reconstruir –a partir de la escritura simbólica– un procedimiento que involucra acciones enunciadas verbalmente en términos del contexto del problema (“sacar una mostacilla”, “saltar de a seis para repetir el tipo de mostacilla”). Entendemos que en esta búsqueda de sentido se estaría poniendo en juego un proceso de desimbolización (Arcavi et al., 2017). Esta noción, considerada por les autores como una de las acciones involucradas en el trabajo con expresiones algebraicas, nos resulta fértil para pensar el tratamiento de cálculos que combinan varias operaciones, en tanto expresiones simbólicas nuevas para muches chiques.

En el texto recién mencionado, les autores proponen como ejemplo de desimbolización la acción que desarrollan les estudiantes cuando, después de trabajar con actividades de producción de fórmulas para contar colecciones, se les presentan expresiones con variables para que elles las acepten o no como modelo de conteo de una cierta situación. Señalamos que, en ese caso, el proceso de desimbolización tiene como punto de apoyo el hecho de que les estudiantes fueron antes productores de expresiones similares, contrariamente a lo que ocurre en la tarea que estamos analizando ahora. La expresión a “desimbolizar” es producida por el docente tras escasa experiencia previa de les estudiantes con expresiones de este tipo.

En el Problema 2, las expresiones propuestas no se presentarán como respuesta a ninguna pregunta y, por eso mismo, no habrá una estrategia o procedimiento a reconstruir. Pensamos que el tratamiento de las escrituras que propone el docente como cierre del Problema 1 –muy mediado por el contexto, que ofrece palabras– va a permitir un abordaje del siguiente problema enriquecido con la experiencia de haber discutido sobre ellas.

En lo que sigue de este artículo analizaremos las discusiones que tienen lugar en el aula a propósito de las dos primeras escrituras que propone el docente y la totalidad –y complejidad– del texto que queda plasmado en el pizarrón al finalizar la clase.

Algunos recortes de lo acontecido en el aula

Episodio 1

Nos ubicamos en el momento en que les estudiantes van a comenzar a trabajar con las respuestas que elles habían producido para la segunda pregunta del ítem b) del Problema 1: ¿cuántas cubitos negros se necesitan para armar un collar de 239 mostacillas?

El profesor explica la consigna de trabajo y escribe un primer cálculo en el pizarrón: 6x40=240. Como se verá, refiere a la producción del grupo 1 *(ver Figura 1)*.

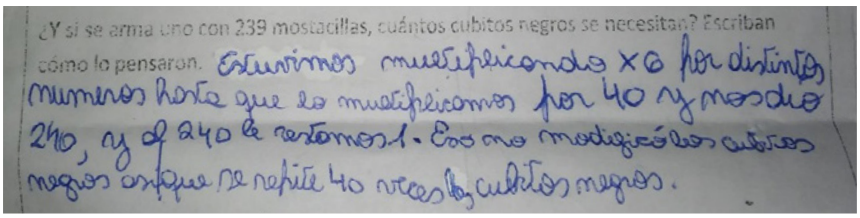

¿Y si se arma uno con 239 mostacillas, cuántos cubitos negros se necesitan? Escriban cómo lo pensaron. Estuvimos multiplicando x6 por distintos numeros hasta que lo multiplicamos por 40 y nos dio 240, y al 240 le restamos 1. Eso no modificó los cubitos negros porque se repite 40 veces los cubitos negros.

Figura 1. *Producción del grupo 1*

Detengámonos a analizar esta producción. El contexto del problema, el dibujo del collar que se presenta y las discusiones que se hicieron con las preguntas anteriores llevan a este grupo a considerar grupos/saltos de 6 mostacillas. En este ítem se pregunta por 239 mostacillas. Es interesante notar que en la respuesta que arman estas chicas, no aparece escrito el número 239. Ese número no es utilizado para hacer ninguna cuenta, aunque está implícito en la producción escrita tanto para controlar qué multiplicación por 6 les sirve (buscan aproximarse al 239) como para justificar, implícitamente, la última acción realizada ("a 240 le restamos 1"). La primera oración es un relato que tiene las marcas de las acciones que realizaron (en pasado) en el momento de exploración. No sabemos si las cuentas intermedias fueron escritas, pero probablemente no las consideran importantes como parte de la respuesta. Notemos que aun la cuenta final "40x6" es relatada usando palabras –obedeciendo seguramente a cuestiones de contrato– ante el pedido de "Escriban cómo lo pensaron".

Cuando el profesor escribe la cuenta "6x40=240" se hace un silencio, nadie la toma como propia, posiblemente muches chiques todavía no entienden bien qué tienen que hacer. El siguiente fragmento reproduce las interacciones en la clase a partir de ese momento.

> 1-Profesor (P): Alguien puso lo mismo, "fuimos multiplicando a 6 y sirvió 6x40", ¿qué grupo hizo 6x40?
>
> 2-Alumne (A) (del grupo 2): Nosotros.
>
> 3-A (del grupo 1): Nosotros.
>
> 4-P: ¿Ustedes lo hicieron? ¿Grupo 1? Bueno, ahora vemos si es esta. Hicieron 6x40 y les dio 240, pero ahí me paso de 239, ¿qué hicieron?
>
> 5- A (del grupo 1): Le restamos 1.
>
> 6- P: 240–1... 239 (mientras expresa esto, el profesor va escribiendo "240–1=239", ver Figura 2). ¿De qué me sirve restarle ese 1? ¿De qué me sirve identificar ese 1?
>
> 7- A (del grupo 1): Para que te dé la cuenta, porque como se pasaba, necesitaba...
>
> (hablan varios juntos).
>
> 8- P: De a uno. A ver allá, ¿ustedes hicieron algo parecido o no? (Les pregunta a las chicas del grupo 3).
>
> 9- A (del grupo 3): No.
>
> 10- P: Bueno, ¿pero por qué piensan que me sirve restarle ese 1? La cuenta me va a dar 239, ya sé que 240–1 me da 239.
>
> 11- A (del grupo 3): Porque una mostacilla que saques no hace daño.
>
> 12- A (del grupo 4): O que sobre.
>
> 13- P: ¿Por qué no hace daño? (varios alumnos hablan a la vez). De a uno...
>
> 14- A (del grupo 3): Porque no va a sacar al cubito negro.
>
> 15- A (del grupo 4): Porque no es un cubito negro. Si fuera un cubito negro...
>
> 16- P: Bien, porque no es un cubito negro. Si fuera negro, lo tengo que contar, ¿está? Bien, y entonces, de lo que escribieron, ¿en dónde veo el número que me dice la respuesta?
>
> 17- A (del grupo 1): Del 40.
>
> 18- P: De 40 porque estoy multiplicando 6. Es la misma idea que antes (se refiere a la discusión que habían tenido acerca de la primera pregunta del problema): por cada 6 tengo 1. ¿Está?
>
> 19- A: Ok.

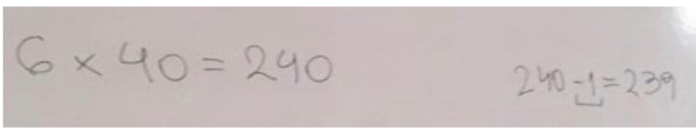


Figura 2. *Escritura que resulta en el pizarrón a partir de la línea 6 del fragmento.*

La escritura que resulta en el pizarrón (ver Figura 2), a partir de la producción del grupo 1, se forma entonces en dos instancias. La primera (6x40=240) la ofrece el profesor y

 ISSN 2422-5975, en línea

agrega oralmente información: “fuimos multiplicando por 6 y vimos que 6x40 servía”. Estas palabras remiten a una acción que el grupo desplegó antes de llegar a la operación que queda expresada en la cuenta del pizarrón. Pensamos que, de esta manera, el profesor trata de ayudar al grupo productor a que se reconozca y así iniciar la discusión colectiva sobre ese cálculo. El grupo productor tiene dos elementos para reconocerse: los dichos del profesor y la escritura que él propone en el pizarrón. Entendemos que esta distinción entre lo que él decide escribir y lo que decide decir ayudará a que les estudiantes vayan construyendo la idea de que hay escrituras que permiten condensar la información necesaria para responder a lo que se pregunta. Es desde lo oral que agrega una temporalidad, al relatar cómo llegaron a esa cuenta. Para les productores, esa cuenta es el punto de llegada de la búsqueda de múltiplos de 6 cercanos a 239. Mientras que, para el resto del curso, es un cálculo que puede o no guardar relación con las estrategias que cada grupo desplegó.

Luego de que el grupo 1 se reconoce en esa escritura, sus integrantes avanzan contando cuáles fueron sus siguientes acciones (línea 5), dando lugar al otro cálculo que escribe el profesor. Como puede verse en el resto del fragmento, el profesor convoca a todes a discutir sobre esta escritura y logra la participación de muches estudiantes. En la línea 6, la intervención del docente tiene por objetivo que les estudiantes relacionen el cálculo 240−1 con el conteo de mostacillas negras; sin embargo, hasta la línea 10, las afirmaciones de les estudiantes hacen referencia solamente a las cuentas realizadas. Recién en la línea 11, una alumna asocia la cuenta 240−1=239 a la idea de que “una mostacilla que saques no hace daño”. El profesor, tomando el modo de decir de la estudiante, invita a que ella explique “por qué no hace daño”. Se toma como compartido el significado de la expresión “no hace daño” como un modo de decir que no va a influir en la cantidad de cubitos negros que se tenían contados. La pregunta de este “por qué” del docente podría albergar explicaciones en dos planos diferentes:

- Por un lado, la explicación que une estudiante da en la línea 14: “no va a sacar al cubito negro” (probablemente evocando la acción de sacar la última mostacilla al collar de 240). En esta respuesta, queda implícito que entonces no cambiaría la cantidad de cubitos negros (cantidad que aún no se explicitó: recién en la línea 17, y ante una pregunta del docente, aparece la cantidad de mostacillas negras).
- Por otro lado, se podría dar un argumento de por qué la mostacilla 240 del collar no será un cubito negro: la mostacilla 240 cierra un “ciclo” de 6 y, entonces, mirar la mostacilla 240 es como mirar la mostacilla 6, que se sabe que es blanca. Por eso, quitar una “no hace daño”, por eso no hay “riesgo” de sacar un cubito negro.

Entendemos que les estudiantes están teniendo en cuenta estos últimos argumentos, aunque no aparecen como contenidos explícitos de los intercambios que estamos analizando y no son requeridos por el profesor. Posiblemente porque ya fueron suficientemente expuestos y aceptados en el trabajo con el ítem a) y el primer número del ítem b). Por ejemplo, ya forma parte de los acuerdos de la clase que “si un collar tiene un número total de mostacillas múltiplo de 6, mirar la última es como mirar la mostacilla sexta”, y que “en cada tira de 6 hay un cubito negro”.

En las últimas líneas del fragmento, el profesor restituye la pregunta inicial invitando a buscar la respuesta entre los números escritos en el pizarrón, reforzando la idea de que la escritura de los dos cálculos contiene la información necesaria para responder la pregunta.

Las relaciones que identificamos, explicitadas o no en este diálogo entre estudiantes y docente, forman parte del proceso de dotar de sentido a las escrituras de los cálculos como modelo de la situación que se está estudiando y condensar en ellas, entre todas las ideas, estrategias y acciones desplegadas para resolver y comunicadas oralmente, las relaciones suficientes para dar respuesta al problema.

Nos interesa detenernos en el hecho de que el profesor elige no poner de entrada la escritura de la estrategia completa y, recién después de las interacciones con el grupo productor, agrega "240–1=239". Recorre así la temporalidad de la estrategia del grupo, remitiendo al "paso a paso" característico del trabajo aritmético que les estudiantes traen de su experiencia en la escuela primaria. Entendemos que esta escritura secuenciada de dos cálculos es preliminar a una única expresión numérica que combine las dos operaciones, tal como las que aparecen en problemas posteriores de la secuencia. En sus primeras interacciones con tales escrituras, les estudiantes podrían asignarle una cierta temporalidad, ligada a acciones, como un modo de dotar de sentido a toda la expresión. Una temporalidad de la cual deberán desprenderse para ir avanzando en el trabajo algebraico.

Episodio 2

Hemos estado analizando las discusiones en el aula en torno a las dos primeras cuentas que el docente escribió en el pizarrón, reconocidas por las autoras. Algo muy diferente va a pasar con la segunda escritura que el docente propone, cuyo tratamiento en el aula será analizado en esta sección. Se trata, en este caso, de un cálculo que él produjo en relación con las respuestas de dos grupos.[4] Antes de detenernos en los diálogos que tienen lugar en la clase a partir de que el docente propone esa nueva escritura, comencemos analizando las producciones que esos dos grupos realizaron la clase anterior (ver Figuras 3 y 4).

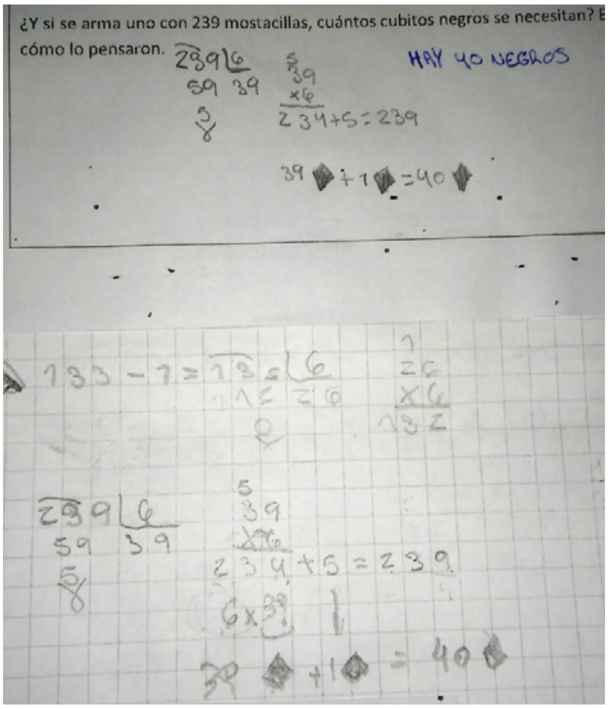


Figura 3. *Producción del grupo 2.*

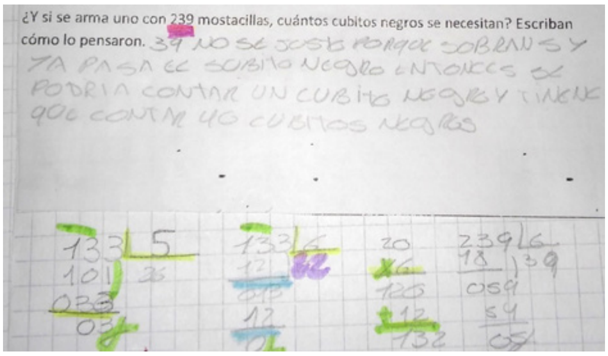


Figura 4. *Producción del grupo 3.*

Transcribimos el texto de la Figura 4: *39 no es justo porque sobran 5 y ya pasa el cubito negro entonces se podría contar un cubito negro y tiene que contar 40 cubitos negros.* De todas las cuentas que figuran más abajo, la última de la derecha es la que corresponde a la pregunta que estamos analizando.

Les estudiantes de estos dos grupos utilizaron la cuenta de dividir 239:6 para obtener

4 Esto fue confirmado en conversaciones posteriores con él.

la cantidad de "ciclos de 6" –o "tiras de 6"– contenidos en 239. Ambas producciones también muestran una comprensión de que las 5 unidades restantes aportan otro cubito negro.

Sin embargo, algo las distingue: mientras que el grupo 3 puede producir la respuesta a partir de los resultados que arroja la cuenta de dividir, el grupo 2, una vez obtenido el cociente 39, introduce la cuenta 39x6=234. Interpretamos que este último grupo necesita el resultado de la cuenta de multiplicar para poder expresar el 239 como un múltiplo de 6 más un número suficientemente pequeño para que no alcance a completar otra tira: la suma que escriben es "234+5=239". En el renglón siguiente, agregan la expresión "6x39" debajo del 234 y una flecha vertical que parte del 5 para recién después, en un renglón más abajo, contabilizar la cantidad de cubitos negros. Tal como habíamos anticipado al planificar esta actividad, les estudiantes no producen la escritura que combina los dos cálculos (239=6x39+5), expresión que podría haberse obtenido directamente de la cuenta de dividir. Pareciera que les estudiantes de este grupo –no así les del grupo 3– no atrapan totalmente la información que porta dicha cuenta, quizás insegures por la presencia de un resto que complejiza la relación entre los datos (dividendo y divisor) y los resultados (cociente y resto).

El siguiente fragmento reproduce las interacciones en la clase a partir del momento en que el docente escribe "39x6=234".

1-P (escribiendo): Otros hicieron esto: 39x6 y les dio 234. ¿Quién hizo esto? ¿Cuántos cubitos tengo hasta la mostacilla 234?

2- A (del grupo 1): 39.

3- P: 39, la misma idea que antes, ¿no? López, ¿se entiende? Por cada seis tengo una, multiplico por 39... (Como ve que el alumno asiente, continúa) Bárbaro... ¿Me faltan o me sobran?

4- A (del grupo 4): Me faltan 5, pero no sé si modifica.

5- P: ¿Me modifica ahora lo que falta?

(Alumnas del grupo 4 hablan entre ellas) ¿Cuántas faltan? ¿5? 1, 2, 3, 4, 5... sí, modifica.

(Alumnes del grupo 3 hablan entre elles) Sí, porque son 5 y en medio de esas 5 hay una mostacilla negra.

6- P: Tengo las 234. ¿Cuál es la última de las 234? ¿Qué mostacilla es la 234?

7- A (del grupo 3): Una blanca, creo.

8- A (del grupo 4): Blanca.

9- A (del grupo 4): Termina en un cubito blanco.

10- P: Me faltan 5, ¿no? ¿Esas 5 me modifican ahora?

11- Varies: Sí.

El docente agrega la cuenta "234+5=239".

12- A (del grupo 4): Sí, te modifica, porque se suma un cubito.

13- P: Pasa un cubito, ¿no?

14- A (del grupo 4): Pasás un cubito negro.

15- P: ¿Acá cuántos tengo? (señalando el 234 en el pizarrón) 39x6, o sea son 39 cubitos y acá (señalando el 5 que suma) tengo un cubito más, ¿no? (dibujando un cubito negro debajo del 5, ver Figura 5). Y ahí están los 40. ¿Está bien?

16- Varies: Sí.

17- P: Bueno algunos lo tenían más completo que otros en el grupo, pero ¿quién hizo esto? ¿Grupo...? (silencio) ¿Quién? De algún grupo lo saqué. Algo parecido, por ahí explicado con palabras, ¿no?

El silencio continúa, ningún grupo relaciona su producción con la escritura que propone el docente.

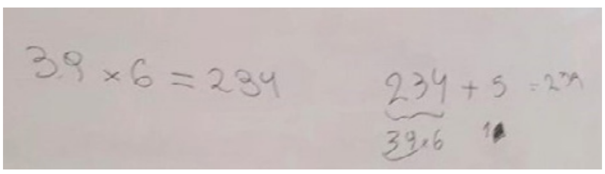


Figura 5. *Escritura del docente en el pizarrón.*

Hemos analizado que ambos grupos comenzaron la resolución con una cuenta de dividir y llegaron al número 39 como resultado de esa cuenta. En cambio, en la cuenta que propone inicialmente el docente (39x6=234), ese número aparece de entrada. El no reconocimiento por parte de les estudiantes nos advierte que el camino que llevaría de la cuenta de multiplicar a la de dividir –cuando se trata de una división con resto– necesita de relaciones que no necesariamente tienen disponibles les estudiantes (por ejemplo, entender que 39x6 es igual a 239 menos el resto que se obtiene al dividir 239 por 6).

Señalemos que el no reconocimiento de autoría para la escritura que el docente propone no impide que todes les chiques participen, coordinados por el docente, en la elaboración de una estrategia a partir del cálculo 39x6=234. Las interacciones orales llevan a la escritura de una segunda cuenta: 234+5=239. Y, en la intervención 15, el docente organiza el conteo de cubitos negros, agregando la expresión "39x6" y el dibujo de un rombo negro (ver Figura 5). La escritura completa viene a condensar nuevamente las relaciones necesarias para contestar la pregunta.

Destaquemos que las discusiones colectivas que tuvieron lugar movilizaron ideas que van construyendo un sentido compartido de las escrituras y una manera de responder la pregunta con la información que ellas portan. La estrategia que se configura se aleja posiblemente de aquellas que desplegaron los grupos 2 y 3 en su producción inicial, y esto explica el silencio que se obtiene a las preguntas del docente en la intervención 17.

La última intervención del docente ("De algún grupo lo saqué. Algo parecido, por ahí explicado con palabras, ¿no?") nos da pistas de que él intenta hacer visible el vínculo con la explicación producida por el grupo 3. Posiblemente, el docente identificó esta explicación con la estrategia multiplicativa del grupo 1: pensar multiplicaciones por 6 cercanas al 239 y luego ver si se modifica la cantidad de negras al ajustar sumando o restando algo.

Este episodio nos revela la complejidad de la nueva tarea que plantea el docente: entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone, se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes.

> *"...entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone, se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes."*

Totalidad del pizarrón

Al finalizar la clase, el pizarrón recoge el trabajo de todos los grupos (Figura 6).

 ISSN 2422-5975, en línea

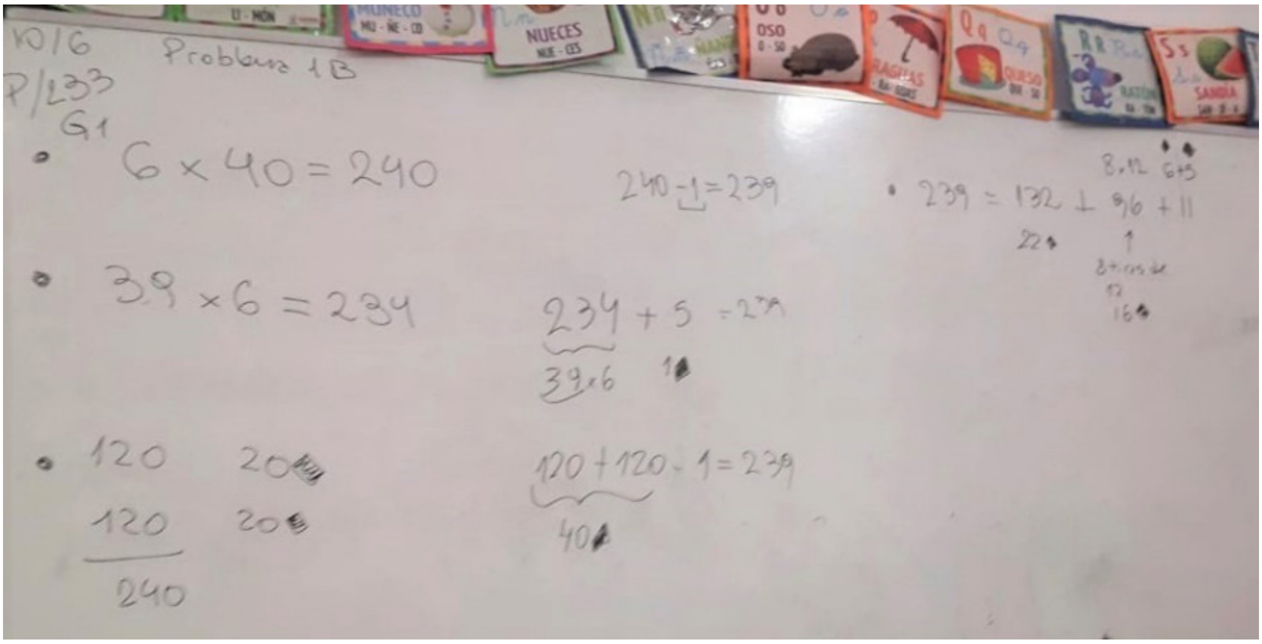


Figura 6. *Imagen del pizarrón al finalizar la clase.*

El trabajo de cada grupo, identificado con un punto, queda representado con uno o varios cálculos –si bien eran cinco grupos, como vimos antes, una de las escrituras propuestas por el docente se relaciona con las producciones de dos grupos–.

Las dos expresiones que aparecen arriba a la izquierda (correspondientes a tres grupos) son las primeras que se trabajan en el aula y ya han sido comentadas en este artículo. En cuanto a la tercera que aparece a la izquierda, recoge la manera de proceder de un grupo que se apoyó en un collar de 120 mostacillas para responder la primera pregunta del ítem b). Las multiplicaciones por 6 no aparecen explícitamente porque ya se sabía que en un collar de 120 mostacillas había 20 cubitos negros.

En estos tres casos, el procedimiento de cada grupo quedó representado por dos cuentas que atrapan todas las relaciones necesarias para responder. Notemos que, en la tercera producción, a diferencia de las dos primeras, la segunda cuenta (120+120–1=239) no muestra el resultado de la primera operación (240).

En la expresión que aparece arriba a la derecha del pizarrón, referida a la producción del grupo 5 y muy cercana a la escritura que presentaron sus autoras, todas las relaciones están atrapadas en una expresión, formada por una descomposición aditiva del 239 y escrituras auxiliares que aportan otras informaciones (en la Figura 7 reprodujimos ese sector del pizarrón).

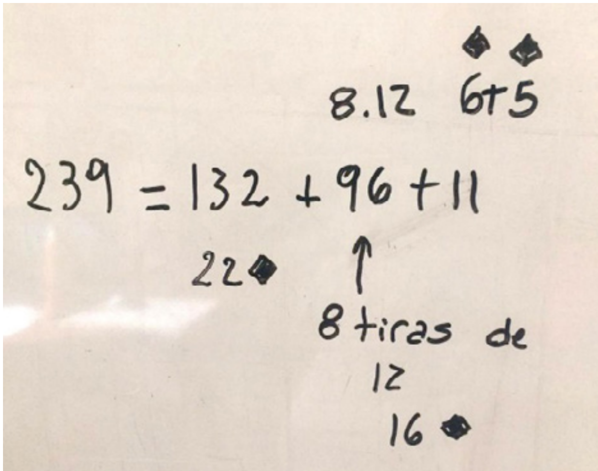


Figura 7. *Escritura en relación con la producción del grupo 5.*

Las estudiantes de este grupo se apoyaron en un collar de 132 mostacillas (analizado en la primera pregunta de este ítem) para luego estudiar la cantidad de cubitos negros presentes en el resto del collar. En el número restante (239–132), encontraron que hay 8 tiras de 12 mostacillas cada una y construyeron el 239 sumando 132+96+11. Notemos que el número 96 es el resultado de la multiplicación 8x12. Las autoras privilegian escribir el 96 en la descomposición aditiva del 239, lo cual hace necesario agregar, como cálculo auxiliar, "8x12" para computar la cantidad de cubitos negros presentes en ese sumando. Incluir ese cálculo como uno de los sumandos que reconstruyen el 239 podría no estar habilitado aún para estas estudiantes.

Para cada uno de estos cuatro procedimientos, el cálculo único que reuniría la información ya desplegada sería:

239=6x40–1

239=6x39+5

239=6x20+6x20–1

239=12x11+12x8+11

Este es el tipo de cálculo para estudiar cuestiones de divisibilidad que se presentará a les estudiantes en los próximos problemas y que será el soporte para, en el futuro, trabajar con expresiones algebraicas. Concebir que toda la información necesaria para responder quede condensada en una única expresión numérica que combine diferentes cálculos es algo que se irá construyendo en el trayecto de enseñanza que pensamos para estes estudiantes.

> *"Concebir que toda la información necesaria para responder quede condensada en una única expresión numérica que combine diferentes cálculos es algo que se irá construyendo en el trayecto de enseñanza que pensamos para estes estudiantes."*

En relación con la acción del docente, entendemos una intención en el orden en que fueron proponiendo las escrituras: las dos primeras escrituras que se discutieron están conformadas por dos cálculos con una cierta temporalidad implícita, mientras que la última recupera en una sola expresión –y sus cálculos auxiliares– todas las cuentas involucradas en el procedimiento. Entre estas, podríamos decir que la tercera producción es una escritura "puente", ya que el cálculo "120+120–1" conserva la traza de la cuenta escrita a la izquierda sin retomar su resultado (240), haciendo innecesaria la primera suma. Gracias a esta progresividad en la complejidad de las escrituras propuestas por el docente, las relaciones construidas y las palabras dichas en torno a los primeros cálculos generan buenas condiciones para que más estudiantes de la clase lleguen a interpretar producciones escritas como la cuarta.

Señalemos además que, en un problema en contexto como este, para lograr que las cuentas reflejen ideas de un proceso de cálculo que da respuesta a una pregunta se requiere la inclusión de marcas del contexto en las escrituras. En nuestro ejemplo, quedaron escrituras "mixtas" –expresiones de cálculos y dibujos de mostacillas– en las cuales la cantidad de cubitos negros contabilizados era controlada por el contexto (el diseño particular del collar).

Finalmente, nos interesa destacar que, con el trabajo colectivo que se generó a partir de las producciones de todos los grupos, se termina construyendo un pizarrón en el que aparecen diferentes escrituras, composiciones y descomposiciones del número 239 que hacen visibles diferentes formas en las que se lo puede expresar, identificando múltiplos de 6 o de 12. Si bien no se menciona de manera explícita la idea de equivalencia de expresiones numéricas, esta noción está latente en el aula.

 ISSN 2422-5975, en línea

Reflexiones finales

Elegimos comenzar la secuencia con un problema en contexto, con el objetivo de que el estudio de diferentes descomposiciones de los números pudiera anclarse en las características de una situación particular. Pensábamos que, de este modo, los cálculos tendrían una finalidad relativa a la situación contextual. En particular, les estudiantes podrían disponer de palabras familiares para discutir en el espacio colectivo en torno a la relación entre las estrategias desplegadas por elles y cada escritura, dotando de significado a las diferentes componentes de un cálculo: factores o términos.

El análisis que hemos presentado de las producciones de tres grupos y de las discusiones que surgieron en el espacio colectivo a partir de la nueva tarea que propone el docente nos permite reafirmar el papel valioso del contexto: muchas expresiones de les estudiantes al referirse a las escrituras se vinculan con relaciones particulares que, en cada caso, se recortan del contexto. Las marcas icónicas (dibujos de cubitos negros) y las frases (por ejemplo "8 tiras de 12") que se van incorporando a las expresiones propuestas por el profesor permitieron reconstruir el modo en que se llegaba a la respuesta. Tanto las expresiones orales de les estudiantes como las marcas que se plasmaron en las escrituras dan cuenta del proceso de construcción de sentido con fuerte apoyo en el contexto.

En relación con la tarea nueva que propone el docente, el análisis que hemos presentado pone de relieve su potencia para que les estudiantes vayan cargando de sentido a las escrituras de cálculos horizontales que combinan operaciones. En particular, en el punto 5.1 identificamos que, al presentar dos cálculos consecutivos, el docente respeta una temporalidad –propia de las experiencias aritméticas de sus estudiantes– que habrá que abandonar al trabajar en álgebra. De este modo, teje una transición entre esas experiencias y las nuevas prácticas algebraicas que están en el horizonte de su enseñanza.

"Tanto las expresiones orales de les estudiantes como las marcas que se plasmaron en las escrituras dan cuenta del proceso de construcción de sentido con fuerte apoyo en el contexto."

Mirando en conjunto los Episodios 1 y 2 analizados anteriormente, destacamos que el par de cálculos que el profesor escribe en cada caso se va configurando para les estudiantes como un modelo de la situación en estudio y, al mismo tiempo, como portador de toda la información necesaria para responder.

En el tercer episodio, miramos la totalidad de un pizarrón que fue construido por el docente "progresivamente" en relación con la complejidad de las escrituras que presenta (desde los dos cálculos consecutivos que se van escribiendo en el primer y segundo ejemplo hasta la cuenta única que se presenta en el cuarto). Los intercambios entre el docente y les estudiantes relevados en los dos primeros episodios nos permiten reconocer que también existe una progresión en la complejidad de las ideas puestas en juego. El discurso que les estudiantes comparten en la clase –con el sostén del profesor– en torno a las primeras escrituras propuestas genera buenas condiciones para que más estudiantes de la clase lleguen a interpretar producciones escritas como la cuarta.

El Episodio 2 nos permite relevar también la complejidad de la actividad nueva que plantea el docente. Entre las producciones de les estudiantes y las escrituras que él propone se cuelan las interpretaciones que el propio docente hace de los escritos de les chiques y también las relaciones que él establece entre la multiplicación y la división, previsiblemente distantes de aquellas que, de manera diversa, están disponibles para les estudiantes.

En nuestra investigación nos propusimos diseñar y estudiar un trayecto que tiende puentes entre las experiencias aritméticas de les estudiantes y las prácticas algebraicas, coincidiendo con las preocupaciones de otres investigadores. Nuestro objetivo fue involucrar a les estudiantes en un tipo de práctica algebraica, a partir del trabajo con expresiones numéricas que incluyen varias operaciones. El problema en cuyo análisis nos hemos detenido en este artículo permite entender que este objetivo necesita un recorrido que contemple tanto el inevitable aporte del docente ofreciendo escrituras como la discusión colectiva en el aula en torno a ellas.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities.* Abingdon: Routledge.

Borsani V. y Sessa C. (2020). Le travail sur des calculs arithmétiques comme une voie d'entrée dans l'algèbre. En **H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner y M. Larguier** (coords.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (pp. 96-111). Quebec: CRIRES. Disponible en: https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-penseealgebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches.

Cambriglia, V. (2018). *Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra* (Tesis de Doctorado). Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Argentina.

Chevallard, Y. (1984). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique.*
Petit x, 5, 51-94.

 ISSN 2422-5975, en línea

Coulange, L., Drouhard, J. P., Dorier, J. L. y Robert, A. (coords.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Grugeon-Allys, B. y Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130.

Kieran, C., Pang, S., Schifter, D. y Ng, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching.* Suiza: Springer.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). The first algebraic learning - The failure of success. Research report. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-Volume 4* (pp. 107-114). Valencia: International Group for the Psychology of Mathematics.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 453-451.

Sackur, C., Drouhard, J. P., Maurel, M. y Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire. *Repères IREM*, 28, 37-68.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones Didácticas para un Estudio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas* (Tesis de Doctorado). Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Argentina.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. *Aportaciones de la investigación.* Números, 77, 5-34.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. En L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3* (pp. 346-356). Alger: Espace Mathématique Francophone.

Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra.* Berlín: Springer.

Vergnaud, G., Cortes, A. y Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. En G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (dirs.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-279). Grenoble: La Pensée Sauvage.