Universidad Pública

Universidad Nacional de General Sarmiento

Instituto del Desarrollo Humano

EL NÚMERO π: MÉTODOS APROXIMATIVOS EN SU EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y SU APLICACIÓN COMO RECURSO DIDÁCTICO

Ada María Balladore

Trabajo Integrador
Para optar al Grado Académico de
Especialista en Didáctica de las Ciencias
Orientación Matemática

Director
Doctor Ruperto Pedro BONET CHAPLE

Co-Directora
Doctora Sara SCAGLIA

Buenos Aires 2014

ÍNDICE

Pág.

RESUMEN

En este trabajo presentamos un recorrido en la historia del número π y sus aproximaciones realizadas desde la época del álgebra geométrica de los griegos, atravesando la etapa del surgimiento del cálculo infinitesimal con los desarrollos en serie, los productos infinitos y las fracciones continuas como herramientas hasta la actualidad con el uso de algoritmos computacionales para obtener un número cada vez mayor de cifras decimales de π correctas.
Esperamos mostrar los hallazgos sobre el número π desde el punto de vista teórico y la necesidad de conocer el contexto histórico, socio cultural y biográfico de los conocimientos a desarrollar para darle un sentido y de esta manera abordar su enseñanza desde un enfoque constructivista. Estos desarrollos proporcionan la posibilidad de elaborar situaciones didácticas en base a la historia y, en este sentido, proponemos actividades basadas en la Teoría de Situaciones Didácticas para las clases de matemáticas que esperamos resulten adecuadas para la enseñanza del número π.

Palabras clave: número π, historia, aprendizaje constructivo, fundamentos teóricos.

ABSTRACT

In the present work an historical evolution of number π and its approximations is presented, which arises from the Greek mathematic, with the contributions of algebra and the geometry, and had its later development since the Infinitesimal Calculus based on the usage of the series development, the infinity products and the continuous fractions as tools, until now, with the using of the computational algorithms. A main aspect observed on this evolution is the design of algorithms each time with more accuracy to compute the number π.
Here we show the principal results obtained relative to the number π, from the point of view historical, cultural, social and chronological, which allow getting the full knowledge, and by consequence, address their teaching from a constructivist approach. This strategy allow the building of pedagogical situations based on the history, and in this way, we propose activities in the mathematical courses based on the Didactical Situation Theory, in which, we hope a deep understanding in the learning of the number π.

Key words: π number, history, constructive learning , theoretical basis.

INTRODUCCIÓN

Diversos autores refieren, y desde diversas posiciones, al rol de la historia en la didáctica de la matemática. Entre otras justificaciones, se alude a que el conocimiento de la historia de los conceptos matemáticos permite al docente encontrar un medio para la comprensión profunda de los mismos y de sus dificultades de aprendizaje, lo que permitirá mejorar su enseñanza y el aprendizaje por parte de los alumnos (González Urbaneja, 2004).
También se afirma que el recorrido por la historia de la matemática nos brinda un mundo de ideas y problemas no solo para el enriquecimiento personal y profesional sino también para motivar la labor de la transferencia del conocimiento, permite conocer las razones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo se ideaban definiciones, teoremas y demostraciones, el nexo entre ellos para forjar teorías, los fenómenos que explicaban y cómo fueron evolucionando hasta la actualidad (González Urbaneja, 2004).
De Guzmán, respecto a la importancia de saber la historia de la matemática afirma:

> La historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado, etc. (Guzmán, 1992, citado por González Urbaneja, 2004, p.18).

y Kline sostiene:

> Las cuidadas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante. [...], el conocimiento de cómo han avanzado los matemáticos dando traspiés, a veces en la oscuridad más absoluta, hasta llegar a reunir las piezas individuales de sus resultados, debería animar a cualquier principiante en la investigación (Kline, 1992, citado por González Urbaneja, 2004, p.18).

Algunos autores reivindican la aplicación del método genético en la enseñanza, mediante el cual se pretende demostrar que para la de comprensión de un concepto, el alumno debe repetir, a grandes rasgos, el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto. Respecto de la importancia de la aplicación del método genético se mencionan palabras de Poincaré (1963, citado por González Urbaneja, 2004, p.22):

> Reflexionar sobre la mejor manera de hacer penetrar las nociones nuevas en los cerebros vírgenes, es al mismo tiempo reflexionar sobre la manera en que estas nociones han sido adquiridas por nuestros antepasados y por

> consiguiente sobre su verdadero origen, es decir, en el fondo, sobre su verdadera naturaleza.

y de F. Klein (1927, citado por González Urbaneja, 2004, p.22):

> [...] Este principio (biogenético), creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la Matemática lo mismo que en cualquiera otra enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico [...]. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se nota con sobrada frecuencia. Para combatirlo gustosamente me he detenido en consideraciones históricas [...]; así ha podido verse cuán lentamente han ido formándose todas las ideas matemáticas, cómo han surgido en forma confusa, pudiera decirse que de procedimientos, y sólo después de un largo desarrollo han llegado a tomar la fuerza rígida y cristalizada de la exposición sistemática.

Según este enfoque, entender las dificultades con las que se encontraron los matemáticos en la historia ayudará a comprender las dificultades que se les presentan a los alumnos, ya que están en la misma situación de encontrar estrategias que se adapten a cada caso.

Es necesario aclarar que esta postura debe ser tomada con cautela. Se debe tener en cuenta que si se pretende la construcción del conocimiento como una construcción social es imposible reproducir las condiciones históricas por lo que no es viable lograr una correlación entre la génesis histórica del concepto y el recorrido del alumno que aprende (Sessa, 2005).

Cantoral (1995) sostiene que para lograr secuencias didácticas apropiadas para los alumnos se tiene que reconocer la complejidad de una teoría moderna y descifrarla desde el punto de vista histórico-epistemológico.

También el estudio de la historia de la matemática es importante en la autoformación permanente del profesor y al respecto se mencionan palabras de Malet (1983, citado por González Urbaneja, 2004, p.24) "bien sabemos que la actitud del profesor hacia la materia que explica es una de las enseñanzas más importantes que transmitimos al alumno". Conocer el devenir histórico modifica la actitud para enseñar matemática, nos presenta una visión de creación continua y un accionar intuitivo que pueden inducir un clima de investigación y aprendizaje activo en el aula y así lograr desarrollar el espíritu creativo del alumno. Generalmente la postura del docente es suponer que el aprendizaje de los conceptos debe ser trivial para los alumnos. El docente que conoce la historia comprenderá las dificultades de los contenidos y buscará estrategias que faciliten la introducción de nuevos conceptos.

En este trabajo se presenta la evolución histórica de las estimaciones del número π, se ofrece como una alternativa de instrumento didáctico, destacando los matemáticos a los que se debe la introducción de nuevos conceptos, la demostración de teoremas y la resolución de problemas.

Se ponen de manifiesto las épocas donde los problemas todavía eran abordados con una visión geométrico-euclidiana para luego avanzar a través del cálculo de Newton y de Leibniz donde se tratan cantidades variables.
El número π forma parte de un largo repertorio de importantes temas que se prestan especialmente para ser tratadas siguiendo su evolución histórica.
La búsqueda de aproximaciones de π ha generado un buen número de hallazgos en la historia de la matemática y permitió resolver el problema griego de la cuadratura del círculo probando que era imposible al demostrar Lindemann que π es trascendente.
En este contexto, este trabajo se organiza en tres secciones. La primera incluye un recorrido histórico a través de las aproximaciones realizadas de π más destacadas por las estrategias geométricas utilizadas y, a partir de la algebrización de la geometría, por las nuevas herramientas desarrolladas. En la segunda se presentan las fundamentaciones matemáticas de los métodos más importantes para estimar π a lo largo de la historia que fueron descriptos en la primera sección y de la naturaleza de π como número real: es irracional y trascendente concluyendo la sección con una tabla resumen cronológico de las estimaciones obtenidas hasta la actualidad. La tercera sección está dedicada a ideas para una clase de matemática para la enseñanza de π fundamentada por elementos teóricos de educación matemática. Por último, se describen las conclusiones y las perspectivas que se abren tras la realización de este trabajo.

SECCIÓN 1
EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE π

A continuación se describen algunas de las aproximaciones de π que sobresalen a lo largo de la historia.

1. ANTIGUO EGIPTO

Los egipcios debieron desarrollar la base de los cálculos necesarios para sus monumentales construcciones y, según se desprende del Papiro de Ahmes o Papiro Rhind [1]que data de aproximadamente del siglo 20 a.C., poseían una especie de álgebra con la que obtenían las fórmulas geométricas de superficies y volúmenes.
En él se puede leer "Corta 1/9 del diámetro y construye un cuadrado sobre la longitud restante. Este cuadrado tiene la misma área que el círculo".
De esta manera $\pi = \frac{256}{81} \cong 3{,}1605$, una aproximación con error menor a los dos centésimos.
También se traduce del Papiro de Ahmes o Papiro Rhind[1] que posteriormente usaron una aproximación con menor error mediante el cálculo del área de un círculo con diámetro de nueve unidades y que con la solución obtenida resulta π igual a 3,1405. [4].
Lo que pone de manifiesto que ya manejaban relaciones entre el diámetro de una circunferencia y su longitud, como también relaciones entre el área del círculo (conocido su diámetro) y el área del cuadrado.

Foto 1. Papiro de Ahmes o Papiro Rhind[1]

[1] Papiro Ahmes o Papiro Rhind http://es.wikipedia.org/wiki/Papiro_Rhind

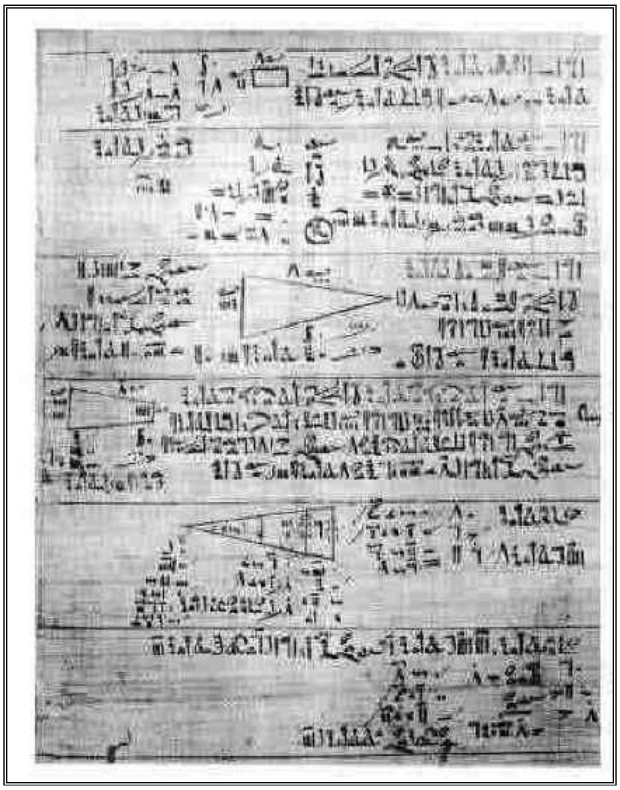

Foto 2. Ampliación del Papiro Ahmes o Papiro Rhind[2]

2. BABILONIA

Por la misma época los babilonios eran capaces de calcular las raíces positivas de una ecuación cuadrática y ya conocían las relaciones pitagóricas en un triángulo rectángulo. Según aparece en tablillas halladas en la ciudad de Susa[3] utilizaban para π el valor $\mathbf{3+\frac{1}{8}} \cong 3{,}125$. ("El número Pi (II): Babilonia", s.f.).

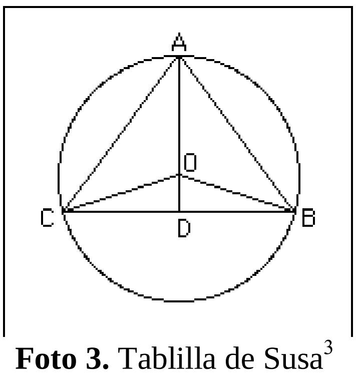

Foto 3. Tablilla de Susa[3]

[2] Ampliación del Papiro Ahmes o Papiro Rhind http://es.wikipedia.org/wiki/Papiro_Rhind
[3] Tablilla de Susa http://lapalmera.blogspot.com.ar/2006/12/el-nmero-pi-ii-babilonia.html

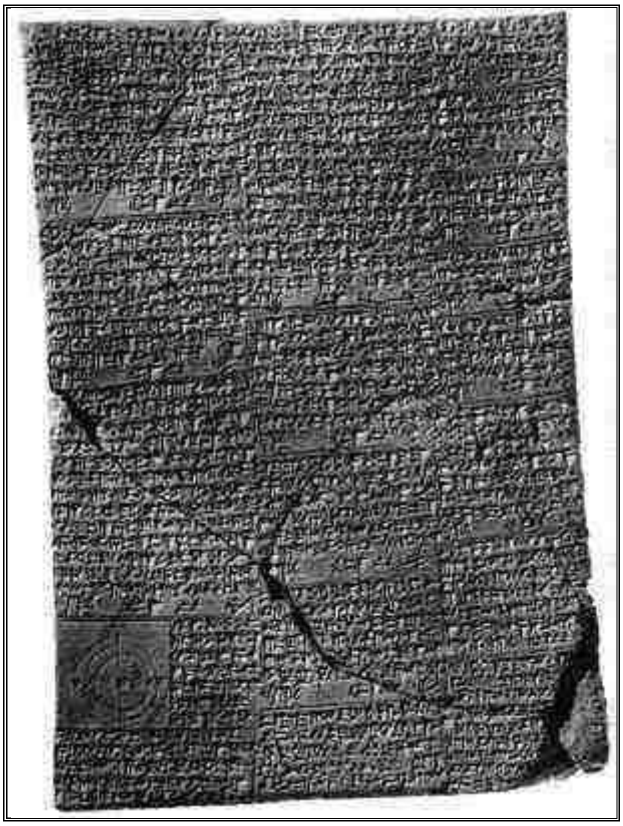

Foto 4. Tablilla Babilónica con 17 Problemas Matemáticos[4]

3. REFERENCIAS BÍBLICAS

En la Biblia, en el Libro Primero de Los Reyes, capítulo 7, en las especificaciones para construir el templo de Salomón, aparece una cita del número π que data de alrededor del 950 a.C. haciendo referencia a "El Mar de Bronce", nombre dado a una gran fuente de bronce en el templo de Salomón, "Él hizo además el Mar de metal fundido, que medía cinco metros de diámetro y tenía forma circular; su altura era de dos metros y medio, y una cuerda de quince metros medía su circunferencia" de donde se deduce que para los hebreos el valor de π era igual a 3, que es una aproximación muy burda comparada con las realizadas por los egipcios y babilonios siete siglos antes. ("El número Pi (III): La Biblia", s.f.).

[4] Tablilla Babilónica con 17 Problemas Matemáticos, http://platea.pntic.mec.es/aperez4/html/babiegipt/babiegipto.html

Foto 5. Referencia en la Biblia[5]

[5] Referencia en la Biblia http://lapalmera.blogspot.com.ar/search/label/pi

4. CHINA

En la primitiva civilización China**,** en el "Chiu Chang Suan Ching", ("Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático"), del siglo II a.C., se utiliza $\pi = 3$, valor que permaneció en uso durante mucho tiempo.
Alrededor del 130, Zhang Heng calculó $\pi = 3{,}1724$ y posteriormente, usando $\sqrt{10}$, calculó $\pi = 3{,}162$ y en su libro "Xian Ling" también calculó $\pi = \frac{730}{232} \cong 3{,}1466$. En el siglo tercero, Liu Hui hizo un cálculo más preciso[6] y con su algoritmo obtuvo el valor de 3,14159. Más tarde, Zu Chongzhi aproximó π a $\frac{355}{113} \cong 3{,}141592$ siendo el cálculo más exacto de π entre los antiguos chinos. ("El número π", s.f.; Pellini, s.f.).

5. INDIA

India no tiene una continuidad en las contribuciones matemáticas importantes. Referencias al número π aparecen en los documentos llamados Siddhantas del 380 en los cuales los historiadores occidentales ven una clara influencia griega. Son sistemas astronómicos en los que se da a π el valor $\mathbf{3+\frac{177}{1250}} \cong 3{,}1416$.
Posteriormente, Aryabhata autor de varios tratados sobre matemática y astronomía, en su obra principal, *Aryabhatiya*, da una regla con la que se obtiene ese mismo valor "Suma 4 a 100, multiplica por 8 y súmale 62.000. El resultado da aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 20.000" ("El número π", s.f.).

6. GRECIA

Los griegos tenían clara la diferencia entre el cálculo aproximado de π y su construcción teórica exacta. Arquímedes, alrededor del 250 a.C., hizo grandes aportes concibiendo como método de aproximación a la circunferencia el inscribir y circunscribir polígonos regulares de un número cada vez mayor de lados y con ello logró la acotación $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, el valor de π aproximadamente entre 3,14085 y 3,142857 (Pérez Fernández, 2001). El enfoque teórico se orientó hacia la cuestión de si era o no posible la construcción de π con regla y compás. Todos los intentos fueron infructuosos.
En el siglo II, Ptolomeo proporciona el valor $\mathbf{\frac{377}{120}} \cong 3{,}1416$. **(**"Número π", s.f.).

7. ISLAM

Durante su primer siglo el imperio musulmán no se destaca por su desarrollo científico y su interés por el conocimiento y la cultura. Recién después de su expansión por Europa y África se dedicaron a estudiar los resultados de las otras culturas traduciendo sus obras al árabe. Las obras que más influenciaron en ellos fueron "El Almagesto" de Ptolomeo y "Los Elementos" de Euclides.
Un matemático importante fue Al-Khashi quien fue considerado como el inventor de las fracciones decimales. Entre sus escritos sobre álgebra y geometría se destaca "El Tratado del Círculo", escrito en árabe en 1424, donde realiza una estimación de π con 16 decimales correctos ("El número π", s.f.).

[6] Teniendo en cuenta el valor de π conocido en la actualidad.

El descubrimiento de fórmulas que aportan métodos de cálculo muchos más potentes permitió mejorar considerablemente la estimación de π pero separándose de su origen geométrico.

8. EUROPA SIGLO XVI A XVIII

En 1579 el matemático francés François Viète usó la siguiente fórmula para obtener una expresión de π (Bagazgoitia, 2007):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \qquad (1.1)$$

Los europeos dominaron el desarrollo de la matemática después del renacimiento. Durante el siglo XVII tuvieron lugar los más importantes avances en la matemática desde la era de Arquímedes y Apolonio.
En 1655 John Wallis descubre una notable expresión de π como producto infinito al igual que Viète pero donde sólo aparecen operaciones racionales lo cual mejora el cálculo respecto del procedimiento de Arquímedes o de Viète (Pérez Fernández, 2001):

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{\pi}{2} \qquad (1.2)$$

En 1665 Brounker encuentra un desarrollo en fracción continua (Goyanes, 2007):

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}} \qquad (1.3)$$

En 1682 Leibniz encuentra el desarrollo en serie de π usando los resultados de Gregory para el desarrollo de $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 \cdots$ (Goyanes, 2007):

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right) \qquad (1.4)$$

y de esta manera expresa su conocida fórmula para la estimación de π:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad (1.5)$$

En sus trabajos publicados en 1736 y escritos en 1665, Newton propone el desarrollo en serie de π (Pérez Fernández, 2001):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12}-\frac{5}{5\cdot2^5}-\frac{1}{28\cdot2^7}-\frac{1}{72\cdot2^9}-\cdots\right) \qquad (1.6)$$

y con 22 términos obtiene 16 cifras decimales correctas.
Usando la serie de Gregory-Leibniz, en 1699 Sharp obtiene (Goyanes, 2007):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}+\cdots\right) \qquad (1.7)$$

que le permite calcular 71 cifras decimales correctas; y en 1706 John Machin obtiene (Bagazgoitia, 2007; Pérez Fernández, 2001):

$$\frac{\pi}{4} = 4arc\,tan\frac{1}{5} - \ arc\,tan\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right) \qquad (1.8)$$

que le permite calcular 100 cifras decimales correctas.

En esta época ya se usaba el símbolo π para representar la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. En 1706, el matemático inglés William Jones en su libro "Introducción a la matemática" propuso usarlo, por ser la inicial de la palabra griega periphereia que, por ser griega, empieza con la letra π y que significa circunferencia (la periferia del círculo), pero su uso se generalizó con el matemático suizo Euler en 1748 con su obra "Introducción al cálculo infinitesimal" (“El número π”, s.f.).

Durante el siglo XVIII Euler no sólo mejora las aproximaciones de π[7] sino que las obtiene mediante distintas expresiones, usando:

Series (Goyanes, 2007; “El número π”, s.f.): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (1.9)

$$5\arctan\frac{1}{7} + \ 2\arctan\frac{3}{79} = \frac{\pi}{4} \qquad (1.10)$$

Fracciones continuas (Courant y Robbins, 1971):

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}} \qquad (1.11)$$

Productos infinitos (Goyanes, 2007):

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{p\ \text{primo}} \frac{p^2}{p^2-1} \qquad (1.12)$$

Euler y los demás matemáticos lograron en estas expresiones, mediante series y productos infinitos, establecer un lazo de unión entre los números enteros y π.

Durante el siglo XVIII se descubrieron más fórmulas del estilo de la de Machin. Se destacan la de Hermann (“El número π”, s.f.),

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \ \arctan\frac{1}{7} \qquad (1.13)$$

y la de Hutton (“El número π”, s.f.),

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \ \arctan\frac{1}{7} \qquad (1.14)$$

[7] Logrando mayor cantidad de decimales correctos teniendo en cuenta el valor de π conocido en la actualidad.

utilizada por Vega en 1794 para calcular 137 decimales correctos.

9. EN EL MUNDO A PARTIR DEL SIGLO XIX

Para obtener una mayor cantidad de decimales correctos en el desarrollo del número π se siguieron utilizando fórmulas que usan el arco tangente, destacando ("El número π", s.f.):

Strassnitzky $$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \qquad (1.15)$$

Gauss $$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} \qquad (1.16)$$

Störmer $$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239} \qquad (1.17)$$

El inglés William Shanks calculó a mano 707 decimales (527 correctos) utilizando la fórmula de Machin. El cálculo le insumió 15 años y terminó en 1874 (Bagazgoitia, 2007).
Ya en el siglo XX, para superar esta marca hubo que esperar hasta 1946, cuando Ferguson detecta el error de Shanks en el decimal 528. El cálculo lo realizó con la ayuda de una calculadora de la época llegando, en 1947, a los 808 decimales correctos.
En 1949 llegaron a calcularse 1.120 decimales correctos y a partir de esta fecha empieza la era de la computadora ("El número π", s.f.).
Usando el ENIAC[8], en 1949 y a sugerencia de Von Neumann, Wrench y Smith calcularon 2.037 decimales y en 1958, Genuys, usando una IBM 704[9] calcula 10.000 decimales correctos. En ambos casos se usó la fórmula de Machin y en las estimaciones posteriores se usaron las fórmulas de Gauss y Störmer para calcular y comprobar ("El número π", s.f.).
Se siguieron utilizando estas fórmulas del arco tangente hasta la mitad de la década de los 80 pero, debido a la lentitud de los procesos para lograr mayor cantidad de cifras decimales correctas, surge la necesidad de crear algoritmos más eficaces.
Una solución fue crear un algoritmo usando la serie descubierta por Ramanujan en 1914 ("El número π", s.f.):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390\,n)}{(n!)^4 396^{4n}} \qquad (1.18)$$

En 1800 Pfaff ya estudió y formalizó el algoritmo de Arquímedes usando una sucesión de convergencia lineal ("El número π", s.f.).
En 1976 el algoritmo de Brent-Salamin, o también llamado de Gauss-Legendre usa una sucesión similar a la de Pfaff pero que converge de forma cuadrática. ("El número π", s.f.).
En 1984 el algoritmo de los hermanos Borwein también usa una convergencia cuadrática y en 1985 crean otros dos algoritmos de convergencias cúbica y cuártica respectivamente ("El número π", s.f.).

[8] **ENIAC** es un acrónimo de ***E**lectronic **N**umerical **I**ntegrator **A**nd **C**omputer* (Computador e Integrador Numérico Electrónico), utilizada por el Laboratorio de Investigación Balística del Ejército de los Estados Unidos.
[9] **IBM 704**, fue la primera computadora producida en masa con hardware basado en aritmética de punto flotante, fue introducida por IBM en abril de 1954.

Estos algoritmos se fueron perfeccionando y fue avanzando la tecnología permitiendo calcular cada vez mayor cantidad de decimales correctos y en menos tiempo, ya en el siglo XXI, las computadoras son capaces de obtener números que poseen una inmensa cantidad de decimales correctos, en 2009 se hallaron más de dos billones y medio de decimales de π mediante el uso de una computadora T2K Tsukuba System[10] siendo el tiempo empleado por el CPU de 73 horas y 36 minutos para calcular 2.576.980.370.000 decimales ("Número π", s.f.).

[10] La supercomputadora T2K Tsukuba System pertenece al Centro de Ciencias de la Computación de la Universidad de Tsukuba (Japón) y puede realizar 95 billones de cálculos por segundo.

SECCIÓN 2
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS SOBRE π

1. MÉTODOS MÁS IMPORTANTES DE ESTIMACIONES DE π

Los siguientes procedimientos para la estimación de π, comentados en la sección anterior, son los más sobresalientes ejemplos de métodos que utilizan para los cálculos un álgebra geométrica (en el siglo III a.C.) y desarrollos en series y productos infinitos (durante los siglos XVI, XVII y XVIII).

2.1.1. ARQUÍMEDES

La Proposición XII.2 de "Los Elementos" dice que la razón entre el área de un círculo y su diámetro al cuadrado es siempre la misma, introduciendo una constante vinculada a los círculos, la cual Euclides no pensó en cuantificar debido a su proceder estrictamente geométrico. En cambio Arquímedes obtiene una magnífica acotación de π, publicada en su libro "Sobre la medida del círculo", algoritmo que a posteriori se llamó el Algoritmo de Arquímedes.
El algoritmo demostrado por Arquímedes unos 250 a.C. fue durante casi 1.800 años la forma más eficiente para estimar π.
Para calcular el número π, Arquímedes inscribe y circunscribe polígonos regulares de n lados en una circunferencia de radio uno y calcula el perímetro de dichos polígonos. Su objetivo es aproximar la longitud de la circunferencia por defecto y por exceso[11].

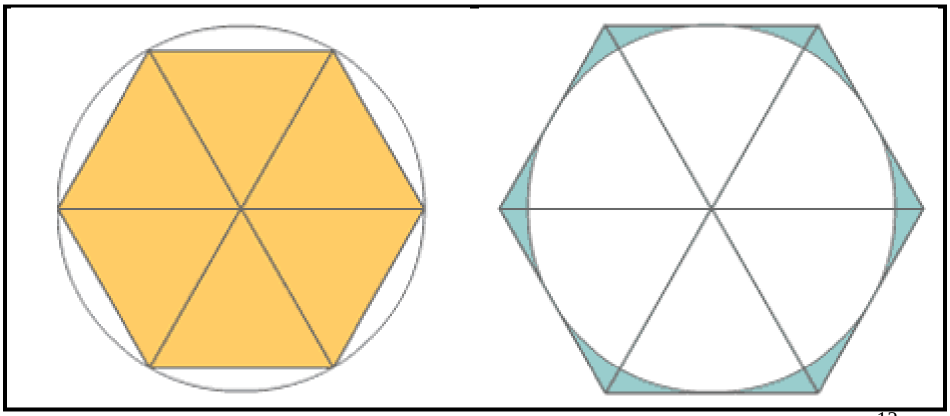

Fig. 1- Aproximaciones de la circunferencia mediante polígonos[12]

Según la traducción de Heath (1921, citado por Echeverry, 2009, p.29), Arquímedes usó las razones trigonométricas para sus cálculos, quedando los perímetros expresados como:

$p_n = N \tan \frac{\pi}{N}$ para los polígonos circunscriptos (2.1)

---

[11] Arquímedes usa el método de exhausión: en una circunferencia de radio uno, se inscribe un polígono regular de $3x2^{n-1}$ lados, cuyo perímetro es q_n; se circunscribe otro polígono regular de $3x2^{n-1}$ lados, cuyo perímetro es p_n. Resultan dos sucesiones de números, $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, que convergen a π.
[12] Polígonos (hexágonos) inscriptos y circunscriptos a una circunferencia unitaria: N= 6, n = 2 ($N = 3.2^{n-1}$).

$q_n = N \sin\frac{\pi}{N}$ para los polígonos inscriptos (2.2)

donde $N = 3.2^{n-1}$ es el número de lados ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).
Del trabajo de Arquímedes se deduce una fórmula de recurrencia para estimar π (Echeverry, s.f.)[13]:

$$p_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \; ; \qquad q_{n+1} = \sqrt{p_{n+1} q_n} \tag{2.3}$$

De las fórmulas (2.1) y (2.2) se cumple que $p_{n+1} = 2N \tan\frac{\pi}{2N}$ y $q_{n+1} = 2N \sin\frac{\pi}{2N}$

Por lo tanto:[14]

$$\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = \frac{1}{N\,tan\frac{\pi}{N}} + \frac{1}{N\,sin\frac{\pi}{N}} = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{tan\frac{\pi}{N}} + \frac{1}{sin\frac{\pi}{N}}\right] = \frac{1}{N}\left[\frac{cos\frac{\pi}{N}}{sin\frac{\pi}{N}} + \frac{1}{sin\frac{\pi}{N}}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{N}+1}{\sin\frac{\pi}{N}}\right] = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{\pi}{N}+1}}\right] = \frac{1}{2N}\cdot\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2N}} = \frac{2}{p_{n+1}} \qquad \text{y} \tag{2.4}$$

$$p_{n+1}q_n = 2N\tan\frac{\pi}{2N}\cdot N\sin\frac{\pi}{N} =$$

$$= 2N\tan\frac{\pi}{2N}\cdot N\tan\frac{\pi}{2N}\left(1+\cos\frac{\pi}{N}\right) =$$

$$= 2N\left(\tan\frac{\pi}{2N}\right)^2\cdot 2N\left(\cos\frac{\pi}{2N}\right)^2 = \left(2N\sin\frac{\pi}{2N}\right)^2 =$$

$$= q_{n+1}^2 \tag{2.5}$$

Despejando de (2.4) y (2.5) queda:

$$p_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad \text{y} \quad q_{n+1} = \sqrt{p_{n+1} q_n} \tag{2.6}$$

Comenzando con $p_1 = 2\sqrt{3} \cong 3{,}4641\; y\; q_1 = 3$ cuando el número de lados de los polígonos es N= 6, se obtienen:

$$p_2 = \frac{2p_1 q_1}{p_1 + q_1} \cong 3{,}2153 \qquad y \qquad q_2 = \sqrt{p_2 q_1} \cong 3{,}1058.$$

Así sucesivamente se construyen las dos sucesiones:

---

[13] Usa la acotación $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$

[14] Identidades trigonométricas usadas: $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$p_1;\ p_2;\ p_3 \cdots = 3{,}4641;\ 3{,}2154;\ 3{,}1597;\ 3{,}1409;\ 3{,}1427;\ 3{,}1419;\ 3{,}1417;\ \cdots$
$q_1; q_2;\ q_3 \cdots = 3{,}0000;\ 3{,}1058;\ 3{,}1326;\ 3{,}1394;\ 3{,}1410;\ 3{,}1415;\ 3{,}1416;\ \cdots$
y ambas convergen a π. La convergencia del algoritmo es lineal, cada cinco iteraciones se obtienen tres cifras correctas de π. Para n = 7 este algoritmo proporciona la acotación 3,1415 < π < 3,1417 usando fracciones que era la única expresión conocida. Durante un período de aproximadamente 1.800 años todas las fórmulas que se obtuvieron para π se basaron en la idea de aproximar la circunferencia mediante polígonos regulares y tienen la forma de algoritmos iterativos. En 1579 Viète comienza a obtener expresiones diferentes para aproximar π.

2.1.2. VIÈTE

La fórmula de Viète se basa en un producto infinito y la obtiene por métodos geométricos. También calcula π, usando polígonos de $6 \cdot 2^{16} = 393.216$ lados, con 9 cifras decimales.

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots \qquad (2.7)$$

Demostración (“Vieta's Formula for Pi”, s.f.):

$1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$ y usando la fórmula del seno del ángulo doble $n-1$ veces

$$\begin{aligned}
&= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\
&= 2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{4} \\
&= 2\left(2\left(2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\right)\cos\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{4} \\
&= \cdots \\
&= 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Así:

$$\frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

Entonces, multiplicando y dividiendo por π el miembro de la izquierda:

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

y usando las fórmulas del coseno del ángulo mitad se reemplaza en la última igualdad cada coseno por su expansión en raíces cuadradas:

$$\cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k-2}}}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k-3}}}}}}{2} = \cdots \text{ quedando}$$

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \times \cdots$$

Usando que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ y como $\frac{\pi}{2^n} \to 0$ cuando n $\to \infty$ resulta:

$$\frac{2}{\pi} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \times \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \times \cdots$$

La fórmula proporciona una representación de π como un producto infinito.

Hacia 1650 los métodos analíticos de Descartes y Fermat, precursores del cálculo infinitesimal, comenzaron a sustituir a los métodos geométricos obteniéndose resultados usando productos infinitos.

2.1.3. WALLIS

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \qquad (2.8)$$

Demostración (“Producto de Wallis”, s.f.):
Como las raíces de $\sin x$ son $n\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$, el $\sin x$ se puede expresar como un producto infinito de factores lineales de sus raíces.[15]
Por lo tanto:

$$\frac{\sin x}{x} = k\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \text{ con k constante}$$

Para encontrar la constante k, se toma el límite en ambos miembros para $x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(k\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = k$$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ resulta $k = 1$ por lo que:
$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots$ aplicando diferencia de cuadrados

[15] Si α es raíz de un polinomio entonces $\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)$ es un factor.

$= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ (fórmula de Euler-Wallis para el seno)

Realizando la sustitución $x = \frac{\pi}{2}$, como $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, queda:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Entre 1665 y 1680 Newton y Leibniz desarrollaron de forma independiente los principios básicos del cálculo infinitesimal que proporcionaron una poderosa herramienta de cálculo no sólo para la matemática sino también para la física y otras ciencias. Estos métodos tienen también su repercusión en la obtención de nuevas fórmulas para π usando series infinitas con cierto orden de convergencia.

2.1.4. LEIBNIZ

A pesar de los avances Leibniz descubre su serie utilizando técnicas fundamentalmente geométricas ("Serie de Leibniz: Fórmula para Pi", s.f.).

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} \qquad (2.9)$$

Demostración ("Serie de Leibniz", s.f.):
Sea la serie geométrica infinita:

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{convergente para } |x|<1$$

Integrando los dos miembros de la igualdad, se obtiene una serie de potencias para la función arcotangente:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots = arc\tan x \qquad \text{convergente para } |x|<1$$

Haciendo $x = 1$ se obtiene la fórmula de Leibniz (el arcotangente de 1 es $\pi/4$). El problema de este razonamiento es que 1 no está en el dominio de convergencia de esta serie de potencias, por lo que hace falta un argumento más sólido para mostrar que la serie converge a $arc\tan 1$ para $x = 1$.
Considérese el siguiente desarrollo en serie:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Para $|x|<1$ la fracción del miembro derecho es el resto de la serie geométrica. Esta ecuación no utiliza series infinitas, y se cumple para cualquier valor real de x. Integrando los dos miembros de 0 a 1, se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$

A medida que $n \to \infty$ la suma de los términos de la ecuación, excepto la integral, tiende a la serie de Leibniz, y la integral tiende a 0 dado que:
Como $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq 1 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$ y por propiedad de la integral

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \to 0 \text{ cuando n } \to \infty$$

2.1.5. MACHIN

Machin obtiene fórmulas que numéricamente dan mejores resultados que la fórmula de Leibniz porque convergen más rápidamente, por ejemplo, la siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{239} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right) \quad (2.10)$$

Para obtener la fórmula de Machin (Bagazgoitia, 2007) se parte de un ángulo α tal que $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ y usando que $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$ se obtiene que

$$\tan 2\alpha = \frac{5}{12} \quad y \quad \tan 4\alpha = 1 + \frac{1}{119}$$

Por lo tanto, usando que $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ resulta

$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1+\tan 4\alpha} = \frac{1}{239}$ entonces

$arc\ tan\ \frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

2.1.6. EULER

Euler obtuvo una colección de fórmulas que involucran a π, por ejemplo, las dos dadas a continuación:

a) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (2.11) b) $\frac{\pi}{4} = arctan\ \frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ (2.12)

Demostración de Euler (Goyanes, 2007):
a) Partió del desarrollo en serie de la función $\frac{\sin x}{x}$:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

y consideró la ecuación $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 0$

Las soluciones de esta ecuación son las soluciones de $\sin x = 0 \;\; con\, x \neq 0$, es decir: $\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \cdots$. Imaginó la serie infinita como si se tratase de un polinomio y procedió a descomponerlo en factores:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Realizando los productos y agrupando los términos en x^2, el coeficiente de x^2 para la función $\frac{\sin x}{x}$ es

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y del desarrollo en serie de $\frac{\sin x}{x}$ el coeficiente de x^2 es $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ y por el teorema de unicidad de desarrollo en serie los dos coeficientes deben ser iguales, por lo tanto

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y multiplicando por $-\pi^2$ ambos miembros de la igualdad se obtiene el resultado buscado.

b) Fórmula "tipo Machin" cuya demostración geométrica es simple.

Demostración ("El número π", s.f.):

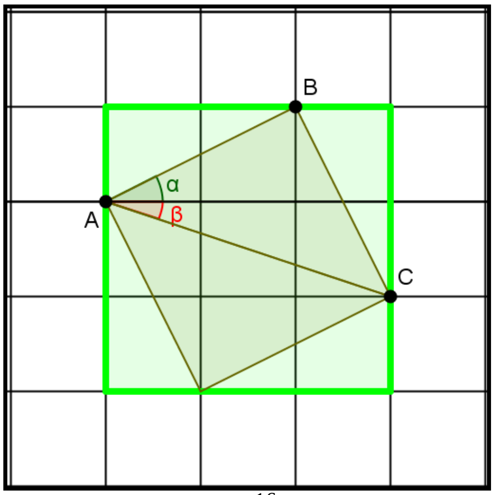

Figura 2[16]

El triángulo ABC es rectángulo en B e isósceles. Por lo tanto el ángulo α+β= $\frac{\pi}{4}$, además $\alpha = \arctan\frac{1}{2} \;\; y \;\; \beta = arctan\frac{1}{3}$ (por construcción)

Entonces α+β= $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3}$

[16] Visualización geométrica para la demostración de la fórmula de Euler.

2.1.7. SÍNTESIS CRONOLÓGICA DE LAS ESTIMACIONES DE π

Fecha	**¿Quién?**	**Valor estimado de π**
Siglo 26 a.C.	Egipto *Gran Pirámide de Giza* y la *Pirámide de Meidum*	3+1/7 = 22/7 = 3,143
Siglo 20 a.C.	Papiro *Rhind*	$(16/9)^2$ = 3,160493 ...
Siglo 19 a.C.	Matemáticos babilónicos	25/8 = 3,125
Siglo 9 a.C.	*Shatapatha Brahmana*, India	339/108 = 3,138888 ...
434 a.C.	Anaxágoras intentó la cuadratura del círculo con regla y compás	
250 a.C.	Arquímedes	$223/71 < \pi < 22/7$ ($3,140845... < \pi < 3,142857...$)
20 a.C.	Vitruvio	25/8 = 3,125
5	Liu Xin	3,1457
130	Zhang Heng	$\sqrt{10}$ = 3,162277... 730/232 = 3,146551 ...
150	Ptolomeo	377/120 = 3,141666 ...
250	Wang Fan	142/45 = 3,155555 ...
263	Liu Hui	$3,141024 < \pi < 3,142074$ 3927/1250 = 3,1416
400	Él Chengtian	111035/35329 = 3,142885 ...
480	Zu Chongzhi	$3,1415926 < \pi < 3,1415927$
499	Aryabhata	62832/20000 = 3,1416
640	Brahmagupta	$\sqrt{10}$ = 3,162277 ...
800	Al Khwarizmi	3,1416
1150	Bhaskara II	3,14156
1220	Fibonacci	3,141818
Todos los registros de 1400 en adelante se dan como el número de posiciones decimales correctas.		
1400	Madhava de Sangamagrama probablemente descubrió la expansión en serie infinita de potencias de π, ahora conocida como la fórmula de Leibniz para π	10 decimales
1424	Jamshid al-Kashi	16 decimales
1573	Valentino Otho	6 decimales
1579	François Viète	9 decimales
1593	Adriaan van Roomen	15 decimales
1596	Ludolfo van Ceulen	20 decimales
1615		32 decimales

SÍNTESIS CRONOLÓGICA DE LAS ESTIMACIONES DE π (continuación)

1621	Willebrord Snell (Snellius), discípulo de Van Ceulen	35 decimales
1630	Christoph Grienberger	38 decimales
1665	Isaac Newton	16 decimales
1681	Takakazu Seki	11 decimales - 16 decimales
1699	Abraham Sharp	71 decimales
1706	John Machin	100 decimales
1706	William Jones introdujo la letra griega "π"	
1719	Thomas Fantet de Lagny calculó 127 posiciones decimales, pero no todas eran correctas	112 decimales
1722	Toshikiyo Kamata	24 decimales
1722	Katahiro Takebe	41 decimales
1739	Yoshisuke Matsunaga	51 decimales
1748	Leonhard Euler utiliza la letra griega π en su libro "Introducción al análisis infinitesimal" y aseguró su popularidad.	
1761	Johann Heinrich Lambert demostró que π es irracional	
1775	Euler apuntó a la posibilidad de que π pudiera ser trascendente	
1794	Jurij Vega calculó 140 posiciones decimales, pero no todas son correctas	137 decimales
1794	Adrien-Marie Legendre demostró que π^2(y por lo tanto π) es irracional, y mencionó la posibilidad de que π pudiera ser trascendente.	
1841	William Rutherford calculó 208 decimales, pero no todos eran correctos	152 decimales
1844	Zacarías Dase y Strassnitzky calculó 205 posiciones decimales, pero no todas eran correctas	200 decimales
1847	Thomas Clausen calculó 250 posiciones decimales, pero no todas eran correctas	248 decimales
1853	Lehmann	261 decimales
1853	William Rutherford	440 decimales
1855	Richter	500 decimales
1874	William Shanks tomó 15 años para calcular 707 decimales, pero no todos eran correctos (el error fue encontrado por Ferguson en 1946)	527 decimales
1882	Ferdinand von Lindemann demostró	

SÍNTESIS CRONOLÓGICA DE LAS ESTIMACIONES DE π (continuación)

	que π es transcendente	
1897	El estado de Indiana de EE.UU. estuvo a punto de legislar el valor de 3,2 para π	
1910	Srinivasa Ramanujan encuentra varias series infinitas rápidamente convergente de π, que pueden calcular 8 decimales de π con cada término en la serie. Desde 1980, las series se han convertido en la base de los algoritmos más rápidos actualmente utilizados por Yasumasa Kanada y los hermanos Chudnovsky para estimar π.	
1946	D.F.Ferguson	620 decimales
1947	Ivan Niven dio una muy elemental prueba de que π es irracional	
01- 1947	D.F. Ferguson	710 decimales
09- 1947	D.F. Ferguson	808 decimales
Todos los registros de 1949 en adelante se han calculado con computadoras electrónicas.		
1949	D.F. Ferguson y John Wrench	1.120 decimales
1949	John Wrench y Smith L.R. fueron los primeros en utilizar una computadora electrónica, el ENIAC, para estimar π (tardó 70 horas)	2.037 decimales
1953	Kurt Mahler demostró que π no es un número de Liouville	
1954	S.C. Nicholson y Jeenel J.	3.092 decimales
1957	G.E. Felton	7.480 decimales
01-1958	Francois Genuys	10.000 decimales
05-1958	G.E. Felton	10.020 decimales
1959	Francois Genuys	16.167 decimales
1961	IBM 7090	20.000 decimales
1961	Daniel Shanks y John Wrench	100.265 decimales
1966	Jean Guilloud y Filliatre J.	250.000 decimales
1967	Jean Guilloud y Dichampt M.	500.000 decimales
1973	Jean Bouyer Guilloud y Martin Bouyer	1.001.250 decimales
1981	Kazunori Miyoshi y Yasumasa Kanada	2.000.036 decimales
1981	Jean Guilloud	2.000.050 decimales
1982	Yoshiaki Tamura	2.097.144 decimales
1982	Yoshiaki Tamura y Yasumasa Kanada	4.194.288 decimales
1982	Yoshiaki Tamura y Yasumasa Kanada	8.388.576 decimales
1983	Yasumasa Kanada , Yoshino Sayaka	16.777.206 decimales

SÍNTESIS CRONOLÓGICA DE LAS ESTIMACIONES DE π (continuación)

	y Yoshiaki Tamura , HITAC M-280H	
10-1983	Yasunori Ushiro y Yasumasa Kanada	10.013.395 decimales
10-1985	Bill Gosper	17.526.200 decimales
01-1986	David H. Bailey	29.360.111 decimales
09-1986	Yasumasa Kanada , Yoshiaki Tamura	33.554.414 decimales
10-1986	Yasumasa Kanada , Yoshiaki Tamura	67.108.839 decimales
01-1987	Yasumasa Kanada , Yoshiaki Tamura , Kubo Yoshinobu y otros	134.214.700 decimales
01-1988	Yasumasa Kanada y Yoshiaki Tamura	201.326.551 decimales
05-1989	Gregory V. y David V. Chudnovsky	480.000.000 decimales
06-1989	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	535.339.270 decimales
07-1989	Yasumasa Kanada y Yoshiaki Tamura	536.870.898 decimales
08-1989	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	1.011.196.691 decimales
19/11/89	Yasumasa Kanada y Yoshiaki Tamura	1.073.740.799 decimales
08-1991	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	2.260.000.000 decimales
18/05/94	Gregory V. Chudnovsky y David V. Chudnovsky	4.044.000.000 decimales
26/06/95	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	3.221.220.000 decimales
28/08/95	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	4.294.960.000 decimales
11/10/95	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	6.442.450.000 decimales
06/07/97	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	51.539.600.000 decimales
05/04/99	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	68.719.470.000 decimales
20/09/99	Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi	206.158.430.000 decimales
24/11/02	Yasumasa Kanada	1.241.100.000.000 decimales
29/04/09	Daisuke Takahashi	2.576.980.377.524 decimales
Todos los registros desde diciembre de 2009 en adelante se calculan en los ordenadores personales con las piezas disponibles en el mercado.		
31/12/09	Fabrice Bellard – Tiempo total: 131 días	2.699.999.990.000 decimales
02/08/10	Shigeru Kondo – Tiempo total: 90 días	5.000.000.000.000 decimales
17/10/11	Shigeru Kondo – Tiempo total: 371 días	10.000.000.000.050 decimales

Tabla 2.1[17] Cronología de las estimaciones de π

2. π ES IRRACIONAL

En 1761 Lambert demuestra que π es irracional (Bagazgoitia, 2007) y en 1794 Legendre demuestra que π^2 también es irracional (Pérez Fernández, 2001).

Teorema (Lambert): El número π es irracional.
Demostración: Se seguirán las ideas de la demostración que presentó Iván Niven en 1947 (Niven, 1947).

[17] Cronología de las estimaciones de π http://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80.

Supóngase que π es racional, es decir,

$\pi = \frac{a}{b}$ $con\ a, b \in \mathbb{Z}^+$(sin $pérdida\ de\ generalidad$).

Dado cualquier número natural n se definen la función f y la suma alternada de f y sus derivadas pares hasta el orden $2n$ denotada por F. Se tiene:

$$f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!}\ ,\ x \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

y $$F(x) = f(x) + \cdots + (-1)^j f^{(2j)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \tag{2.14}$$

Lema 1. $F(0) = F(\pi)$
Demostración.

Como $f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!} = f\left(\frac{a}{b} - x\right),\ x \in \mathbb{R}$ y dado que se supone $\pi = \frac{a}{b}$, por la regla de la cadena y el principio de inducción se obtiene que:

$$f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}(\pi - x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ para todas las derivadas} \tag{2.15}$$

En particular: $$f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(\pi)\ para\ todo\ j = 1,2,\cdots,n \tag{2.16}$$

Lema 2. $F(0)\ es\ un\ entero$
Demostración.

Usando el binomio de Newton[18] para expandir $(a - bx)^n$ y llamando $j = k + n$ resulta:

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} \binom{n}{j-n} a^{2n-j}\ (-b)^{j-n} x^j \tag{2.17}$$

Dado que los coeficientes de $x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}$ son cero y el grado del polinomio f es a lo sumo $2n$ se tiene que $f^{(j)}(0) = 0\ para\ j\ < n\ y\ j > 2n$ y que:

$$f^{(j)}(0) = \frac{j!}{n!}\binom{n}{j-n}\ a^{2n-j}(-b)^{j-n}\ para\ n \leq j \leq 2n \tag{2.18}$$

Como $j \geq n$ la fracción $\frac{j!}{n!}$ es un entero y también lo es el coeficiente binomial. Por lo tanto f y cualquier derivada de f en cero es un entero por lo cual $F(0)\ es\ un\ entero$.

Lema 3. $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x) \sin x\, dx = F(0)$
Demostración.

Como $f^{(2n+2)}$ es el polinomio cero entonces: $F''(x) + F(x) = f(x)$. (2.19)
Aplicando la derivación de las funciones seno y coseno y las reglas de derivación a la expresión $F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x$ se obtiene:

$$(F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x)' = [F''(x) + F(x)] \cdot \sin x = f(x) \cdot \sin x \tag{2.20}$$

[18] $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(F'(x)\cdot\sin x - F(x)\cdot\cos x\right)\Big|_0^\pi \qquad (2.21)$$

Como $\sin 0 = \sin\pi = 0$ y $\cos 0 = -\cos\pi = 1$, aplicando el Lema 1 se obtiene que $\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = F(0)$.

Demostración del teorema

Por el Lema 2: $F(0)$ $es\ un\ entero$

Por el Lema 3: $\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = F(0)$

Y como $f(x) > 0$ y $\sin x > 0$ $para$ $0 < x < \pi$ resulta que

$F(0)$ $es\ un\ entero\ positivo$.

De la igualdad: $x(\pi - x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ se concluye que

$$x(\pi - x) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2.22)$$

de donde

$$\frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \qquad (2.23)$$

y como $\pi = \frac{a}{b}$ se llega a que

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \leq \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \qquad (2.24)$$

De la desigualdad (2.24) y del hecho de que $0 \leq \sin x \leq 1$ $para$ $0 \leq x \leq \pi$, se concluye que

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \leq \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \qquad (2.25)$$

El miembro derecho de la desigualdad (2.25) es menor que 1 para un entero n suficientemente grande por lo que, por el Lema 3 para ese n, también $F(0) < 1$ lo cual contradice el hecho de que $F(0)$ es un entero positivo, absurdo que proviene de suponer que π es racional.

3. π ES TRASCENDENTE

Ya en el siglo XIX Cantor demuestra que el conjunto de los números algebraicos es numerable y como el conjunto de los números reales no es numerable resulta la existencia de números reales no algebraicos que son los números trascendentes (Courant y Robbins, 1971; Gray, 1994).
En 1882, nueve años después de que Hermite presentara su demostración de la trascendencia de e, Lindemann demuestra que π es trascendente, lo cual supone que la

cuadratura del círculo es imposible, problema geométrico que había permanecido sin resolver durante más de 2000 años.
La idea de Lindemann es, en esencia, una generalización de la idea de Hermite que está basada en las propiedades analíticas de la función exponencial.
Previo a la demostración del teorema de Lindemann se presentan la siguiente notación y resultados que hacen a la misma.

Notación. Sea $p(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \beta_i)$, donde β_i son todas las posibles sumas de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ con subíndices distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ son las raíces de un polinomio con coeficientes racionales. (Apéndice A.2).

Observación.
Si $c_j(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$, $j = i, \cdots, r$ son los coeficientes del desarrollo de $p(x)$ en potencias de x: $p(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)x^i$ entonces $c_i(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$, $i = 1, \cdots, r$, son polinomios simétricos elementales salvo el signo. (Apéndice A3).

Lema 1. $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
Demostración. Es inmediata usando el Corolario 2 del Apéndice A3.3

Lema 2. $bp(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Demostración. Multiplicando por un entero adecuado b se obtiene el polinomio de grado r con coeficientes enteros y raíces $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$.

Lema 3. Sean $q(x) = b^{rn-1}x^{n-1}[\mathrm{p}(x)]^n$ y $p(x) \in \mathbb{Z}[x], b \in \mathbb{Z}\ y\ n \in \mathbb{N}, n\ primo, r$ el grado de p entonces:

i) $q^{(t)}(0) = 0\ \ para\ t = 0, \cdots, n-2$ (2.26)

ii) $q^{(n-1)}(0) = (n-1)!\, b^{rn-1}[\mathrm{p}(0)]^{\mathrm{n}}$ (2.27)
(aplicando la regla de derivación del producto y evaluando en x=0)

iii) $q^{(t)}(0) = n! \cdot A_t\ \ \ con\ A_t \in \mathbb{Z}\ para\ t\ \geq n$ (2.28)
(ya que en cada derivada aparece $n!$ multiplicado por números enteros)

Demostración. Usando la proposición 3 del Apéndice A4.3 con $m = n - 1\ y\ c = 0$ se obtiene directamente i), ii) y iii).

Consecuencia del Lema 3

Si $Q(x) = q(x) + q'(x) + \cdots + q^{(rn-1+n)}(x)$ entonces

$Q(0) = (n-1)!\, b^{rn-1}[\mathrm{p}(0)]^{\mathrm{n}} + n! \cdot A\ ,\ A \in \mathbb{Z}$ (2.29)

Lema 4. Sean $q(x) = b^{rn-1}x^{n-1}[\mathrm{p}(x)]^n$ y $p(x) \in \mathbb{Z}[x], b \in \mathbb{Z}\ y\ n \in \mathbb{N}, n\ primo$, se cumple que:
a) $q^{(t)}(\beta_i) = 0\ , para\ cada\ i = 1, 2, \cdots, r,\ \ si\ t = 0,1, \cdots, n-1$ (2.30)

b) $q^{(t)}(x) \in \mathbb{Z}[x], t \geq n$ y sus coeficientes son múltiplos de $n!\, b^{rn-1}$
(2.31)

Demostración.
a) Como $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ son raíces de $q(x)$ de multiplicidad n o más, el resultado es inmediato.

b) Se obtiene directamente por las hipótesis y la Proposición 1 (Apéndice A4.1)

Consecuencia del Lema 4

$$\sum_{t=n}^{rn+n-1} q^{(t)}(x) = n!\, b^{rn-1} q_1(x)$$

para cierto polinomio $q_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado $rn-1$. Por lo tanto:

$$Q(\beta_i) = \sum_{t=n}^{rn+n-1} q^{(t)}(\beta_i) = n!\, b^{rn-1} q_1(\beta_i) \qquad (2.32)$$

Lema 5. Si $b \in \mathbb{Z}$, $\beta_i \in \mathbb{Q}$ con $i = 1, 2, \cdots, r$ entonces

existe $B \in \mathbb{Z}$ tal que $b^{rn-1} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{q}_1(\beta_i) = B$ (2.33)

Demostración. Es inmediata por la Proposición 2 con $d = rn - 1$ (Apéndice A4.2).

Consecuencia del Lema 5

Sumando en (2.32), $Q(\beta_i)$, $i = 1, 2, \cdots, r$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) = n!\, b^{rn-1} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{q}_1(\beta_i)$$

$$\sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) = n!\, B \;\; con\, B \in \mathbb{Z} \qquad (2.34)$$

Lema 6. Para $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k = 2^m - r$, entonces

$$(n-1)! \leq \left| -kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) \right|$$

Demostración.

Por (2.29) y (2.34):

$$-kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) = -k(n-1)!\, b^{rn-1} [\mathrm{p}(0)]^{\mathrm{n}} - \mathrm{n}!\,(kA + B)$$

donde $k, b, A, B, p(0) \in \mathbb{Z}$. Si bien A y B dependen de n, lo importante es que $k, b, p(0)$ no y así, tomando n grande, suficiente con elegirlo mayor que $|k|, |b|, |p(0)|$, para que no pueda dividir a ninguno de los tres, se deduce que $-kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i)$ es múltiplo de $(n-1)!$ pero no de $n!$, por lo tanto no es cero, luego

$$(n-1)! \leq \left| -kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) \right|$$

Lema 7. Sean $M = máx\{|\beta_1|, \cdots, |\beta_r|\}$ y $C = máx_{|y|\leq M}|p(y)|$, entonces, para cada $i = 1,2,\cdots,r$, se tiene[19]

$$\left|\sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy\right| \leq \omega\mu^n \ con \ \omega = r\frac{e^{2M}}{|b|} \ y \ \mu = |b|^r MC.$$

Demostración.
Para cada $i = 1, 2, \cdots, r$ se tiene

$$\left| e^{\beta_i} \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy \right| = \left|e^{\beta_i}\right| \left| \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy \right|$$

$$\left|e^{\beta_i}\right| \left| \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy \right| \leq e^M M sup_{y\in[0,\beta_i]}|e^{-y}q(y)|$$

$$e^M M sup_{y\in[0,\beta_i]}|e^{-y}q(y)| = e^M M sup_{y\in[0,\beta_i]}|e^{-y} b^{rn-1} y^{n-1} [p(y)]^n|$$

$$e^M M sup_{y\in[0,\beta_i]}|e^{-y} b^{rn-1} y^{n-1} [p(y)]^n| \leq e^{2M} M sup_{y\in[0,\beta_i]}|b^{rn-1} y^{n-1} [p(y)]^n|$$

$$e^{2M} M sup_{y\in[0,\beta_i]}|b^{rn-1} y^{n-1} [p(y)]^n| \leq e^{2M} M^n |b|^{rn-1} C^n$$

Sumando en $i = 1,2,\cdots,r$ y aplicando la desigualdad triangular, resulta

$$\left| \sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy \right| \leq r\frac{e^{2M}}{|b|}(|b|^r MC)^n$$

Es decir $\left|\sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy\right| \leq \omega\mu^n \ con \ \omega = r\frac{e^{2M}}{|b|} \ y \ \mu = |b|^r MC.$

<u>Teorema (Lindemann):</u> El número π es trascendente.

La demostración del teorema se basa en los trabajos de Lindemann (Varona Malumbres, 2012) usando el método de reducción al absurdo.

Suposición: π es algebraico
Contradicción: $(n-1)! \leq \omega\mu^n$ si n es un número primo suficientemente grande

[19] Denotando con $[0,\beta_i]$ al segmento del plano complejo que une 0 con β_i y aplicando que si $f: U \to \mathbb{C}$ es una función continua de variable compleja y Γ es una curva regular contenida en U entonces $\left|\int_\Gamma f(y)dy\right| \leq L(\Gamma).sup_{y\in\Gamma}|f(y)|$)

Esquema de la demostración.

1) Demostrar que $i\pi$ es algebraico.
2) Demostrar que $e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + k = \sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} + k = 0$
   $(k = 2^m - r,\ número\ de\ exponentes\ que\ se\ anulan)$
3) Introducir la Identidad de Hermite
4) Demostrar que $(n-1)! \leq \omega\mu^n$ para ciertas constantes ω y μ que no dependen de n primo, lo cual no puede ser cierto cuando n es suficientemente grande

1) Dado que un número algebraico es cualquier número, real o complejo, que es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes racionales resulta que, como i es algebraico por ser raíz del polinomio $x^2 + 1$ y el conjunto de números algebraicos constituye un cuerpo, $i\pi$ también es algebraico. Por lo tanto existe un polinomio no nulo con coeficientes racionales del cual $\alpha_1 = i\pi$ es raíz. Sea m el grado de este polinomio y sean $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ las m raíces complejas de dicho polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

2) Como $e^{i\pi} + 1 = 0$ entonces $\left(e^{i\pi} + 1\right)(e^{\alpha_2} + 1) \cdots (e^{\alpha_n} + 1) = 0$ (2.35)

Realizando los productos, se obtiene:

$$(e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \cdots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) + \cdots +$$

$$+(e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}) + 1 = 0 \quad (2.36)$$

donde algunos de los exponentes pueden ser nulos. Si k es la cantidad de exponentes que se anulan entonces la cantidad de exponentes que no se anulan será $r = 2^m - k$. Llamando $\beta_1, \cdots, \beta_r$ a los exponentes distintos de cero la ecuación (2.36) puede escribirse:

$$e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + k = \sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} + k = 0 \quad (2.37)$$

donde los β_i, algunos de los cuales pueden ser iguales, son todos diferentes de cero.

3) Usando la identidad de Hermite (Apéndice A5) con $q(x) = b^{rn-1}x^{n-1}[\mathrm{p}(x)]^n$ y $Q(x) = q(x) + q'(x) + \cdots + q^{(s+n)}(x)$, realizando la suma en i y teniendo en cuenta que $\sum e^{\beta_i} + k = 0$, se llega a lo siguiente:[20]

$$-kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i) = \sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} \int_0^{\beta_i} e^{-y} q(y)dy$$

Por el Lema 6 $\quad (n-1)! \leq -kQ(0) - \sum_{i=1}^{r} Q(\beta_i)$
Por el Lema 7

[20] Como $\beta_i \in \mathbb{C}$ la integral entre 0 y β_i hay que entenderla como una integral sobre un camino: por ejemplo el segmento que une 0 y β_i ya que el integrando es una función holomorfa y por lo tanto el valor de la integral es independiente del camino.

$$\sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i} \int_{0}^{\beta_i} e^{-y} q(y) dy \leq \omega\mu^n$$

4) En consecuencia, $(n-1)! \leq \omega\mu^n$ lo cual no puede ser cierto si n es suficientemente grande, ya que $\mu^n/(n-1)! \to 0 \; cuando \; n \to \infty$, llegando a la contradicción deseada que surge de considerar que π es un número algebraico.

SECCIÓN 3

IDEAS PARA LA CLASE DE MATEMÁTICA

3.1. ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El recorrido histórico realizado en la sección 1 proporciona perspectiva para analizar el conocimiento del número π al comprender el proceso constructivo, social y cultural que lo rodea.

π aparece dentro de un campo operatorio que es útil para comenzar su exploración vinculado al contexto proporcionado por el cálculo de áreas de polígonos inscriptos y circunscriptos en una circunferencia. Esta exploración de la aproximación de π no requiere en principio, de una definición formal del concepto ya que éste se va construyendo. La historia muestra cómo la actividad matemática progresa y así el concepto original adquiere un nivel superior de organización, se vuelve más abstracto y se independiza del contexto del cual surgió.

A continuación se mencionan algunos elementos teóricos en las siguientes direcciones:

a) Utilidad del conocimiento de la historia como herramienta de enseñanza.

b) Significado de las nociones de situación didáctica y situación a-didáctica y su diseño en la enseñanza.

a) Respecto de la utilidad de conocer la historia y usarla como herramienta de enseñanza, se menciona:

> Al comentar sobre sus experiencias, a veces los maestros señalan que la construcción que hacen sus estudiantes de los objetos matemáticos sigue el mismo camino de la evolución histórica y por lo tanto, su confianza en la eficacia del uso de la Historia se basa en este hecho. Los testimonios y descripciones de experiencias que realizan los profesores sobre sus clases muestran que, en general, el docente no utiliza la Historia para guiar a sus estudiantes en la construcción de los objetos matemáticos siguiendo exactamente el camino de sus antepasados, sino discutiendo y confrontando puntos de vista modernos y antiguos (la *reinvención guiada* de Freudenthal). (Nápoles Valdés, 2012, p.253).

La secuencia didáctica propuesta se fundamenta en la Teoría de Situaciones y la hipótesis epistemológica que emerge de dicha teoría tiene semejanzas con la idea de Piaget sobre el conocimiento, por lo que es importante tener en cuenta su postura sobre la significación epistemológica de un ítem de conocimiento (Sierpinska y Lerman, 1996).

Piaget enfoca al conocimiento, no como un estado, un hecho, sino como un proceso, desde dos perspectivas: sincrónica o diacrónica, para definir la “significación epistemológica” de una herramienta conceptual dada. En este proceso están implicados mecanismos, que son los objetos de la epistemología, los cuales pueden ser estudiados usando un análisis lógico-matemático (perspectiva sincrónica) o bien construyendo una génesis histórica y psicogenética de un área de pensamiento científico (perspectiva diacrónica) (Sierpinska y Lerman, 1996).

Piaget destacó las características comunes de la psicogénesis e historia de la ciencia; el conocimiento va pasando por niveles, desde los inferiores más generales y menos diferenciados hacia otros superiores más diferenciados y menos generales, esto es, va

evolucionando. El paso de una determinada construcción a otra de nivel superior la explica Piaget mediante un proceso activo de construcción, por medio de un mecanismo de autorregulación a partir de las estructuras de nivel inferior a las que se agregan nuevos conocimientos. (Sierpinska y Lerman, 1996).
La hipótesis epistemológica de la Teoría de Situaciones tiene semejanzas con la idea de Piaget sobre el conocimiento como una actividad adaptativa; por lo tanto el aprendizaje ocurre cuando el sujeto está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazos; si el alumno no tiene necesidad del concepto éste nunca se desarrollará.
Brousseau (1981, citado en Sierpinska y Lerman, 1996) sugiere realizar un estudio epistemológico del concepto a enseñar y de las investigaciones que indica este estudio se puede colegir que el fin de una situación adaptada para la enseñanza de un concepto no es recapitular el proceso histórico-cultural de su desarrollo sino equilibrar esta aproximación histórica, que obliga al alumno a retomar conceptos ya desarrollados, con su enseñanza directa tal como aparece actualmente.
En general los conceptos matemáticos se enseñan como carentes de historia, de un proceso de creación y el alumno no visualiza la actividad humana que hay detrás de ellos; son conocimientos que transmite el docente, que es quien decide cuándo una respuesta es correcta o no. Si bien algunos libros de textos han comenzado a incluir una breve reseña histórica antes de desarrollar los temas, se pretende que la Historia de la Matemática trascienda ese papel de simple colección de anécdotas curiosas, datos antiguos y sucesos acumulados. Ante la tradicional enseñanza del número π como igual a 3,14 se propone el uso de la Historia de la Matemática como un instrumento didáctico alternativo que permita plantear activamente el aprendizaje como un redescubrimiento dado que de la incorporación de elementos de la Historia de la Matemática en los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática, se pueden obtener algunos beneficios educativos como: ayudar a incrementar la motivación para el aprendizaje; facilitar la comprensión de los conceptos; cambiar la percepción de los alumnos; valorar las técnicas modernas comparando lo antiguo con lo actual; ayudar a explicar y superar obstáculos epistemológicos (Fauvel, 1991).

b) Respecto al significado de una situación didáctica, ésta se define como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de construcción. (Brousseau, 1982, citado por Gálvez, 1994, p.4).

Si bien la mayor parte de la responsabilidad en la construcción del conocimiento reside en el alumno, el docente no deja de participar y su labor es decisiva. Diseña problemas en los cuales se garantiza la interacción del alumno con los problemas y con otros alumnos.
En el diseño de la situación (Panizza, 2003), el docente debe tener en cuenta que ésta se organice de modo de promover la interacción del alumno con un medio que le ofrezca información sobre su producción. Además, el alumno debe tener la posibilidad de establecer relaciones entre sus elecciones y el resultado que obtiene. Para ello, es preciso que pueda juzgar por sí mismo sobre los resultados de su acción y que pueda intentar nuevas resoluciones (Panizza, 2003).

El docente debe establecer e iniciar la situación didáctica monitoreando la actividad de los alumnos y el aprendizaje asociado mediante el manejo de la evolución de la situación.
El momento que el alumno necesita para construir el conocimiento es fundamental, es el momento en el que se enfrenta al problema sin intervención del docente y lo resuelve; la necesidad de este momento de aprendizaje da lugar a la fase de la situación didáctica llamada situación a-didáctica.

Respecto de la importancia de la situación a-didáctica, Panizza (2003) sostiene que:

> La situación didáctica es aquella que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema a partir de sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución. (p.5)

Toda situación didáctica debe tener como objetivo generar una situación a-didáctica.
La teoría distingue tres tipos de situaciones didácticas:

- Situaciones de acción: los alumnos deben tomar las decisiones para resolver el problema al que se enfrentan, requiere de conocimientos implícitos.
- Situaciones de formulación: el objetivo es la comunicación entre los alumnos o grupos de alumnos para lo cual deberán adecuar el lenguaje al conocimiento que deben transmitir.
- Situaciones de validación: se realizan aseveraciones sobre la verdad y la eficacia de la solución entre grupos de alumnos o entre los alumnos y el docente que deben convencer a los interlocutores, para lo cual los alumnos deben elaborar pruebas o demostraciones que demuestren sus afirmaciones, es condición necesaria la argumentación.

No necesariamente hay que pasar por cada una de estas situaciones para cada saber que se quiera enseñar.
Por último el concepto de institucionalización dentro de la teoría supone establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural y científico, el docente ubica la producción del alumno en contexto. Según Brousseau (2007, p.98) el objeto de la institucionalización implica un doble reconocimiento: "Tomar en cuenta "oficialmente" el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente".
La institucionalización se da en cualquiera de las tres situaciones mencionadas anteriormente (Brousseau, 2007). En la situación de acción, "cuando se reconoce el valor de un procedimiento que va a convertirse en un medio de referencia" (p. 98); en la situación de formulación, cuando se reconocen algunas formulaciones que es necesario conservar ("esto se dice así"); finalmente, en las situaciones de validación, cuando se identifican las propiedades que se van reservar, entre las que se fueron conjeturando.

3.2. ACTIVIDADES QUE SE FUNDAMENTAN EN LOS ELEMENTOS TEÓRICOS

Con base en los elementos teóricos mencionados en el parágrafo anterior se propone que los alumnos, para el aprendizaje del número π, hagan un recorrido tomando como referencia los aspectos históricos, mediante el diseño de actividades que proporcionen

un camino de aprendizaje mediante el cual los jóvenes pongan en práctica ciertos tipos de interacciones sociales y hagan uso de un repertorio cultural determinado (Brousseau, 2007). Las actividades presentadas más adelante vinculan los elementos antes mencionados y aportan las nociones previas para que los alumnos puedan transitar de una etapa a otra hasta lograr los hábitos de trabajo independiente y de descubrimiento en esta temática particular de la enseñanza del número π.
Se proponen actividades para recrear aproximaciones del número π que pueden servir como herramientas para el aula. Las actividades están fundamentadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas, dado que se espera que "el alumno acepte la responsabilidad de tratar de resolver los problemas o los ejercicios cuya respuesta desconoce" (Brousseau, 2007; p. 87) y es la premisa de esta sección. Se conoce como "devolución" el acto mediante el cual el docente transfiere al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema, y la aceptación de este último implica hacerse cargo de las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007).

Secuencia didáctica

La enseñanza y el aprendizaje del número π forman parte de los contenidos de 3° año de la Trayectoria Formativa Técnico en Informática Profesional y Personal. Las actividades que se proponen esperan promover su aprendizaje usando la historia de π y reforzando su significado cuando el alumno experimente, reflexione y contextualice.
La institución donde se trabajará es la Escuela Técnica Nº 7 de la ciudad de San Luis que brinda a los alumnos una formación de nivel secundario de siete años y egresan con el título de Técnico en Informática Profesional y Personal.
La provincia de San Luis no cuenta por el momento con un Diseño Curricular para las Escuelas Técnicas, se está elaborando un borrador. Por Ley N° II-0572-2007 se adhiere a la Ley Nacional N° 26.058 de Educación Técnico Profesional.
Específicamente, respecto a la Formación Científico Tecnológica y Matemática, el Ministerio de Educación (a través del Programa Escuelas Técnicas Profesional y de Oficios de la provincia de San Luis) establece lo siguiente:

> Este campo otorga sostén a los conocimientos, habilidades, destrezas, valores y actitudes propios del campo profesional en cuestión. Comprende, integra y profundiza los contenidos disciplinares imprescindibles que están a la base de la práctica profesional del técnico, resguardan la perspectiva crítica y ética, e introducen a la comprensión de los aspectos específicos de la formación técnico profesional.

En relación con estos objetivos, se espera que la secuencia didáctica propuesta permita a los alumnos profundizar sus conocimientos en torno a los números en general, y en particular al número π. En lo que respecta a la formación técnica, las actividades promueven la oportunidad de evidenciar la utilidad de las herramientas informáticas para obtener aproximaciones de este número mediante el uso de relaciones geométricas.
Las actividades de la secuencia didáctica tienen un nivel de complejidad progresivo y pretenden que los alumnos participen de una manera reflexiva y crítica; se propone para desarrollar con alumnos de 3º año. El aula se organizará en grupos de a lo sumo cuatro personas, los alumnos de cada grupo cotejarán sus resultados y estrategias empleadas para elegir la más adecuada, con el fin de obtener una producción grupal. Cada clase tendrá una duración de 40 minutos.

Actividad N°1 - (2 clases)

Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos, sin un conocimiento sistemático de la geometría plana y basados en la observación de objetos de la realidad que tienen forma circular aproximadamente perfectas (como ciertas monedas, el borde de los vasos o de las copas, entre otros) consigan, usando sus conocimientos de fracciones, construir una sucesión finita de medidas aproximantes de π. Con esta actividad se comienza a formar el concepto de sucesión y se motiva a los alumnos para que en cursos superiores, con mayor conocimiento de la geometría plana, estén preparados para entender los primeros caminos históricos en la formalización del número π.

Cada grupo aportará diversos objetos con forma circular (monedas de distinto valor, vasos, tapas de distintos tamaños, platos, latas), una cinta métrica o una cuerda y un metro.

Consigna

a) Enrollar la cinta métrica o la cuerda alrededor de cada objeto para medir su circunferencia.
b) Medir el diámetro de cada objeto. Tomar todas las medidas redondeando al milímetro más próximo.
c) Confeccionar una tabla con las medidas obtenidas y calcular la razón $\frac{longitud \;\; circunferencia}{longitud \;\; diámetro}$ para cada objeto.
d) Analizar los resultados obtenidos y conjeturar hacia qué número se aproximan.
e) Comparar los resultados producidos entre los distintos grupos.

Una posible intervención docente se puede presentar para la determinación del diámetro del objeto circular:

- ¿Qué te parece si pasás la imagen de tu objeto redondo al papel y pensás cómo dibujar el diámetro?
  Esta pregunta del docente habilita la posibilidad de pasar de la situación concreta al problema geométrico de trazar el diámetro de una circunferencia cualquiera cuando no se conoce el centro.
- En el caso de que el alumno no pueda avanzar, ¿Si trazás una cuerda de la circunferencia, te ayudaría a determinar el diámetro? ¿Qué se debe cumplir entre esa cuerda y el diámetro?

Actividad N° 2 - (3 clases)

Esta actividad tiene como finalidad mostrar el método exhaustivo para calcular el número π basado en los conocimientos sistemáticos de geometría plana que ya tienen los alumnos. De esta manera, y tomando como referencia la actividad anterior, se consolida el concepto de sucesión y de aproximación y también se puede introducir el concepto de número de cifras correctas de una aproximación.
Se usará el software GeoGebra como medio para que el alumno interactúe y logre el aprendizaje. Dicho software de geometría dinámica permite realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa de objetos en la pantalla, como también transformación y el desplazamiento de objetos ya construidos, redibujándolos

en tiempo real. Debido a la orientación de la escuela los alumnos ya saben utilizarlo y apoya la transversalidad del Diseño Curricular.

Objetivos

Se espera que el alumno:

- Reconozca ventajas y desventajas de la aplicación del método exhaustivo para obtener aproximaciones de π.
- Utilice los procedimientos de geometría plana para las construcciones necesarias.
- Interprete sucesiones finitas de aproximación.
- Utilice el concepto de aproximación por defecto de un número.
- Proponga procedimientos para la construcción de polígonos regulares cuya cantidad de lados sea mayor que seis.
- Explique y argumente respuestas e interpretaciones.

El docente inicia la clase diciendo que trabajarán en grupos alrededor de una consigna.

Consigna 1

Arquímedes aproximó el valor de π comenzando con el hecho de que un hexágono regular inscripto en una circunferencia de radio una unidad tiene un perímetro de seis unidades (ver Figura 3).

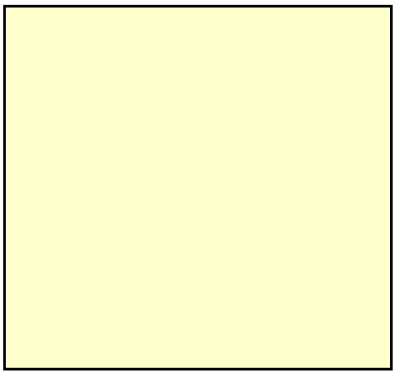

Figura 3

Teniendo en cuenta esta idea propongan un método para obtener una sucesión de números que se aproxime por defecto al número π.

La consigna se considera que es propicia para generar una situación didáctica que habilite un funcionamiento a-didáctico en el sentido planteado por la Teoría de Situaciones Didácticas. En la situación de acción, cuando el alumno es confrontado con la situación que le plantea el problema para buscar una solución, se intenta que emerja una fórmula para la construcción de polígonos regulares a partir del hexágono y cuya cantidad de lados sea el doble de la anterior. Se entiende que emerge esta construcción por la necesidad de aproximarse a la longitud de la circunferencia.

Análisis de posibles estrategias de resolución e intervenciones del docente

Se espera que los alumnos, en el momento de acción, intenten dibujar polígonos inscriptos de mayor número de lados, relacionando necesariamente la idea de perímetro del polígono inscripto con la longitud de la circunferencia.

Si el grupo no puede comenzar, un modo de intervención podría ser el siguiente:

- ¿Te sirve la conclusión de la actividad anterior?
  Se los deja pensar, es probable que los alumnos reproduzcan la situación usando GeoGebra y traten de encontrar la longitud de la circunferencia usando este recurso; en ese caso, se los invita a proponer una explicación para el resultado obtenido y su relación con el perímetro del hexágono.
- ¿Te parece que podrías usar el perímetro del hexágono?

Se los deja explorar sobre esta situación y al rato se los invita a volver a la actividad dada.

El enunciado de la consigna no conduce necesariamente a la consideración de polígonos cuyo número de lados sea el doble del polígono de partida. Por esa razón, en la discusión que sigue respecto a las posibles intervenciones del docente, se piensan dos escenarios posibles:

a) Que los alumnos consideren nuevos polígonos duplicando el número de lados de cada polígono obtenido, o
b) Que los alumnos aumenten el número de lados de los polígonos sin duplicar el de cada polígono.

Cabe mencionar también la posibilidad de que los alumnos alternen los dos procedimientos anteriores, lo cual supondría alternar también las intervenciones del docente en uno u otro sentido.

a) Escenario 1: los alumnos duplican el número de lados del polígono inicial.

Se espera que traten de encontrar la medida del lado del dodecágono sin usar el GeoGebra y que la dificultad para hallar ese valor los invite a reflexionar sobre propiedades de su construcción para lograr una fórmula.

La consigna apunta a trabajar la aproximación de la longitud de la circunferencia comenzando a usar los perímetros de los polígonos regulares de 6 y 12 lados. Entre los procedimientos de resolución esperados se menciona la intención de que los alumnos encuentren una fórmula que permita calcular dichos perímetros basándose en propiedades de los triángulos en que quedan particionados los polígonos y las medidas de los lados del hexágono y del radio de la circunferencia (ver Figura 4). Esta idea luego se puede generalizar para el cálculo de perímetros de polígonos regulares cuya cantidad de lados sea el doble del anterior sin necesidad de dibujarlos. Se espera algún tipo de validación aunque sea basada en los dibujos.

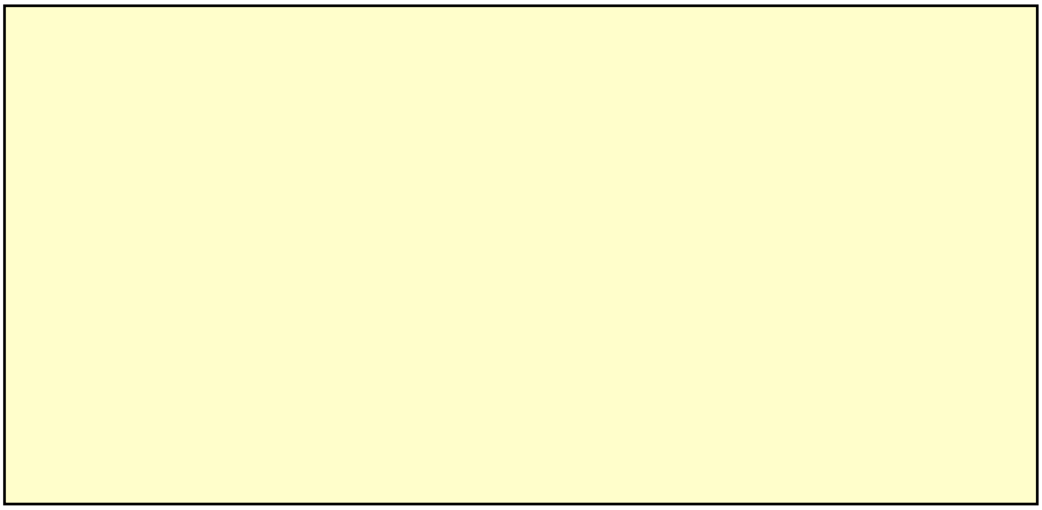

Figura 4

Continuando el proceso anterior, se obtendrán polígonos regulares tales que el número de lados de cada uno es el doble al del polígono que le precede. Al calcular sus perímetros se obtiene una sucesión finita que se aproxima al perímetro de la circunferencia. El docente puede plantear algunas preguntas para reflexionar sobre esta cuestión, como la siguiente:
Si se continúa con el proceso, ¿qué características tienen los nuevos polígonos obtenidos?

Por último, se espera que emerja la idea de sucesión finita, como secuencia de números relacionada con el concepto de aproximación por defecto, que aproxima a π para lo cual pueden valerse de programas de cálculo.
En esta etapa se pueden ayudar con Excel (ver Tabla 3.2.1) por ejemplo para obtener los valores usando las fórmulas que después también les servirán para el polígono de 24, 48 lados, etc. Para ello, el docente puede proponer lo siguiente:

Construyan una tabla de Excel en la que resuman los resultados obtenidos en cada paso del proceso.

Cantidad lados	Longitud lado: L	L/2	b	z	Nuevo lado	Perímetro	Perímetro/Diámetro
6	1,00000000	0,50000000	0,86602540	0,13397460	0,51763809	6,00000000	3,00000000000000
12	0,51763809	0,25881905	0,96592583	0,03407417	0,26105238	6,21165708	3,10582854123025
24	0,26105238	0,13052619	0,99144486	0,00855514	0,13080626	6,26525723	3,13262861328124
48	0,13080626	0,06540313	0,99785892	0,00214108	0,06543817	6,27870041	3,13935020304687
96	0,06543817	0,03271908	0,99946459	0,00053541	0,03272346	6,28206390	3,14103195089051
192	0,03272346	0,01636173	0,99986614	0,00013386	0,01636228	6,28290494	3,14145247228546
384	0,01636228	0,00818114	0,99996653	0,00003347	0,00818121	6,28311522	3,14155760791186
768	0,00818121	0,00409060	0,99999163	0,00000837	0,00409061	6,28316778	3,14158389214832
1536	0,00409061	0,00204531	0,99999791	0,00000209	0,00204531	6,28318093	3,14159046322805
3072	0,00204531	0,00102265	0,99999948	0,00000052	0,00102265	6,28318421	3,14159210599927
6144	0,00102265	0,00051133	0,99999987	0,00000013	0,00051133	6,28318503	3,14159251669216
12288	0,00051133	0,00025566	0,99999997	0,00000003	0,00025566	6,28318524	3,14159261936538
24576	0,00025566	0,00012783	0,99999999	0,00000001	0,00012783	6,28318529	3,14159264503369
49152	0,00012783	0,00006392	1,00000000	0,00000000	0,00006392	6,28318530	3,14159265145077
98304	0,00006392	0,00003196	1,00000000	0,00000000	0,00003196	6,28318531	3,14159265305504
196608	0,00003196	0,00001598	1,00000000	0,00000000	0,00001598	6,28318531	3,14159265345610

Tabla 3.2.1

b) Escenario 2: los alumnos no duplican el número de lados del polígono inicial.

En este segundo escenario, los alumnos se proponen construir polígonos cuyo número de lados es superior a 6 sin tener en cuenta la posibilidad de duplicar el número de lados. Nuevamente se espera que acudan al GeoGebra para realizar las construcciones (el docente se ocupará de fomentar su uso). Aquí las posibles resoluciones estarán ligadas a las opciones de construcción ofrecidas por el menú del software.
Una estrategia posible es la construcción de polígonos regulares utilizando la opción del menú del programa “polígono regular”. En este caso, los alumnos deberán retomar la tarea de obtener el centro de la circunferencia circunscripta al polígono regular (trazando las mediatrices de dos lados del polígono, como se observa en la Figura 5).

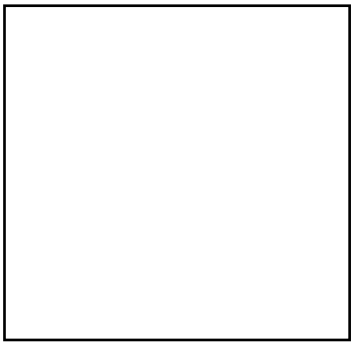

Figura 5

Otra estrategia es la de inscribir polígonos regulares de n lados (donde n es mayor que 6) en una circunferencia, considerando la amplitud que debe tener el ángulo central correspondiente (es decir, 360°/n. Ver Figura 6, en la cual n=8). Se pueden plantear aquí dificultades en el caso de que el valor de n considerado no sea divisor de 360 (por ejemplo, n=7 u 11). En este caso, el docente puede recomendar la consideración de números de lados (es decir, de valores de n) para el polígono inscripto que sean divisores de 360 (como 8, 9, 10, entre otros).

Figura 6

A partir de estas construcciones, la tarea que prosigue es la de construir una tabla en Excel, como se ha sugerido en el caso anterior, para volcar las medidas, como por ejemplo la siguiente:

N° de lados	Perímetro	Diámetro	Perímetro/diámetro
6			
…			

Tabla 3.2.2

La Tabla 3.2.2 resulta de volcar los resultados de las medidas obtenidas a partir del uso del comando "medir" del software. Una resolución alternativa, más interesante desde el punto de vista del tipo de conocimiento geométrico que se pone en juego, es la que se obtiene a partir del uso de alguna fórmula adecuada que resulte de utilizar los datos que se tienen en cuenta en esta estrategia de resolución, como el valor de n y la amplitud del ángulo central correspondiente, entre otros.
Sin embargo los alumnos aún no disponen de los conocimientos trigonométricos que se necesitan por lo que pueden resolver a partir de las medidas de perímetro que obtienen directamente del GeoGebra.

En la consigna se invita al alumno a reflexionar sobre lo actuado y justificar los procedimientos usados. Se espera que el alumno pueda comunicar verbalmente o por escrito a sus compañeros sus conjeturas y procedimientos. Al intercambiar las informaciones obtenidas y creando un lenguaje adecuado, simple y coherente para explicar los procedimientos que se realizaron de una manera entendible, se está transitando por la situación de formulación; durante la cual se intercambian los conocimientos y aprendizajes obtenidos durante la etapa de acción.
Hasta aquí se ha preparado la situación a-didáctica seleccionando cuidadosamente el medio y el problema planteado a los alumnos. El proceso hace referencia a la interacción de los alumnos con el medio, a la exploración del problema, a la movilización de conocimientos previos y su reorganización para plantear alguna estrategia de resolución.
Durante la situación a-didáctica, el docente interviene limitándose a animar al alumno a resolver el problema haciéndole tomar conciencia de las acciones que puede realizar y de las retroacciones del medio y haciendo que sea el alumno el que decida si resolvió el problema o no; estas intervenciones docentes forman parte del proceso de devolución.

Posteriormente el docente gestiona la puesta en común. Un alumno por grupo pasa al frente de la clase para plasmar la propuesta de su grupo en cuanto a los procedimientos usados y las conclusiones apoyándose en las imágenes que se proyectan de las construcciones logradas con GeoGebra y Excel. El docente interviene promoviendo la interacción entre los alumnos, de modo de que el resto de la clase opine sobre la producción de cada grupo. La puesta en común se realiza según la siguiente consigna.

Consigna 2

En cada grupo, se elige un representante que debe informar al resto de la clase:

- La respuesta acompañada de una argumentación que la sostiene.
- Algún intento fallido y explicar por qué esa estrategia o resultado pensado no resultó adecuado.
- Alguna pregunta que haya quedado pendiente.
- Cada grupo debe revisar las respuestas de los demás y las preguntas y debe pensar si está de acuerdo o no justificando sus opiniones. Asimismo, deben intentar responder las preguntas planteadas por los restantes grupos.

Cada alumno deberá exponer ante la clase las razones que justifican lo que su grupo ha formulado; deberá probar lo que se afirma, no por acciones, sino dando razones apoyadas en los datos, definiciones, propiedades y teoremas; se los invita a analizar resoluciones ajenas, considerar si son o no válidas y argumentar.
Probar lo que se afirma significa fundamentar el contenido matemático de las construcciones y de una sucesión basándose en las etapas de acción y formulación. Estas razones, al ser sometidas a la valoración de la clase y pudiendo ser modificadas con el aporte de todos los alumnos, dan lugar a la situación de validación.
Es importante que el docente trate de que los alumnos realicen una reflexión sobre sus propios saberes y la forma en que se producen, no solo los conocimientos, sino también el aprendizaje.
El docente retoma lo expresado hasta aquí y plantea:

- ¿Hay alguna cuestión matemática que se advierta como clave para resolver la tarea?

Cabe considerar, finalmente, algunos asuntos a partir de las tareas resueltas. En particular, resulta de interés reflexionar con los alumnos acerca de que la generación de las fórmulas permite calcular los perímetros trascendiendo la construcción de los mismos. Otras cuestiones interesantes para discutir son las siguientes (entre otras):

- La consigna se basó en una circunferencia de radio 1. ¿Se reconoce alguna ventaja de esta elección? ¿Se podría haber comenzado con otro radio y llegar a los mismos resultados?
- Comparar los valores de la sucesión con el valor de π que devuelve la computadora.

Cierre de la clase

Una vez validadas las estrategias de solución se comienza a transitar la situación de institucionalización. El docente retoma los aspectos centrales de la clase:

- pregunta qué nociones matemáticas resultaron útiles para la resolución de las actividades y porqué.
- se analiza la idea de aproximación.
- se formaliza el concepto de sucesión finita.
- se retoma la caracterización de π como un número irracional que expresa la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que se puede aproximar a partir de la aplicación de conocimientos geométricos.

En esta etapa el docente debe conocer acerca del saber científico en cuestión para no distorsionar los conceptos matemáticos que se transmitirán a los alumnos.
La lectura que el docente hizo de los errores cometidos por los alumnos durante el desarrollo de la actividad le permitirá posicionarse mejor en el momento de la institucionalización.

SECCIÓN 4

CONCLUSIONES

π es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro y aparece en fórmulas de cálculo en geometría, probabilidad, análisis matemático, trigonometría, teoría de números, física, estadística por lo cual se ha realizado un recorrido histórico resaltando algunos métodos para aproximar con mayor cantidad de números decimales el valor real de π: 3,141592653589… pero, ¿cuál es el sentido de seguir buscando más decimales correctos? Con los treinta y cinco decimales de Snell (discípulo de Van Ceulen) había más que suficiente para cualquier cálculo. Por ejemplo, si se conociera el diámetro exacto del sistema solar (que nunca se conocerá porque es variable) y se quisiera calcular la longitud de la circunferencia que lo rodea (que ni existe ni serviría para nada el dato), los treinta y cinco decimales de Snell darían una precisión millones de veces más pequeña que un átomo, por lo cual el cálculo de más cantidad de cifras decimales correctas de π no parece un trabajo demasiado útil si bien puede emplearse como campo de aprendizaje en el desarrollo de algoritmos computacionales.

Por otro lado hay que destacar la importancia de la historia de la matemática para la enseñanza del número π, la gran cantidad de aplicaciones de los resultados históricos, de ideas y problemas como herramientas didácticas como también la importancia de los resultados obtenidos para el enriquecimiento personal y profesional del docente necesario para la motivación de la enseñanza pues le permite comprender las dificultades de transmisión de los conocimientos y puede seleccionar actividades con fundamento matemático.

Se espera que este trabajo contribuya a que se impartan clases significativas sobre el número π y que sea útil para los docentes interesados en reflexionar sobre su propia práctica.

SECCIÓN 5

REFERENCIAS

Bagazgoitia, A. (2007). La belleza en matemáticas. *Revista Sigma, 31,*133-137. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/eu/contenidos/informacion/dia6_sigma/eu_sigma/adjuntos/sigma_31/11_la_belleza.pdf

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Revista Mathesis, 11,* 55-101.

Courant, R. y Robbins, H. (1971*). ¿Qué es la matemática?*. Madrid: Aguilar S.A.

Echeverry, L.M. (s.f.). *La constante universal* π. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.slideshare.net/amusalan/numero-pi-1544706

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *Revista For the learning of mathematics, 11,* 13-16.

El número Pi (II): Babilonia. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://lapalmera.blogspot.com.ar/2006/12/el-nmero-pi-ii-babilonia.html

El número Pi (III): La Biblia. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://lapalmera.blogspot.com.ar/search/label/pi

El número π . (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra y I. Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós Educador.

González Urbaneja, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA, 45,* 17-28. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Goyanes, J.G. (2007). Historia de las fórmulas y algoritmos para π. *La gaceta de la RSME, 10(1),* 159-178. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/Curso/GacRSocMatEsp6.pdf

Gray R. (1994). Georg Cantor and Transcendental Numbers. *The American Mathematical Monthly, (101),* 819-832.

Hadlock, C.R. (2000). *Field theory and its classical problems.* United States of America: The mathematical association of America.

Nápoles Valdés J. (2012). La historia de la Matemática y el futuro de la Educación Matemática. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comps.), *Educación Matemática.*

Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos (pp. 249-267). Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento; Villa María: Eduvim.

Niven, I. (1947). A simple proof that π is irrational. *Bull AMS, 53(6)*, 509.
Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002- 9904-1947-08821-2.pdf

Número π.(s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Pellini C.A. (s.f.). *La ciencia en China antigua*. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.portalplanetasedna.com.ar/ciencia_china.htm

Pérez Fernández, F.J. (2001). *Viaje a través de la cuadratura del círculo*. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=6213

Producto de Wallis. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.proofwiki.org/wiki/Wallis%27s_Product

Resolución CFE Nro. 15/07. Anexo XVI.

Serie de Leibniz. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Leibniz

Serie de Leibniz: Fórmula para Pi. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.proofwiki.org/wiki/Leibniz%27s_Formula_for_Pi

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros Del Zorzal.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Varona Malumbres, J. L. (2012). *Recorridos por la teoría de números.* Manuscrito no publicado, Universidad de La Rioja, Logroño, España.

Vieta's Formula for Pi. (s.f.). Recuperado el 10 de octubre de 2012 de http://www.proofwiki.org/wiki/Vieta%27s_Formula_for_Pi

SECCIÓN 6

APÉNDICE

A1.- Fórmulas de Cardano - Viète

Dado un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ cuyas raíces en $\mathbb{C}$, repetidas según su multiplicidad, son $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, se puede expresar como

$$f(x) = a_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_{n-1})(x-\gamma_n). \tag{1}$$

Multiplicando e igualando coeficientes se obtienen las relaciones habitualmente llamadas fórmulas de Cardano - Viète:

$$a_{n-1} = -a_n(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)$$

$$a_{n-2} = (-1)^2 a_n(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \cdots + \gamma_{n-1}\gamma_n)$$

$$\cdots$$

$$a_0 = (-1)^n a_n \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n \tag{2}$$

Supóngase ahora un polinomio $f(x) = bx^n + \cdots \in \mathbb{Z}[x]$ con sus raíces, repetidas según su multiplicidad, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{C}$. De las fórmulas de Cardano - Viète se deduce que

$$b(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n) \in \mathbb{Z}$$

$$b(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \cdots + \gamma_{n-1}\gamma_n) \in \mathbb{Z}$$

$$\cdots$$

$$b\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Análogamente sucede si $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

A2.- Expresión de los $\boldsymbol{\beta_m}$

Se toma el conjunto de todas las combinaciones de índices desde 1 a n: $\{1, \cdots, n\}$ en subconjuntos de m elementos que se denotan B_l^m , donde l es tal que $1 \leq l \leq \binom{n}{m}$.
Usando esta notación se puede escribir:

$$\beta_m = \left\{\sum_{i \in B_l^m} \alpha_i\right\} \text{ con } 1 \leq l \leq \binom{n}{m},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ son las raíces de un polinomio con coeficientes racionales.

Ejemplo: Si $n = 3$ resulta:

para $m = 1$; $1 \leq l \leq 3 : B_1^1 = \{1\}, B_2^1 = \{2\}, B_3^1 = \{3\}$ entonces

$$\beta_1 = \left\{\sum_{i \in B_l^1} \alpha_i\right\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

para $m = 2$; $1 \leq l \leq 3 : B_1^2 = \{1,2\}, B_2^2 = \{1,3\}, B_3^2 = \{2,3\}$ entonces

$$\beta_2 = \left\{ \sum_{i \in B_l^2} \alpha_i \right\} = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3\}$$

para $m = 3;\ 1 \leq l \leq 1 : B_1^3 = \{1,2,3\}$ entonces

$$\beta_3 = \left\{ \sum_{i \in B_l^3} \alpha_i \right\} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$$

Por lo tanto $\alpha_1;\ \alpha_2; \alpha_3\,;\ \alpha_1 + \alpha_2;\ \alpha_1 + \alpha_3;\ \alpha_2 + \alpha_3\ ; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ son todas las posibles sumas de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con subíndices distintos que se pueden formar.

A3.- Polinomios simétricos

Un polinomio en n variables $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es simétrico si, al intercambiar alguna de las variables, el polinomio no cambia.

Ejemplos de polinomios simétricos en n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son los llamados polinomios simétricos elementales, que surgen como los coeficientes de las potencias de x en la expansión de $\prod_{i=1}^{n}(x - x_{i)}$ en los cuales es evidente la similitud con las expresiones de las fórmulas de Cardano - Viète:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$
$\vdots$
σ_i
$= suma\ de\ todos\ los\ productos\ distintos\ de\ i\ factores\ con\ subíndices\ distintos$
$\vdots$
$\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$

Se puede afirmar entonces que: *los coeficientes de un polinomio mónico, en* n *variables, son, salvo el signo, los polinomios simétricos elementales en sus raíces*.
El resultado básico en el campo de los polinomios simétricos es el llamado teorema fundamental de los polinomios simétricos: cualquier polinomio simétrico se puede escribir como combinación de los polinomios simétricos elementales.
Ejemplo: Si n=3,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Dado un monomio en n variables $ax_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}\ \ con\ a \neq 0, \lambda_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \forall j$, su grado es $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. El grado de un polinomio $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. Un polinomio se llama homogéneo cuando todos sus monomios tienen el mismo grado. Cualquier polinomio se puede escribir como suma de polinomios homogéneos de distinto grado. Si el polinomio es simétrico sus componentes homogéneas también lo son porque las permutaciones de las variables no cambian el grado.

A3.1.- Teorema 1: Si $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un polinomio simétrico en n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ ($o\ en\ \mathbb{Q}$), entonces se puede escribir como

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Q(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

para cierto polinomio Q con coeficientes en $\mathbb{Z}\,(o\ en\ \mathbb{Q})$ usando los polinomios simétricos elementales, es decir que

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$
$$\cdots$$
$$\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

El grado de Q es menor o igual que el grado de P.
Demostración. Como cada polinomio es suma de polinomios homogéneos se puede suponer que $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un polinomio homogéneo. Entre monomios no nulos, en particular entre los monomios que forman el polinomio homogéneo P, se puede definir el siguiente orden

$$ax_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n} \succ bx_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n} \;\; si\;\; \lambda_1 = \mu_{1,}\lambda_2 = \mu_2, \cdots, \lambda_k = \mu_{k,}\lambda_{k+1} > \mu_{k+1}$$

para algún $0 \le k \le n$. Sea $ax_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$ el monomio de *mayor orden* de los que forman P.
Debe ser $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$, (porque si hubiera un j con $\lambda_j < \lambda_{j+1}$, el polinomio $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, por ser simétrico, debe contener el monomio $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_j^{\lambda_{j+1}}x_{j+1}^{\lambda_j}\cdots x_n^{\lambda_n}$ que se obtiene con la permutación que intercambia $\lambda_j\ y\ \lambda_{j+1}$ y en este caso este término sería el monomio *de mayor orden*, lo cual es una contradicción).
Sea ahora el producto de polinomios simétricos elementales

$$Q_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = a\sigma_1^{\lambda_1-\lambda_2}\sigma_2^{\lambda_2-\lambda_3}\cdots\sigma_{n-1}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\sigma_n^{\lambda_n}$$

cuyos exponentes son todos no negativos, que es un polinomio de grado menor o igual al de P y simétrico por ser cada σ_i simétrico. Si para cada σ_i se sustituye su expresión en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y se expande se obtiene un polinomio homogéneo en las x_i de grado menor o igual que el de P y cuyo monomio de *mayor orden* es el mismo de P:

$$ax_1^{\lambda_1-\lambda_2}(x_1x_2)^{\lambda_2-\lambda_3}\cdots(x_1\cdots x_{n-1})^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}(x_1\cdots x_n)^{\lambda_n} = ax_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\ .$$

Por lo tanto el nuevo polinomio simétrico

$$P_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_1, x_2, \cdots, x_n) - a\sigma_1^{\lambda_1-\lambda_2}\sigma_2^{\lambda_2-\lambda_3}\cdots\sigma_{n-1}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\sigma_n^{\lambda_n}$$

sigue siendo homogéneo y al restar se cancela el monomio de *mayor orden*. Es decir que el monomio de *mayor orden* de P_1 tiene orden estrictamente menor que el de P. Este proceso se puede volver a aplicar a P_1. Como en cada paso se disminuye el orden, en un número finito de pasos se llegará al polinomio nulo. Reuniendo todos los sumandos del tipo $Q_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ que aparecen, se obtiene el polinomio $\mathrm{Q}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ buscado.
Debido a su construcción Q_1 tiene el mismo grado que P como polinomio en las variables x_j y su grado en las variables σ_j, que es λ_1, puede ser menor pero no mayor, por lo tanto el grado de Q es menor o igual que el grado de P.

Ejemplo. Sea el polinomio

$$P(x_1,x_2,x_3)=a+bx_1+bx_2+bx_3+cx_1^2+cx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+dx_1x_3+$$
$$+dx_2x_3+x_1x_2x_3$$

que es simétrico. Se puede escribir

$$P(x_1,x_2,x_3)=a+b(x_1+x_2+x_3)+c(x_1+x_2+x_3)^2$$
$$+(d-2c)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3$$

$$=Q(x_1+x_2+x_3,x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,x_1x_2x_3)$$

con $Q(u,v,w)=a+bu+cu^2+(d-2c)v+w$. En este caso el grado de Q es estrictamente menor que el de P.
De la relación entre los polinomios simétricos elementales y las fórmulas de Cardano - Viète se desprende el siguiente corolario del teorema fundamental de los polinomios simétricos.

A3.2.- Corolario 1: Si $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ es un polinomio simétrico en n variables con coeficientes racionales y $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ son raíces de un polinomio mónico $f(x)$ con coeficientes racionales entonces $P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ el polinomio cuyas raíces son $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. Usando el teorema 1, se definen y_j a partir de las α_j:

$$y_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$
$$y_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$\cdots$$
$$y_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

Los y_j coinciden, salvo el signo, con los coeficientes de f por lo tanto son racionales y por el teorema 1, $P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{Q}$

A3.3.- Corolario 2: Sea P un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{Q}$ con raíces $r_1, \ldots, r_n$. Sea R fijo, $1\leq R\leq n$. Sean $s_1, \ldots, s_m$ el conjunto de todas las sumas $r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_n}$ donde los R subíndices son todos distintos. Entonces hay un polinomio sobre $\mathbb{Q}$ cuyas raíces son precisamente $s_1, \ldots, s_m$

Demostración. El polinomio candidato es $\prod_{i=1}^{m}(x-s_i)$, se tiene solo que mostrar que al expandirlo los coeficientes de cada potencia de x son elementos de $\mathbb{Q}$. Puesto que los coeficientes son, salvo signo, las funciones simétricas elementales de m variables evaluadas en los s_i, bastará mostrar que cualquier polinomio simétrico sobre $\mathbb{Q}$ en m variables, evaluado en las s_i, es un elemento de $\mathbb{Q}$.
Sea $P(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ un polinomio simétrico. Considérense n nuevas variables $u_1, \ldots, u_n$ y reemplácese en P cada x_i por una suma de R diferentes u_i, cada x_i es reemplazado por sumas diferentes. Entonces se afirma que P se convierte en un polinomio simétrico sobre $\mathbb{Q}$ en las variables $u_1, \ldots, u_n$. Primero se hace notar que cualquier permutación de las u_i puede ser acompañada por una secuencia de transposiciones (intercambio simple entre dos u_i), queda probar que P es invariante bajo estas transposiciones, intercambiando, por ejemplo, u_i y u_j. En este caso las x_i que contienen a alguna o ambas como sumandos, permanecen sin cambios y el resto son permutadas. Así, por la simetría de P en las x_i, P queda sin cambios. Vinculando los r_i con los u_i obtenemos $P(s_1,s_2,\cdots,s_m)$ que es, por el corolario 1, un elemento de $\mathbb{Q}$.

Ejemplo. Dado el polinomio con coeficientes enteros $3x^3 + 14x^2 + 12x - 9$ cuyas raíces son:

$$a_1 = \frac{-5+\sqrt{61}}{6} \quad ; \quad a_2 = \frac{-5-\sqrt{61}}{6} \quad \text{y} \quad a_3 = -3$$

se desea construir un polinomio de coeficientes enteros que tenga como raíces a $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_2 + a_3$, ésto es, todas las sumas posibles de raíces tomadas de dos en dos. Empleando el resultado de que cualquier polinomio se puede escribir de la siguiente manera usando sus raíces, se obtiene:

$$\left(x - \frac{-23+\sqrt{61}}{6}\right)\left(x - \frac{-23-\sqrt{61}}{6}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) = x^3 + \frac{28}{3}x^2 + \frac{232}{9}x + \frac{65}{3}$$

Y multiplicando por 9 se consigue el polinomio buscado.
Qué sucede: si se divide $3x^3 + 14x^2 + 12x - 9$ por 3 se logra el polinomio mónico

$$x^3 + \frac{14}{3}x^2 + 3x - 3 \tag{4}$$

que tiene como raíces a a_1, a_2, a_3. Se construye el polinomio

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} \left(x - \left(a_i + a_j\right)\right) \tag{5}$$

y si ahora se considera x como constante y a a_1, a_2, a_3 como variables se tiene un polinomio simétrico en el sistema de variables a_1, a_2, a_3 que, según el teorema fundamental de los polinomios simétricos, (5) se puede expresar como un polinomio en los polinomios simétricos elementales de $a_1, a_2\ y\ a_3$ que toman como valores, salvo el signo, los coeficientes de (4) y por lo tanto son números racionales. Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores de obtiene la expresión deseada, un polinomio de coeficientes enteros cuyas raíces son todas las posibles sumas tomadas de dos en dos; de manera similar se puede construir un polinomio cuyas raíces sean todas las sumas posibles de tres en tres, etc.

A4.- Algunas propiedades de los polinomios

A4.1.- Proposición 1: Sean $f(x) \in \mathbb{Z}[x], j \geq 0$. Entonces todos los coeficientes de $f^{(j)}(x)$ son múltiplos de $j!$.
Demostración. Por linealidad basta realizarla para $f(x) = x^s\ con\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ cualquiera. Se distinguen dos casos:
a) Si $j > s$, $f^{(j)}(x)$ es el polinomio nulo y el resultado es trivialmente cierto.
b) Si $j \leq s$, entonces

$$f^{(j)}(x) = s(s-1)\cdots(s-j+1)x^{s-j} = j!\binom{s}{j}x^{s-j}$$

y como $\binom{s}{j} \in \mathbb{N}$ se obtiene el resultado buscado.

A4.2.- Proposición 2: Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \in \mathbb{Q}$$
$$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{m-1}\alpha_m \in \mathbb{Q}$$
$$\cdots$$
$$\sigma_m = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m \in \mathbb{Q}$$

y sea $b \in \mathbb{Z}$ tal que $b\sigma_1, b\sigma_2, \cdots, b\sigma_m \in \mathbb{Z}$. Entonces, para cualquier polinomio $P \in \mathbb{Z}[x]$ de grado $\leq d$, con $d \in \mathbb{N}$, se cumple

$$b^d \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(\alpha_k) \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sea $T(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(x_k)$ un polinomio en m variables $x_1, \cdots, x_m$ y con coeficientes enteros, $T(x_1, \cdots, x_m)$ es un polinomio simétrico de grado $\leq d$. Sean

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$$

$$y_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m$$
$$\cdots$$
$$y_m = x_1x_2 \cdots x_m$$

Según el teorema 1 se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(x_k) = Q(y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

para cierto polinomio Q con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y grado $\leq d$. Luego

$$b^d \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(\alpha_k) = b^d Q(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m) = b^d Q(\frac{b\sigma_1}{b}, \frac{b\sigma_2}{b}, \cdots, \frac{b\sigma_m}{b}) \in \mathbb{Z}$$

ya que $b\sigma_1, b\sigma_2, \cdots, b\sigma_m \in \mathbb{Z}$.

A4.3.- Proposición 3: Sean $f(x) \in \mathbb{Z}[x], m \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z}\ y\ \tilde{f}(x) = (x-c)^m f(x)$. Entonces las derivadas de $\tilde{f}$ cumplen

$$\tilde{f}^{(j)}(c) = 0\ si\ j < m$$

$$\tilde{f}^{(j)}(c)\ múltiplo\ de\ j!\ \ si\ j \geq m$$

En particular, $m!$ divide a $\tilde{f}^{(j)}(c)$ para todo $j \geq 0$.

Demostración. El polinomio $f(x)$ se puede escribir como una suma finita

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} c_k (x-c)^k\ con\ c_k \in \mathbb{Z}$$

(si $f(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ basta usar el desarrollo de Taylor en el punto $x = c$). Entonces

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k\geq 0} c_k (x-c)^{k+m} = \sum_{j\geq m} c_{j-m} (x-c)^j$$

(las sumas son finitas). Comparando con la fórmula del desarrollo de Taylor de $\tilde{f}$ en el punto $x = c$, $\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^j$, resulta que

$$\tilde{f}^{(j)}(c) = 0 \qquad si\ j < m$$

$$\widetilde{f}^{(j)}(c) = j!\, c_{j-m} \quad si\ j \geq m$$

A5.- Identidad de Hermite

Proposición: Dado R un polinomio con coeficientes reales, sean $I(x) = \int_0^x e^{x-t} R(t)dt$ y $F(x) = \sum_{j\geq 0} R^{(j)}(x)$ (que es una suma finita). Entonces

$$I(x) = \int_0^x e^{x-t} R(t)dt = e^x F(0) - F(x)$$

Demostración. Como $F = R + R' + R'' + \cdots$ resulta que $F' = R' + R'' + \cdots$ por lo tanto $R = F - F'$ y en consecuencia,

$$I(x) = \int_0^x e^{x-t} R(t)dt = e^x \int_0^x \left(e^{-t}F(t) - e^{-t}F'(t)\right)dt =$$

$$= e^x(-e^{-t}F(t))|_{t=0}^{x} \ (integrando\ por\ partes)$$

$$= -F(x) + e^x F(0)$$