Universidad Nacional de General Sarmiento

Las ternas pitagóricas: Un producto de la actividad humana en el aula de matemática

Prof. Graciela Alicia González

Buenos Aires, agosto de 2014

Director

Dra. Sara Scaglia

Especialización en Didáctica de las Ciencias

Mención Matemática

Resumen

Este trabajo pretende motivar la reflexión sobre la paradoja señalada por Servais (1976) respecto de que siendo la matemática una creación humana en su esencia, sea considerada por tantas personas como inhumana y deshumanizante.

Se propone un estudio de las ternas pitagóricas, mostrándolas como el producto de un lento y laborioso proceso de la actividad humana, con el propósito de contribuir a la construcción de una visión más humana de la matemática.

Se recurre para ello a los aportes de la Educación Matemática Crítica, tratando de establecer un vínculo entre algunas consideraciones teóricas generales y la práctica educativa desde el contexto histórico de su creación y desde la cotidianeidad del aula en el marco de los escenarios de investigación propuestos por Ole Skovsmose (2000).

Palabras Clave: Humanización de la matemática, Educación Matemática Crítica, contexto histórico de la matemática, ternas pitagóricas, escenarios de investigación.

Abstract

This paper aims to encourage reflection about the paradox noted by Servais (1976) for mathematics, that being a human creation in essence, is considered by many people as inhuman and dehumanizing.

A study of Pythagorean triples is proposed, showing them as the product of a slow and laborious process of human activity, in order to contribute to building a more human view of mathematics.

Contributions of Critical Mathematics Education are used, trying to establish a link between some general theoretical considerations and educational practice from the historical context of its creation and from the everyday classroom as a part of the research stages proposed by Ole Skovsmose (2000).

Keywords: Humanization of mathematics, Critical Mathematics Education, historical context of mathematics, Pythagorean triples, research scenarios.

Índice general

Introducción

La preocupación que se observa en investigaciones de organismos internacionales como la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) por el desinterés en el aprendizaje que muestran los estudiantes, sobre todo en el nivel secundario, da cuenta de que es uno de los problemas que cobra cada día más fuerza en el ámbito educativo.

Visto con ojos de docentes, estudiantes y familias, se traduce en frustración, impotencia y cierta sensación de culpa; desde una perspectiva sociopolítica, en deserción, abandono, ¿exclusión?

Lo cierto es que, desde el punto de vista con que se lo mire, es un problema apremiante que requiere de una profunda mirada crítica sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se dan en el aula.

Dentro de este panorama, la matemática merece un capítulo aparte. Innumerables son las cuestiones que hacen de la matemática un área de estudio singular. Difícilmente un estudiante transite por la escolaridad sin que ésta deje huella en él. Puede ser generadora de pasiones, pero también de profundos sentimientos de frustración y rechazo.

> La Matemática Pura, que es una fuente de deleite para quienes la amamos y nos dedicamos a ella, no es vista del mismo modo por nuestros alumnos; ellos la perciben, en muchas ocasiones, como algo ajeno, frío, aburrido y difícil. (Zapico, 2006, p. 4)

En el contexto escolar actual, dice Alan Bishop (1999), las matemáticas no son fáciles e intimidan, independientemente del nivel escolar en el que se estudie; se consideran misteriosas, sin sentido y aburridas, lo que las convierte en una de las asignaturas “más incomprendidas”, “despreciadas” y “desheredadas”. Para el autor existen cuatro aspectos fundamentales de la educación matemática actual que suponen una enseñanza universal, despersonalizada y deshumanizante:

- *El currículo dirigido al desarrollo de técnicas* se basa en el “hacer” más que en una “manera de conocer”; se limita a desarrollar en los seres humanos la capacidad para hacer lo que las calculadoras y los ordenadores podrían hacer con mayor rapidez y precisión; obstaculiza la comprensión, el desarrollo de significados y la adopción de una postura crítica dentro y fuera de las matemáticas; por lo tanto, no puede más que instruir o adiestrar, no puede educar.

- *El aprendizaje impersonal* supone que la tarea del alumno es concebida como si fuera independiente de su *persona*: las reglas se aprenden, los procedimientos se aceptan y las técnicas se practican; no se ofrece la oportunidad para la interpretación subjetiva y la innovación; se ignora la individualidad del alumno y su contexto social y cultural.

- *La enseñanza basada en textos* diseñados para alumnos y docentes desconocidos por el autor y destinados mayormente a enseñantes sin experiencia conlleva el riesgo de dominar los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando la responsabilidad de la enseñanza debe recaer en el enseñante y no en el texto, ya que él es el único capaz de personalizar la enseñanza.

- *Las suposiciones subyacentes a los tres aspectos antes mencionados* parten, según este autor, de que un método "de arriba a abajo" es óptimo para enseñar las matemáticas pues, en el afán de que conserven su "pureza" y "eficiencia", se presentan como si estuviesen libres de valores, deshumanizadas, despersonalizadas y descontextualizadas (Bishop, 1999).

La universalidad de la enseñanza no es el producto de una evolución natural sino de una construcción histórica iniciada por ideales planteados para alcanzar ciertos fines.

La "Didáctica Magna" de Joan Amos Comenio, cuya primera edición apareció en 1630, es considerada por Mariano Narodowski (2000) la obra fundante de la Pedagogía.

> Porque es el inicio de la pedagogía moderna, porque es fuente inagotable de mecanismos discursivos posteriores, porque es originariamente transdiscursiva pero, a la vez, porque posee elementos propios que al encontrarse en el umbral de la modernidad pedagógica terminan por parecernos más genuinos, más verdaderos y, a la vez, muy extraños. (Narodowski, 2000, p .23)

Con el fin de dar cuenta de la transcursividad a la que se refiere Narodowski, se propone a continuación hacer un paralelismo entre los cuatro aspectos fundamentales de "*la educación matemática actual de carácter universal*", que suponen para Bishop una enseñanza despersonalizada y deshumanizante, y los "*dispositivos duros*" planteados por Comenio como producto de un momento histórico y social específico, en su obra "Didáctica Magna".

- *El currículo dirigido al desarrollo de técnicas* se basa en el "hacer" más que en una "manera de conocer" (…) no puede más que instruir o adiestrar, no puede educar.

Con Comenio comienza la tradición de la didáctica como técnica, como un conjunto de dispositivos destinados a concretar una meta.

> Comencemos, en nombre de Dios, a investigar sobre qué, a modo de roca inmóvil, podemos establecer el Método de enseñar y aprender. Y al procurar los remedios para los defectos naturales, no debemos buscarlos en otra parte sino de la misma Naturaleza. Es realmente cierto que el arte nada puede si no imita a la Naturaleza. (Comenio, 1998, p. 37)

Para que este método fuera eficaz, debía imponerse una serie de reglas o pautas universales conocidas como "dispositivos duros":

Simultaneidad: La enseñanza debía empezar y terminar al mismo tiempo en todas las escuelas, el mismo día y en el mismo horario. Este dispositivo constituyó el origen del calendario escolar único.

Gradualidad: Era necesario reformar las escuelas, reunir en ellas a toda la primera infancia y a la juventud como punto de partida de una educación permanente para llegar a una cultura humana universal. La organización distingue cuatro escuelas: la maternal, hasta los 6 años; la elemental, hasta los 12; la latina o gimnasio, de 12 a 18 años y; la academia, de los 18 a los 25.

Alianza: Existe un acuerdo tácito de confianza mutua entre la escuela y los padres, quienes aceptan las pautas de la institución.

Estos dispositivos, reglas y pautas establecidas como técnicas, estaban orientadas al logro de un cierto adiestramiento con el fin de encausar el comportamiento de los jóvenes, lo que atentaba contra la posibilidad de adoptar una postura crítica.

- *El aprendizaje impersonal* supone que la tarea del alumno es concebida como si fuera independiente de su *persona*...

La meta que persigue la didáctica de Comenio es el "ideal pansófico", que consiste en "enseñar todo a todos" sin discriminación, que todos los hombres y mujeres tengan acceso al conocimiento científico acumulado, debiendo existir una escuela en cada aldea, pueblo o ciudad. Un solo maestro debe impartir la enseñanza a un grupo homogéneo de alumnos respecto de la edad. Aunque el autor reconoce las limitaciones de la pansofía, la universalidad suele ir de la mano con mecanismos homogeinizadores que atentan contra la diversidad.

> Ya sabemos que si se pretende conocer tan extensa como minuciosamente cualquier arte (como la Física, Aritmética, Geometría, Astronomía, etc., o la Agricultura o Arboricultura, etc.), aun a los ingenios más despiertos puede ocuparles toda la vida si han de entregarse a especulaciones y experimentos (…)" (Comenio, 1998, p. 24, cap. X)

- *La enseñanza basada en textos* diseñados para alumnos y docentes desconocidos por el autor...

Para Comenio, el medio más adecuado para aprender es un libro único que combine lecturas adaptadas a la edad, con gráficos e imágenes que impresionen constantemente los sentidos, la memoria y el entendimiento de los alumnos y que, incluso, su contenido pueda verse reflejado en las paredes de la clase.

- *Las suposiciones subyacentes a los tres aspectos antes mencionados* parten, según el autor, de que un método "de arriba a abajo" es óptimo para enseñar las matemáticas...

La organización y difusión por parte de las autoridades gubernamentales garantizaba el éxito del método propuesto por Comenio para la renovación moral, política y religiosa de la humanidad.

Para Rodríguez (2010) es innegable que una enseñanza con estas características, a la que califica de alienante y opresora, provienen de la racionalidad moderna impuesta por occidente y es la principal causa de la crisis de los fundamentos de la ciencia y del despojo de la filosofía en las aulas, componentes esenciales para que su enseñanza tenga sentido en la vida del ser humano.

> En cuanto a la enseñanza de la matemática, ésta ha sido reducida a un conjunto de reglas fijas, algorítmicas sin sentido en la vida y contexto del discente. Se ha despojado también particularmente a la ciencia formal de su historia y filosofía, se desperdicia el conocimiento matemático previo que el estudiante posee. Y se consideran las mentes como "cápsulas inyectables" de teorías. (Rodríguez, 2010, p. 30)

Ruiz Zúñiga (2000) acuerda con que la deshumanización del educando en la enseñanza de la matemática se debe a las secuelas de la enseñanza tradicional dominante: "una matemática fría, sobrecargada de lenguaje abstracto innecesario y muchos formalismos, una matemática vacía separada de la acción constructiva por el estudiante y ajena a los planos más intuitivos." (p. 6).

La matemática suele mostrarse inhumana por el grado de abstracción de sus actividades mentales, por su desvinculación con la realidad, por su formalidad y esquematismo que la vacían de contenido semántico, por la convicción de que sólo puede ser aprehendida por una cierta inteligencia racional fuera de lo común, por la objetividad despersonalizante de evaluaciones que miden cuantitativamente los errores en lugar de medir cualitativamente los saberes volviendo inevitable el sacrificio de la propia subjetividad y convirtiéndola en una ciencia azarosa, alienante y deshumanizante.

El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la matemática desde perspectivas que contribuyan a su humanización: dentro del contexto histórico de su creación, reconociéndola como producto de la actividad humana, presentando a sus creadores, hombres de carne y hueso estimulados por motivos utilitarios, artísticos, éticos o espirituales; poniendo el foco en la propia historia del estudiante y del docente mediante la contextualización de su actividad cotidiana en escenarios de investigación en el que ambos puedan involucrar la propia subjetividad en su historia presente, en un contexto democrático, crítico y creativo que les permita participar de la comprensión y la transformación de la sociedad, conjugando en esta intención los antecedentes del estudiante y su visión de las posibilidades de vida futura, es decir, de su porvenir (Skovsmose, 1999). Asimismo, se apunta a desmitificar la idea de que la inventiva humana en cuanto a la matemática es patrimonio de "otras" culturas y de "otras" épocas, mediante el análisis del concepto de enculturación matemática de Alan Bishop. Finalmente, se vinculan estos aspectos teóricos con ejemplos prácticos, abordando el concepto de ternas pitagóricas desde la historia de su creación y su incorporación en el contexto de los escenarios de investigación propuestos por Ole Skovsmose.

El reconocimiento de la matemática como creación humana presente en este trabajo no desestima posturas diferentes sobre su origen: ¿la matemática es una creación, un descubrimiento o ambos?; el foco está puesto en que cualquiera de ellos es producto de la actividad humana.

> La Matemática como empresa humana y racional se mueve entre dos posiciones, por un lado, su naturaleza histórica que nos muestra la potencialidad de la creación humana, y por otra, los objetos matemáticos, los elementos de esa cultura que llamamos culturización matemática, que nos permite hablar de descubrimiento. Vemos cómo el lenguaje como elemento mediador en la cultura matemática nos va a permitir hablar a la vez de creación y descubrimiento (Socas Robayna y Camacho Machín, 2003, p. 152)

A modo de cierre se tratará de arribar a una conclusión, reflexionando sobre qué puede dejar este trabajo y cómo podría contribuirse en un futuro, a la mejora de la cuestión que aquí se plantea como problema: la humanización de la matemática.

1 Historia y Educación Matemática

La incorporación de la Historia a la enseñanza y aprendizaje de la matemática permite especular con las motivaciones que impulsaron al hombre a construir los conceptos matemáticos desde los más remotos orígenes.

El interés del hombre por la matemática pudo no haber surgido sólo por la necesidad de resolver problemas cotidianos, sino también por razones de orden estético o espiritual, para disfrutar la belleza de la forma o por el puro placer de hacer matemática.

En distintos momentos históricos y en diversos contextos se han encontrado muestras del interés por descubrir cuál es el plan que rige la naturaleza.

Las civilizaciones más antiguas buscaron respuestas en sus representantes religiosos, aunque la antigua civilización griega resultó ser una excepción en este sentido:

> Los intelectuales griegos adoptaron una actitud hacia la naturaleza totalmente nueva. Esta actitud era racional, crítica y laica. Fue rechazada la mitología, así como la creencia de que los dioses manejaban a los hombres y al mundo físico de acuerdo con sus caprichos. Los intelectuales llegaron finalmente, a la doctrina de que la naturaleza está ordenada y funciona invariablemente de acuerdo con un vasto plan. (Kline, 2006, p. 9-10)

Los griegos pensaron que algo o alguien había proyectado un plan para la naturaleza, que rige su existencia, su funcionamiento y su razón de ser. Apelaron a la contundencia de la razón humana, convencidos de haber desvelado sus secretos, los que resultaron ser una serie de leyes matemáticas cuyo método válido es la demostración deductiva a partir de axiomas.[1] Ellas debían formar un cuerpo de verdades. (González y Monge, 2012)

---

[1] Cuando los matemáticos griegos fundamentaron la geometría, tomaron como punto de partida un conjunto de axiomas: para ellos, los axiomas eran verdades evidentes por sí mismas, a partir de las cuales y por razonamientos lógico-deductivos y geométricos, se iban obteniendo los teoremas. Cada nuevo teorema se apoya en los axiomas y/o en alguno de los teoremas demostrados a partir de dichos axiomas. Cualquier conjunto de axiomas que fundamente una teoría matemática ha de cumplir al menos dos condiciones:

1. No ser contradictorios entre sí: lo cual significa que no sea posible llegar, a partir de ellos, a una conclusión del tipo “p y no p”.

2. El conjunto de axiomas ha de ser lo menos numeroso posible, es decir, que cualquier proposición que se pueda deducir a partir de ellos ha de ser considerada un teorema y por tanto, excluida del conjunto de axiomas. (Tomado de: http://www.aulamatematicas.org/Historiasyjuegos/geometriasnoeuclideas.htm).

> Es en Grecia, en el Siglo VI a.C., que aparecen los primeros “filósofos”, los primeros “amantes de la sabiduría”, los primeros hombres que se hacen preguntas sobre los fenómenos de la naturaleza e intentan responderlas buscando la explicación en la misma naturaleza (no en las acciones y caprichos de los dioses). Es allí y con esos hombres que se crea la Geometría que aún hoy seguimos estudiando y utilizando. (Zapico, 2006, p. 5)

La cultura griega fue interrumpida por las conquistas romanas y condenadas por su paganismo con el nacimiento del cristianismo. Durante el período medieval el universo permaneció gobernado por el Dios cristiano, por lo que dejó de tener sentido el estudio del mundo físico, la vida en la tierra se convirtió en la oportunidad de conseguir la salvación. Hacia el año 1500, algunas obras griegas habían logrado sobrevivir a los ataques y renacer en Europa Occidental adjudicando cada descubrimiento a la obra de Dios.

> Fue de las obras griegas de donde los que encabezaron la revitalización intelectual de Europa aprendieron que la naturaleza obedece a un plan matemático y que este plan es armonioso, estéticamente agradable y además la secreta verdad que la naturaleza guarda. La naturaleza no sólo es racional y ordenada, sino que obra de acuerdo con leyes inexorables e inmutables. (Kline, 2006, p. 37)

La diferencia entre la antigua civilización griega y los científicos europeos, reside en que para estos últimos, cada descubrimiento es atribuido a la gran obra del Creador.

Copérnico y Kepler, a pesar de haber tenido que enfrentarse con las contradicciones entre la única teoría aceptada por la fe cristiana (la geocéntrica), y su revolucionaria teoría heliocéntrica, no dudaron de las verdades absolutas contenidas en las leyes de la naturaleza, leyes que obedecían a un plan matemático y armonioso cuyo autor era Dios.

Copérnico investigó la teoría de algunos autores griegos sobre la posibilidad de que el sol se mantuviese fijo y que fuese la tierra la que gira alrededor de él y quizá sobre su eje. De esta investigación resultó su convicción de que no sólo la tierra gira alrededor del sol sino que los demás planetas (conocidos hasta el momento) también lo hacen; sin embargo temió publicar su controvertida teoría. (González y Monge, 2012)

En Kepler, la fe en la verdad, dominó todo su pensamiento:

> ...creía que el mundo estaba diseñado por Dios de acuerdo con un plan matemático bello y simple. Dice en su Misterio del Cosmos (1596) que las armonías matemáticas que el Creador tiene en su mente proporcionan la razón por la que el número, el tamaño y el movimiento de las esferas son como son y no de otra manera”. (Kline, 2006, p. 40)

Sin embargo, rompió con una tradición de dos mil años al reemplazar la teoría de las órbitas circulares de los planetas por la de órbitas elípticas y la de la velocidad no constante de los planetas que se desplazan por ellas y embelleció la teoría de los movimientos de los planetas con el producto de su búsqueda de armonías: su obra “La armonía del mundo” (1619).

Un breve recorrido histórico acerca de las ideas y creencias que predominaron en antiguas civilizaciones como la griega o que ocuparon las mentes de científicos europeos, permite comprender la matemática como producto de la actividad humana. Presentar a sus creadores y mostrar la forma en que los conceptos matemáticos se fueron desarrollando, con sus errores e imperfecciones, revitalizar el interés por la búsqueda de la belleza y la armonía que guardan las leyes que rigen el mundo que nos rodea, es humanizar la matemática y contribuir a construir una visión menos abstracta de ella.

> No es necesario "cambiar" la Matemática para enseñarla, pero proponemos no presentarla "sola y desnuda", vistámosla con sus mejores ropas y presentémosla acompañada de sus mejores galanes. La propuesta es llevar al aula estos ropajes y estos galanes y, también, salir del aula para buscar la Matemática, y encontrarla, en otras disciplinas. (Zapico, 2006, p. 4)

Zapico (2006) y De Guzmán (1992) entre otros, también consideran que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden "contextualizarla y humanizarla".

La extensión del siguiente párrafo de Miguel de Guzmán (1992) se justifica por su claridad y por la coherencia que guarda con la intención de este trabajo:

> A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado. La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. (...) La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada (…) El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática. (…) Si volviéramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia de muerte y de hechos disecados y volverían a tomar una vida fresca y pujante". (De Guzmán, 1992. p.15)

Tzanakis y Arcavi (2000) señalan que la integración de la historia a la enseñanza de la matemática puede mostrar conexiones que no son visibles de otra forma, dado que la matemática surgió para solucionar problemas de disciplinas que aparentaban no estar relacionadas.

El docente debe estar consciente de las posibles dificultades que puede encontrar al querer incorporar la historia en la enseñanza de la matemática: falta de preparación, tiempo y recursos. La introducción de la historia de la matemática en el aula genera "discusión en la comunidad de matemáticos, sobre todo en aquellos que valoran las matemáticas por sus resultados (v.g. teorías, teoremas, demostraciones, aplicaciones) más que por la actividad matemática misma que éstos implican y promueven" (Guacaneme, 2011).

2 Perspectiva política social y cultural de la Educación Matemática

El producto de grandes esfuerzos realizados para identificar y superar los problemas que dificultan el aprendizaje de la Matemática, fue evolucionando hacia una didáctica específica, la Didáctica de la Matemática, la que a su vez se ha conjugado con teorías más generales como la Teoría Crítica, surgida en función de necesidades educativas relacionadas con macro niveles como el social, cultural y político, constituyendo la llamada Educación Matemática Crítica.

Ésta propone educar a los estudiantes para ser ciudadanos capaces de cuestionar, adoptar una posición justificada ante una situación crítica, tomar riesgos y creer que con sus acciones pueden transformar la sociedad.

Una educación crítica debe involucrar prácticas que establezcan una relación entre un sujeto crítico (estudiantes y profesores) y un objeto de crítica, orientadas a proporcionar las competencias necesarias para desvelar la naturaleza de situaciones conflictivas o críticas de la sociedad que impliquen una reacción en respuesta a ellas, para lo que se hace necesario adoptar una distancia crítica frente al currículo y una mirada enfocada en problemas fuera del universo educativo.

Estas situaciones críticas pasan a formar parte de la vida escolar, por lo que la educación crítica no debe desestimar el contexto crítico de la escolaridad (Skovsmose, 1999, p. 46).

La Educación Matemática Crítica ha recibido la influencia, hacia mediados del siglo XX, de La Escuela de Frankfurt, la que propuso ver a la educación no sólo como un mecanismo de reproducción de las estructuras económicas y sociales capitalistas, sino como un espacio de reacción y resistencia que involucra la adopción de una actitud autorreflexiva y crítica que cuestione las dimensiones éticas y morales de las propias acciones de los sujetos y la influencia que éstas pueden ejercer en ellos mismos y en el resto de la sociedad.

Desde esta perspectiva, la Escuela de Frankfurt reconoce el poder subyacente de las prácticas matemáticas para desvelar y trasformar las relaciones de poder, tanto en micro-entornos tales como la familia, el aula, la escuela o el barrio, como en ámbitos más generales como el social, económico, político, histórico y cultural.

En la propuesta de la Educación Matemática Critica, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son prácticas sociales y políticas que se organizan en red compleja y lo que sucede fuera del aula las influencia, al igual que ellas tienen un impacto en otras prácticas fuera del aula y la escuela.

> (...) por lo que se hace necesario incorporar el contexto, entendido como la serie de macro condiciones históricas y estructurales que empapan las micro condiciones y la organización de las prácticas de la enseñanza de las matemáticas y su aprendizaje en las escuelas (Valero, 2006, citado en Camelo, García, Mancera y Romero, 2008).

Paola Valero (1999) sostiene que hasta las últimas décadas del siglo XX no era corriente encontrar escritos que hablaran sobre las dimensiones política o social de los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en general no presentaban una visión desde una perspectiva más amplia que la psicológica. A partir de allí comienzan a conocerse numerosos intentos por conectar los diversos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con un conjunto más complejo de visiones sobre la sociedad y la política.

El libro de Stieg Mellin–Olsen, *The political dimension of mathematics education* (La dimensión política de la educación matemática, 1987) es un ejemplo del intento por ampliar esta visión limitada. Para el autor, la investigación en educación matemática requiere de esfuerzos interdisciplinarios no sólo enfocados en lo psicológico o lo cognitivo.

Paul Ernest publica en 1991 su obra *The philosophy of mathematics education* (La filosofía de la educación matemática) en la que defiende una visión relativista del conocimiento. Para Ernest no existe el conocimiento absoluto de un área en particular de acuerdo a criterios previamente establecidos aceptado por la comunidad científica. Desde una perspectiva filosófica se cuestiona:

> ¿Cuál es el propósito de las Matemáticas? ¿Qué papel posee el ser humano dentro de las Matemáticas? ¿Cómo el conocimiento subjetivo del individuo llega a ser el conocimiento objetivo de las Matemáticas? ¿Cómo se refleja la Historia en la Filosofía de las Matemáticas? ¿Cuál es la relación Matemáticas con las otras áreas de experiencia y el conocimiento humano? ¿Por qué las teorías probadas por la Matemática pura llegan a ser tan potentes y útiles en sus aplicaciones a la ciencia y a los problemas prácticos? (Ernest, 1991, citado en Socas Robayna y Camacho Machín, 2003, p. 155)

Numerosas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática Crítica durante los últimos años, aportan una visión antropológica e intercultural que considera la matemática como producto social.

Los escritos sobre etnomatemáticas de Ubiratán D'Ambrosio como *Mathematics and society: some historical considerations and pedagogical implications* (Matemáticas y sociedad: algunas consideraciones históricas y pedagógicas, 1980) y *Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics* (Etnomatemáticas y su lugar en la historia y pedagogía de las matemáticas, 1985), presentan dicha corriente como un programa teórico y una práctica pedagógica, estableciendo una conexión entre epistemología y etnomatemática, interesada por cuestiones como: ¿De dónde vienen las ideas matemáticas? ¿Cómo están organizadas? ¿Cómo avanza el conocimiento matemático? ¿Tienen estas ideas algo que ver con el entorno en su conjunto, sociocultural o natural? (D´Ambrosio, 1994, p. 454).

El concepto de etnomatemática expresa las relaciones entre la cultura (lengua, códigos, valores, creencias, hábitos, rasgos físicos, etc.) y la matemática que quedan ocultas en los distintos grupos étnicos. Su dimensión política busca la descolonización que se da en los grupos sociales como la familia, la escuela, el trabajo o la sociedad en general y el respeto por sus raíces y orígenes sin dejar de respetar la del otro, sino reforzando las de ambos.

La etnomatemática es una línea de investigación de interés para Alan Bishop, quien reconoce la matemática como producto social. Su libro "Enculturación matemática: La matemática desde una perspectiva cultural" (1999), ha contribuido al desarrollo de la educación matemática creando una concepción de la matemática que reconoce y demuestra su relación con la cultura (Bishop, 1999). Se preocupa, como todos los autores que siguen la línea de la Educación Matemática Crítica, por su dimensión política. En este sentido se pregunta: ¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que se desarrolla en la escuela?, ¿tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar qué es importante enseñar?, ¿sabemos lo que tendríamos que hacer?, ¿qué dirección debería tomar la educación matemática ante la creciente presencia de la tecnología en la sociedad?, ¿cómo direccionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática respecto de los niños cuya cultura familiar no sintoniza totalmente con la de la escuela o la de la sociedad en general?

Los problemas que surgen de la relación entre las decisiones y prescripciones que se encuentran involucradas en los diseños curriculares y las cuestiones culturales son de diversa índole.

Los estudiantes que tienen "éxito", entendiendo a éste como resultado satisfactorio en los exámenes, principalmente aquellos que pertenecen a sociedades tecnologizadas y con sus necesidades básicas satisfechas, comúnmente no sienten la necesidad de hacer cuestionamientos sobre la educación matemática, aunque ésta fracase en proporcionarles las capacidades que requiere la relación con su entorno[2].

Los programas y currículos de los países más avanzados tecnológicamente siguen considerándose adecuados para países menos avanzados,

> …pero en otras sociedades donde la supervivencia es prioridad, ¿qué importancia pueden tener los modelos matemáticos, los algoritmos aritméticos o la pureza de las formas geométricas?, ¿por qué los programas y los currículos de las sociedades más tecnológicas se deben considerar modelos apropiados para sociedades menos tecnológicas, especialmente cuando son inadecuados o incluso fracasan en su lugar de origen? (Bishop, 1999, p. 19)

La visión universal de las verdades matemáticas hoy ya no tiene el mismo sustento que en la modernidad, no existen razones que justifiquen que la educación matemática deba ser igual para todos y en todas partes ignorando la individualidad del alumno o su contexto social y cultural.

Bishop concibe a las matemáticas como un fenómeno "pancultural" (que pertenece a todas las culturas) y, a la matemática que conocemos, como la disciplina internacional que se enseña en las escuelas y universidades como una forma particular de ellas.

En este sentido, lo que fundamentalmente se cuestiona Bishop es si hay una

[2] Para ilustrar esta idea se recomienda la lectura de *"En la escuela diez, en la vida cero"* de Terezinha Carraher, David Carraher y Analúcia Schliemann. (1995). México: Siglo XXI.

matemática que se presenta en diferentes manifestaciones y simbolizaciones o existen diferentes matemáticas cuyas prácticas presentan ciertas similitudes. (Bishop, 1999)

El autor investiga la génesis cultural de las ideas matemáticas, enfatiza que la educación matemática debe concebirse como “una manera de conocer”, que debe ocuparse de las actividades sociales que estimulan conceptos matemáticos, de enseñar los valores de una cultura pero adoptar a su vez una postura crítica sobre los valores de la cultura matemática.

Todas las culturas desarrollan un lenguaje o algún tipo de tecnología simbólica como producto de la necesidad de entender, explicar y predecir o controlar lo que pasa en su entorno.

> Ahora nos dedicamos a tratar de enseñar las matemáticas a todas las personas. Sabemos que se puede hacer y tratamos de hacerlo de muchas maneras en todo el mundo. Pero creo que debemos desplazarnos conceptualmente desde la idea de “enseñar matemáticas a todo el mundo” hasta la idea de “una educación matemática para todo el mundo” (Bishop, 1999, p. 19)

De este modo, propone el diseño y desarrollo de un currículo de enculturación matemática basado en conceptos, proyectos e investigaciones.

Identifica seis tipos de actividades “universales” que dieron lugar al desarrollo de las matemáticas en las distintas culturas: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar. Las selecciona por la manera en que conceptualizan o definen el campo de estudio, por ejemplo: contar y medir se relacionan con el concepto de número; localizar y diseñar con la estructuración espacial que da origen a las ideas geométricas; jugar y explicar, a diferencia de las cuatro anteriores que se refieren al entorno físico, se orientan a las relaciones con el entorno social.

- *Contar*

Si hay una actividad “universal” que naturalmente sugiere un desarrollo matemático es, por excelencia, la actividad de contar. Está entre las más investigadas y documentadas. Contar desarrolla el lenguaje de los cuantificadores, las imágenes y los sistemas numéricos. Se caracteriza por su aspecto discreto, íntimamente ligado a los números naturales. Está estimulada por los procesos cognitivos de clasificar, asociar objetos y buscar pautas. No cabe duda de que es utilizada en todas las sociedades, aún en situaciones sociales en las que no se manejen números muy grandes. Se relaciona estrechamente con el comercio, el empleo, la propiedad y la riqueza.

- *Medir*

Desarrolla el lenguaje de la cuantificación y las unidades y sistemas de medición. A través de la medición se asigna números a magnitudes continuas. Aunque la valoración de las medidas es muy diversa, ya que depende del entorno inmediato y de las necesidades que éste evoca, la actividad de medir es considerada por la enculturación matemática como una actividad “universal”. El entorno local determina las unidades de medida y las cualidades que tienen valor y relevancia en dicha actividad. Muchas son las culturas que han utilizado como unidades prácticas de longitud, partes del cuerpo humano como el codo, el dedo, la mano, el pie, el paso, la braza, etc. Independientemente de estas variables, se trata de una actividad centrada en comparar, ordenar y cuantificar cualidades y estrechamente ligada a la cuestión geométrica. Bishop menciona que uno de los puntos débiles de las personas formadas en una tradición matemático-científica es que tienden a suponer que lo que no se puede cuantificar o medir fácilmente es insignificante y que es común dejarse cegar por los sistemas de medida propios, lo que puede significar un obstáculo a la hora de realizar estudios crosculturales.

- *Localizar*

Como se mencionó anteriormente, la actividad de localizar se relaciona con la estructuración del entorno espacial, destacando sus aspectos topográficos y cartográficos, se refiere a la situación de uno mismo con otro objeto. Desarrolla el lenguaje, las imágenes espaciales y los sistemas de coordenadas. Resulta de gran utilidad en el desarrollo de cuestiones geométricas. Su carácter de actividad "universal" se debe a que todas las sociedades cuentan con diversas maneras de representar y describir localizaciones mediante las cuales podemos identificar ideas geométricas. Todas las culturas desarrollan métodos más o menos sofisticados para codificar y simbolizar su entorno espacial.

Según Bishop se pueden explicar los conceptos espaciales de cualquier cultura haciendo referencia a tres niveles de espacio: espacio físico o de objetos, social geográfico y cosmológico. En sociedades urbanas parece predominar un mayor deseo o necesidad de localizaciones precisas para lo que se emplea una variedad de sistemas para la localización espacial (ángulos, distancias, coordenadas, puntos cardinales).

- *Diseñar*

Todas las culturas diseñan cosas aunque no todas lo hagan de la misma manera ya que esto depende de las necesidades de cada una de ellas, de los materiales de que disponen y de la manera en que interpretan el entorno natural y las formas que pueden imaginar en esta interpretación según las características que eligen destacar. Esta actividad "universal" desarrolla imágenes, formas e ideas geométricas, conduce a la idea fundamental de "forma", permite transmitir valores relacionados con la interacción matemáticas-entorno. Diseñar implica imaginar la naturaleza sin las partes "innecesarias".

- *Explicar*

Las actividades ya mencionadas se refieren a respuestas que derivan de preguntas como ¿cuándo?, ¿dónde?, ¿cuánto?, ¿qué? o ¿cómo?, mientras que explicar se refiere a ¿por qué?

Consiste en compartir las abstracciones y formalizaciones que se obtienen de las actividades anteriores, por lo que esta actividad, eleva la cognición humana por encima del nivel asociado con la experiencia del entorno. Todas las culturas cuentan con formas de conectar ideas a través del discurso y de validarlas, por lo que explicar es tan universal como el lenguaje y tiene una importancia fundamental para el desarrollo matemático en cada una de ellas.

- *Jugar*

Jugar y explicar son actividades que permiten la vinculación de las personas con su entorno social. Durante el juego, los participantes conocen y aceptan las reglas y los procedimientos sociales para la actuación y desarrollan el aspecto "como si" de la conducta imaginada e hipotética, éstas son características que se encuentran en la raíz del pensamiento hipotético, de allí que el juego puede representar la primera etapa de distanciamiento de la realidad dando origen al pensamiento abstracto. En todas las culturas se juega y es algo que suele tomarse demasiado en serio. En las propias reglas de diversos juegos existen múltiples conexiones con el pensamiento matemático.

Otra de las decisivas influencias que ha recibido la Educación Matemática Crítica, es la del autor brasileño Paulo Freire (2002), quien aboga por una educación problematizadora y liberadora. La importancia de su trabajo reside en que parte del supuesto básico de que la educación debe relacionarse con las estructuras críticas de la sociedad, concibiendo a la alfabetización como un potencial medio para la liberación y el desarrollo de condiciones para que los seres humanos puedan ubicarse en la historia, reconocer su posición en la sociedad y funcionar en ella, lo que implica que los sujetos dejen de ser simples observadores para convertirse en actores, que los oprimidos se vuelvan capaces de luchar por mejorar sus oportunidades, que alumnos y docentes puedan negociar sobre los contenidos curriculares y estén preparados para correr riesgos, desafiar y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad en general.

Es evidente que el desarrollo del concepto de alfabetización de Freire incluye mucho más que habilidades básicas de lectura y escritura en los grupos subordinados: involucra un proyecto de transformación de condiciones ideológicas y sociales y desafía a una visión del mundo limitada que imposibilita la creación de comunidades y formas de vida democráticas.

Diversos artículos publicados por el investigador danés Ole Skovsmose y su libro titulado *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*, publicado en 1994, donde se reunía el trabajo de más de una década de este mismo autor, se encuentran entre los más actuales aportes a la Educación Matemática Crítica (Valero, 1999). El libro presenta una formulación teórica que pretende fundamentar e interpretar prácticas educativas.

Los conceptos que constituyen una teoría no nacen en el "vacío". Es importante para el propósito de este trabajo conocer el contexto en el que se fue gestando la teoría o filosofía de Skovsmose para comprender que detrás de cada teoría existe un trasfondo social, político, económico y cultural que le da un sentido, que no necesariamente es el mismo sentido que puede dársele en otras culturas y que la educación crítica debe ayudar a revelar para su interpretación.

Skovsmose nació en Dinamarca, un país que goza de un alto nivel de desarrollo tecnológico. Desde su vivencia como estudiante comprometido con las ideas de la Revolución del 68 y las ideas socialdemócratas dominantes en Dinamarca y con la imagen de las atrocidades de Auschwits en mente, pudo observar "cómo la existencia de la autoridad del profesor era capaz de controlar y apaciguar a los estudiantes" y concluir que "algo andaba mal en la manera como la educación matemática silenciaba y suprimía a las personas”, sin embargo, desde su experiencia como profesor pudo comprobar que las cosas podían ser de otra manera, había logrado que en su clase la autoridad del profesor no cayera en represión (Valero, 1999).

Por otro lado, aunque al escribir su libro (Hacia una filosofía de la educación matemática crítica, 1994) tiene en mente en todo momento al mundo de la Europa Occidental, de Norte América, y de algunos países Asiáticos y de Oceanía, que presentan un alto desarrollo tecnológico (económico, industrial, político y social), descubrir que otros pensadores de distintas partes del mundo compartían sus mismas preocupaciones e intereses y la posibilidad de conocer otras realidades a través de proyectos realizados en distintas sociedades en colaboración con investigadores brasileños, colombianos, griegos y sudafricanos, generó en él nuevos retos teóricos. “Si no hubiera tenido un contacto serio con todas esas personas y no hubiera podido ver su mundo, nunca se me habría ocurrido salir de Dinamarca” (Skovsmose, 1999, citado en Valero, 1999, p. XI).

Conceptos como el de etnomatemática, que conoció a través de Ubitaratán D’Ambrosio o el de alfabetización de Freire, influyeron profundamente en su filosofía de la matemática crítica.

> ¿Qué pueden significar la etnomatemática y la educación matemática crítica en países como Suráfrica donde es claro que lo ‘etno’ tiene una connotación negativa, politizada y problemática, y donde es evidente que las condiciones sociales sobrepasan la necesidad de una crítica sobre el papel de las matemáticas en la sociedad? (Skovsmose, 1999, citado en Valero, 1999, p. X).

El concepto de alfabetización de Freire no se refiere únicamente a la habilidad para leer y escribir, posee una dimensión crítica, un poder simbólico que puede controlar las interpretaciones de la realidad social pero que también puede reorganizar esas interpretaciones luego de hacer visibles las nociones y comprensiones que se visten con un disfraz de neutralidad permitiendo a los sujetos participar en la transformación de su sociedad. Si la alfabetización tiene este poder simbólico y crítico, por qué no pensar en un poder similar para la matemática, si después de todo también se trata de un lenguaje, de una abstracción de la realidad, difícil de cuestionar ya que siempre se creyó en las bondades de la matemática en cuanto a su precisión y falta de ambigüedad.

Skovsmose (1999) vincula explícitamente estos conceptos: ¿se puede pensar que existe una alfabetización matemática con características semejantes a las de la alfabetización?... Si esto es posible, ¿podemos ofrecer una interpretación educativa a la alfabetización matemática que sea paralela a la de alfabetización? ... ¿se podría involucrar la alfabetización matemática en un proyecto para nombrar y transformar las condiciones ideológicas y sociales que obstaculizan el desarrollo de una comunidad organizada democráticamente?

Por supuesto, considera que es posible y de esta manera reconoce la potencialidad de la educación matemática para facilitar u obstaculizar el desarrollo de una sociedad democrática y para introducir una cierta gramática que promueva algunas visiones específicas del mundo (este reconocimiento fundamenta su propuesta de construcción de “escenarios de aprendizaje”, de los que se hablará más adelante en un apartado específicamente destinado a su descripción y análisis).

La democracia no es sólo una forma de gobierno sino un modo de vida de una sociedad. Las sociedades en vía de desarrollo, como las de muchos países hispanohablantes, suelen llamarse democráticas por el solo hecho de poder elegir a sus gobernantes, sin embargo un modo de vida democrático incluye también la posibilidad de que los ciudadanos se involucren y reaccionen ante los problemas de la sociedad poniendo en práctica una competencia crítica, entendiendo crítica como una actividad de pensamiento y de reacción ante una situación de crisis y competencias democráticas como aquellas que facilitan el desarrollo de una ciudadanía democrática (Skosvsmose, 1999).

Claro está que estas competencias no tienen el mismo significado en cada sociedad dado que éstas están ligadas a los problemas críticos de cada una de ellas.

Las sociedades con un alto nivel de desarrollo como Dinamarca, cuentan con las necesidades y derechos básicos de sus ciudadanos satisfechos.

> Las condiciones materiales de distribución equitativa de los bienes y servicios también se satisfacen. Esto garantiza que todos los habitantes del país posean vivienda y tengan acceso gratuito a educación en todos los niveles del sistema educativo —primaria, secundaria, universitaria o técnica especializada—, a servicios de salud públicos y a subsidios como el subsidio infantil otorgado a cada familia por cada hijo desde su nacimiento hasta los 18 años de edad, subsidio de desempleo que garantiza un salario básico en caso de pérdida del trabajo, el subsidio de vivienda que asegura una reducción en impuestos cuando se ha adquirido un préstamo para la compra de vivienda, entre otros. Las condiciones éticas de igualdad y respeto de los individuos como seres humanos ante la ley y ante los demás miembros de la sociedad también están satisfechas. (Valero, 1999. p. XII).

En estas sociedades, las competencias democráticas apuntan a conservar la democracia y contribuir a su evolución, son necesarias para el abordaje de la complejidad en la toma de decisiones de sus gobiernos, la que se incrementa con el desarrollo de las condiciones económicas y de la tecnología.

En sociedades en vía de desarrollo como la nuestra, en cambio, las preocupaciones suelen ser muy diferentes. Éstas deben lidiar con marcadas diferencias sociales, económicas y culturales que estructuras económicas y sociales capitalistas se han encargado de instaurar. Así, nos encontramos con que en los currículos abundan conceptos como calidad educativa, igualdad de oportunidades, equidad, e inclusión; entonces nuestras preocupaciones básicas son otras: la erradicación del analfabetismo, el logro de niveles mínimos de educación básica obligatoria, la provisión de recursos mínimos para un funcionamiento educativo adecuado, la eliminación de desigualdades basadas en diferencias de clase, género o raza.

La irrupción de una dictadura suele considerarse como uno de los factores más amenazantes para un proceso democrático porque elimina el "derecho al voto", sin embargo, la posibilidad de elegir un gobierno es sólo una condición formal de la democracia; un modo de vida democrático sólo podrá desarrollarse si cuenta con condiciones materiales, que tienen que ver con la distribución y éticas, que se relacionan con las posibilidades de participación y reacción de sus ciudadanos.

En sociedades complejas como las nuestras, la existencia de una ciudadanía crítica constituye una condición tan imprescindible como la del derecho a elegir a sus gobernantes, implica la posibilidad de evaluar sus decisiones y las consecuencias derivadas de éstas. Una democracia representativa funciona si la mayoría de los ciudadanos son capaces de elegir y de intervenir.

La delegación de la soberanía es necesaria y los dirigentes deben tener un conocimiento específico acerca del ámbito de gobierno que ejercen, por lo tanto, la competencia democrática debe incluir la capacidad de autocrítica en cuanto a esta delegación y la posibilidad de controlar, evaluar y emitir juicios sobre las acciones de quienes fueron elegidos para gobernar.

En contextos complejos, la educación crítica tiene como uno de sus principales objetivos, desarrollar competencias que posibiliten hacer visibles desigualdades, represiones, mecanismos de reproducción de estructuras que obstaculizan el desarrollo democrático y todo tipo de conflictos y crisis de la sociedad, pero esencialmente, de reaccionar y accionar ante ellos.

2. 1 El poder formativo de la matemática

Cuando hablamos de "formar" en un contexto educativo, solemos otorgarle a este concepto una connotación positiva: formamos para ser buenos trabajadores, para la vida, para ser ciudadanos críticos, etc. Sin embargo, la orientación que puede adquirir el poder formativo de una ciencia en general y de la matemática en particular, depende de diversos factores cuyas consecuencias pueden incidir tanto positiva como negativamente en la formación.

La escuela reproduce las estructuras sociales, como sostienen en gran parte de su obra Bourdieu y Passeron, entre otros, lo que incluye la división del trabajo, distribución del poder, valores culturales tradicionales y creencias ideológicas. La rutina termina invisibilizando estos aspectos convirtiéndolos en parte de la vida de la escuela. Una educación crítica tiene que tener en cuenta el contexto crítico de la escolaridad, crear consciencia acerca de estos conflictos y proporcionar las competencias necesarias para poder intervenir ante ellos.

Un lenguaje formal como el matemático, emerge de un proceso de modelización que puede durante el mismo, destruir diversos medios de expresión. Durante la modelización matemática se pierde gran parte de la riqueza de las descripciones verbales y no formales; nociones previas transitan por distintos lenguajes: natural, sistémico, matemático y algorítmico, adquiriendo una aparente neutralidad que invisibiliza el trasfondo político y social en el cual se originaron. Un modelo matemático puede representar una interpretación particular de una estructura económica o de sistemas de regulación de la educación que involucran cierta distribución de poder e inciden en la vida real de la población. El lenguaje natural tiene un poder descriptivo que posibilita la construcción de significados, en cambio el lenguaje formal, tiene la facilidad de ocultar estos significados adquiriendo un carácter prescriptivo. El proceso de modelización consiste en la construcción de estructuras que representan una interpretación específica de la realidad y a su vez, la descripción particular de un sistema conceptual. La modelización surge de la transformación de abstracciones mentales en abstracciones materializadas. Las abstracciones mentales son propias de las matemáticas, como los conceptos y el modelaje matemáticos. Se usan para facilitar el razonamiento y nos permiten simular una situación de forma hipotética. Las abstracciones materializadas nacen de la formalización, representan imágenes de las abstracciones mentales y se toman como un hecho. (Skovsmose, 1999)

Skovsmose hace una distinción entre dos tipos de modelaje: el modelaje puntual, mediante el cual transformamos un problema específico en un lenguaje formal y el modelaje extendido, en el que el problema original se transforma en una generalización para un proceso tecnológico.

La formalidad del lenguaje de las matemáticas invisibiliza los antecedentes del proceso de modelaje dificultando la identificación de la naturaleza del sistema que dio origen al modelo en cuestión, es decir, el lenguaje matemático posee un poder simbólico que puede excluir formas de pensamiento y cuestionamientos filosóficos.

Un poder simbólico es invisible y tiene la fortaleza de ser aceptado por aquellos sobre quienes se ejerce, lo que lo vuelve legítimo, incuestionable, imposibilitado de convertirse en objeto de crítica.

Así, las matemáticas ofrecen nuevas percepciones de la realidad y también la colonizan y reorganizan, por esto se podría decir que las matemáticas le dan forma a la sociedad (Skovsmose, 1999).

Lo dicho no significa que el lenguaje matemático debe suponer un obstáculo a vencer por parte de las personas que integran el aula (profesorado y alumnado), sino una oportunidad para entender, interpretar e intervenir en el mundo.

La matemática ha ampliado enormemente su campo de aplicación debido a su asociación con el avance de la tecnología de la comunicación, la que permite desarrollar modelos matemáticos cada vez más complejos y el manejo de una impensada cantidad de datos, por lo que el poder de la matemática se encuentra ahora más directamente relacionado con el desarrollo de nuevas estructuras sociales, políticas y económicas: del inocente papel de asistente de la física, la química o las ciencias naturales, está transitando hacia el cómplice rol de partícipe necesario en producciones cuyas consecuencias sociales dependen del incierto rumbo que pueda adquirir el desarrollo tecnológico. Entonces, a la invisibilidad del poder simbólico de un lenguaje formal como el matemático, se debe agregar la imposibilidad de predecir las consecuencias éticas y morales resultantes de la producción tecnológica.

> Si somos conscientes de las posibilidades de la tecnología y las matemáticas tanto para crear realidades sociales ‘positivas’, como estructuras de riesgo altamente negativas, debemos comenzar por cuestionar la función de las matemáticas en nuestras sociedades y, por lo tanto, de la educación matemática en la creación y reproducción de tales estructuras. Esta es la primera labor de una educación matemática crítica en un contexto hispanoamericano. (Valero, 1999, p. XX-XXI)

La función de la tecnología fue evolucionando: produjo herramientas que han sustituido la fuerza física, maquinarias que han impulsado el desarrollo de la energía y hasta extendió la fuerza cerebral mediante la computadora.

Esta línea de evolución tecnológica puede de alguna manera interpretarse como el producto de la intervención del hombre con el fin de extender la fuerza que le ha ofrecido la naturaleza.

Sin embargo, la educación crítica pone su mirada en otro tipo de tecnología, se focaliza en la tecnología que el hombre utiliza con el fin de intervenir en la sociedad.

La primera línea de evolución tecnológica está a la vista, frecuentemente genera asombro y hasta admiración, en cambio la segunda suele pasar desapercibida, tiene poder simbólico.

Es tarea de la educación crítica en general y de la Educación Matemática Crítica en particular, cuestionar las consecuencias sociales, éticas y morales de las tecnologías que relacionan al hombre con la naturaleza y hacer visibles aquellas que, casi imperceptiblemente, intervienen en las estructuras sociales, culturales, políticas y económicas de una determinada sociedad.

Ejemplos de este segundo tipo de tecnologías son: la desarrollada por Taylor para administrar los procesos de trabajo en las fábricas[3] o los mecanismos de vigilancia inspirados en el Panóptico[4] ideado por Jeremy Bentham, que hoy se ven perfeccionados por la gran capacidad para recoger, procesar, acumular y recuperar información que aportan las nuevas tecnologías.

Esta "mejorada" modalidad de vigilancia tecnológica es, sin duda, un claro ejemplo de las tecnologías que relacionan al hombre con las estructuras sociales. En este caso el riesgo de que el desarrollo de la tecnología evolucione en sentido negativo es bastante alto: se puede asociar al disciplinamiento y control de la humanidad y su consecuencia puede ser la sumisión y la opresión.

Skovsmose (1999) distingue tres tipos de conocimiento:

El *conocimiento matemático,* que se refiere a las habilidades para ejecutar algoritmos y realizar cálculos, para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones o inventar y descubrir nuevas matemáticas.

El *conocimiento tecnológico,* que es la habilidad de aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos.

---

[3] Para Taylor los procesos de trabajo complejos tienen que fragmentarse en sus componentes atómicos. Después, cada componente se debe investigar para encontrar la mejor manera de llevar a cabo las operaciones y se debe medir el tiempo apropiado para su ejecución. A continuación, los componentes atómicos se secuencian para definir el proceso de trabajo para cada trabajador, y el total del comportamiento algorítmico de los trabajadores conformará una nueva "megamáquina". (Skovsmose, 1999, p. 53)

[4] "El panóptico era un sitio en forma de anillo en medio del cual había un patio con una torre en el centro. El anillo estaba dividido en pequeñas celdas que daban al interior y al exterior y en cada una de esas pequeñas celdas había, según los objetivos de la institución, un niño aprendiendo a escribir, un obrero trabajando, un prisionero expiando sus culpas, un loco actualizando su locura, etc. En la torre central había un vigilante y, como cada celda daba al mismo tiempo al exterior y al interior, la mirada del vigilante podía atravesar toda la celda, en ella no había ningún punto de sombra y por consiguiente, todo lo que el individuo hacía estaba expuesto a la mirada de un vigilante que observaba… "(Foucault, 1996, p. 98)

Y el *conocimiento reflexivo*, que involucra la evaluación y la discusión de las consecuencias éticas y sociales de los procesos que tienen un fin tecnológico. El conocer reflexivo es el encargado de identificar las nociones e interpretaciones previas al desarrollo de un sistema conceptual.

Estas tres competencias: la matemática, la tecnológica y la reflexiva, como parte integrada del “conocer reflexivo”, son componentes esenciales de la alfabetización matemática; tienen la posibilidad de aportar un significado educativo a la noción de ciudadanía crítica.

Entonces, la Educación Matemática Crítica plantea la posibilidad de ejercer mediante el conocer reflexivo, matemático y tecnológico, un poder formativo en sentido positivo, visible, no simbólico, que permita a los estudiantes tomar una posición justificada en una discusión sobre cuestiones sociales, éticas y morales.

En este sentido, la Educación Matemática Crítica posee un poder transformador y la alfabetización matemática, mediante el conocer reflexivo, resulta parte integrada de la competencia democrática.

Pero el conocer reflexivo no debe limitarse a evaluar y discutir las consecuencias de las tecnologías, también debe implicar una acción y reacción ante ellas, es decir, la reflexión no debe considerar sólo el objeto de crítica sino también el sujeto de la crítica.

La competencia crítica no es algo que pueda imponerse, se trata de un proceso que debe negociarse, los sujetos deben aceptarlo, estar dispuestos y tener la intención de llevar a cabo este proceso crítico.

Tanto los antecedentes del sujeto, es decir su propio contexto histórico y social (la cultura natural heredada al nacer y los recursos, lenguajes e interpretaciones culturales propias o incorporadas de su grupo), como las posibilidades de porvenir que este contexto le ofrece, van a determinar las disposiciones que orienten sus acciones.

El aprendizaje no implicará una acción si el sujeto no se involucra haciéndose responsable del proceso de aprendizaje, él produce, genera, crea y decide sobre sus intenciones y al hacerlo revela sus disposiciones.

Para que una actividad se considere acción, debe estar precedida por una intención, si no, simplemente se tratará de un hábito o de un reflejo proveniente de un mandato.

La alfabetización matemática entonces, basada en la práctica liberadora de Freire, tiene un potencial poder formativo en un sentido positivo. A través de ella, los seres humanos tienen la posibilidad de ubicarse en la historia y de reconocer su posición en la sociedad, pueden dejar de ser simples observadores para intervenir mediante sus propias acciones en la mejora de sus oportunidades, pueden ser protagonistas en una vida democrática.

En síntesis, la tecnología y la matemática tienen, como nunca, la posibilidad de intervenir en el desarrollo de estructuras sociales tanto positiva como negativamente; nos encontramos ante la necesidad de adoptar una perspectiva crítica que nos permita cuestionar, tomar una posición y accionar en cuanto a la función actual y futura de la matemática en la sociedad.

¿Cómo, la Educación Matemática Crítica y el conocer reflexivo pueden intervenir positivamente en la formación de un individuo y en la transformación de la sociedad?

Si simplemente se quiere ver en un objeto sólo aquello que puede observarse a primera vista, basta con mantenerse en una posición fija y mirar, es decir, actuar como un mero observador, pero para lograr una mirada crítica esto no es suficiente.

Si la educación matemática pretende aportar a la formación democrática, alumnos y profesores deben abandonar el rol de simples observadores: deben tener la posibilidad de percibirse como seres sociales y políticos dentro y fuera del aula; tener la oportunidad de ocupar durante las actividades, posiciones diversas que les permita distintos modos de intervención y niveles de influencia; ser conscientes de que adoptar una posición y accionar desde ella implica riesgos; que es necesaria una reflexión crítica orientada al cuestionamiento y la comprensión de ese posicionamiento y de ese accionar y; entender que las consecuencias éticas y morales de las acciones influyen en los demás.

Vista de este modo, parece tratarse de una posición incómoda y demasiado arriesgada, sin embargo, la idea es mostrar por qué vale la pena hacer algo por abandonar el rol pasivo que siguen ocupando muchos alumnos y docentes dentro del aula.

Vale la pena en primer lugar, porque esta pasividad tiene mucho que ver con la forma en que se ve la matemática: fría, sin sentido, "inhumana y hasta deshumanizante"; y en segundo lugar, porque en ello se basa el poder formativo de la educación matemática. El accionar crítico y democrático en la clase de matemática conecta la vida en el aula con la posibilidad de imaginar que las situaciones sociales y políticas pueden ser diferentes.

El principio de "ejemplaridad" sostiene que la investigación de un tema específico permite comprender temas más generales, pues un problema particular puede representar un conjunto de problemas y su abordaje, un ejemplo para abordar un problema general en el ámbito social, político o económico (Skovsmose, 1999).

La ejemplaridad tiene mucho que ver con el poder formativo de la matemática: respeta el origen cultural y extiende sus posibilidades de futuro, posibilita la visibilidad de cuestiones que permanecen ocultas en la cotidianeidad.

En el tratamiento de los asuntos cotidianos se pueden apreciar diversos puntos de vista que tienen que ver con los diferentes orígenes culturales y esto suele hacer creer que hay culturas en las que la matemática casi no existe o no está desarrollada, sin embargo, la matemática es un fenómeno pancultural, es decir, se encuentra en todas las culturas (Bishop, 1999).

El principio de ejemplaridad propone abordar actividades relacionadas con el entorno más próximo para luego generalizarlas a otros contextos.

> “si todo lo que hacemos es enseñar a los niños el conocimiento de su propia y delimitada cultura, ellos no entenderán acerca del resto del mundo”. Tú empiezas en lo local, tienes que empezar en lo local, pero luego debes educar sobre lo global también. La pregunta se vuelve entonces ¿Cómo hacerlo de la mejor manera? La etnomatemática debe ayudar a los profesores a realizar dichas conexiones entre lo local y lo global (Bishop, citado en Blanco y Parra, 2009, p. 73)

Tanto Bishop como Skovsmose coinciden en que las matemáticas están integradas de diferente manera en cada contexto, que hay que rescatarlas mediante actividades que tengan un sentido y una lógica en la vida del aula, reconocerlas, darles un nombre y hacer que entren en conversación, lo que Skovsmose llama “arqueología matemática”.

> ...descubrir las raíces matemáticas de una actividad se relaciona con la idea del poder formativo de las matemáticas. Si generar una discusión sobre el poder formativo de las matemáticas tiene sentido, entonces tenemos que ser capaces de identificar ejemplos de las matemáticas en uso. Por lo tanto, una arqueología matemática puede tener sentido tanto cuando se dirige hacia las actividades del salón de clase, como cuando se enfoca en los fenómenos sociales. (Skovsmose, 1999, p. 106)

3 Los escenarios de Investigación

Las prácticas educativas en el aula pueden desarrollarse en ambientes de aprendizaje de diversas características.

Una clase de educación matemática tradicional por ejemplo, se desarrolla en un ambiente que se ubica en lo que Skovsmose (2000) llama “paradigma del ejercicio”. En ella la presentación de técnicas y ejercicios por parte del profesor provienen de una autoridad externa a la clase en sí, como por ejemplo el libro de texto, son tomadas como un hecho, representan el camino para la adquisición de conocimientos acabados. Los ejercicios que en ella se resuelven suelen tener una única respuesta.

La clase ubicada en el paradigma del ejercicio contrasta con la que se desarrolla en un ambiente de aprendizaje que presenta un enfoque investigativo. En ella se propone una situación particular que tiene la potencialidad de promover un trabajo de investigación o de indagación, a este tipo de clases Skovsmose (2000) da el nombre de “escenarios de investigación”.

Para Skovsmose, el montaje de un escenario constituye una oportunidad para que alumnos y docentes puedan desarrollar el conocer reflexivo necesario para elaborar argumentos y tomar decisiones teniendo en cuenta las consecuencias sociales y éticas de dichas decisiones.

Consiste fundamentalmente en crear una microsociedad democrática dentro del aula, un espacio de construcción de conocimiento colectivo que tenga en cuenta la relación del estudiante con su propia realidad en la cual puedan gestarse las competencias democráticas necesarias para identificar situaciones críticas de la sociedad en general, tomar una posición justificada ante ellas, actuar en consecuencia y, finalmente, contribuir a la transformación de situaciones críticas socialmente relevantes.

Durante el montaje de un escenario debería darse una negociación entre los estudiantes y los profesores sobre las intenciones y las disposiciones de cada uno, es decir, debería existir una acción intencionada del profesor para promover actividades que permitan a los alumnos comprometerse con el proceso de aprendizaje, sentirse protagonistas y actuar como tales.

Los profesores y estudiantes deberían ser capaces de desarrollar una arqueología matemática, o sea, excavar en determinadas situaciones tecnológicas para identificar, hacer visibles y explicitar las matemáticas que se encuentran ocultas en cada una de ellas para adquirir la habilidad de comprender el funcionamiento de las matemáticas en la sociedad y adoptar una distancia crítica sobre la acción de aprendizaje que permita realizar una autorreflexión sobre la propia participación en el proceso. Si el escenario de investigación consiste en el desarrollo de un proyecto se debería introducir una situación ejemplar, es decir, que el estudio profundo de una situación particular conduzca a la exploración de un fenómeno global.

En los escenarios de investigación que propone Skovsmose, las actividades pueden presentarse en forma de ejercicios o como propuestas de investigación pero además pueden referirse exclusivamente a las matemáticas, a una semirrealidad (realidad construida) o pueden formar parte de una situación de la vida real.

Combinando la forma de presentación de las actividades y las referencias, se puede observar que se generan seis posibles escenarios con características diferentes.

Ambientes de aprendizaje:

	Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Matemáticas puras	(1)	(2)
Semirrealidad	(3)	(4)
Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Figura 1: *Formas de organización de la actividad de los estudiantes (tomado de Skovsmose, 2000, p. 10).*

Las “referencias” se relacionan con los significados que los estudiantes pueden desarrollar de los conceptos, es decir, del contexto en el que se presentan éstos depende la ubicación de un objetivo y la motivación para la realización de una acción por parte de los estudiantes en el salón de clase.

El tipo (1) se ubica en un contexto de “matemáticas puras” y en el paradigma del ejercicio.

El tipo (2) se puede caracterizar como un escenario de investigación dentro de las matemáticas: búsqueda de regularidades, deducción de propiedades, etc.

El tipo (3) se ubica en el paradigma del ejercicio con referencia a una semirrealidad. Es frecuente encontrar en libros de texto "problemas" que versan sobre situaciones cotidianas o de la vida real aunque en realidad, sólo representan un ejercicio de aplicación sobre una realidad construida, inventada, ya sea por el docente o por el autor del libro de texto.

El ambiente de tipo (4) hace referencia también a un semirrealidad, sin embargo, las actividades que se presentan en él, no consisten en la realización de ejercicios sino que constituyen una invitación a la exploración y la investigación.

En el ambiente de tipo (5) los estudiantes y el profesor trabajan con situaciones de la vida real, aunque éstas sólo se utilizan como una fuente para la resolución de ejercicios.

Para el ambiente de tipo (6), Skovsmose tiene en mente la enseñanza por proyectos[5]. Éstos se desarrollan en situaciones de la vida real en las que la acción intencionada del profesor favorece el compromiso con el conocer reflexivo tanto de él mismo como el de sus alumnos, es decir, de los sujetos de la crítica.

---

[5] Para la descripción completa de los seis proyectos expuestos por Skovsmose, ver *"Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica"* (1999), (Capítulos 4, 5, 7, 8 y 9).

> ...no quiero sugerir que un ambiente particular pueda designarse como el representante de los objetivos últimos de la educación matemática, bien sea crítica o no. Más bien, mi propuesta es apoyar una educación matemática que se mueva por los distintos ambientes presentados en la matriz. En particular, no creo que un objetivo del cambio en la educación matemática deba ser el abandono total de cualquier tipo de ejercicios. (Skovsmose, 2012, p. 123)

Moverse a través de los diferentes ambientes de aprendizaje posibles puede generar un alto grado de incertidumbre, pero ésta no debe eliminarse, enfrentarla debe significar un gran reto.

4 Las Ternas Pitagóricas

Entre los problemas matemáticos más antiguos se encuentra el número ocho del libro II de la “Arithmetica” de Diofanto que dice:

"Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados"

La proposición de este problema inspiró al matemático francés Pierre de Fermat a escribir la famosa nota marginal que anotó en el ejemplar de la edición de Bachet (1621), recogida en la reedición de su hijo Samuel (1670). (Muñoz, 2002, p. 4):

> Por el contrario, es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados y, en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen de este libro es muy pequeño para ponerla (Pierre de Fermat).

Fermat afirmó que mientras que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

tiene soluciones enteras positivas para $n = 2$, para n más grande no existen tres enteros positivos x, y, z que la verifiquen.

Esta afirmación se conoce como el último Teorema de Fermat (1601-1665) y su demostración representó un problema que permaneció abierto durante más de tres siglos, hasta que el matemático inglés Andrew Wiles expuso la suya en 1995.

Una terna de números enteros positivos x, y, z, que verifica la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

se conoce como ***terna pitagórica***; según el recíproco del Teorema de Pitágoras, la identidad

$$a^2 + b^2 = c^2$$

garantiza que existe un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b y su hipotenusa mide c.

Si además se cumple que

$$mcd(x, y, z) = 1$$

decimos que la terna pitagórica es primitiva o básica.

A partir de dos enteros positivos x e y, siempre podríamos encontrar un tercer número z que verifique la ecuación, pero z no necesariamente sería un entero positivo.

La idea de encontrar un método para obtener ternas (x, y, z) que cumplan con las dos condiciones: verificar la ecuación y además ser enteros positivos, se convirtió en un nuevo problema a resolver.

4.1 Historia de las Ternas Pitagóricas

Generalmente tomamos contacto con las ternas pitagóricas cuando estudiamos el Teorema de Pitágoras, por lo que resulta natural imaginar su origen en el siglo VI a.C. en el que Pitágoras vivió; y en Grecia, ya que él era natural de la isla de Samos. Sin embargo el hallazgo de antiguas tablillas de arcilla, indudablemente demuestra que se conocía en Babilonia la relación que hoy se conoce como Teorema de Pitágoras 1500 años antes de que Pitágoras naciera. Sería razonable suponer que Pitágoras adquiriera gran parte de sus conocimientos viajando a la región que ocupaba la antigua Mesopotamia (figura 2).

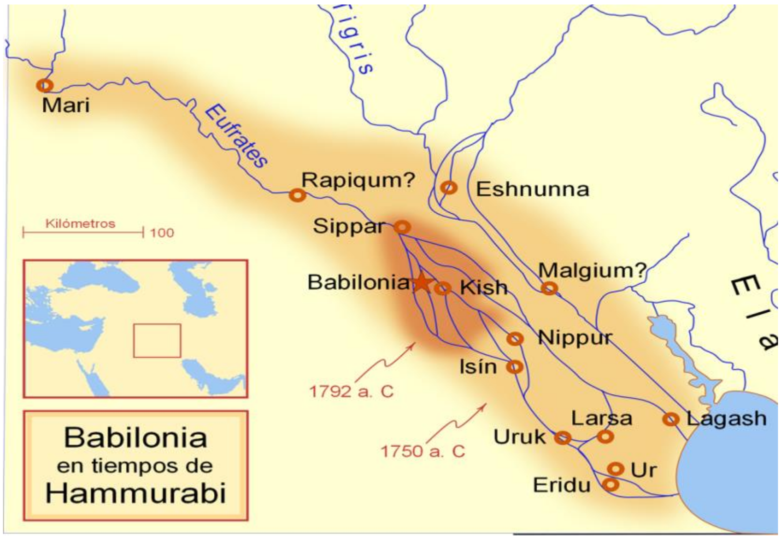


Figura 2: *Babilonia en tiempos de Hammurabi* (*tomado de* http://commons.wikimedia.org).

Pareciera que el análisis de la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo se ha ido desarrollando durante milenios con diferentes características según la época y el lugar geográfico, sin embargo entre las referencias históricas a esta relación correspondientes a la etapa prehelénica en Mesopotamia no se encuentran pruebas del teorema aunque, como se verá a continuación, se han obtenido resultados aritméticos concretos para los lados de un triángulo rectángulo. La supuesta relación aritmético-geométrica de esa época es aún discutida. Un milenio y medio más tarde, civilizaciones griegas profundizaron la investigación demostrando los resultados generales de las etapas precedentes, es generalizada la creencia de que fue Pitágoras el primero en proporcionarnos una demostración lógica del teorema, lo que justificaría el hecho de que éste haya pasado a la historia con su nombre.(González Urbaneja, 2008, p. 104)

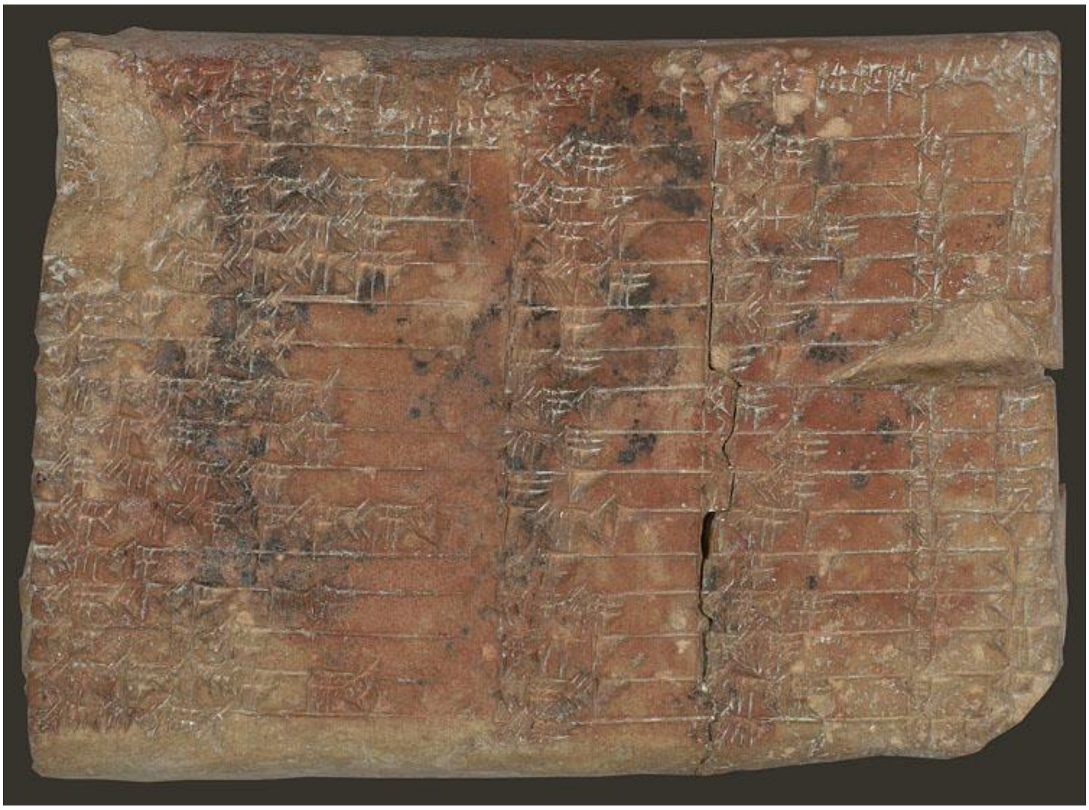


Figura 3: *Tablilla Plimpton 322*
(tomado de http://www.columbia.edu/cu/lweb/eresources/exhibitions/treasures/html/158.html).

A principios del siglo XX fue excavada en Senkereh, un lugar en el sur del actual Irak correspondiente a la antigua ciudad de Larsa, situada a orillas del rio Éufrates, el fragmento de una tablilla de arcilla perteneciente a la antigua cultura babilónica (2000-1800 a.C.) conocida como la tablilla Pimptom 322. (García-Cuerva, 2009)

Perteneció a la colección de un editor neoyorquino, George Arthur Plimpton. Después de su muerte en 1936, fue donada a la universidad de Columbia, donde se encuentra actualmente con el 322 como número de catálogo.

Mide 12,7 x 8,8 cm y tiene aproximadamente un grosor de 2 cm. Presenta 15 filas de números distribuidos en cuatro columnas que suelen denominarse de izquierda a derecha, como C1, C2, C3, y C4 (ver tabla 1).

En ella se puede observar el encabezamiento de las tres últimas columnas, no así de la primera ya que presenta además de una melladura amplia en la parte superior, la rotura de la tablilla en todo el lado izquierdo en el que se han encontrado restos de pegamento moderno, por lo que es muy probable que la tabla continuara hacia ese lado con nuevas columnas cuya reconstrucción es objeto de todo tipo de discusiones, como se verá más adelante. (García-Cuerva, 2009, p. 23)

Sobre la derecha se observa una rotura de forma casi triangular y la penúltima columna (que se encuentra en cuarto lugar), está formada por onces, los que son interpretados por gran parte de los investigadores como una columna de separación, por eso se describe como de cuatro columnas y no de cinco como se ve en la foto (figura 3).

A pesar de su deterioro, abundaron los esfuerzos por descifrarla.

En un principio se sospechó que su contenido estaba relacionado con mercancías como en la mayoría de las tablillas encontradas que datan de ese período, pero descifrados los números se ha concluido, aunque con diversas interpretaciones y algunas correcciones (Neugebauer y Sachs, 1945, Bruíns, 1955 y Robson, 2001, entre otros), que corresponden a la primera relación de ternas pitagóricas de la que se tenga conocimiento, con un sorprendente grado de exactitud.

Babilonia fue una ciudad de la baja Mesopotamia localizada en lo que es hoy Irak. Su sistema de numeración, que fue el utilizado en la Tablilla Plimpton 322, apareció por primera vez alrededor de 1900-1800 a. C. Los babilonios fueron los pioneros en el sistema de medición del tiempo; introdujeron el sistema sexagesimal y lo hicieron dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. En Mesopotamia, el sistema sexagesimal sólo era manejado por una pequeña minoría de los escribas, los que debían memorizar tablas de multiplicar por lo menos hasta 59, de las que se ha encontrado una importante cantidad, elaboradas con barro. (García-Cuerva, 2009, p. 21)

Los números en este sistema se representaban con la ayuda de sólo dos símbolos, una cuña vertical en forma de flecha que representaba a la unidad y una cuña horizontal con la misma forma para el número diez (de aquí surgió la denominación de cuneiforme para la escritura de los antiguos babilonios).

Figura 4: *Escritura cuneiforme*
(tomado de http://remedios89.blogspot.com.ar/2011/04/taller-escritura-cuneiformempeg.html).

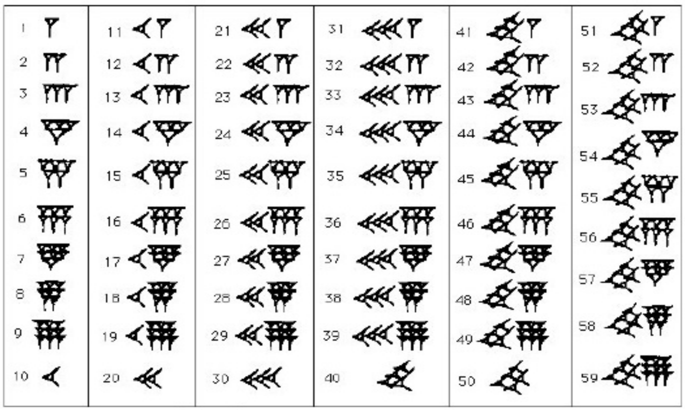


Tabla 1: *Numeración babilónica*
(tomado de http://www.clubcientificobezmiliana.org/blog/enlaces/babilonia-y-las-matematicas-en-el-aula).

Los números enteros del 1 al 59 se podían escribir de manera que los signos para el diez y la unidad se repetían tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades (ver tabla 1). Hasta el número 59 tenía las características de un sistema de numeración sumativo, pero la unidad de segundo orden, separada por un espacio y representada por el mismo signo es 60 veces mayor que la de primer orden, la unidad de tercer orden es 60 veces mayor que la de segundo y 3600 veces mayor (60 x 60) que la unidad de primer orden y así sucesivamente, lo que lo convierte en el primer sistema de numeración posicional conocido.

El descifrado inicial de la tablilla corresponde a Otto Neugebauer y Abraham Sach, quienes lo publicaron en *Mathematical Cuneiform Text* en 1945 y, en 2001 Eleonor Robson expuso su interpretación en *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322.*

En la figura 5 se puede apreciar su contenido con mayor claridad que en la foto (figura 3).

Figura 5: *Dibujo del anverso de la Tablilla Plimpton 322 (tomado de Echeverri, 2013, p. 39).*

Como ya se vio, se trata de una tablilla con 4 columnas de números distribuidos en 15 filas, más una que corresponde a los encabezados de las columnas.

Traducción de los encabezados de las columnas. (Robson, 2001, citado en Echeverri, 2013, p. 40):

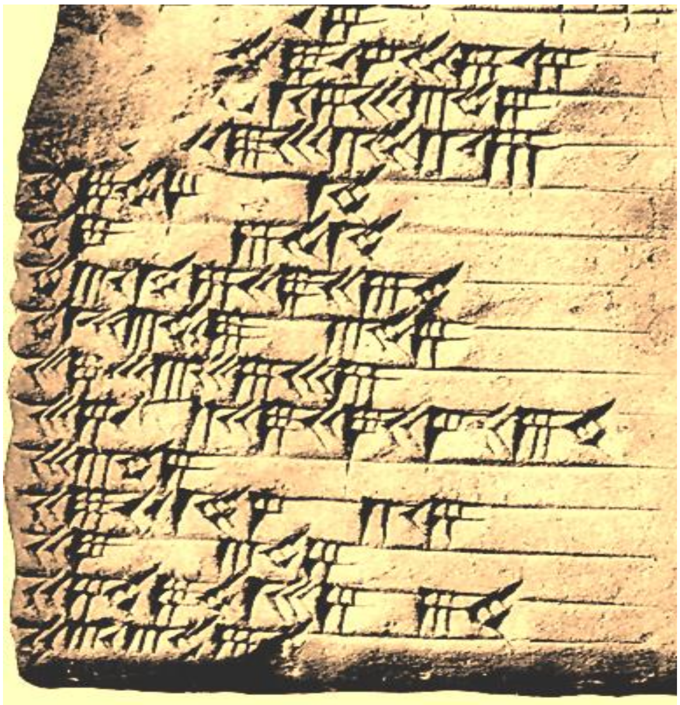
- Primera columna (C1): *"el cuadrado de la diagonal del que se le rasga 1 para que resulte el [cuadrado del] lado corto"*.
- Segunda columna (C2): *"lado más corto"*.
- Tercera columna (C3): *"diagonal"*.
- Cuarta columna (C4): *"Su Nombre"*, corresponde al número de orden (de 1 a 15) de cada fila.

En la tablilla original hay algunos errores que podrían atribuirse al copista y se han perdido algunos números con el deterioro producido por el paso del tiempo. En la siguiente tabla, en la que se traduce la escritura cuneiforme al sistema de numeración sexagesimal, los números en rojo corresponden a las correcciones de los supuestos errores. (Robson, 2001, citado en Echeverri, 2013, p. 40)

C1								C2			C3			C4
1	59	0	15						1	59		2	49	1
1	56	56	58	14	50	6	15		56	7	1	20	25	2
1	55	7	41	15	33	45		1	16	41	1	50	49	3
1	53	10	29	32	52	16		3	31	49	5	9	1	4
1	48	54	1	40					1	5		1	37	5
1	47	6	41	40					5	19		8	1	6
1	43	11	56	28	26	40			38	11		59	1	7
1	41	33	59	3	45				13	19		20	49	8
1	38	33	36	36					8	1		12	49	9
1	35	10	2	28	27	24	26	1	22	41	2	16	1	10
1	33	45								45		1	15	11
1	29	21	54	2	15				27	59		48	49	12
1	27	0	3	45					2	41		4	49	13
1	25	48	51	35	6	40			29	31		53	49	14
1	23	13	46	40						56		1	46	15

Tabla 2: *Transcripción de la numeración sexagesimal cuneiforme de la Tablilla Plimpton 322 (tomado de http://cienciaxxi.es/blog/?p=688).*

En la primera columna (C1), cuyo encabezado es *"el cuadrado de la diagonal del que se le rasga 1 para que resulte el [cuadrado del] lado corto"*, se ha agregado un hipotético 1 (más adelante se verá el por qué de esta hipótesis) y los números (salvo el 1 inicial) serían potencias negativas de 60, según la interpretación de Neugebauer (1945).



1 59 0 15
1 56 56 58 14 50 6 15
1 55 7 41 15 33 45
1 53 10 29 32 52 16
1 48 54 1 40
1 47 6 41 40
1 43 11 56 28 26 40
1 41 33 59 3 45
1 38 33 36 36
1 35 10 2 28 27 24 26
1 33 45
1 29 21 54 2 15
1 27 0 3 45
1 25 48 51 35 6 40
1 23 13 46 40

Figura 6: *Primera columna de la Tablilla Plimpton 322*
(tomado de http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/col5.jpg).

La segunda columna (C2), encabezada por *"lado más corto"*, según sugiere la palabra "corto", correspondería a uno de los lados más cortos de un rectángulo o, al cateto menor de un triángulo rectángulo.

1 59
56 7
1 16 41
3 31 49
1 5
5 19
38 11
13 19
8 1
1 22 41
45
27 59
2 41
29 31
56

Figura 7: *Segunda columna de la Tablilla Plimpton 322*
(tomado de http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/col2.jpg).

La tercera columna (C3), encabezada por *“diagonal”*, correspondería a la diagonal de un rectángulo, o bien, a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

2 49
1 20 25
1 50 49
5 9 1
1 37
8 1
59 1
20 49
12 49
2 16 1
1 15
48 49
4 49
53 49
1 46

Figura 8: *Tercera columna de la Tablilla Plimpton 322*
(tomado de http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/col3.jpg).

En la cuarta columna (C4), bajo el encabezado *“Su Nombre”*, podemos observar el número de orden (de 1 a 15) de cada fila.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Figura 9: *Cuarta columna de la Tablilla Plimpton 322*
(tomado de http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/col1.jpg9).

Conversión de las cifras a la notación decimal

Primera línea:

C 1: 1;59,0,15 = $1.60^0 + 59.60^{-1} + 0.60^{-2} + 15.60^{-3} \cong$ 1,983402778...$_{10}$

C 2: 1,59 = $59.60^0 + 1.60 = 119_{10}$

C 3: 2,49 = $49.60^0 + 2.60 = 169_{10}$

C 4: Corresponde al número de orden.

Con estos elementos, se está en mejores condiciones para interpretar la relación que los investigadores han asignado a los números de la tablilla.

Tomando como ejemplo la primera línea, tenemos que: en C3, encabezada por *"diagonal"*, el número 169 correspondería a la hipotenusa de un triángulo rectángulo; el número 119 situado en C2, encabezada por *"lado más corto"*, correspondería al cateto menor de un triángulo rectángulo. No hay en el fragmento de la tablilla una columna en la que aparezca el otro cateto, por lo que se especula con que, o falta una columna que estaría en el fragmento supuestamente perdido o bien su ausencia representa una incógnita, con lo que el contenido de la tablilla correspondería a una actividad con fines pedagógicos relacionada con el concepto de ecuaciones. (Echeverri, 2013, p. 41)

Utilizando el Teorema de Pitágoras, se puede deducir que el número que correspondería al "cateto mayor" es 120

pues

$$169^2 = 119^2 + 120^2$$

La columna C1 es sin dudas, la más controvertida. Gran parte de los investigadores consideran a esta tablilla una especie de tabla trigonométrica en la que, la columna C3 correspondería a la hipotenusa de un triángulo, la columna C2, a uno de sus catetos y, la primera columna (C1), a la secante cuadrada del ángulo α que forman la hipotenusa y el cateto que falta en la tabla si se le agrega un hipotético 1 delante del número (Neugebauer, 1945) o, a la tangente cuadrada del ángulo, si el 1 realmente no existiera en la tabla.

Comprobamos que $sec^2\,\alpha = 169^2/120^2 \cong 1{,}983402778$

$$tg^2\alpha = 119^2/\,120^2 \cong 0{,}983402778$$

Según los defensores de esta hipótesis, en la parte de la tabla supuestamente faltante podría haber una columna en la que aparecería, en cada fila, el ángulo agudo (*α)* formado por el cateto mayor y la hipotenusa. Éstos sostienen que las tablas heredadas de aquellas civilizaciones se caracterizan por mantener un orden (creciente o decreciente) en alguna de las columnas (Fernández Aguilar, 2010, p. 11).

a	b	c	α
119	120	169	45º19'10,704''
3367	3456	4825	45º59'47,186''
4601	4800	6649	46º17'0,738''
12709	13500	18541	46º58'17,707''
65	72	97	47º73'59,894''
319	360	481	48º36'26,355''
2291	2700	3541	49º54'46,935''
799	960	1249	50º18'16,167''
481	600	769	51º22'33,656''
4961	6480	8161	52º45'1,546''
45	60	75	53º10'24,491''
1679	2400	2929	55º1'55,225''
161	240	289	56º11'35,875''
1771	2700	3229	56º59'2,844''
56	90	106	58º8'44,199''

Tabla 3: *Columnas hipotéticamente faltantes en la Tablilla Plimpton 322 (tomado de Fernández Aguilar 2010, p. 11).*

Si se considera que los datos de la tablilla Plimpton 322 se corresponden con los lados de triángulos rectángulos: agregando una columna que contenga los valores del cateto faltante en la tabla original y llamando a y b a los catetos y c a la hipotenusa, se puede observar que ninguna de las columnas en las que figuran los lados presenta un orden. Sin embargo, la columna C1 está ordenada en forma decreciente y la hipotética columna de los ángulos correspondientes presentaría un orden creciente.

Esta interpretación fue desestimada por Robson por considerarla anacrónica pues la noción de ángulo en ese período no era muy clara y este tipo de tablas, se usaría en astronomía un milenio más tarde (Robson, 2001, citado por Echeverri, 2013, p. 40). En ese caso cabría preguntarse ¿cuál sería entonces el significado de la primera columna de la tabla?, ¿a qué se debe tal grado de precisión?, ¿por qué figuran esas ternas y no otras?, ¿con qué criterio se escribieron las ternas en ese orden? y, si se acepta que la cultura babilónica fue pionera en el uso del sistema sexagesimal ¿por qué no considerar natural su conocimiento sobre las amplitudes de los ángulos?

Lo sorprendente es que, con el hipotético 1 o sin él, los babilonios obtuvieron el cuadrado de la secante (o de la tangente) de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo ¡con una certeza de nueve cifras decimales!

Tal exactitud no puede ser producto de mediciones, por lo que su hallazgo sugiere que los babilonios contaban con algún método que permitiría encontrar ternas de números enteros x, y, z que verifiquen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Refuerza esta hipótesis el hecho de que algunas ternas como la de la fila 4 (12.709, 13.500, 18.541) o la de la fila 10 (4961, 6480, 8161) están formadas por números relativamente grandes y, salvo la de la fila 11 (45, 60, 75), corresponden a ternas primitivas.

De este razonamiento surgió el interés por desvelar la fórmula que llevaría a los babilonios a encontrar las ternas pitagóricas halladas en la tablilla. Más adelante se verá a qué conclusiones han arribado en este sentido Neugebauer y Robson, aunque es interesante intentar antes una indagación propia, pues con cada conocimiento "dado" se pierde irreversiblemente la posibilidad de motivar la curiosidad y la reflexión crítica.

4.2 Un escenario de investigación basado en las ternas pitagóricas

Si un conocimiento es dado sin que se tenga la curiosidad o la necesidad de obtenerlo ¿queda lugar para las preguntas, la reflexión o la crítica?

Un currículum basado en técnicas prescriptas y un docente que acata pasivamente estas prescripciones apunta al desarrollo de aspectos formativos que no condicen con el desarrollo de ciudadanos críticos; contrariamente la creación de situaciones que invitan a la investigación, favorece el desarrollo de competencias democráticas.

Hacerse preguntas sobre un asunto matemático para tomarlas como un posible punto de partida desde el cual se pueda encontrar respuestas a esas preguntas, es una forma de comenzar a incursionar en la investigación y con ella, en el mundo de la Educación Matemática Crítica; es cambiar el rol de un sujeto pasivo por el de un sujeto capaz de reflexionar, adoptar una posición justificada ante una situación crítica y de actuar en consecuencia.

Cuando en el marco de la Educación Matemática Crítica se habla del sujeto de la crítica se hace referencia tanto al estudiante como al docente; en un escenario de investigación ambos adoptan distintas posiciones como sujetos activos, preguntan y se preguntan, proponen, prueban.

Investigar es buscar satisfacer la curiosidad que se tiene por descubrir o conocer, es aceptar la imprevisión del rumbo y del resultado:

Para que tres números x, y, z formen una terna pitagórica tienen que ser enteros positivos y satisfacer la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Preguntas como: ¿habrá muchas? o ¿serán infinitas? pueden representar una invitación a la investigación.

No es difícil ver que las ternas pitagóricas son infinitas con sólo pensar que, si x, y, y z son enteros positivos y satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ existen infinitas ternas tales que

$$n^2(x^2 + y^2) = n^2 z^2 \qquad \text{con } n \text{ natural}$$

en las que $nx,\ ny,\ y\ nz$ son enteros positivos y satisfacen la ecuación

$$(nx)^2 + (ny)^2 = (nz)^2$$

Sin embargo puede resultar interesante preguntarse si existen infinitas ternas *(x, y, z)* que correspondan a una terna *primitiva*, es decir que

$$mcd(x, y, z) = 1$$

Euclides, para mostrar que existen infinitas ternas primitivas, se basó en que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos es siempre un número impar.

En un escenario de investigación, la curiosidad trasciende la credibilidad de los dichos de un “grande” como Euclides: ¿cómo puede uno convencerse de la veracidad de su afirmación?

La búsqueda de regularidades facilita el camino hacia la modelización, la abstracción o la matematización, hacia la elección de un modelo demostrable que generalice una situación, convenza y permita su utilización en otras situaciones.

n	***n+1***	***(n+1)^2 – n^2***	***2n+1***
1	2	$2^2 - 1^2$	3
2	3	$3^2 - 2^2$	5
3	4	$4^2 - 3^2$	7
4	5	$5^2 - 4^2$	9

Tabla 4: *Diferencia de cuadrados de enteros consecutivos.*

En un escenario de investigación la modelización matemática puede convertirse en un procedimiento corriente y natural:

Si n es par, es decir, de la forma $2k$, con k entero, entonces $n + 1$ (su consecutivo) es de la forma $2k + 1$,

luego

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 - (2k)^2 &= (4k^2 + 4k + 1) - (4k^2) \\ &= 4k + 1 \\ &= 2(2k) + 1 \quad \textbf{[1]}\end{aligned}$$

Si n es impar, es decir, de la forma $2k + 1$, con k entero, entonces $n + 1$ es de la forma $2k + 2$,

luego

$$(2k+2)^2-(2k+1)^2=(4k^2+8k+4)-(4k^2+4k+1)$$

$$=4k+3=4k+2+1$$

$$=2(2k+1)+1 \quad \textbf{[2]}$$

De [1] y [2] se puede deducir que se ha encontrado un modelo matemático que convence, que permite afirmar que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos es siempre impar y que de éstos hay infinitos (los que se obtienen al reemplazar k por los infinitos enteros).

La afirmación de Euclides puede significar un punto de partida para la búsqueda de procedimientos que permitan generar ternas pitagóricas:

Como hay infinitos enteros positivos impares que resultan de la diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos y además, algunos de ellos son cuadrados perfectos (como se ve en la tabla 4), se podría suponer que hay infinitas ternas pitagóricas. Pero ¿cómo convencerse de que si se sigue con la secuencia anterior (tabla 4), no dejarán de aparecer cuadrados perfectos en algún momento?

Un posible camino es buscar relaciones entre los enteros impares y los cuadrados perfectos.

$$1+3=4$$

$$1+3+5=9$$

¿Será que la suma de impares consecutivos da como resultado un cuadrado perfecto?

$$3+5=8$$

$$5+7=12$$

Evidentemente, si el primer sumando no es el 1, no existe tal relación, entonces ¿la suma de los primeros enteros impares positivos es un cuadrado perfecto?, ¿el cuadrado perfecto se relaciona con la cantidad de sumandos?

Simbólicamente

$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$	n^2	n
1	1	1
1+3	4	2
1+3+5	9	3
1+3+5+7	16	4
1+3+5+7+9	25	5
1+3+5+7+9+11	36	6
1+3+5+7+9+11+13	49	7
1+3+5+7+9+11+13+15	64	8

Tabla 5: *Sumatoria de los primeros enteros impares positivos.*

Se puede recurrir al principio de inducción matemática para demostrar que la suma de los primeros n impares positivos es igual a n^2:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ se cumple}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Caso base

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2.1-1 = 1 = 1^2$$

(lo cual es verdadero)

Hipótesis de Inducción

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

(que se supone verdadera)

Se quiere ver que si

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

o sea

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \Rightarrow \quad 1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

luego

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)$$

Sustituyendo por n^2 se tiene

$$=1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

Por lo tanto se puede afirmar que:

$\forall n \geq 1$ se cumple

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Este resultado permite afirmar que si quisiéramos continuar indefinidamente la tabla 4, no dejarán de aparecer cuadrados perfectos, dado que éstos se obtienen a partir de la suma de los primeros n números impares consecutivos.

Quedó demostrado entonces que:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)=(n-1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)-\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)=n^2-(n-1)^2$$

$$=n^2-(n^2-2n+1)$$

$$=2n-1$$

luego

$$n^2-(n-1)^2=2n-1 \quad \textbf{[3]}$$

Para encontrar ternas pitagóricas sólo faltaría averiguar para qué valores de n, se da que $(2n-1)$ es un cuadrado perfecto.

Buscando regularidades tenemos que:

2*n* - 1	***m***
$2.\ 1-1$	1
$2.\ 2-1$	3
$2.\ 3-1$	5
$2.\ 4-1$	7
$2.\ 5-1$	9
$2.\ 6-1$	11
…	…
$2.\ 13-1$	25
…	…
$2.\ 25-1$	49
…	…
$2.\ 41-1$	81
…	…
$2.\ 61-1$	121
…	…

Tabla 6: *Resultados de 2n-1.*

Buscando una relación entre dichos valores de n $(1, 5, 13, 25, 41, 61\ldots)$ se puede obsevar que

$5-1$	4
$13-5$	8
$25-13$	12
$41-25$	16
$61-41$	20

Tabla 7: *Relación entre los valores de n.*

La diferencia entre dos valores cualesquiera de n para los cuales $(2n-1)$ es cuadrado perfecto, es un múltiplo de 4 de ahí que

1 = 4. 0 + 1
5 = 4. 1 + 1
13 = 4. 3 + 1
25 = 4. 6 + 1
41 = 4. 10 + 1
61 = 4. 15 + 1
…

Tabla 8: *n = 4k + 1*

entonces

$$n = 4 \, . \, k + 1$$

Pero tomando los valores de ***k***: 1, 3, 6, 10, 15. . .. se observa que se corresponden con los resultados de la sumatoria de los t primeros números naturales, donde t = 1, 2, 3, 4, …

o sea

$$k = \sum_{i=1}^{t} i = \frac{t(t+1)}{2} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

y por el principio de inducción completa se puede demostrar que:

$\forall t \in \mathbb{N}$ se cumple

$$1 + 2 + 3 + \ldots + t = \frac{t(t+1)}{2}$$

Demostración:

Se quiere probar que

$$\sum_{i=1}^{t} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + t = \frac{t(t+1)}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

Caso base

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

(lo cual es verdadero)

Hipótesis de Inducción

$$\sum_{i=1}^{t} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + t \; = \frac{t(t+1)}{2}$$

(la que se supone verdadera)

Se quiere ver que si

$$\sum_{i=1}^{t} i = \frac{t(t+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{t+1} i = \frac{(t+1)((t+1)+1)}{2}$$

luego

$$\frac{t(t+1)}{2} + \; (t+1) = \frac{t(t+1) + \; 2(t+1)}{2} = \frac{(t+1)(t+2)}{2}$$

Por lo tanto se puede afirmar que:

$\forall n \geq 1$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{t} i = \frac{t(t+1)}{2} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

pero

$$n \; = \; 4k \; + \; 1 \qquad \wedge \qquad k \; = \; \frac{t(t+1)}{2}$$

entonces

$$n \; = \; \frac{4t(t+1)}{2} + \; 1 \; = \; 2t^2 + \; 2t \; + \; 1$$

luego

reemplazando a n en **[3]**

$$n^2 - (n \; - \; 1)^2 \; = \; 2n - 1$$

se tiene que

$$(2t^2 + \; 2t \; + \; 1)^2 - \; (2t^2 + \; 2t \; + 1 \; - 1)^2 = \; 2(2t^2 + \; 2t \; + \; 1) - \; 1$$

$$(2t^2 + \; 2t \; + 1)^2 - \; (2t^2 + \; 2t)^2 = \; 4t^2 + \; 4t \; + 1$$

$$(2(t^2 + \; t) + 1)^2 - \; (2(t^2 + \; t))^2 = \; (2t \; + \; 1)^2$$

por lo que se está en condiciones de asignar a cada una de las componentes de la terna pitagórica (x, y, z) una expresión en términos de t

$$x = 2t + 1; \quad y = 2(t^2 + t); \quad z = 2(t^2 + t) + 1$$

para

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3, \; y = \;\; 4, \; z = \;\; 5$$

$$t = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 5, \; y = 12, \; z = 13$$

$$t = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 7, \; y = 24, \; z = 25$$

$$t = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 9, \; y = 40, \; z = 41$$

Para demostrar que las ternas pitagóricas obtenidas son primitivas, basta considerar (siguiendo a Gentile, 2012) que mcd (*x*, *y*, *z*) = mcd (*x*, mcd (*y*, *z*)). Como mcd (*y*, *z*) = 1[6] dado que *y* y *z* son enteros consecutivos, entonces mcd (*x*, *y*, *z*) = mcd (*x*, 1) = 1.

Se ha encontrado un modelo matemático que, en términos de t, permite generar ternas pitagóricas primitivas compuestas por dos enteros positivos consecutivos.

En la siguiente lista de ternas primitivas donde x, y, z son menores que 1000, se puede observar que ¡sólo algunas son de este tipo!

[6] En efecto, sea y=a y z=a+1. Se tiene que 1 es divisor de a y de a+1, y además 1 se puede escribir como combinación lineal entera de a y a+1 (dado que a.(-1) + (a+1).1=-a+a+1=1). Por tanto, mcd(y, z)=1.

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)
(23,264,265)	(24,143,145)	(25,312,313)	(27,364,365)	(28,45,53)
(28,195,197)	(29,420,421)	(31,480,481)	(32,255,257)	(33,56,65)
(33,544,545)	(35,612,613)	(36,77,85)	(36,323,325)	(37,684,685)
(39,80,89)	(39,760,761)	(40,399,401)	(41,840,841)	(43,924,925)
(44,117,125)	(44,483,485)	(48,55,73)	(48,575,577)	(51,140,149)
(52,165,173)	(52,675,677)	(56,783,785)	(57,176,185)	(60,91,109)
(60,221,229)	(60,899,901)	(65,72,97)	(68,285,293)	(69,260,269)
(75,308,317)	(76,357,365)	(84,187,205)	(84,437,445)	(85,132,157)
(87,416,425)	(88,105,137)	(92,525,533)	(93,476,485)	(95,168,193)
(96,247,265)	(100,621,629)	(104,153,185)	(105,208,233)	(105,608,617)
(108,725,733)	(111,680,689)	(115,252,277)	(116,837,845)	(119,120,169)
(120,209,241)	(120,391,409)	(123,836,845)	(124,957,965)	(129,920,929)
(132,475,493)	(133,156,205)	(135,352,377)	(136,273,305)	(140,171,221)
(145,408,433)	(152,345,377)	(155,468,493)	(156,667,685)	(160,31,281)
(161,240,289)	(165,532,557)	(168,425,457)	(168,775,793)	(175,288,337)
(180,299,349)	(184,513,545)	(185,672,697)	(189,340,389)	(195,748,773)
(200,609,641)	(203,396,445)	(204,253,325)	(205,828,853)	(207,224,305)
(215,912,937)	(216,713,745)	(217,456,505)	(220,459,509)	(225,272,353)
(228,325,397)	(231,520,569)	(232,825,857)	(240,551,601)	(248,945,977)
(252,275,373)	(259,660,709)	(260,651,701)	(261,380,461)	(273,736,785)
(276,493,565)	(279,440,521)	(280,351,449)	(280,759,809)	(287,816,865)
(297,304,425)	(300,589,661)	(301,900,949)	(308,435,533)	(315,572,653)
(319,360,481)	(333,644,725)	(336,377,505)	(336,527,625)	(341,420,541)
(348,805,877)	(364,627,725)	(368,465,593)	(369,800,881)	(372,925,997)
(385,552,673)	(387,884,965)	(396,403,565)	(400,561,689)	(407,624,745)
(420,851,949)	(429,460,629)	(429,700,821)	(432,665,793)	(451,780,901)
(455,528,697)	(464,777,905)	(468,595,757)	(473,864,985)	(481,600,769)
(504,703,865)	(533,756,925)	(540,629,829)	(555,572,797)	(580,741,941)
(615,728,953)	(616,663,905)	(696,697,985)		

Tabla 9: *lista de ternas primitivas con elementos menores que 1000*
(tomado de http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/pitagoricas-ternas.html).

4.3 Otras exploraciones históricas sobre las tablillas primitivas

Según las interpretaciones de Neugebauer y Sachs, los constructores de la tablilla Plimpton 322 debieron encontrar un método para generar cualquier terna pitagórica primitiva comenzando por dos números sexagesimales p y q siendo éstos enteros, coprimos y de distinta paridad, con $p > q$.

En el Libro X de los Elementos de Euclides (325 al 265 aC.) figura la primera fórmula general de la que se tiene noticia:

$$x = 2pq; \quad y = p^2 - q^2; \quad z = p^2 + q^2$$

Este modelo matemático nos permite encontrar ternas primitivas de cualquier tipo y es el que Neugebauer y Sachs (1945), junto a otros investigadores, suponen que utilizaron los babilonios para construir la tablilla.

Por esta razón, algunos han sugerido que las columnas faltantes de la tablilla podrían contener los valores de p y q. Aunque la columna que contuviera ya sea a p o a q, tampoco tendría el orden característico de las tablillas de la época.

a	**B**	**c**	**p**	**q**
119	120	169	12	5
3367	3456	4825	64	27
4601	4800	6649	75	32
12709	13500	18541	125	54
65	72	97	9	4
319	360	481	20	9
2291	2700	3541	54	25
799	960	1249	32	15
481	600	769	25	12
4961	6480	8161	81	40
45	60	75	2	1
1679	2400	2929	48	25
161	240	289	15	8
1771	2700	3229	50	27
56	90	106	9	5

Tabla 10: *Composición de ternas pitagóricas.*

Aunque en la tablilla aparecen 15 filas ordenadas según la primera columna de mayor a menor, correspondiendo cada una a ángulos desde 45^O hasta 60^O aproximadamente y, teniendo en cuenta que los babilonios tenían la posibilidad de encontrar valores de p menores que 60, se supone que pudieron haber descubierto 38 pares de p y q, los cuales estarían en alguna tabla no encontrada o se pensaba escribirlos en ésta, ya que al reverso tiene la misma división en columnas, como si se hubiera deseado continuar la tabla.

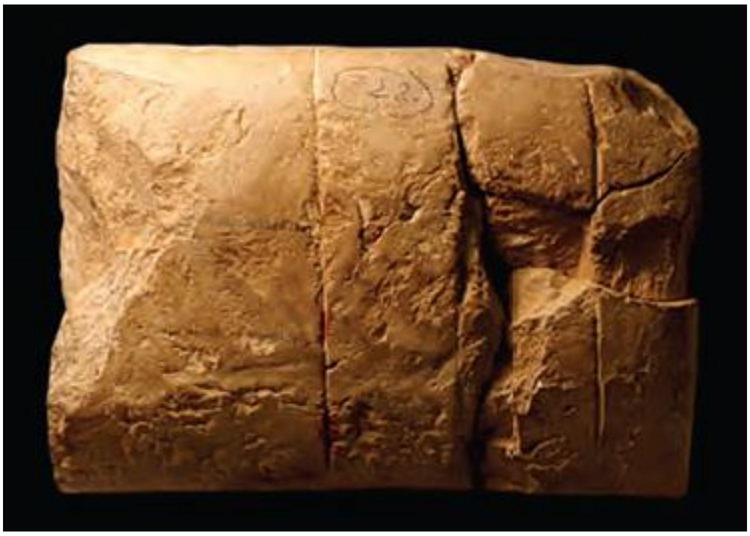


Figura 10: *Reverso de la Tablilla Plimpton 322 (tomado deEcheverri, 2013, p. 39).*

Eleanor Robson (2001) desestima esta interpretación de generación de ternas pitagóricas por considerarla descontextualizada. Para la autora, no se parte de los conocimientos propios de los creadores de la tablilla y se abusa de la notación moderna como el álgebra simbólica, según ella los babilonios sólo utilizaban algoritmos geométricos. Sostiene que si se la coloca en el contexto de las otras tablillas encontradas en Larsa, se puede observar claramente su carácter didáctico, no teórico como el que pretende dársele. Califica de exagerada la creencia de que la tablilla revela conocimientos sobre algunas relaciones trigonométricas. Presenta una idea alternativa a la de Neugebauer y Sachs en la publicación de su artículo "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322"[7], basada en los pares recíprocos. Una vasta experiencia en la interpretación de tablillas babilónicas le permite fundamentar la contextualización de su propuesta.

De las tablillas halladas, confeccionadas entre el 2000 y 1600 a. C., unas 300 se relacionan con las matemáticas: algunas contienen listas y tablas, otras, problemas y soluciones desarrolladas. Unas 200 son tablas de varios tipos: de multiplicar, de inversos, de cuadrados, de cubos, etc., como las encontradas en Senkerah en 1854 con listas de números cuadrados perfectos hasta el 59 y de números cúbicos hasta el 32 o, las numerosas listas de inversos de los números de 2 a 81 (aunque sólo aquellos que tienen desarrollo sexagesimal finito). (García-Cuerva, 2009, p. 22)

Estas tablas precalculadas eran utilizadas frecuentemente con el objetivo de facilitar las operaciones, los escribas debían aprenderlas de memoria y eran entrenados

---

[7] El título de este artículo hace referencia, con cierta ironía, al artículo de Buck "Sherlock Holmes in Babylon" (1980), en el que se presenta una interpretación detectivesca de los procedimientos supuestamente utilizados por los babilonios para generar ternas pitagóricas.

para calcular los inversos de números que no estuvieran en ellas en escuelas destinadas a enseñar, también otras técnicas simples como completar el cuadrado o dividir por factores comunes regulares[8]. (Fernández Aguilar, 2010, p. 12)

Para simplificar la multiplicación solían usar

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \qquad o \qquad ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

por ejemplo

$$3.5 = \frac{(3+5)^2 - 3^2 - 5^2}{2} = \frac{64 - 9 - 25}{2} = 15$$

O

$$3.5 = \frac{(3+5)^2}{4} - \frac{(3-5)^2}{4} = 16 - 1 = 15$$

(los cuadrados necesarios para realizar las multiplicaciones ya estaban escritos en tablas).

Resolvían ecuaciones cuadráticas de la forma

$$x^2 + bx = c$$

donde b y c no eran necesariamente enteros y c era siempre positivo, utilizando la ecuación

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b}{2^2} + c}$$

Utilizaban las tablas de cuadrados en reversa para encontrar raíces cuadradas.

No tenían un algoritmo para la división, se basaban en que

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

por lo que les resultaba necesario contar con tablas de recíprocos como las que muestra la figura 11.

[8] Refiere a números cuyos únicos factores primos son 2, 3 o 5.

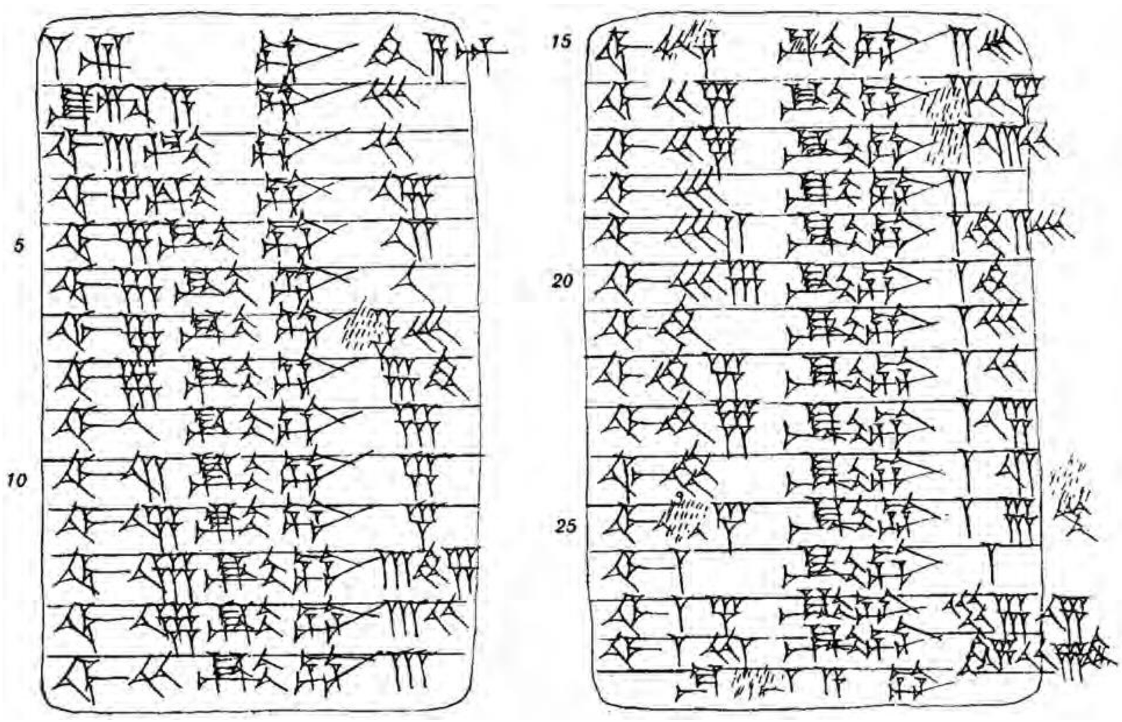


Figura 11: *Tablas de inversos (tomado deEcheverri, 2013, p. 39).*

	Dos tercios de 1 es 40	5	El recíproco de 24 es 2 30
	La mitad es 30		El recíproco de 25 es 2 24
	El recíproco de 3 es 20		El recíproco de 27 es 2 13 20
	El recíproco de 4 es 15		El recíproco de 30 es 2
5	El recíproco de 5 es 12		El recíproco de 33 es 1 52 30
	El recíproco de 6 es 10	20	El recíproco de 36 es 1 40
	El recíproco de 8 es 7 30		El recíproco de 40 es 1 30
	El recíproco de 9 es 6 40		El recíproco de 45 es 1 20
	El recíproco de 10 es 6		El recíproco de 48 es 1 15
10	El recíproco de 12 es 5		El recíproco de 50 es 1 6 40
	El recíproco de 15 es 4	25	El recíproco de 54 es 1 15
	El recíproco de 16 es 3 45		El recíproco de 1 es 1
	El recíproco de 18 es 3 20		El recíproco de 1 4 es 56 15
	El recíproco de 20 es 3		El recíproco de 1 21 es 44 2640

Tabla 11: *Traducción de la figura 11 (tomado deEcheverri, 2013, p. 39).*

El hallazgo de estas tablas precalculadas fortalecen la hipótesis de Robson: las ternas se generaron a partir de pares recíprocos provenientes de un ejercicio escolar común que se puede calificar como “álgebra de cortar y pegar”.

Más allá de la diversidad en las interpretaciones descriptas respecto del contenido de la Tablilla Plimpton 322, los investigadores coinciden en aceptar que:

- Los números de la columna C1 son cuadrados perfectos y, en cada fila, corresponden a

$$\frac{(C3)^2}{(C3-C2)^2} \quad o \quad \frac{(C2)^2}{(C3-C2)^2}$$

según sea aceptado o no el hipotético 1 inicial, además están ordenados en forma decreciente de la fila 1 a la 15.

- Los encabezados de C2 y C3 hacen referencia al lado corto y a la diagonal de un rectángulo respectivamente.

- Los números de cada fila de las columnas C2 y C3 pertenecen a una terna pitagórica pues $(C3)^2 - (C2)^2$ es un cuadrado perfecto.

- Salvo los de la fila 11, los números de cada fila de las columnas C2 y C3 son primos relativos, es decir, pertenecen a ternas primitivas.

Difícilmente se sabrá a ciencia cierta cuál fue el método utilizado por los babilonios para encontrar las ternas pitagóricas si no se logra encontrar la supuesta tablilla compañera de la Plimpton 322.

5 Las ternas pitagóricas y los ambientes de aprendizaje

Los ejemplos de actividades que se exponen a continuación corresponden a situaciones ficticias que pretenden establecer un puente entre la filosofía de la Educación Matemática Crítica analizada en este trabajo y la práctica educativa, el objetivo de su incorporación es favorecer la comprensión de los constructos teóricos vistos hasta aquí.

Las ternas pitagóricas describen las tres longitudes (enteras) de los lados de un triángulo rectángulo:

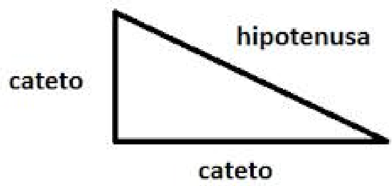


Figura 12: *Elementos de un triángulo rectángulo.*

A continuación se hará un recorrido por los diversos ambientes de aprendizaje descriptos por Ole Skovsmose utilizando el concepto de ternas pitagóricas y, en algunos casos, la relación pitagórica con valores no enteros.

Para tener presente la clasificación de los ambientes de aprendizaje propuesta por Skovsmose se transcribirá la figura 1:

	Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Matemáticas puras	(1)	(2)
Semirrealidad	(3)	(4)
Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Figura 1: *Formas de organización de la actividad de los estudiantes (tomado de Skovsmose, 2000, p. 10)*

Ambiente de aprendizaje tipo (1) (Matemáticas puras, Paradigma del ejercicio)

En una clase tradicional, las ternas pitagóricas suelen presentarse implícitamente con el Teorema de Pitágoras y éste como una fórmula que permite “resolver” triángulos rectángulos.

El Teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b, y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Una interpretación geométrica podría ser:

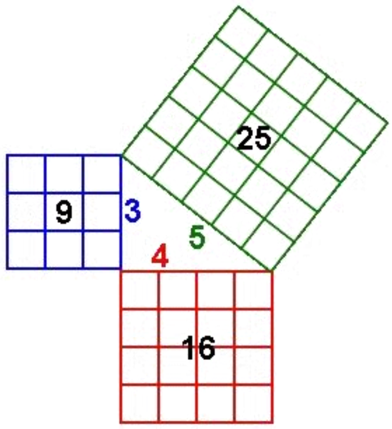


Figura 13: *Interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras.*

Además, derivados de esta fórmula, suelen presentarse tres corolarios de aplicación práctica:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad ; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Los siguientes son ejemplos de ejercicios que se resuelven en ambientes de aprendizaje exclusivamente del tipo (1):

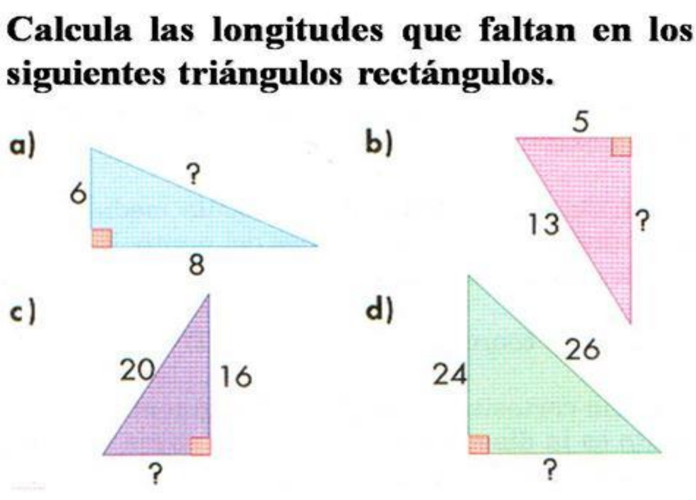


Figura 14: *Resolución de triángulos*
(tomado de http://dptodematematicasgoldameir.blogspot.com.ar).

Algunas actitudes que suelen ser frecuentes en ambientes de aprendizaje de este tipo evidencian que los alumnos no logran otorgar un sentido al concepto:

Preguntas como: *¿para calcular la hipotenusa se usa el más y para los catetos el menos, no?* (haciendo referencia a los radicandos de los corolarios antes mencionados).

Un error habitual radica en colocar la incógnita en el lugar de la hipotenusa de modo que por ejemplo para resolver el ejercicio propuesto en el ítem c), se plantea:

$$x^2 = 20^2 + 16^2$$

Ambiente de aprendizaje tipo (2) (Matemáticas puras, Escenario de investigación)

Hacernos preguntas sobre cuestiones matemáticas o estimular a otros para que se pregunten genera situaciones de investigación que contribuyen a desarrollar el poder formativo de la Educación Matemática Crítica.

Durante el montaje de un escenario debería darse una negociación entre los estudiantes y los profesores sobre las intenciones y las disposiciones de cada uno. La acción intencionada del profesor debe promover actividades que permitan a los alumnos comprometerse con el proceso de aprendizaje, sentirse protagonistas y actuar como tales.

La propuesta de búsqueda de regularidades por parte del profesor puede constituir una invitación.

La aceptación de los alumnos se concretará si las preguntas surgen de su propio interés.

En las tres primeras filas tomadas de la tabla 9 se destacan con rojo los números analizados:

- *¿En una terna pitagórica primitiva, x o bien y, debe ser alguno de ellos múltiplo de tres?*

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)

- *¿x, o bien y, o bien z, debe ser alguno de ellos múltiplo de cinco?*

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)

Si, respetando el estilo de la cultura babilónica, quisiéramos ordenar la tabla con algún criterio,

- *¿podríamos hacerlo asignándole a x números impares consecutivos? En otras palabras, ¿todos los impares pertenecen a una terna pitagórica primitiva?*

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(9,40,41)	(11,60,61)
(13,84,85)	(15,112,113)	(17,144,145)	(19,180,181)	(21,220,221)
(23,264,265)	(25,312,313)	(27,364,365)	(29,420,421)	(31,480,481)

Recordando el modelo matemático encontrado anteriormente que, en términos de t, nos permite generar un grupo de ternas pitagóricas primitivas que se caracterizan por tener un par de componentes que son enteros positivos consecutivos, de los cuáles el mayor corresponde a z:

$$(2t+1;\ \ 2(t^2+t);\ \ 2(t^2+t)+1)$$

nos preguntamos

- *Si al valor de x de una terna primitiva le asignamos un número primo, ¿éste siempre corresponderá a una terna de esta forma?*

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)
(23,264,265)	(24,143,145)	(25,312,313)	(27,364,365)	(28,45,53)
(28,195,197)	(29,420,421)	(31,480,481)	(32,255,257)	(33,56,65)
(33,544,545)	(35,612,613)	(36,77,85)	(36,323,325)	(37,684,685)
(39,80,89)	(39,760,761)	(40,399,401)	(41,840,841)	(43,924,925)

Otra invitación podría estar representada por la pregunta del profesor:

- *¿Se cumplirá la relación pitagórica si ajustamos otras figuras geométricas distintas de los cuadrados a los lados de un triángulo rectángulo?*

Y la aceptación de la invitación por parte de los estudiantes se puede reconocer por las expresiones:

- A: *¡Probemos que sucede si apoyamos semicírculos sobre los lados!*[9]

En un escenario de investigación los estudiantes están al mando y se involucran en un proceso de exploración.

Mostrar un interés por sus opiniones contribuye a cambiar sus visiones acerca de su propia posición en el salón de clase de matemáticas, les permite pasar de ser simples receptores de información a ser participantes cuyas opiniones vale la pena escuchar.

La intervención del docente puede ser una sugerencia que facilite el trabajo de investigación.

- P: *Tomemos como ejemplo la sencilla terna primitiva (3, 4, 5) donde a=5, b=3 y c=4.*

---

[9] A continuación se presentarán algunos diálogos hipotéticos entre un docente y sus alumnos en el aula de matemática en el que se utilizará "P" para indicar la voz de "profesor/a" y "A" para la de "alumnos".

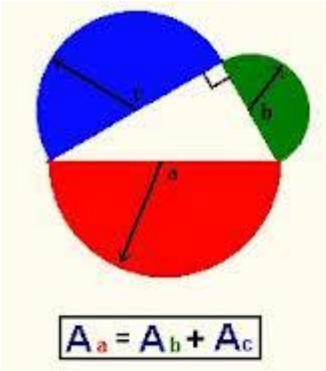


Figura 15: *Interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras con semicírculos (tomado de: http://elmaestrodecasas.blogspot.com.ar/2011/08/matematicas-para-albaniles-mas-sobre-el.html).*

A_a, A_b y A_c son semicírculos de diámetros a, b y c respectivamente

Entonces tenemos

$$\acute{A}rea\ de\ A_a = \frac{\pi.(\frac{a}{2})^2}{2} = \frac{\pi.2{,}5^2}{2} = 3{,}125\ \pi$$

$$\acute{A}rea\ de\ A_b = \frac{\pi.(\frac{b}{2})^2}{2} = \frac{\pi.1{,}5^2}{2} = 1{,}125\ \pi$$

$$\acute{A}rea\ de\ A_c = \frac{\pi.(\frac{c}{2})^2}{2} = \frac{\pi.2^2}{2} = 2$$

Comprobamos que:

$$\acute{A}rea\ de\ A_b + \acute{A}rea\ de\ A_c = 1{,}125\pi + 2\pi = 3{,}125\pi = \acute{A}rea\ de\ A_a$$

- A: *¡sí!*
- A: *¿Se dará con otras figuras?*
- A: *¡¿Será válido para cualquier figura: triángulos, hexágonos,...?!*

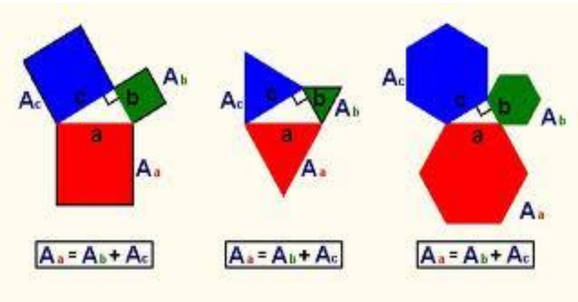


Figura 16: *Interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares (tomado de: http://elmaestrodecasas.blogspot.com.ar/2011/08/matematicas-para-albaniles-mas-sobre-el.html).*

- A: *¡Nosotros probaremos con triángulos!* (aunque no lo mencionan utilizan triángulos equiláteros).

- A: *¡Bueno, entonces nosotros con hexágonos!*

Con triángulos:

A_a, A_b y A_c son triángulos equiláteros de lados a, b y c y alturas h_a, h_b y h_c respectivamente.

$$h_a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$h_b = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$h_c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

Entonces tenemos

$$\acute{A}rea\ de\ A_a = \frac{a.h_a}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$\acute{A}rea\ de\ A_b = \frac{a.h_b}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\acute{A}rea\ de\ A_c = \frac{a.h_c}{2} = 4\sqrt{3}$$

Comprobamos que:

$$\acute{A}rea\ de\ A_b + \acute{A}rea\ de\ A_c = \frac{9\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{4} = \acute{A}rea\ de\ A_a$$

- A: *¡sí!*

El grupo que opta por los hexágonos se exalta:

- A: *¡Esto es magia, a nosotros también nos da!*

Desarrollar un escenario de investigación, dice Skovsmose, implica entrar en una "zona de riesgo" que el profesor acepta durante la negociación, nunca se sabe a ciencia cierta qué rumbo puede tomar este proceso, el docente debe estar preparado para enfrentar los retos que surjan y también para aprovecharlos. Si la experiencia se detuviera aquí, el objetivo sería difuso. Es el momento oportuno para desarrollar una "arqueología matemática", excavar en estas actividades para identificar, hacer visibles y explicitar las matemáticas que se encuentran en cada una de ellas para adquirir la habilidad que en un futuro permita comprender el funcionamiento de las matemáticas en la sociedad.

La pregunta del profesor: *"¿y por qué será que...?"* se convierte en un reto que los estudiantes parecen haber asumido cuando dijeron "*¡sí!*"

Este reto los lleva a buscar explicaciones.

- A: *¿qué condiciones deben cumplir estas figuras para que la relación se dé?*

Luego de un período de tiempo en el que el murmullo se apodera del aula y se dejan escuchar algunas discusiones, se llega a la conclusión de que las figuras deben ser semejantes.

- A: *Entonces, si tenemos tres figuras semejantes que tengan al menos un lado recto y la suma del área de dos de ellas es igual al área de la tercera; juntamos los extremos de los lados rectos de las figuras y armamos un triángulo rectángulo, ¿o no?*

Un escenario "exitoso" invita al montaje de nuevos escenarios.

Algunos alumnos expresan su deseo de continuar:

- A: *¿Qué pasaría si intentáramos aplicar el Teorema de Pitágoras en tres dimensiones?* Una pregunta como ésta llevará a una nueva investigación si es aceptada por el resto del grupo.

La reacción de los alumnos (con palabras, gestos, etc.) mostrará inmediatamente si la propuesta es considerada un reto que vale la pena aceptar.

El docente es consciente de que el rumbo que puede tomar el proceso es impredecible, sin embargo está dispuesto a aceptar también el reto.

La aceptación por parte de los alumnos se hace evidente con la pregunta:

- A: *¿Podemos usar la computadora?, es muy difícil hacer los dibujos.*

Algunos alumnos, desorientados, se acercan a otros, formándose así dos grandes grupos alrededor de las computadoras.

En uno de ellos se escuchan sugerencias y todo tipo de comentarios:

- A: *Necesitaríamos cuatro caras*.
- A: *Si, ¡pero no todas podrían tener forma de triángulo rectángulo!, ¿se podrá probar igual?*

Luego de varios intentos por encontrar una figura que sirva como esquema, los alumnos descubren que la aplicación del Teorema de Pitágoras en tres dimensiones los remite al Teorema de De Gua[10].

El docente los alienta para que sigan adelante ofreciendo ayudarlos con las dudas que se les presenten.

---

[10] El Teorema de De Gua, llamado así en honor al matemático francés Jean Paul de Gua de Malves, es un análogo en tres dimensiones al teorema de Pitágoras. Este teorema establece que si un tetraedro posee un vértice formado por ángulos rectos (como los vértices de un cubo), entonces el cuadrado del área de la cara opuesta a dicho vértice es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las otras tres caras.

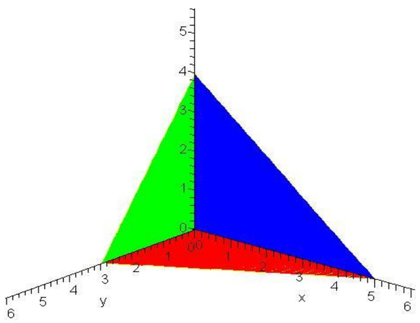


Figura 17: *Teorema de De Gua, vista trasera: caras que forman los ángulos rectos del vértice (tomado de http://commons.wikimedia.org).*

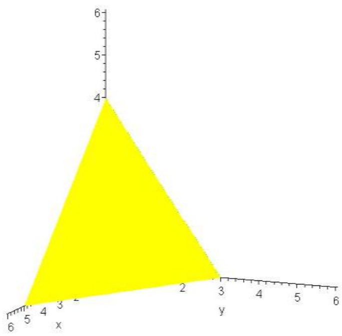


Figura 18: *Teorema de De Gua, vista frontal: cara opuesta al vértice (tomado de http://commons.wikimedia.org).*

- A: *"¡Esta amarilla es la que yo decía que no podía ser un triángulo rectángulo!"*

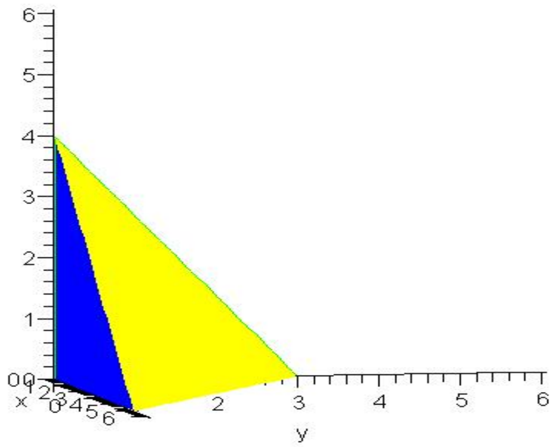


Figura 19: *Teorema de De Gua, Vista lateral (tomado de de http://commons.wikimedia.org).*

El planteo del grupo es

$$A^2_{amarilla} = A^2_{verde} + A^2_{azul} + A^2_{roja}$$

Entonces el profesor sugiere:

- P: *¿Les parece que se les facilitará la tarea si llaman V al área del triángulo verde, A al azul y R al rojo?*

- A: *¡Sí, mejor!*

Entonces

$$V^2 = \left(\frac{3.4}{2}\right)^2 = 6^2 = 36; \quad A^2 = \left(\frac{5.4}{2}\right)^2 = 10^2 = 100$$

$$\text{y} \quad R^2 = \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$$

Para calcular el área de la cara opuesta al vértice en el que convergen los ángulos rectos de las caras verde, azul y roja, necesitarán calcular la hipotenusa de cada una de las caras, a las que deciden llamar h_V, h_A, y h_R respectivamente.

Luego

$$h_V = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad h_A = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \qquad h_R = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

las que corresponden a los lados de la cuarta cara (la amarilla).

- A: *Pero no sabemos cómo sacar el área de la amarilla.*

A pesar de que no corresponde a un contenido curricular para este curso, el profesor decide evitar que se frustre el intento del grupo por averiguar si la relación pitagórica puede aplicarse en tres dimensiones:

- P: *Para calcular el área de un triángulo les alcanza con conocer las longitudes de los lados, si buscan la* ***Fórmula de Herón*** *verán que se puede.*

En geometría, la Fórmula de Herón, descubierta por Herón de Alejandría, relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados *a, b* y *c*:

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)} \qquad (s\text{: semiperímetro})$$

- P: *¿Cómo podrían llamar al semiperímetro del triángulo amarillo?*- pregunta el profesor.

El alumno que está al mando de la computadora responde:

- A: *¿S_A?*

Entonces el docente pregunta:

- P: *¿A los demás qué les parece?*

- A: *¡S_A ,está bien!* (acepta la mayoría).

  Entonces

$$S_A = \frac{a+b+c}{2}$$

  luego

$$S_A = \frac{5+\sqrt{41}+\sqrt{34}}{2} \cong 8{,}615$$

  Si llamamos (C_A) al área de la cara amarilla, tenemos que:

$$C_A \cong \sqrt{8{,}615.\,(8{,}615-5)(8{,}615-\sqrt{41})(8{,}615-\sqrt{34})}$$

$$C_A \cong 13{,}85 \Rightarrow C_A^2 \cong 191{,}82$$

y

$$V^2 + A^2 + R^2 = 36 + 100 + 56{,}25 = 192{,}25$$

- A: *¡Genial, es casi lo mismo! ¡Gracias profe!*

Luego de compartir con el resto de la clase el resultado de esta investigación, el otro grupo comenta:

- A: *Nosotros pensamos que al hablar de tres dimensiones se referían a cambiar figuras por cuerpos, pero se ve que entendimos mal porque nos imaginamos esto:*

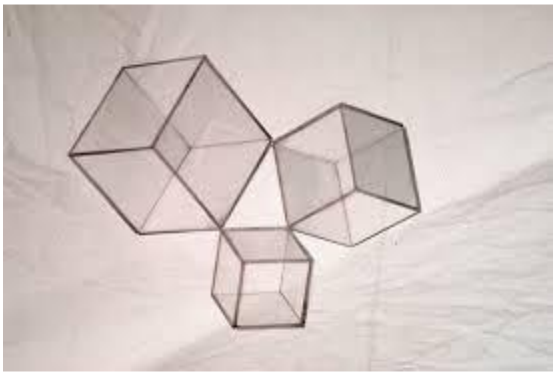


Figura 20: *Cubos cuyas aristas se corresponden con los lados de un triángulo rectángulo. (tomado de http://www.fotosimagenes.org/teorema-de-fermat).*

- P: *¿Y por qué que creen que entendieron mal?¿Acaso probaron y no les dio?*- pregunta el profesor al grupo.

- A: *En realidad no probamos porque cuando vimos los gráficos que ellos encontraron* (se refieren al otro grupo) *nos dimos cuenta de que ellos entendieron y nosotros no.*

- P: *¿Ustedes piensan que habrán entendido mal?* - pregunta el profesor al resto del curso.

- A: *¡No! Me parece que es más fácil probar con ese dibujo que con el que hicimos nosotros.*

- A: *¡Sí, el de ellos era complicado! Probemos, ¡si no da, no da!*

El primer grupo pregunta si puede probar también.

- P: *Claro que pueden,* - responde el profesor - *pero si ustedes terminan primero, esperen a que ellos nos cuenten cuál fue el resultado de su trabajo.*

- A: *Está bien.*

Los grupos trabajan, cada uno por separado y el profesor observa al grupo que había encontrado la imagen de los cubos:

- P: *Llamemos V_3 al volumen del cubo chiquito, y a los otros, V_4 y V_5, así no nos confundimos.*

Entonces

$$V_3 = 27 \quad ; \quad V_4 = 64 \quad \text{y} \quad V_5 = 125$$

- A: *¡Pero 27 más 64 no es 125!*

- A: *¡Claro!* - concluye un alumno del mismo grupo - *no da porque no es una relación pitagórica, es otra cosa, miren:*

$$3^3 + 4^3 = 5^3$$

- A: *¡No es lo mismo!*

- P: *La próxima clase les voy a contar el revuelo que armó entre los matemáticos esto que ustedes acaban de descubrir* - dijo satisfecho el profesor. Ambos grupos habían tenido su protagonismo y compartieron razonamientos que valía la pena escuchar.

En un escenario de investigación están involucrados tanto los alumnos como el docente. Éste, estimulado por la forma en que disfrutan sus alumnos, decide realizar su propia exploración.

Su logro supone el hallazgo de cuestiones matemáticas desconocidas para él que relacionan lo investigado en la clase con el número áureo:

Llamando φ al número áureo, encontró que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, 1, \varphi\right)$$

corresponde a las longitudes de un triángulo rectángulo, pues

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 + 1^2 = (\varphi)^2$$

y, multiplicando cada uno de los elementos de esta terna por φ^4obtenemos

$$(\varphi^3, \varphi^4, \varphi^5)$$

que se corresponden con las longitudes de los lados de un triángulo semejante al anterior. Sus exponentes son los elementos de la tan famosa terna primitiva (3; 4; 5), efectivamente:

$$(\varphi)^3 + (\ \varphi\ )^4 = (\ \varphi)^5$$

Si dibujamos una semicircunferencia en el primer cuadrante de un plano cartesiano, con su diámetro sobre el eje positivo de las ordenadas, tangente al eje de las abscisas y con centro a una unidad de distancia del vértice correspondiente al ángulo recto, notamos que la semicircunferencia admite infinitas rectas tangentes que pueden tener pendiente positiva o negativa. Si la tangente tiene pendiente negativa, corta a los dos ejes positivos formando la hipotenusa de un triángulo, cuya longitud depende de la pendiente. Y aquí vamos a lo más interesante: la tangente que corresponde a la hipotenusa de menor longitud, forma un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes φ^3, φ^4, y φ^5 y, la ordenada del punto de tangencia ¡es justamente φ!

Pero esto no es todo: ¡las longitudes de los lados del triangulito que queda formado sobre la ordenada del punto de tangencia son $(\frac{1}{\sqrt{\varphi}},\ 1,\ \varphi\ )$.

- P: *Como dirían los chicos... ¡Es magia!*

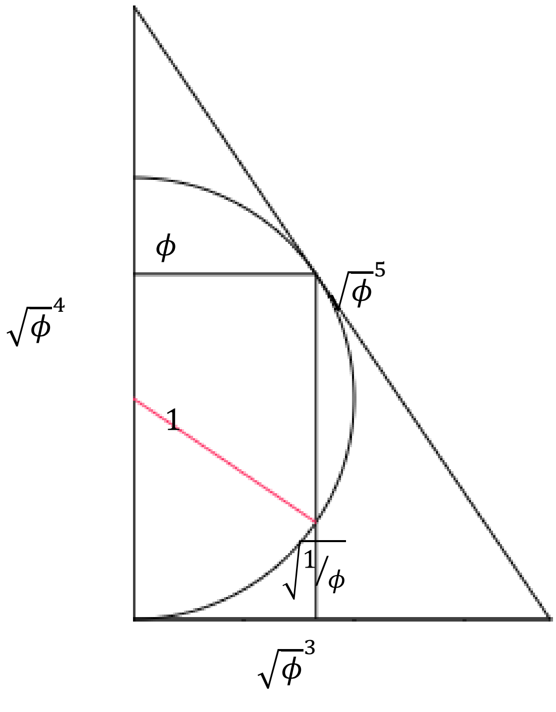


Figura 21: *Las ternas pitagóricas y el número de oro.*

Entonces, si ($\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, 1, φ) corresponde a las longitudes de un triángulo rectángulo y, multiplicando estos valores por potencias de φ, tenemos

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3$$

- P: *¿Cualquier potencia de φ es igual a la suma de las dos potencias anteriores?...*

Dos números *a* y *b* están en proporción áurea si se cumple:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

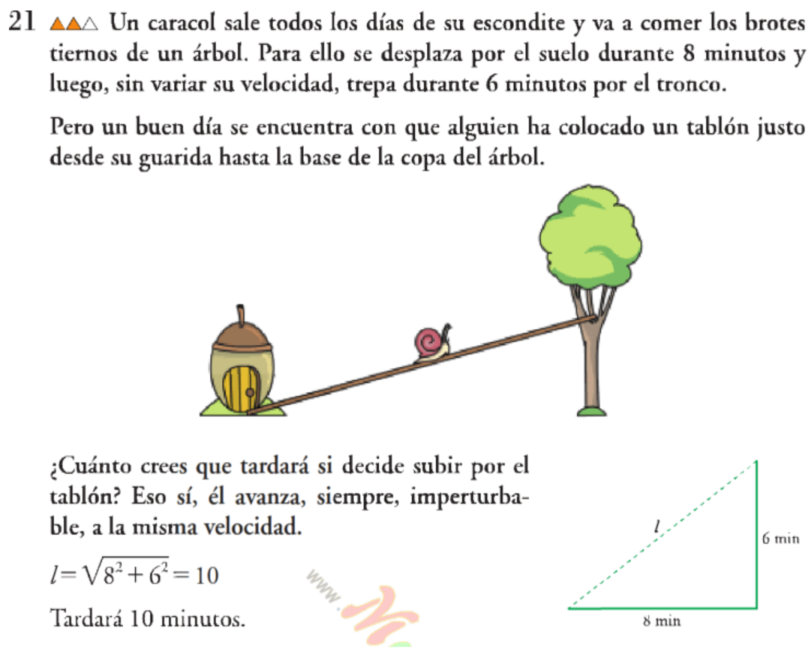
Si φ es igual $\frac{a}{b}$ entonces la ecuación queda:

$$1 + \varphi^{-1} = \varphi$$

Ambiente de aprendizaje tipo (3) (Semirrealidad, Paradigma del ejercicio)

Un ambiente de aprendizaje de tipo (3), suele basarse en libros de texto

Problema 1:



21 Un caracol sale todos los días de su escondite y va a comer los brotes tiernos de un árbol. Para ello se desplaza por el suelo durante 8 minutos y luego, sin variar su velocidad, trepa durante 6 minutos por el tronco.

Pero un buen día se encuentra con que alguien ha colocado un tablón justo desde su guarida hasta la base de la copa del árbol.

¿Cuánto crees que tardará si decide subir por el tablón? Eso sí, él avanza, siempre, imperturbable, a la misma velocidad.

$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Tardará 10 minutos.

Figura 22: *Problema 1, ambiente de aprendizaje tipo 3*
(tomado de http://matematica1.com/category/teorema-de-pitagoras).

Se trata de una situación inventada por el autor del libro, que admite una única respuesta (tardará 10 minutos).

En este ambiente de aprendizaje no cabe preguntarse por ejemplo:

- *¿Por qué los caracoles harían siempre el mismo recorrido y a la misma velocidad?*
- *¿Qué pasa si se distrae en algún momento y se detiene por varios minutos?*
- *¿Será largo o corto el tablón? ¿cómo sabemos si avanza lentamente o muy rápido?*

En ambientes de tipo 3 no existe la posibilidad de explorar cuestiones que puedan resultar interesantes para los alumnos, actitudes de este tipo romperían el contrato didáctico y podrían ser interpretadas como un intento de sabotear la clase. Las preguntas no tendrían sentido pues el enunciado es muy claro respecto de los datos.

Problema 2:

Una escalera de 10 metros de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 metros de la pared. ¿A qué altura de la pared está apoyado el extremo superior de la escalera?

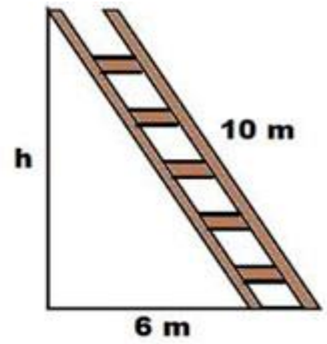


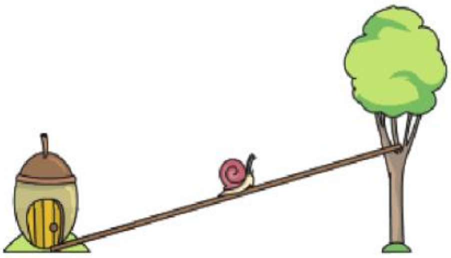
Figura 23: *Problema 2, ambiente de aprendizaje tipo 3.*

Probablemente, en este tipo de ambiente, el docente esté convencido de que está aplicando un contenido matemático a una situación real, sin embargo no admitiría por ejemplo que se cuestione si el piso es resbaladizo y podría ser conveniente acercar más la escalera a la pared.

Ambiente de aprendizaje tipo (4) (Semirrealidad, Escenario de investigación)

El paradigma de un ambiente de aprendizaje no depende del tipo de problema propuesto. Los dos problemas anteriores que se refieren a una semirrealidad podrían ubicarse en el contexto de un escenario de investigación.

Tomemos como ejemplo el problema 1:



- P: *Si el caracol avanzara a la misma velocidad que en el problema anterior, pero el árbol midiera el doble de alto y su desplazamiento desde el escondite hasta el árbol le llevara el doble de tiempo, ¿cuánto tardaría en subir un tablón colocado desde su escondite hasta la base de la copa del árbol?*- pregunta el profesor.

- A: *¡Seguro que tardaría el doble!* – responde la mayoría de los alumnos.

- P: *¿Están seguros?*

La pregunta del profesor es una invitación a que los alumnos lo comprueben, y no una orden para que lo hagan, *(¡compruébenlo!)*

La aceptación por parte de los alumnos se evidencia con su propuesta:

- A: *¡Probemos!*

  Tiempo que tarda en llegar al árbol por el suelo: 16 minutos

  Tiempo que tarda en subir al árbol: 12 minutos

  Entonces:

  $l = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

  Tardará 20 minutos.

- A: *¡Estamos seguros!*

- P: *Ok ¿y qué pasa si le agregamos 2 minutos al recorrido que el caracol hace por la tierra y también 2 minutos al tiempo que tarda en subir al árbol?*- pregunta el profesor.

- A: *¡Y, va a tardar 2 minutos más para subir por la rampa!*

- P: *¿Están todos de acuerdo?*

- A: *¡Sí!*- responde el grupo sin dudar.

- P: *¿Están seguros?*

- P: *¿Probamos?*

- A: *¡Sí!*

Del escondite al árbol tardará 10 minutos, del pie del árbol a la copa 8 minutos, y por la tabla 12 minutos.

Entonces

$$10^2+8^2=12^2$$

Luego

$$100+64\neq 144$$

- P: *¿Y por qué será que da diferente?* – pregunta el profesor.

Luego de un rato en el que se escucharon murmullos y algunas discusiones, un grupo comenta:

- A: *Nosotros pensamos que el tronco del árbol es más corto que el tablón, entonces no le alcanzan 2 minutos para llegar.*

- P: *¡Exactamente!* -se sorprende el profesor-, *lo que ustedes están queriendo decir es que el tiempo que se adicionó a cada recorrido no fue proporcional a sus longitudes. Busquemos una forma de encontrar tiempos de recorrido que sean proporcionales…*

Ambiente de aprendizaje tipo (5) (Situaciones de la vida real, Paradigma del ejercicio)

Problema 1:

La distancia entre la base de la torre inclinada de Pisa y su parte más alta es de 180 pies. La torre está desviada 16 pies de la vertical. Encuentra la distancia desde la parte más alta de la torre hasta el piso.

Figura 24: *Problema 1, ambiente de aprendizaje tipo 5.*

La torre de Pisa existe en realidad, pero este problema, bien puede no ser significativo para alguien que no sepa de su existencia o para alguien que en su vida cotidiana no utiliza los pies como unidad de medida. En el paradigma del ejercicio no es necesario tener estos conocimientos, aplicando la relación pitagórica con las medidas dadas es suficiente para obtener una respuesta correcta.

"Si todo lo que hacemos es enseñar a los niños el conocimiento de su propia y delimitada cultura, ellos no entenderán acerca del resto del mundo" (Bishop, 2006, citado en Blanco y Parra 2009); sin embargo sostiene que se debe empezar en lo local para luego educar también sobre lo global y que es tarea de la etnomátemática ayudar a los profesores a realizar conexiones entre lo local y lo global.

Problema 2:

Montar un escenario fuera del aula en un contexto real no garantiza un ambiente de aprendizaje que implique un escenario de investigación.

Por ejemplo, calcular la altura de los alumnos de un curso midiendo la sombra que cada uno proyecta a una hora determinada del día, utilizando el Teorema de Pitágoras, puede no moverse del paradigma del ejercicio.

Figura 25: *Problema 2, ambiente de aprendizaje tipo 5.*
(tomado de http://zetaespacios.com.ar/proyecciones-urbanas)

Ambiente de aprendizaje tipo (6) (Situaciones de la vida real, Escenarios de investigación)

La organización de la enseñanza por proyectos constituye un ambiente de aprendizaje de tipo (6) para Skovsmose, relaciona el contenido de aprendizaje con el contexto social y cultural de una microsociedad como, por ejemplo, un grupo de alumnos. La relación con el contexto facilita la motivación y la comprensión, promueve el trabajo cooperativo y democrático en equipos y la interdisciplinaridad entre docentes de distintas áreas. Genera procesos de búsqueda, de toma de decisiones y la realización de una autorreflexión sobre la propia participación en el proceso. Suele introducir una situación ejemplar, es decir, el estudio de una situación particular que conduzca a la exploración de un fenómeno global y a preguntas retadoras que promueven la reflexión.

Ejemplo de organización de la enseñanza por proyectos:

Proyecto: *"La huerta escolar"*[11]

El proyecto es propuesto y llevado a cabo por un grupo de alumnos que cursa el segundo año de escolaridad secundaria y su profesora de matemática. Consiste en la construcción de una huerta en la escuela.

La primera etapa se destinó a recoger información sobre las plantas y alimentos que pueden producirse en una huerta: temporadas favorables para su crecimiento, costos de las semillas, elementos necesarios para la elaboración de la huerta y presupuestos.

		Siembras	Semillero	Trasplantes	Actividades
Primer trimestre septiembre- diciembre	Poner en marcha el huerto con cultivos de invierno. Hay que hacerlo lo antes posible para aprovechar el buen tiempo	Guisante, haba, hierba de los canónigos, rábano, rúcola, acelga, zanahoria, calçots, espinaca.	A principios de trimestre: lechuga de invierno, acelga, cebolla, escarola, col, coliflor, remolacha.	Lechuga, puerro, calçot, acelga, col, escarola.	Planifiar el huerto Preparar el suelo
Segundo trimestre enero-marzo	Recogemos los cultivos de invierno y preparamos el huerto para la primavera. Sembramos cultivos de ciclo corto para poder recogerlos antes de vacaciones.	Lechuga, rúcola, rábano, zanahoria, nabo, apio, remolacha, acelga, ajo, espinaca, guisante, patata.	En climas templados se puede hacer semillero protegido de lechuga, col, puerro, cebolla.	Cuando ya no haya riesgo de heladas, se puede trasplantar lechuga, cebolla, acelga y, los cultivos de verano.	Recolección Cocinamos con verduras Preparar conservas
Tercer trimestre abril- junio	A principios de trimestre podemos hacer cultivos cortos. Cogeremos los cultivos de primavera. Preparamos cultivos de verano si alguien cuida del huerto a por vacaciones	Las mismas que en marzo además del maíz, la calabaza, el melón, la sandía o el pepino.	Plantel de hortalizas de verano si alguien cuida del huerto para vacaciones o para que los alumnos se lo lleven a casa.	Lechuga , acelga, espinacas.	Recolección Recolección de plantas aromáticas Preparar plantas de verano para cuidar en casa

Figura 26: *Temporadas favorables para la siembra. (Tomado de http://www.horturba.com).*

Distancias de plantación (en centímetros)

	Entre plantas	Entre hileras	Altura		Entre plantas	Entre hileras	Altura
Lechuga	20	30	25	Cebollín, cebolla	10 a 15	30	25
Repollo	45	50	30	Zapallo italiano	50	100	60
Tomate	30	70	100	Ají enano	25	50	40
Tomate coctel	25	50	100	Toronjil, hierba nuena	25	50	40
papas	20	80	50	Perejil, cilantro	15	20	15 a 20
zanahoria	8	20	15	Oregano, eneldo	15	20	15 a 20
apio	30	60	50 a 60	Estragón, tomillo, ciboullete	15	20	15 a 20

Figura 27: *Distancias de plantación (Tomado de http://www.hagaloustedmismo.cl/).*

[11] Se trata de un proyecto ficticio cuyo único objetivo es ilustrar el concepto de ambiente de aprendizaje de tipo 6 de Ole Skovsmose. Para ilustrar este ejemplo se toman imágenes del proyecto "La pirámide de Keops" del IES Ramon Cabanillas (Cambados, España, 2009).

La segunda etapa se desarrolla en el aula, donde los alumnos debaten, con la orientación de la profesora de ciencias naturales, qué les parece apropiado sembrar y cuáles son las condiciones necesarias para el buen desarrollo de cada tipo de planta (el sol que deberían recibir, tipo de riego, temporadas de siembra, necesidades de la comunidad, etc.).

A continuación se forman grupos de trabajo y se reparten tareas: se confeccionan listas de materiales, se comparan precios y se realiza el cálculo de los costos (de los cuales se hará cargo la cooperadora de la escuela) y los bosquejos de posibles diseños de la huerta (ubicación y tamaño de las parcelas).

Finalmente se acuerda el diseño de la huerta, basado en los bosquejos realizados:

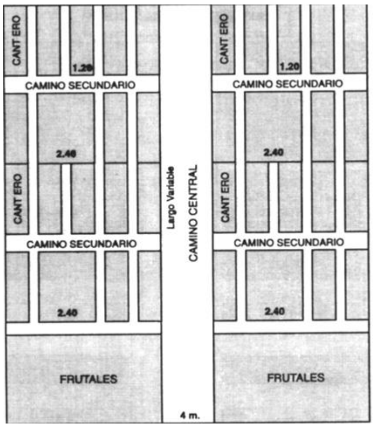


Figura 28: *Bosquejo (tomado de http://imagensubida.infojardin.com).*

Cuando el presupuesto es aprobado por la cooperadora comienza la etapa de construcción de la huerta.

Los grupos de trabajo discuten las posibles formas de delimitar las parcelas para que no queden "deformadas". Un alumno comenta que su padre es albañil y que no ha tenido la oportunidad de estudiar pero que utiliza una regla mnemotécnica para obtener ángulos perfectos, utilizando los números$(3,4,5)$; $(3.3 + 4.4 = 5.5)$ o sus múltiplos $(6,8,10)$; $(6.6 + 8.8 = 10.10)$ aunque no sabe bien por qué funciona.

Ante este comentario, la profesora les explica que eso ocurre porque existe una relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Y decidió invitar al albañil para que explicara su procedimiento.

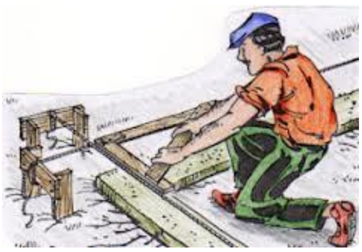


Figura 29: *Albañil*

Finalmente los alumnos deciden que utilizando sogas y algunas estacas podrán intentar lograrlo.

Figuras 30 y 31: *Alumnos trabajando*
(tomado de http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/pirkheo/indkheo.htm).

Al finalizar la tarea de campo, la profesora colabora en la realización de una arqueología matemática que se desarrolla en el aula.

Los chicos exploran la relación pitagórica utilizando la interpretación geométrica de la figura 11.

Esa exploración constituye un fenómeno ejemplar, pues tiene la intención de iniciar el camino hacia la búsqueda de propiedades significativas en el campo geométrico.

Como cierre del proyecto, la profesora propicia el desarrollo del conocer reflexivo con una invitación a proponer y dar respuestas a “preguntas retadoras”:

¿Habremos elegido bien lo que sembramos?

¿Podríamos haber aprovechado mejor el terreno si la distribución de las parcelas hubiera sido otra?

¿A qué se debe que algunos albañiles no sepan que están usando el teorema, cuáles son las consecuencias sociales y qué se podría hacer al respecto?

¿Cuál es la relevancia de tener o no, conocimientos matemáticos escolares para realizar bien un trabajo?...

6 A modo de cierre

La Matemática es una creación de lo más humana en su esencia, sin embargo para muchas personas es la disciplina más inhumana y hasta deshumanizante del currículo escolar. ¿Para qué sirve? suelen preguntar los estudiantes, generando a veces cierta incomodidad en algunos docentes que no están demasiado convencidos. El mismo Skovsmose, cuando era estudiante, tenía la sensación de que "algo andaba mal en las clases de matemática" sin tener demasiado claro el por qué.

Pareciera existir una especie de polaridad entre quienes aman la matemática y la disfrutan y aquellos que la “padecen”, aunque en ambos casos ocurre que no siempre cuentan con suficientes argumentos que les permitan explicar lo que sienten. Lo cierto es que en cualquiera de los dos extremos, la matemática parece dejar huella, por lo que no pueden descuidarse los procesos de su enseñanza y aprendizaje.

El poder simbólico que deviene de su carácter abstracto y el despojo de una mirada filosófica e histórica parecen tener que ver con el valor formativo de la enseñanza de esta ciencia, a nivel individual con la producción de autoestima negativa originada en la desatención de las ideas, metas y habilidades de los estudiantes o, a nivel social, con la reproducción sociocultural y su consecuencias: exclusión, desigualdad, frustración...

Se necesita la acción intencionada del profesor para promover actividades que permitan a los alumnos comprometerse con el proceso de aprendizaje, sentirse protagonistas y actuar como tales, desarrollar competencias democráticas, tomar una posición justificada en una discusión sobre cuestiones sociales, éticas y morales, imaginando la posibilidad de que las situaciones sociales y políticas pueden ser diferentes.

La Educación Matemática Crítica, con la incorporación de macro niveles como el social, político y cultural, otorga prioridad a la relación entre el sujeto de crítica (alumno y docente) con el objeto de crítica (situaciones conflictivas o críticas de la sociedad), tendiendo puentes entre los aspectos teóricos y la práctica educativa orientados a proporcionar las competencias necesarias para desvelar la naturaleza de estas situaciones que impliquen una reacción en respuesta a ellas.

A la invisibilidad del poder simbólico de un lenguaje formal como el matemático, se debe agregar la imposibilidad de predecir las consecuencias éticas y morales resultantes de la asociación de la matemática con el avance de la tecnología a través del desarrollo de modelos matemáticos cada vez más complejos y el manejo de una impensada cantidad de datos. El poder de la matemática se encuentra ahora más directamente relacionado con el desarrollo de nuevas estructuras sociales, políticas y económicas, cuyas consecuencias, la Educación Matemática Crítica debe cuestionar.

El montaje de un escenario de investigación constituye una oportunidad para que alumnos y docentes puedan desarrollar el conocer reflexivo. En él, la matemática no es fría ni ajena, los modelos matemáticos adquieren un sentido, los alumnos se convierten en protagonistas de los procesos de modelización, dejan de ser simples espectadores y receptores de conceptos vacíos de significado. Se desarrolla en un contexto democrático en el que las ideas merecen ser escuchadas, es un ámbito adecuado para preguntar, preguntarse, elaborar argumentos y tomar decisiones teniendo en cuenta las consecuencias sociales y éticas de dichas decisiones para desarrollar competencias democráticas; constituye un entrenamiento para intervenir y actuar en la sociedad y creer que se es capaz de modificarla.

Hoy la tecnología proporciona impensadas herramientas que nos asisten en la resolución de cálculos y algoritmos, contamos con máquinas cada vez más sofisticadas que no pueden pensar por no ser humanas. Es tiempo de que cada cual ocupe su lugar natural, especialmente durante la escolaridad: que todos los sujetos tengan la oportunidad de aprender cómo aprovechar lo mejor de las máquinas (su capacidad para almacenar datos y su velocidad para calcular) y del producto de la mente humana (la posibilidad de pensar, algo que las máquinas no pueden hacer).

Referencias

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Blanco, H y Parra, A. (2009). Entrevista al profesor Alan Bishop. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 2*(1). 69-74.

Camelo, F. J., García, G., Mancera G., y Romero, J. H. (2008). *Reinventando el currículo y los escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática critica.* Valledupar: Memorias del 9º Encuentro colombiano de matemática educativa.

Comenio, J. A. (1998). *Didáctica Magna.* (8a. ed.). México: Porrúa.

D'Ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical considerations pedagogical implications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2* (4), 479-488.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematies. *For the Learning of Mathematics, 5* (1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1994). *Cultural framing of mathematics teaching and learning*. In Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R. &Winkelmann, B. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 443–455). Dordrecht: Kluwer.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Buenos Aires: Olimpiadas Matemáticas Argentinas.

Echeverri, H. (2013). Más de mil años antes de Pitágoras, un método para encontrar ternas pitagóricas. *Hipótesis apuntes científicos uniandinos*, 15, 32-43.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Fernández Aguilar, E. M. (2010). Babilonia y las Matemáticas en el Aula. *Revista Digital de Ciencias IES Bezmiliana.*

Foucault, M. (1996). *La verdad y las formas jurídicas*. Barcelona: Gedisa

Freire, P. (2002). *Pedagogía del oprimido.* Buenos Aires: Siglo XXI

García-Cuerva, J. (2009). *Historia de las Matemáticas*. Capítulo 1: Egipto y Babilonia. (pp. 1-44). Madrid: UAM

Gentile, E. (2012). *Aritmética elemental para la formación matemática*. Vol. 1. Buenos Aires: Red Olímpica.

González, G. y Monge, N. (2012). *Un cuento para pensar.* Extraído el 15 de agosto de 2014 de http://ggonzalezt.blogspot.com.ar

González Urbaneja, P. M. (2008). El teorema llamado Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma revista de matemáticas = matematikaaldizkaria*, 32, 103-130.

Guacaneme, E. (2011). *La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: razones eintenciones*. Brasil: XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Kepler, J. (1619). *La Armonía de los Mundos, libro quinto.* Linz.

Kline, M. (2006). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI.

Mellin–Olsen, S. (1987). *The political dimension of mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Muñoz, M. (2002). *Algunos problemas diofánticos.* Tesis doctoral. Logroño: Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones.

Narodowski, M. (2000). Carpeta de Trabajo *Pedagogía*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Quilmes.

Neugebauer, O., & Sachs, A. J. (1945). Mathematical cuneiform texts, *American Oriental Series*, Vol. 29. New Haven, CT: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research.

Robson E. (2001). Neither Shrlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica*, 28, 167-206.

Rodríguez, M. E. (2010). Hacia una formación del docente de matemática integral, reflexiva y crítica: fundamentos filosóficos. *Revista Digital Enfoques Educativos*, 72, 29-44.

Ruiz Zúñiga, Á. (2000). *El Desafío de las matemáticas*. Heredia: EUNA.

Servais, W. (1976). *Humanizar la enseñanza de la matemática*. Trabajo presentado en las Jornadas Nacionales Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, septiembre, Rennes.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (Traducción al español por Paola Valero del original en inglés titulado *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Copyright Kluwer Academic Publishers. B.V. 1994). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. (Traducida al español por Paola Valero de la versión inglesa titulada Landscapes of Investigation). *Revista EMA*, *6* (1), 3-26.

Skovsmose, O. (2012). *Escenarios de investigación.* En Valero, Paola; Skovsmose, Ole (Eds.), Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 109-130). Bogotá: una empresa docente.

Socas Robayna, M. y Camacho Machín, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,10* (2), 151-172.

Tzanakis, C. &Arcavi, A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey*. En Fauvel J. & Van Maanen J. (Eds.), *History in mathematics education*. (pp. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Valero, P. (1999). Prefacio a la versión en español. En Skovsmose, O. Traducción al español del original en inglés titulado *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: ©Kluwer Academic Publishers.

Zapico, I. (2006). *Enseñar Matemática con su Historia*. Premisa, 8 (29), 3-8.