Universidad Nacional de General Sarmiento

RELACIÓN ENTRE GEOMETRÍA SINTÉTICA Y ANALÍTICA Y TIC'S: ANÁLISIS MATEMÁTICO - DIDÁCTICO DE UNA ACTIVIDAD

Marisa Alvarez

Directora: Dra. Marcela Cristina Falsetti.

Memoria presentada para optar por el título de
Especialista en Didáctica de las Ciencias con orientación en Matemática.

Febrero de 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO
Instituto del Desarrollo Humano
Especialización en Didáctica de las Ciencias con orientación en Matemática.

Resumen

En este trabajo se presenta un modo de evidenciar la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica implementando el uso de software. Mediante un problema de determinación de lugar geométrico, se muestran los alcances de los abordajes analítico y sintético. El uso de software tipo CAS (Computer Algebra System), para el abordaje analítico, y de Geometría Dinámica, para el sintético, permiten explorar casos posibles, elaborar conjeturas y construir pruebas. Asimismo se muestra la necesidad de combinar técnicas de la geometría sintética y de la geometría analítica para caracterizar el lugar geométrico. El análisis matemático-didáctico de la actividad propuesta se realiza a la luz de la Teoría Antropológica de lo Didáctico la cual ofrece desarrollo teórico que permite por un lado, analizar la complementariedad de los enfoques analítico y sintético y, por otro, encuadrar el uso de software de Geometría Dinámica en el marco de la actividad matemática. Se resalta aquí que tanto el tratamiento analítico como el sintético ponen en juego diferentes técnicas y también permiten proporcionar respuestas con diferente grado de generalidad.

***Palabras claves**: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Geometría Sintética, Geometría Analítica, enseñanza de la geometría, Geometría Dinámica, CAS (Computer Algebra System).*

Abstract

This work presents a way to demonstrate the complementarity between synthetic geometry and analytic geometry implementing the use of software. Through a problem of geometry locus, the scope of analytical and synthetic approaches is shown. The use of type CAS (Computer Algebra System) software, for the analytical approach, and Dynamic Geometry, for the synthetic one, allow you to explore possible cases, develop conjectures and build evidence. Also, the necessity of combine synthetic and analytical techniques to characterize the geometrical locus is exhibited. The mathematical analysis of the proposed activity is conducted in the light of the Anthropological Theory of Didactics which offers theoretical development. On the one hand, this theoretical development analyzes the complementarity of the analytic and synthetic approaches. On the other hand, it frames Dynamic Geometry software in the context of mathematical activity. It emphasizes that both, analytic and synthetic treatment, put into play techniques and provide answers with different levels of generality.

Keywords: *Anthropologic Theory of the Didactic, Synthetic Geometry, Analytic Geometry, teaching geometry, Dynamic Geometry, CAS (Computer Algebra System).*

Agradecimientos

A mi familia.

A mi Directora Dra. Marcela Falsetti. Mi más sincero agradecimiento y reconocimiento por su permanente ayuda científica, que ha ido acompañada de una extraordinaria calidad humana.

A la Co-Directora del Posgrado, Dra. Mabel Rodríguez por su preocupación por la formación docente, por compartir con calidez sus conocimientos en Educación Matemática y en Matemática, por su permanente acompañamiento y por haber gestado este posgrado.

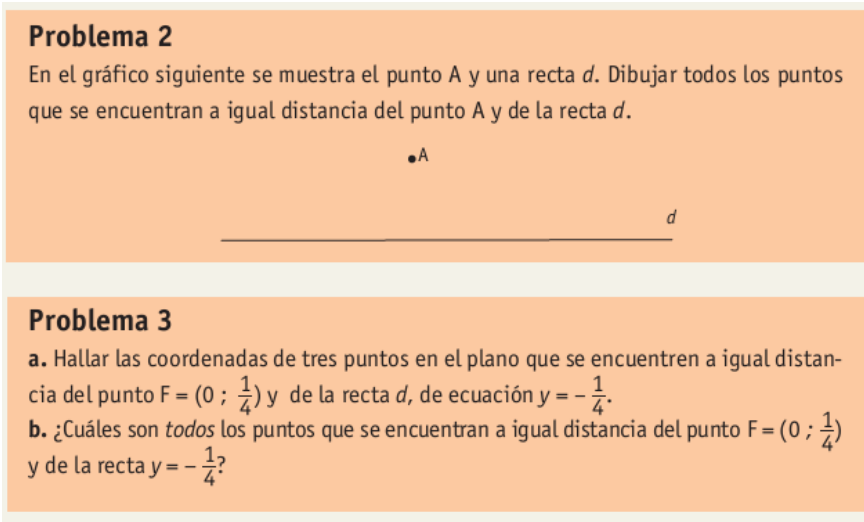
A los profesores de la Especialización: Dr. Alberto Formica, Dra. Sara Scaglia, Dr. Marcel Pochulu, Dr. Guillermo Matera, Dr. Juan Nápoles Valdés, Dra. Graciela Krichesky y Dr. Guillermo Hansen por la dedicación que evidenciaban en el nivel académico de sus clases que me permitieron mejorar mi formación.

A la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires por proporcionarme los medios materiales para realizar este posgrado.

Contenido

1. Introducción

La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria suele presentarse en forma desarticulada por abordar la geometría sintética y la geometría analítica cada una como una rama diferente de la geometría, independiente de la otra. En el mejor de los casos hay una yuxtaposición de actividades de geometría sintética y de geometría analítica aunque faltan actividades de integración de ambos tratamientos. Por ejemplo, en el libro “ES. 5 Matemática - Educación Secundaria[1]”, para quinto año de la escuela secundaria que el gobierno de la provincia de Buenos Aires distribuyó para uso de los alumnos en las escuelas se presentan las siguientes actividades en el capítulo dedicado a Cónicas (p.162):


Problema 2

En el gráfico siguiente se muestra el punto A y una recta *d*. Dibujar todos los puntos que se encuentran a igual distancia del punto A y de la recta *d*.

Problema 3

a. Hallar las coordenadas de tres puntos en el plano que se encuentren a igual distancia del punto $F = (0\,;\,\frac{1}{4})$ y de la recta *d*, de ecuación $y = -\frac{1}{4}$.

b. ¿Cuáles son *todos* los puntos que se encuentran a igual distancia del punto $F = (0\,;\,\frac{1}{4})$ y de la recta $y = -\frac{1}{4}$?

En estas actividades, que son contiguas, se observa que no hay ninguna tarea que recupere la exploración realizada en el problema 2, en el que se indican las condiciones métricas, para incorporar coordenadas y resignificar dichas condiciones en términos de ecuaciones que deben cumplir las coordenadas. Esta desarticulación entre la geometría sintética y la geometría analítica oculta la complementariedad que hay entre ellas y al mismo tiempo se corre el riesgo de lograr una comprensión superficial de los objetos geométricos.

Respecto al abordaje de las ramas de la geometría de forma independiente, Gascón (2002) plantea que la desarticulación que existe actualmente entre la geometría sintética y la geometría analítica en la enseñanza es producto de un análisis epistemológico superficial que oculta la continuidad y complementariedad que existe entre ellas. El autor sostiene que cuando se explora un campo de problemas de la geometría sintética y se introducen variaciones en dichos problemas, se evidencia que las técnicas sintéticas no son suficientes para resolverlos. Surge entonces la necesidad epistemológica y didáctica de modificar las técnicas empleadas incorporando técnicas analíticas o algebraicas propias de la geometría cartesiana. El autor presenta un ejemplo de un problema de construcción geométrica con regla y compás y muestra que haciendo pequeñas variaciones al enunciado original se amplía el campo de problemas y se evidencian limitaciones de las técnicas iniciales y surgen técnicas que requieren el uso de ecuaciones, propias de la geometría analítica. Al mismo tiempo, plantea que recíprocamente algunos problemas geométricos necesitan de la utilización previa de técnicas sintéticas para

Itzcovich, H. Novembre, A, Carnelli, G., Lamela, C., (2007) *ES. 5 Matemática - Educación Secundaria*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Programa Textos Escolares para Todos.

diseñar la estrategia que se llevará a cabo con las técnicas analíticas. Este autor plantea que la persistencia en proponer estudiar la geometría sintética y la geometría analítica de forma separada en la escuela secundaria, a pesar de ser áreas complementarias, no es inocente: “La "tozudez" de este hecho, que se mantiene inalterable a lo largo de las últimas reformas educativas, parece dar a entender que no se trata de una separación accidental sino que responde a un fenómeno didáctico-matemático más profundo y que, por lo tanto, merece ser indagado” (Gascón, 2003, p.29)

Por su parte, Ancochea (2011) considera que la introducción a la geometría analítica que no considera las técnicas de construcción y estudio de figuras que proporciona la geometría sintética provoca una fuerte algoritmización de los contenidos enseñados. A partir del trabajo de Gascón, la autora presenta un recorrido de estudio e investigación donde se propone establecer conexiones progresivas entre las técnicas sintéticas y las analíticas. En este proceso de estudio se sugiere a) comenzar con un enunciado analítico particular, b) traducir el problema a un enunciado de geometría sintética general, c) resolver el problema de geometría sintética mediante una construcción con regla y compás, d) hacer un estudio y discusión intuitiva de casos, e) resolver la versión analítica particular del problema.

El problema del tratamiento independiente de la geometría sintética y la geometría analítica no es actual sino que se origina en la antigüedad, como remarca Santaló (1961) quien presenta un recorrido histórico que describe la relación que existió entre la geometría analítica y la geometría sintética desde sus orígenes. El artículo resalta que el uso sistemático de la geometría analítica para resolver problemas llevó a elaborar frondosas fórmulas que complicaban el problema innecesariamente e impedían ver la esencia geométrica del mismo. Sin embargo, al introducir los métodos sintéticos para abordar los problemas se abrían nuevas vías a la investigación geométrica. Del mismo modo, en algunos casos, la geometría sintética se tornaba insuficiente para resolver los problemas y era necesario acudir a la geometría analítica.

A las consideraciones anteriores sobre cómo profundizar el estudio de la geometría se agrega el uso de las herramientas tecnológicas disponibles en la actualidad para la enseñanza de la matemática, que se muestran como un buen recurso ya que establecen nuevas formas de razonar, sostener y presentar relaciones o propiedades de los objetos matemáticos por medio de la visualización, la exploración, la conjeturación y la corroboración gráfica. Por estas características su inclusión en la enseñanza permite desplegar nuevos procedimientos en relación con el contenido estudiado. Resultados recientes de investigaciones muestran las ventajas del uso de artefactos tecnológicos en la enseñanza de la matemática y en particular en geometría. Hoyos (2006) muestra la influencia del uso de software geométrico y pantógrafos en la comprensión de las transformaciones geométricas mostrando que ambos artefactos se complementan y favorecen la construcción del discurso por parte de los alumnos. Arcavi y Hadas (2000) describen un enfoque que introduce la geometría dinámica en la enseñanza como instrumento de exploración, visualización, elaboración de conjeturas, y retroalimentación que explicita la necesidad de pruebas. Los autores muestran que la implementación de esta herramienta tecnológica en la resolución de una situación problema que le otorgue un uso significativo permite no sólo reconocer patrones, sino que también puede ampliar la comprensión al vincular diferentes representaciones de un concepto y servir como bases para demostrar y para fundamentar la exploración. En consecuencia, muestran que en este tipo de tareas los límites entre las subdisciplinas matemáticas se tornan confusas ya que las funciones describen fenómenos geométricos, las explicaciones geométricas surgen para explicar las características de una representación gráfica y simbólica de la función, y viceversa (Arcavi y Hadas, 2000).

En el presente trabajo se trata de desentrañar técnicas matemáticas y procedimientos realizados con la computadora en el abordaje sintético y en el analítico de una misma situación problemática con el fin de entender cómo establecer mejor los vínculos entre estos dos abordajes. Para esto, se presenta un problema de determinación de un lugar geométrico y se analiza a la luz de algunos conceptos centrales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico destacando que tanto el tratamiento analítico como el sintético no sólo ponen en juego diferentes técnicas sino que también permiten proporcionar respuestas con diferente grado de generalidad, como consecuencia de las dificultades matemáticas que se presentan al realizar un abordaje exclusivamente analítico o únicamente sintético

En relación con todo lo expuesto arriba, se presenta una tarea que podría ser planteada a estudiantes de 5º año de la escuela secundaria o a estudiantes de nivel terciario, en la que se integren técnicas de geometría sintética y analítica en forma articulada, con el aporte de la geometría dinámica mediante el uso del software de distribución libre Geogebra. Se intenta no descuidar los aspectos señalados por Gascón (2002, 2003) en relación con el "cuidado epistemológico" tratando de que la situación planteada sea tal que las técnicas sintéticas y las analíticas dialoguen de algún modo, en el sentido de que unas y otras hacen aportes sustantivos a la situación. Inspirados por los trabajos de Gascón, quien trabaja bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se hace un análisis didáctico de la actividad propuesta identificando las técnicas de cada uno de los campos matemáticos. En definitiva, el aporte de este trabajo es mostrar en detalle cómo podrían vincularse los aspectos sintético, analítico y dinámico. La exploración dinámica del planteo inicial, mediante un software de geometría dinámica, acercaría al estudiante a la formulación de una conjetura que puede tratar de probarse mediante un abordaje analítico, mediado por un software de tratamiento simbólico, traduciendo las condiciones del planteo inicial. Sin embargo las ecuaciones que surgen se muestran insuficientes para caracterizar el objeto geométrico por lo que un abordaje sintético ayudaría a describir el objeto, comprender otras relaciones métricas implícitas, analizar distintos casos y a generalizar el planteo inicial.

A continuación a modo de fundamentación del trabajo, se comienza presentando el interés del tema seleccionado con un breve planteo de la situación que ha atravesado la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria y sus desafíos actuales. En la segunda sección se exponen los referentes teóricos que permitirán elaborar una reflexión en torno a la enseñanza de la geometría tales como el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, la geometría dinámica en la enseñanza y el vínculo entre ellas. En la tercera sección se presenta una situación problemática sobre lugares geométricos junto al tratamiento matemático que suscita desde la geometría analítica y la geometría sintética. Posteriormente, se incluye un análisis didáctico de la situación problemática previa a la luz del marco teórico presentado. Finalmente, se presenta una reflexión sobre el trabajo efectuado.

Interés del tema.

El tema que enmarca este trabajo es la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria con el uso del software. En particular nos interesa el diálogo entre la geometría sintética y la geometría analítica así como el uso de software en las propuestas de enseñanza. Este tema resulta relevante porque la enseñanza de la matemática moderna desestimó la geometría sintética y por muchos años su enseñanza a nivel internacional fue relegada al final del programa anual de estudios y por esta razón su abordaje en la escuela se tornó superficial hasta que fue desplazada por otras ramas de la matemática (Sardella, Berio y Mastucci, 2002). Su ausencia puede constatarse en los documentos curriculares y en los programas de formación docente (Scaglia y Götte, 2008). Este fenómeno es destacable ya que el trabajo geométrico brinda la posibilidad de conocer otras formas de razonamiento específicas de este dominio. A partir de los datos es posible desarrollar un estudio exploratorio, de ensayos y errores, de ajustes, de identificación de propiedades que devienen en la formulación de una conjetura que relaciona los objetos geométricos involucrados o en una propiedad no explicitada entre los mismos. Finalmente, los argumentos que sostienen la conjetura independientemente de la experimentación son puramente deductivos que parten de las propiedades inferidas a partir de la exploración.

Recientemente se ha puesto atención nuevamente en la enseñanza de la geometría desde distintos ámbitos que impactan en las instituciones educativas. A partir de la reforma educativa de la década del 90, los diseños curriculares promueven el tratamiento de la geometría en los distintos niveles educativos. Asimismo, la comunidad de Educación Matemática se interesó en estudiar su enseñanza desde distintas líneas teóricas (Font Moll, 1996; actas de ALME 1998; Bressan y Bogisic, 2000; Sardella et al, 2002; Godino, Gonzato y Fernández, 2010). También la industria del desarrollo de softwares educativos de geometría dinámica que surgieron a comienzos de los años 90 manifiestan la importancia de la geometría, tales como Cabri-Géomètre, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor, The Geometric Supposers y Cinderella. González-López (2001) dice sobre los sistemas de geometría dinámica:

> se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado. Estas acciones producen construcciones geométricas más o menos complejas en las que algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y “arrastrados” por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción. (González-López, 2001; p.278).

La enseñanza de la geometría se debería revitalizar con el desarrollo de la informática ya que actualmente se cuenta con software libre de alto desarrollo de programación que cumple con amplios requerimientos para el estudio de la geometría plana. Sin embargo, el impacto de esta revalorización no repercute en las aulas. Itzcovich (2005) enuncia que las posibles razones por las que la enseñanza de la geometría ha perdido espacio en las prácticas docentes se debe a la dificultad de elaborar o encontrar suficientes situaciones verdaderamente desafiantes por parte de los docentes, la enunciación imprecisa de los contenidos geométricos en los diseños curriculares y el mayor reconocimiento de otras ramas de la matemática como el álgebra, la aritmética, etc. Dados los intereses mostrados en los trabajos enunciados nos parece importante realizar aportes, como el que se trata de hacer aquí, para que la geometría recupere espacio en la práctica docente.

En suma, según lo expuesto en esta sección este trabajo se propone:

- Vincular técnicas de la geometría sintética con las de geometría analítica.
- Generar actividad matemática ligada al uso del software, en particular de un software de geometría dinámica (conjeturación, formulación, generalización, resolución de ecuaciones, trazado de figuras, etc.).
- Propiciar razonamientos matemáticos ligados a situaciones geométricas.

2. Los referentes teóricos para el análisis didáctico.

Se desarrollan aquí las ideas teóricas que se adoptan para el análisis didáctico de la situación problemática a plantear. Este análisis permite fundamentar la potencialidad de la misma en términos de orientar la enseñanza articulada de la geometría sintética y la geometría analítica.

Surge aquí el interrogante respecto a cuáles de las teorías didácticas más difundidas resultan más adecuadas para fundamentar y encarar estos tres propósitos. Al respecto se revisaron materiales referidos a la teoría APOE y al enfoque de Resolución de Problemas, como representantes de las teorías cognitivistas, por un lado y, por otro, a la Teoría de Situaciones Didácticas y Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), como representantes del enfoque sistémico. Consideramos que algunos desarrollos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico pueden servirnos pues permiten identificar técnicas involucradas en la situación planteada así como dar un marco para la actividad matemática en general, incluso de aquella realizada mediante distintos instrumentos como los que ofrecen las NTICS. A continuación se realiza un breve recorrido sobre las teorías revisadas en relación con los propósitos señalados.

Tanto la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) como la TAD incorporan el análisis de la matemática escolar como parte de su problemática y construyen alternativas a las mismas como parte de su metodología de investigación. En este sentido puede considerarse que ambos enfoques toman la propia matemática como parte de su objeto de estudio (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011). Sin embargo, en cada una de ellas las miradas a dicho objeto presentan divergencias. La teoría APOE, como teoría cognitivista, acentúa la construcción del conocimiento matemático individual y elabora la descomposición genética que describe un modelo de cómo se construyen los elementos de un determinado concepto o ámbito matemático como acciones, procesos, objetos y esquemas cognitivos. La TAD considera que para interpretar adecuadamente la actividad matemática es necesario tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas no sólo desde el punto de vista de lo que un sujeto puede aprender sino también desde el punto de vista de lo que es posible aprender y enseñar en el contexto de una institución particular. Este último proceso de reconstrucción está comprendido en la transposición didáctica (Chevallard, 2001). Como consecuencia de esto, la TAD cuestiona y modeliza los procesos de génesis y difusión intra-institucional e inter-institucional de las praxeologías. Es decir, enfatiza el nivel institucional de la construcción del conocimiento matemático y por eso no cuestiona o modeliza los procesos cognitivos de los alumnos o profesores como lo hace la teoría APOE que enfatiza el nivel personal de la construcción del conocimiento (Trigueros y Martinez, 2013). Por otro lado, el modelo epistemológico de la teoría APOE enfatiza la descomposición de la matemática en redes o sistemas de conceptos matemáticos, mientras que el modelo epistemológico de la TAD acentúa la actividad matemática institucionalizada en la que los sistemas de conceptos y demás objetos matemáticos se consideran componentes de las praxeologías matemáticas organizadas en dos niveles: la praxis y el logos (Trigueros, 2013, p.3). El primer nivel remite a la práctica que se realiza, es decir los tipos de tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para abordarlos. El segundo nivel incluye el discurso tecnológico que son descripciones que se elaboran para justificar las técnicas y la teoría que fundamenta las descripciones tecnológicas y da sentido a los problemas planteados. En este trabajo se cuestiona que la enseñanza de la geometría sintética y de la geometría analítica, como campos de saber, sean concebidas en las propuestas escolares de forma independiente. Se aborda este hecho como un problema didáctico de orden institucional y no se estudia la construcción desde el punto de vista cognitivo del conocimiento matemático. Por estas razones se considera que la teoría APOE no podría ser aprovechada para este estudio. Por otro lado, dado que el estudio se focaliza en un área de la matemática como es la geometría y no en un concepto particular y se acuerda con la propuesta de evidenciar la complementariedad de la geometría sintética y la geometría analítica no sólo desde el vínculo que se pueda establecer entre conceptos sino también entre técnicas y tecnologías se consideró que el modelo epistemológico de las praxeologías que propone la TAD resulta más apropiado que la elaboración de una descomposición genética.

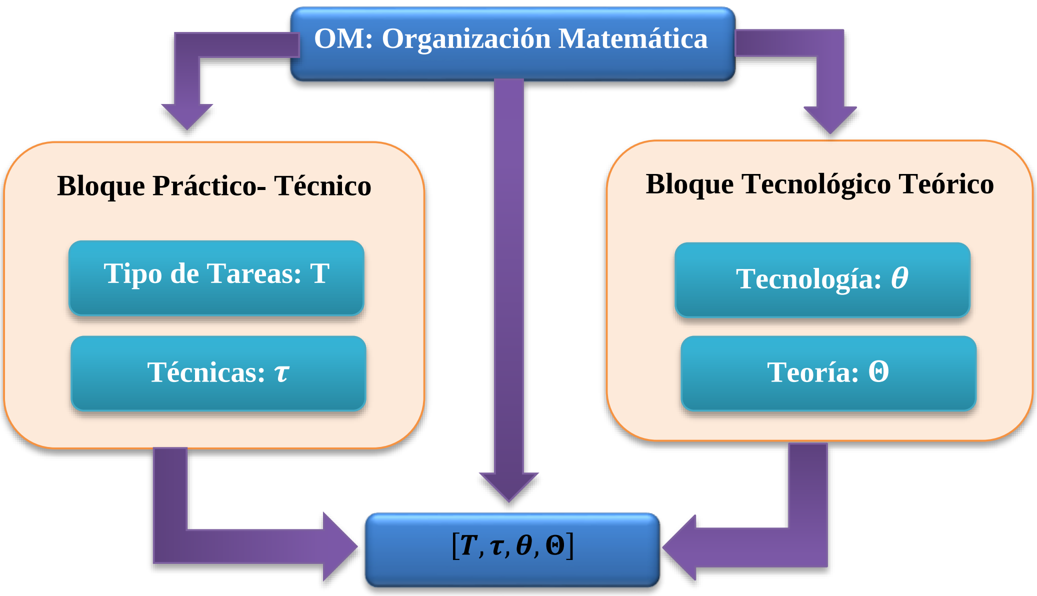
El enfoque de Didáctica de la Matemática conocido como Resolución de Problemas se concentra en la construcción por parte de los estudiantes de estrategias que les permitan resolver problemas y no en la enseñanza de un conocimiento matemático en particular (Rodríguez, 2010). Esta construcción conlleva al mismo tiempo una reflexión metacognitiva de los estudiantes que luego permitirá decidir conscientemente las estrategias a utilizar en nuevos problemas. En este trabajo, se propone una tarea que puede ser considerado un problema para el sujeto ya que no se vislumbra inmediatamente un camino que permita alcanzar la meta y además pone en juego recursos tecnológicos que aportan a la problematización y la perplejidad. Sin embargo, dado que lo que se desea analizar en la tarea propuesta en este trabajo no es el desarrollo de heurísticas y tampoco se proponen preguntas que motiven la reflexión metacognitiva de los resolutores en relación a los propios procesos de construcción del saber, se considera que el trabajo no se podría encuadrar apropiadamente en esta línea de Didáctica de la Matemática.

La tarea propuesta aquí se trata de determinación de un lugar geométrico bajo ciertas restricciones y tiene la intención de mostrar la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica. Se intenta, a partir del enunciado de la misma, que no se advierta esta intencionalidad; podría decirse que de algún modo se favorece un funcionamiento a-didáctico. Además la misma admite (como se advertirá en la sección 3) situaciones de acción, formulación y validación. Estas características permiten considerar la actividad propuesta dentro de un marco acorde a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986). Esta teoría también permitiría interpretar el vínculo que se establece entre la geometría sintética y la geometría analítica a partir de las argumentaciones y pruebas que pueden surgir en las situaciones de validación. Sin embargo, dado que esta teoría no cuestiona la reconstrucción escolar de las matemáticas, no sería posible interpretar el factor institucional que afecta a la desarticulación entre ambos enfoques geométricos que existe en la enseñanza. Teniendo en cuenta que la TAD emerge de la TSD (Gascón, 1998) y considera además los fenómenos de transposición didáctica, con lo cual el objeto primario de investigación para la TAD es la actividad matemática institucionalizada, se considera que esta teoría presenta elementos teóricos que resultarían relevantes para esbozar una explicación posible del fenómeno del escaso vínculo que se establece entre la geometría sintética y la geometría analítica en las instituciones escolares. Asimismo, los avances de las investigaciones en relación con la conciliación entre la TAD y la construcción del saber a partir del uso de software de geometría dinámica (Acosta, 2005) nos dan elementos teóricos para abordar el análisis de las técnicas que surgen a partir del uso del software.

2.1. Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD): una contextualización con el contenido geométrico y el uso de las NTICs.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard en 1992 para la Didáctica de la Matemática, se inscribe dentro del programa epistemológico de investigación cuyo objeto primario de investigación didáctica es la actividad matemática, entendida como una construcción social que se realiza en instituciones, siguiendo determinados contratos institucionales (Gascón, 1998). Para analizar la actividad matemática es necesario un modelo epistemológico que explicite qué se entiende por hacer matemática y por producir conocimiento matemático. La Teoría Antropológica de lo Didáctico propone un modelo epistemológico que describe la actividad matemática y el saber que surge de ella en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas.

> Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que es una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o “praxis” [[T,τ], formada por las tareas, T, y las técnicas matemáticas, τ; y el “logos” [θ/Θ], constituido por el discurso matemático que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la tecnología, θ, que hace referencia directa a la práctica y la teoría, Θ, que constituye un segundo nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras inseparables de la actividad matemática, se obtiene la noción de praxeología matemática. (Fonseca, Bosch, Gascón, 2010, p.6)



Dentro de este modelo, “hacer matemática” consiste en activar una organización matemática, es decir en resolver determinados tipos de tareas con determinadas técnicas, de manera inteligible, justificada y razonada. A continuación se profundizará en el significado de cada uno de estos elementos que constituyen una praxeología.

2.1.1. Tipos de Tareas

Chevallard plantea que “En la raíz de la noción de praxeología, se encuentran las nociones solidarias de tarea *t*, y de tipo de tareas, T. Cuando una tarea *t* forma parte de un tipo de tareas T, se escribirá $t \in$ T.” (Chevallard, 1999, p.2)

La noción de *tipo de tarea* supone precisión sobre el objeto a obtener o construir y el contenido a tratar. En particular toda construcción geométrica se propone encontrar un objeto geométrico o figura que cumpla con determinadas condiciones dadas, en consecuencia algunos de los tipos de tareas propuestas son por ejemplo:

- Hallar circunferencias tangentes a otras figuras predeterminadas con, eventualmente, restricciones dadas.
  Por ejemplo, tareas que pertenecen a este tipo serían:
    - Hallar las circunferencias de radio dado que son tangentes a una recta en un punto.
    - Hallar las circunferencias que son tangentes a dos rectas dadas y tienen al centro en otra recta.
    - Hallar las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada y contienen a un punto dado.
- Determinar el lugar geométrico de los centros de circunferencias tangentes a figuras predeterminadas con, eventualmente, restricciones dadas:
  Por ejemplo, tareas que pertenecen a este tipo serían:
    - Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a dos rectas dadas.
    - Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada y contienen a un punto dado.

2.1.2. Técnicas

“Sea pues T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) una manera de realizar las tareas $t \in$ T: a una determinada manera de hacer, τ, se le da aquí el nombre de técnica” (Chevallard, 1999, p.3). De esta manera, una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene así un bloque designado por [T/τ], que se denomina bloque práctico-técnico. Cabe señalar que una técnica sólo resulta útil sobre una parte de las tareas del tipo T pero no es suficiente en otras, de modo que toda técnica tiene un determinado alcance y “no se sabe, en general, realizar las tareas del tipo T” (Chevallard, 1999, p.3). En este sentido una técnica puede ser superior a otra en la medida en que tenga éxito sobre la mayor parte de las tareas del tipo T a la que es relativa. Notar que dado que la técnica constituye una manera de hacer determinada tarea, su naturaleza no es necesariamente algorítmica. Asimismo, en una determinada institución I existe sólo un pequeño número de técnicas relativas a un tipo de tareas T institucionalmente reconocidas y aceptadas. En particular, algunas técnicas empleadas en geometría sintética difieren de las utilizadas en geometría analítica aunque en algunos casos aborden el mismo tipo de tareas. A continuación se presenta un ejemplo sencillo pero representativo:

Tarea: Hallar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia del punto $A = (3,2)$ y del punto $B = (7;5)$.

Para resolver esta tarea empleando técnicas propias de la geometría sintética se trazaría, usando regla no graduada y compás la mediatriz del segmento AB, probando luego que la recta obtenida es la que contienen a todos os puntos con las condiciones dadas. En cambio, con técnicas de la geometría analítica, se buscaría la ecuación del lugar geométrico a partir de igualar fórmulas de distancia obteniendo como resultado de la manipulación algebraica la ecuación de una recta que resulta perpendicular a la recta que contiene a los puntos A y B y que pasa por el punto M, punto medio del segmento AB.

El bloque práctico de una praxeología se complementa con el bloque técnico-teórico que justifica e interpreta dicha práctica.

2.1.3. Tecnología

> Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional -el logos- sobre la técnica τ, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica τ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. (Chevallard, 1999, p.4).

La racionalidad de la justificación depende de la institución en la cual se enmarca. Otra función de la tecnología consiste en explicar la técnica es decir exponer por qué es correcta. En general para una tecnología dada, la función de justificación, sostenida en la demostración, se encuentra más presente que la función de explicación. Otra función de la tecnología consiste en producir técnicas. (Chevallard, 1999)

A continuación se describirán algunas de las técnicas y tecnologías propias de la geometría sintética y de la geometría analítica.

2.1.3.1. Técnicas y tecnologías vinculadas a la Geometría Sintética

> Delimitaremos inicialmente la geometría sintética como aquella que utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores, hasta Descartes, para abordar problemas de construcción geométrica sin representación en coordenadas y con la regla y el compás como principales herramientas. La determinación de los lugares geométricos aparece como una técnica básica de estas construcciones, al lado de las transformaciones del plano. (Ancochea, 2011, p.538).

Se menciona posteriormente algunas técnicas distintivas para resolver situaciones en geometría sintética.

- *Los lugares geométricos* (Puig Adam, 1986): la solución depende de la determinación de los puntos que tienen dos o más propiedades explicitas en el enunciado o que se deducen del mismo. Se trata de considerar por separado las condiciones que determinan la posición exacta del punto buscado. El conjunto de todos los puntos que cumplen una de las condiciones es un lugar geométrico. Los puntos solución del problema serán aquellos que satisfacen todas las condiciones es decir que se encuentran en la intersección de los lugares geométricos previamente identificados. La tecnología asociada a esta técnica se fundamenta en que cuando una figura geométrica contiene todos los puntos que satisfacen una determinada propiedad y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la verifican, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos. Es decir, las condiciones "tener la propiedad" y "pertenecer al lugar" son equivalentes.

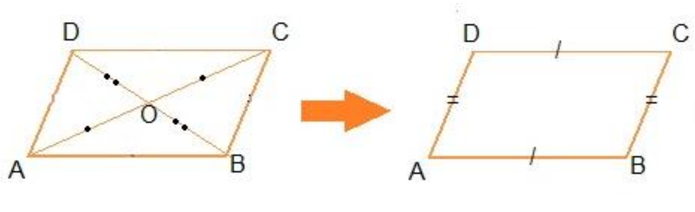
- *Enriquecer la figura:* Consiste en realizar construcciones auxiliares como prolongar segmentos, construir circunferencias, trazar diagonales, trazar rectas paralelas, o calcular medidas de distancia o de ángulos, que permitan reconocer visualmente propiedades de la figura.

> La tecnología correspondiente a esta técnica se basa en el hecho de que la visión humana hace que el cerebro interprete de manera automática las informaciones físicas de una determinada manera, permitiendo la identificación de ciertas propiedades, e impidiendo la identificación de otras; al agregar elementos al dibujo, cambia la interpretación no consciente que efectúa el cerebro, posibilitando la identificación de otras propiedades. Asimismo, el cálculo de medidas arroja información que no es perceptible a simple vista. (Acosta Gempeler, 2005, p.6).

- *Uso de la figura de análisis:* consiste en realizar un dibujo a mano alzada que represente los datos y el problema resuelto. Esta figura no posee rigurosidad geométrica sino que a partir de la visualización de la situación, permite examinar las propiedades geométricas o los objetivos parciales que habría que determinar para resolver problema. El proceso de resolución se realiza luego por el Patrón de Análisis-Síntesis.
- *Patrón de Análisis-Síntesis:* En la etapa de análisis se asume que el problema está resuelto o que la proposición es verdadera y se deducen de ella una conclusión conocida. Si la conclusión obtenida es falsa, el análisis proporcionó una refutación a la proposición por reducción al absurdo. Si la conclusión es verdadera, esto no dice nada respecto del valor de verdad de la proposición original. Si es posible invertir la secuencia de pasos o razonamientos, la inferencia invertida constituye una síntesis y se obtiene una prueba de la proposición. Entonces, "el Análisis viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir "condiciones necesarias" para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la Síntesis se muestra que estas condiciones son también "suficientes", se obtiene una demostración correcta de la proposición." (González Urbaneja, 2007, p.213). La tecnología asociada a esta técnica es la propiedad transitiva de la implicación lógica.

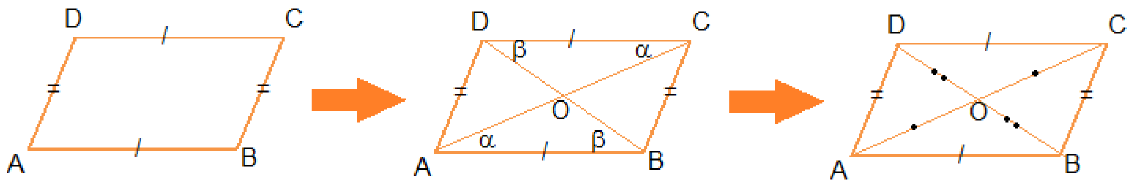
  Un ejemplo: Se quiere probar que en un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio.

  Es simple probar que si en un cuadrilátero convexo las diagonales se cortan en su punto medio, entonces los lados opuestos de ese cuadrilátero son iguales entre sí.



Sean A, B, C y D los vértices del paralelogramo nombrados en sentido antihorario, con O punto de intersección de las diagonales. Entonces suponiendo $\mathrm{OC} = OA$ y $DO = OB$ y siendo $\angle DOA = \angle COB$, por ser ángulos opuestos por el vértice, se tiene, por criterio de congruencia entre triángulos "lado, ángulo, lado" aplicado a los triángulos DOA y COB, que los mismos son congruentes. Entonces, $DA = CB$. Análogamente se puede probar que $DC = AB$. De esta forma se obtuvo a partir de asumir la condición de las diagonales una nueva condición necesaria. ¿Qué relación

hay entre esta propiedad intermedia del cuadrilátero y el hecho de ser paralelogramo? Se puede probar, también en forma bastante simple, que un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo sí sus lados opuestos son iguales. Basta considerar cada una de las diagonales y comparar, por criterios de congruencia, los triángulos que comparten una diagonal obteniendo previamente las condiciones de igualdad entre los ángulos por uso del teorema directo y recíproco de ángulos entre rectas cortadas por una transversal.
Sin embargo, esto no garantiza que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio. Si se puede invertir este razonamiento y resulta válido se obtiene una síntesis que demuestra el enunciado original. La misma estaría dada por el siguiente razonamiento:
Se probó que en un paralelogramo los lados opuestos son congruentes y se quiere mostrar que sus diagonales se intersecan en su punto medio.



Sean A, B, C y D los vértices del paralelogramo nombrados en sentido antihorario. Por la relación de ángulos entre paralelas con $DC \parallel AB$ con AC transversal, $\angle DCA = \angle BAC = \alpha$ por ser alternos internos. Por la misma razón, $\angle CDB = \angle ABD = \beta$ con $AD \parallel BC\ y\ BD$ transversal. Sea O el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo. Luego, $\angle DCA = \angle BAC = \alpha,\ AB = DC$ por hipótesis y $\angle CDB = \angle ABD = \beta$, entonces por criterio "ángulo, lado, ángulo" de congruencia de triángulos, los triángulos AOB y DOC son congruentes con:

- $DO = OB$, entonces O es punto medio de la diagonal BD.
- $AO = OC$, entonces O es punto medio de la diagonal AC.

- *Método reductivo* (Puig Adam, 1986): Consiste en reducir la construcción a realizar o propiedad a probar a otra equivalente. En este proceso de reducción se usa la técnica de Análisis-Síntesis y además incluye la etapa de *discusión del problema* que consiste en un estudio de cómo se modifican las soluciones del problema al variar los datos con el objeto de conocer la naturaleza de las soluciones con toda generalidad.
- *Método de las transformaciones* (Puig Adam, 1986): Esta técnica se sustenta en que "las propiedades de la geometría métrica son invariantes respecto del grupo de movimientos y del grupo de semejanzas" (Puig, 1986). Consiste en observar si resulta más sencillo resolver el problema aplicando a la figura o a parte de ella una transformación. Luego se construye la figura transformada y posteriormente se le aplica la transformación inversa para obtener la figura primitiva.
- *La razón:* Esta técnica puede aplicarse en el caso en que el problema de construcción pueda reducirse a la determinación de un punto.

> Se trata de considerar las distancias de ese punto a otros puntos ya construidos para identificar una posible razón constante entre esas distancias al variar el tamaño de la figura. Esta razón permitirá construir el punto buscado por medio de una homotecia. Eventualmente también pueden considerarse las proporciones de ángulos. (Acosta Gempeler, 2005, p.4).

2.1.3.2. Técnicas y tecnologías vinculadas a la Geometría Analítica

La geometría analítica se entiende como "la aplicación del álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas" (González Urbaneja, 2007, p.207)

En geometría analítica plana se estudian aquellas curvas tales que las coordenadas de sus puntos, según un sistema de coordenadas prefijado (cartesiano o en polares, por ejemplo), satisfacen una ecuación o un sistema de ecuaciones. El vínculo que se establece entre la geometría y el álgebra por medio de la ecuación, abarca también las relaciones y operaciones entre los elementos de ambas ya que las propiedades geométricas de una curva pueden ser estudiadas a partir del comportamiento algebraico de su ecuación.

> Al vincular los trabajos de Apolonio y de Vieta, Fermat concibe su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, que le permitirá asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis Algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo, Fermat resolverá los problemas del Análisis Geométrico de los griegos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica. Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de eficacia en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de Análisis y de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría. (González Urbaneja, 2007, p.221)

A continuación se señalan algunas técnicas distintivas de la geometría analítica.

- *Asociar sistema de coordenadas a una situación geométrica dada:* Consiste en establecer las rectas de referencia de la figura de un modo que resulte adecuado para la resolución de la situación particular en cuestión.
- *Técnica de determinación del sistema de ecuaciones*: Consiste en plantear el sistema de ecuaciones que describe las construcciones geométricas. Esto se fundamenta en "la conexión intima que existe entre la naturaleza de un lugar de puntos, definidos por cierta propiedad geométrica, y la de la ecuación que liga las distancias de dichos puntos a ciertas rectas de referencia de la figura." (Puig, 1986, p.227)
- *Técnica de las transformaciones algebraicas.* Consiste en aplicar operaciones algebraicas básicas sobre la expresión algebraica para hallar otra expresión equivalente. La tecnología asociada es la generalización de las operaciones aritméticas.
- *La modelización algebraica con parámetros y el estudio analítico de casos.* Se trata de expresar los datos con parámetros para analizar qué relaciones deben darse entre estos para que el problema tenga solución y, en este caso, caracterizar los diferentes tipos que existan.
- *Patrón de Análisis-Síntesis:* Esta técnica es análoga a la descripta para geometría sintética sólo que se utiliza el álgebra y el sistema de coordenadas como herramienta para el análisis. Descartes describe detalladamente este método que consiste en suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y

las desconocidas; resolver la ecuación resultante para saber las relaciones numéricas entre dichas longitudes (Gonzalez Urbaneja, 2007).

2.1.4. Teoría

Sobre el rol de la teoría en la praxeología Chevallard (1999) señala que "(…) el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría,Θ" (p.4). Por ejemplo en el caso de Geometría podría ser la teoría de la geometría métrica del plano, la geometría euclideana entre otras.

2.2. Geometría Dinámica y CAS (Computer Algebra System).

Los softwares de geometría dinámica permiten interactuar con representaciones de los objetos geométricos por medio de una pantalla modificando la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la enseñanza tradicional con lápiz y papel. En ellos es posible la modificación continua de las construcciones por medio del arrastre, obteniendo con facilidad y rapidez numerosos ejemplos a partir de una sola figura. También es posible realizar mediciones, constatar propiedades y transformar las construcciones realizadas con herramientas propias del software. Esto hace posible explorar distintas características y propiedades de la construcción geométrica realizada con el fin de interpretar la situación estudiada. La visualización de diferentes ejemplos da la posibilidad de formular conjeturas, verificarlas o refutarlas y estudiar la dependencia entre objetos geométricos o propiedades. Este modo de afrontar la actividad matemática, con las herramientas del software y el estudio exploratorio, provee un contexto rico en ideas útiles para elaborar la justificación matemática de las conjeturas realizadas.

González y Lupinacci (2011) plantean que "la visualización y la interacción que permiten los entornos de geometría dinámica puede ser una herramienta muy potente a la hora de elaborar conjeturas, aunque esta característica no es intrínseca del entorno, sino de las situaciones problemáticas y las construcciones que se propongan." (p.4). Es decir, que el sólo hecho de incluir en alguna propuesta didáctica el uso del software no garantiza que el mismo se utilice para realizar actividad matemática, sino que la tarea propuesta debe propiciar además de la exploración y visualización la posibilidad de elaborar conjeturas.

En este trabajo se utilizará el software de geometría dinámica Geogebra® por ser un software libre diseñado para la enseñanza de la matemática. En particular, este tiene además la posibilidad de incluir ejes cartesianos y posee una vista algebraica que permite introducir ecuaciones y coordenadas directamente.

Las calculadoras simbólicas son software que permiten operar con expresiones algebraicas. Actualmente la versión Geogebra4.2.55.0 incluye la vista algebraica CAS (Computer Algebra System) asociada al Sistema de Computación Algebraica. Con estos software se pueden simplificar, factorizar o expandir expresiones algebraicas, resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones de varias variables en forma exacta o aproximada, calcular límites de funciones, derivadas, integrales, por mencionar sólo algunas de sus herramientas.

Al intentar resolver el sistema de ecuaciones que se requiere en este trabajo en el software Geogebra aparece la leyenda "cálculos cancelados al requerir demasiado tiempo". Por esta razón se optó por trabajar con el software Mathematica 8. El mismo proporciona además la posibilidad de graficar funciones de varias variables.

2.3. Vinculación entre el uso de software y la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

En relación a la actividad matemática que se desarrolla utilizando software geométrico, Acosta Gempeler (2005) plantea la necesidad de reconocer a la geometría dinámica como una herramienta legítima para hacer matemática. El autor propone la geometría experimental como práctica de referencia de la geometría dinámica y menciona algunas nuevas técnicas y tecnologías, en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico, que pueden implementarse como parte de esa práctica. Señala que la geometría dinámica experimental permite emitir conjeturas sobre las propiedades de los objetos geométricos observados en la pantalla y ponerlas a prueba mediante la manipulación y la construcción de objetos auxiliares. Es interesante destacar que las tecnologías propuestas sobre las que se sostienen las nuevas técnicas asociadas a la Geometría Dinámica no son específicamente del campo de las matemáticas, tal como se señalará en la sección siguiente.

Ancochea (2011) estudia las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria. La autora luego de relevar las propuestas de enseñanza de la geometría en el curriculum español y en los libros destinados para la enseñanza en la escuela secundaria afirma que en las tareas propuestas la calculadora sirve como soporte de ejercicios interactivos pero no como instrumento para resolver problemas. Afirma que "El estudio de las praxeologías matemáticas en secundaria se centra esencialmente en el bloque técnico-práctico [T/τ], siendo muy escasa la incidencia del bloque tecnológico-teórico [θ/Θ] sobre la actividad matemática que se realiza efectivamente" (Ancochea, 2011, p.539).

2.3.1Técnicas y tecnologías vinculadas a la geometría dinámica experimental y al uso de CAS.

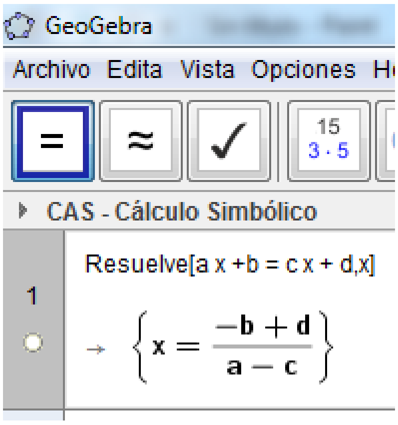
Con un software de geometría dinámica es posible aplicar técnicas de la geometría sintética de un modo más práctico debido a las herramientas de construcción que provee. Sin embargo, la utilización del software introduce nuevas técnicas propias de la posibilidad de explorar y visualizar diferentes construcciones mediante el arrastre. Como señala Acosta Gempeler (2005, p.138) "La geometría dinámica permite retomar la percepción en el trabajo de investigación, asegurando un control teórico de ésta mediante el arrastre. En este sentido, la geometría experimental se diferencia claramente de la geometría formal (axiomático-deductiva) sin estar en oposición con ella." El autor presenta técnicas y tecnologías propias de la geometría dinámica como las que se citan a continuación.

- *El arrastre de exploración* (Acosta Gempeler, 2005): consiste en el arrastre que se efectúa libremente de los diferentes elementos que componen la construcción geométrica con el objetivo de identificar una evidencia visual que pueda ser interpretada como una propiedad geométrica y de este modo permite elaborar conjeturas. La tecnología correspondiente a esta técnica radica en que el software de geometría dinámica permite modificar una construcción de forma continua mediante el arrastre manteniendo las propiedades que se le impusieron por construcción a la figura original. Este es un ejemplo en el que la tecnología no se limita al campo matemático. Entonces las regularidades observadas durante el arrastre de un objeto pueden ser consideradas como una propiedad geométrica del mismo.

- *El arrastre de verificación* (Acosta Gempeler, 2005)*:* consiste en arrastrar un elemento determinado de la construcción geométrica con posterioridad a la elaboración de una conjetura. El arrastre se realiza teniendo en mente el fenómeno visual correspondiente a la propiedad conjeturada, con el fin de verificar si el fenómeno visual producido se corresponde con el comportamiento esperado. La tecnología asociada a esta técnica se sostiene en que el software de geometría dinámica mantiene invariante las propiedades geométricas de la figura durante el arrastre. En consecuencia, si la manifestación visual producida por el arrastre no se corresponde con la esperada, significa que la propiedad conjeturada no es una propiedad de la figura debido a que no satisface al menos una de las propiedades que se impusieron por construcción.

En el mismo sentido anterior, aquí se intenta definir nuevas técnicas relativas al uso de CAS, como las siguientes:

- *Las transformaciones y resoluciones en símbolos*. Los CAS trabajan manipulando clases de objetos, descriptos en forma literal, y no sólo con objetos particulares. la tecnología sobre la que se soporta esta técnica no es exclusivamente matemática, tiene que ver con el desarrollo de potentes componentes de hardware de procesamiento operativo, lenguajes de programación, complejidad algorítmica, etc. Un ejemplo:



- *Resolución "en tiempo real" y graficación "en tiempo real"*. Nuevamente la tecnología sobre la que se soporta lo realizable "en tiempo real" no es exclusivamente matemática, tiene que ver con el desarrollo de potentes componentes de hardware de procesamiento operativo, lenguajes de programación, complejidad algorítmica, etc. Un ejemplo podría ser la resolución en tiempo real de sistemas de ecuaciones, lineales y no lineales, en una o varias variables, con posibilidad de elección de variables dependientes o de parámetros e incorporación de sentencias de transformación de expresiones en otras equivalentes (simplificación, factorización, expansión). La teoría sí es de índole matemática y emerge del tratamiento algebraico de las ecuaciones.

3. Desarrollo matemático de una tarea con aportaciones de Geometría Sintética y de Geometría Analítica

En esta sección se desarrolla una tarea para el último año de una escuela secundaria, de buen nivel académico, o para un curso introductorio de geometría analítica a nivel terciario, que se considera adecuada para vincular los campos presentados antes:

la geometría sintética, la geometría analítica, la geometría dinámica y el CAS. Se supone que el grupo de alumnos al cual va destinado esta tarea tiene buen uso de los software Mathematica ® y Geogebra. Luego, se explicita el desarrollo matemático que implica la resolución y el rol que tienen los softwares en el despliegue de la actividad matemática.

Tarea:

Determinar analíticamente el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia:
$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0.$$

La misma es una variante de la siguiente tarea presentada por Gascón (2007) para la escuela secundaria superior (bachillerato).

> "Buscar las circunferencias que pasan por el punto $(0,0)$ y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$ en el punto $(2,4)$.
>
> a) Escribir el enunciado sintético general.
> b) Resolverlo con regla y compás mediante el patrón de los lugares geométricos.
> c) Utilizar la resolución sintética para resolver la versión cartesiana particular inicial.
> d) Escribir el enunciado cartesiano general (después de elegir un sistema de coordenadas "adecuado")
> e) Resolver la versión cartesiana general.
> f) Concluir con un estudio de casos." (Diapositiva 43)[2]

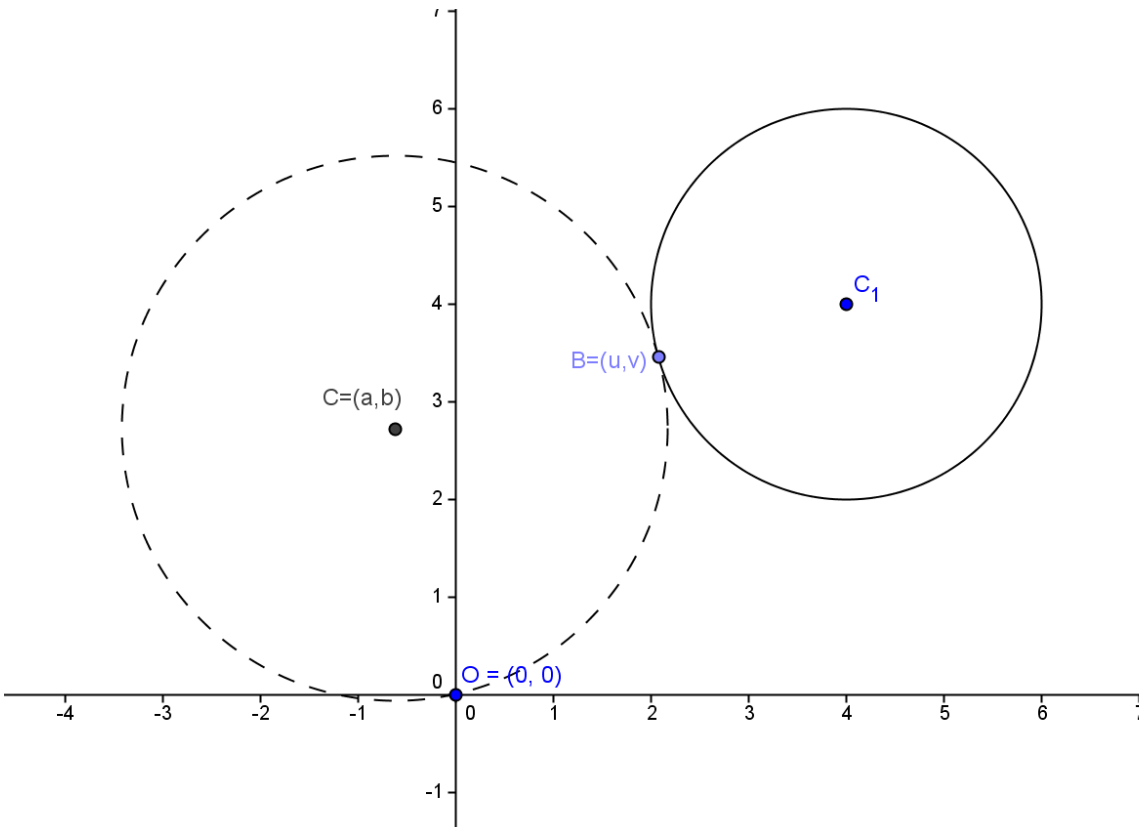
Esta última tarea, presentada de este modo, resulta demasiado directiva de la vinculación pretendida entre el tratamiento sintético y el analítico, de modo que el estudiante podría no notar por sí mismo los alcances y limitaciones de uno u otro abordaje. Tampoco se deja suficientemente libre al uso de sus estrategias el recurrir a las praxeologías de uno u otro campo según conveniencia y necesidad. La adaptación que aquí se presenta consiste en una alteración de la variable didáctica: "pasa por el punto (2,4)". Esta alteración permite trabajar con lugar geométrico y establecer los vínculos entre los tratamientos sintéticos y analíticos de forma menos estructurada.

Este tipo de tareas, como la que aquí se plantea, en las que se pretende evidenciar la complementariedad entre la geometría analítica y la geometría sintética, no se encuentra con frecuencia en libros de introductorios de Geometría Analítica, sino que se presentan tareas parecidas más cerradas y concretas como la siguiente:

"Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1,4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto $(-2,1)$." (Lehmann, 1989, p.110)

A continuación se presenta una representación gráfica de un caso particular de la tarea propuesta y se introduce la notación que se utilizará en el desarrollo del trabajo:

[2] Extraído de una diapositiva de la ponencia para la Escuela de Invierno, ver referencia.



Notación:

- $B = (u, v)$ es el punto de tangencia.
- $C = (a, b)$ representa los centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia dada en (u, v).
- C_1 es el centro de la circunferencia dada.

3.1. Abordaje desde la geometría analítica mediante el uso del Mathematica®.

Las técnicas de los lugares geométricos y de análisis-síntesis indican que el problema consiste en caracterizar el centro de la circunferencia buscada como intersección del lugar geométrico de los puntos que equidistan de O y de B y de puntos colineales a C_1B. Luego, la técnica de planteo de ecuaciones permitirá describir simbólicamente los dos lugares geométricos previamente identificados.

Sea $B = (u, v)$ un punto que pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$. El centro de la circunferencia estará en la mediatriz[3] del segmento OB. Sea $P = (x, y)$ un punto que equidista de los puntos O y B. Entonces:

$$|\overline{PO}| = |\overline{PB}|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

[3] Si bien la mediatriz del segmento OB se podría obtener como la recta perpendicular a OB que pasa por su punto medio, se decidió utilizar la definición que la caracteriza como un lugar geométrico para mostrar que una tecnología de la geometría sintética se puede asociar a una técnica de la geometría analítica.

$$x^2 + y^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2xu + u^2 + y^2 - 2yv + v^2$$

$$-2xu - 2yv + u^2 + v^2 = 0$$

Con el software Mathematica la sentencia que se utilizaría para construir la ecuación sería:

```
In[3]:= FullSimplify[√(x² + y²) == √((x - u)² + (y - v)²)]

Out[3]= u² + v² - 2 v y == 2 u x
```

Esta es la ecuación que satisfacen los puntos (x, y) que equidistan de O y de B.

Las técnicas de las transformaciones algebraicas y de igualación de expresiones algebraicas permiten determinar el centro de la circunferencia dada. Sea $C_1 = (x_0, y_0)$ el centro de la circunferencia dada: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Luego $-2xx_0 = -8x \Longrightarrow x_0 = 4$,

$-2yy_0 = -8y \Rightarrow y_0 = 4$,

Entonces $C_1 = (4; 4)$

El centro de la circunferencia buscada debe ser colineal a C_1B para que se cumpla la condición de tangencia (ver Praxeología Matemática en sección 4). Luego, la técnica de construcción de ecuaciones provee la descripción simbólica de la recta que pasa por los puntos $C_1 = (4; 4)$ y $B = (u, v)$ a saber:

$$y = \frac{4 - v}{4 - u}(x - u) + v$$

Observar que esta ecuación no tiene sentido para la recta vertical $x = 4$, que se obtiene cuando el punto de tangencia y el centro de la circunferencia dada tienen la misma abscisa. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos C_1 y B es

$$\begin{cases} y = \dfrac{4 - v}{4 - u}(x - u) + v & si \quad u \neq 4 \\ x = 4 & si \quad u = 4 \end{cases}$$

En suma, las técnicas de planteo de ecuaciones de lugares geométricos, de las transformaciones algebraicas y de planteo de la intersección entre dos objetos geométricos, presentadas por ecuaciones, mediante un sistema de ecuaciones permiten asegurar que el centro de la circunferencia buscada $C = (a, b)$ se encuentra como solución del sistema de ecuaciones de la mediatriz de OB, la recta que contiene a B y C_1 y la circunferencia $\mathcal{C}$. Para el caso de $u = 4$ verifica que

$$\begin{cases} -16 - 2bv + v^2 = 0 \\ a = 4 \\ (v-4)^2 = 4 \end{cases}$$

Y para $u \neq 4$ se satisface

$$\begin{cases} -2au - 2bv + u^2 + v^2 = 0 \\ b = \dfrac{4-v}{4-u}(a-u) + v \\ (u-4)^2 + (v-4)^2 = 4 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones que componen el sistema se puede obtener la expresión de las coordenadas del punto de tangencia $B = (u, v)$ en función de las coordenadas del centro de la circunferencia a construir, es decir

$$\begin{cases} u = f(a, b) \\ v = g(a, b) \end{cases}$$

A partir de remplazar las expresiones $u = f(a, b)$ y $v = g(a, b)$ en la tercera ecuación, se aplica la técnica de sustitución y queda una ecuación que condiciona las variables a y b. Entonces, todo punto del lugar geométrico buscado debería satisfacer esta última ecuación.

Para realizar los pasos descriptos se puede utilizar un CAS, en este trabajo se utiliza el software Mathematica 8.0. Si bien el sistema de ecuaciones planteado previamente se puede resolver de forma manual, se utiliza el software porque permite resolver instantáneamente un sistema de ecuaciones no muy simple. Además es posible indicar cuáles son los parámetros y cuáles son las variables a considerar: en este caso arrojará fórmulas algebraicas para las variables u y v expresadas en función de los parámetros a y b. Con una pequeña modificación en la sentencia ingresada en el software se podrían obtener otras expresiones algebraicas en función de otros parámetros por ejemplo las expresiones de las variables a y b en función de los parámetros u y v. Otra ventaja de resolver el sistema de ecuaciones con el software es que es posible aplicar transformaciones a las expresiones que conforman el conjunto solución, tales como simplificaciones o expansiones. Estas herramientas abren la posibilidad de desplegar expresiones algebraicas equivalentes y seleccionar aquella que resulte más apropiada para interpretarla.

Para determinar analíticamente el lugar geométrico buscado se requiere aplicar la técnica de caracterización de una curva por medio de una expresión simbólica: Se espera obtener una ecuación que describa el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que satisfacen el enunciado a partir del sistema de ecuaciones previamente planteado. El caso $u = 4$ es trivial ya que

$$\begin{cases} -16 - 2bv + v^2 = 0 \\ a = 4 \\ (v-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$B = (u, v) = (4{,}6)$, $C = (a, b) = \left(4, \frac{5}{3}\right)$ y para

$B = (u, v) = (4{,}2)$, $C = (a, b) = (4, -3)$

Si el punto de tangencia y el centro de la circunferencia dada no tienen la misma abscisa, es decir $u \neq 4$, se tiene que

$$\begin{cases} -2au - 2bv + u^2 + v^2 = 0 \\ b = \dfrac{4-v}{4-u}(a-u) + v \\ (u-4)^2 + (v-4)^2 = 4 \end{cases}$$

En este caso, para lograr el objetivo se introduce en la calculadora el sistema de dos ecuaciones $\begin{cases} -2au - 2bv + u^2 + v^2 = 0 \\ b = \frac{4-v}{4-u}(a-u) + v \end{cases}$ para obtener $\begin{cases} u = f(a,b) \\ v = g(a,b) \end{cases}$ como se muestra a continuación

```
In[4]:= sol = Solve[-2 a*u - 2 b*v + u^2 + v^2 == 0 && b == (4 - v)*(a - u) / (4 - u) + v , {u, v}] // FullSimplify
```

Out[4]=

$$\left\{\left\{u \to a + \frac{(-4+a)^2\,(a^2+b^2)}{\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}},\right.\right.$$
$$v \to \frac{1}{(-4+a)\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)}\left(-4\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}\,+\right.$$
$$\left.\left. b\left(a\,(64+(-12+a)\,a)+32\,(-4+b)-8\,a\,b+(-4+a)\,b^2+\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}\right)\right)\right\},$$
$$\left\{u \to a - \frac{(-4+a)^2\,(a^2+b^2)}{\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}},\ v \to \frac{1}{(-4+a)\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)}\right.$$
$$\left(4\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}\,+\right.$$
$$\left.\left.\left. b\left(a\,(64+(-12+a)\,a)+32\,(-4+b)-8\,a\,b+(-4+a)\,b^2-\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}\right)\right)\right\}\right\}$$

Luego, se remplazan las expresiones $u = f(a,b)$ y $v = g(a,b)$ en la tercera ecuación

```
In[5]:= sol2 = (u - 4) ^2 + (v - 4) ^2 == 4 /. sol // FullSimplify
```

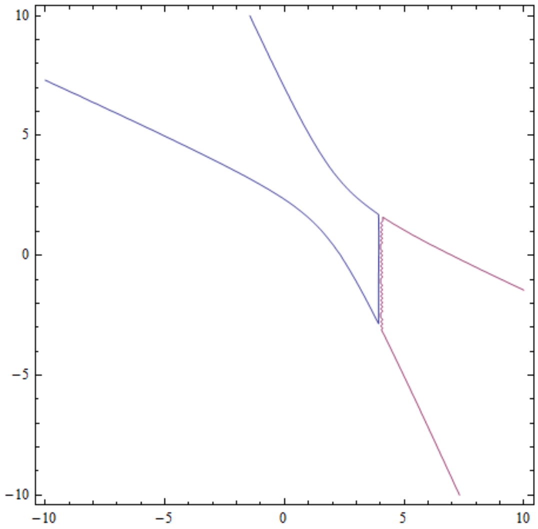
Out[5]=

$$\left\{14+(-4+a)\,a+(-4+b)\,b+\frac{\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}}{-4+a} == 0,\right.$$
$$\left. 14+(-4+a)\,a+(-4+b)\,b == \frac{\sqrt{(-4+a)^2\,(32+(-8+a)\,a+(-8+b)\,b)\,(a^2+b^2)}}{-4+a}\right\}$$

De lo obtenido, se ve que aparecen dos ecuaciones. Los puntos buscados satisfacen alguna de ellas. Las ecuaciones obtenidas no exhiben la expresión de una curva conocida. Pero si se grafica la expresión simbólica en un sistema de ejes cartesianos con la intención de observar una representación del conjunto solución obtenido, es posible elaborar alguna conjetura.

In[6]:= ContourPlot[{14 + (-4 + a) a + (-4 + b) b + $\frac{\sqrt{(-4 + a)\text{^}2\ (32 + (-8 + a)\ a + (-8 + b)\ b)\ (a\text{^}2 + b\text{^}2)}}{-4 + a}$ == 0,
14 + (-4 + a) a + (-4 + b) b == $\frac{\sqrt{(-4 + a)^2\ (32 + (-8 + a)\ a + (-8 + b)\ b)\ (a^2 + b^2)}}{-4 + a}$}, {a, -10, 10}, {b, -10, 10}]

Out[6]=



En cada una de las ecuaciones previas que se obtuvieron con el uso del software, se estudia el dominio en función de a. Observar que todo a debe satisfacer que

$$(-4 + a)^2(32 + (-8 + a)a + (-8 + b)b)(a^2 + b^2) \geq 0$$

Con Mathematica la sentencia a utilizar sería:

In[6]:= Reduce[$(-4 + a)^2\ (32 + (-8 + a)\ a + (-8 + b)\ b)\ (a^2 + b^2)$ >= 0, a]

Out[6]= (b | a) ∈ Reals

Es decir que el dominio de las ecuaciones es $a \in R$

Para explicar qué sucede con la situación geométrica en relación con el gráfico obtenido, se analiza la continuidad de las funciones cuyas fórmulas son las expresiones algebraicas obtenidas en $a = 4$. Con el uso de CAS este estudio se puede realizar como se muestra a continuación:

```
In[1]:= Limit[14 + (-4 + a) a + (-4 + b) b + Sqrt[(-4 + a)^2 (32 + (-8 + a) a + (-8 + b) b) (a^2 + b^2)]/(-4 + a), a → 4]
```

$$\text{Out[1]= } 14 - 4\,b + b^2 + \sqrt{(-4 + b)^2\,(16 + b^2)}$$

```
In[2]:= Solve[14 - 4 b + b^2 + Sqrt[(-4 + b)^2 (16 + b^2)] == 0, b]
```

```
Out[2]= {}
```

```
In[3]:= Limit[14 + (-4 + a) a + (-4 + b) b - Sqrt[(-4 + a)^2 (32 + (-8 + a) a + (-8 + b) b) (a^2 + b^2)]/(-4 + a), a → 4]
```

$$\text{Out[3]= } 14 - 4\,b + b^2 - \sqrt{(-4 + b)^2\,(16 + b^2)}$$

```
In[4]:= Solve[ 14 - 4 b + b^2 - Sqrt[(-4 + b)^2 (16 + b^2)] == 0, b]
```

$$\text{Out[4]= } \left\{\{b \to -3\},\ \left\{b \to \frac{5}{3}\right\}\right\}$$

En el primer caso, la ecuación $14 - 4b + b^2 + \sqrt{(-4+b)^2(16+b^2)} = 0$ no tiene solución ya que $14 - 4b + b^2 = (b-2)^2 + 10 > 0 \ \ \forall\, b \in R$, entonces

$$14 - 4b + b^2 + \sqrt{(-4+b)^2(16+b^2)} > 0 \ \ \forall\, b \in R$$

En el otro caso, los resultados obtenidos coinciden con los puntos previamente calculados (ver p.22), es decir que la curva es continua:

$C = (a, b) = \left(4, \frac{5}{3}\right)$ y $C = (a, b) = (4, -3)$

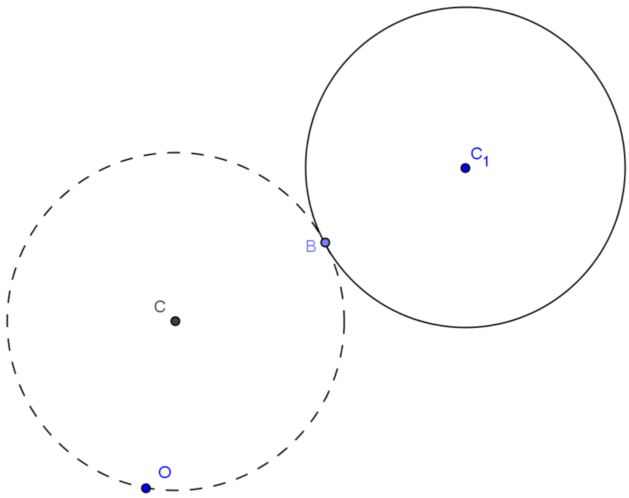
La figura obtenida corresponde al lugar geométrico de los centros de las circunferencias que satisfacen las condiciones del enunciado. A partir de esta visualización tal vez sea posible conjeturar que el lugar geométrico es una hipérbola, pero las ecuaciones obtenidas no permiten fundamentar esta presunción. Es decir que las técnicas analíticas utilizadas de esta manera, que es una de las maneras que aprovecha las técnicas de CAS mencionadas en la sección 2.3.1 y que es un abordaje posible para los usuarios habituados al Mathematica ®, no conducen a caracterizar la curva del lugar geométrico buscado como una hipérbola.

3.2. Abordaje desde la geometría sintética mediante el uso de Geogebra.

La tarea propuesta: *Determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia:* $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$. Puede enunciarse de un modo más general en la geometría sintética como

Determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada y pasan por un punto O.

Llamaremos C_2 a la circunferencia a construir con centro C. Sea B el punto de tangencia entre la circunferencia dada y C_2. Utilizando la técnica de análisis- síntesis partimos de considerar el problema resuelto y observar las condiciones que satisface el centro C. El punto O debe pertenecer a C_2 por ser una condición impuesta en el enunciado y también el punto B debe estar contenido en $\mathcal{C}_2$ por ser el punto de tangencia entre ambas circunferencias. Entonces, los puntos O y B equidistan de C. Por otro lado, dado que las circunferencias son tangentes en el punto B, los centros de ambas circunferencias y el punto B están alineados. A partir de este análisis deducimos que el centro C se encuentra en la intersección de la mediatriz del segmento que contiene al punto de tangencia y al punto dado, OB, con la recta que contiene al punto de tangencia y al centro de la circunferencia dada, BC_1.

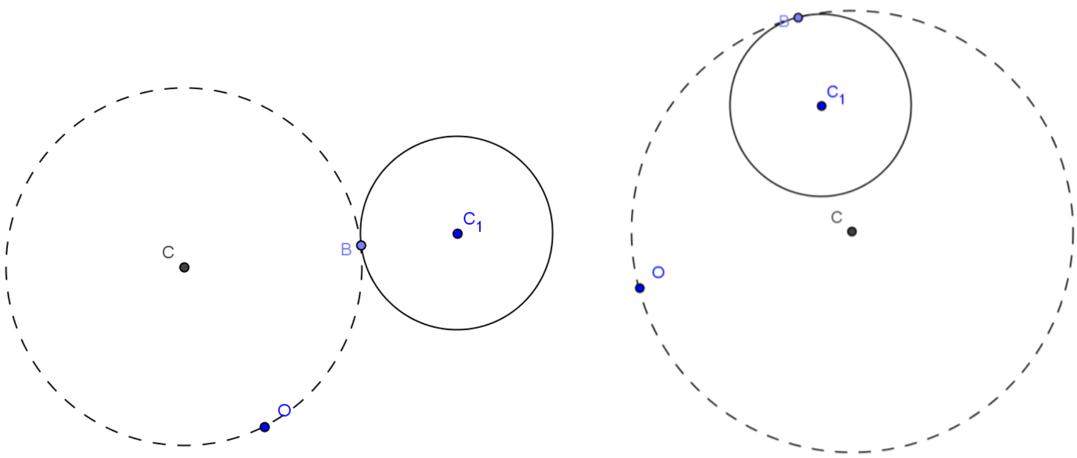


Utilizando el software Geogebra es posible aplicar algunas técnicas que permitirán realizar un estudio matemático de diferentes situaciones. La técnica del arrastre por exploración junto con la técnica de análisis y de la razón hacen posible distinguir tres casos a analizar.

3.3. Exploración de casos posibles

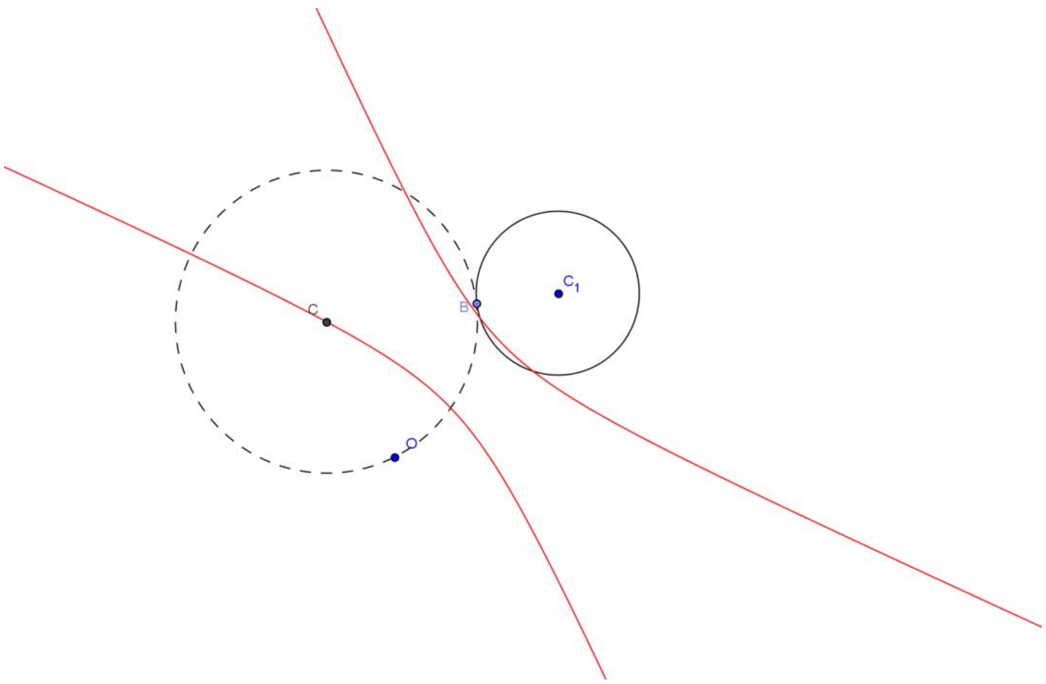
***Caso 1**: el radio de la circunferencia dada es menor a la distancia entre el punto dado y el centro de la circunferencia, es decir $r < |OC_1|$*

Utilizando la técnica de arrastre por exploración es posible visualizar que la circunferencia dada podría quedar en el interior o en el exterior de la circunferencia a construir.



Con la utilización de un software de geometría dinámica es posible visualizar el lugar geométrico del centro de la circunferencia C_2 al modificar el punto de tangencia. En este trabajo se utilizó el software Geogebra 4.2.55.0

Para realizar esta construcción se crean los puntos C_1 y A. Se traza la circunferencia con centro en C_1 que pasa por A con la herramienta “circunferencia dado su centro y uno de sus puntos” y se marca B, un punto perteneciente a la circunferencia. Se crea el punto O, exterior a la circunferencia y se construye la mediatriz del segmento BO con la herramienta “Mediatriz”. Se determina el punto C como la intersección entre la mediatriz de los puntos B y O y la recta que contiene a los puntos B y C_1. El punto C es el centro de la circunferencia tangente a la dada que se puede construir con el comando “circunferencia dado su centro y uno de sus puntos” fijando el centro en C y que pasa por el punto B. Luego con la herramienta “Lugar Geométrico” se selecciona primero el punto del cual se quiere conocer su lugar geométrico, en este caso C y luego el punto deslizable, en este caso B. En la vista gráfica se observa la siguiente configuración:



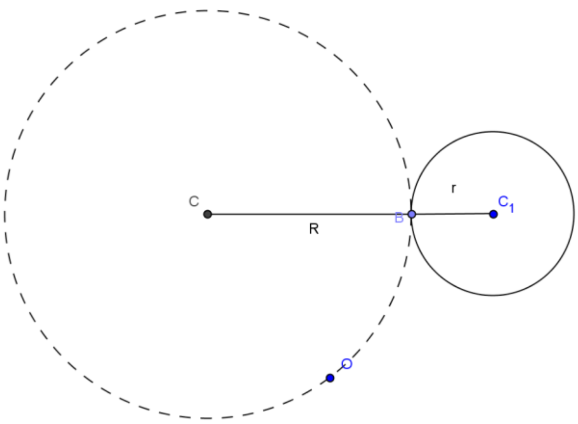
El lugar geométrico del centro de las circunferencias tangentes a la circunferencia dada que pasan por el punto O es una curva. A partir de esta visualización es posible conjeturar que la curva mencionada es una hipérbola. Las herramientas del software permiten continuar la exploración con el fin de precisar la conjetura. Una de las alternativas posibles para esto consiste en construir una cónica a partir de cinco puntos por lo que se podrían identificar otros cuatro puntos sobre el lugar geométrico y luego utilizar la herramienta “Cónica dados cincos de sus puntos”. Posteriormente, con el comando “Foco [<Cónica>]” el software muestra los focos y sus respectivas coordenadas. A partir de esta nueva visualización es posible precisar la conjetura anterior expresando que la curva del lugar geométrico buscado puede corresponder a una hipérbola con focos en el centro de la circunferencia dada C y el punto dado O. En esta instancia, con el fin de precisar la conjetura se podría recurrir a la técnica de enriquecer la figura al trazar la recta que pasa por el centro de la circunferencia dada y el punto dado, es decir la recta que contiene a los puntos C_1 y O, y la recta perpendicular a ella que pasa por el punto medio de OC_1. Esta visualización permite conjeturar que las rectas previamente construidas pueden corresponder a los ejes intrínsecos de la curva que parece ser una hipérbola, y que los puntos O y C_1 podrían ser los focos.

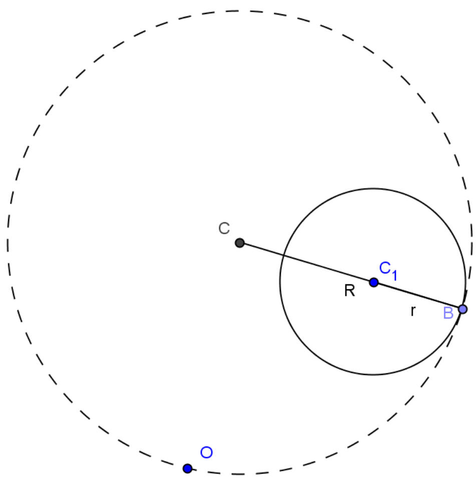
El software Geogebra posee una herramienta que construye una hipérbola a partir de los focos y un punto de la hipérbola. Entonces otra alternativa para la exploración podría ser construir la hipérbola con focos en el centro de la circunferencia dada y el punto dado que pase por el punto C. La hipérbola construida muestra el comportamiento esperado de acuerdo con la conjetura formulada. Luego, la técnica de arrastre de verificación resultará pertinente para determinar si al desplazar el punto de tangencia la curva del lugar geométrico y de la hipérbola resultan diferentes. Lo que ocurre es que visualmente ambas curvas coinciden, sería una "validación gráfica", pero esto no es suficiente para confirmar la conjetura sino que resulta necesario obtener una prueba más rigurosa que la percepción visual.

Para validar matemáticamente esta conjetura es necesario demostrar que se satisface la condición métrica que para cualquier punto C de la curva el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es constante, positiva y menor a la distancia entre los focos. Consideramos los puntos O y C_1, como puntos fijos, y deducimos que para los distintos centros C se cumple

$$\big||OC| - |C_1C|\big| = k, k\ constante \quad \text{y} \quad k < |OC_1|$$

Sea r el radio de la circunferencia dada y R el radio de la circunferencia a construir.





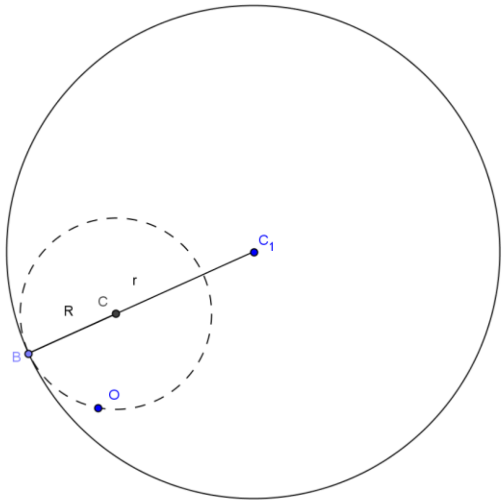
$$|OC| = R$$
$$|C_1C| = R + r$$
$$\big||OC| - |C_1C|\big| = |R - R - r| = r$$

$$|OC| = R$$
$$|C_1C| = R - r$$
$$\big||OC| - |C_1C|\big| = |R - R + r| = r$$

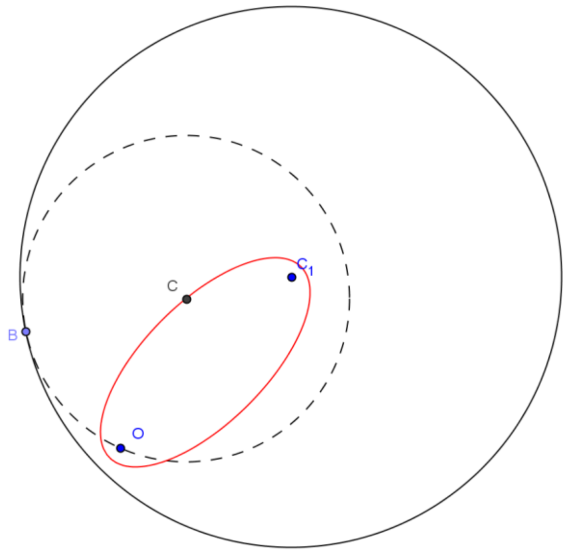
Entonces el tratamiento sintético muestra que se satisfacen las condiciones métricas con contante $k = r$ y esto demuestra que la curva es una hipérbola. Es decir, el lugar geométrico de los centros de una circunferencia tangente a una circunferencia dada que pasan por un punto dado, tales que la distancia de dicho punto al centro de la circunferencia dada es mayor al radio de la circunferencia, es una hipérbola con foco en el punto dado y el centro de la circunferencia dada.

Caso 2: *el radio de la circunferencia dada es mayor a la distancia entre el punto dado y el centro de la circunferencia.* $r > |OC_1|$

Utilizando un software de geometría dinámica es posible observar que al deslizar el punto de tangencia, la circunferencia C_2 es tangente interior a la circunferencia dada (es decir $R < r$)



Si se activa el rastro del centro de la circunferencia construida al deslizar el punto de tangencia, esta técnica del arrastre de exploración proporciona una aproximación a la curva correspondiente al lugar buscado. A primera vista se descarta que en este caso el lugar geométrico sea una hipérbola. Utilizando la herramienta de construcción de lugar geométrico, el software permite visualizar la curva que dibuja el centro de la circunferencia C_2 al desplazar el punto de tangencia. A partir de esta visualización se puede conjeturar que dicha curva podría corresponder a una elipse.



Análogamente al procedimiento presentado para el primer caso, a partir de cinco puntos se podría construir con el Geogebra la cónica correspondiente y utilizar el comando foco para precisar la conjetura. Más concretamente, esta representación gráfica permite conjeturar que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una dada que pasan por un punto dado corresponde a una elipse con focos en el punto dado y el centro de la circunferencia dada.

El software Geogebra también tiene una herramienta que confecciona una elipse a partir de los focos y un punto de la misma. Entonces, es posible proceder de forma análoga a la presentada en el primer caso: se construye la elipse y luego se apela a la técnica del arrastre por verificación. Nuevamente el lugar geométrico y la elipse parecen visualmente una misma curva, motivo por el cual resulta necesaria una prueba.

Para verificar la validez de esta conjetura es preciso considerar las condiciones métricas de una elipse, es decir que para cualquier punto C de la curva, la suma de las distancias de C a los focos es igual a una constante mayor a la distancia entre los focos.

$$|OC| + |C_1C| = k \qquad \text{y} \qquad k > |OC_1| \qquad k \text{ constante.}$$

$$|OC| = R,\ |C_1C| = r - R, \text{ entonces}$$

$$|OC| + |C_1C| = R + r - R = r$$

$$r > |OC_1|$$

Entonces, se satisfacen las condiciones métricas que permiten asegurar que la curva es una elipse. En consecuencia, el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una dada que pasan por un punto dado tales que la distancia de dicho punto al centro de la circunferencia dada es menor al radio de la circunferencia es una elipse con foco en el punto dado y el centro de la circunferencia dada.

Caso 3: *el radio de la circunferencia dada es igual a la distancia entre el punto dado y el centro de la circunferencia.* $r = |OC_1|$

Este caso es trivial, pues si la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto dado es igual a un radio, el punto dado pertenece a la circunferencia y entonces no es posible construir la circunferencia tangente.

3.4. Vínculo entre geometría sintética y geometría analítica

Previamente se mostró que para *determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia:* $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$, el uso de sólo técnicas analíticas desde el inicio, no permitían describir dicho lugar geométrico por medio de una ecuación. A partir del abordaje de la geometría sintética y del estudio de casos, es posible abordar el problema y describir analíticamente, mediante una sola ecuación, el lugar geométrico en cuestión.

Sea C_1 el centro de la circunferencia dada: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Luego: $-2xx_0 = -8x \Longrightarrow x_0 = 4$,

$-2yy_0 = -8y \Rightarrow y_0 = 4$,

Entonces $C_1 = (4; 4)$ y $r = 2$

El punto dado es $O = (0,0)$. Luego, la distancia entre el punto y el centro de la circunferencia es $|OC_1| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ y esta distancia es mayor al radio de la circunferencia dada, por lo tanto se encuentra en el primer caso estudiado. Entonces a partir del planteo de las condiciones métricas de la hipérbola es posible deducir la ecuación de la misma, como se desarrolla a continuación.

Sea $C = (x, y)$ un punto sobre la hipérbola de focos $O = (0; 0)$ y $C_1 = (4; 4)$

Entonces por definición de hipérbola el punto C debe satisfacer la condición geométrica que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a 1os focos es una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos:

$\big||OC| - |C_1C|\big| = r$ y $r = 2 < \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

$|OC| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $|C_1C| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$. Entonces

$$\big||OC| - |C_1C|\big| = r$$

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}\right| = r$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} + (x-4)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (x-4)^2 + (y-4)^2 - r^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32 - r^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$$

$$2(x^2 + y^2) - 8(x + y - 4) - r^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$$

$$2\big((x^2 + y^2) - 4(x + y - 4)\big) - r^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$4\big((x^2 + y^2) - 4(x + y - 4)\big)^2 - 4r^2\big((x^2 + y^2) - 4(x + y - 4)\big) + r^4$$
$$= 4(x^2 + y^2)((x-4)^2 + (y-4)^2)$$

Sacando factor común:

$$\big((x^2 + y^2) - 4(x + y - 4)\big)\big((x^2 + y^2) - 4(x + y - 4) - r^2\big) + \frac{r^4}{4} = (x^2 + y^2)((x-4)^2 + (y-4)^2)$$

$$16x^2 + 16y^2 + 32xy - 128x - 128y + 256 - r^2x^2 - r^2y^2 + 4xr^2 + 4yr^2 - 16r^2 + \frac{r^4}{4} = 0$$

$$(16 - r^2)x^2 + (16 - r^2)y^2 + 32xy - (128 - 4r^2)x - (128 - 4r^2)y + 256 - 16r^2 + \frac{r^4}{4} = 0$$

En particular para $r = 2$

$$12 + 12y^2 + 32xy - 112x - 112y + 196 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 8xy - 28x - 28y + 49 = 0$$

Al retomar el estudio de casos posibles se pudo clasificar esta tarea en particular en el caso 1 y anticipar que el lugar geométrico buscado sería una hipérbola. A partir de esta anticipación y de considerar las condiciones métricas, finalmente se logró una descripción el mencionado lugar geométrico por medio de una ecuación. Esto muestra la complementariedad entre las técnicas sintéticas y analíticas.

4. Praxeología Matemática

A continuación se explicita la Organización Matemática que se desarrolla a partir de las tareas propuestas.

Tarea		
Determinar analíticamente el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia: $\mathbf{x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0}$.		
Técnica	**Tecnología**	**Teoría**
a) El centro de una circunferencia que pasa por dos puntos, el origen y el de tangencia en este caso $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, pertenece a la mediatriz del segmento por dichos puntos. La mediatriz de un segmento AB es una recta cuyos puntos $\boldsymbol{X}$, satisfacen $\sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}} = \sqrt{(\boldsymbol{x - u})^2 + (\boldsymbol{y - v})^2}$ b) Dados una circunferencia $\boldsymbol{C}$, su centro $\boldsymbol{C_1}$ y un punto de la misma B, la tangencia buscada entre $\boldsymbol{C}$ y una nueva circunferencia, de centro $\boldsymbol{C}$, en $\boldsymbol{B}$, se logra haciendo que $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ sean colineales. Se determina la ecuación de la recta entre $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{B}$, si la nueva circunferencia es tangente a $\boldsymbol{C}$, entonces las coordenadas de C deben satisfacer la ecuación planteada.	Una circunferencia es el lugar geométrico del plano tales que sus puntos equidistan de un punto fijo O. Luego O está a igual distancia de cada uno de los puntos de la circunferencia por lo que pertenece a la mediatriz de cualquier segmento determinado por un par de puntos de la misma. Esto se debe a que la mediatriz de un segmento de extremos A y B es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen $dist(A, X) = dist(B, X)$. Dos circunferencias tangentes en un punto B, de modo que una de ellas pase por un punto exterior a la otra, cumplen que la distancia entre sus centros es igual a la suma entre sus radios.	Dos circunferencias son tangentes exteriores cuando la suma de sus radios es igual a la distancia entre los centros. Si el punto de tangencia y los centros de las dos circunferencias no se encuentran alineados, por desigualdad triangular, la suma de los radios es mayor que la distancia entre los centros. Luego, los centros de dos circunferencias tangentes y el punto de tangencia son colineales.
Dada una ecuación completa de una circunferencia, de coeficientes $\mathbf{1}$ para $\boldsymbol{x^2}$ e $\boldsymbol{y^2}$, se iguala término a término con el formato general: $\boldsymbol{x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - r^2 = 0}$. Para obtener el centro $\boldsymbol{C_1} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ de la circunferencia dada.	Equivalencia entre las ecuaciones canónica y la desarrollada de una circunferencia por medio de propiedades algebraicas (distributiva, asociativa, etc.) y unicidad del polinomio mónico.	
Planteo y resolución de un sistema no lineal dado por las siguientes condiciones: a) El centro de la circunferencia buscada equidista de los puntos $\boldsymbol{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{B}$ pertenecientes a la circunferencia dada. Entonces el centro de la circunferencia buscada satisface la ecuación de la mediatriz del segmento $\boldsymbol{OB}$. b) El centro de la circunferencia tangente a $\boldsymbol{C}$ verifica la ecuación de la recta por $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{B}$.	Método de resolución de sistema lineal en forma simbólica y de sustitución en la tercera ecuación no lineal.	Cuando una figura geométrica contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen un determinado conjunto de ecuaciones y, recíprocamente, sólo contiene puntos que lo verifican, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos. Esto permite asociación entre curvas del plano y

c) Ecuación de la circunferencia a la que pertenece $\boldsymbol{B}$.		ecuaciones en dos variables.
Resoluciones en símbolos usando CAS del sistema de ecuaciones planteado previamente y construcción del gráfico que representa la solución.	Potentes componentes de hardware de procesamiento operativo, lenguajes de programación, complejidad algorítmica, etc.	Tratamiento algebraico de las ecuaciones.

Tarea		
Determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada y pasan por un punto O		
Técnica	**Tecnología**	**Teoría**
Análisis- síntesis. Partimos de considerar el problema resuelto y observar las condiciones que satisface el centro $\boldsymbol{C}$ de la circunferencia $\boldsymbol{C_2}$ a construir: a) Construcción de la circunferencia que contiene a $\boldsymbol{O}$ y al punto de tangencia $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{O}$ debe pertenecer a $\boldsymbol{C_2}$ por condición del enunciado. $\boldsymbol{B}$ debe pertenecer a $\boldsymbol{C_2}$ por ser el punto de tangencia entre ambas circunferencias. Entonces, $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{B}$ equidistan de $\boldsymbol{C}$. b) Construcción de la circunferencia tangente en $\boldsymbol{B}$: los centros de ambas circunferencias y el punto $\boldsymbol{B}$ están alineados. A partir de este análisis deducimos que el centro $\boldsymbol{C}$ se encuentra en la intersección de la mediatriz del segmento que contiene al punto de tangencia y al punto dado, $\boldsymbol{OB}$, con la recta que contiene al punto de tangencia y al centro de la circunferencia dada.	Una circunferencia es el lugar geométrico del plano tal que sus puntos equidistan de un punto fijo C. Como O y B pertenecen a la misma circunferencia, los puntos equidistan de C. El lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de O y de B es una recta que se llama mediatriz. Luego C se encuentra en la mediatriz del segmento determinado por los puntos O y B. Dos circunferencias tangentes en un punto B satisfacen alguna de las siguientes condiciones: a) La distancia entre los centros es igual a la suma de los radios, entonces son circunferencias tangentes exteriores b) La distancia entre los centros es igual a la resta de los radios, entonces son circunferencias tangentes interiores	En el caso de circunferencias tangentes exteriores, si el punto de tangencia y los centros de las dos circunferencias no se encuentran alineados, por desigualdad triangular, la suma de los radios es mayor que la distancia entre los centros. Esto contradice la condición de tangencia. Luego, los centros de dos circunferencias tangentes y el punto de tangencia son colineales. Si dos circunferencias son tangentes interiores y si el punto de tangencia y ambos centros de circunferencia no están alineados por desigualdad triangular, la suma de la distancia entre los centros, d, y el radio menor, r, es mayor que el radio mayor, R: $d + r > R$, Pero entonces, la distancia entre los centros es mayor que la resta de los radios. Esto contradice la condición de tangencia. Luego, el punto de tangencia y los centros de las circunferencias están alineados.
Determinación del lugar geométrico. Construcción de los puntos que satisfacen simultáneamente todas las condiciones como intersección de los siguientes lugares geométricos: a) Puntos que equidistan del punto de tangencia $\boldsymbol{B}$ y del punto dado $\boldsymbol{O}$ $\Rightarrow$ Mediatriz de $\boldsymbol{OB}$. b) Puntos colineales al punto de tangencia $\boldsymbol{B}$ y al centro de la circunferencia dada $\boldsymbol{C_1}$ $\Rightarrow$ Recta que contiene los puntos $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{B}$.	Los puntos solución del problema serán aquellos que satisfacen todas las condiciones es decir que se encuentran en la intersección de los lugares geométricos previamente identificados.	Cuando una figura geométrica contiene todos los puntos que satisfacen una determinada propiedad y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la verifican, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos. Es decir, las condiciones "tener la propiedad" y "pertenecer al lugar" son equivalentes.

Arrastre de exploración: a) Consiste en arrastrar el punto de tangencia para observar el lugar geométrico que describen los centros de las circunferencia tangentes construidas. b) El arrastre del punto $\boldsymbol{O}$ por el que pasa la circunferencia para observar el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia, $\boldsymbol{C}$, en función de la posición relativa del punto $\boldsymbol{O}$ con la circunferencia original.	El centro de la circunferencia tangente se determina por intersección de los puntos que equidistan del punto de tangencia y el punto dado O con los puntos colineales al punto de tangencia y el centro de la circunferencia original. Para cada punto de tangencia es posible construir una circunferencia tangente que verifique las condiciones previas. Por lo tanto al modificar el punto de tangencia, se obtienen las respectivas circunferencias tangentes con sus correspondientes centros.	El software de geometría dinámica permite modificar una construcción de forma continua mediante el arrastre manteniendo las propiedades que se le impusieron por construcción a la figura original
Enriquecer la figura: - Se agrega el trazo de lugar geométrico buscado - Se marcan otros 4 puntos sobre el lugar geométrico recientemente construido para dibujar la cónica que pasa por 5 puntos. - Se trazan las rectas que podrían corresponder a los ejes intrínsecos de la curva.	Todos los puntos que satisfacen la condición de ser centros de una circunferencia tangente a una dada que pasan por un punto fijo determinan un lugar geométrico. Una cónica está determinada si se conocen las coordenadas de cinco cualesquiera de sus puntos.	Al agregar elementos al dibujo, cambia la interpretación no consciente que efectúa el cerebro, posibilitando la identificación de otras propiedades
Arrastre de verificación visual: Construcción de la cónica conjeturada (hipérbola o elipse) que tiene foco en el centro de la circunferencia dada, $\boldsymbol{C_1}$, y el punto dado, O, que pasa por el punto $\boldsymbol{C}$. Arrastrar el punto de tangencia para observar si el lugar geométrico que describe $\boldsymbol{C}$ coincide con la cónica construida.	A partir de los focos y de un punto es posible construir una hipérbola o una elipse según el caso. Si al desplazar el punto de tangencia, el punto C no describe un lugar que coincide con la cónica previamente graficada, entonces la conjetura es refutada. En caso contrario, la visualización no es suficiente para asegurar las características de la curva.	El software de geometría dinámica mantiene invariante las propiedades geométricas de la figura durante el arrastre.
Planteo de las propiedades métricas de la hipérbola y de la elipse para validar la conjetura.	Apelando a la lógica, si se prueba por medio de una cadena deductiva que para cualquier punto trazado de acuerdo a las condiciones dadas, se satisfacen las condiciones métricas de la cónica propuesta, la conjetura queda demostrada.	Condición métrica para la hipérbola: para cualquier punto C de la curva el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es constante, positiva y menor a la distancia entre los focos. Condición métrica de una elipse: para cualquier punto C de la curva, la suma de las distancias de C a los focos es igual a una constante mayor a la distancia entre los focos.

5. Análisis didáctico.

5.1 Saberes previos supuestos para realizar la tarea.

Para afrontar la tarea propuesta se requiere poner en juego conocimientos como las condiciones para construir circunferencias tangentes, aplicación de propiedades básicas (distributiva, asociativa) y completamiento de cuadrados para transformar expresiones algebraicas, planteo de sistemas de ecuaciones, propiedades métricas que definen la elipse y la hipérbola como lugares geométricos del plano, entre otros. Se asume además que los estudiantes conocen y utilizaron previamente los softwares Mathematica y Geogebra. La tarea se podría abordar en forma individual o en parejas con el fin de favorecer en el diálogo la explicación de las técnicas utilizadas o hacer referencia a las tecnologías subyacentes a las mismas.

5.2 Reformulación de la consigna según la evolución del tratamiento de la actividad.

La tarea se presenta con un enunciado analítico del problema: "Determinar analíticamente el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$ en un punto de la misma". Esta formulación tal vez induce un tratamiento analítico que, como se mostró previamente, no permite apreciar las características del lugar geométrico buscado en su totalidad. Ante esta realidad se pretende que los estudiantes reformulen el enunciado de la tarea en términos de la geometría sintética como: "Determinar el lugar geométrico del centro de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada y pasan por un punto O". La mencionada reformulación queda a cargo del estudiante ya que es un primer acercamiento al vínculo entre la geometría sintética y la geometría analítica, aunque el docente puede motivar la misma si no surge por iniciativa propia de los estudiantes.

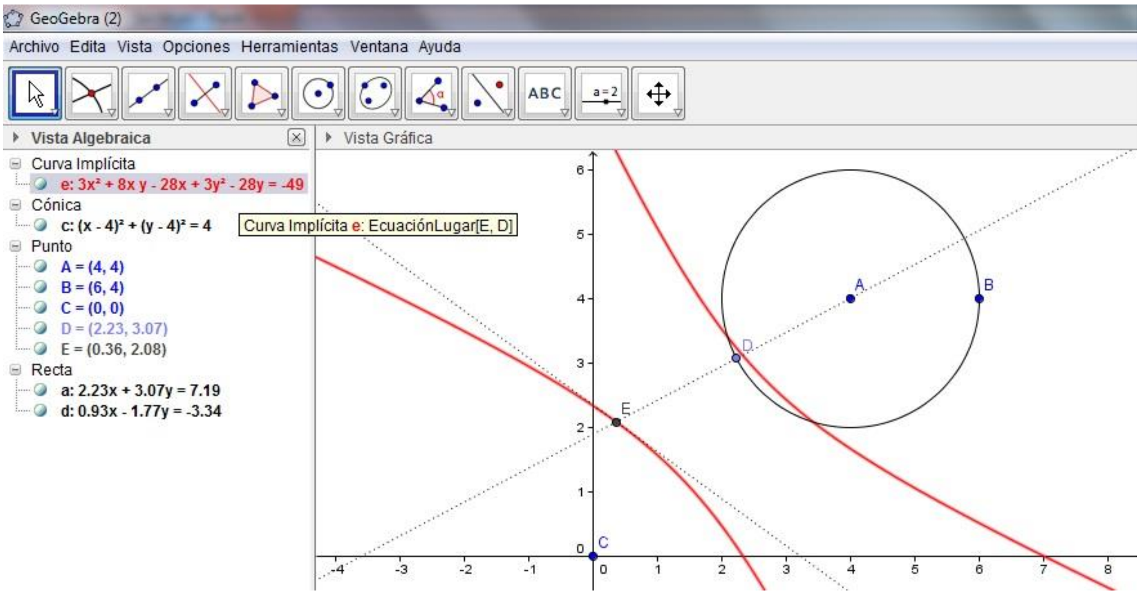
5.3 Sobre cómo se pretende dar lugar al diálogo entre la geometría sintética, la geometría analítica y el uso del software.

A partir del uso de técnicas de la geometría analítica se expresa simbólicamente cada una de las condiciones geométricas impuestas en el enunciado de la tarea obteniendo un sistema de ecuaciones. Como resultado del mismo se obtiene una descripción simbólica del lugar geométrico buscado. Sin embargo, advertimos que el abordaje del sistema de ecuaciones sin el software de cálculo simbólico resulta laborioso ya que se requiere de numerosas transformaciones algebraicas que no aportan información relevante que permita comprender mejor la situación geométrica. Asimismo, las ecuaciones que describen el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una dada que contienen a un punto dado, no permite conjeturar alguna característica de la curva y la construcción manual del gráfico se obstaculiza por la complejidad de la expresión simbólica. Estos hechos muestran de qué manera la implementación de un software complementaría la actividad matemática y permitiría enriquecerla; en este caso, resolver un sistema de ecuaciones y representar gráficamente el conjunto solución del sistema, acelera el acceso a visualizar la curva evitando cuestiones laboriosas y no fundamentales. Esta sería una manera de abordar el desafío de diseñar actividades en las cuales se aproveche el software no sólo como soporte de ejercicios interactivos sino fundamentalmente como medio para estimular la actividad matemática (Ancochea, 2011). En el caso presentado, la implementación del software sería un elemento importante para que emerja con sentido el vínculo entre la geometría sintética y la geometría analítica. El sistema de ecuaciones de la curva y su gráfico sólo invitan a conjeturar que el lugar geométrico buscado en este caso es una hipérbola, pero no permiten validarlo. Asimismo, el tratamiento analítico de dicho sistema da lugar a una frondosidad de fórmulas que impide ver la esencia geométrica del problema; retrotraen así a la situación histórica que atravesó la geometría con el surgimiento de la geometría analítica: "El reinado casi absoluto de la geometría analítica durante los siglos XVII y

XVIII condujo a un abuso de sus métodos y muchos problemas, complicados innecesariamente, perdieron el sentido estético que debe mantener toda construcción matemática.” (Santaló, 1961, p.146)

A pesar de que el abordaje analítico no proporciona una descripción del lugar geométrico buscado en términos de construcción geométrica, este acercamiento desarrolla actividad matemática ya que permite cuestionar el alcance, la eficacia, la economía y la pertinencia de las técnicas analíticas en esta tarea en particular. Este abordaje en una situación de enseñanza permite evidenciar que las técnicas propias de la geometría analítica no resultan siempre eficientes para describir el lugar geométrico buscado y que por tanto resulta necesario articularla con otras técnicas. Se pone de manifiesto entonces la necesidad de otros elementos teóricos que permitan justificar e interpretar la articulación de técnicas y sus interrelaciones. (Gascón, 1994)

El software Geogebra versión 4.2.55.0 incorpora el comando *EcuaciónLugar* que calcula y grafica la ecuación del lugar geométrico que crea un punto que lo traza a medida que se desplaza otro punto. Esta herramienta se podría implementar en la resolución de esta tarea, sin embargo no funciona si se construye la circunferencia a partir de su fórmula o de su centro y radio y se quiere determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a esta que contienen un punto dado. El comando *EcuaciónLugar* sí proporciona la ecuación del lugar geométrico cuando se construye la circunferencia a partir de su centro y un punto de ella. En este caso la tarea presentada contiene la fórmula implícita de la circunferencia por ende, o bien se usan técnicas analíticas de transformaciones algebraicas para determinar el centro de la circunferencia o bien el software provee en la vista algebraica, la ecuación canónica de la circunferencia de la cual hay que inferir su centro. Luego de realizar la construcción en el software y de utilizar el comando previamente mencionado, en la vista algebraica se presenta la ecuación del lugar geométrico como un polinomio completo en dos variables.



Para validar la conjetura respecto del tipo de curva a partir de su expresión simbólica, pueden usarse otras técnicas analíticas, por ejemplo el determinante de la matriz de la forma cuadrática principal de la ecuación general de una cónica. Sin embargo, dado que la actividad está diseñada para un nivel introductorio de Geometría Analítica, se puede presuponer que este recurso no está disponible para los alumnos. A esta altura del desarrollo, si bien el alumno puede conocer la ecuación del lugar geométrico no sabe cómo obtenerla ni posee conocimientos que le permitan reconocer el tipo de curva que es. El procedimiento previamente presentado utiliza el software como soporte de ejercicios interactivos (Ancochea, 2011) porque invisibiliza el propósito de la tarea ya que no permite evidenciar la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica. Asimismo, el uso del software de este modo oculta las limitaciones de las técnicas analíticas y las propiedades métricas de las curvas. Por estas razones, en el desarrollo matemático presentado previamente no se consideró la implementación de esta herramienta.

Hasta aquí se presentaron abordajes que no arribaban a una resolución satisfactoria de la tarea propuesta porque la descripción que proporcionaban del lugar geométrico no permitía caracterizar la curva. Gascón (1989) plantea que la eficacia para resolver ciertos tipos de problemas de geometría analítica mejora significativamente si durante la actividad matemática se dedica tiempo para que los alumnos aprendan a traducir los problemas de geometría analítica al ámbito de la geometría sintética y a resolver estos mediante técnicas sintéticas. En este caso, al reformular el enunciado analítico particular en un enunciado sintético general no sólo se extienden los casos a estudiar sino que también aumentan las técnicas disponibles para abordar la tarea. En este caso, la técnica de los lugares geométricos, de la razón y el método reductivo se combinan con la técnica de construcción de sistema de ecuaciones y de transformaciones algebraicas para describir el lugar geométrico en cuestión.

El uso de las técnicas sintéticas amplía el alcance de la tarea ya que origina el estudio de diferentes casos a partir de la posición relativa de los objetos matemáticos en cuestión. Este estudio resulta enriquecido con el uso de un software de geometría dinámica que permite visualizar el lugar geométrico buscado y de este modo elaborar conjeturas respecto del tipo de curva que describe. Por medio de la técnica de arrastre de exploración se puede visualizar que las curvas se pueden clasificar en tres clases principales de acuerdo con la posición relativa de la circunferencia y del punto que son datos. Cabe señalar que la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica se evidencia a partir de las propiedades métricas que satisfacen los puntos de las curvas que pertenecen al lugar geométrico en cuestión los cuales se presentan en coordenadas. Dichas propiedades se pueden percibir por medio de la visualización que se logra con el uso de software de geometría dinámica y el uso de una secuencia de técnicas: las correspondientes al arrastre de exploración y de verificación dan lugar a la técnica de la razón y al método reductivo que luego resultan relevantes para la construcción del sistema de ecuaciones que define el lugar geométrico buscado de los centros de las circunferencias. A partir de este estudio sintético de casos, es posible asegurar que el lugar geométrico buscado corresponde a una hipérbola o una elipse, según el caso correspondiente, y plantear las ecuaciones que describen cada una de estas curvas.

De esta forma se evidencia la complementariedad que existe entre la geometría sintética y la geometría analítica ya que las técnicas sintéticas permiten realizar un estudio de diferentes casos, anticipar las características de la curva que describe el lugar geométrico en cuestión y esbozar una estrategia para implementar las técnicas analíticas con el fin de describir por medio de una ecuación el mencionado lugar geométrico. Así surge una técnica nueva por combinación de técnicas sintéticas y técnicas analíticas:

> Sería también muy útil proponer en el Bachillerato problemas geométricos cuya resolución fuese mucho más sencilla y «natural» con técnicas

> sintéticas que con técnicas analíticas. También sería necesario proponer problemas geométricos que si bien requieren la utilización de técnicas analíticas para ser resueltos con toda generalidad, necesitan de manera casi imprescindible la utilización previa de técnicas sintéticas a fin de diseñar la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. Se pondría así de manifiesto otro aspecto importante de la complementariedad entre ambos tipos de técnicas. (Gascón, 2002, p.24).

Sabiendo que se trata de una hipérbola, la ecuación a la que se arriba no es del formato usual para los alumnos ($\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1$, con centro en (c_1, c_2) con ejes paralelos a los ejes coordenados), que es la ecuación canónica de la hipérbola. Lo desarrollado hasta aquí nos deja el camino abierto para abordar eventualmente el cambio de coordenadas en las ecuaciones. Aplicando el cambio de coordenadas, es posible encontrar un nuevo sistema de ejes tal que la ecuación referida a este nuevo sistema sea una ecuación canónica. Estas técnicas, requerirían conocimientos sobre transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones) o sobre álgebra lineal (diagonalización de matrices simétricas) que son conocimientos que exceden este curso. En este curso sí se podría hacer una reflexión sobre la relatividad de la ecuación de un objeto geométrico al sistema de coordenadas considerado.

5.4 Momentos de estudio

Dado que nos enmarcamos en la TAD, haremos un intento de enriquecer el análisis didáctico con las aportaciones de esta teoría. Todo proceso de estudio en clases escolares se puede describir funcionalmente mediante el modelo de los momentos de estudio (Chevallard, 1999) que permite analizar la organización didáctica. Este modelo está compuesto por seis momentos: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento tecnológico-teórico, el momento del trabajo de la técnica, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. La tarea propuesta aquí puede ser parte del momento exploratorio del proceso de estudio, donde se propone explorar un tipo de tarea que promueve la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica a partir de la descripción analítica de lugares geométricos. También, permite utilizar otras técnicas, convenientes para realizar ese tipo de tareas, utilizadas en la reinterpretación en términos sintéticos, el estudio de casos, la elaboración de una estrategia que retome el estudio realizado con técnicas sintéticas para describir por medio de una ecuación el lugar geométrico buscado. La tarea propuesta también favorece el momento tecnológico teórico ya que a partir de ella es posible cuestionar la eficacia y el alcance de las técnicas analíticas dando lugar a establecer una relación con las técnicas propias de la geometría sintética. Más precisamente, cuando se afronta la tarea desde un abordaje exclusivamente analítico se evidencia la limitación de las técnicas para describir el lugar geométrico en cuestión con la ecuación general de una cónica, de forma tal que el estudiante no puede caracterizarlo e identificar sus propiedades geométricas. Asimismo, el abordaje de la tarea desde la geometría sintética resulta ineludible para producir una manera de elaborar la ecuación del lugar geométrico fundamentado en las propiedades métricas.

En relación con los otros momentos (el del primer encuentro, el de trabajo de la técnica, de institucionalización y el de evaluación), es necesario considerar esta tarea junto con otras correspondientes a la construcción de lugares geométricos que tengan además la característica de poder combinar lo sintético con lo analítico y que favorezcan las características propias de cada uno de los momentos.

Teniendo en cuenta que según Ancochea (2011) la enseñanza en la escuela secundaria prioriza el bloque práctico-técnico por sobre el tecnológico-teórico y que por lo tanto tal vez a los estudiantes no les surja por iniciativa propia este último abordaje, para provocar el momento tecnológico-teórico en las clases en las que se desarrolle la propuesta presentada, se podrían formular algunas preguntas orientadoras como por ejemplo:

a. ¿Reconoce similitudes entre la curva que se determina como lugar geométrico y otras curvas ya estudiadas?
b. Plantear una o varias conjeturas sobre las características del lugar geométrico buscado.
c. ¿Cuáles propiedades, definiciones, etc. permiten caracterizar el lugar geométrico propuesto?
d. Elaborar una prueba para convencer a un compañero que no está de acuerdo con la conjetura previamente planteada.
e. Si se modifica la posición de algunos de los objetos geométricos iniciales, es decir la circunferencia o el punto, ¿la prueba sigo siendo válida? ¿el lugar geométrico es de la misma familia de curvas?
f. ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico buscado?

Cabe aclarar que estas preguntas podrían reiterarse con leves modificaciones en tareas que conformen el momento del trabajo de la técnica en tareas de la misma tipología.

5.5 Pertinencia de la propuesta e influencia del carácter institucional de construcción del conocimiento.

La TAD sostiene que para interpretar adecuadamente la actividad matemática se requiere tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas. Chevallard (2001) propone una jerarquía de niveles de co-determinación entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas, esto es la Organización Matemática, y las maneras de organizar el estudio de las mismas en la escuela, es decir la correspondiente Organización Didáctica. Esta jerarquía, que orienta la transposición didáctica, se puede esquematizar del siguiente modo:

Sociedad ⟶ Institución ⟶ Disciplina ⟶ Áreas ⟶ Sectores ⟶ Temas ⟶ Cuestiones.

El autor plantea que cada uno de los niveles introduce restricciones que influyen mutuamente en las organizaciones didácticas y en las organizaciones matemáticas: la estructura de las organizaciones matemáticas de cada nivel condiciona las posibles formas de organizar su estudio y recíprocamente los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan el tipo de organización matemática que será posible reconstruir. Uno de los documentos institucionales que surgen como producto de dicha reconstrucción es el Diseño Curricular. En particular, el diseño curricular de quinto año de la escuela secundaria para la provincia de Buenos Aires (2011) prescribe entre sus contenidos el lugar geométrico de la hipérbola y de la elipse y expresa:

> "Se propondrá el trazado de lugares geométricos mediante el uso de elementos de geometría y de software tales como Geogebra, Cabri, Graphmatica u otros. Las figuras cónicas se estudiarán como lugares geométricos notables y como secciones de una superficie cónica,

definiéndolas en lenguaje coloquial, algebraico y gráfico." (Bracchi y Paulozzo, 2011, p.14)

Este párrafo justifica que la tarea propuesta en este trabajo resulta pertinente ya que la misma habilita el trazado de lugares geométricos mediante softwares de Geometría Dinámica. Además, las definiciones métricas de la hipérbola y la elipse son resignificadas en un contexto de obtención lugar geométrico, contexto en el que no resulta evidente desde la formulación inicial de la tarea que estas curvas están involucradas.

En el diseño curricular de la Pcia. De Buenos Aires (DC), ámbito de la zona de influencia de la Universidad de General Sarmiento, los ejemplos presentados incluyen el uso de software atendiendo a la relación entre el objeto geométrico y su descripción analítica, por ejemplo una de las tareas sugeridas invita a desplazar el gráfico de una elipse para observar cómo se modifica la ecuación de la misma. Sin embargo se considera que, aún con estos intentos, no queda suficientemente plasmada la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica ya que no hay ejemplos en los que se necesite usar recursos provenientes de uno y otro campo según los requerimientos del problema, sino que la relación estaría preestablecida desde la consigna limitando las estrategias de abordaje a responder la misma. Asimismo no hay lineamientos ni actividades que muestren los fundamentos teóricos que ofrecen ambos campos en forma relacionada. A partir del párrafo citado previamente y de los ejemplos sugeridos en el diseño curricular se puede inferir que no se contempla la necesidad de evidenciar la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica sino que se propone una yuxtaposición de las mismas. En este sentido, el diseño curricular se presenta como una restricción institucional para el abordaje de la geometría. Esto repercute en la enseñanza porque debilita la complementariedad de la geometría sintética y la geometría analítica y de la praxeología a construir a partir de trabajar sobre la base de dicha complementariedad. El diseño se centra principalmente en el nivel de los temas, al explicitar qué contenidos de cada área se deben enseñar, de esta forma se restringe el sentido de lo que se propone estudiar ya que no considera o cuestiona los otros niveles de co-deternimación involucrados en la transposición didáctica.

Las tareas aquí propuestas tienen el agregado de evidenciar la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica. Por esto se considera que la propuesta resulta pertinente en dos sentidos: a) en el sentido epistémico, brinda la posibilidad de diálogo entre diferentes técnicas correspondientes a diferentes campos, lo cual trata de emular lo que sucede en las realidades de uso y de construcción del conocimiento disciplinar, que se ubican en los niveles superiores de co-determinación, en donde es importante resolver problemas utilizando recursos de diferente naturaleza; b) en el sentido normativo, cumple con lo prescripto en el Diseño Curricular de la Pcia. De Buenos Aires y al mismo tiempo muestra que aún con las restricciones institucionales, es posible diseñar tareas que reflejen la riqueza de combinar ambos enfoques en la enseñanza de la geometría.

En cuanto a la influencia del carácter institucional para la enseñanza, se consideran dos recursos fundamentales para el docente: el DC y los textos escolares y de formación docente. En relación con el DC, el documento no brinda ni lineamientos ni ejemplos que inviten al docente a reflexionar sobre la enseñanza articulada. A lo largo de todo este trabajo, y en particular con las tareas propuestas, se aborda este problema. En relación con los textos de estudio, se considera que no hay suficiente desarrollo de textos donde se establezcan situaciones de estudio geométrico que combinen técnicas analíticas, sintéticas y se trabaje con software. Por lo antedicho el profesor no cuenta con demasiados insumos a los que recurrir para implementar tareas como las propuestas.

6 A modo de cierre.

En este trabajo se retoma la cuestión de la estructura de la matemática escolar como resultado de una trasposición didáctica que surge de un estudio epistemológico superficial que excluye la enseñanza de las matemáticas de las actividades genuinamente matemáticas (Gascón, 2002). En la configuración escolar, los asuntos que se proponen para ser estudiados surgen a nivel temático y los otros niveles superiores en la jerarquía de los niveles de co-determinación, como la sociedad de uso, la disciplina, áreas, etc., no se evidencian. En particular, se puso en cuestión la "sectorización" en geometría sintética y geometría analítica en que se divide el área de la geometría en el estudio escolar de las matemáticas. En el recorrido bibliográfico que justifica el interés del tema, se mostró que el estudio de la geometría sintética y la geometría analítica de forma independiente tiene sus raíces en el desarrollo histórico de la disciplina y en las organizaciones matemáticas y didácticas de las instituciones correspondientes a los niveles disciplinares y escolares que intervienen en la trasposición didáctica. Es decir que la responsabilidad de esta desarticulación recae sobre la institución escolar y la disciplinar y el profesor sólo puede incidir localmente

> "Dado que la mayoría de los trabajos de Didáctica de las Matemáticas asumen implícitamente el encierro en los temas, sus propuestas para modificar el currículo de matemáticas de la Enseñanza Secundaria no llegan a cuestionar la estructura de los sectores en que se divide cada una de las áreas ni, mucho menos, las áreas ("aritmética", "álgebra", "cálculo", "estadística" y "probabilidad") en que tradicionalmente se ha estructurado la matemática escolar. De esta manera el "sentido" que tiene el estudio escolar de las matemáticas en general y de cada una de sus áreas en particular (como, por ejemplo, el "por qué y para qué" estudiar geometría en la escuela) se da por supuesto cuando, en realidad, ha desaparecido" (Gascón, 2003, p.31)

Se explicó aquí que la Teoría Antropológica de lo Didáctico permite apreciar en toda su complejidad la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica por medio de la combinación de las técnicas necesarias para identificar las propiedades métricas de una curva y representarlas simbólicamente en un sistema de coordenadas. Bajo este marco se presentó una tarea y la praxeología desarrollada de la misma otorgó una caracterización de la hipérbola y la elipse como lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada que pasan por un punto que no pertenece a la circunferencia original. También, este enfoque permitió interpretar el uso de software como medio para el desarrollo de la actividad matemática. Se observó que ante la misma tarea el uso de software puede tener más de una función: a) ser sólo soporte para la visualización mediante la observación de cambios en el dibujo ligados a cambios en los parámetros o en los elementos a través del arrastre, como sería el caso en la tarea presentada si se incluye la posibilidad de utilizar el comando *EcuaciónLugar*, b) puede permitir desarrollar conjeturas, brindar elementos para elaborar la prueba, cuestionar afirmaciones previas, etc. Esto muestra que algunas tareas que se proponen para realizar con software pueden propiciar distintos trabajos matemáticos si se incluyen algunas reformulaciones o se restringe el uso de algunas herramientas. Asimismo, el trabajo con CAS permite utilizar la tecnología para sostener el trabajo de la prueba, no sólo la exploración, manteniendo la unidad de la actividad matemática.

En el caso presentado el uso de CAS permitió resolver un sistema de ecuaciones y representar gráficamente la solución. Esto hizo posible interpretar las limitaciones de las técnicas analíticas utilizadas para caracterizar el lugar geométrico buscado ya que no brindaba elementos que evidenciaran la validación de la conjetura respecto de la curva en cuestión. El software fue fundamental para evidenciar cuáles son los objetos que deben considerarse prefijados y cuáles móviles en la tarea presentada en la reformulación para el abordaje por geometría sintética donde figuraban varios objetos: las circunferencias cuyos centros determinarán el lugar buscado, la circunferencia de tangencia y el punto O (ver Abordaje desde la geometría sintética mediante el uso de Geogebra en sección 3.2). Esto no es evidente a partir del enunciado que invita a considerar como móviles a todos ellos. Se pudo analizar que variando la circunferencia de tangencia y el punto O se obtenía la misma familia de curvas como lugar geométrico (hipérbolas o elipses según el caso), lo cual permitió determinar que la circunferencia de tangencia y el punto O debían quedar prefijados al momento de elaborar la demostración. Por último destacamos el importante papel del software en la resolución de las tareas planteadas dado que en entornos de lápiz y papel es muy difícil visualizar la curva y hasta puede ser dificultosa encontrar las relaciones entre las distancias involucradas.

Presentar desde la enseñanza, tareas propias de la Geometría analítica de forma que tenga en cuenta las técnicas de construcción y estudio de figuras que proporciona la geometría sintética, como la tarea que aquí se presentó, permite evidenciar la complementariedad que existe entre ellas. Ciertamente resulta necesario incluir una secuencia de tareas que persiga este propósito para que se perciba dicha complementariedad con toda su complejidad y se dé lugar a todos los momentos de estudio. Sería necesario además proponer tareas enunciadas en términos sintéticos que requieran de técnicas analíticas para resolverlos. Así, se mostraría cómo ambas se complementan entre sí para propiciar la interpretación geométrica de la situación. Teniendo en cuenta los criterios previamente mencionados, se podría elaborar un Recorrido de Estudio e Investigación (Chevallard, 2006), que es un dispositivo didáctico que se elabora bajo la TAD, que incluya entre sus tareas, a la expuesta aquí, para profundizar en este campo de problemas

En relación con el razonamiento matemático, la geometría plana en particular, ofrece la posibilidad de inferir y enunciar propiedades a partir de la observación y exploración con representaciones de los objetos, con lo cual la figura de análisis cumple un rol preponderante. En la tarea aquí propuesta, a partir de la figura de análisis fue posible identificar y analizar los datos con los que se debe construir la circunferencia tangente y establecer la relación entre los mismos y la circunferencia a obtener. Más precisamente, a partir de los datos que son la circunferencia original, de centro C, y el punto O, resultó necesario inferir relaciones que no están explicitadas para construir la circunferencia tangente C_2. Basándose en la definición de mediatriz y de circunferencia como lugares geométricos, de las condiciones de dos circunferencias tangentes y de las reglas de inferencia lógicas, se construyó la cadena deductiva que permitió asegurar que el centro de la circunferencia tangente se encontraba en la intersección de la recta que pasa por el centro de la circunferencia original y el punto de tangencia y la mediatriz del punto O con el punto de tangencia (ver praxeología matemática en sección 4). Como producto de este primer razonamiento se obtuvo un conjunto de relaciones que constituyeron una caracterización del centro de la circunferencia tangente. A partir de observar con el software el lugar geométrico buscado y de la caracterización previamente mencionada, se pudo conjeturar que la curva que describía el lugar geométrico correspondía a una hipérbola (o una elipse según el caso). Luego, planteando la distancia del centro de la circunferencia tangente al punto O y al centro C de la circunferencia original, usando la definición de radio de una circunferencia y las propiedades métricas de la hipérbola se elaboró un proceso lógico deductivo para decidir respecto de la validez de la conjetura (ver Exploración de casos posibles en sección 3.3). Asimismo, la tarea también dió lugar a un trabajo matemático que tiene que ver con establecer condiciones para que la conjetura sea cierta a partir de la posición relativa de la circunferencia original y del punto O. Nuevamente, la figura de análisis cumplió un rol fundamental en esta instancia porque es la que hizo visible las diferentes situaciones que puede presentar el problema. Los otros dos casos, requerirían poner en juego otras propiedades o definiciones que permitan validar que el lugar geométrico corresponde a una elipse o que no se puede construir, así como explicar el dominio de validez de cada uno de ellas.

Por último en relación con las aportaciones de este trabajo, en el mismo se rescató el principio ya señalado por Gascón (2002), de complementariedad entre los campos sintético y analítico de la geometría, pero en el sentido inverso al usual ya que en general se presenta un problema desde la geometría sintética y luego se muestra una limitación que requiere un abordaje desde la geometría analítica. En cambio aquí se planteó en primer lugar un abordaje analítico, mediado por recursos tecnológicos, que, si bien no era limitado, sí resultó engorrosa su interpretación por lo que se abordó una tarea similar, bajo una reformulación más general, con técnicas de la geometría sintética para luego retornar a la formulación inicial. De este modo se trata de, mediante esta propuesta, exhibir un caso de cómo se podría instalar el asunto de la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas no sólo a partir de mostrar “insuficiencias o limitaciones” de un determinado campo (Gascón, 2002) sino mostrando cómo algunas técnicas pueden resultar más convenientes que otras para un problema determinado.

7 Referencias bibliográficas.

Acosta Gempeler, M. E. (2005). Geometría experimental con cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática, 17*(003), 121-140.

Acosta Gempeler, M. E. (2005). *La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías*. I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico [en línea] Recuperado el 14 de diciembre de 2013, de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Ancochea B. (2011) Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olavarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier, (Ed.), Un panorama de la TAD, (pp. 533-551). Barcelona: CRM Documents

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Mediated Learning: An example of an approach. *International Journal of computers for Matehematical learning, 5*(1), 22-45.

Bracchi, C. y Paulozzo, M (Coord.) (2011) *Diseño Curricular para la Educación Secundaria. 5º año*. La Plata: Dirección General de Cultural y Educación de la provincia de Buenos Aires.

Bressan, A. M. y Bogisic, B. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar.* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Chevallard, Y (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2)*, 221-266.

Chevallard, Y. (2001): *Aspectos problemáticos de la formación docente,* XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática, Huesca. Recuperado el 14 de Diciembre de 2013 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2006). *Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir.* Recuperado el 14 de diciembre de 2013 de http://yves.chevallard.free.fr/

Farfán, R. (Ed.) (1998) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fonseca, C., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática, 22*(2), 5-34.

Font Moll, V. (1996). Esquemas cognitivos: algunos ejemplos de su aplicación a las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 22,* 51-58.

Gascón, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2001). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, 28*, 1-20.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 13-25.

Gascón, J. (2003): Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I: Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría, *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 44, 25-34

Gascón, J. (2007, julio). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Ponencia presentada en la Escuela de Invierno de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires, Argentina.

Godino, J.D., Gonzato, M. y Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM. 341

Gonzalez Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *SIGMA* (30), 205-236.

Gonzalez, C., y Lupinacci, L. J. (2011, Junio). *Geometría y Tics. Una propuesta integradora para la formación docente continúa en educación matemática*. Ponencia presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

González-López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Ed), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, (pp. 277- 290) Granada: Universidad de Granada.

Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 24(1), 31–42

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. Novembre, A, Carnelli, G., Lamela, C., (2007) *ES. 5 Matemática - Educación Secundaria*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Programa Textos Escolares para Todos.

Lechmann, C. (1989). *Geometría analítica.* Limusa: Noriega editores.

Puig Adam, P. (1986). Geometría métrica. *Tomo I-Fundamentos.* (16ª Ed). Madrid: Euler Editorial S.A.

Rodríguez, M. (2010). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comp.), *Educación Matemática, Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, (pp. 153-174). Los Polvorines: Ediciones UNGS - EDUVIM.

Santaló, L. A. (1961). Geometría analítica y geometría sintética. *Ciencia e investigación, 17*(5), 145-154.

Sardella, O., Berio, A., y Mastucci, S. (2002). Poliedros en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 49*, 45-52.

Scaglia, S., y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *3*(1), 35-50.

Trigueros, M., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M.Bosch, J. Gascón, et al (Eds.), An overview of ATD, 77-116. Bellaterra, Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Trigueros, M., Martínez-Planell, R. (2013, Abril) Las funciones de dos variables: Análisis desde el punto de vista de los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. Ponencia presentada en el IV Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Toulouse, Francia.