

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

---

### *Problemas de Identificación en Modelos de Transporte de Parámetros Distribuidos*

---

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad  
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Guillermo Federico Umbricht**

Director: Diana Rubio  
Co-Director: Claudio El Hasi  
Consejero: Rodolfo Echarri

Fecha de Defensa: 25 de Octubre 2021

## **DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA**

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

### FORMULARIO "E" TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor

**El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: a)**

- a) *Liberar el contenido de la tesis para acceso público.*
- b) *Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS:*
- c) *Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.*

- a. Título completo del trabajo de Tesis: Problemas de Identificación en Modelos de Parámetros Distribuidos.
- b. Presentado por: Guillermo Federico Umbricht.
- c. E-mail del autor: [guilleungs@yahoo.com.ar](mailto:guilleungs@yahoo.com.ar)
- d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología.
- e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- f. Para recibir el título de:
  - a) Grado académico que se obtiene: Doctor.
  - b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología.
- g. Fecha de la defensa: 25/10/ 2021
- h. Director de la Tesis: Diana Rubio.  
  
Co-director de la Tesis: Claudio El Hasi.
- i. Tutor de la Tesis: Rodolfo Echarri.
- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Rodolfo Echarri, Domingo Tarzia.
- k. Descripción física del trabajo de Tesis: 299 páginas. Contiene 7 capítulos, 2 apéndices, 43 figuras y 31 cuadros.
- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: Alcance internacional mientras se investigue modelado y problemas inversos en procesos de transferencia de calor.
- m. Temas tratados en la Tesis (palabras claves):

Transferencia de calor, Problema inverso, Sensibilidad, Elasticidad, Regularización.

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

n. Resumen en español:

Se abordan diferentes problemas inversos, que surgen en modelos de transporte de parámetros distribuidos, de interés en la ciencia y la ingeniería. Particularmente se pone el foco en procesos de transferencia de energía térmica. Se realiza un estudio analítico de cada problema, se presentan las soluciones, sus propiedades y se discuten condiciones para la existencia, unicidad y estabilidad de las mismas. Se utilizan distintas técnicas de identificación de parámetros que involucran análisis de sensibilidad, análisis de elasticidad, diseño óptimo de experimentos y métodos de regularización. Se desarrolla un esquema numérico en diferencias finitas convergente y estable para incluir simulaciones numéricas tanto en los problemas directos como inversos. Éstas resultan útiles para la determinación de parámetros ya que en esta tesis no se realizan mediciones experimentales. Con respecto a los problemas inversos, en los casos donde es posible, se brinda una cota para el error de estimación que depende del error en los datos.

o. Resumen en portugués:

São abordados alguns dos problemas inversos, de interesse tanto em ciência quanto em engenharia, que surgem em modelos de transporte de parâmetros distribuídos; em particular, os processos de transferência de energia térmica são focados. É realizado um estudo analítico de cada problema, examinando tanto as suas propriedades como as suas soluções, explicitando as condições de existência, singularidade e estabilidade de tais soluções. São utilizadas diferentes técnicas para a identificação de parâmetros que envolvem: análise de sensibilidade, análise de elasticidade, desenho ótimo de experimentos e métodos de regularização. Além disso, são incluídas simulações numéricas, tanto em problemas diretos quanto inversos, que são úteis para a determinação de parâmetros uma vez que medidas experimentais não são realizadas neste trabalho. Sempre que possível, um limite é fornecido para o erro de estimativa que depende do erro nos dados.

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

p. Resumen en inglés:

Different inverse problems that arise in transport models of distributed parameters of interest in science and engineering are addressed. Specifically, thermal energy transfer processes are considered. Analytical and numerical studies of each problem are carried out. Moreover, conditions and properties for the existence and uniqueness of the analytical solution as well as its stability are discussed. Different identification techniques are used that involve sensitivity analysis, elasticity analysis, optimal design of experiments and regularization. A convergent and stable numerical scheme based in finite difference is considered in order to obtain simulated solutions for both direct and inverse problems. These are useful for the determination of parameters since in this thesis no experimental measurements are conducted. Regarding the inverse problems, a bound for the estimation error is provided which depends on data errors, whenever is possible.

q. Aprobado por:

Dr. Juan Pablo Borgna  
Dra. Gabriela Beatriz Savioli  
Dr. Alejandro Gabriel Monastra

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Dr. Alejandro Gabriel Monastra

Firma del autor de la tesis:

Guillermo Federico Umbrecht

## **DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA**

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

---

### *Problemas de Identificación en Modelos de Transporte de Parámetros Distribuidos*

---

#### Publicaciones:

Las publicaciones en revistas científicas y en actas de congreso con referato asociadas a esta tesis son:

- 1- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Optimal estimation of thermal diffusivity in a thermal energy transfer problem with heat generation, convection dissipation and lateral heat flow*. WSEAS Transactions on Fluid Mechanics (2021). ISSN: 1109-2769/2224-2880. **En Prensa.**  
<https://wseas.org/cms.action?id=4036>
- 2- Rubio, D., Tarzia, D.A. and Umbricht, G.F. *Heat transfer process with solid-solid interface: Analytical and numerical solutions*. WSEAS Transactions on Mathematics **20** (2021), pp: 404-414. ISSN: 1790-5087/2224-347X.  
<https://doi.org/10.37394/23206.2021.20.42>
- 3- Umbricht, G.F., Rubio, D. and El Hasi, C. *Solución analítica de un problema de transferencia de energía térmica con generación de calor, disipación por convección y flujo lateral*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **8** (2021), pp: 679-682. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vol-8-2021.pdf>
- 4- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación del coeficiente del término difusivo en una ecuación parabólica completa*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **8** (2021), pp: 325-328. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vol-8-2021.pdf>
- 5- Umbricht, G.F. *Identification of the source for full parabolic equation*. Mathematical Modelling and Analysis **26**(3) (2021), pp: 339-357. ISSN: 1392-6292/1648-3510.  
<https://doi.org/10.3846/mma.2021.12700>

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

- 6- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface*. International Journal of Heat and Technology **39**(2) (2020), pp: 337-344. ISSN: 0392-8764.  
<https://doi.org/10.18280/ijht.390202>
- 7- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem*. Mathematical Modelling of Engineering Problems **7**(4) (2020), pp: 607-613. ISSN: 2369-0739/2369-0747.  
<http://dx.doi.org/10.18280/mmep.070413>
- 8- Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection*. Latin American Applied Research **50**(3) (2020), pp: 229-234. ISSN: 0327-0793/1851-8796.  
<https://doi.org/10.52292/j.laar.2020.179>
- 9- Umbricht, G.F. *Estimación de la fuente en una ecuación de Poisson: mediante un método de regularización*. Editorial Académica Española, Riga, Letonia, Unión Europea (2019). ISBN: 978-620-0-33344-5.  
<https://www.eae-publishing.com/catalogue/details/es/978-620-0-33344-5/estimaci%252525C3%252525B3n-de-la-fuente-en-una-ecuaci%252525C3%252525B3n-de-poisson>
- 10- Umbricht, G.F, Rubio, D. and El Hasi, C. *A regularization operator for the source approximation of a transport equation*. Mecánica Computacional **37**(50) (2019), pp: 1993-2002. ISSN: 2591-3522.  
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6032>
- 11- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Problemas inversos asociados a un proceso estacionario de transferencia de calor*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **7** (2019), pp: 593-596. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>
- 12- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Identificación de la fuente en una ecuación de transferencia de calor en un tejido biológico*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **7** (2019), pp: 405-408. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>
- 13- Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *Función de convección en un problema de conducción de calor con interfaz*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **6** (2017), pp: 577-580. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-6-2017.pdf>



## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

- 14- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación y análisis de sensibilidad para el coeficiente de difusividad en un problema de conducción de calor*. Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas **6**(12) (2015), pp: 38-58. ISSN: 1852-3239.

[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_Estimaciony analisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_Estimaciony analisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)

- 15- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Sobre un método de regularización para identificar una fuente en una ecuación elíptica*. Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas **6**(12) (2015), pp: 59-72. ISSN: 1852-3239.

[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_SobremtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_SobremtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)

## **DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA**

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

## DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

### Aportes Originales:

Los aportes originales son los siguientes:

En el **capítulo 2** se presenta una expresión analítica para la solución del problema de transferencia de calor de una barra homogénea embebida en un fluido en movimiento con disipación por flujo lateral y convección.

En el **capítulo 3** se resuelve, mediante técnicas numéricas de problemas inversos, la determinación del coeficiente de difusión con tres enfoques distintos relacionados con la toma de datos. Además, a partir de un análisis de sensibilidad, se realiza un estudio de diseño óptimo para encontrar las posiciones y los instantes de tiempo donde se realizan las mediciones de forma tal que la determinación resulte más precisa.

En el **capítulo 4** se brinda una nueva técnica para la determinación del coeficiente de transferencia de calor por convección. Mediante un análisis de temperatura y de elasticidad se compara la nueva técnica con el enfoque clásico.

En el **capítulo 5** se trata la determinación de la fuente a partir del diseño de una familia de operadores uni-paramétricos de regularización. Se analiza la estabilidad y la convergencia del método de regularización propuesto y se obtiene una cota óptima de tipo Hölder para el error de estimación.

En el **capítulo 6** se presenta una expresión analítica para la solución del problema de transferencia de calor en una barra compuesta por dos tramos consecutivos con interfaz sólido-sólido. La difusividad y la conductividad térmica se toman como funciones constantes a trozos. Se analiza tanto el caso estacionario como evolutivo.

En el **capítulo 7** se aborda la aproximación del punto de contacto de los materiales en un problema de transferencia de calor con interfaz sólido-sólido. Se obtiene una expresión analítica para el parámetro aproximado. Se halla una cota para el error cometido en la aproximación que depende del ruido en la medición. Además, con la finalidad de conocer la dependencia local del parámetro estimado con el dato utilizado, se realiza un estudio de elasticidad.

## **DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA**

---

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).  
*Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE GRAL. SARMIENTO**

**Instituto de Ciencias**

**Tesis de Doctorado**

**Problemas de Identificación en Modelos de Transporte de  
Parámetros Distribuidos**

**Guillermo Federico Umbricht**

**Director: Diana Rubio**

**Co-Director: Claudio El Hasi**

**Consejero: Rodolfo Echarri**

Octubre de 2021



*Dedicado a todos los que  
creyeron que era posible*





# Agradecimientos

Haber realizado un trabajo como éste es producto del esfuerzo de muchas personas durante muchos años. Quiero aprovechar esta ocasión para expresarles mis más sinceros agradecimientos.

Quiero agradecer especialmente a:

Mi directora, la doctora Diana Rubio, por el aporte significativo a mi formación durante los últimos años y por la colaboración impartida para la realización de este trabajo. Sin su incondicional apoyo no lo hubiese podido hacer.

Mi co-director, el doctor Claudio El Hasi, por las diligentes conversaciones tenidas durante el proceso de trabajo sobre diferentes temáticas.

A mi consejero de estudios y amigo, el Doctor Rodolfo Echarri, por estar siempre predispuesto a escuchar y colaborar con cualquier inquietud, por el tiempo que me ha dedicado y por sentarse a pensar conmigo durante horas cualquier idea loca que se me ocurra.

Al Doctor Domingo Tarzia, por los valiosos y productivos días enteros de trabajo compartido.

A la Doctora Mabel Rodriguez, por creer en mí, por brindarme su apoyo y su confianza.

A Natalia Engelhardt, por leer minuciosamente esta tesis, realizar correcciones y

## *AGRADECIMIENTOS*

---

sugerencias.

A mis amigos, Diego, Hernán, Lugo, Juan Pablo, el colo, por estar siempre, por creer en mí y por acompañarme en este proceso.

A muchas otras personas que de una u otra manera han aportado para que pueda llegar a esta instancia, Anita, Luis, Marisol, Norma, Eva, Cristina, Adriana, Olga, Gabriel, Ceci.

# Índice general

Portada y Formulario E	XIII
Índice General	XIX
Índice de Figuras	XXI
Índice de Cuadros	XXII
Nomenclatura	XXIII
Resumen	XXIX
Abstract	XXXIII
Introducción	XXXVII
Publicaciones	XLIII
<b>1. Conceptos Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas de Parámetros Distribuidos . . . . .	2
1.2. Fenómenos de Transporte . . . . .	3
1.2.1. Conducción . . . . .	4
1.2.2. Convección . . . . .	6
1.3. Problemas Inversos . . . . .	7
1.3.1. Problemas Inversos en Procesos de Transferencia de Calor . . .	8

## ÍNDICE GENERAL

---

1.3.2.	Métodos de Resolución de Problemas Inversos . . . . .	10
1.4.	Estimación de Parámetros . . . . .	11
1.5.	Problemas mal Planteados . . . . .	12
1.5.1.	Métodos de Regularización . . . . .	14
1.5.2.	Parámetro de Regularización . . . . .	15
1.6.	Sensibilidad . . . . .	16
1.7.	Elasticidad . . . . .	17
1.8.	Diseño Óptimo . . . . .	18
<b>2.</b>	<b>Un Problema de Transporte</b>	<b>20</b>
2.1.	Aspectos Analíticos . . . . .	21
2.1.1.	Presentación del Problema . . . . .	21
2.1.2.	Resultados Auxiliares . . . . .	23
2.1.3.	Solución Analítica . . . . .	35
2.2.	Aspectos Numéricos . . . . .	38
2.2.1.	Métodos Numéricos . . . . .	38
2.2.2.	Solución Numérica . . . . .	39
2.2.3.	Convergencia y Estabilidad . . . . .	42
2.2.4.	Ejemplos Numéricos . . . . .	43
2.3.	Conclusiones . . . . .	51
<b>3.</b>	<b>Determinación de la Difusividad Térmica</b>	<b>54</b>
3.1.	Presentación del Problema . . . . .	56
3.2.	Determinación de la Difusividad Térmica . . . . .	57
3.3.	Ejemplos Numéricos . . . . .	57
3.3.1.	Criterio 1 . . . . .	59
3.3.2.	Criterio 2 . . . . .	62
3.3.3.	Criterio 3 . . . . .	65
3.3.4.	Comparación de los criterios . . . . .	66
3.4.	Análisis de Sensibilidad . . . . .	67

3.5. Diseño Óptimo . . . . .	73
3.6. Conclusiones . . . . .	78
<b>4. Estimación del Coeficiente de Película</b>	<b>80</b>
4.1. Presentación del Problema . . . . .	82
4.2. Estimación del Coeficiente de Película . . . . .	83
4.2.1. Método Clásico ( $h = cte$ ) . . . . .	84
4.2.2. Método Propuesto ( $h = h(t)$ ) . . . . .	87
4.3. Análisis de Elasticidad . . . . .	91
4.4. Comparación de Ambos Métodos . . . . .	93
4.5. Conclusiones . . . . .	101
<b>5. Identificación de la Fuente</b>	<b>102</b>
5.1. Presentación del Problema . . . . .	105
5.2. Identificación de la fuente . . . . .	106
5.3. Solución de Regularización . . . . .	109
5.4. Análisis del Error . . . . .	112
5.4.1. Resultados Auxiliares . . . . .	112
5.4.2. Cota Analítica del Error . . . . .	116
5.5. Ejemplos Numéricos . . . . .	119
5.6. Conclusiones . . . . .	129
<b>6. Un Problema con Interfaz</b>	<b>130</b>
6.1. Presentación del Problema . . . . .	131
6.2. Estado Estacionario . . . . .	133
6.2.1. Solución Analítica . . . . .	133
6.2.2. Ejemplos Numéricos . . . . .	136
6.3. Estado Evolutivo . . . . .	139
6.3.1. Resultados Auxiliares . . . . .	140
6.3.2. Solución Analítica . . . . .	146
6.3.3. Solución Numérica . . . . .	151

## ÍNDICE GENERAL

---

6.3.4. Ejemplos Numéricos . . . . .	154
6.4. Conclusiones . . . . .	160
<b>7. Localización del Punto de Contacto</b>	<b>162</b>
7.1. Presentación del Problema . . . . .	163
7.2. Determinación del Parámetro . . . . .	163
7.3. Estimación del Error . . . . .	166
7.4. Análisis de Elasticidad . . . . .	168
7.4.1. Comportamiento Asintótico . . . . .	169
7.4.2. Signo . . . . .	170
7.4.3. Monotonía . . . . .	171
7.5. Ejemplos Numéricos . . . . .	171
7.6. Método Mejorado . . . . .	179
7.7. Conclusiones . . . . .	181
<b>Conclusiones Generales</b>	<b>182</b>
<b>Posibles Líneas de Investigación Futura</b>	<b>184</b>
<b>Apéndices</b>	<b>185</b>
<b>A. Diferencias Finitas</b>	<b>186</b>
A.1. Sobre el Método . . . . .	186
A.2. Definiciones de Distintas Diferencias . . . . .	188
A.3. Sobre los Errores de Aproximación . . . . .	189
<b>B. Fundamentación Física de la Convección</b>	<b>192</b>
B.1. El proceso de Convección . . . . .	192
B.2. Número Adimensional de Nusselt . . . . .	194
B.3. Capa Límite Térmica . . . . .	194
B.4. Número Adimensional de Prandtl . . . . .	195
B.5. Mecanismos de Transferencia de Calor por Convección . . . . .	195

*ÍNDICE GENERAL*

---

B.6. Convección Natural . . . . .	196
B.7. Coeficiente de Expansión Volumétrica . . . . .	197
B.8. Número Adimensional de Grashof . . . . .	198
B.9. Relación entre los Números Adimensionales . . . . .	198
<b>Bibliografía</b>	<b>200</b>
<b>Índice Alfabético</b>	<b>235</b>





# Índice de Figuras

2.1. Esquema del problema de transporte estudiado. . . . .	22
2.2. Casos particulares de la Ecuación (2.5). . . . .	24
2.3. Mallado bidimensional. . . . .	41
2.4. Ejemplo 2.18: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . . .	44
2.5. Ejemplo 2.18: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para $t = 5 h$ (izquierda) y $t = 25 h$ (derecha). . . . .	45
2.6. Ejemplo 2.18: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha). . . . .	46
2.7. Ejemplo 2.20: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . . .	47
2.8. Ejemplo 2.20: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para $t = 2 h$ (izquierda) y $t = 15 h$ (derecha). . . . .	47
2.9. Ejemplo 2.20: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha). . . . .	48
2.10. Ejemplo 2.21: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . . .	49
2.11. Ejemplo 2.21: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para $t = 2 h$ (izquierda) y $t = 15 h$ (derecha). . . . .	49
2.12. Ejemplo 2.21: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha). . . . .	50

ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.1. Ejemplo 3.8: Perfiles temporales de sensibilidad en valor absoluto para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . . .	71
3.2. Ejemplo 3.8: Perfiles espaciales de sensibilidad en valor absoluto para diferentes materiales. Para $t = 5 h$ (izquierda) y $t = 15 h$ (derecha). . . . .	72
3.3. Ejemplo 3.8: Función de sensibilidad en valor absoluto. Plomo (izquierda) y Hierro (derecha). . . . .	73
3.4. Ejemplo 3.8: Función de sensibilidad en valor absoluto (izquierda) y perfil espacial de sensibilidad en $t = 21 h$ (derecha) para una barra de Cobre. . . . .	75
3.5. Ejemplo 3.8: Distribución de temperatura (izquierda) y perfil espacial de temperatura en $t = 21 h$ (derecha) para una barra de Cobre. . . . .	77
4.1. Ejemplo 4.2: Valores constantes de $h$ (izquierda) y perfiles temporales de temperatura en en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha) para diferentes materiales. . . . .	86
4.2. Esquema del balance de energía térmica en un elemento de la barra. . . . .	87
4.3. Esquema del balance de energía térmica en el último elemento de la barra. . . . .	88
4.4. Ejemplo 4.5: Perfiles temporales de $h = h(t)$ (izquierda) y de temperatura en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha) para diferentes materiales. . . . .	90
4.5. Ejemplo 4.7: Perfiles temporales en valor absoluto de elasticidad en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (izquierda) y perfiles espaciales en valor absoluto de elasticidad en $t = 25 h$ (derecha); para diferentes materiales utilizando $h = h(t)$ . . . . .	92
4.6. Ejemplo 4.8: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) para diferentes materiales. . . . .	94
4.7. Ejemplo 4.9: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho ( $x = L$ ) de una barra de Plomo para diferentes fuentes. . . . .	97

ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.8. Ejemplo 4.10: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho ( $x = L$ ) de una barra de Plomo de diferentes longitudes. . . . .	100
5.1. Ejemplo 5.19: Fuentes no regularizadas (izquierda) con $t_0 = 1 s$ (arriba), $t_0 = 5 s$ (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con $t_0 = 1 s$ , $p = 0, 3$ (arriba), $t_0 = 5 s$ , $p = 1$ (abajo) para diferentes niveles de ruido. . . . .	121
5.2. Ejemplo 5.20: Fuentes no regularizadas (izquierda) con $t_0 = 0, 1 s$ (arriba), $t_0 = 0, 5 s$ (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con $t_0 = 0, 1 s$ , $p = 2$ (arriba), $t_0 = 0, 5 s$ , $p = 0, 2$ (abajo) para diferentes niveles de ruido. . . . .	123
5.3. Ejemplo 5.21: Fuentes no regularizadas (izquierda) con $t_0 = 0, 1 s$ (arriba), $t_0 = 0, 5 s$ (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con $t_0 = 0, 1 s$ , $p = 1$ (arriba), $t_0 = 0, 5 s$ , $p = 0, 2$ (abajo) para diferentes niveles de ruido. . . . .	125
5.4. Ejemplo 5.22: Fuentes no regularizadas (izquierda) con $t_0 = 0, 2 s$ (arriba), $t_0 = 2 s$ (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con $t_0 = 0, 2 s$ , $p = 2$ (arriba), $t_0 = 2 s$ , $p = 4$ (abajo) para diferentes niveles de ruido. . . . .	127
6.1. Esquema del problema con interfaz. . . . .	133
6.2. Ejemplo 6.4: Perfiles estacionarios de temperatura para diferentes materiales y distintos puntos de contacto. . . . .	137
6.3. Ejemplo 6.5: Perfiles estacionarios de temperatura para barras de Plomo-Material (izquierda) y Material-Plata (derecha) con diferentes materiales. . . . .	138
6.4. Casos particulares del Lema 6.6. . . . .	140
6.5. Casos particulares de la Ecuación (6.11). . . . .	141
6.6. Ejemplo 6.18: Perfiles temporales de temperatura para barras de Plomo-Material utilizando diferentes materiales. En la interfaz ( $x = l$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . .	155
6.7. Ejemplo 6.18: Perfiles espaciales de temperatura para barras de Plomo-Material utilizando diferentes materiales. Para $t = 5 h$ (izquierda) y $t = 45 h$ (derecha). . . . .	156

ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.8. Ejemplo 6.18: Distribución de temperatura. Plomo-Hierro (izquierda) y Plomo-Cobre (derecha). . . . .	156
6.9. Ejemplo 6.19: Perfiles temporales de temperatura para barras de Material-Plata utilizando diferentes materiales. En la interfaz ( $x = l$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha). . . .	157
6.10. Ejemplo 6.19: Perfiles espaciales de temperatura para barras de Material-Plata utilizando diferentes materiales. Para $t = 2h$ (izquierda) y $t = 15h$ (derecha). . . . .	158
6.11. Ejemplo 6.19: Distribución de temperatura. Niquel-Plata (izquierda) y Aluminio-Plata (derecha). . . . .	159
7.1. Ejemplo 7.9: Elasticidad de $l$ en función de $q$ para una barra de Plomo-Cobre (izquierda) y una de Plomo-Plata (derecha). . . . .	174
7.2. Ejemplo 7.10: Elasticidad de $l$ en función de $q$ para una barra de Cobre-Plomo (izquierda) y una de Plata-Plomo (derecha). . . . .	176
7.3. Ejemplo 7.11: Elasticidad de $l$ en función de $q$ para una barra de Hierro-Niquel (izquierda) y una de Niquel-Hierro (derecha). . . . .	178

# Índice de Cuadros

2.1.	Primeras 10 soluciones positivas de la ecuación $tg(2x) = -\frac{3}{5}x$ . . . . .	24
2.2.	Propiedades térmicas de diferentes materiales. . . . .	44
3.1.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando 3 datos equiespaciados ( $x = 0, x = L/2, x = L$ ) en $t = 12h$ para diferentes niveles de ruido. . . . .	59
3.2.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando 3 datos equiespaciados ( $x = 0, x = L/2, x = L$ ) en $t = 24h$ para diferentes niveles de ruido. . . . .	60
3.3.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando $n$ datos equiespaciados en $t = 12h$ para $\epsilon = 1^\circ C$ . . . . .	61
3.4.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando $n$ datos equiespaciados en $t = 24h$ para $\epsilon = 1^\circ C$ . . . . .	61
3.5.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando 3 datos temporalmente equiespaciados ( $t = 5h, t = 15h, t = 25h$ ) en $x = L/2$ para diferentes niveles de ruido. . . . .	62
3.6.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando 3 datos temporalmente equiespaciados ( $t = 5h, t = 15h, t = 25h$ ) en $x = L$ para diferentes niveles de ruido. . . . .	63
3.7.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando $n$ datos temporalmente equiespaciados en $x = L/2$ para $\epsilon = 1^\circ C$ . . . . .	64
3.8.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando $n$ datos temporalmente equiespaciados en $x = L$ para $\epsilon = 1^\circ C$ . . . . .	64
3.9.	Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de $\alpha^2$ tomando 9 datos en $(0, 5h); (0, 15h); (0, 25h); (L/2, 5h); (L/2, 15h); (L/2, 25h); (L, 5h); (L, 15h); (L, 25h)$ para diferentes niveles de ruido. . . . .	65

3.10. Tiempos óptimos de toma de mediciones para diferentes posiciones en una barra de Cobre. . . . .	76
4.1. Ejemplo 4.2: Valores de $h$ y $u(L, t_\infty)$ para diferentes materiales. . . . .	85
4.2. Estimaciones de $Q/Q_f (\times 10^{-5})$ (4.7) para diferentes materiales disipando en aire. . . . .	89
4.3. Ejemplo 4.8: Valores de $h$ y $u(L, t_\infty)$ para diferentes materiales. . . . .	94
4.4. Ejemplo 4.9: Parámetros térmicos del fluido (aire) para diferentes temperaturas. . . . .	96
4.5. Ejemplo 4.9: Valores de $h$ y $u(L, t_\infty)$ para diferentes fuentes. . . . .	97
4.6. Ejemplo 4.10: Parámetros térmicos del fluido (aire) para barras de diferentes longitudes. . . . .	99
4.7. Ejemplo 4.10: Valores de $h$ y $u(L, t_\infty)$ para barras de diferentes longitudes. . . . .	99
5.1. Ejemplo 5.19: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo $t_0 = 1$ s y $p = 1$ . . . . .	121
5.2. Ejemplo 5.20: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo $t_0 = 1$ s y $p = 1$ . . . . .	123
5.3. Ejemplo 5.21: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo $t_0 = 1$ s y $p = 1$ . . . . .	125
5.4. Ejemplo 5.22: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo $t_0 = 1$ s y $p = 1$ . . . . .	127
6.1. Primeras 10 soluciones positivas de la Ecuación (6.12). . . . .	142
7.1. Ejemplo 7.9: Estimación de $l$ para una barra de Plomo-Cobre. . . . .	173
7.2. Ejemplo 7.9: Estimación de $l$ para una barra de Plomo-Plata. . . . .	173
7.3. Ejemplo 7.10: Estimación de $l$ para una barra de Cobre-Plomo . . . . .	175
7.4. Ejemplo 7.10: Estimación de $l$ para una barra de Plata-Plomo. . . . .	175
7.5. Ejemplo 7.11: Estimación de $l$ para una barra de Hierro-Niquel. . . . .	177
7.6. Ejemplo 7.11: Estimación de $l$ para una barra de Niquel-Hierro. . . . .	177
7.7. Estimación de $l$ para una barra de Hierro-Niquel utilizando $n$ mediciones de flujo térmico. . . . .	180

# Nomenclatura

## Mayúsculas

- $A$  — Conjunto admisible de toma de datos.
- $Ag$  — Símbolo químico de la Plata.
- $Al$  — Símbolo químico del Aluminio.
- $Cu$  — Símbolo químico del Cobre.
- $E_e$  — Elasticidad exacta.
- $E_m$  — Elasticidad mínima.
- $E_M$  — Elasticidad máxima.
- $E_u^h$  — Elasticidad de  $u$  con respecto a  $h$ .
- $E_l^q$  — Elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$ .
- $F$  — Fuente puntual [ $^{\circ}\mathbf{C}$ ].
- $Fe$  — Símbolo químico del Hierro.
- $F_{flot}$  — Fuerza de flotabilidad [ $\mathbf{N}$ ].
- $F_N$  — Fuerza neta vertical sobre el cuerpo [ $\mathbf{N}$ ].
- $G_r$  — Número adimensional de Grashof.
- $J$  — Funcional de minimización.
- $L$  — Longitud de la barra [ $\mathbf{m}$ ].
- $Ni$  — Símbolo químico del Niquel.
- $N_u$  — Número adimensional de Nusselt.

## NOMENCLATURA

---

- $P$  — Peso del cuerpo [**N**].
- $Pb$  — Símbolo químico del Plomo.
- $P_r$  — Número adimensional de Prandtl.
- $Q$  — Flujo térmico en el último elemento de la barra [**W/m<sup>2</sup>**].
- $Q_1$  — Flujo térmico entrante a un elemento de la barra [**W/m<sup>2</sup>**].
- $Q_2$  — Flujo térmico que permanece en un elemento de la barra [**W/m<sup>2</sup>**].
- $Q_3$  — Flujo térmico saliente de un elemento de la barra [**W/m<sup>2</sup>**].
- $Q_f$  — Flujo térmico en el fluido [**W/m<sup>2</sup>**].
- $R_a$  — Número adimensional de Rayleigh.
- $R_\mu$  — Operador de regularización.
- $S$  — Área transversal de un elemento infinitesimal de la barra [**m<sup>2</sup>**].
- $S_D^{p_i}$  — Sensibilidad de  $D$  con respecto al parámetro  $p_i$ .
- $S_u^{\alpha^2}$  — Sensibilidad de  $u$  con respecto a  $\alpha^2$  [(°C s<sup>2</sup>)/**m**].
- $S_M$  — Sensibilidad máxima [(°C s<sup>2</sup>)/**m**].
- $Sn$  — Símbolo químico del Estaño.
- $T_a$  — Temperatura ambiente [°C].
- $V_c$  — Volumen del cuerpo [**m<sup>3</sup>**].

### Minúsculas

- $c_p$  — Calor específico [**J/kg °C**].
- $c_{p_f}$  — Calor específico del fluido [**J/kg °C**].
- $d$  — Diámetro de la barra [**m**].
- $f$  — Fuente [°C].
- $\tilde{f}$  — Fuente [°C].
- $f_n$  — Desarrollo en serie de la fuente [°C].
- $f_\delta$  — Fuente ruidosa [°C].



NOMENCLATURA

---

- $f_{\delta,\mu}$  — Fuente regularizada [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $g$  — Aceleración gravitacional [ $\text{m}/\text{s}^2$ ].
- $h$  — Coeficiente de película [ $\text{W}/(\text{m}^2\text{C})$ ].
- $l$  — Posición de interfaz [ $\text{m}$ ].
- $l_{\epsilon}$  — Aproximación de la posición de interfaz [ $\text{m}$ ].
- $q$  — Flujo térmico [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $q_{\epsilon}$  — Flujo térmico ruidoso [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $q_m$  — Flujo térmico mínimo [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $q_M$  — Flujo térmico máximo [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $q_p$  — Flujo térmico promedio [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $\dot{q}_{cond}$  — Flujo térmico conductivo [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $\dot{q}_{conv}$  — Flujo térmico convectivo [ $\text{W}/\text{m}^2$ ].
- $t$  — Variable temporal [ $\text{s}$ ].
- $t_j$  — Instante de tiempo particular [ $\text{s}$ ].
- $t_0$  — Tiempo de toma de mediciones [ $\text{s}$ ].
- $t_{\infty}$  — Tiempo relativo al estado estacionario [ $\text{s}$ ].
- $u$  — Temperatura de la barra [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $u_e$  — Temperatura en estado estacionario [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $u_{\epsilon}$  — Medición de temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $u_s$  — Temperatura en la superficie [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $u_0$  — Temperatura externa a la barra [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $u_{\infty}$  — Temperatura lejos de la superficie [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $v$  — Temperatura de la barra (función auxiliar) [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $w$  — Temperatura de la barra (función auxiliar) [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- $x$  — Variable espacial [ $\text{m}$ ].
- $\boldsymbol{x}$  — Vector de toma de datos.
- $x_i$  — Posición particular sobre la barra [ $\text{m}$ ].

## NOMENCLATURA

---

- $y$  — Mediciones de temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ].  
 $y_{\delta}$  — Mediciones ruidosas de temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ].

### Letras Griegas

- $\alpha^2$  — Coeficiente de difusividad térmica [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].  
 $\hat{\alpha}^2$  — Coeficiente de difusividad térmica estimado [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].  
 $\alpha_A^2$  — Coeficiente de difusividad térmica del material  $A$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].  
 $\alpha_B^2$  — Coeficiente de difusividad térmica del material  $B$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].  
 $\alpha_M^2$  — Coeficiente de difusividad térmica del material [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].  
 $\beta$  — Velocidad del fluido [ $\text{m}/\text{s}$ ].  
 $\beta_V$  — Coeficiente de expansión volumétrica [ $1/\text{K}$ ].  
 $\delta$  — Espesor de la capa límite térmica [ $\text{m}$ ].  
 $\delta_M$  — Ruido máximo.  
 $\Delta x$  — Paso espacial de discretización [ $\text{m}$ ].  
 $\Delta t$  — Paso temporal de discretización [ $\text{s}$ ].  
 $\Delta u$  — Variación de temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\Delta E$  — Variación de elasticidad .  
 $\overline{\Delta u_c}$  — Variación de temperatura media en el cuerpo [ $^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\overline{\Delta u_f}$  — Variación de temperatura media en el fluido [ $^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\epsilon$  — Cota para el error de medición.  
 $\epsilon_i$  — Ruido simulado.  
 $\varphi$  — Temperatura de la barra (función auxiliar) [ $^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\kappa$  — Coeficiente de conductividad térmica [ $\text{W}/\text{m }^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\kappa_A$  — Coeficiente de conductividad térmica del material  $A$  [ $\text{W}/\text{m }^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\kappa_B$  — Coeficiente de conductividad térmica del material  $B$  [ $\text{W}/\text{m }^{\circ}\text{C}$ ].  
 $\kappa_C$  — Coeficiente de conductividad térmica del cuerpo [ $\text{W}/\text{m }^{\circ}\text{C}$ ].

## NOMENCLATURA

---

- $\kappa_f$  — Coeficiente de conductividad térmica del fluido [ $\text{W}/\text{m } ^\circ\text{C}$ ].
- $\kappa_m$  — Coeficiente de conductividad térmica mínimo [ $\text{W}/\text{m } ^\circ\text{C}$ ].
- $\kappa_M$  — Coeficiente de conductividad térmica máximo [ $\text{W}/\text{m } ^\circ\text{C}$ ].
- $\nu$  — Ritmo de intercambio de calor por flujo lateral [ $1/\text{s}$ ].
- $\nu_c$  — Viscosidad cinemática del fluido [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].
- $\mu_d$  — Viscosidad dinámica del fluido [ $\text{kg}/\text{m s}$ ].
- $\mu^2$  — Parámetro de regularización.
- $\Theta$  — Conjunto admisible de soluciones.
- $\theta$  — Vector de parámetros desconocidos.
- $\rho$  — Densidad [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].
- $\rho_c$  — Densidad del cuerpo [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].
- $\rho_f$  — Densidad del fluido [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].
- $\rho_\infty$  — Densidad del fluido lejos de la superficie del cuerpo [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].
- $\sigma^2$  — Varianza.
- $\tau_1$  — Parámetro de estabilidad.
- $\tau_2$  — Parámetro de estabilidad.
- $\tau_3$  — Parámetro de estabilidad.



# Resumen

En esta tesis se aborda el estudio de diferentes problemas inversos en un modelo de parámetros distribuidos de ciertos procesos de transporte con dos finalidades. Por un lado, se busca mejorar el modelo, obtener un mejor diseño que sea más preciso, apropiado para el control y que describa mejor el problema físico de interés. Por otro lado, se pretende construir diferentes estrategias para mejorar y facilitar las técnicas o procesos de medición.

Específicamente, se considera el problema de transferencia de calor de una barra embebida en un fluido (líquido o gaseoso) en movimiento con velocidad constante. En el borde izquierdo se impone una condición de tipo Dirichlet que indica temperatura constante y en el derecho de tipo Robin para modelar el fenómeno de convección.

Se analizan aquí dos problemas particulares dentro del modelo de estudio. En el primero, el proceso de transporte ocurre en una barra construida con un material isótropo y homogéneo. Ésta permite el intercambio de calor a ritmo constante con el medio circundante. Además, está afectada por un conjunto de fuentes que dependen de la posición. En el segundo problema, se considera una barra compuesta por dos segmentos consecutivos con interfaz sólido-sólido, donde cada tramo corresponde a un material isótropo y homogéneo, en este caso no hay generación de calor (fuentes) y como la misma se encuentra totalmente aislada en su superficie lateral, no hay términos disipativos. Hallar una solución a estos problemas, conociendo todos los

parámetros del modelo y las condiciones de borde, se lo denomina problema directo. En general, las soluciones analíticas y numéricas del problema directo pueden ser obtenidas, mediante diferentes técnicas de Fourier y métodos de diferencias finitas, respectivamente. El tesista no ha encontrado en la bibliografía una expresión analítica o la demostración de existencia y unicidad de solución de estos problemas. Hay diversos trabajos que abordan problemas con características similares al primero de los mencionados; las soluciones son incluidas en esta tesis con el fin de presentar un trabajo autocontenido.

Para obtener una caracterización matemática más precisa del fenómeno estudiado y desarrollar criterios que mejoren las técnicas de medición; se puede recurrir a la estimación de parámetros del modelo y/o identificación de fuentes del mismo. Éstos son denominados problemas inversos y se encuentran relacionados con el problema directo. En esta tesis se tratan cuatro problemas inversos, tres asociados al primer problema directo y uno asociado al segundo.

- En el primer problema inverso se trata la determinación de la difusividad térmica del material de la barra. Ésta se realiza mediante técnicas numéricas de optimización, a partir de datos ruidosos de temperatura, tomados con tres criterios diferentes. Se estudia bajo un análisis numérico de sensibilidad, en qué posiciones e instantes de tiempo es conveniente ubicar los sensores de temperatura para obtener una mejor estimación.
- El segundo problema inverso consiste en la estimación del coeficiente de transferencia de calor. Habitualmente, en la literatura se considera un parámetro constante que depende de la temperatura estacionaria de la pared disipativa. En esta tesis se propone un nuevo enfoque que tiene en cuenta la variación temporal de temperatura en la pared. Para analizar el rendimiento de la nueva técnica, se realizan análisis de temperatura y elasticidad mediante experi-

mentos numéricos y se comparan los resultados obtenidos con los del método tradicional.

- En el tercer problema inverso se aborda la identificación de la fuente, a partir de mediciones ruidosas de temperatura tomadas en un tiempo fijo arbitrario. El problema se resuelve analíticamente con técnicas de Fourier y se muestra que dicha solución resulta no ser estable. La no estabilidad de la solución se trata mediante una familia uni-paramétrica de operadores de regularización, diseñados para compensar el factor que causa la inestabilidad del operador inverso. Se propone, además, una técnica para la elección del parámetro de regularización y se obtiene una cota óptima de tipo Hölder para el error de estimación. La resolución que aquí se presenta generaliza las ideas usadas por otros autores para la ecuación de calor a una ecuación parabólica completa donde las mediciones de temperatura pueden ser tomadas en cualquier instante y se utiliza la teoría de operadores para su formalización. Estas diferencias dan lugar a una nueva propuesta que permite ser usada de manera más general en otros problemas.
- Por último, el problema inverso asociado al segundo problema directo consiste en la localización del punto de contacto entre los dos materiales, a partir de una única medición de flujo térmico en el borde derecho de la barra. El problema se resuelve analíticamente y se da una cota para el error cometido en la aproximación. Además, se realiza un análisis de elasticidad para conocer la dependencia local del parámetro estimado con el dato utilizado.

**Palabras Clave:** Transferencia de calor, Problema inverso, Sensibilidad, Elasticidad, Regularización.

**Clasificación Matemática (MSC 2010):** 80A20, 80A23, 80M20, 90C31.





# Abstract

This thesis addresses the study of different inverse problems for a distributed parameter model of certain transport processes with two purposes. On the one hand, it seeks to improve the model, obtain a better design that is more precise, appropriate for control and that better describes the physical problem of interest. On the other hand, it seeks to build different strategies to improve and facilitate measurement techniques or processes.

Specifically, the heat transfer problem of a bar embedded in a fluid (liquid or gaseous) moving with constant speed is considered. A Dirichlet-type condition indicating constant temperature is imposed on the left edge, and a Robin-type condition that models the convection phenomenon is applied on the right.

Two particular problems within the study model are analyzed here. In the first one, the transport process occurs along a bar of an isotropic and homogeneous material. This allows the exchange of heat at a constant rate with the surrounding environment. In addition, it is assumed that the bar is affected by a set of sources that depend on position. In the second problem, a bar composed of two consecutive segments with a solid-solid interface is considered, where each section corresponds to an isotropic and homogeneous material. In this case there is no heat generation (sources) and as it is totally isolated on its surface side, there are no dissipative terms. Finding a solution to these problems, knowing all the parameters of the model and

## ABSTRACT

---

the boundary conditions, is called a direct problem. In general, the analytical and numerical solutions of the direct problem can be obtained, using different Fourier techniques and finite difference methods, respectively. The thesis has not found in the bibliography an analytical expression or the demonstration of the existence and uniqueness for these problems. There are various works that address problems with similar characteristics to the first one mentioned; their solutions are included in this thesis in order to present a self-contained work.

To obtain a more precise mathematical characterization of the studied phenomenon and develop criteria that improve measurement techniques; to estimation of model parameters and / or identification of its sources can be addressed. These are called inverse problems and are related to the problem direct. In this thesis, four inverse problems are treated. Three of them are studied associated with the first direct problem, and the other one is associated with the second one.

- The first inverse problem deals with the determination of the thermal diffusivity of the bar material. This is done using numerical optimization techniques, based on noisy temperature data, taken with three different criteria. It is studied under a numerical sensitivity analysis, in which positions and instants of time it is convenient to locate the temperature sensors to obtain a better estimate.
- The second inverse problem consists of estimating the transfer coefficient of heat. Usually, in the literature, it is considered as a constant parameter that depends on the stationary temperature of the dissipative wall. In this thesis a new approach is proposed that takes into account the temporal variation of temperature on the wall. To analyze the performance of the new technique, temperature and elasticity analyzes are carried out through numerical experiments and the results obtained are compared with those of the traditional

## ABSTRACT

---

method.

- The third inverse problem addresses the identification of the source, based on noisy measurements temperature taken at an arbitrary fixed time. The problem is solved analytically with Fourier techniques and it is shown that said solution turns out to be unstable. The non-stability of the solution is treated by a family uni-parametric regularization operators, designed to compensate for the factor which causes the inverse operator instability. In addition, a rule is proposed for the choice of the regularization parameter and an optimal bound of Hölder type for the estimation error is obtained. The resolution presented here generalizes the ideas proposed by other authors for the heat equation to a complete parabolic equation where temperature measurements can be taken at any moment and the operator theory is used for its formalization. These differences give rise to a new proposal that allows it to be used more generally in other problems.
- Finally, the inverse problem to the second direct problem consists of locating the point of contact between the two materials, from a single measurement of heat flow on the right edge of the bar. The problem is solve analytically and give a bound for the error made in the approximation. In addition, an elasticity analysis is carried out to know the local dependence of the parameter estimated with the data used.

**Key words:** Heat transfer, Inverse problem, Sensitivity, Elasticity, Regularization.

**Mathematics Subject Classification 2010:** 80A20, 80A23, 80M20, 90C31.



# Introducción

La teoría del problema inverso constituye una rama moderna de la matemática aplicada que en la actualidad es utilizada por las distintas áreas de la ciencia y la ingeniería. Inicialmente, y en su sentido más amplio, ha sido desarrollada por investigadores que centran su estudio en la geofísica, quienes tuvieron la necesidad de implementar una teoría que les permita dar respuestas sobre el análisis del objeto de estudio de sus modelos matemáticos. La razón principal del nacimiento de ésta, radica en que estos investigadores buscan entender los fenómenos que ocurren en el interior de la tierra y para ello la única información disponible consiste en un conjunto de datos obtenidos en la superficie.

Entre los problemas inversos que aparecen en la bibliografía se encuentran los de identificación en sistemas de parámetros distribuidos. Estos problemas están relacionados con diferentes procesos de transferencia de energía, masa e información que involucran procesos físicos, biológicos y/o químicos de gran relevancia, tanto desde el punto de vista teórico y práctico, como técnico.

La identificación en sistemas de parámetros distribuidos son problemas matemáticos de optimización cuyo objetivo es la determinación de parámetros desconocidos en un modelo matemático conocido, a partir de datos observados, medidos y/o simulados, tal que la respuesta del modelo resultante sea cercana, en cierta norma, o con algún criterio, a las observaciones y/o mediciones físicas del proceso.

## INTRODUCCIÓN

---

Por lo general se introducen simplificaciones y/o suposiciones en el modelo. En muchos casos, es de interés saber en qué medida estas simplificaciones pueden o no afectar a la solución del problema. Para tal fin, se utilizan distintas técnicas de análisis de sensibilidad que cuantifican la influencia de los parámetros del modelo en las soluciones aproximadas obtenidas, como así también la influencia de los datos, observaciones y mediciones en la estimación de los parámetros de dicho modelo.

Para realizar la identificación de parámetros en un problema particular es importante obtener un diseño apropiado, pues las soluciones aproximadas deben ser confiables si se quieren utilizar para predecir resultados bajo posibles situaciones o el comportamiento de procesos a lo largo del tiempo. Un modelo inadecuado puede conducir a resultados erróneos, los que pueden desembocar en toma de decisiones equivocadas. Para conseguir esta situación deseable, se puede utilizar la teoría de diseño óptimo, la cual busca dar respuesta a cómo y cuándo ubicar los sensores tal que la información contenida en las señales resultantes sea la más alta posible, dependiendo de los objetivos de los datos tomados.

La identificación en sistemas de parámetros distribuidos son, por lo general, problemas mal planteados donde los métodos numéricos tradicionales se vuelven inestables. Una alternativa práctica para su resolución es la implementación de métodos de regularización. Si bien estos métodos permiten resolver el problema inverso y regularizar las soluciones, en algunos casos no resulta claro cuál es la técnica más adecuada para obtener la solución aproximada apropiada.

Los procesos unidimensionales de transporte de energía térmica fueron estudiados por mucho tiempo. Sin embargo, nuevas aplicaciones y casos particulares los hacen mantener vigentes. Un caso de gran interés en ingeniería es la transferencia de calor en materiales compuestos, en particular, en materiales multicapa, en los que se puede considerar el transporte de calor de manera unidimensional. En esta tesis se aborda el estudio de diferentes técnicas de estimación de parámetros en dos problemas de

## INTRODUCCIÓN

---

transferencia de calor en 1D, con dos objetivos principales. El primero, es mejorar el modelo que se propone con la finalidad de poder usar sus salidas para predecir y/o controlar los procesos de transferencia. El segundo, es definir y/o comparar estrategias que permitan mejorar, facilitar y simplificar los procesos de medición y las técnicas de obtención de datos para la resolución de problemas inversos.

El modelo que se utiliza en este trabajo consiste en el problema de transferencia de calor, de una barra embebida en un fluido (líquido o gaseoso) en movimiento con velocidad constante. En el borde izquierdo se impone una condición de tipo Dirichlet que indica temperatura constante y en el derecho de tipo Robin para modelar el fenómeno de convección. Dentro de este modelo se analizan dos problemas directos particulares. En el primero, se estudia el proceso de transferencia de calor en una barra homogénea e isotrópica embebida en un fluido en movimiento. Ésta permite el intercambio de calor a ritmo constante con el medio circundante. Además, está afectada por un conjunto de fuentes que dependen de la posición. En el segundo, se estudia el proceso de transferencia de calor en una barra compuesta por dos segmentos consecutivos con una interfaz sólido-sólido, donde cada tramo corresponde a un material isótropo y homogéneo, en este caso no hay generación de calor (fuentes) y como la misma se encuentra totalmente aislada en su superficie lateral, no hay términos disipativos.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 se incluye brevemente una serie de conceptos fundamentales, necesarios para la comprensión de este trabajo.

En el capítulo 2 se estudia el primer problema directo de esta tesis. Para describir el problema de interés, se considera una ecuación completa de tipo parabólica. Se obtiene la solución analítica utilizando métodos de Fourier, que son frecuentemente usados para resolver este tipo de ecuaciones en derivadas parciales. El esquema de resolución se basa en un cambio en el sistema de coordenadas que consiste en pasar

## INTRODUCCIÓN

---

de un sistema fijo a uno móvil. Por otro lado, debido a que la expresión de la solución analítica hallada es muy compleja, se resuelve el problema numéricamente utilizando diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Se impone, al modelo numérico, condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

En el capítulo 3 se trata la primera indentificación de parámetros relacionada con el problema directo estudiado en el capítulo 2, que consiste en la determinación de la difusividad térmica; el abordaje de esta determinación es de suma importancia ya que este parámetro es útil para caracterizar la pureza del material en el que se da el proceso de transferencia. La estimación de la difusividad térmica se realiza mediante técnicas numéricas de optimización, a partir de datos ruidosos de temperatura, tomados con tres criterios diferentes. El primero consiste en que las mediciones (datos) son tomadas en un instante de tiempo fijo en distintas posiciones, en el segundo, las mediciones son tomadas en una posición fija para diferentes instantes de tiempo y en el último, las mediciones se toman en diferentes instantes de tiempo y en distintas posiciones. Además, se estudia bajo un análisis numérico de sensibilidad, cuándo y dónde es conveniente ubicar los sensores de temperatura para que la estimación resulte más precisa. Con la finalidad de ilustrar el procedimiento de determinación, se incluyen ejemplos numéricos.

En el capítulo 4 se considera la segunda indentificación de parámetros relacionada con el problema directo estudiado en el capítulo 2, que consiste en la estimación del coeficiente de transferencia de calor. Su determinación es muy compleja debido a que es un coeficiente que depende de múltiples variables, las características generales de la pared disipativa (aspereza y rugosidad), las propiedades físicas del fluido (densidad, viscosidad, expansión volumétrica), entre otras. Habitualmente, en la literatura se considera un parámetro constante que depende de la temperatura estacionaria de la pared disipativa. En este capítulo se propone un nuevo enfoque



## INTRODUCCIÓN

---

que tiene en cuenta la variación temporal de temperatura en la pared. Éste permite obtener un coeficiente de transferencia de calor más preciso y como consecuencia, un mejor modelo para el proceso de transporte, que resulta de utilidad para predecir resultados y controlar las variables. Para analizar el rendimiento de la nueva técnica se realizan análisis de temperatura y elasticidad mediante experimentos numéricos y se comparan los resultados obtenidos con los del método tradicional.

En el capítulo 5 se aborda la tercera indentificación de parámetros relacionada con el problema directo estudiado en el capítulo 2, que consiste en la identificación del término fuente, considerada como una función independiente del tiempo. La complejidad de esta identificación radica en que se busca determinar una función en lugar de un parámetro constante. Su determinación es de suma importancia para el proceso de transporte de energía térmica ya que la fuente es el término de generación de calor y poder identificarla brinda un modelo más preciso que permite predecir con mayor exactitud los resultados del proceso de transferencia. La identificación de la fuente se realiza a partir de mediciones ruidosas de temperatura, tomadas en un tiempo fijo arbitrario, considerando un dominio infinito. El problema se resuelve analíticamente con técnicas de Fourier y se muestra que dicha solución resulta no ser estable. La no estabilidad de la solución se trata mediante una familia uniparamétrica de operadores de regularización, diseñados para compensar el factor que causa la inestabilidad del operador inverso. Se propone, además, una técnica para la elección del parámetro de regularización y se obtiene una cota óptima de tipo Hölder para el error de estimación. La resolución que aquí se presenta generaliza las ideas usadas por otros autores para el caso de la ecuación de calor; en este capítulo se aplica a una ecuación parabólica completa donde las mediciones de temperatura pueden ser tomadas en cualquier instante, además, la formalización utilizada se basa en la teoría de operadores. Estas diferencias dan lugar a una nueva propuesta que permite ser usada de manera más general en otros problemas.

## INTRODUCCIÓN

---

En el capítulo 6 se estudia el segundo problema directo de esta tesis. Para describir el problema de interés, se utiliza la ecuación de calor en un sistema acoplado, donde la difusividad térmica se considera una función constante a trozos. Se obtiene una expresión para la solución analítica de este problema, utilizando métodos de Fourier. Debido a que la expresión de la solución analítica hallada es muy compleja, se resuelve el problema numéricamente utilizando diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Se impone, al modelo numérico, condiciones de estabilidad y se prueba la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

En el capítulo 7 se considera una identificación de parámetros relacionada con el problema directo estudiado en el capítulo 6, que consiste en la localización del punto de contacto entre los materiales; debido a que el parámetro a estimar es constante, se utiliza para la determinación, el problema en régimen estacionario. La localización del punto de contacto se realiza a partir de una única medición ruidosa de flujo térmico en el borde derecho de la barra. Se obtiene una expresión analítica para la determinación de la ubicación de la interfaz y se halla una cota para el error cometido que depende del ruido en la medición. Además, con la finalidad de conocer la dependencia del parámetro estimado con el dato, se realiza un estudio de elasticidad. Ejemplos numéricos, de diferentes características, muestran la utilización del método propuesto.

# Publicaciones

Las ideas que aquí se presentan fueron parcial o totalmente publicadas en diversos trabajos, tanto en actas de congreso como en revistas de investigación nacionales e internacionales.

A continuación se listan las publicaciones y los artículos enviados asociados a los diferentes capítulos de esta tesis.

## Capítulo 2

- Umbricht, G.F., Rubio, D. and El Hasi, C. *Solución analítica de un problema de transferencia de energía térmica con generación de calor, disipación por convección y flujo lateral*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial 8 (2021), pp: 679–682. ISSN: 2314-3282.

<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/>

MACI-Vol-8-2021.pdf

## Capítulo 3

- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Optimal estimation of thermal diffusivity in a thermal energy transfer problem with heat generation, convection dissipation and lateral heat flow*. WSEAS Transactions on Fluid Mechanics (2021). ISSN: 1790-5087/2224-347X. **En prensa**.

<https://wseas.org/cms.action?id=4036>

- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación del coeficiente del término difusivo en una ecuación parabólica completa*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **8** (2021), pp: 325–328. ISSN: 2314-3282.

<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vol-8-2021.pdf>

- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación y análisis de sensibilidad para el coeficiente de difusividad en un problema de conducción de calor*. Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas **6**(12) (2015), pp: 38–58. ISSN 1852-3239.

[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_EstimacinyanlisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_EstimacinyanlisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)

#### Capítulo 4

- Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection*. Latin American Applied Research **50**(3) (2020), pp: 229–234. ISSN: 0327-0793/1851-8796.

<https://doi.org/10.52292/j.laar.2020.179>

- Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *Función de convección en un problema de conducción de calor con interfaz*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **6** (2017), pp: 577–580. ISSN: 2314-3282.

<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-6-2017.pdf>

#### Capítulo 5

- Umbricht, G.F. *Identification of the source for full parabolic equation*. Mathematical Modelling and Analysis **26**(3) (2021), pp: 339–357. ISSN: 1392-6292/1648-3510.  
<https://doi.org/10.3846/mma.2021.12700>
  
- Umbricht, G.F, Rubio, D. and El Hasi, C. *A regularization operator for the source approximation of a transport equation*. Mecánica Computacional **37**(50) (2019), pp: 1993–2002. ISSN: 2591-3522.  
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6032>
  
- Umbricht, G.F. *Estimación de la fuente en una ecuación de Poisson: mediante un método de regularización*. Editorial Académica Española, Riga, Letonia, Unión Europea (2019). ISBN: 978-620-0-33344-5.  
<https://www.eae-publishing.com/catalogue/details/es/978-620-0-33344-5/estimaci%252525C3%252525B3n-de-la-fuente-en-una-ecuaci%252525C3%252525B3n-de-poisson>
  
- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Identificación de la fuente en una ecuación de transferencia de calor en un tejido biológico*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **7** (2019), pp: 405–408. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>
  
- Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Sobre un método de regularización para identificar una fuente en una ecuación elíptica*. Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas **6**(12) (2015), pp: 59–72. ISSN 1852-3239.  
[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_SobreunmtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_SobreunmtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)

## Capítulo 6

- Rubio, D., Tarzia, D.A. and Umbricht, G.F. *Heat transfer process with solid-solid interface: Analytical and numerical solutions*. WSEAS Transactions on Mathematics **20** (2021), pp: 404–414. ISSN: 1109-2769/2224-2880.  
<https://doi.org/10.37394/23206.2021.20.42>

## Capítulo 7

- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface*. International Journal of Heat and Technology **39**(2) (2021), pp. 337–344. ISSN: 0392-8764.  
<https://doi.org/10.18280/ijht.390202>
- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem*. Mathematical Modelling of Engineering Problems **7**(4) (2020), pp: 607–613. ISSN: 2369-0739/2369-0747.  
<http://dx.doi.org/10.18280/mmep.070413>
- Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Problemas inversos asociados a un proceso estacionario de transferencia de calor*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **7** (2019), pp: 593–596. ISSN: 2314-3282.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares

Sin pretender ser exhaustivo y con la intención de realizar un trabajo de carácter auto-contenido, se exhiben en este capítulo una serie de conceptos globales que resultan fundamentales para una mejor comprensión del desarrollo de esta tesis. El tratado de estas temáticas le permitirá al lector que no está suficientemente familiarizado con estos temas, comprender mejor cada una de las problemáticas que se abordan en los siguientes capítulos. En cada sección de este capítulo se da una breve definición y/o clasificación sobre el concepto que interesa presentar, lo que ofrece un marco teórico general del desarrollo de este trabajo. En cada caso, se cita bibliografía pertinente para aquellos lectores que quieran o necesiten profundizar algunos de los temas tratados.

Este capítulo comienza con una breve introducción acerca de *sistemas de parámetros distribuidos*. Luego se define *modelos de transporte* centrándonos en los diferentes procesos de transferencia de calor (conducción, convección). Se continúa con una introducción a *problemas inversos*, se clasifican aquellos que están asociados directamente a fenómenos térmicos y se relaciona dicho concepto con la *estimación de parámetros*. Se incluye una definición de *problemas mal plan-*

## 1.1. SISTEMAS DE PARÁMETROS DISTRIBUIDOS

---

*teados*, se mencionan algunos *métodos de regularización* y una clasificación de *parámetros de regularización*. Se menciona su importancia en la estabilización de *problemas mal planteados*. Se abordan también los conceptos de *sensibilidad*, *elasticidad* y *diseño óptimo*.

### 1.1. Sistemas de Parámetros Distribuidos

Los *sistemas de parámetros distribuidos* [4, 9, 128, 142, 192, 194, 252, 267] son diferentes sistemas dinámicos [243] cuyos estados presentan una fuerte dependencia espacio-temporal. La manera más adecuada de representar estos sistemas es mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [10, 47, 56, 68, 76]. Éstas, pueden utilizar complejos métodos de modelado, planteo, solución y permiten obtener descripciones precisas de los fenómenos físicos.

Los *sistemas de parámetros distribuidos* han sido muy estudiados, analizados y aplicados a la teoría de sistemas dinámicos y control. Esto se debe, esencialmente, a la diversificación de los sistemas industriales y a los fuertes acoples entre dinámicas multi-físicas, en donde objetivos de calidad, monitoreo y control han sido fijados para optimizar las ganancias de la industria.

Este tipo de sistemas son estructuras matemáticas con propiedades particulares compuestas, esencialmente, por tres elementos principales: [106]

1. Las relaciones funcionales de las variables de interés vistas como variaciones en el dominio espacio-temporal (por ejemplo, en problemas de transferencia de calor: variaciones en el tiempo, términos convectivos, términos conductivos, términos difusivos, términos advectivos ).
2. Parámetros de las ecuaciones (por ejemplo, en problemas de transferencia de calor: conductividades térmicas, difusividades térmicas, calores específicos,



## 1.2. FENÓMENOS DE TRANSPORTE

---

densidades, coeficientes de transferencia de calor por convección).

3. Entradas al sistema (acciones externas y perturbaciones).

En este trabajo se estudian *sistemas de parámetros distribuidos* que modelan problemas relacionados con transferencia de energía térmica.

## 1.2. Fenómenos de Transporte

Los *fenómenos de transporte* son muy estudiados en la actualidad debido a la cantidad de aplicaciones directas con las que se relacionan en diferentes campos de la ciencia y la ingeniería, pues se utilizan para analizar la transferencia de masa, energía e información en distintos procesos [41, 106].

Estos procesos se suelen describir mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden de tipo parabólica. En la bibliografía se la puede encontrar con diferentes nombres, entre los más utilizados, ecuación de difusión-advención-reacción, ecuación de difusión-convección-reacción o ecuación diferencial parabólica completa. En una dimensión espacial puede escribirse de la siguiente manera:

$$u_t(x, t) = (\alpha^2(x, t)u_x(x, t))_x - \beta(x, t)u_x(x, t) - \nu(x, t)(u(x, t) - u_0) + f(x, t). \quad (1.1)$$

En esta ecuación los subíndices indican cuáles son las variables respecto de las cuales se deriva parcialmente y cuántas veces. La Ecuación (1.1) puede ser utilizada para modelar múltiples y disímiles situaciones de transferencia. En este trabajo se trata la transferencia unidimensional de calor, a través de diferentes mecanismos, de un cuerpo embebido en un fluido en movimiento. Bajo este supuesto, la función  $u(x, t)$  indica la temperatura en la posición  $x$  en el instante  $t$ ,  $u_t(x, t)$  representa la rapidez de variación de la temperatura con respecto al tiempo, el término  $\alpha^2(x, t)u_{xx}(x, t)$

## 1.2. FENÓMENOS DE TRANSPORTE

---

representa el flujo interno por medio de la difusión donde  $\alpha^2(x, t)$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] es la difusividad térmica propia del material, el término  $\beta(x, t)u_x(x, t)$  indica el flujo debido a la convección donde  $\beta(x, t)$  [ $\text{m/s}$ ] es la velocidad del fluido en movimiento. El término  $\nu(x, t)(u(x, t) - u_0)$  representa el flujo lateral, pues si el cuerpo no está totalmente aislado en la superficie lateral puede intercambiar calor con el medio circundante donde  $\nu(x, t)$  [ $1/\text{s}$ ] indica el ritmo de dicho intercambio y  $u_0$  [ $^\circ\text{C}$ ] es la temperatura exterior. Por último  $f(x, t)$  [ $^\circ\text{C/s}$ ] es el conjunto de fuentes, como por ejemplo, una corriente eléctrica que pasa por una varilla metálica, reacciones químicas o nucleares que ocurren dentro del cuerpo, etc. Para entender mejor estos procesos de intercambio de energía se tratan brevemente los fenómenos de conducción y convección.

### 1.2.1. Conducción

La **conducción** [125, 174] es el proceso de transferencia de energía mediante el cual, a partir de las interacciones moleculares, las partículas con más energía transfieren parte de ella a las partículas menos energéticas. Este proceso puede darse en medios sólidos, líquidos o gaseosos. Si se considera una placa con diferentes temperaturas en ambos lados, los resultados experimentales [125, 174] han mostrado que la razón de transferencia de calor por **conducción** es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas y a la superficie perpendicular a la dirección de transferencia e inversamente proporcional al espesor de la capa. Esta descripción se traduce matemáticamente en la conocida Ley de Fourier que indica que la tasa de transferencia por unidad de área se expresa según

$$\dot{q}_{cond} = -\kappa u_x(x, t), \quad [\text{W}/\text{m}^2].$$

El signo negativo asegura que la transferencia en la dirección normal sea una magnitud positiva. La constante de proporcionalidad  $\kappa$  recibe el nombre de **conductivi-**

## 1.2. FENÓMENOS DE TRANSPORTE

---

**dad térmica.** Ésta es una propiedad física de los materiales que mide la capacidad de conducción de calor.

El valor de **conductividad térmica**, cuyas unidades son  $[\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$  depende de la temperatura. En el estado estacionario es constante y en la práctica, para problemas en estado transitorio, bajo ciertas condiciones, también se la supone constante. Este coeficiente, para una temperatura dada, puede interpretarse como la capacidad que tiene determinado material para conducir calor. Formalmente se define la **conductividad térmica** de un determinado material como la razón de transferencia de energía térmica a través de un espesor unitario por unidad de área por unidad de temperatura. De aquí se desprende que materiales con **conductividad térmica** alta son buenos conductores de calor, como los metales puros, materiales con **conductividad térmica** baja son malos conductores, como los gases. A modo de ejemplo se puede mencionar que aproximadamente a temperatura ambiente resulta  $\kappa_{\text{aire}} = 0,026 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  ;  $\kappa_{\text{diamante}} = 2300 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ .

Otra propiedad importante de los materiales que aparece en los procesos transitorios de **conducción** de calor es la **difusividad térmica**, que notamos  $\alpha^2(x, t)$  por ser un parámetro estrictamente positivo. Esta magnitud representa la rapidez con la que se da la difusión de calor a través de un cuerpo. Formalmente se define como la razón entre el calor conducido y el calor almacenado. Es decir,

$$\alpha^2 = \frac{\kappa}{\rho c_p}, \quad (1.2)$$

donde  $\rho$   $[\text{kg}/\text{m}^3]$  representa la densidad y  $c_p$   $[\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}]$  el calor específico. Pequeños valores de **difusividad térmica** indican que gran parte de calor es absorbido y almacenado por el material, dicho de otra forma, la **difusividad térmica** es un índice que expresa la velocidad de cambio y el flujo de temperaturas en un material hasta que alcanza el equilibrio térmico.

### 1.2.2. Convección

La *convección* [37] es otra forma de transferencia de energía térmica, la cual constituye el mecanismo de transferencia de calor a través de un fluido, en presencia de un movimiento masivo de éste. La transferencia por *convección* aumenta conforme aumente la velocidad del fluido. En ausencia de cualquier movimiento masivo de fluido, la transferencia de calor entre la superficie sólida y el fluido adyacente se da por conducción pura. En caso contrario, la energía es transferida a la capa de fluido adyacente por *conducción* y esta energía es arrastrada de manera inmediata, alejándola de la superficie del sólido por *convección*. Debido a esto, el fluido cercano a la superficie se calienta, éste es removido y se reemplaza nuevamente por otra porción de fluido más fría y así sucesivamente.

Cuando el fluido fluye debido a medios externos (ventilador o bomba) se dice que la *convección* es forzada, en cambio si el fluido fluye debido a la variación de temperatura, decimos que la *convección* es libre o natural. Los procesos de transferencia de calor que comprenden cambios de fase de un fluido se consideran como *convección*, debido al movimiento del fluido durante la transferencia. Ejemplos claros de esto son la elevación de burbujas de vapor de agua durante la ebullición y la caída de gotitas de agua durante la condensación.

Los procesos de transferencia de calor por *convección* son muy complejos debido a las amplias y diversas variedades en la naturaleza del fluido. No obstante, la experimentación [37] muestra que la velocidad de la transferencia de calor por *convección* es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la superficie sólida y el fluido, que se representa mediante la Ley de enfriamiento de Newton y se puede escribir por unidad de área como

$$\dot{q}_{conv} = -h(u_s - u_\infty), \quad [\mathbf{W}/\mathbf{m}^2], \quad (1.3)$$

### 1.3. PROBLEMAS INVERSOS

---

donde  $u_s$  y  $u_\infty$  [ $^{\circ}\text{C}$ ] son las temperaturas en la superficie y lejos de la misma, respectivamente,  $h$  representa el coeficiente de transferencia de calor por *convección* o coeficiente de película. Este coeficiente se mide en [ $\text{W}/(\text{m}^2\text{C})$ ] y depende, entre otros factores, de la geometría de la superficie, la naturaleza y las propiedades térmicas del fluido. La determinación del valor exacto es realmente muy compleja, se estima de forma experimental dependiendo de las condiciones de cada problema particular.

### 1.3. Problemas Inversos

Una posible definición es decir que dos problemas son inversos, el uno del otro, si la formulación de cada uno de estos requiere un conocimiento parcial o total del otro. Se suele denominar a uno de ellos problema directo, que por lo general es aquel del que se tiene más conocimiento, mientras que al otro se lo denomina *problema inverso* [14, 126, 135]. En principio esta clasificación puede resultar un tanto arbitraria, pues el problema matemático representa una descripción, un modelo de algún fenómeno del mundo real. Debido a ello la diferenciación entre el problema directo y el *problema inverso* en general surge naturalmente a partir del problema que se está considerando.

Matemáticamente, en un contexto general, se puede definir un *problema inverso* como la necesidad de hallar  $x$  en una ecuación de la forma  $Tx = y$  donde  $T : X \rightarrow Y$  es un operador lineal continuo,  $X, Y$  son espacios de Hilbert e  $y$  es un dato del problema [139].

Con la finalidad de aclarar esta idea, se considera un ejemplo. Supongamos que se desea describir el comportamiento futuro de un sistema termodinámico partiendo del conocimiento del estado actual de dicho sistema, las leyes físicas que lo gobiernan y todos los parámetros relevantes del problema. Resultaría lógico llamar

### 1.3. PROBLEMAS INVERSOS

---

a éste “*problema directo*”, dado que responde a una secuencia causa-efecto. Es decir, conociendo las causas que modifican el sistema, es posible averiguar el efecto. En contraposición, si el problema reside en hallar el valor de ciertos parámetros termodinámicos a partir de observaciones realizadas sobre la evolución del sistema, resultaría natural llamar a éste “*problema inverso*”, pues responde a una secuencia efecto-causa. Es decir, conociendo el sistema actual es posible averiguar algunas de las causas que generó la modificación de dicho sistema [52].

Centrándonos en las aplicaciones de los *problemas inversos* en matemática aplicada, podemos destacar dos motivos que le dan importancia al estudio de éstos. El primer motivo se relaciona directamente con el interés de conocer estados pasados o parámetros de un sistema físico determinado a partir de observaciones actuales. El segundo motivo se relaciona con el hecho de saber cómo afectar un sistema de manera tal que la modificación resulte un estado deseado.

En la bibliografía se puede encontrar una gran cantidad de ejemplos de *problemas inversos* muy variados. En particular [1] contiene un resumen de algunos de ellos con una amplia gama de aplicaciones. Además, entre los *problemas inversos* clásicos podemos citar problemas relacionados con técnicas de procesamiento de imágenes [180, 222], ejemplos de este tipo de problemas son la tomografía y la tomografía de impedancia eléctrica [24, 116]; problemas espectrales [94, 133, 182], problemas relacionados con la determinación de tumores en un tejido biológico [151, 152, 175, 217], entre tantos otros.

#### 1.3.1. Problemas Inversos en Procesos de Transferencia de Calor

Existen disímiles y variados *problemas inversos* en procesos de *transferencia de calor*. En los casos particulares en el que se conoce el flujo térmico o la tempe-

### 1.3. PROBLEMAS INVERSOS

---

ratura en la frontera de un medio y las características térmicas de éste, es posible encontrar el perfil espacial y temporal de temperaturas en el interior del sólido, según la descripción hecha en la Sección 1.3 esto representa el problema directo de transferencia de calor por conducción. En otros casos, el flujo o el perfil térmico es desconocido y debido a ello debe ser estimado a partir de mediciones experimentales de temperatura tomadas en el interior del medio conductor, éstos representan **problemas inversos** y se conoce como “**problema inverso** de conducción de calor”. Esto se debe a una cuestión netamente histórica, en la actualidad, existen muchos otros **problemas inversos** ligados a la transferencia de calor. Más generalmente se dice que un problema de **transferencia de calor** es inverso si se desea encontrar el valor de cualquier parámetro o función relacionado al proceso conociendo, por ejemplo, valores de temperatura o de calor en el cuerpo. Las incógnitas en un **problema inverso de transferencia de calor** son, en general, las condiciones de contorno, las condiciones iniciales, el valor de la generación interna de calor (fuente) y las propiedades térmicas del sólido.

Encontrar la solución de un **problema inverso** en procesos de transferencia de calor es una tarea que puede ser de suma dificultad. Existen muchos métodos analíticos clásicos y numéricos que persiguen este fin. Beck, es un pionero en el estudio de **problemas inversos de transferencia de calor** y algunos de los métodos propuestos por este autor se pueden ver en [28–36]. Otros autores realizaron aportes significativos sobre **problemas inversos** de transferencia de calor. Entre los trabajos más importantes se puede citar el problema inverso en medios infinitos y la estimación de calor en procesos de enfriamiento [230]. Con el tiempo esta área de estudio ha ido evolucionando y se han analizado **problemas inversos** más complejos en los que se busca estimar varios parámetros térmicos en simultáneo [120, 156, 209, 282].

Los **problemas inversos** en **transferencia de calor** se clasifican según la dependencia del tiempo, la linealidad y la naturaleza del mismo. Estos problemas pueden

### 1.3. PROBLEMAS INVERSOS

---

ser estacionarios o evolutivos, los problemas estacionarios son aquellos en los que no hay variación de parámetros respecto del tiempo [8, 55, 123, 172, 173, 219]. Los problemas evolutivos o transitorios son aquellos en los que los parámetros varían con el tiempo, son más complejos y por lo general requieren de mediciones de temperatura como datos de entrada [35].

La no linealidad de un problema inverso se debe a que las condiciones de frontera o algunos parámetros térmicos del proceso de transferencia dependen de la temperatura. En caso contrario estamos frente a un problema inverso lineal. Los problemas lineales son más simples y requieren menor tiempo de máquina para ser resueltos.

Un problema inverso también puede clasificarse según lo que se desea estimar. Claramente esta clasificación es la más importante desde el punto de vista de las aplicaciones. En este sentido se puede estimar, por ejemplo, las condiciones de contorno, las condiciones iniciales, las propiedades térmicas del sólido, fuentes y parámetros geométricos del medio. Existen otros problemas que pertenecen a esta categoría como los asociados a optimización y control, los de frontera móvil, los relativos a medios porosos, entre otros. Algunos trabajos que tratan esta clasificación son [44, 230, 271].

#### 1.3.2. Métodos de Resolución de Problemas Inversos

Por lo general, para resolver *problemas inversos* se debe abordar primero el problema directo. Para ello existen muchos métodos conocidos en la bibliografía [56, 76]. Entre los métodos clásicos se puede mencionar, métodos de separación de variables, método del factor integrante, método de la ecuación de Bernoulli, método de coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros, método de la ecuación de Cauchy-Euler, métodos que utilizan desarrollos en serie, métodos que utilizan funciones especiales como la función Beta o la función Gamma, métodos que utilizan funciones integrales como la transformada de Laplace o la transformada de



#### 1.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

---

Fourier. Dichos problemas también son abordados con técnicas numéricas. Entre las más utilizadas se puede mencionar, métodos de diferencias finitas [167, 177, 184, 232, 244] métodos de elementos finitos [57, 67, 240, 299] y métodos de volumen de control [7, 53, 85].

Particularmente para procesos de transferencia de calor se emplean métodos analíticos tales como separación de variables, métodos integrales, método de las funciones de Green, entre otros. Detalles generales de éstos aplicados a problemas de conducción de calor se pueden ver en [28, 29, 33, 44, 98, 124, 148, 230]. Los métodos numéricos citados en el párrafo anterior se utilizan en problemas de conducción preferentemente para abordar problemas no lineales. El método de diferencias finitas ha sido utilizado para la determinación de la fuente o para la estimación de la generación de energía térmica en numerosos trabajos, algunos de ellos se pueden ver en [30, 34, 36, 280]. Particularmente para problemas estacionarios algunos autores utilizaron técnicas que se pueden ver en [70, 88], por su parte para problemas transitorios se puede citar como ejemplo, [68, 282]. Otros tipos de métodos numéricos, aunque menos utilizados, para problemas de conducción son los métodos iterativos [10, 231], los métodos de autovalores [185] y de volúmenes de control [7, 53].

Centrándonos particularmente en los métodos analíticos de resolución de problemas inversos en procesos de transferencia de calor, encontramos los métodos de especificación funcional y los métodos de estimación de parámetros aplicados a problemas lineales y no lineales, por ejemplo, [34, 35, 115, 277–279].

### 1.4. Estimación de Parámetros

Como se mencionó en la Subsección 1.3.1 en un *problema inverso* se trata de estimar algún parámetro [15, 31] desconocido en la formulación del proceso de transferencia. El término estimación se utiliza de forma literal, es decir, la incógnita del

**problema inverso** se determina a partir de un conjunto de datos (sean mediciones experimentales o simulaciones numéricas). Dichas mediciones están contaminadas de ruido que proviene de los errores de medición, de instrumentación, de calibración y las pérdidas por convección y radiación (no existe la aislación perfecta); debido a este motivo es imposible obtenerlas de forma exacta. En este contexto las estimaciones más usuales son: estimación del coeficiente de conductividad térmica dependiente de la temperatura  $\kappa(u)$ , estimación del calor específico que depende de la temperatura  $c_p(u)$ , la estimación del coeficiente de transferencia de calor por convección  $h(u)$  y estimación de la fuente de calor. Algunos ejemplos variados se pueden ver en [31, 32, 120–122].

## 1.5. Problemas mal Planteados

Hay una diferencia de fundamental importancia entre los problemas directos y los **problemas inversos** y corresponde al concepto de problemas bien o mal planteados [19, 83, 139].

Generalmente, los **problemas inversos** son **problemas mal planteados** en el sentido de Hadamard [100]. Hadamard introdujo este concepto teniendo en cuenta que el modelo matemático considerado para describir un fenómeno físico debe poseer las propiedades de existencia, unicidad y estabilidad de la solución. Es decir, el problema debe admitir solución, ésta debe ser única y además, debe depender de los datos de manera continua. De no cumplirse una o varias de las tres condiciones presentadas en las líneas anteriores para un modelo dado, estamos en presencia de un **problema mal planteado**.

Desde un punto de vista matemático se puede decir que las tres propiedades mencionadas tienen diferentes grados de importancia, esto se debe el abordaje del mal planteo depende fuertemente de la propiedad que no se cumpla.

## 1.5. PROBLEMAS MAL PLANTEADOS

---

Si el modelo planteado no tiene solución, por lo general es un indicador de que las mediciones tienen demasiado ruido o que existe un error en el modelo matemático utilizado. En algunos casos esta propiedad se obtiene fácilmente extendiendo el espacio de soluciones, el concepto de distribución o función generalizada [134] es un claro ejemplo de esto.

Si el problema planteado tiene más de una solución, por lo general, se debe a la falta de información en el modelo propuesto, para resolver esto, alcanza con agregar al modelo suposiciones adicionales basadas en el fenómeno estudiado o simplemente elegir una de las soluciones que resulte adecuada. Elegir la solución de menor norma es un ejemplo de esto.

La estabilidad de la solución es la propiedad más relevante de las tres desde el punto de vista de las aplicaciones, pues es la principal causa del “mal planteo” de un *problema inverso*. Debido a la falta de estabilidad, una pequeña modificación en los datos (como los que generan los errores de medición) producen diferencias significativas en la solución del problema inverso. Si el problema planteado carece de estabilidad, obtener la solución exacta es una tarea prácticamente imposible. Este incumplimiento del supuesto de dependencia continua de los datos se pone de manifiesto en la no acotación de la inversa generalizada de Moore-Penrose [38]. Esta inversa busca, en líneas generales, invertir el operador  $T$  dado en la definición formal de problema inverso (Sección 1.3). La no acotación de dicha inversa se traduce en inestabilidad cuando se emplean métodos numéricos tradicionales para aproximar las soluciones. La problemática que genera la falta de estabilidad es que la solución hallada puede encontrarse muy distante de la verdadera. Si la solución del problema no depende en forma continua de los datos, se debe agregar información adicional al modelo o acudir a métodos que estabilicen la solución. Los métodos utilizados para estabilizar la solución de un *problema inverso mal planteado* se conocen en la bibliografía como *métodos de regularización*.

### 1.5.1. Métodos de Regularización

Los *problemas inversos mal planteados* surgen con frecuencia en diferentes ramas de la ciencia e ingeniería. La regularización es una técnica matemática que proporciona estabilidad al operador de un *problema mal planteado*. En términos generales, regularizar un problema mal planteado significa esencialmente aproximar-lo por una sucesión de problemas bien planteados [83].

Las técnicas de regularización difieren entre sí según la estrategia que se utiliza y la cantidad de información que se requiera incorporar. Los *métodos de regularización* se clasifican en métodos directos, que se caracterizan por no ser iterativos, ver por ejemplo [146, 161, 162] o métodos indirectos, por ejemplo [43, 238], que utilizan métodos iterativos para estabilizar numéricamente el *problema mal planteado*.

Se han desarrollado también métodos híbridos y *métodos de regularización* con diferentes restricciones basados en algoritmos complejos de optimización. Las metodologías de regularización recién descritas encuentran uso en el área de modelación inversa de problemas tan disímiles entre sí como interesantes. Estimación de parámetros geofísicos [17, 228]; recuperación de perfiles de composición atmosférica a partir de instrumentos satelitales [77, 84] y el cálculo de la distribución del tamaño de partículas [69, 164], entre muchas otras aplicaciones que exceden el alcance de este trabajo.

Entre los métodos clásicos de regularización de *problemas inversos* mal planteados se pueden mencionar, regularización de Tikhonov [97, 179], regresión Ridge [113, 114], descomposición en valores singulares truncada [107, 272], descomposición en valores singulares amortiguada [107], métodos de regularización cuasi-reversibles [150], entre muchos otros.

Con respecto a los *métodos de regularización* en conducción de calor se encuentran, entre los más utilizados, el método de especificación de función secuencial [35],

## 1.5. PROBLEMAS MAL PLANTEADOS

---

el método de regularización iterativa [6, 35, 101], métodos de estabilización mediante el empleo de filtros [7, 112], método de gradiente conjugado [60, 122, 226], el método de Davidon-Fletcher-Powell [246], el método de Monte Carlo [103]. En [35] se puede apreciar un abordaje extenso de cada uno de los métodos en los que se utilizan muchos ejemplos, en [300] se realiza un excelente análisis sobre cada uno de los métodos.

A la hora de regularizar una solución en un problema de transferencia de calor, es necesario tener una forma de minimizar el error de las soluciones regularizadas. En la mayoría de los trabajos se emplea, el método de cuadrados mínimos, sin embargo, existen trabajos en los que se sustituye este método mediante algoritmos más complejos con características particulares que operan directamente sobre dominios lineales [280].

### 1.5.2. Parámetro de Regularización

Una característica común de las técnicas de regularización es que todas ellas requieren la utilización de un parámetro que depende del problema a regularizar. Este parámetro, llamado *parámetro de regularización*, es el encargado de equilibrar el error de minimización con respecto al error de regularización. Éste puede clasificarse en dos grandes grupos: *los parámetros de regularización a priori*, que son aquellos que sólo dependen del ruido en los datos y *los parámetros de regularización a posteriori*, que además del ruido en los datos, depende de las mediciones específicamente.

Existe una amplia variedad de técnicas para la selección criteriosa de este parámetro en función del problema a regularizar. Entre los tipos de selección más frecuentemente utilizados se pueden mencionar, el principio de discrepancia [42, 82, 220], la utilización de la Curva-L [48, 108, 109], la validación cruzada generalizada [13, 155, 274]

y el periodograma residual acumulativo [110,210]

## 1.6. Sensibilidad

El objetivo principal del *análisis de sensibilidad* es determinar de manera cuantitativa el cambio en el comportamiento de un sistema cuando, de alguna manera, un conjunto de sus parámetros son modificados. Es una herramienta muy utilizada en ingeniería y sirve para medir la influencia de los parámetros en los resultados de un determinado modelo matemático [58,212,213]. Algunos trabajos interesantes de análisis de sensibilidad pueden verse en [1, 89, 140, 191, 211, 221].

Obtener una solución numérica en un *problema inverso* y en particular en problemas de transferencia de calor, es una tarea compleja debido a que la solución es muy sensible a errores de medición y de calibración de instrumentos. En [300] se cita un claro ejemplo de esta situación, el *problema inverso* unidimensional de estimación de calor es sensible a las mediciones, debido a que si se aumenta la cantidad de datos experimentales es necesario disminuir el paso temporal de discretización, sin embargo la utilización de intervalos de tiempo extremadamente pequeños, por lo general, introducen factores de inestabilidad en la solución.

La sensibilidad de una función respecto de un parámetro se define como la derivada parcial de primer orden de la función con respecto a dicho parámetro. Es decir,

$$S_D^{p_i}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{\partial D(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_i},$$

en este ejemplo se calcula la sensibilidad de la función  $D$  (que depende de las variables  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) con respecto al parámetro  $p_i$ .

El cálculo de sensibilidad de la solución de una ecuación diferencial con respecto a un parámetro de la ecuación, puede requerir la resolución de una nueva ecuación

## 1.7. ELASTICIDAD

---

diferencial. Ejemplos de esto se puede encontrar en [45, 71, 204, 205, 249].

Es muy útil realizar el cálculo de sensibilidad para mejorar el diseño experimental y decidir, con criterio, en qué punto del dominio se tomarán las mediciones. Más detalles se pueden ver en [35, 275]. Las funciones de sensibilidad son dependientes de la geometría del problema y de las condiciones de borde impuestas en el modelo del problema inverso. Según [300] para que una estimación sea óptima, los sensores de medida deben colocarse en posiciones donde las lecturas sean más sensibles a los cambios del parámetro desconocido. En este contexto han surgido en las últimas décadas conceptos más complejos que permiten no sólo calcular la sensibilidad de una función con respecto a un parámetro, sino que se analiza la influencia, en las soluciones aproximadas, de varios parámetros en simultáneo y cómo éstos interactúan entre sí. Este tipo de técnicas se denominan funciones de sensibilidad generalizada. Más detalle puede verse en [20, 45, 204, 245, 249].

## 1.7. Elasticidad

El *análisis de elasticidad* es otra herramienta que se puede utilizar para medir la influencia de los parámetros en los resultados de un determinado modelo matemático. Este concepto proviene de la economía [239] y cada vez es más utilizado en el abordaje de problemas en ciencia e ingeniería [258, 260]. Se puede interpretar como la variación porcentual de determinada función cuando el parámetro varía en 1%. Es decir, la elasticidad de la función  $D$  con respecto al parámetro  $p$  se define como

$$E_D(p) = \frac{p}{D(p)} D'(p).$$

La definición resulta de suma utilidad. Supongamos que con determinada técnica deseamos estimar  $p$ , en dicha situación es útil saber cual será la variación en  $D$

## 1.8. DISEÑO ÓPTIMO

---

cuando se comete un error del 1 % en la estimación de  $p$ . Si  $|E_D(p)| < 1$  se dice que  $D$  es inelástica y este es un caso deseado en cualquier problema de estimación de parámetros dado que un error en la estimación del parámetro del 1 % generará un error menor al 1 % en la solución. En contraposición, si  $|E_D(p)| > 1$  se dice que  $D$  es elástica. En este caso, la estimación del parámetro deseado se complejiza, pues un error chico en la determinación puede traducirse en un error grande en la solución.

En el caso en el que se desea estudiar la elasticidad de una función multivariable con respecto a uno solo de los parámetros, la definición es análoga utilizando la derivada parcial. Es decir,

$$E_D^{p_1}(p_1, p_2) = \frac{p_1}{D(p_1, p_2)} \frac{\partial D(p_1, p_2)}{\partial p_1}.$$

En este ejemplo se calcula la elasticidad de la función  $D$  (que depende de las variables  $p_1$  y  $p_2$ ) con respecto al parámetro  $p_1$ . Dicha elasticidad será, en principio, una función que depende de ambas variables. Es decir,  $E_D^{p_1}$  depende de las variables  $p_1$  y  $p_2$ .

## 1.8. Diseño Óptimo

En líneas generales, dado un *problema inverso* de *identificación de parámetros* la teoría de *diseño óptimo* busca favorecer la estimación calculando los puntos o instantes de tiempo dónde se debe tomar la información, o los datos, de manera de minimizar el error. Los métodos clásicos para el *diseño óptimo* presentados por distintos autores se describen claramente en [20–23].

La naturaleza infinito-dimensional de los *sistemas de parámetros distribuidos* imposibilita la tarea de tomar mediciones en todo el dominio [243], debido a esto, surge el interrogante de cómo, dónde y cuándo ubicar los sensores con la finalidad de que la estimación sea lo más precisa posible. Existen varios trabajos que han



## 1.8. DISEÑO ÓPTIMO

---

abordado este problema. La estimación de estados puede verse en [22,23,128,142,207,250], por su parte para la *identificación de parámetros*, ver [192–194,252]. El problema de estimación de estados y el de identificación de parámetros son problemas matemáticamente distintos, que difieren, no solo en el objetivo sino también en la complejidad. Los problemas de identificación son, generalmente, más complejos por que presentan una dependencia no-lineal fuerte en los parámetros desconocidos, a pesar de que se esté identificando una ecuación diferencial parcial lineal en esos parámetros. Esto no ocurre en el problema de estimación de estados ya que la dependencia del estado actual con el estado inicial es lineal para sistemas lineales.

El *diseño óptimo* de experimentos es un área donde confluyen el álgebra lineal, la optimización convexa y la estadística, aquí se generan problemas de optimización basados en modelos cuyas soluciones óptimas son de mínima varianza. Esta teoría puede ser extendida al área de los sistemas dinámicos para ubicar de manera óptima sensores dedicados a estimación de estados o para identificación de sistemas. Para el caso de estimación de estados, el criterio de optimalidad debe ser fundamentado en una medida de la independencia de las respuestas de los sensores, mientras que para el caso de identificación de sistemas el criterio de optimalidad se basa en una medida de la independencia entre las funciones de *sensibilidad* de los parámetros a identificar.

La ubicación óptima de sensores para la *identificación de parámetros* en sistemas de parámetros distribuidos depende de la ubicación de los sensores en el dominio espacial. Es necesario, entonces, poder comparar entre diferentes configuraciones de sensores y desarrollar una medida cuantitativa de las bondades de una ubicación en particular. Con este fin, se utiliza la matriz de información de Fisher, la cual, bajo consideraciones particulares, constituye una aproximación de la matriz de covarianzas para los parámetros estimados. Esta matriz refleja la variabilidad en los parámetros identificados del sistema estudiado. Diversos trabajos utilizan

## 1.8. DISEÑO ÓPTIMO

---

*diseño óptimo* de experimentos para resolver problemas inversos, ver por ejemplo, [4, 9, 12, 22, 23, 200, 207, 233, 237, 250, 252, 266, 267].

## Capítulo 2

# Un Problema de Transporte

La ecuación de calor ha sido abordada por diferentes autores y se ha resuelto con distintas estrategias tanto analíticas como numéricas. La solución analítica de la ecuación de calor con diferentes condiciones de borde e iniciales es bien conocida en la literatura; ver, por ejemplo, [49, 273]. Por otra parte, la ecuación parabólica dada en (1.1) fue menos estudiada, aunque se encuentran en la bibliografía diversos artículos que utilizan, en su desarrollo, esta ecuación, para casos particulares. Algunos trabajos de interés se pueden ver en [26, 41, 265].

En este capítulo se resuelve el primer problema directo de esta tesis dado por la Ecuación (1.1) bajo ciertas condiciones. Se obtiene la solución analítica utilizando métodos de Fourier [96, 143], que son frecuentemente usados para resolver ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico. El esquema de resolución se basa en una sustitución que se puede interpretar como un cambio en el sistema de coordenadas que consiste en pasar de un sistema fijo a uno móvil. Aunque no se encontró en la literatura una expresión analítica para el problema estudiado, varios artículos utilizaron cambios similares en el sistema de coordenadas para abordar otras ecuaciones. Ver, por ejemplo [26, 40, 75, 187, 216, 265].

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

Por otro lado, debido a que la expresión de la solución analítica hallada es muy compleja, se resuelve numéricamente la Ecuación (1.1) utilizando diferencias finitas [177, 184, 232] centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. La solución obtenida brinda información útil sobre los perfiles espacio-temporales de temperatura  $u(x, t)$ . Se imponen, condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

### 2.1. Aspectos Analíticos

En esta sección se presenta de manera formal el primer problema directo que se va a estudiar en esta tesis. Se enuncian y se demuestran algunos resultados de importancia que permiten obtener una expresión analítica para la solución del problema en cuestión.

#### 2.1.1. Presentación del Problema

El problema de interés consiste en el transporte o transferencia de energía térmica a lo largo de una barra homogénea de longitud  $L$  [m] y diámetro  $d$  [m] (con  $L \gg d$ ) la cual está embebida en un fluido (líquido o gaseoso) en movimiento con velocidad constante  $\beta$  [m/s]. Debido a que  $L \gg d$  se supone que el fenómeno de difusión es unidimensional. Además, se considera que la barra a través de la que se difunde el calor está construida con un material isótropo por lo que el coeficiente de difusividad térmica  $\alpha^2$  [m<sup>2</sup>/s] es constante. Se supone también que la barra no está totalmente aislada en la superficie lateral, lo que permite el intercambio de calor a un ritmo constante con el medio circundante que se encuentra a temperatura ambiente  $T_a$  [°C] (temperatura constante). Por último, la barra está afectada por un conjunto de fuentes que dependen únicamente de la posición  $f(x)$  [°C/s].

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

Para poder modelizar este problema se utiliza la Ecuación (1.1) con las modificaciones sugeridas en el párrafo anterior. Ésto permite obtener la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu(u(x, t) - T_a) + f(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Se supone además, que la temperatura en el borde izquierdo de la barra se mantiene a una temperatura constante  $F$  [°C] durante todo el proceso de transferencia.

$$u(x, t) = F, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

el borde derecho de la barra queda libre, en contacto con el fluido, dando lugar al fenómeno de convección.

$$\kappa u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), \quad x = L, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

donde  $\kappa$  [W/m °C] es la conductividad térmica del material y  $h$  [W/(m<sup>2</sup>°C)] es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Por último, se considera que en el instante inicial toda la barra, salvo en los bordes, se encuentra a temperatura ambiente, es decir,

$$u(x, t) = T_a, \quad 0 < x < L, \quad t = 0. \quad (2.4)$$

El problema directo a resolver, consiste en hallar la temperatura  $u(x, t)$  suponiendo que todos los parámetros de las Ecuaciones (2.1)-(2.4) son conocidos. La Figura 2.1 muestra de manera esquemática el problema directo de interés.

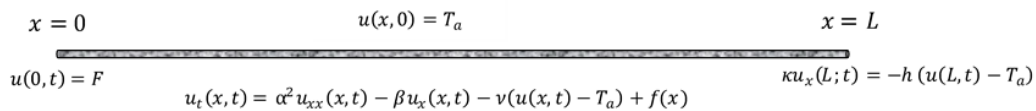


Figura 2.1: Esquema del problema de transporte estudiado.

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

### 2.1.2. Resultados Auxiliares

En esta subsección se enuncian y se demuestran algunos resultados auxiliares de importancia que son de utilidad para poder encontrar una expresión analítica de la solución del problema dado por las Ecuaciones (2.1)-(2.4), esquematizado en la Figura 2.1.

De los resultados que se expondrán a continuación, los Lemas 2.5, 2.7, 2.8 y 2.9 son conocidos en la literatura. Se incluye aquí el enunciado y una demostración para cada uno, esto se hace por dos motivos. El primero, se relaciona con la finalidad de presentar un trabajo completo y autocontenido, el segundo, se debe a que en las demostraciones se introducen herramientas que serán de utilidad más adelante en el desarrollo de esta tesis.

**Lema 2.1** Sean  $a, b, L \in \mathbb{R}^+$  y  $g : D \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -\frac{b}{a} \operatorname{tg}(Lx)$ . Entonces existe un conjunto infinito numerable de puntos fijos positivos de  $g$ .

*Demostración:* Basta con observar que  $g$  es una función periódica de período  $P = \frac{\pi}{L}$ , monótona y suryectiva en cada período. Por lo tanto,  $g$  tiene un único punto fijo positivo en cada período.  $\square$

**Corolario 2.2** Sean  $a, b, L \in \mathbb{R}^+$ . Existe un conjunto infinito numerable de soluciones positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg}(Lx) = -\frac{a}{b}x. \quad (2.5)$$

*Demostración:* La demostración de este resultado es consecuencia directa del lema anterior. Por el Lema 2.1 se sabe que la ecuación  $x = -\frac{b}{a} \operatorname{tg}(Lx)$  tiene un conjunto numerable de soluciones positivas. Esto implica que vale la misma condición para la Ecuación (2.5).  $\square$

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

**Ejemplo 2.3** En la Figura 2.2 se pueden apreciar de manera gráfica algunas de las infinitas soluciones positivas de la Ecuación (2.5) para dos casos particulares de diferentes características.

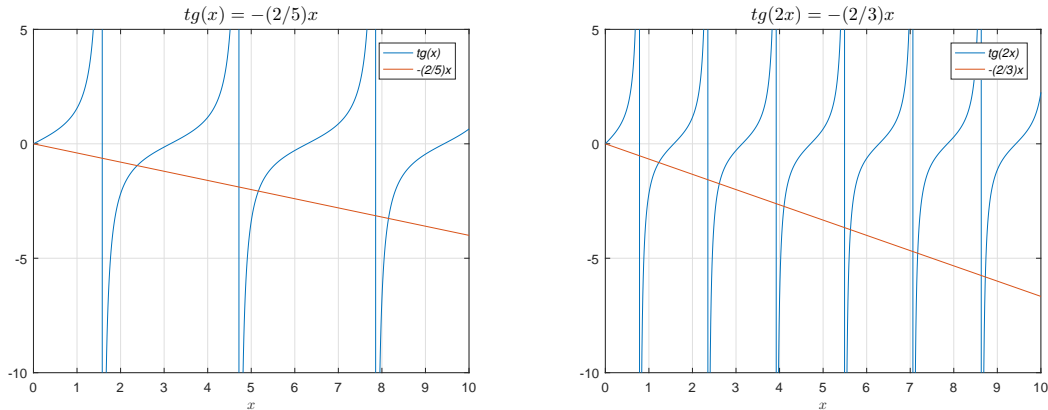


Figura 2.2: Casos particulares de la Ecuación (2.5).

**Observación 2.4** Por el Corolario 2.2 se sabe que la Ecuación (2.5) tiene infinitas soluciones positivas. Pero al tratarse de una ecuación trascendente, las soluciones deben hallarse numéricamente para cada caso particular. El Cuadro 2.1 tiene, a manera de ejemplo, las primeras 10 soluciones positivas de la ecuación  $tg(2x) = -\frac{3}{5}x$  utilizando tres dígitos decimales de precisión.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
1,249	2,637	4,119	5,641	7,182	8,733	10,290	11,850	13,413	14,977

Cuadro 2.1: Primeras 10 soluciones positivas de la ecuación  $tg(2x) = -\frac{3}{5}x$ .

**Lema 2.5** Sean  $a, b, L \in \mathbb{R}^+$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$  y  $X \in C^2((0, L))$ . El problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) - \zeta X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(x) = 0, & x = 0, \\ -aX'(x) = bX(x), & x = L, \end{cases} \quad (2.6)$$

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

tiene como solución

$$X_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

donde  $\lambda_n$  son las soluciones positivas de la Ecuación (2.5).

*Demostración:* Los problemas de Sturm-Liouville [5, 99, 170] se caracterizan por ser una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones de borde. La complejidad radica en que estos problemas dependen de una variable de separación, que en nuestro caso se denota con la letra  $\zeta$ . Si se analizan los valores para la variable  $\zeta$ , surgen tres casos posibles de soluciones.

**Caso 1:** ( $\zeta = 0$ ). En este caso, la solución es de la forma  $X(x) = Ax + B$ . Dado que  $X(0) = 0$  esto implica  $B = 0$ , utilizando la condición  $-aX'(L) = bX(L)$  se obtiene  $-aA = bAL$  y como el sistema (2.6) se resuelve para cualquier  $a, b, L \in \mathbb{R}^+$  se deduce que  $A = 0$ . Por lo tanto, el caso 1 nos conduce a la solución trivial.

**Caso 2:** ( $\zeta > 0$ ). Por ser  $\zeta > 0$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\zeta = \lambda^2$  y en este caso la solución es de la forma  $X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ . Dado que  $X(0) = 0$  esto implica  $B = -A$ , utilizando la condición  $-aX'(L) = bX(L)$  se obtiene la siguiente expresión  $A[a\lambda(e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) + b(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})] = 0$ , operando algebraicamente,  $2A[a\lambda \cosh(\lambda L) + b \sinh(\lambda L)] = 0$ . Observando que la suma entre corchetes es estrictamente positiva por ser  $a, b, L, \lambda > 0$ , se deduce que  $A = 0$ . Por lo que el caso 2 también nos conduce a la solución trivial.

**Caso 3:** ( $\zeta < 0$ ). Por último, si  $\zeta < 0$  existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\zeta = -\lambda^2$  y en este caso la solución es de la forma  $X(x) = A \text{sen}(\lambda x) + B \text{cos}(\lambda x)$ . Ya que  $X(0) = 0$  se tiene que  $B = 0$  y utilizando la condición  $-aX'(L) = bX(L)$  resulta  $-Aa\lambda \text{cos}(\lambda L) = Ab \text{sen}(\lambda L)$  o equivalentemente  $\text{tg}(\lambda L) = -\frac{a}{b}\lambda$  para  $A \neq 0$ . Debido al Corolario 2.2 existe un conjunto infinito numerable de soluciones positivas  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , y como la solución encontrada es independiente de  $A$ , sin pérdida de generalidad se considera  $A = 1$ .



## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

En resumen, la solución hallada es de la forma  $X_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x)$  dada en (2.7) con  $n \in \mathbb{N}$  donde  $\lambda_n$  son las infinitas soluciones positivas de la ecuación (2.5).  $\square$

**Definición 2.6** *Bajo las hipótesis del Lema 2.5, las funciones  $X_n(x)$  se denominan autofunciones o funciones propias y los valores  $\lambda_n$  son los autovalores o valores propios asociados [47].*

Independientemente que para nosotros sea sólo un resultado auxiliar, el Lema 2.7 es importante en sí mismo, pues brinda la solución analítica de la ecuación de calor [49, 273] en un dominio espacial acotado con condición inicial dada y condiciones de borde de tipo Dirichlet nula a izquierda y de tipo Robin a derecha.

**Lema 2.7** *Sean  $\alpha^2, a, b, L \in \mathbb{R}^+$  y  $\phi \in C((0, L))$ . Dada la función  $\varphi$  que satisface  $\varphi(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $\varphi(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico*

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) = \alpha^2 \varphi_{xx}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ a \varphi_x(x, t) = -b \varphi(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = \phi(x), & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

*tiene como solución*

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \text{sen}(\lambda_n x) dx \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\lambda_n x),$$

*donde  $\lambda_n$  son las soluciones positivas de la Ecuación (2.5).*

*Demostración:* Para resolver el sistema (2.7) se utiliza separación de variables [47], es decir, se supone que existen funciones  $X, T$  con  $X \in C^2((0, L))$  y  $T \in C^1((0, \infty))$  tales que  $\varphi(x, t) = X(x)T(t)$ .

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

Reemplazando en el sistema (2.8) se obtiene

$$\begin{cases} X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ X(x)T(t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ a X'(x)T(t) = -b X(x)T(t), & x = L, \quad t > 0, \\ X(x)T(t) = \phi(x), & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

de la primera ecuación del sistema (2.9), separando variables, se deduce que existe  $\zeta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\zeta = \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \implies \begin{cases} X''(x) - \zeta X(x) = 0, \\ T'(t) - \zeta \alpha^2 T(t) = 0, \end{cases}$$

esto da lugar al siguiente sistema

$$\begin{cases} X''(x) - \zeta X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(x) = 0, & x = 0, \\ a X'(x) = -b X(x), & x = L, \\ T'(t) - \zeta \alpha^2 T(t) = 0, & t = 0, \\ X(x)T(t) = \phi(x), & 0 < x < L, \quad t = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Por el Lema 2.5 se deduce que existe un conjunto infinito numerable de autofunciones que satisfacen las primeras tres ecuaciones del sistema (2.10) y se pueden expresar como  $X_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x)$  con  $n \in \mathbb{N}$  donde, por el Corolario 2.2,  $\lambda_n = \sqrt{-\zeta_n}$  son las infinitas soluciones de la ecuación (2.5). Por otra parte, es simple ver que la función  $T(t)$  satisface  $T(t) = T_0 e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}$ .

En resumen, existe un conjunto infinito numerable de soluciones del sistema pa-

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

parabólico (2.8), éstas son de la forma  $\varphi_n(x, t) = A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\lambda_n x)$ , donde  $A_n$  son constantes a determinar mediante la condición inicial. Debido al principio de superposición [47] se obtiene

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\lambda_n x).$$

Utilizando la condición inicial sigue que  $\phi(x) = \varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(\lambda_n x)$ , de donde se deduce que  $A_n$  son los coeficientes del desarrollo en serie de funciones propias y se determinan según [47]

$$A_n = \frac{\int_0^L \phi(x) \text{sen}(\lambda_n x) dx}{\int_0^L \text{sen}^2(\lambda_n x) dx} = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \text{sen}(\lambda_n x) dx.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \text{sen}(\lambda_n x) dx \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\lambda_n x).$$

Tal como se quería probar. □

El Lema 2.8 es similar al Lema 2.7 en cuanto al dominio espacial, la condición inicial y las condiciones de borde, pero aquí se considera la presencia de fuentes que afectan la ecuación de calor [49, 273]. Estas fuentes se agrupan en una función espacio-temporal  $f(x, t)$ , la cual perturba de manera directa la ecuación diferencial del problema estudiado.

**Lema 2.8** Sean  $\alpha^2, a, b, L \in \mathbb{R}^+$ ; sean  $\phi \in C((0, L))$  y  $f \in C((0, L) \times (0, \infty))$ . Dada la función  $\varphi$  que satisface  $\varphi(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $\varphi(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) = \alpha^2 \varphi_{xx}(x, t) + f(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ a \varphi_x(x, t) = -b \varphi(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = \phi(x), & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

tiene como solución

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t f_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds + \frac{2b e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx \right] \operatorname{sen}(\lambda_n x),$$

donde

$$f_n(t) = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L f(x, t) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx$$

y  $\lambda_n$  son las soluciones positivas de la ecuación (2.5).

*Demostración:* Se sabe por el Lema 2.7 que el sistema homogéneo asociado al sistema (2.11) tiene como solución  $\varphi^H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \operatorname{sen}(\lambda_n x)$ . Para encontrar la solución del sistema no homogéneo se utiliza el método de Fourier [47].

Este método se basa en suponer que existe un conjunto infinito numerable de funciones temporales  $A_n(t)$  tales que

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t} \operatorname{sen}(\lambda_n x),$$

o equivalentemente

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen}(\lambda_n x), \quad (2.12)$$

por simplicidad, se desarrolla en serie de funciones propias a la función  $f(x, t)$  y se obtiene

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen}(\lambda_n x), \quad (2.13)$$

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

donde  $f_n(t)$  está dada por

$$f_n(t) = \frac{\int_0^L f(x, t) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx}{\int_0^L \operatorname{sen}^2(\lambda_n x) dx} = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L f(x, t) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx.$$

Se reemplazan las expresiones (2.12) y (2.13) en la ecuación diferencial del sistema (2.11) y se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [g'_n(t) + \lambda_n^2 \alpha^2 g_n(t) - f_n(t)] = 0.$$

Esto lleva a un conjunto infinito numerable de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas. Se utiliza la condición inicial y la solución puede escribirse como

$$g_n(t) = \left[ \int_0^t f_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 s} ds + \left( \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx \right) \right] e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t},$$

se reemplaza en (2.12) y se concluye que

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t f_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds + \frac{2b e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \phi(x) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx \right] \operatorname{sen}(\lambda_n x).$$

Tal como se quería probar. □

El Lema 2.9 es similar al Lema 2.8, pero aquí se modifica la condición inicial, la cual se considera nula y la condición de borde a izquierda, dada por una función temporal.

**Lema 2.9** Sean  $\alpha^2, a, b, L \in \mathbb{R}^+$ ; sean  $w_0 \in C^1((0, \infty))$  y  $f \in C((0, L) \times (0, \infty))$ . Dada la función  $w$  que satisface  $w(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $w(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

$$\begin{cases} w_t(x, t) = \alpha^2 w_{xx}(x, t) + f(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ w(x, t) = w_0(t), & x = 0, \quad t > 0, \\ a w_x(x, t) = -b w(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ w(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases}$$

tiene como solución

$$w(x, t) = w_0(t) \left( 1 - \frac{bx}{a + bL} \right) + \varphi(x, t),$$

donde

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2b w_0(0) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(Lb + a \cos^2(\lambda_n L)) \lambda_n} \right] \text{sen}(\lambda_n x),$$

con  $\lambda_n$  las soluciones positivas de la Ecuación (2.5) y

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{w_0'(t)}{\lambda_n} + \int_0^L f(x, t) \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

*Demostración:* Se supone que existe una función  $\varphi$  que satisface  $\varphi(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $\varphi(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ . Tal que  $w(x, t) = s(x, t) + \varphi(x, t)$  donde  $s$  es una función espacio-temporal auxiliar útil a los fines de demostración. Particularmente  $s$  es solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} s(x, t) = \alpha(t) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \beta(t) \frac{x}{L}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ s(x, t) = w_0(t), & x = 0, \quad t > 0, \\ a s_x(x, t) = -b s(x, t), & x = L, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

las funciones  $\alpha(t), \beta(t)$  se determinan mediante las condiciones de borde impuestas en el sistema (2.14). Es simple ver que bajo éstas condiciones la función  $s$  queda

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

definida de forma unívoca por

$$s(x, t) = w_0(t) \left( 1 - \frac{bx}{a + bL} \right)$$

y que la función  $\varphi$  satisface

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) = \alpha^2 \varphi_{xx}(x, t) + \bar{f}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ a \varphi_x(x, t) = -b \varphi(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = \bar{\phi}(x), & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

donde

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - w'_0(t) \left( 1 - \frac{bx}{a + bL} \right)$$

y

$$\bar{\phi}(x) = -w_0(0) \left( 1 - \frac{bx}{a + bL} \right).$$

Se sabe por el resultado dado en el Lema 2.8 que la solución del sistema (2.15) viene dada por

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds + \frac{2b e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \bar{\phi}(x) \text{sen}(\lambda_n x) dx \right] \text{sen}(\lambda_n x), \quad (2.16)$$

donde

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \int_0^L \bar{f}(x, t) \text{sen}(\lambda_n x) dx. \quad (2.17)$$

Si se utiliza que  $\lambda_n$  son soluciones de la Ecuación (2.5) vale que

$$\int_0^L \left( 1 - \frac{bx}{a + bL} \right) \text{sen}(\lambda_n x) dx = \frac{1}{\lambda_n}, \quad (2.18)$$

luego se reemplaza (2.18) en las expresiones (2.16), (2.17) y se obtiene

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2b w_0(0) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(Lb + a \cos^2(\lambda_n L) \lambda_n)} \right] \text{sen}(\lambda_n x),$$

donde

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2b}{Lb + a \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{w_0'(t)}{\lambda_n} + \int_0^L f(x, t) \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

Tal como se quería demostrar. □

En el Teorema 2.10 se estudia la ecuación parabólica completa (Ecuación (2.1)) en un dominio espacial acotado en presencia de fuentes que dependen de la variable espacial con condición inicial nula y las condiciones de borde de tipo Dirichlet constante a izquierda y de tipo Robin a derecha.

**Teorema 2.10** Sean  $\alpha^2, \beta, \nu, a, b, L, v_0 \in \mathbb{R}^+$ ;  $f \in C((0, L))$ . Dada la función  $v$  que satisface  $v(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $v(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico

$$\begin{cases} v_t(x, t) = \alpha^2 v_{xx}(x, t) - \beta v_x(x, t) - \nu v(x, t) + f(x), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ v(x, t) = v_0, & x = 0, \quad t > 0, \\ a v_x(x, t) = -b v(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ v(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

tiene como solución

$$v(x, t) = e^{j(x,t)} \left[ v_0 e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{b}x}{a + \bar{b}L} \right) + \varphi(x, t) \right],$$

donde

$$j(x, t) = \frac{\beta}{2\alpha^2} x - \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) t, \quad \bar{b} = b + \frac{a\beta}{\alpha^2}$$



## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

y

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2\bar{b} v_0 e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(L\bar{b} + a \cos^2(\lambda_n L)) \lambda_n} \right] \text{sen}(\lambda_n x).$$

Con  $\lambda_n$  las soluciones positivas de la ecuación  $\text{tg}(Lx) = -\frac{a}{\bar{b}}x$  y

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2\bar{b}}{L\bar{b} + a \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{v_0 \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{\lambda_n} + \int_0^L f(x) e^{-j(x,t)} \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

*Demostración:* Se considera la siguiente sustitución

$$v(x, t) = e^{j(x,t)} w(x, t), \quad (2.20)$$

donde  $j(x, t) = \frac{\beta}{2\alpha^2}x - \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) t$ . Se reemplaza la Ecuación (2.20) en el sistema (2.19), se opera algebraicamente y se obtiene que la función  $w(x, t)$  debe satisfacer

$$\begin{cases} w_t(x, t) = \alpha^2 w_{xx}(x, t) + \bar{f}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ w(x, t) = w_0(t), & x = 0, \quad t > 0, \\ a w_x(x, t) = -\bar{b} w(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ w(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde  $\bar{f}(x, t) = f(x) e^{-j(x,t)}$ ,  $w_0(t) = v_0 e^{-j(0,t)}$  y  $\bar{b} = b + \frac{a\beta}{\alpha^2}$ . En virtud del Lema 2.9 se sabe que la solución del sistema parabólico (2.21) está dado por la siguiente expresión

$$w(x, t) = v_0 e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{b}x}{a + \bar{b}L} \right) + \varphi(x, t),$$

donde

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2\bar{b} v_0 e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(L\bar{b} + a \cos^2(\lambda_n L)) \lambda_n} \right] \text{sen}(\lambda_n x)$$

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

---

y

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2\bar{b}}{L\bar{b} + a \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{v_0 \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{\lambda_n} + \int_0^L f(x) e^{-j(x,t)} \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

Por lo tanto, a partir del cambio de variables utilizado dado por la Ecuación (2.20), la solución analítica del problema en cuestión (sistema (2.19)), se puede escribir a partir de la siguiente expresión

$$v(x, t) = e^{j(x,t)} \left[ v_0 e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{b}x}{a + \bar{b}L} \right) + \varphi(x, t) \right].$$

Tal como se quería demostrar. □

**Observación 2.11** *El cambio de variables (2.20) utilizado en la demostración del Teorema 2.10 que permite “deshacernos” de los términos disipativos, se puede interpretar como un cambio en el sistema de coordenadas, en el cual se pasa del sistema fijo usual a uno móvil que se desplaza a la velocidad del fluido.*

### 2.1.3. Solución Analítica

En esta subsección se da una expresión analítica para la solución del problema de interés de este capítulo. Dicho problema fue presentado en detalle en la Subsección 2.1.1, fue esquematizado gráficamente en la Figura 2.1 y viene dado por las Ecuaciones (2.1)-(2.4).

**Teorema 2.12** *Sean  $\alpha^2, \beta, \nu, T_a, L, F, \kappa, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $f \in C((0, L))$ . Dada la función  $u$  que satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico*

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu(u(x, t) - T_a) + f(x), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = F, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), & x = L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = T_a, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

tiene como solución

$$u(x, t) = T_a + e^{j(x,t)} \left[ (F - T_a) e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{h}x}{\kappa + \bar{h}L} \right) + \varphi(x, t) \right],$$

donde

$$j(x, t) = \frac{\beta}{2\alpha^2} x - \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) t, \quad \bar{h} = h + \frac{\kappa\beta}{\alpha^2}$$

y

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2\bar{h}(F - T_a) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(L\bar{h} + \kappa \cos^2(\lambda_n L)) \lambda_n} \right] \text{sen}(\lambda_n x),$$

con  $\lambda_n$  las soluciones positivas de la ecuación  $\text{tg}(Lx) = -\frac{\kappa}{\bar{h}}x$  y

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2\bar{h}}{L\bar{h} + \kappa \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{(F - T_a) \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{\lambda_n} + \int_0^L f(x) e^{-j(x,t)} \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

*Demostración:* A fines prácticos de la demostración, se considera la siguiente sustitución  $v(x, t) = u(x, t) - T_a$ . Se reemplaza este cambio de variables en el sistema (2.22) y se obtiene un nuevo sistema equivalente donde la función a determinar es  $v(x, t)$ . Lo que motiva la sustitución realizada es que luego de ella se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo parabólico con condiciones de borde que ya hemos estudiado. En este caso resulta simple observar que la función  $v(x, t)$  debe satisfacer las ecuaciones del sistema (2.23) dado por:

## 2.1. ASPECTOS ANALÍTICOS

$$\begin{cases} v_t(x, t) = \alpha^2 v_{xx}(x, t) - \beta v_x(x, t) - \nu v(x, t) + f(x), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ v(x, t) = F - T_a, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa v_x(x, t) = -h v(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ v(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

En virtud del Teorema 2.10 se sabe que la solución del sistema parabólico (2.23) viene dado por

$$v(x, t) = e^{j(x,t)} \left[ (F - T_a) e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{h}x}{\kappa + \bar{h}L} \right) + \varphi(x, t) \right],$$

donde

$$j(x, t) = \frac{\beta}{2\alpha^2} x - \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) t, \quad \bar{h} = h + \frac{\kappa\beta}{\alpha^2}$$

y

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \bar{f}_n(s) e^{\lambda_n^2 \alpha^2 (s-t)} ds - \frac{2\bar{h} (F - T_a) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(L\bar{h} + \kappa \cos^2(\lambda_n L)) \lambda_n} \right] \text{sen}(\lambda_n x).$$

Con  $\lambda_n$  las soluciones positivas de la ecuación  $\text{tg}(Lx) = -\frac{\kappa}{\bar{h}}x$  y

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2\bar{h}}{L\bar{h} + \kappa \cos^2(\lambda_n L)} \left( -\frac{(F - T_a) \left( \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \nu \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{\lambda_n} + \int_0^L f(x) e^{-j(x,t)} \text{sen}(\lambda_n x) dx \right).$$

Por lo tanto, la solución del sistema (2.22) es

$$u(x, t) = T_a + e^{j(x,t)} \left[ (F - T_a) e^{-j(0,t)} \left( 1 - \frac{\bar{h}x}{\kappa + \bar{h}L} \right) + \varphi(x, t) \right].$$

Tal como se quería demostrar. □

**Observación 2.13** *La solución del problema (2.22) es consistente, pues si se con-*

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

---

sidera  $f(x) = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\nu = 0$  (es decir, la ecuación de calor sin fuente ni términos disipativos) se obtiene que  $j(x, t) = 0$ ,  $\bar{f}_n(t) = 0$  y  $\bar{h} = h$ . Por lo que la solución se escribe como

$$u(x, t) = F + \frac{h}{\kappa + hL}(T_a - F)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h(T_a - F)e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t}}{(Lh + \kappa \cos^2(\lambda_n L))\lambda_n} \text{sen}(\lambda_n x), \quad (2.24)$$

la cual coincide con la solución del problema de transferencia de calor en una barra con las mismas características y condiciones de borde, pero sin términos disipativos [101, 260].

## 2.2. Aspectos Numéricos

En esta sección se discute brevemente la importancia de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Se trata particularmente el método de diferencias finitas y se aplica al problema de interés. Se incluyen condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método utilizado mediante diferentes ejemplos.

### 2.2.1. Métodos Numéricos

Los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales son útiles para tratar problemas de transferencia de calor [49, 273], dinámica de fluidos [64, 251], y otras ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelan problemas físicos tales como la ecuación de onda [199], la ecuación de calor [64, 251], la ecuación de Laplace [159], la ecuación de Poisson [92], entre otras.

Este tipo de métodos se suele usar cuando la expresión analítica de la solución es muy compleja o cuando el problema estudiado no puede ser resuelto por medio

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

---

de técnicas de análisis exacto, ya sea porque presenta geometrías o condiciones de contorno o iniciales complicadas, o bien, éstas involucran ecuaciones diferenciales no lineales que dependen de varios parámetros [102].

En la mayoría de los métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones en derivadas parciales se describe un proceso por medio del cual se obtiene la solución aproximada de dicha ecuación. En este proceso se pueden observar dos etapas bien definidas. La primera, llamada discretización, consiste en transformar el dominio continuo en uno discreto, particularmente, en una malla de nodos. Esto reduce la ecuación diferencial con sus condiciones iniciales y de frontera, a un sistema de ecuaciones algebraicas, cuyo tamaño depende de la cantidad de nodos en la malla y lógicamente son mucho más simples de resolver. La segunda etapa del proceso de aproximación consiste en la solución del sistema de ecuaciones algebraicas. Dependiendo del problema particular hay métodos que son más adecuados para algunos sistemas y otras estrategias resultan convenientes para otro tipo de sistemas. En la bibliografía hay una gran variedad de métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales parciales, entre los más usuales se pueden citar los siguientes métodos: diferencias finitas [3, 177, 184, 232], elementos finitos [57, 67, 236, 240, 299], volúmenes finitos [7, 53, 85], Montecarlo [103, 203, 229].

### 2.2.2. Solución Numérica

Debido a que la expresión analítica de la solución del problema (2.22) dada en el Teorema 2.12 es muy difícil de abordar y con la finalidad de conocer la forma de los perfiles de temperatura  $u(x, t)$ ; se trata numéricamente, mediante diferencias finitas, el problema de interés. Más detalles sobre el método numérico pueden verse en el Apéndice A.

En el caso en que las funciones que se quieren discretizar dependen de dos o más

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

---

variables, las derivadas parciales, se definen de forma análoga a lo realizado en el Apéndice A; pues solo se deben tomar las diferencias en la variable correspondiente. En nuestro caso particular, la función  $u(x, t)$  que se quiere aproximar numéricamente depende de una única variable espacial  $x$  y de la variable temporal  $t$ . Debido a eso es necesario definir una partición bidimensional que tenga en cuenta la partición en la variable espacial y la partición en la variable temporal.

**Definición 2.14** *Se define una partición bidimensional uniforme en una variable espacial  $x$  y la variable temporal  $t$  como un conjunto discreto  $\mathcal{P}$  que satisface*

$$\mathcal{P} = \{(x_i, t_j) / i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M; x_i \in \mathcal{P}_x, t_j \in \mathcal{P}_t\},$$

donde

$$\mathcal{P}_x = \{x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N, x_i = (i - 1)\Delta x, i = 1, 2, \dots, N\}$$

y

$$\mathcal{P}_t = \{t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < t_M, t_j = (j - 1)\Delta t, j = 1, 2, \dots, M\}.$$

Específicamente  $\mathcal{P}_x$  es la partición asociada a la variable espacial  $x$ ,  $\mathcal{P}_t$  la correspondiente partición asociada a la variable temporal  $t$ . Los valores  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  se denominan pasos de discretización espacial y temporal respectivamente, estos se determinan numéricamente y se definen en una malla equidistante (uniforme) como  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ .

En la Figura 2.3 se esquematiza gráficamente el mallado bidimensional de una función  $u$  para la partición definida en 2.14 donde los nodos  $u(x_i, t_j)$  se denotan por simplicidad  $u_{i,j}$ . En el gráfico de la izquierda se visualiza el mallado, en el gráfico de la derecha se explicita que el nodo  $u(x_i, t_{j+1})$  depende directamente de los nodos  $u(x_{i-1}, t_j), u(x_i, t_j)$  y  $u(x_{i+1}, t_j)$ .

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

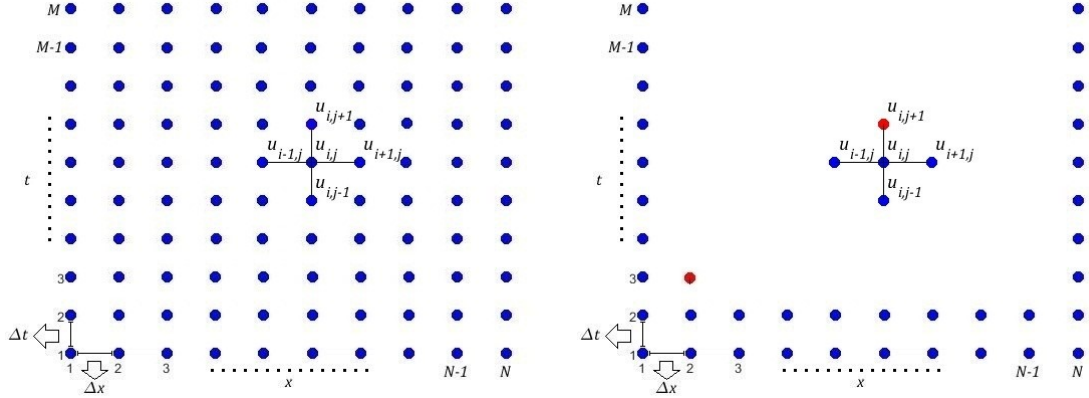


Figura 2.3: Mallado bidimensional.

El siguiente resultado permite ver la forma general de la discretización por diferencias finitas centradas en el espacio y hacia adelante en el tiempo de nuestro problema particular dado por el sistema (2.22).

**Lema 2.15** Sean  $\alpha^2, \beta, \nu, T_a, L, F, \kappa, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $f \in C((0, L))$ . Dada la función  $u$  que satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , la discretización del problema parabólico dado en (2.22) utilizando diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia adelante en la variable temporal tiene la siguiente expresión

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = \tau_1 u_{i+1,j} + \tau_2 u_{i,j} + \tau_3 u_{i-1,j} + R_i, & i = 2, \dots, N-1, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = F, & i = 1, \quad j = 1, \dots, M, \\ u_{i,j} = \frac{h\Delta x T_a + \kappa u_{i-1,j}}{\kappa + h\Delta x}, & i = N, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = T_a, & i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \end{cases} \quad (2.25)$$

donde

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j), \quad R_i = (\nu T_a + f(x_i))\Delta t \quad (2.26)$$

y



## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

---

$$\tau_1 = \left( \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} - \frac{\beta}{2\Delta x} \right) \Delta t, \quad \tau_2 = 1 - \left( \nu + 2 \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} \right) \Delta t, \quad \tau_3 = \left( \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\beta}{2\Delta x} \right) \Delta t. \quad (2.27)$$

*Demostración:* Solo basta observar que según lo desarrollado en el Apéndice A, se tiene que

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}, \quad u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (2.28)$$

Se reemplazan las expresiones (2.28) en el sistema (2.22) y se obtiene (2.25)-(2.27) tal como se quería demostrar. □

**Lema 2.16** *Se puede garantizar para el problema algebraico (2.25) una precisión de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio.*

*Demostración:* La demostración de este resultado surge de manera inmediata debido a la Observación A.4 realizada en el Apéndice A. □

### 2.2.3. Convergencia y Estabilidad

Para completar lo relacionado con la solución numérica del problema (2.22) es necesario asegurar con certeza la convergencia y estabilidad del método. Es conocido el hecho de que una solución numérica puede no converger a la solución analítica, más aún, podría, en el peor de los casos, ni siquiera converger.

En el caso del método diferencias finitas se puede prever este hecho y asegurarse de elegir el paso espacial y temporal de manera tal que la solución resulte conver-

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

---

gente. Es muy útil desde el punto de vista de las aplicaciones conocer la zona de convergencia del problema estudiado.

En este tipo de problemas la convergencia de las soluciones está garantizada si la aproximación resulta estable, por tal motivo se estudia la estabilidad de las soluciones del problema (2.25)

**Lema 2.17** *Las soluciones numéricas del problema discreto (2.25) obtenidas mediante diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia delante en la variable temporal, resultan estables y convergentes sii*

$$\left(\frac{\beta\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 2 \frac{\alpha^2\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1. \quad (2.29)$$

*Demostración:* Según [177, 206] las soluciones numéricas del problema (2.25) son estables y convergentes sii

$$(\tau_3 - \tau_1)^2 < \tau_3 + \tau_1 < 1. \quad (2.30)$$

Se reemplazan las Ecuaciones (2.27) en (2.30) y se obtiene (2.29). Tal como se quería probar.  $\square$

### 2.2.4. Ejemplos Numéricos

En esta subsección se consideran diversos ejemplos numéricos para el problema (2.25) donde es considerado el aire a presión atmosférica como el fluido disipativo. Se puede apreciar el perfil espacio-temporal de temperaturas para diferentes materiales en distintas condiciones disipativas y con presencia o ausencia de fuentes externas.

Los pasos de discretización y los parámetros utilizados en la simulaciones numéricas son:  $\Delta x = 0,01 m$ ;  $\Delta t = 0,1 s$ ;  $L = 1 m$ ;  $F = 100^\circ C$ ;  $T_a = 25^\circ C$  y  $h =$

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

$10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ . Las conductividades y difusividades térmicas para los materiales considerados fueron tomados de [51] y se listan en el cuadro 2.2.

Materiales	Símbolo	$\alpha^2 (\times 10^4) [\text{m}^2/\text{s}]$	$\kappa [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$
Plomo	Pb	0,23673	35
Hierro	Fe	0,20451	73
Niquel	Ni	0,22663	90
Aluminio	Al	0,84010	204
Cobre	Cu	1,12530	386
Plata	Ag	1,70140	419

Cuadro 2.2: Propiedades térmicas de diferentes materiales.

**Ejemplo 2.18** *En este ejemplo se considera el proceso de difusión pura para diferentes materiales. Es decir, sin términos disipativos ni fuentes. Por lo que  $\beta = \nu = f(x) = 0$ .*

En la Figura 2.4 se pueden ver los perfiles temporales de temperatura en el medio de la barra ( $x = L/2$ ) y en el borde derecho de la misma ( $x = L$ ) para diferentes materiales.

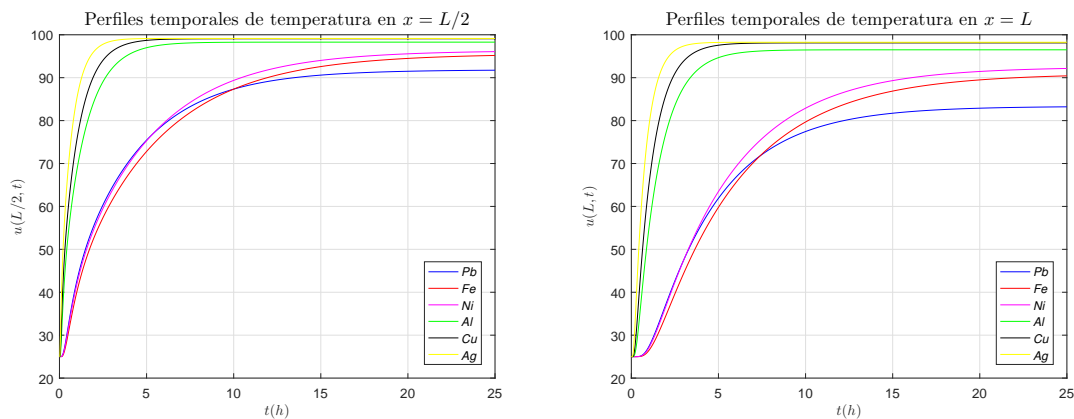


Figura 2.4: Ejemplo 2.18: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

Los resultados numéricos se corresponden cualitativamente con los analíticos [49] dado que en estas figuras se aprecia claramente que las barras construidas con materiales más difusivos (coeficiente de difusividad térmica más alta) aumentan más rápidamente su temperatura. Ver, por ejemplo que en la punta derecha ( $x = L$ ) a las 5 horas ( $t = 5 h$ ) la temperatura en la barra de Plomo es aproximadamente de  $63^\circ C$  y en la barra de Plata  $98^\circ C$ . Así mismo, aquellas que están construidas con materiales más conductivos (conductividad térmica más alta) alcanzan una mayor temperatura; ver, por ejemplo, que la temperatura asintótica que alcanza la barra de Plomo es de  $83^\circ C$  aproximadamente y la barra de Plata alcanza una temperatura de  $98^\circ C$ .

En la Figura 2.5 se pueden ver, para diferentes materiales, los perfiles espaciales de temperatura (temperatura a lo largo de toda la barra) para dos instantes de tiempo  $t = 5 h$  y  $t = 25 h$ .

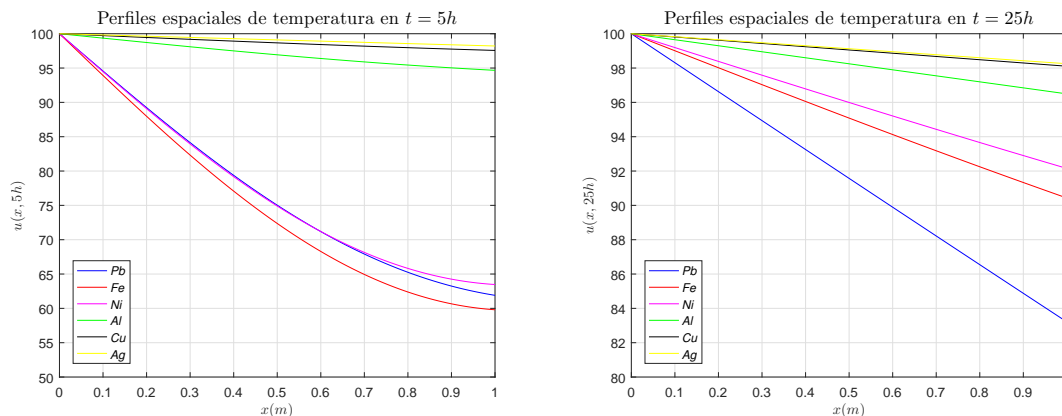


Figura 2.5: Ejemplo 2.18: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para  $t = 5 h$  (izquierda) y  $t = 25 h$  (derecha).

En esta figura se visualiza como a las 5 horas ( $t = 5 h$ ) las barras construidas con materiales menos difusivos (Plomo, Hierro y Niquel) no alcanzan aún el estado estacionario. Sin embargo, a las 25 horas ( $t = 25 h$ ) todas las barras alcanzaron dicho estado. También, queda en evidencia que las barras que llegan a mayor temperatura son las que están construidas con materiales más conductivos. Por otra parte, el perfil

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

espacial de temperatura en el estado estacionario tiende a tener un comportamiento lineal y esto concuerda con los resultados analíticos [101].

En la Figura 2.6 se pueden ver los perfiles espacio-temporales de temperatura para una barra de Plomo (izquierda) y una de Plata (derecha). El color en cada punto  $(t, x)$  de la distribución 2.6 indica la temperatura de la barra en la posición  $x(m)$  en el instante  $t(h)$ . Se distingue claramente la diferencia en el comportamiento del modelo, lo cual se relaciona directamente con que la Plata es un material mucho más conductivo y difusivo que el Plomo. Por este motivo en el gráfico de la derecha predomina un color rojo intenso.

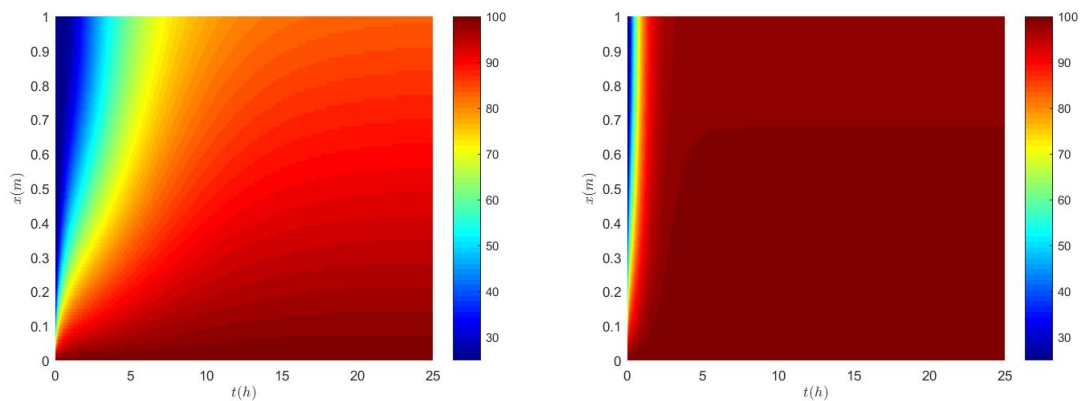


Figura 2.6: Ejemplo 2.18: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha).

**Observación 2.19** *El Ejemplo 2.18 es de interés, pues debido a la ausencia de términos disipativos y fuentes, se estudia la ecuación de calor con las condiciones de borde dadas. Este problema particular es conocido en la bibliografía [49, 101] lo que permite verificar las bondades del método numérico utilizado.*

**Ejemplo 2.20** *En este ejemplo se considera el proceso de transferencia de calor con términos disipativos, pero sin fuentes por lo que  $f(x) = 0$ . Los parámetros para los términos disipativos utilizados son:  $\beta = 0,01 m/s$  y  $\nu = 0,0001 1/s$ .*

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

En la Figura 2.7 se pueden ver, nuevamente, los perfiles temporales de temperatura en el medio de la barra ( $x = L/2$ ) y en el borde derecho de la misma ( $x = L$ ).

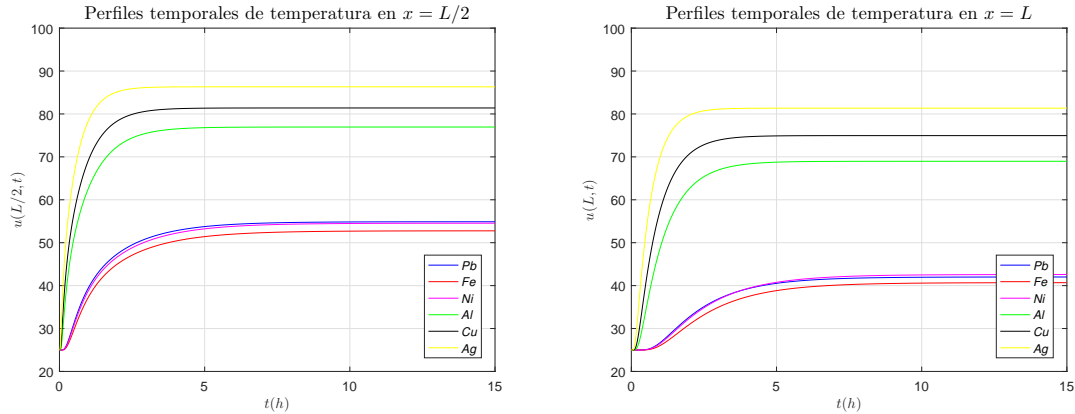


Figura 2.7: Ejemplo 2.20: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

En la Figura 2.8 se pueden ver los perfiles espaciales de temperatura (temperatura a lo largo de toda la barra) para dos instantes de tiempo  $t = 2h$  y  $t = 15h$ .

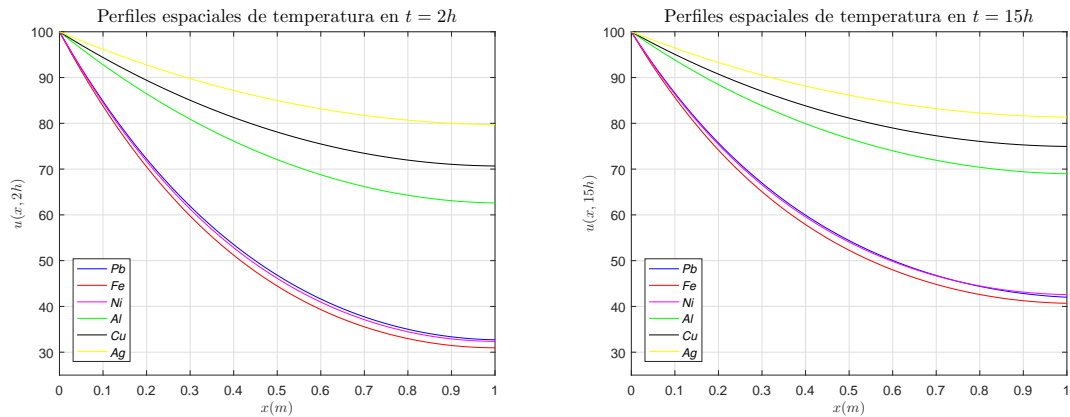


Figura 2.8: Ejemplo 2.20: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para  $t = 2h$  (izquierda) y  $t = 15h$  (derecha).

En las Figuras 2.7-2.8 se observa el mismo comportamiento que en el Ejemplo 2.18, pero en este caso se alcanzan menores valores de temperatura y eso encuentra explicación directa en el agregado de términos disipativos, lo que hace que no todo el calor entregado por la fuente esté disponible para calentar la barra. Además, debi-

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

do a la disipación de energía térmica, se pierde el comportamiento lineal del perfil espacial de temperaturas en el estado estacionario.

En la Figura 2.9 se pueden ver, nuevamente, los perfiles espacio-temporales de temperatura para una barra de Plomo y una de Plata.

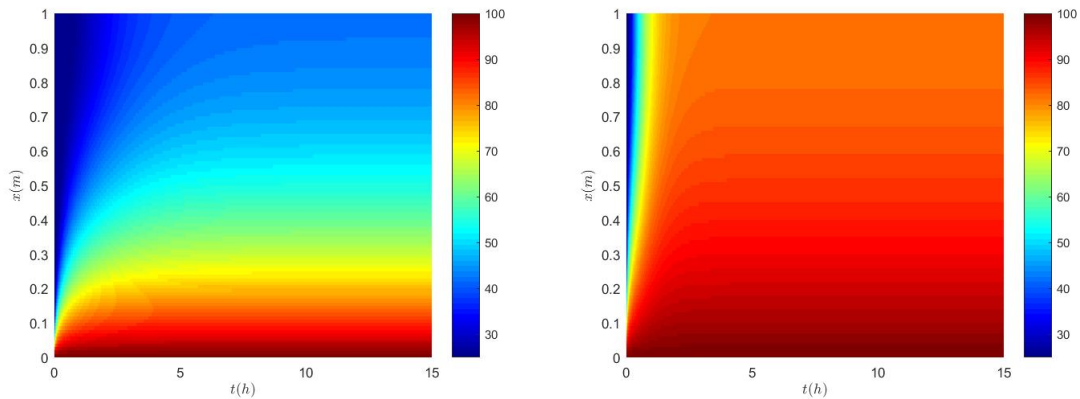


Figura 2.9: Ejemplo 2.20: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha).

Los perfiles son equivalentes a los obtenidos en el Ejemplo 2.18 (sin términos disipativos), pero en este caso los colores rojos no son tan intensos, lo que implica menor temperatura. Esto se debe a la disipación de energía térmica debido al flujo lateral y al fenómeno de convección. Es interesante observar que debido al mismo motivo en el gráfico de la distribución de temperaturas para el Plomo dado en la Figura 2.9 (izquierda) predominan colores como el azul y el verde. En este contexto, esto significa que en la barra menos conductiva y menos difusiva la temperatura, es mucho más baja que la respectiva sin términos disipativos considerados en la Figura 2.6.

**Ejemplo 2.21** *En este ejemplo se considera el proceso de transferencia de calor con términos disipativos (debido al flujo lateral y al fenómeno de convección) y con fuentes. Los parámetros para los términos disipativos utilizados son:  $\beta = 0,01$  m/s y  $\nu = 0,0001$  1/s. Se toma como término fuente una función  $f$  continua y derivable*

## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

dada por  $f(x) = -\frac{1}{50}x(x-1)^\circ\text{C}/\text{s}$ .

En la Figura 2.10 se pueden ver, nuevamente, los perfiles temporales de temperatura en el medio de la barra ( $x = L/2$ ) y en el borde derecho de la misma ( $x = L$ ).

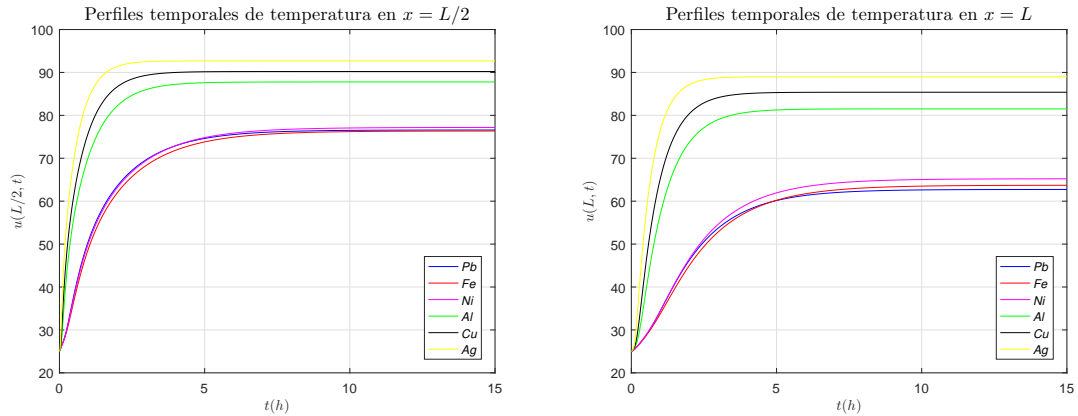


Figura 2.10: Ejemplo 2.21: Perfiles temporales de temperatura para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

En la Figura 2.11 se pueden ver los perfiles espaciales de temperatura (temperatura a lo largo de toda la barra) para dos instantes de tiempo  $t = 2h$  y  $t = 15h$ .

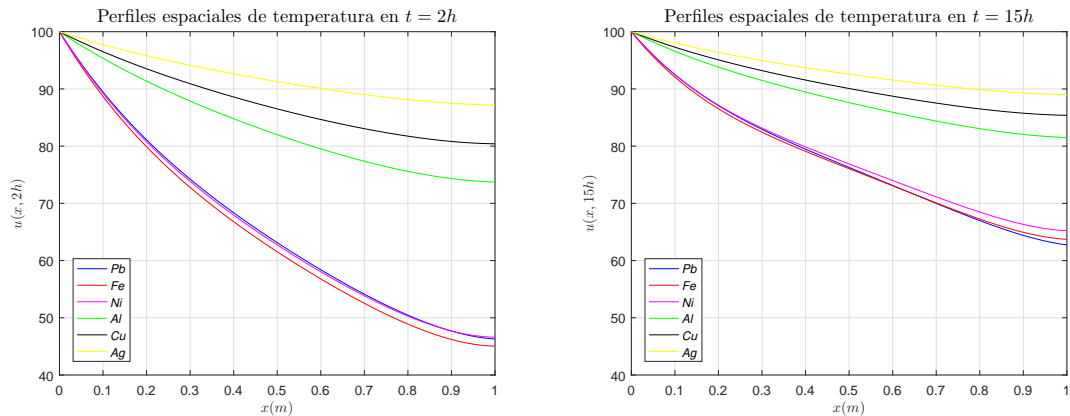


Figura 2.11: Ejemplo 2.21: Perfiles espaciales de temperatura para diferentes materiales. Para  $t = 2h$  (izquierda) y  $t = 15h$  (derecha).

Los perfiles obtenidos en las Figuras 2.10 y 2.11 son totalmente equivalentes a los obtenidos en el Ejemplo 2.20 con la diferencia de que en este caso la temperatura



## 2.2. ASPECTOS NUMÉRICOS

alcanza valores más altos. Esto se debe directamente a la presencia de la fuente térmica.

En la Figura 2.12 se pueden ver, nuevamente, los perfiles espacio-temporales de temperatura para una barra de Plomo y una de Plata.

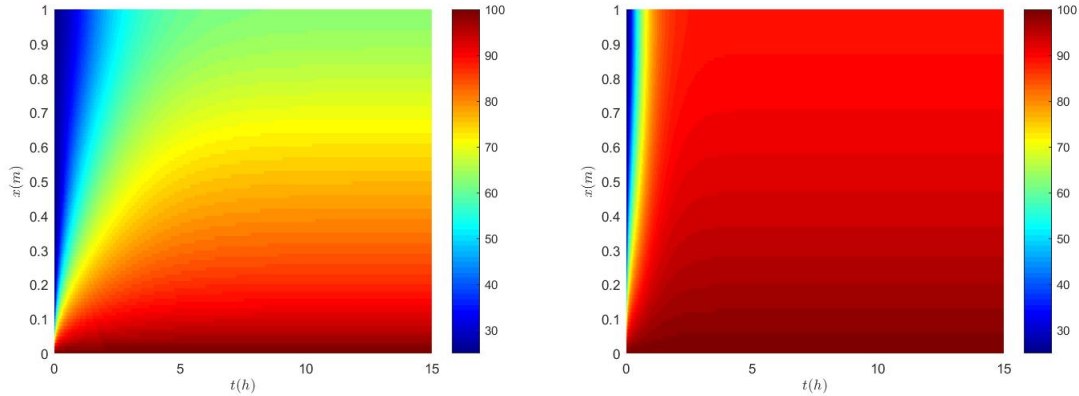


Figura 2.12: Ejemplo 2.21: Distribución de temperatura. Plomo (izquierda) y Plata (derecha).

Los perfiles son equivalentes a los obtenidos en el Ejemplo 2.20, pero en este caso los colores rojos son más intensos y disminuyó notoriamente el predominio de los colores azul y verde. Esto indica mayor temperatura y eso se debe a la presencia de la fuente térmica.

**Observación 2.22** *Notar que para la elección de parámetros realizada en cada uno de los ejemplos, se satisface la condición de convergencia y estabilidad dada por la expresión (2.29). Esta expresión indica que las soluciones numéricas resultan estables y convergentes si se cumple la siguiente relación*

$$\left(\frac{\beta\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 2 \frac{\alpha^2\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1, \quad (2.31)$$

*operando algebraicamente de (2.31) se obtiene*

$$\frac{\beta^2\Delta t}{2} < \alpha^2 < \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}. \quad (2.32)$$

### 2.3. CONCLUSIONES

---

Los pasos de discretización utilizados en los Ejemplos 2.18-2.21 son:  $\Delta x = 0,01 \text{ m}$ ;  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ . Por otra parte, la velocidad del fluido  $\beta$  utilizada en el Ejemplo 2.18 es  $\beta = 0$  y en los Ejemplos 2.20-2.21 es  $\beta = 0,01 \text{ m/s}$ .

Se reemplazan estos datos en la expresión (2.32) y se obtiene, para el ejemplo 2.18

$$0 < \alpha^2 < 5 \times 10^{-4} \quad (2.33)$$

y para los ejemplos 2.20-2.21

$$5 \times 10^{-6} < \alpha^2 < 5 \times 10^{-4}. \quad (2.34)$$

Como se puede ver en el Cuadro 2.2 las inecuaciones dadas en (2.33)-(2.34) se satisfacen para todos los materiales considerados.

## 2.3. Conclusiones

En este capítulo se modela el proceso de transferencia de calor a lo largo de una barra homogénea, construida con un material isótropo, embebida en un fluido (líquido o gaseoso) en movimiento con velocidad constante. Como la barra no está totalmente aislada en la superficie lateral, permite el intercambio de calor a un ritmo constante con el medio circundante que se encuentra a temperatura ambiente. Además, la barra está afectada por un conjunto de fuentes que dependen únicamente de la posición. El borde izquierdo de la misma permanece a temperatura constante, mientras que el derecho queda en contacto con el fluido dando lugar al fenómeno de convección.

Para modelizar este problema se utiliza una ecuación parabólica completa con una condición de borde de tipo Dirichlet a izquierda y de tipo Robin a derecha. A partir de métodos de Fourier y un cambio en el sistema de coordenadas (de un sistema

### 2.3. CONCLUSIONES

---

fijo a uno móvil) se obtiene una expresión para la solución analítica del problema de interés.

Debido a que la expresión hallada es muy compleja, se resuelve el problema numéricamente utilizando diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Se impone, al modelo numérico, condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

Estos resultados muestran que los perfiles de temperatura obtenidos son consistentes cualitativamente con la teoría, pues estos resultan razonables en función de los datos utilizados y son acordes con la física del problema dado que los materiales más conductivos alcanzan mayor temperatura y los más difusivos aumentan su temperatura con más rapidez.



## Capítulo 3

# Determinación de la Difusividad Térmica

La determinación de la difusividad térmica en diferentes procesos de transferencia de calor tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, para el diseño de un sistema óptimo de control de procesos térmicos.

El coeficiente de difusividad térmica puede obtenerse, en el caso en que se considera un parámetro constante (1.2), a partir de la estimación simultánea de la conductividad térmica y el calor específico (o capacidad calorífica). Esto se debe a que estas propiedades tienen una influencia determinante en la distribución de temperaturas y densidades de flujo de calor durante los procesos transitorios de calentamiento o enfriamiento.

En [283] los autores estiman ambas propiedades térmicas a partir de diferentes mediciones tomadas en un único experimento. Este problema también fue estudiado en [120], donde las estimaciones se realizan mediante un método aproximado de integración directa. Por su parte en [219], a partir de varias mediciones y utilizando un procedimiento iterativo de Levenberg-Marquardt [176] determinan una expresión

analítica para la dependencia de estos parámetros con la temperatura, para distintos casos particulares. En [73] se realizan las estimaciones de ambos parámetros utilizando el método del gradiente conjugado y diversos cambios en las posiciones de toma de mediciones. Se utilizan técnicas similares para diferentes casos particulares en [283]. Otros trabajos interesantes sobre la estimación simultánea de la conductividad térmica y el calor específico (o capacidad calorífica) pueden verse en [59, 122, 136, 137].

La estimación de la conductividad térmica, relacionado con el parámetro que nos interesa determinar, fue ampliamente abordada bajo diversos enfoques. Fue estudiada bajo técnicas numéricas de problemas inversos, ver por ejemplo [90, 147, 246, 263]. En [121] se realizó la estimación bajo condiciones particulares utilizando el método de gradiente conjugado. En [147] se utilizó el método de diferencias finitas con la misma finalidad. Por su parte en [281] se propone un modelo inverso lineal para estimar la dependencia con la temperatura de la conductividad térmica y en [282] se realiza lo mismo mediante la utilización de diferentes métodos iterativos. Otras estrategias interesantes de estimación pueden verse en [214, 215, 241, 242]. Problemas particulares de estimación de la conductividad térmica que tienen en cuenta medios multidimensionales, medios no homogéneos y cambios de fase se abordan en [55, 123, 132, 154, 173].

Por otro lado, en la literatura pueden encontrarse artículos de interés donde se estima directamente, la difusividad térmica, a partir de enfoques analíticos y numéricos. Ver, por ejemplo, [27, 253, 264].

En este capítulo se trata el primer problema inverso, que consiste en la determinación del coeficiente de difusividad térmica en el problema dado por (2.22). Esta estimación se realiza mediante técnicas numéricas de optimización, a partir de datos ruidosos simulados con tres criterios diferentes. El primero consiste en la toma de datos para un instante de tiempo fijo en distintas posiciones. En el segundo, los datos se toman

### 3.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

en una posición fija para diferentes instantes de tiempo y en el último, los datos se toman en diferentes instantes de tiempo y en distintas posiciones. Además, se incluye un análisis numérico de sensibilidad para decidir cuándo y dónde es conveniente ubicar los sensores de temperatura para que la estimación resulte más precisa. Con la finalidad de ilustrar el procedimiento de determinación, se incluyen diferentes ejemplos numéricos.

## 3.1. Presentación del Problema

El problema inverso que se presenta formalmente en esta sección está asociado al problema directo abordado en el Capítulo 2 de esta tesis.

Bajo las condiciones del Teorema 2.12, es decir, dados  $\beta, \nu, T_a, L, F, \kappa, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$ , se desea estimar el coeficiente de difusividad térmica ( $\alpha^2$ ) en el siguiente sistema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu(u(x, t) - T_a) + f(x), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = F, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), & x = L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = T_a, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $u$  satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ .

La estimación se realiza mediante datos ruidosos de temperatura  $u_\epsilon(x_i, t_j)$  en diferentes posiciones  $x_i$  a diferentes tiempos  $t_j$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tales que, satisfacen

$$|u(x_i, t_j) - u_\epsilon(x_i, t_j)| \leq \epsilon, \quad (3.2)$$

donde  $\epsilon$  es una cota para el ruido en los datos o el error de medición.

## 3.2. Determinación de la Difusividad Térmica

Para hallar la solución del problema (3.1)-(3.2), presentado en la Sección 3.1, se resuelve un problema de optimización que consiste en minimizar el error cuadrático entre la temperatura y sus respectivos datos. Sea el funcional  $J : D \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  definido por

$$J(\alpha^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |u(x_i, t_j, \alpha^2) - u_\epsilon(x_i, t_j)|^2, \quad (3.3)$$

se busca el parámetro  $\alpha^2$  que minimiza el funcional (3.3). Es decir, se quiere hallar

$$\hat{\alpha}^2 = \underset{\alpha^2 \in \Theta}{\operatorname{argmin}} J(\alpha^2), \quad (3.4)$$

donde  $\Theta$  es un conjunto admisible de soluciones y se determina teniendo en cuenta los valores donde varía el parámetro que se desea estimar. Para el caso de la estimación del coeficiente de difusividad térmica, se puede considerar,  $\Theta = (5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-4})$  (ver Cuadro 2.2).

La estimación dada en (3.4) se obtiene numéricamente por medio de la implementación en algún software para estos fines; en este capítulo se utilizó la función “fmincon” de Matlab. En la siguiente sección se incluyen ejemplos numéricos para ilustrar las técnicas descriptas aplicadas al problema (3.1)-(3.2).

## 3.3. Ejemplos Numéricos

En esta sección se estudia la estimación del parámetro bajo tres criterios diferentes. Con la finalidad de ejemplificar la estimación propuesta en este capítulo se retoma el Ejemplo 2.21 y se realiza la determinación para una barra de Aluminio ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ) y otra de Cobre ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ).



### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

**Observación 3.1** *En esta tesis no se realiza ningún tipo de medición experimental. Las mediciones de temperatura utilizadas en este capítulo se simulan numéricamente mediante la solución del problema directo estudiado en el Capítulo 2, al cual se lo perturba con ruido aleatorio ( $\epsilon_i$ ) normalmente distribuido con media cero y desvío  $\sigma$ . Por tratarse de ruidos aleatorios, no es posible garantizar que el 100 % de los datos cumplan con la inecuación (3.2), para tratar este inconveniente, se elige el parámetro  $\sigma$  imponiendo la siguiente condición:*

$$P(|\epsilon_i| < \epsilon) > 0,99, \quad (3.5)$$

donde  $P$  es la probabilidad,  $\epsilon_i$  es la simulación de ruido en los datos y  $\epsilon$  es una cota para dicho ruido, que cumple con (3.2). Notar que la expresión (3.5) indica que el 99 % de los datos simulados satisfacen (3.2); ver [93, 202]. De la inecuación (3.5) se obtiene

$$2P(\epsilon_i < \epsilon) - 1 > 0,99, \quad (3.6)$$

equivalentemente

$$\phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) > 0,995, \quad (3.7)$$

donde  $\phi$  es la función de distribución de probabilidad normal estandarizada [93, 202].

De (3.7) resulta

$$\frac{\epsilon}{\sigma} > 2,58. \quad (3.8)$$

El desvío estándar ( $\sigma$ ) se selecciona, en cada caso, para la cota de error elegida ( $\epsilon$ ), a partir de la expresión (3.8). Por ejemplo, basta con tomar

$$\sigma = \frac{\epsilon}{3}, \quad (3.9)$$

si se utiliza (3.9) para la elección del desvío estándar se puede asegurar que el 99,87 % de los datos simulados satisfacen (3.2).

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

**Ejemplo 3.2** Se considera la determinación de la difusividad térmica del Aluminio y el Cobre utilizando los siguientes datos:  $L = 1\text{ m}$ ;  $F = 100^\circ\text{C}$ ;  $T_a = 25^\circ\text{C}$ ;  $h = 10\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C})$ ;  $f(x) = -\frac{1}{50}x(x-1)^\circ\text{C}/\text{s}$ ;  $\beta = 0,01\text{ m}/\text{s}$  y  $\nu = 0,0001\text{ l}/\text{s}$ .

#### 3.3.1. Criterio 1

En este criterio se aborda la solución del Ejemplo 3.2 a partir de mediciones de temperatura en diferentes posiciones de la barra para un mismo instante de tiempo. Se analizan los valores obtenidos en función del nivel de ruido en los datos y cantidad de mediciones.

Con fines comparativos se simulan los datos en dos instantes de tiempo. El primer instante de tiempo considerado es  $t = 12\text{ h}$  y el segundo es  $t = 24\text{ h}$ . Los datos se generan espacialmente equiespaciados.

En el Cuadro 3.1 se muestran los valores obtenidos para el parámetro estimado (coeficiente de difusividad térmica) y los errores relativos de estimación para los dos materiales considerados. Las mediciones de temperatura fueron simuladas con diferentes niveles de ruido ( $\epsilon = 0,5^\circ\text{C}$ ;  $1,0^\circ\text{C}$ ;  $1,5^\circ\text{C}$ ;  $2,0^\circ\text{C}$ ;  $2,5^\circ\text{C}$ ) en el instante  $t = 12\text{ h}$  para tres posiciones diferentes de la barra ( $x = 0, x = L/2, x = L$ ).

$\epsilon$ [ $^\circ\text{C}$ ]	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
0,5	0,8422	0,0025	1,1261	0,0007
1,0	0,8370	0,0035	1,1245	0,0016
1,5	0,8446	0,0053	1,1204	0,0043
2,0	0,8473	0,0086	1,1322	0,0061
2,5	0,8483	0,0098	1,1344	0,0081

Cuadro 3.1: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando 3 datos equiespaciados ( $x = 0, x = L/2, x = L$ ) en  $t = 12\text{ h}$  para diferentes niveles de ruido.

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se observa que la estimación resulta razonable en todos los casos y no se notan diferencias significativas, en el error de estimación, con respecto al material. Como resulta lógico, el error relativo de estimación aumenta conforme aumenta el error de medición en los datos. Los errores relativos de estimación varían entre 0,25 % - 0,98 % para la barra de Aluminio y entre 0,07 % - 0,81 % para la de Cobre.

El Cuadro 3.2 contiene la misma información que el Cuadro 3.1, para los dos materiales considerados, cuando  $t = 24 h$ , en las mismas posiciones y para los mismos niveles de ruido que en el caso anterior.

$\epsilon$ [ $^{\circ}C$ ]	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
0,5	0,8404	0,0003	1,1268	0,0013
1,0	0,8382	0,0022	1,1218	0,0030
1,5	0,8446	0,0059	1,1328	0,0066
2,0	0,8333	0,0080	1,1164	0,0078
2,5	0,8298	0,0122	1,1115	0,0119

Cuadro 3.2: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando 3 datos equiespaciados ( $x = 0, x = L/2, x = L$ ) en  $t = 24 h$  para diferentes niveles de ruido.

De nuevo se observa que la estimación resulta razonable en todos los casos y no se notan diferencias significativas con respecto al material ni tampoco con los resultados obtenidos en el Cuadro 3.1. Los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 0,03 % - 1,22 % para la barra de Aluminio y entre 0,13 % - 1,19 % para la de Cobre.

En el Cuadro 3.3 se muestran los valores obtenidos para el parámetro estimado (coeficiente de difusividad térmica) y los errores relativos de estimación para los dos materiales considerados. Los datos de temperatura fueron simulados con error  $\epsilon = 1,0^{\circ}C$  teniendo en cuenta diferente cantidad de mediciones ( $n = 1, 3, 5, 10$ ) en el instante  $t = 12 h$ .

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

$n$	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
1	0,8869	0,0055	1,1254	0,0024
3	0,8415	0,0017	1,1226	0,0018
5	0,8410	0,0011	1,1265	0,0010
10	0,8432	0,0037	1,1165	0,0021

Cuadro 3.3: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando  $n$  datos equiespaciados en  $t = 12 h$  para  $\epsilon = 1^\circ C$ .

Se observan los mismos resultados obtenidos en los Cuadros 3.1 - 3.2. Además, se aprecia que el error relativo de estimación aumenta cuando se agregan muchas mediciones, resultando mejor la utilización de 3 y/o 5 mediciones. Los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 0,11 % - 0,55 % para la barra de Aluminio y entre 0,10 % - 0,24 % para la de Cobre.

El Cuadro 3.4 contiene la misma información que el Cuadro 3.3, para los dos materiales considerados, cuando  $t = 24 h$ , en las mismas posiciones y para el mismo nivel de ruido que en el caso anterior.

$n$	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
1	0,7923	0,0568	1,0763	0,0956
3	0,8510	0,0010	1,1286	0,0030
5	0,8538	0,0009	1,1277	0,0021
10	0,8390	0,0001	1,1268	0,0013

Cuadro 3.4: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando  $n$  datos equiespaciados en  $t = 24 h$  para  $\epsilon = 1^\circ C$ .

Se observan resultados muy similares a los obtenidos en el Cuadro 3.3, los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 0,01 % - 5,68 % para la barra de Aluminio y entre 0,13 % - 9,56 % para la de Cobre.

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### 3.3.2. Criterio 2

En este caso se consideran mediciones de temperatura en diferentes instantes de tiempo para una posición fija. Nuevamente, se estudian las estimaciones obtenidas en función de diferentes niveles de ruido en las mediciones, como así también, distinta cantidad de datos. Este criterio tiene, desde la práctica, una ventaja importante con respecto al anterior, en este caso, como no se realizan mediciones simultáneas, se necesitaría un único sensor para la toma de datos.

Con fines comparativos se toman dos conjuntos de mediciones, cada uno en una posición diferente ( $x = L/2$  y  $x = L$ ). Los datos se simulan temporalmente equiespaciados.

En el Cuadro 3.5 se muestran los valores obtenidos para el parámetro estimado (coeficiente de difusividad térmica) y los errores relativos de estimación para los dos materiales considerados. Las mediciones de temperatura fueron simuladas con diferentes niveles de ruido ( $\epsilon = 0,5^\circ C; 1,0^\circ C; 1,5^\circ C; 2,0^\circ C; 2,5^\circ C$ ), en el medio de la barra ( $x = L/2$ ), en tres instantes distintos de tiempo ( $t = 5h; t = 15h; t = 25h$ ).

$\epsilon [^\circ C]$	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2 (\times 10^4) [m^2/s]$	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2 (\times 10^4) [m^2/s]$	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
0,5	0,8590	0,0225	1,1406	0,0136
1,0	0,8694	0,0348	1,1829	0,0512
1,5	0,7916	0,0577	1,1214	0,0676
2,0	0,6722	0,1998	1,2498	0,1106
2,5	1,0740	0,2784	0,9321	0,1717

Cuadro 3.5: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando 3 datos temporalmente equiespaciados ( $t = 5h, t = 15h, t = 25h$ ) en  $x = L/2$  para diferentes niveles de ruido.

No se notan diferencias significativas, en cuanto al error relativo, con respecto al material. Se observa que la estimación, en este caso, empeora notoriamente con

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

respecto a la obtenida en la Subsección 3.3.1 (criterio 1). Además, como en los cuadros anteriores, el error relativo de estimación aumenta conforme aumenta el error de medición en los datos. Los errores relativos de estimación varían entre 2,25 % - 27,84 % para la barra de Aluminio y entre 1,36 % - 17,17 % para la de Cobre.

El Cuadro 3.6 contiene la misma información que el Cuadro 3.5, para los dos materiales considerados, cuando  $x = L$ , en los mismos instantes de tiempo y para los mismos niveles de ruido que en el caso anterior.

$\epsilon$ [ $^{\circ}C$ ]	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
0,5	0,8431	0,0035	1,1275	0,0019
1,0	0,8434	0,0039	1,1192	0,0054
1,5	0,8328	0,0085	1,1055	0,0176
2,0	0,8551	0,0178	1,1063	0,0186
2,5	0,8569	0,0200	1,1015	0,0211

Cuadro 3.6: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando 3 datos temporalmente equiespaciados ( $t = 5 h, t = 15 h, t = 25 h$ ) en  $x = L$  para diferentes niveles de ruido.

Se observa que la estimación mejora notoriamente con respecto a la obtenida tomando los datos en medio de la barra ( $x = L/2$ ). Sin embargo, sigue siendo recomendable la utilización del criterio 1 presentado en la Subsección 3.3.1 ya que los errores de estimación, en esa situación, son notoriamente menores. Los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 0,35 % - 2,00 % para la barra de Aluminio y entre 0,19 % - 2,11 % para la de Cobre.

En el Cuadro 3.7 se muestran los valores del parámetro estimado (coeficiente de difusividad térmica) y los errores relativos de estimación para los dos materiales considerados. Los datos de temperatura fueron simulados con error  $\epsilon = 1,0^{\circ}C$  considerando diferente cantidad de datos ( $n = 1, 3, 5, 10$ ) en el medio de la barra ( $x = L/2$ ).

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

$n$	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
1	0,6318	0,2478	0,8389	0,2544
3	0,8259	0,0168	1,1298	0,0037
5	0,8289	0,0132	1,1306	0,0046
10	1,1140	0,3260	0,9421	0,1627

Cuadro 3.7: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando  $n$  datos temporalmente equiespaciados en  $x = L/2$  para  $\epsilon = 1^\circ C$ .

Se observan los mismos resultados obtenidos en los Cuadros 3.5 - 3.6. Además, se aprecia que el error relativo de estimación aumenta cuando se agregan muchas mediciones, resultando mejor la utilización de 3 y/o 5 mediciones. Los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 1,32% - 32,60% para la barra de Aluminio y entre 0,37% - 25,44% para la de Cobre.

El Cuadro 3.8 contiene la misma información que el Cuadro 3.7, para los dos materiales considerados, cuando  $x = L$ , en los mismos instantes de tiempo y para el mismo nivel de ruido que en el caso anterior.

$n$	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
1	0,8544	0,0171	1,1103	0,0133
3	0,8360	0,0118	1,1332	0,0070
5	0,8353	0,0056	1,1197	0,0050
10	0,8428	0,0032	1,1289	0,0031

Cuadro 3.8: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando  $n$  datos temporalmente equiespaciados en  $x = L$  para  $\epsilon = 1^\circ C$ .

Lo que se observa brinda, nuevamente, la misma idea general que se obtuvo con el análisis de los demás cuadros. El primer criterio sigue siendo el más adecuado para la determinación de la difusividad térmica. Las identificaciones obtenidas mediante

### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

mediciones en  $x = L$  son notoriamente mejores (menores errores relativos de estimación) que las obtenidas con datos en  $x = L/2$ . Los errores relativos de estimación, en este caso, varían entre 0,32 % - 1,71 % para la barra de Aluminio y entre 0,31 % - 1,33 % para la de Cobre.

#### 3.3.3. Criterio 3

En este criterio se consideran mediciones de temperatura en diferentes instantes de tiempo y distintas posiciones de la barra. Se estudian las determinaciones obtenidas en función de distintos niveles de ruido en las mediciones.

En el Cuadro 3.9 se pueden apreciar los valores del parámetro estimado (difusividad térmica) y los errores relativos de estimación obtenidos para los dos materiales considerados. Se simuló 9 mediciones de temperatura con diferentes niveles de ruido ( $\epsilon = 0,5^\circ C$ ;  $1,0^\circ C$ ;  $1,5^\circ C$ ;  $2,0^\circ C$ ;  $2,5^\circ C$ ) en tres posiciones distintas de la barra ( $x = 0, L/2, L$ ) para tres instantes diferentes de tiempo ( $t = 5 h, 15 h, 25 h$ ).

$\epsilon$ [ $^\circ C$ ]	Al ( $\alpha_{Al}^2 = 0,84010 \times 10^{-4}$ )		Cu ( $\alpha_{Cu}^2 = 1,12530 \times 10^{-4}$ )	
	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$	$\hat{\alpha}^2(\times 10^4)$ [ $m^2/s$ ]	$ \hat{\alpha}^2 - \alpha^2 /\alpha^2$
0,5	0,84013	0,000033	1,1252	0,000118
1,0	0,83930	0,000895	1,1192	0,000745
1,5	0,84100	0,001109	1,1267	0,001202
2,0	0,85512	0,002409	1,1055	0,001938
2,5	0,85695	0,005174	1,1063	0,002269

Cuadro 3.9: Ejemplo 3.2: Errores relativos de determinación de  $\alpha^2$  tomando 9 datos en  $(0, 5 h)$ ;  $(0, 15 h)$ ;  $(0, 25 h)$ ;  $(L/2, 5 h)$ ;  $(L/2, 15 h)$ ;  $(L/2, 25 h)$ ;  $(L, 5 h)$ ;  $(L, 15 h)$ ;  $(L, 25 h)$  para diferentes niveles de ruido.

Este criterio resulta ser el más conveniente entre los 3 estudiados. Esto se debe a que los errores relativos obtenidos, para los diferentes niveles de ruido, son, en este caso, notoriamente menores a los obtenidos con los otros dos criterios de determinación



### 3.3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

(criterio 1 y criterio 2). El motivo de este hecho, es que al tener en cuenta datos en diferentes instantes de tiempo y en distintas posiciones de la barra, se considera, para la determinación, más información del proceso de transferencia. Por otra parte, no se observan diferencias significativas con respecto al material y el error relativo de estimación aumenta a medida que aumenta el error de medición en los datos. Los errores relativos de estimación, con la utilización de este criterio (criterio3), varían, en este caso, entre 0,0033 % - 0,5174 % para la barra de Aluminio y entre 0,0118 % - 0,2269 % para la de Cobre.

#### 3.3.4. Comparación de los criterios

En esta subsección se comparan los distintos criterios de determinación utilizados. Sin dudas que el mejor criterio es el que utiliza mediciones de temperatura en diferentes posiciones de la barra y en distintos instantes de tiempo (criterio 3). Esto se debe a que al considerar datos simulados en diferentes posiciones e instantes de tiempo, se utiliza más información del proceso para la determinación, por este motivo, se obtienen menores errores relativos de estimación.

Con respecto a los otros dos criterios utilizados se recomienda el que tiene en cuenta datos de temperatura simulados en distintas posiciones de la barra para un mismo instante de tiempo (criterio 1). En este caso los errores relativos de estimación son menores con respecto a los obtenidos en el criterio 2. Esto se debe que al considerar una única posición para la toma de datos, se tiene poca información del proceso para la determinación.

El criterio 1 de determinación tiene un inconveniente y es que para realizar mediciones en simultáneo se necesitan tantas termocuplas (sensores) como datos. Si se cuenta con un único instrumento de medición se puede utilizar el criterio 2, pero se recomienda hacer la toma de datos en el borde derecho de la barra y realizar varias

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

---

mediciones en diferentes tiempos. La determinación es más precisa si las mediciones se toman en el borde derecho de la barra, esto se justificará en la Sección 3.4, a partir del análisis numérico de sensibilidad de la temperatura con respecto al parámetro a determinar.

**Observación 3.3** *En el análisis realizado para los distintos criterios se tuvo en cuenta valores altos para el error de medición. En el rango de temperaturas considerado, una termocupla convencional del tipo T,J,E,K o N comete un error de a lo sumo  $1,0^{\circ}\text{C}$  y termocuplas especiales como las del tipo S,R o B cometen a lo sumo un error de  $0,5^{\circ}\text{C}$ ; ver, por ejemplo, [72, 141, 188]. Si se tiene en cuenta esta observación cualquiera de los criterios considerados en este capítulo arrojan resultados razonables.*

## 3.4. Análisis de Sensibilidad

Se utiliza la función de sensibilidad [20, 58, 140, 245, 253] con la finalidad de analizar la influencia local del parámetro estimado (coeficiente de difusividad térmica) en el cálculo de la temperatura  $u(x, t)$ . La función de sensibilidad de  $u$  con respecto al parámetro  $\alpha^2$  se define como

$$S_u^{\alpha^2} = \frac{\partial u(x, t, \alpha^2)}{\partial \alpha^2}, \quad (3.10)$$

esta función puede obtenerse derivando la solución analítica dada en el Teorema (2.12) con respecto a  $\alpha^2$ . Otra manera de hacerlo, es derivando el sistema de ecuaciones (3.1) con respecto a  $\alpha^2$  y así obtener un sistema para la sensibilidad. Este último es el procedimiento que se adopta aquí

Para simplificar la notación se considera  $S = S_u^{\alpha^2}$ , se deriva el sistema (3.1) con respecto a  $\alpha^2$  y se obtiene

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu(u(x, t) - T_a) + f(x), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 u(x, t) = F, & x = 0, \quad t > 0, \\
 \kappa u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), & x = L, \quad t > 0, \\
 u(x, t) = T_a, & 0 < x < L, \quad t = 0, \\
 S_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \alpha^2 S_{xx}(x, t) - \beta S_x(x, t) - \nu S(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\
 S(x, t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\
 \kappa S_x(x, t) = -h S(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\
 S(x, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

**Observación 3.4** *Notar que en el sistema (3.11) se incluyen las ecuaciones que debe satisfacer la función  $u(x, t)$  dadas por (3.1). Esto se debe a que el sistema queda acoplado y deben abordarse en simultáneo.*

El sistema (3.11) se resuelve numéricamente mediante diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Para ello se define, como en la Subsección 2.2.2, una discretización bidimensional espacio-temporal 2.14. Es decir,

$$\mathcal{P} = \{(x_i, t_j) / i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M; x_i \in \mathcal{P}_x, t_j \in \mathcal{P}_t\},$$

donde

$$\mathcal{P}_x = \{x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N, \quad x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$$

y

$$\mathcal{P}_t = \{t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < t_M, \quad t_j = (j - 1)\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots, M\}.$$

Específicamente  $\mathcal{P}_x$  es la partición asociada a la variable espacial  $x$ ,  $\mathcal{P}_t$  la correspon-

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

diente partición asociada a la variable temporal  $t$ . Los valores  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  son los pasos de discretización espacial y temporal respectivamente dados por  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ .

El siguiente resultado brinda la forma general de la discretización por diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en el tiempo del sistema (3.11).

**Lema 3.5** Sean  $\alpha^2, \beta, \nu, T_a, L, F, \kappa, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $f \in C((0, L))$ . Dadas las funciones  $u$  y  $S$  que satisfacen  $u(\cdot, t), S(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $u(x, \cdot), S(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , la discretización del sistema dado por (3.11) utilizando diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia delante en la variable temporal, tiene la siguiente expresión

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i,j+1} = \tau_1 u_{i+1,j} + \tau_2 u_{i,j} + \tau_3 u_{i-1,j} + R_i, & i = 2, \dots, N-1, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = F, & i = 1, \quad j = 1, \dots, M, \\ u_{i,j} = \frac{h\Delta x T_a + \kappa u_{i-1,j}}{\kappa + h\Delta x}, & i = N, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = T_a, & i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \\ S_{i,j+1} = \tau_1 S_{i+1,j} + \tau_2 S_{i,j} + \tau_3 S_{i-1,j} + u_{ii,j}, & i = 2, \dots, N-1, \quad j = 2, \dots, M, \\ S_{i,j} = 0, & i = 1, \quad j = 1, \dots, M, \\ S_{i,j} = \frac{\kappa S_{i-1,j}}{\kappa + h\Delta x}, & i = N, \quad j = 2, \dots, M, \\ S_{i,j} = 0, & i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

donde

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j), \quad S_{i,j} = S(x_i, t_j), \quad R_i = (\nu T_a + f(x_i))\Delta t, \quad u_{ii,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.13)$$

y

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

---

$$\tau_1 = \left( \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} - \frac{\beta}{2\Delta x} \right) \Delta t, \quad \tau_2 = 1 - \left( \nu + 2\frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} \right) \Delta t \quad \text{y} \quad \tau_3 = \left( \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\beta}{2\Delta x} \right) \Delta t. \quad (3.14)$$

*Demostración:* Solo basta observar que según lo desarrollado en el Apéndice A, se tiene que

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}, \quad u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.15)$$

y

$$S_t = \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j}}{\Delta t}, \quad S_x = \frac{S_{i+1,j} - S_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad S_{xx} = \frac{S_{i+1,j} - 2S_{i,j} + S_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.16)$$

Se reemplazan las expresiones (3.15)-(3.16) en el sistema (3.11) y se obtiene (3.12)-(3.14) tal como se quería demostrar.  $\square$

**Lema 3.6** *Se puede garantizar para el problema algebraico (3.12) una precisión de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio.*

*Demostración:* La demostración de este resultado surge de manera inmediata debido a la Observación A.4 realizada en el Apéndice A.  $\square$

Las condiciones de convergencia y estabilidad para este tipo de problemas ya fueron discutidas en la Sección 2.2.3 a partir de [177, 206]. El siguiente resultado explicita las condiciones para que las soluciones del sistema algebraico (3.12) resulten estables y convergentes.

**Lema 3.7** *Las soluciones numéricas del problema discreto (3.12) obtenidas mediante diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia adelante en la variable temporal resultan estables y convergentes si*

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

$$\left(\frac{\beta\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 2\frac{\alpha^2\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1. \quad (3.17)$$

*Demostración:* Ver la demostración del Teorema 2.17. □

Con la finalidad de estudiar la sensibilidad dada por el sistema 3.12 se consideran las soluciones numéricas del problema para el Ejemplo 3.2.

**Ejemplo 3.8** *Se considera la solución numérica del sistema 3.12 para diferentes materiales utilizando los siguientes datos:*

$$L = 1\text{ m}; F = 100^\circ\text{C}; T_a = 25^\circ\text{C}; h = 10\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C}); f(x) = -\frac{1}{50}x(x-1)^\circ\text{C}/\text{s}; \\ \beta = 0,01\text{ m}/\text{s}; \nu = 0,0001\text{ 1}/\text{s}; \Delta x = 0,01\text{ m}; \quad y \quad \Delta t = 0,1\text{ s}.$$

*Las conductividades y difusividades térmicas para los materiales considerados fueron tomadas del Cuadro 2.2.*

En la Figura 3.1 se pueden ver los perfiles temporales en valor absoluto de sensibilidad en el medio de la barra ( $x = L/2$ ) y en el borde derecho de la misma ( $x = L$ ) para diferentes materiales.

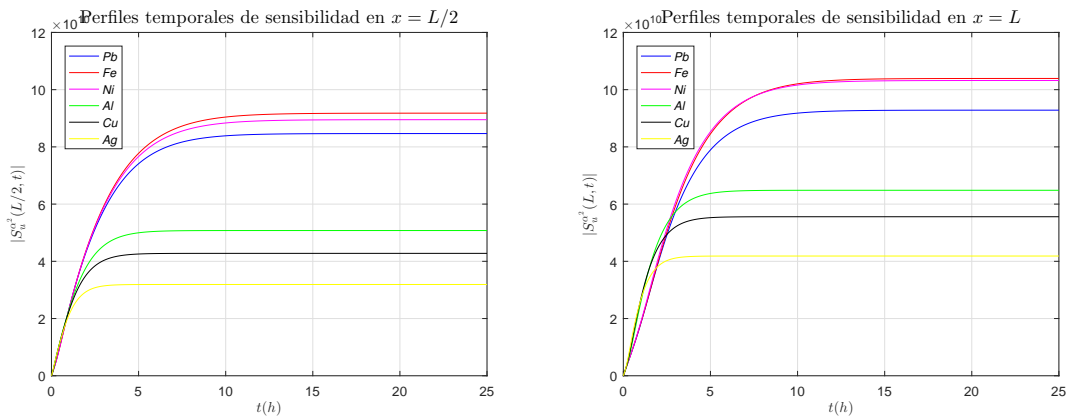


Figura 3.1: Ejemplo 3.8: Perfiles temporales de sensibilidad en valor absoluto para diferentes materiales. En la mitad de la barra ( $x = L/2$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

### 3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En la Figura 3.2 se pueden ver, para diferentes materiales, los perfiles espaciales en valor absoluto de sensibilidad (sensibilidad en valor absoluto a lo largo de toda la barra) para dos instantes de tiempo  $t = 5 h$  y  $t = 15 h$ .

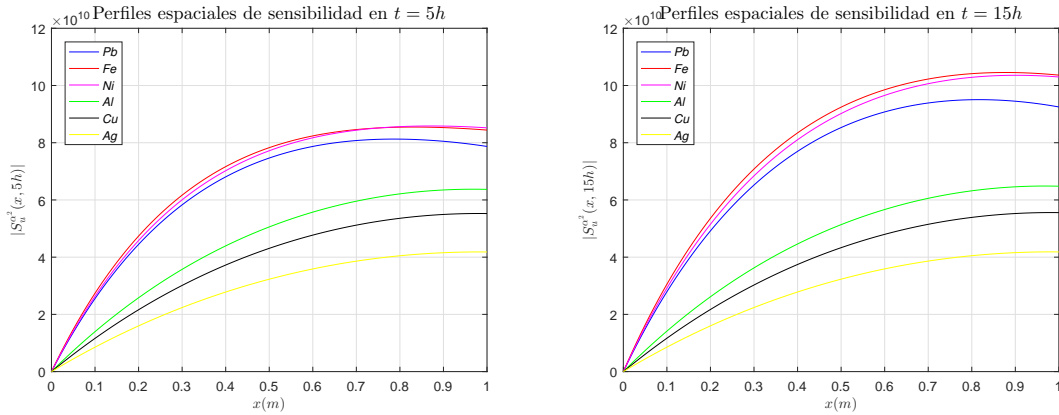


Figura 3.2: Ejemplo 3.8: Perfiles espaciales de sensibilidad en valor absoluto para diferentes materiales. Para  $t = 5 h$  (izquierda) y  $t = 15 h$  (derecha).

En estas figuras se observa que la sensibilidad en valor absoluto toma valores muy grandes y eso está relacionado directamente con que las difusividades térmicas son muy pequeñas (ver en el Cuadro 2.2) en comparación con las variaciones de temperatura. Por otra parte, las sensibilidades en valor absoluto son menores para materiales más difusivos (difusividad térmica mayor). Además, se observa que aproximadamente a las 15 horas ( $t = 15 h$ ) la sensibilidad en valor absoluto alcanza el estado estacionario para toda la barra. Se visualiza, también, que aumenta con el tiempo y que para los diferentes instantes de tiempo alcanza un máximo en una posición cercana al borde derecho de la barra.

En la Figura 3.3 se pueden ver los perfiles espacio-temporales de sensibilidad en valor absoluto para una barra de Plomo (izquierda) y una de Hierro (derecha).

El color en cada punto  $(t, x)$  de la Figura 3.3 indica la sensibilidad en valor absoluto de la barra en la posición  $x(m)$  en el instante  $t(h)$ . Si bien los gráficos son similares, en la figura de la derecha se percibe mayor predominio del color rojo, el cual, además, es más intenso. Esto se relaciona directamente con que el Hierro es un material más

### 3.5. DISEÑO ÓPTIMO

difusivo que el Plomo por lo que la barra de éste tarda más en calentarse. Observar, por ejemplo, que para  $x = 0,7 m$  y  $t > 10 h$  el color en la barra de plomo es rojo suave y el de la barra de Hierro es rojo intenso. Esto se debe a que las sensibilidades en valor absoluto son aproximadamente  $8 \times 10^{10}$  y  $10 \times 10^{10}$  respectivamente.

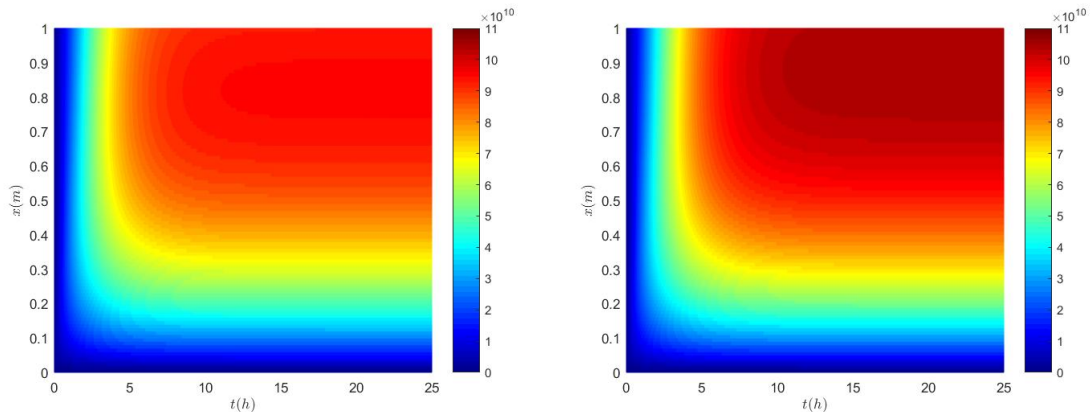


Figura 3.3: Ejemplo 3.8: Función de sensibilidad en valor absoluto. Plomo (izquierda) y Hierro (derecha).

**Observación 3.9** *En el Ejemplo 3.8 se utilizan los valores exactos de conductividad y difusividad térmica dados en el Cuadro 2.2. La sensibilidad depende del coeficiente de difusividad térmica, que en principio, es desconocido (parámetro que se desea estimar). En un problema real se utiliza un valor aproximado y se busca mejorarlo mediante algún criterio y/u observaciones físicas.*

## 3.5. Diseño Óptimo

En esta sección se utilizan herramientas de diseño óptimo para hallar dónde y cuándo es conveniente realizar las mediciones de temperatura para que el error de estimación de la difusividad térmica sea lo más pequeño posible.

La teoría de diseño óptimo de experimentos [193, 194, 252, 266, 267] y la ubicación o localización óptima de sensores de medición [4, 9, 142, 200, 233] han sido muy estudia-



### 3.5. DISEÑO ÓPTIMO

---

dos en diferentes problemas de determinación en distintos sistemas de parámetros distribuidos. En algunos trabajos de interés, se utiliza esta teoría para la identificación de parámetros térmicos en distintos procesos de transferencia de calor. Ver, por ejemplo, [12, 29].

Para realizar un diseño óptimo se debe resolver un problema de optimización. Existen diferentes técnicas que permiten decidir cuál es el instante y/o ubicación óptima para la toma de datos de un experimento. En la mayoría de estas técnicas se minimiza, con algún criterio, un funcional que involucra a la matriz de información de Fisher [21, 245]. Esta matriz depende de los parámetros que se desea estimar, de la cantidad de datos que se utilizarán para la identificación y de la función de sensibilidad con respecto a cada uno de los parámetros involucrados. Matemáticamente se define como

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = F_{ij}(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_N) = \sum_{k=1}^n S_u^{\theta_i}(x_k, \theta_1, \dots, \theta_N) S_u^{\theta_j}(x_k, \theta_1, \dots, \theta_N), \quad (3.18)$$

donde  $x_k$  es el  $k$ -ésimo punto de toma de datos,  $\theta_i$  es el  $i$ -ésimo parámetro a estimar y  $S_u^{\theta_j}$  es la sensibilidad de la función  $u$  con respecto al  $j$ -ésimo parámetro a estimar.

Dentro de las diferentes técnicas de diseño óptimo de experimentos se encuentra la denominada “D-optimal” [21, 245]. Ésta es una técnica simple y efectiva que consiste en minimizar el determinante de la inversa de la matriz de información de Fisher, es decir,

$$\min_{\mathbf{x} \in A} [\det (F^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))], \quad (3.19)$$

donde  $A$  es un conjunto admisible de las variables que indican dónde y/o cuándo tomar los datos y  $F^{-1}$  es la inversa de la matriz de información de Fisher.

En los casos, como el que se trata en este capítulo, donde se estima un solo parámetro, el problema de minimización dado por (3.19) se reduce a hallar los valores de  $x$  y  $t$

### 3.5. DISEÑO ÓPTIMO

donde la sensibilidad en valor absoluto resulta máxima, matemáticamente,

$$\max_{(x,t) \in [0,L] \times [0,\infty)} \left| S_u^{\alpha^2}(x,t,\alpha^2) \right|. \quad (3.20)$$

Si la estimación se realiza a partir de  $n$  datos, entonces se buscan los  $n$  pares  $(x_i, t_j)$  para los cuales se satisface (3.20).

Si se retoma el Ejemplo 3.8 para un barra de Cobre, este análisis indica que la función de sensibilidad para valores en un entorno de la difusividad térmica exacta, alcanza su máximo absoluto en  $(0,99 m; 21,0942 h)$  para el cual, la sensibilidad en valor absoluto vale  $\left| S_u^{\alpha^2} \right| = 5,5586 \times 10^{10}$ .

En la Figura 3.4 se aprecia la función de sensibilidad de la temperatura con respecto a la difusividad térmica y se indica con un asterisco (blanco en la figura de la izquierda y rojo en la derecha) la posición y el instante que la maximizan. Se observa que la función sensibilidad en valor absoluto alcanza un máximo global y que los valores más altos de esta función se encuentran en un entorno del punto  $(0,99 m; 21,0942 h)$ .

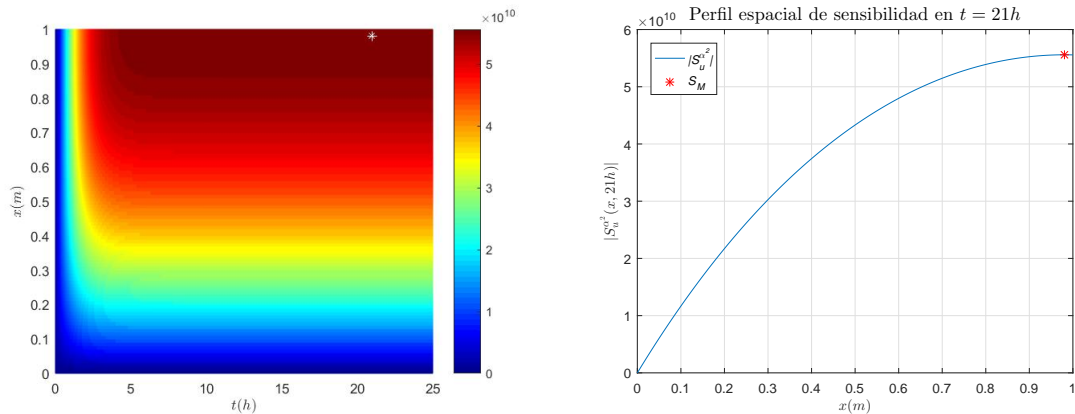


Figura 3.4: Ejemplo 3.8: Función de sensibilidad en valor absoluto (izquierda) y perfil espacial de sensibilidad en  $t = 21 h$  (derecha) para una barra de Cobre.

Con la finalidad de hallar mayor cantidad de puntos óptimos de medición, el conjunto de datos puede elegirse según diferentes criterios o técnicas, dependiendo, por

### 3.5. DISEÑO ÓPTIMO

ejemplo, de la accesibilidad de los datos o las herramientas y sensores que estén disponibles. Un criterio puede ser buscar para diferentes posiciones en la barra, cuál es el instante de tiempo en el que se alcanza el máximo de sensibilidad en valor absoluto. Otra técnica, consiste en buscar, para diferentes instantes de tiempo, cuál es la posición en la barra que maximiza la sensibilidad en valor absoluto.

Para ejemplificar el diseño óptimo de experimentos se utiliza la primer técnica descrita en el párrafo anterior. Es decir, se busca, para distintas posiciones en la barra, el instante de tiempo para el cual, la sensibilidad en valor absoluto resulta máxima. Se encuentra que para todas las posiciones la sensibilidad en valor absoluto se maximiza en aproximadamente  $t = 21 h$ . El Cuadro 3.10 resume esa información para algunas posiciones particulares.

x [m]	t [h]	$ S_u^{\alpha^2}  (\times 10^{10})$
0	0	0
$L/9$	21,0953	1,2745
$2L/9$	21,0961	2,3561
$3L/9$	21,0953	3,2561
$4L/9$	21,0930	3,9939
$5L/9$	21,0978	4,5792
$6L/9$	21,0898	5,0215
$7L/9$	21,0925	5,3286
$8L/9$	21,0950	5,5063
$L$	21,0939	5,5582

Cuadro 3.10: Tiempos óptimos de toma de mediciones para diferentes posiciones en una barra de Cobre.

Se puede observar que no solo el máximo de la sensibilidad en valor absoluto se alcanza aproximadamente en  $t = 21 h$  sino que además, los valores de sensibilidad en valor absoluto son mayores a medida que se está más cerca del borde derecho de la barra.

Debido a lo mencionado en el párrafo anterior, a manera de ejemplo, se recupera

### 3.5. DISEÑO ÓPTIMO

nuevamente la difusividad térmica del Cobre utilizando el criterio 1. Es decir, las mediciones se toman en diferentes posiciones de la barra para un instante fijo de tiempo. Según el análisis realizado, el instante elegido es a las 21 horas de haber comenzado el proceso de transferencia ( $t = 21 h$ ). El nivel de ruido en los datos considerado es  $1, 0^\circ C$  ( $\epsilon = 1, 0^\circ C$ ) acorde con lo visto en la Observación 3.3 y estudiado, por ejemplo, en [72, 141, 188]. Por último, si bien el análisis de diseño óptimo de experimentos indica que conviene tomar mediciones más cercanas al borde derecho de la barra, se tomarán datos en lugares equiespaciados para tener mayor información del perfil de temperaturas. En resumen, se recupera la difusividad térmica del Cobre utilizando el criterio 1 descrito en la Subsección 3.3.1 considerando 5 datos ruidosos ( $\epsilon = 1, 0^\circ C$ ) espacialmente equiespaciados en el instante ( $t = 21 h$ ).

En la Figura 3.5 se aprecia la función de temperatura y la ubicación de los sensores para la toma de datos.

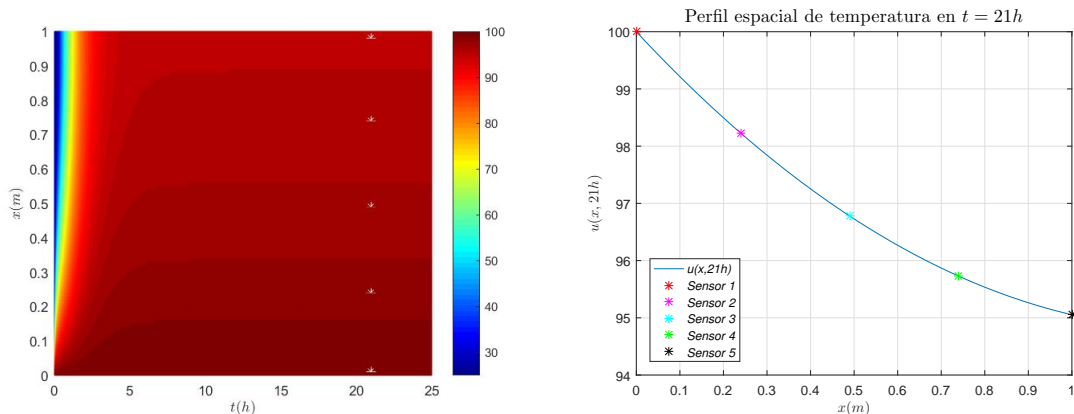


Figura 3.5: Ejemplo 3.8: Distribución de temperatura (izquierda) y perfil espacial de temperatura en  $t = 21 h$  (derecha) para una barra de Cobre.

La configuración de sensores utilizados hacen que el valor del parámetro estimado (difusividad térmica) sea  $\alpha^2 = 1, 1252 \times 10^{-4} m^2/s$  por lo que el error relativo de estimación es  $|\hat{\alpha}^2 - \alpha^2|/\alpha^2 = 5, 8391 \times 10^{-5}$  equivalente a un error relativo de estimación del 0,0058%. Esto implica que la distribución de sensores de medición hacen que el error relativo de estimación sea menor que los obtenidos con los diferentes

### 3.6. CONCLUSIONES

---

criterios de determinación utilizados en la Sección 3.3.

## 3.6. Conclusiones

En este capítulo se aborda, a partir de datos ruidosos de temperatura, la estimación de la difusividad térmica en una ecuación parabólica completa con una condición de borde de tipo Dirichlet a izquierda y una condición de borde de tipo Robin a derecha.

La estimación se realiza con tres criterios distintos relacionados con la manera en la que se toman los datos. El primer criterio consiste en la toma de mediciones para un instante de tiempo fijo en distintas posiciones, en el segundo, las mediciones se toman en una posición fija para diferentes instantes de tiempo y en el último, se toman en diferentes instantes de tiempo y en distintas posiciones, para lo cual se requieren varios sensores de medición, uno por cada posición considerada.

Los resultados muestran que la estimación resulta razonable con los tres criterios utilizados. Ésta mejora cuando se utiliza el tercer criterio ya que al tomar datos en distintos instantes de tiempo y en diferentes posiciones, se utiliza mayor información del proceso. En cuanto a los dos criterios restantes, resulta conveniente la utilización del primero, esto se debe a que al tomar mediciones en una sola posición, lo que requiere el uso de un único sensor (criterio 2), se utiliza poca información del modelo e implica una mala recuperación del parámetro.

Para analizar la dependencia de la temperatura con respecto al parámetro estimado, se estudia numéricamente, la función de sensibilidad en valor absoluto, utilizando el método de diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Esto permite realizar un diseño óptimo de experimentos con la finalidad de encontrar una mejor configuración de ubicación de sensores. Los resultados

### 3.6. *CONCLUSIONES*

---

numéricos muestran que al tomar los datos en los instantes de tiempo donde se maximiza la sensibilidad en valor absoluto, el error relativo de estimación disminuye notoriamente obteniendo así una mejor determinación del parámetro.

## Capítulo 4

# Estimación del Coeficiente de Película

En los procesos estacionarios de transferencia de calor por convección es necesario determinar, experimentalmente, el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Newton (1.3). Esto generalmente se denota con la letra  $h$  e indica la relación de la transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido por unidad de superficie, por unidad de diferencia de temperatura. En la literatura generalmente se considera como una cantidad constante, donde los valores típicos para algunos fluidos comunes varían entre 0,5 y 1000  $W/(m^2\text{°}C)$  para aire, gases y vapores secos; y de 50 a 3000  $W/(m^2\text{°}C)$  para agua y líquidos, ver, por ejemplo [125].

En general, el proceso de convección natural se modela utilizando el coeficiente de convección constante  $h$  calculado como si el problema fuera estacionario. Sin embargo, para un problema evolutivo, el coeficiente  $h$  cambia con la temperatura en la pared de la superficie.

La determinación del coeficiente de transferencia de calor por convección en el estado transitorio y la dependencia temporal de este coeficiente se ha estudiado durante las

últimas décadas en numerosos trabajos. En muchos de ellos se obtiene experimentalmente para ser utilizado en diferentes aplicaciones, ver, por ejemplo, [65, 174, 291]. En trabajos más recientes, se formuló el problema de determinar el coeficiente de transferencia de calor como un problema inverso en el que se aplicaron diferentes herramientas matemáticas para resolverlo, ver, por ejemplo [54, 103, 111, 168, 183, 255]. Últimamente, algunos investigadores han abordado problemas relacionados centrados en la longitud característica y la forma de la superficie disipativa [18, 74, 144], características del flujo, incluidos los nanofluidos [197, 224], condiciones de borde y propiedades termofísicas de la superficie [127, 255, 260] y la porosidad del medio [163, 169].

Con respecto a la determinación de dicho coeficiente en problemas particulares, se tiene, entre los más significativos, los siguientes trabajos: en [183], mediante el método de especificación de función secuencial, se estudia la dependencia temporal del coeficiente de convección durante el enfriamiento de una esfera unidimensional como un problema no-lineal de estimación de parámetros. En [168], se utiliza el método de elementos de contorno para estudiar la dependencia del coeficiente de transferencia de calor con la temperatura para un cilindro cuya conductividad depende linealmente de la temperatura. En [111], mediante la aplicación de una técnica inversa, se determina el coeficiente de convección en función de la temperatura en la superficie del acero. En [103], se estima la dependencia del coeficiente de convección con el tiempo y la posición, mediante el método de Monte Carlo para un problema inverso de conducción de calor multidimensional. En [54], se estima la dependencia temporal del coeficiente de convección en un problema unidimensional mediante un algoritmo basado en condiciones de contorno lineales.

En los Capítulos 2-3 se considera que  $h = 10W/(m^2\text{ }^\circ C)$ . Si bien, para las condiciones dadas, es un valor estimativo cercano al real, no es el mismo para los diferentes materiales. Esto se debe a que el coeficiente de transferencia de calor depende de la



#### 4.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

temperatura en la pared disipativa y los materiales más conductivos alcanzan una mayor temperatura. Debido a ese hecho, tiene sentido suponer que el coeficiente variará acorde a la conductividad de los materiales. Por otro lado, como la temperatura en la pared disipativa depende del tiempo, tomar un coeficiente constante puede llevar a perfiles de temperatura errados.

En este capítulo se trata el segundo problema inverso, que consiste en la estimación del coeficiente de transferencia de calor o coeficiente de película en el problema dado por (2.22). Esta estimación se realiza de dos formas diferentes. Primero, de la manera habitual, considerando que el coeficiente es constante y que depende de la temperatura estacionaria de la pared disipativa. Segundo, a partir de un nuevo enfoque, el que tiene en cuenta la variación temporal de temperatura en la pared. Se llevan a cabo varios experimentos numéricos de diferentes características y se realizan análisis de temperatura y elasticidad con el fin de comparar el rendimiento de la nueva técnica de estimación contra el enfoque clásico.

### 4.1. Presentación del Problema

Si bien en la Subsección 1.2.2 del Capítulo 1 se da una pequeña descripción sobre el fenómeno de convección; se brinda, en el Apéndice B, una breve fundamentación de este proceso. Esto le permitirá al lector que no está familiarizado con este tema, comprender el desarrollo de las secciones de este capítulo.

En esta sección se presenta formalmente el problema inverso que se va a estudiar. Éste es el segundo problema inverso y está asociado al primer problema directo abordado en el Capítulo 2 de esta tesis.

Bajo las condiciones del Teorema 2.12. Es decir, dados  $\alpha^2, T_a, L, F, \kappa, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$ , se desea estimar el coeficiente de transferencia de calor ( $h$ ) en el siguiente

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

---

sistema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = F, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), & x = L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = T_a, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

para diferentes materiales conductivos que disipan en aire, donde  $u$  satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ .

**Observación 4.1** *Notar que el problema parabólico dado por (4.1) no presenta términos disipativos ni fuentes. Esto se debe a que la determinación del coeficiente  $h$  depende de la temperatura en la pared disipativa independientemente de como se llega a ella. En el caso de existencia de fenómenos disipativos y/o de presencia de fuentes, los pasos para la determinación de  $h$  son totalmente análogos a los presentados en este capítulo.*

## 4.2. Estimación del Coeficiente de Película

Debido al Teorema 2.12 se conoce una expresión analítica para la solución del problema (4.1), la cual depende de  $h$ , que en principio, es desconocido. El parámetro  $h$  se estima mediante dos métodos diferentes y se comparan sus resultados. Por un lado, se considera el método habitual en el que se supone que  $h$  es constante. Por otro lado, se propone una función dependiente del tiempo  $h(t)$  basada en consideraciones teóricas sobre los cambios térmicos en la pared disipativa.

En lo que sigue, se estima  $h$  suponiendo que el fluido disipativo es el aire a 1 atm, pero se pueden realizar análisis similares utilizando otros fluidos.

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

### 4.2.1. Método Clásico ( $h = cte$ )

La determinación del coeficiente  $h$  mediante el método clásico se basa en considerar la temperatura de la pared disipativa en estado estacionario. Este parámetro se determina a partir de (B.6)

$$h = \frac{N_u \kappa_f}{d}, \quad (4.2)$$

donde  $d$  [m] es la longitud característica (diámetro de la barra),  $\kappa_f$  [W/m °C] es la conductividad térmica del fluido (en este caso del aire) y  $N_u$  es el número adimensional de Nusselt que para la geometría de la pared disipativa del problema que se está considerando, tiene la siguiente expresión [51]

$$N_u = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 (G_r P_r)^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{P_r} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2, \quad (4.3)$$

donde  $P_r$ ,  $G_r$  son los números adimensionales de Prandtl y Grashof, definidos en (B.3) y (B.5) respectivamente, los cuales dependen de la temperatura estacionaria de la pared disipativa y de las propiedades físicas del fluido.

Se reemplazan las expresiones (B.3) y (B.5) en (4.3). Suponiendo que la temperatura lejos de la superficie disipativa es la temperatura ambiente ( $T_a$ ) se obtiene

$$N_u = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 \left( \frac{g \beta_V d^3 (u(L, t_\infty) - T_a) \mu_d c_p}{\nu_c^2 \kappa_f} \right)^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492 \kappa_f}{\mu_d c_p} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2, \quad (4.4)$$

donde  $u(x, t)$  es la solución analítica del problema (4.1) dada por (2.24) y particularmente  $u(L, t_\infty)$  es la temperatura estacionaria en el borde derecho de la barra. Es

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

decir,

$$u(L, t_\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(L, t) = \frac{F\kappa + hLT_a}{\kappa + hL}.$$

Se reemplaza (4.4) en (4.2) y se obtiene una expresión analítica para el parámetro  $h$  dada por

$$h = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 \left( \frac{g\beta_V d^3 (u(L, t_\infty) - T_a) \mu_d c_p}{\nu_c^2 \kappa_f} \right)^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492 \kappa_f}{\mu_d c_p} \right)^{9/16} \right]^{8/27} \sqrt{\frac{d}{\kappa_f}}} \right\}^2. \quad (4.5)$$

En los Capítulos 2 y 3 se supuso que  $h = 10W/(m^2 \cdot C)$ . Éste es un valor aproximado pero no debería ser el mismo para los diferentes materiales, dado que la temperatura en estado estacionario de la pared disipativa depende del material. En el siguiente ejemplo se calculan los valores de  $h$  y  $u(L, t_\infty)$  para un caso particular.

**Ejemplo 4.2** *Los datos utilizados en este ejemplo son:  $L = 1m$ ;  $d = 0,01m$ ;  $F = 100^\circ C$ ;  $T_a = 25^\circ C$ . Los parámetros térmicos de los diferentes materiales están dados en el Cuadro 2.2 y se incluyen nuevamente en el Cuadro 4.1. Los parámetros térmicos del fluido son  $\kappa_f = 0,029W/(m^\circ C)$ ;  $\nu_c = 2,0085 \times 10^{-5} m^2/s$  y  $Pr = 0,725$  que fueron tomados [51].*

Materiales	$\alpha^2 (\times 10^4) [m^2/s]$	$\kappa [W/m^\circ C]$	$u(L, t_\infty) [^\circ C]$	$h [W/(m^2 \cdot C)]$
Pb	0,23673	35	80,50	12,29
Fe	0,20451	73	88,95	12,61
Ni	0,22663	90	90,74	12,67
Al	0,84010	204	95,55	12,84
Cu	1,12530	386	97,57	12,90
Ag	1,70140	419	97,75	12,91

Cuadro 4.1: Ejemplo 4.2: Valores de  $h$  y  $u(L, t_\infty)$  para diferentes materiales.

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

En el Cuadro 4.1 se pueden apreciar los valores del coeficiente  $h$  y las temperaturas en estado estacionario para el borde derecho de la barra. Como el coeficiente  $h$  está presente en la condición de borde de tipo Robin en el extremo derecho de la barra, es de esperarse que el perfil espacio-temporal de temperaturas no sufra modificaciones significativas a lo largo de la barra. Es decir, se espera que las diferencias más notorias se den en el extremo derecho de la misma.

En la Figura 4.1 se puede apreciar el valor constante de  $h$  y el perfil temporal de temperatura en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) para diferentes materiales.

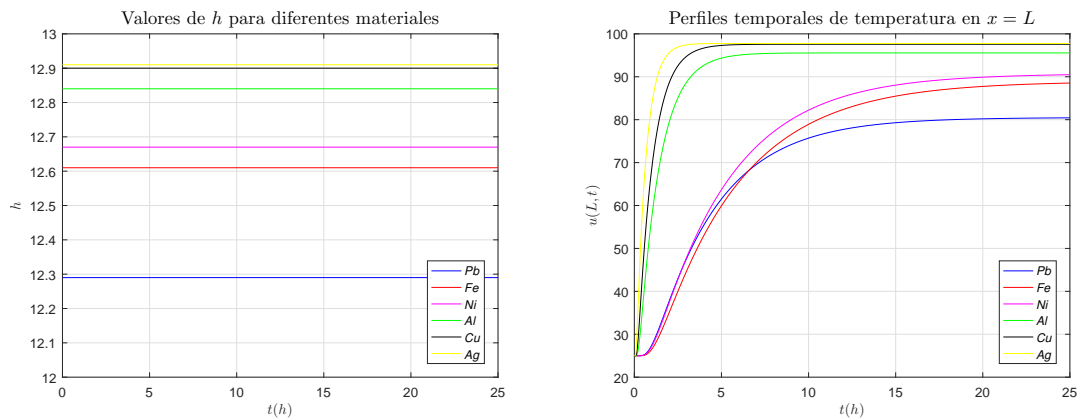


Figura 4.1: Ejemplo 4.2: Valores constantes de  $h$  (izquierda) y perfiles temporales de temperatura en en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha) para diferentes materiales.

Como se anticipó, esto permite visualizar diferencias en el perfil temporal de temperaturas en el borde derecho de la barra. Por ejemplo, por tomar alguno, la barra de Plomo alcanza una temperatura estacionaria de  $82^{\circ}C$  aproximadamente cuando se toma  $h = 10 W/(m^2C)$  y una temperatura de  $80,5^{\circ}C$  cuando se toma  $h = 12,29 W/(m^2C)$ . El hecho de que la temperatura sea menor es físicamente correcto, pues como  $h$  es mayor, la disipación es mayor, lo que lleva a una menor temperatura de la pared disipativa.

**Observación 4.3** *El Ejemplo 4.2 coincide con el Ejemplo 2.18 que se trató en el Capítulo 2. La diferencia radica en que antes se consideró para el valor de  $h$  una*

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

constante que era independiente del material conductor y ahora, si bien sigue siendo constante, varía con el material.

### 4.2.2. Método Propuesto ( $h = h(t)$ )

En la Subsección 4.2.1 se estima el coeficiente  $h$  con el método usual adaptado a nuestro caso particular. Debido a que este coeficiente depende de la temperatura en la pared y ésta cambia con el tiempo, suponer que  $h$  es constante puede llevarnos a perfiles menos precisos.

En esta subsección, mediante un balance de energía térmica y consideraciones teóricas, se propone una estrategia que permite estimar a  $h$  mediante una función temporal que tiene en cuenta la variación de la temperatura en la pared que está en contacto con el fluido.

Se inspecciona un segmento de barra de longitud  $\Delta x$ . En el estado transitorio, un calor dado  $Q_1$  ingresa al segmento desde el extremo más cálido. Parte de este calor, digamos  $Q_2$ , es responsable del aumento de temperatura de ese elemento, y el resto, digamos  $Q_3$ , fluye hacia el elemento contiguo. Ver Figura 4.2.

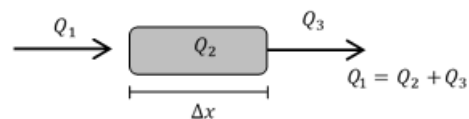


Figura 4.2: Esquema del balance de energía térmica en un elemento de la barra.

Para abordar el problema de la estimación del coeficiente de transferencia de calor dependiente del tiempo, se considera el mismo balance térmico en el último segmento de la barra. Este elemento contiene a la superficie que disipa la energía térmica hacia el fluido circundante a través del proceso de convección (Ver Figura 4.3). Tener en cuenta que esta superficie es la única del medio conductor que está en contacto con el fluido.

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

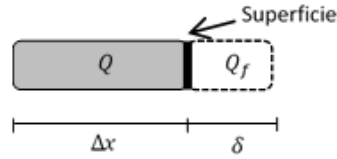


Figura 4.3: Esquema del balance de energía térmica en el último elemento de la barra.

En el fluido, la longitud característica denotada por  $\delta$ , representa el valor del espesor de la capa límite térmica. Este parámetro puede ser estimado de acuerdo con [125], utilizando la siguiente expresión

$$\delta \simeq 6d \left( \frac{Gr}{4} \right)^{-1/4}. \quad (4.6)$$

Ahora, se comparan la energía térmica almacenada en el último elemento del sólido y la del primer elemento fluido, indicadas por  $Q$  y  $Q_f$ , respectivamente. Suponiendo un equilibrio local en el que las variaciones de las temperaturas medias sean aproximadamente las mismas para cada instante de tiempo  $t$  [125], es decir,  $\overline{\Delta u_c} = \overline{\Delta u_f}$ , resulta

$$\frac{Q}{Q_f} = \frac{c_p \rho_c S \Delta x \overline{\Delta u_c}}{c_{pf} \rho_f S \delta \overline{\Delta u_f}} \simeq \frac{c_p \rho_c \Delta x}{c_{pf} \rho_f \delta}, \quad (4.7)$$

donde  $S$  es el área transversal del último elemento infinitesimal de la barra [ $\text{m}^2$ ].  $c_p, c_{pf}$  [ $\text{J}/\text{kg} \text{ } ^\circ\text{C}$ ];  $\rho_c, \rho_f$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] representan los calores específicos y las densidades del cuerpo y el fluido respectivamente.  $\overline{\Delta u_c}, \overline{\Delta u_f}$  [ $^\circ\text{C}$ ] son las variaciones de las temperaturas medias en el último elemento de la barra y en la primera porción de fluido.

El Cuadro 4.2 muestra los valores estimados para el cociente  $Q/Q_f$  para diferentes materiales y distintas temperaturas en la pared disipativa  $u(L, t)$ . En todos los casos se supone el fluido disipativo es aire, que la temperatura ambiente es de  $25 \text{ } ^\circ\text{C}$  y  $\Delta x = d = 0,01\text{m}$ .

## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

$u(L, t)$	$25, 1^{\circ}C$	$25, 5^{\circ}C$	$26^{\circ}C$	$50^{\circ}C$	$100^{\circ}C$
Ni	1,69	2,53	3,01	6,67	8,61
Fe	1,52	2,28	2,71	6,00	7,74
Cu	1,46	2,19	2,60	5,76	7,44
Ag	1,05	1,57	1,87	4,14	5,34
Al	1,04	1,55	1,84	4,07	5,26
Sn	0,70	1,06	1,26	2,78	3,59
Pb	0,63	0,94	1,12	2,48	3,21

Cuadro 4.2: Estimaciones de  $Q/Q_f (\times 10^{-5})$  (4.7) para diferentes materiales disipando en aire.

**Observación 4.4** *Observe que el calor almacenado mantiene una fuerte dependencia de la temperatura de la superficie ya que el número de Grashof está presente en la estimación de  $\delta$ . Ver la Ecuación (4.6).*

De la información que brinda el cuadro se puede observar para los diferentes materiales que  $Q/Q_f > 10^4 \gg 1$ , esto indica que bajo estas consideraciones el calor responsable de elevar la temperatura en el último elemento de volumen del cuerpo es muchas veces mayor al calor responsable de elevar la temperatura en la primera porción de fluido. Por este motivo  $Q_f$  es despreciable frente a  $Q$ , lo que significa que en cada instante de tiempo la temperatura en la superficie es “casi estacionaria”. Dicho de otra manera  $Q_f$  es frente a  $Q$  lo suficientemente pequeño por lo que los cambios térmicos en el fluido son suaves como para asumir un proceso de estado estacionario. Entonces, en vez de tomar como coeficiente de película o de transferencia de calor una constante, se puede mejorar la aproximación tomando como dicho coeficiente el valor correspondiente en cada instante de tiempo como si estuviéramos en régimen estacionario, es decir, bajo estas consideraciones, el coeficiente convectivo en cada instante  $t$  (estado transitorio) puede ser calculado con buena aproximación como el coeficiente convectivo del estado estacionario utilizando la temperatura en la superficie en ese instante, es decir,



## 4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE PELÍCULA

$$h = h(t) = h(u(L, t)). \quad (4.8)$$

Utilizando la expresión (4.5) en la ecuación (4.8), el coeficiente  $h$  en estado transitorio se puede escribir como

$$h = h(t) = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 \left( \frac{g\beta_V d^3 (u(L, t) - T_a) \mu_d c_p}{\nu_c^2 \kappa_f} \right)^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492 \kappa_f}{\mu_d c_p} \right)^{9/16} \right]^{8/27} \sqrt{\frac{d}{\kappa_f}}} \right\}^2. \quad (4.9)$$

Se considera nuevamente el Ejemplo 4.2 pero ahora con el coeficiente  $h$  variable en el tiempo.

**Ejemplo 4.5** Los datos utilizados en este ejemplo son:  $L = 1 \text{ m}$ ;  $d = 0,01 \text{ m}$ ;  $F = 100^\circ \text{C}$ ;  $T_a = 25^\circ \text{C}$ . Los parámetros térmicos de los diferentes materiales están dados en el Cuadro 2.2. Los parámetros térmicos del fluido son  $\kappa_f = 0,029 \text{ W}/(\text{m}^\circ \text{C})$ ;  $\nu_c = 2,0085 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $P_r = 0,725$  que fueron tomados de [51].

En la Figura 4.4 se puede apreciar el valor variable de  $h$  y el perfil temporal de temperaturas en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) para diferentes materiales.

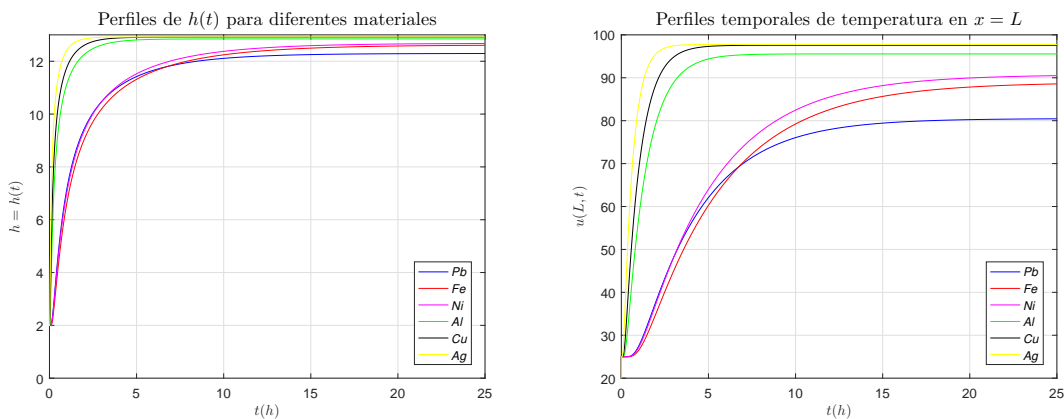


Figura 4.4: Ejemplo 4.5: Perfiles temporales de  $h = h(t)$  (izquierda) y de temperatura en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha) para diferentes materiales.

### 4.3. ANÁLISIS DE ELASTICIDAD

---

A simple vista no se perciben diferencias significativas entre los perfiles de temperatura obtenidos a partir del método clásico y con el método propuesto en este capítulo. Sin embargo, la estrategia presentada en esta subsección tiene ciertas bondades que serán explicadas en las secciones siguientes.

**Observación 4.6** *Notar que cada curva de la función  $h(t)$  dada por (4.9) se aproxima asintóticamente al valor estacionario correspondiente ( $h$ ) dado en el Cuadro 4.1. Es decir,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = h. \quad (4.10)$$

### 4.3. Análisis de Elasticidad

Debido a que en este capítulo se propone una estrategia para la determinación de un parámetro, corresponde ver que tan significativo resulta éste para el modelo. Es esperable que un pequeño error en la estimación del parámetro  $h$  se traduzca en un error pequeño en la temperatura de la barra  $u(x, t)$ . En otras palabras, se utiliza la función de elasticidad para analizar la influencia local del parámetro  $h$  en el cálculo de la temperatura  $u(x, t)$ .

Acorde a lo desarrollado en la Sección 1.7 del Capítulo 1, la elasticidad de  $u(x, t)$  con respecto a  $h$  se define como

$$E_u^h(x, t, h) = \frac{h}{u(x, t, h)} \frac{\partial u(x, t, h)}{\partial h}.$$

Se considera nuevamente el Ejemplo 4.5 pero ahora se estudia la elasticidad de  $u$  con respecto a  $h$ .

**Ejemplo 4.7** *Los datos utilizados en este ejemplo son:  $L = 1 \text{ m}$ ;  $d = 0,01 \text{ m}$ ;  $F = 100^\circ\text{C}$ ;  $T_a = 25^\circ\text{C}$ . Los parámetros térmicos de los diferentes materiales están dados*

### 4.3. ANÁLISIS DE ELASTICIDAD

en el Cuadro 2.2. Los parámetros térmicos del fluido son  $\kappa_f = 0,029 W/(m^{\circ}C)$ ;  $\nu_c = 2,0085 \times 10^{-5} m^2/s$  y  $P_r = 0,725$  que fueron tomados de [51].

El parámetro  $h$  aumenta con el tiempo y cerca del borde derecho de la barra, por tal motivo, se vuelve más significativo, en la punta convectiva (borde derecho de la barra) y a medida que nos acercamos al estado estacionario. Debido a esto, la elasticidad es más grande en valor absoluto a medida que pasa el tiempo y estamos más cerca del borde derecho de la barra. Entonces, para comprender el comportamiento de la elasticidad hay que mirar el perfil temporal en  $x = L$  y el perfil espacial en valores grandes de  $t$ .

En la Figura 4.5 se puede apreciar el perfil temporal en valor absoluto de elasticidad en  $x = L$  para las primeras 25 horas y el perfil espacial en valor absoluto de elasticidad en  $t = 25 h$  a lo largo de la barra, para diferentes materiales.

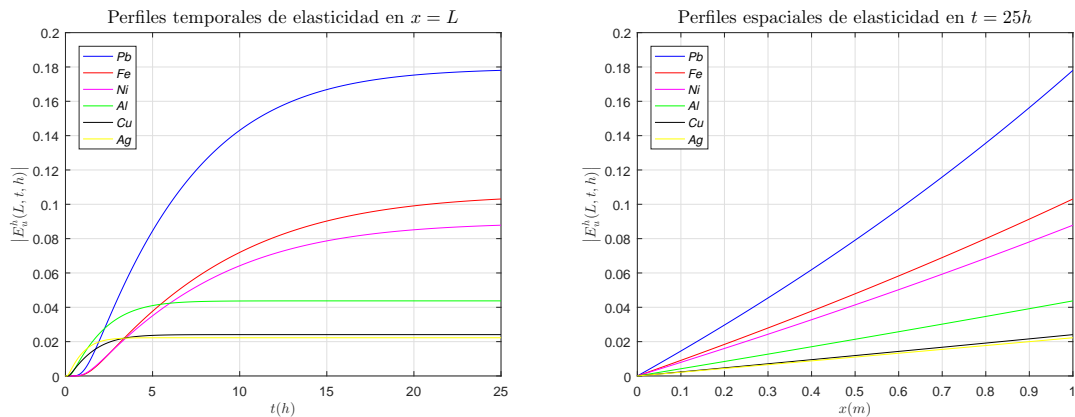


Figura 4.5: Ejemplo 4.7: Perfiles temporales en valor absoluto de elasticidad en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (izquierda) y perfiles espaciales en valor absoluto de elasticidad en  $t = 25 h$  (derecha); para diferentes materiales utilizando  $h = h(t)$ .

En la Figura 4.5 se observa que la elasticidad es siempre menor que 1, lo que implica que errores chicos en la estimación de  $h$  generarán errores aún más chicos en el cálculo de la temperatura. Además, se aprecia que la elasticidad en valor absoluto aumenta para materiales menos conductores. A manera de ejemplo, se puede ver que

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

---

después de las 25  $h$  un error del 1 % en la estimación de  $h$  implica un error de 0,18 % en el cálculo de  $u(L, t)$  para una barra de Plomo y de aproximadamente 0,025 % para una barra de Cobre. Así mismo, un error del 1 % en la estimación de  $h$  implica un error de 0,14 % en el cálculo de  $u(0,8 m; 25 h)$  para una barra de Plomo y de aproximadamente 0,02 % para una barra de Cobre.

### 4.4. Comparación de Ambos Métodos

Con la finalidad de comparar ambos métodos ( $h = cte$  y  $h = h(t)$ ) se realizan experimentos numéricos bajo diferentes situaciones, correspondientes a diferentes fenómenos físicos. Los resultados de la sección anterior evidencian que las diferencias más significativas se encuentran en el borde derecho de la barra. Por tal motivo, la comparación se centra en el análisis de los perfiles en  $x = L$ .

Se denota por  $\hat{u}(x, t)$  a la temperatura obtenida utilizando  $h = h(t)$ ,  $u(x, t)$  a la obtenida con  $h = cte$  y  $\Delta u(x, t) = \hat{u}(x, t) - u(x, t)$ . Análogamente, se denota por  $|E_u^h(x, t, h)|$  a la elasticidad en valor absoluto de  $u$  con respecto a  $h$  cuando se utiliza  $h = h(t)$ ,  $|E_u^h(x, t, h)|$  a la elasticidad en valor absoluto de  $u$  con respecto a  $h$  cuando se utiliza  $h = cte$  y  $\Delta E_u^h(x, t, h) = |E_u^h(x, t, h)| - |E_u^h(x, t, h)|$ . Para simplificar la notación se considera  $\Delta u/u = \Delta u(L, t)/u(L, t)$  y  $\Delta E/E = \Delta E_u^h(L, t, h)/E_u^h(L, t, h)$ .

El primer ejemplo de comparación se centra en analizar la variación en los perfiles de temperatura y elasticidad, dependiendo del tipo de estimación de  $h$ , con los diferentes materiales.

**Ejemplo 4.8** *Para este ejemplo se considera:  $L = 5 m$ ;  $d = 0,01 m$ ;  $F = 300^\circ C$ ;  $T_a = 25^\circ C$ . Los parámetros térmicos de los diferentes materiales están dados en el Cuadro 2.2 y se incluyen nuevamente en el Cuadro 4.3. Los parámetros térmicos del fluido son  $\kappa_f = 0,035 W/(m^\circ C)$ ;  $\nu_c = 3,234 \times 10^{-5} m^2/s$  y  $P_r = 0,727$  que fueron*

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

tomados de [51].

Se calculan los valores de  $h = cte$  y  $u(L, t_\infty)$  (temperatura en estado estacionario en el borde derecho de la barra) para los diferentes materiales tal como se explicó en la Subsección 4.2.1 de este capítulo. El Cuadro 4.3 contiene esa información para los datos dados en el Ejemplo 4.8.

Materiales	$\alpha^2 (\times 10^4) [m^2/s]$	$\kappa [W/m^\circ C]$	$u(L, t_\infty) [^\circ C]$	$h [W/(m^2^\circ C)]$
Pb	0,23673	35	118,88	13,50
Fe	0,20451	73	163,48	14,39
Ni	0,22663	90	176,81	14,61
Al	0,84010	204	225,19	15,24
Cu	1,12530	386	253,89	15,55
Ag	1,70140	419	256,88	15,58

Cuadro 4.3: Ejemplo 4.8: Valores de  $h$  y  $u(L, t_\infty)$  para diferentes materiales.

En la Figura 4.6 se pueden apreciar los perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura en el borde derecho de la barra  $\Delta u/u$  (izquierda) y los perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad en el borde derecho de la barra  $\Delta E/E$  (derecha) para el Ejemplo 4.8.

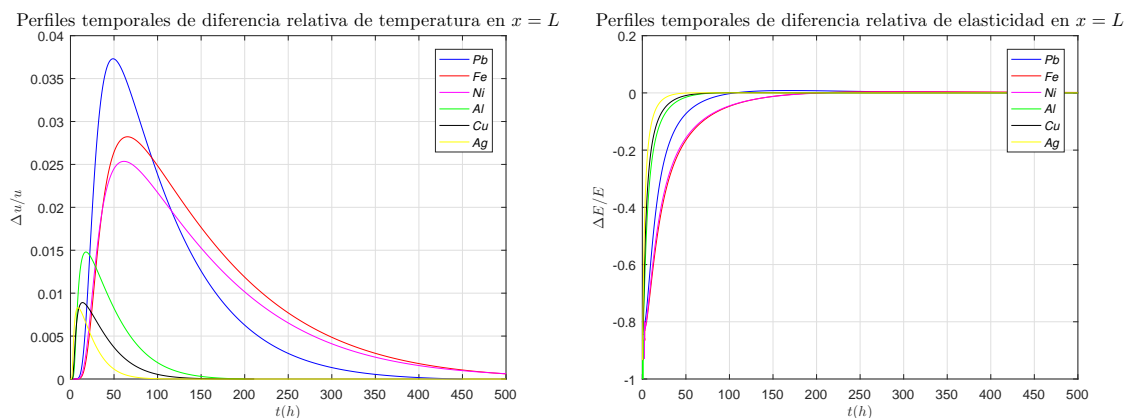


Figura 4.6: Ejemplo 4.8: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) para diferentes materiales.

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

---

La Figura 4.6 (izquierda) muestra que las diferencias relativas de temperatura cambian con el material de la barra. Estas diferencias aumentan para materiales menos conductivos (conductividad térmica baja) y las diferencias máximas se encuentran entre 0,8 % y 3,8 %. Por ejemplo, para una barra de Aluminio la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 1,5 % y se alcanza para  $t = 20 h$ ; para una barra de Plomo la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 3,8 % y se alcanza para  $t = 50 h$ .

Los resultados numéricos indican que  $\Delta u > 0$ , lo que significa que la temperatura de la superficie alcanza valores más altos cuando se utiliza el enfoque propuesto en la Subsección 4.2.2. Esto tiene sentido físico, pues  $h > h(t)$  para todo  $t > 0$ , entonces al utilizar un coeficiente  $h$  menor, resulta en una menor disipación y por lo tanto mayor temperatura en la superficie.

La Figura 4.6 (derecha) muestra que las diferencias relativas en valor absoluto de elasticidad cambian con el material de la barra durante las primeras 200 horas. Estas diferencias son mayores para materiales menos difusivos (difusividad térmica baja) debido a que una mayor difusividad térmica conduce a un calentamiento de la superficie más rápido. Por ejemplo, para una barra de Aluminio la diferencia relativa de elasticidad en  $t = 10 h$  es de aproximadamente 20 % y para una de Plomo es del 20 % en  $t = 25 h$ .

Los resultados numéricos muestran que  $\Delta E < 0$  lo que significa que el modelo que considera  $h = h(t)$  es menos elástico que el habitual. Esto es consistente con el hecho de que el enfoque propuesto en la Subsección 4.2.2 considera una transferencia de calor más realista porque tiene en cuenta para la convección la variación de temperatura en la pared disipativa. Esto implica que, cualquier error en el valor del coeficiente  $h$  produce un error menor en la temperatura cuando se utiliza el coeficiente  $h$  como función temporal.

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

---

El segundo ejemplo de comparación se centra en el estudio de la variación de los perfiles de temperatura y elasticidad, dependiendo del tipo de estimación de  $h$ , con diferentes fuentes.

**Ejemplo 4.9** *Se considera la transferencia de calor en una barra de Plomo para diferentes fuentes. Los parámetros térmicos para este material se obtienen de [51] y están dados en el Cuadro 2.2; estos son:  $\alpha^2 = 2,3673 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\kappa = 35 \text{ W}/\text{m}^\circ\text{C}$ . Los datos utilizados en este ejemplo son:  $L = 3 \text{ m}$ ;  $d = 0,01 \text{ m}$ ;  $T_a = 25^\circ\text{C}$ . Los parámetros térmicos del fluido dependen de la temperatura y varían con cada una de las fuentes, estos fueron tomados de [51] y se incluyen en el Cuadro 4.4*

Al considerar diferentes fuentes esto genera una variación en la temperatura de la pared disipativa (fuentes de mayor temperatura llevan a una mayor temperatura en el borde derecho de la barra) y por ello diferentes valores en los parámetros térmicos del fluido (aire) ya que estos dependen fuertemente de la temperatura [125].

El Cuadro 4.4 contiene los valores para los parámetros térmicos del fluido que fueron tomados de [51].

$F$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$\nu_c (\times 10^5)$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]	$\kappa_f$ [ $\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$ ]	$P_r$
100	2,0085	0,029	0,7300
150	2,2820	0,030	0,7173
200	2,5220	0,032	0,7120
250	2,8980	0,034	0,7075
300	3,2340	0,035	0,7070

Cuadro 4.4: Ejemplo 4.9: Parámetros térmicos del fluido (aire) para diferentes temperaturas.

Al igual que en el Ejemplo 4.8 se calculan los valores de  $h = cte$  y  $u(L, t_\infty)$  (temperatura en estado estacionario en el borde derecho de la barra) tal como se explicó en la Subsección 4.2.1 de este capítulo. En este caso, se realiza el cálculo para diferentes fuentes.

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

El Cuadro 4.5 contiene, específicamente, esa información para los datos dados en el Ejemplo 4.9.

$F$ [ $^{\circ}C$ ]	$u(L, t_{\infty})$ [ $^{\circ}C$ ]	$h$ [ $W/(m^2^{\circ}C)$ ]
100	62,80	11,48
150	85,95	12,26
200	107,03	13,22
250	128,07	13,80
300	149,80	14,04

Cuadro 4.5: Ejemplo 4.9: Valores de  $h$  y  $u(L, t_{\infty})$  para diferentes fuentes.

En la Figura 4.7 se pueden apreciar los perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura en el borde derecho de la barra  $\Delta u/u$  (izquierda) y los perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad en el borde derecho de la barra  $\Delta E/E$  (derecha) para el Ejemplo 4.9.

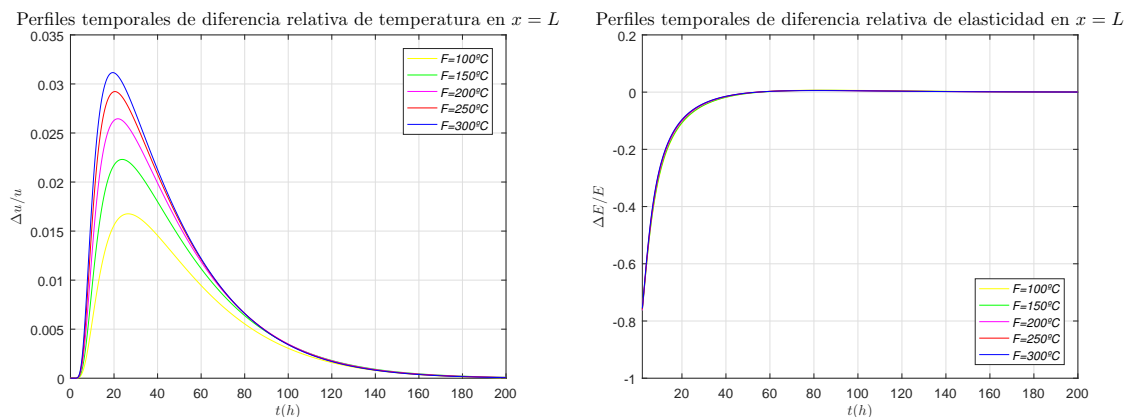


Figura 4.7: Ejemplo 4.9: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho ( $x = L$ ) de una barra de Plomo para diferentes fuentes.

La Figura 4.7 (izquierda) muestra que las diferencias relativas de temperatura cambian respecto de la fuente térmica. Estas diferencias aumentan para fuentes a mayor temperatura, las diferencias máximas se encuentran entre 1,7% y 3,2% y todas se



#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

---

alcanzan para  $t = 20 h$ . Por ejemplo, para una fuente de  $150^\circ C$  la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 2,3%; para una fuente de  $250^\circ C$  la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 2,9%.

Los resultados numéricos indican, nuevamente, que  $\Delta u > 0$  tal como ocurrió en el Ejemplo 4.9. Lo que significa que la temperatura de la superficie alcanza valores más altos cuando se utiliza el enfoque propuesto en la Subsección 4.2.2.

La Figura 4.7 (derecha) muestra que las diferencias relativas en valor absoluto de elasticidad no cambian respecto de la fuente térmica. Esto se debe a que al considerar siempre el mismo material no hay diferencias en la velocidad de calentamiento de la superficie disipativa.

Los resultados numéricos muestran, nuevamente, que  $\Delta E < 0$  tal como ocurrió en el Ejemplo 4.9, por lo que el modelo que considera  $h = h(t)$  es menos elástico que el que utiliza  $h = cte$ .

El tercer ejemplo de comparación se centra en la variación de los perfiles de temperatura y elasticidad, dependiendo del tipo de estimación de  $h$ , con diferentes longitudes de barra.

**Ejemplo 4.10** *Se estudia la transferencia de calor en una barra de Plomo para diferentes longitudes, considerando,  $\alpha^2 = 2,3673 \times 10^{-7} m^2/s$  y  $\kappa = 35 W/m^\circ C$  (Cuadro 2.2). Los datos utilizados en este ejemplo son:  $F = 300^\circ C$ ;  $d = 0,01 m$ ;  $T_a = 25^\circ C$ . Los parámetros térmicos del fluido dependen de la temperatura y se incluyen en el Cuadro 4.6.*

Al considerar diferentes longitudes se genera una variación en la temperatura de la pared disipativa y por ello diferentes valores en los parámetros térmicos del fluido (aire) ya que estos dependen fuertemente de la temperatura [125].

El Cuadro 4.6 contiene los valores para los parámetros térmicos del fluido que fueron

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

tomados de [51].

$L$ [m]	$\nu_c (\times 10^5)$ [ $m^2/s$ ]	$\kappa_f$ [ $W/m^\circ C$ ]	$P_r$
1	4,434	0,0436	0,680
2	3,790	0,0404	0,680
3	3,171	0,0371	0,683
4	2,590	0,0336	0,689
5	2,076	0,0300	0,697

Cuadro 4.6: Ejemplo 4.10: Parámetros térmicos del fluido (aire) para barras de diferentes longitudes.

Al igual que en el Ejemplo 4.9 se calculan los valores de  $h = cte$  y  $u(L, t_\infty)$  (temperatura en estado estacionario en el borde derecho de la barra) tal como se explicó en la Subsección 4.2.1 de este capítulo. En este caso, se realiza el cálculo para barras de diferentes longitudes.

El Cuadro 4.7 contiene esa información para los datos dados en el Ejemplo 4.10.

$L$ [m]	$u(L, t_\infty)$ [ $^\circ C$ ]	$h$ [ $W/(m^2^\circ C)$ ]
1	212,61	16,30
2	171,04	15,45
3	146,30	14,78
4	129,19	14,19
5	118,33	13,62

Cuadro 4.7: Ejemplo 4.10: Valores de  $h$  y  $u(L, t_\infty)$  para barras de diferentes longitudes.

En la Figura 4.8 se pueden apreciar los perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura en el borde derecho de la barra  $\Delta u/u$  (izquierda) y los perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad en el borde derecho de la barra  $\Delta E/E$  (derecha) para el Ejemplo 4.10.

La Figura 4.8 (izquierda) muestra que las diferencias relativas de temperatura cambian respecto de la longitud de la barra. Estas diferencias aumentan para barras

#### 4.4. COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

más largas, las diferencias máximas se encuentran entre 1,7 % y 3,9 %. Por ejemplo, para una barra de 3 metros, la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 3,2 % y se alcanza para  $t = 25 h$ ; para una de 5 metros, la diferencia relativa mayor es de aproximadamente 3,8 % y se alcanza para  $t = 50 h$ .

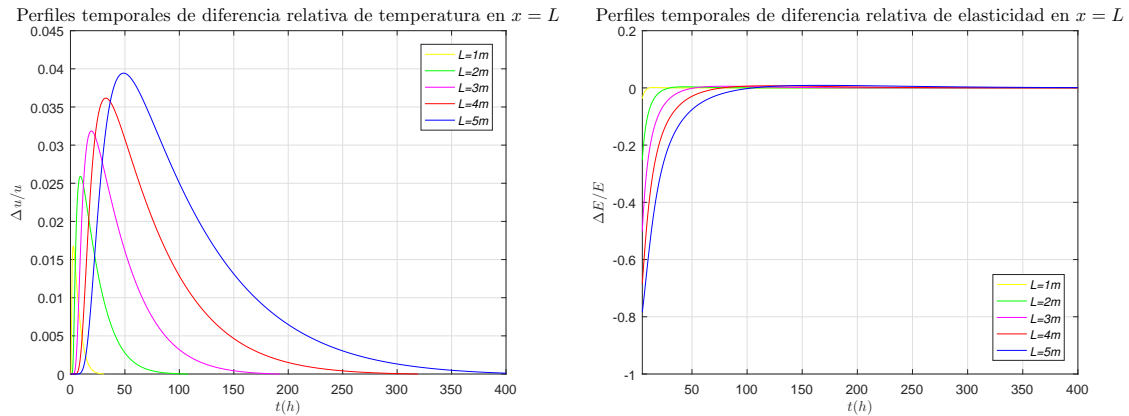


Figura 4.8: Ejemplo 4.10: Perfiles temporales de diferencia relativa de temperatura (izquierda) y perfiles temporales de diferencia relativa en valor absoluto de elasticidad (derecha); en el borde derecho ( $x = L$ ) de una barra de Plomo de diferentes longitudes.

Los resultados numéricos indican, nuevamente, que  $\Delta u > 0$  tal como ocurrió en el Ejemplo 4.9, por lo que la temperatura de la superficie alcanza valores más altos cuando se utiliza el enfoque propuesto en la Subsección 4.2.2.

La Figura 4.7 (derecha) muestra que las diferencias relativas en valor absoluto de elasticidad cambian respecto de la longitud de la barra y resultan mayores en valor absoluto para barras más largas. Esto se debe a que en las barras de mayor longitud la superficie disipativa tardan más tiempo en calentarse. Los resultados numéricos indican, nuevamente, que  $\Delta E < 0$  tal como ocurrió en el Ejemplo 4.9. Por lo que el modelo que considera  $h = h(t)$  es menos elástico que el habitual.

**Observación 4.11** *Notar que en los Ejemplos 4.8, 4.9 y 4.10 las diferencias relativas de temperatura y las de elasticidad en valor absoluto tienden a cero a medida que aumenta el tiempo. El motivo de este comportamiento es que  $h(t)$  tiende asintótica-*

#### 4.5. CONCLUSIONES

---

mente a  $h$  tal como se observó en (4.10).

### 4.5. Conclusiones

En este capítulo se trata la estimación del coeficiente de transferencia de calor en un problema de transporte con una condición de borde de tipo Dirichlet a izquierda y una condición de borde de tipo Robin a derecha.

La estimación se realiza de dos formas diferentes. Primero, de la manera habitual, considerando que el coeficiente es constante y que depende de la temperatura estacionaria de la pared disipativa. Segundo, a partir de un nuevo enfoque, el que tiene en cuenta la variación temporal de temperatura en la pared. Se llevan a cabo varios experimentos numéricos y se realizan análisis de temperatura y elasticidad con el fin de comparar el rendimiento de la nueva técnica de estimación contra el enfoque clásico.

En todos los casos, la temperatura de la superficie es mayor cuando se utiliza el método presentado aquí, lo que significa que el nuevo enfoque considera un coeficiente de transferencia de calor que toma en cuenta la variación de temperatura en la superficie, conduciendo a una menor disipación y obteniendo un perfil de temperatura más realista.

Las diferencias entre los perfiles de temperatura obtenidos con ambos métodos se vuelven más significativos para estados transitorios largos, dado que dichas diferencias aumentan para barras más largas, para fuentes de mayor temperatura y para materiales menos conductivos. Además, la nueva técnica conduce a una menor elasticidad en valor absoluto, esto implica que el mismo porcentaje de error en la estimación de este parámetro se traduce en un error menor en el cálculo de la temperatura.

# Capítulo 5

## Identificación de la Fuente

El problema de determinación de la fuente se ha analizado durante los últimos años en distintas áreas de la matemática aplicada y ha recibido considerable atención en muchas investigaciones actuales, ya que tiene aplicaciones en campos tales como la conducción de calor [81, 254, 259, 295], la identificación de fisuras [292], la teoría electromagnética [80], la prospección geofísica [39], la detección de contaminantes [157] y la detección de células tumorales [167], entre otros.

La identificación de la fuente a partir de mediciones ruidosas resulta ser un problema mal planteado en sentido de Hadamard [100] ya que la solución no depende continuamente de los datos.

Entre las herramientas más importantes utilizadas para determinar una fuente, se puede encontrar en la literatura el método logarítmico potencial [181], el método proyectivo [178], las funciones de Green [118], métodos de elementos límite de reciprocidad dual [86], el método de reciprocidad dual [235], el método de solución fundamental [129].

Con respecto a las aplicaciones en procesos de transporte o ecuaciones diferenciales parabólicas, no hay muchos artículos publicados para el caso general [256, 257, 262],

la mayoría de los artículos disponibles en la literatura se centraron en la ecuación de calor. Las fuentes en esta ecuación se recuperan utilizando diferentes métodos, técnicas y estrategias, ver por ejemplo, [2,87,130]. Hay muchos artículos que analizan casos particulares con simplificaciones o restricciones en los modelos matemáticos, el tipo de fuente, las condiciones de borde o el dominio elegido, como [2, 50, 87, 130, 160, 218, 277]. Los métodos más utilizados en estos casos son, el método de elemento límite [87, 130], el método de solución fundamental [2, 277], el método Ritz-Galerkin [198], el método de diferencias finitas [279], el método sin malla [278], el método de estabilidad condicional [276] y el método del disparo [160].

Para la determinación de la fuente de una ecuación parabólica, se aplican ciertas técnicas de regularización. En [227] el autor se centra en una ecuación de convección-difusión, mientras que en [78, 79, 81, 247, 248, 279, 286, 296] solo se considera la difusión. Recientemente, el problema para encontrar el término fuente en una ecuación parabólica completa fue resuelto por el método de cuasi-reversibilidad, ver [158]. Este método se puede utilizar para resolver el problema de fuente inversa en ecuaciones parabólicas no lineales [153].

Por otro lado, los métodos de regularización [83, 139] juegan un papel importante en la estimación de soluciones inestables. Los más utilizados son el método de regularización iterativo [131], el método simplificado de regularización de Tikhonov [61, 62, 91, 287], el método de regularización modificado [254, 259, 262, 286–288, 296], el truncamiento de Fourier [288], el método de mollificación [289].

En este capítulo se trata el tercer problema inverso en una ecuación evolutiva de tipo parabólica, a partir de mediciones ruidosas de temperatura tomadas en un tiempo fijo arbitrario. Este problema está relacionado con el descrito en el Capítulo 2 donde se considera que la fuente se encuentra en una región pequeña comparada con la longitud de la barra. Una posible simplificación para la determinación de la fuente, consiste en suponer que el dominio espacial es infinito en el sentido de que los bordes

se encuentran suficientemente alejados de la sección de interés. Esta consideración permite utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema.

Como se mencionó anteriormente, la identificación de la fuente está mal planteado, en este caso, porque los componentes de alta frecuencia de errores de datos arbitrariamente pequeños, pueden conducir a errores arbitrariamente grandes en la solución [83,139]. Para abordar este problema se diseña una familia uni-paramétrica de operadores de regularización con la finalidad de compensar el factor que causa la inestabilidad del operador inverso.

Los operadores de regularización conducen a una familia de problemas bien planteados que se aproxima al problema mal planteado. Se brinda, además, una técnica para la elección del parámetro de regularización. Se analiza la estabilidad y la convergencia de este método y se obtiene una cota óptima de tipo Hölder para el error de estimación. Para ilustrar el rendimiento de la regularización se incluyen ejemplos numéricos.

La resolución que aquí se presenta generaliza las ideas usadas por otros autores para el caso de la ecuación de calor; en este capítulo es aplicada a una ecuación parabólica completa donde las mediciones de temperatura pueden ser tomadas en cualquier instante, además, la formalización utilizada se basa en la teoría de operadores. Estas diferencias dan lugar a una nueva propuesta que permite ser usada de manera más general en otros problemas. Una aplicación es la detección de contaminantes en capas de agua subterránea, este es un problema que concierne a todas las ciudades urbanizadas. Poder determinar el foco de contaminación a partir de mediciones en un lugar particular, minimiza significativamente los gastos utilizados para la búsqueda [157,234]. Otra aplicación es la estimación del calor metabólico en un tejido biológico [257] utilizando el modelo de Pennes [186]. Cualquier anomalía existente dentro del cuerpo puede conducir directamente a variaciones de temperatura y flujo térmico en la superficie. La presencia de un tumor produce inflamación

## 5.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

local, aumento de la actividad metabólica, entre otros síntomas. Debido a esto, las células enfermas actúan como una fuente de temperatura que produce perfiles térmicos anormales en la piel y sus mediciones pueden usarse para identificar, localizar y caracterizar las células enfermas. Los dos problemas mencionados anteriormente pueden abordarse con las herramientas que se explicitan en este capítulo. Hay muchas otras aplicaciones en diferentes disciplinas, se mencionan estas dos a modo de ejemplo para remarcar la importancia del problema y del método propuesto.

### 5.1. Presentación del Problema

En esta sección se presenta formalmente el problema inverso que se va a estudiar. Éste es el tercer problema inverso y está asociado al primer problema directo abordado en el Capítulo 2 de esta tesis.

Se busca determinar, en un dominio no acotado, el término fuente de la ecuación parabólica completa dada por

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu(u(x, t) - T_a) + \tilde{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

sujeto a una condición inicial dada. Por ejemplo,

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t = 0. \quad (5.2)$$

La determinación se realiza mediante mediciones ruidosas de temperatura en un instante de tiempo  $t_0$ .

$$u(x, t) = y_\delta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t = t_0 > 0, \quad (5.3)$$

donde  $y_\delta$  representa las mediciones ruidosas y  $\delta$  es el ruido en los datos que satisface



## 5.2. IDENTIFICACIÓN DE LA FUENTE

$$\|y - y_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad 0 < \delta \leq \delta_M, \quad (5.4)$$

siendo  $\delta_M \in \mathbb{R}^+$  el nivel máximo de ruido. En la práctica  $\delta_M$  se obtiene a partir de los errores de los instrumentos de medición utilizados.

Por simplicidad, la Ecuación (5.1) puede reescribirse como

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu u(x, t) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

donde  $f(x) = \tilde{f}(x) + \nu T_a$  representa la fuente a estimar.

## 5.2. Identificación de la fuente

En esta sección se da una expresión analítica para la solución del problema de interés dado por la Ecuación (5.5) bajo las condiciones (5.2)-(5.4). Además, se demuestra que las soluciones no varían continuamente con los datos.

**Teorema 5.1** *Dados  $\alpha^2, \beta, \nu, t_0, \delta, \delta_M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\delta < \delta_M$ . Sean las funciones  $u(\cdot, t), f(\cdot), y(\cdot), y_\delta(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$  con  $\|y - y_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta$  que satisfacen el problema parabólico*

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu u(x, t) + f(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t = 0, \\ u(x, t) = y(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t = t_0 > 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Entonces, la expresión para la fuente viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \Lambda(\xi) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} y(x) dx \right] d\xi,$$

## 5.2. IDENTIFICACIÓN DE LA FUENTE

---

donde

$$\Lambda(\xi) = \frac{z(\xi)}{1 - e^{-z(\xi)t_0}}, \quad (5.7)$$

con

$$z(\xi) = \alpha^2 \xi^2 + i\beta\xi + \nu \in \mathbb{C}.$$

*Demostración:* La demostración del Teorema 5.1 utiliza la transformada de Fourier [171]. Se incluye aquí la definición y algunas propiedades para aquellos lectores que no están familiarizados con el tema.

**Definición 5.2** Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  se define la transformada de Fourier [171] como

$$\hat{g}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

*Equivalentemente.* Sea  $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$  se define la antitransformada de Fourier [171] como

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{g}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

La transformada de Fourier es un operador integral con diversas propiedades [171], a continuación se mencionan las que serán de utilidad en este capítulo.

**Proposición 5.3** La transformada de Fourier es un operador lineal. Además, dada  $g \in L^2(\mathbb{R})$  vale  $\hat{g}'(\xi) = i\xi \hat{g}(\xi)$  [171].

*Demostración:* La demostración es inmediata, pues la linealidad de la transformada de Fourier se obtiene de manera directa de la linealidad de la integral y la expresión para la transformada de la derivada se obtiene integrando por partes.  $\square$

Hecha esta aclaración se vuelve a la demostración del Teorema 5.1. Se utiliza la definición de la transformada de Fourier (5.8) y la Proposición 5.3. El problema de

## 5.2. IDENTIFICACIÓN DE LA FUENTE

---

identificación (5.6) se puede reescribir en el espacio de frecuencias

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) = -z(\xi) \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, t) = 0, & \xi \in \mathbb{R}, t = 0, \\ \hat{u}(\xi, t) = \hat{y}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}, t = t_0 > 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

donde

$$z(\xi) = \alpha^2 \xi^2 + i\beta\xi + \nu \in \mathbb{C}.$$

El sistema (5.10) está representado por una ecuación ordinaria de primer orden no homogénea con condiciones de borde. La solución analítica se obtiene de manera inmediata

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1 - e^{-z(\xi)t}}{z(\xi)} \hat{f}(\xi). \quad (5.11)$$

Como  $\hat{u}(\xi, t_0) = \hat{y}(\xi)$ , evaluando en  $t = t_0$  la Ecuación (5.11) se obtiene una expresión para la fuente en espacio de frecuencias

$$\hat{f}(\xi) = \Lambda(\xi) \hat{y}(\xi), \quad (5.12)$$

donde

$$\Lambda(\xi) = \frac{z(\xi)}{1 - e^{-z(\xi)t_0}}.$$

Equivalentemente, utilizando la Definición 5.9 (de la antitransformada de Fourier (5.9)) resulta

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \Lambda(\xi) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} y(x) dx \right] d\xi.$$

□

**Lema 5.4** *Bajo las hipótesis utilizadas hasta aquí, el problema de identificación*

### 5.3. SOLUCIÓN DE REGULARIZACIÓN

---

(5.10) es un problema mal planteado en sentido de Hadamard, pues las soluciones no varían de manera continua con los datos.

*Demostración:* Se denota  $\hat{f}_\delta(\xi) = \Lambda(\xi)\hat{y}_\delta(\xi)$ . Es simple ver que

$$\|\hat{f} - \hat{f}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\Lambda(\xi)(\hat{y}(\xi) - \hat{y}_\delta(\xi))\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\Lambda(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\hat{y}(\xi) - \hat{y}_\delta(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (5.13)$$

por otra parte,

$$|\Lambda(\xi)| = \left| \frac{z(\xi)}{1 - e^{-(\alpha^2\xi^2 + i\beta\xi + \nu)t_0}} \right| \geq \frac{|z(\xi)|}{1 + e^{-(\alpha^2\xi^2 + \nu)t_0}} = \frac{|\alpha^2\xi^2 + \nu + i\beta\xi|}{1 + e^{-(\alpha^2\xi^2 + \nu)t_0}}, \quad (5.14)$$

de lo obtenido en (5.14) resulta evidente que  $\Lambda(\xi)$  no está acotado, pues tiende a infinito cuando  $\xi \rightarrow \infty$ . Como puede verse en (5.13) este hecho amplifica el error de las mediciones en altas frecuencias y esto puede conducir a un gran error de estimación  $\|\hat{f} - \hat{f}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}$  incluso para errores de observación o medición muy chicos. En otras palabras, la solución del problema de identificación (5.10) no varía de forma continua con los datos, lo que implica que éste está mal planteado en sentido de Hadamard [100].  $\square$

Cuando un problema inverso resulta mal planteado es necesario recurrir a un método de regularización que estabilice la solución. En la Sección 5.3 se utiliza un método de regularización con la finalidad de estabilizar la solución de nuestro problema particular.

### 5.3. Solución de Regularización

En esta sección, se propone un operador de regularización asociado al método de regularización de cuasi-reversibilidad [150]. Se demuestra la existencia del parámetro

### 5.3. SOLUCIÓN DE REGULARIZACIÓN

---

de regularización que conduce a un método convergente y se incluyen cuestiones teóricas básicas relacionadas con los operadores de regularización. Los lectores que no estén familiarizados con este tema pueden encontrar más información en [83, 139].

**Definición 5.5** *Sea  $T : Y \rightarrow X$ ,  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y  $T$  un operador acotado. Una estrategia de regularización para  $T$  es una familia de operadores lineales y acotados*

$$R_\mu : Y \rightarrow X, \quad \mu > 0, \quad / \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^+} R_\mu y = Ty, \quad \forall y \in Y.$$

Para nuestro caso particular se define una familia paramétrica de operadores lineales  $R_\mu : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  con  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , tal que

$$R_\mu \hat{y}(\xi) := \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \hat{y}(\xi), \quad (5.15)$$

donde  $\Lambda(\xi)$  está definido en (5.7),  $R_\mu$  es una estrategia de regularización para  $\Lambda(\xi)$  y  $\mu$  es el parámetro de regularización.

**Observación 5.6** *Notar que el denominador de la expresión que define el operador lineal  $R_\mu$  (5.15), fue introducido en la solución únicamente con propósitos de estabilización.*

Las propiedades de utilidad, a nuestros fines, de la familia paramétrica de los operadores lineales, continuos y acotados  $\{R_\mu, \mu > 0\}$  definida en (5.15) se indican en el siguiente resultado.

**Teorema 5.7** *Se considera el problema de identificación de la fuente  $f$  a partir de datos ruidosos  $y_\delta(x)$  medidos en el instante  $t_0 > 0$ , donde  $\delta$  es el nivel de ruido definido en (5.4).*

### 5.3. SOLUCIÓN DE REGULARIZACIÓN

Sean funciones  $u$  y  $f$  que satisfacen la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) - \beta u_x(x, t) - \nu u(x, t) + f(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

y sea  $\{R_\mu\}$  la familia de operadores definida en (5.15).

Entonces, para toda  $y(x) = u(x, t_0)$  existe una regla de elección de parámetro a priori para  $\mu > 0$  de forma tal que el par  $(R_\mu, \mu)$  es un método de regularización convergente para el problema de identificación (5.16).

*Demostración:* El factor  $\frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2}$  está acotado para todo  $\xi$  ya que es continuo para  $\xi \in \mathbb{R}$  y

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \right| &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \frac{z(\xi)}{(1 - e^{-z(\xi)t_0})(1 + \mu^2 \xi^2)} \right| \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left| \frac{z(\xi)}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + i\beta\xi + \nu)t_0})(1 + \mu^2 \xi^2)} \right| = \frac{\alpha^2}{\mu^2} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada parámetro  $\mu > 0$ , el operador  $R_\mu$  resulta lineal, continuo y se tiene que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} R_\mu \hat{y} = \Lambda \hat{y},$$

donde  $\hat{y} \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $R_\mu$  es una estrategia de regularización para  $\Lambda$ . Por lo tanto, según la Proposición 3.4 en [83], existe una regla de elección de parámetro a priori  $\mu$  tal que  $(R_\mu, \mu)$  es un método de regularización convergente para resolver (5.12).

La solución regularizada del problema inverso en el espacio de frecuencia viene dada por

$$\hat{f}_{\delta, \mu} = \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \hat{y}_\delta(\xi). \quad (5.17)$$

Por lo tanto, una expresión aproximada para la función  $f$ , solución del problema

## 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

---

dado en (5.16) es

$$f_{\delta,\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} R_{\mu} \hat{y}_{\delta}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \hat{y}_{\delta}(\xi) d\xi. \quad (5.18)$$

Equivalentemente

$$f_{\delta,\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} y(x) dx \right] d\xi.$$

□

## 5.4. Análisis del Error

Con la finalidad de analizar el comportamiento de la regularización, se introducen primero algunos resultados que se utilizarán más adelante para obtener una cota del error entre la fuente  $f(x)$  y su estimación  $f_{\delta,\mu}(x)$ .

### 5.4.1. Resultados Auxiliares

**Lema 5.8** Sea  $\omega \in \mathbb{C}$  con  $Re(\omega) > 0$  entonces  $\left| \frac{1}{1 - e^{-\omega}} \right| \leq \frac{1}{1 - e^{-Re(\omega)}}$ .

*Demostración:* Se utiliza la fórmula de Euler para números complejos y se tiene que

$$|1 - e^{-\omega}|^2 = (1 - e^{-Re(\omega)})^2 + 2e^{-Re(\omega)} (1 - \cos(Im(\omega))) \geq (1 - e^{-Re(\omega)})^2,$$

por lo tanto,

$$|1 - e^{-\omega}| \geq 1 - e^{-Re(\omega)} \implies \left| \frac{1}{1 - e^{-\omega}} \right| \leq \frac{1}{1 - e^{-Re(\omega)}},$$

#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

con lo que se finaliza la prueba.  $\square$

**Lema 5.9** La función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - e^{-x}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{1 - e^{-x}}, & 1 \leq x, \end{cases}$  satisface  $f(x) < 2$ .

*Demostración:* Primero, se considera  $f$  en  $(0, 1)$ . Diferenciando, en este caso, se tiene

$$f'(x) = \left( \frac{x}{1 - e^{-x}} \right)' = \frac{1 + e^{-x}(-1 + x)}{(1 - e^{-x})^2} > 0,$$

la función  $f$  es creciente en  $(0, 1)$ . Luego  $\frac{x}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}$ .

Por otro lado, para  $x > 1$ , se tiene

$$f'(x) = \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} \right)' = \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} < 0,$$

la función  $f$  es decreciente  $\forall x > 1$ . Luego  $\frac{x}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}$ .

Entonces,  $f(x) < \frac{1}{1 - e^{-1}} < 2$ , lo que completa la prueba.  $\square$

**Lema 5.10** Sea  $\rho \in \mathbb{R}$ . Si  $0 < \mu < 1$  se tiene  $\frac{|\rho|}{1 + \rho^2 \mu^2} \leq \frac{1}{2\mu}$ . Además, para  $\alpha^2, \nu > 0$  es válida la siguiente desigualdad  $\frac{\alpha^2 \rho^2 + \nu}{1 + \rho^2 \mu^2} \leq \max \left\{ \nu, \frac{\alpha^2}{\mu^2} \right\}$ .

*Demostración:* Para todo  $\rho \in \mathbb{R}$  vale

$$0 \leq (1 - |\rho|\mu)^2 = 1 - 2|\rho|\mu + |\rho|^2 \mu^2 \implies 1 + |\rho|^2 \mu^2 \geq 2|\rho|\mu.$$

Además, como  $\mu > 0$  se obtiene la primer inecuación,

$$\frac{|\rho|}{1 + \rho^2 \mu^2} \leq \frac{1}{2\mu}.$$



#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

Por otra parte, sea  $k(\rho) := \frac{\alpha^2 \rho^2 + \nu}{1 + \rho^2 \mu^2}$  entonces  $k'(\rho) = \frac{2\rho(\alpha^2 - \nu\mu^2)}{(1 + \rho^2 \mu^2)^2}$  y  $k$  tiene un solo punto crítico  $\rho = 0$ . Se consideran tres casos:

- $\alpha^2 = \nu\mu^2$ : se tiene  $k(\rho) = \nu$ , constante  $\forall \rho \in \mathbb{R}$ .
- $\alpha^2 < \nu\mu^2$ : entonces la función  $k$  alcanza su valor máximo global  $\nu$  en  $\rho = 0$ .
- $\alpha^2 > \nu\mu^2$ :  $k$  es una función par y creciente para  $\rho > 0$  con  $\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} k(\rho) = \frac{\alpha^2}{\mu^2}$  se tiene  $k(\rho) \leq \frac{\alpha^2}{\mu^2}$ .

Lo que completa la prueba. □

**Lema 5.11** Sea  $\alpha^2, \beta, \nu, t_0 > 0$  y  $0 < \mu < 1$  entonces

$$\left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \right| \leq \frac{2}{\mu^2} \max \left\{ \frac{1}{t_0} + \frac{\beta}{2\nu t_0}; \nu + \alpha^2 + \frac{\beta}{2} \right\}.$$

*Demostración:* Utilizando la Ecuación (5.7) y el Lema 5.8 se obtiene la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \right| \leq \frac{|\alpha^2 \xi^2 + \nu + \beta \xi i|}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \mu^2 \xi^2)}.$$

Si  $(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0 \geq 1$  : Usando la desigualdad triangular, el Lema 5.9, el Lema 5.10 y  $0 < \mu < 1$  se consigue

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha^2 \xi^2 + \nu + \beta \xi i|}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2)} &\leq 2 \left( \frac{\alpha^2 \xi^2 + \nu}{1 + \xi^2 \mu^2} + \frac{\beta |\xi|}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \\ &\leq 2 \max \left\{ \nu, \frac{\alpha^2}{\mu^2} \right\} + \frac{\beta}{\mu} \\ &\leq \frac{2}{\mu^2} \left( \nu + \alpha^2 + \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Si  $(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0 \in (0, 1)$ : Observar que

#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

$$\frac{|\alpha^2 \xi^2 + \nu + \beta \xi i|}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2)} \leq \frac{(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2) t_0} + \frac{\beta |\xi| (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2) (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0}.$$

Se utiliza el Lema 5.9, el Lema 5.10,  $0 < \mu < 1$  y se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2) t_0} + \frac{\beta |\xi| (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0})(1 + \xi^2 \mu^2) (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0} \\ & \leq 2 \left( \frac{1}{(1 + \xi^2 \mu^2) t_0} + \frac{\beta |\xi|}{(1 + \xi^2 \mu^2) (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0} \right) \\ & \leq 2 \left( \frac{1}{(1 + \xi^2 \mu^2) t_0} + \frac{\beta}{2\mu (\alpha^2 \xi^2 + \nu) t_0} \right) \\ & \leq 2 \left( \frac{1}{t_0} + \frac{\beta}{2\mu \nu t_0} \right) \leq \frac{2}{\mu^2 t_0} \left( 1 + \frac{\beta}{2\nu} \right). \end{aligned}$$

□

**Lema 5.12** Si  $0 < \mu < 1$  entonces vale la siguiente desigualdad

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-p/2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \right| \leq \max \{ \mu^p, \mu^2 \}.$$

*Demostración:* Sea

$$\Omega(\xi) := (1 + \xi^2)^{-p/2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right).$$

Se considera para la demostración tres casos.

**Caso 1** ( $|\xi| \geq \xi_0 := \frac{1}{\mu}$ ). Entonces

$$\Omega(\xi) \leq (1 + \xi^2)^{-p/2} \leq |\xi|^{-p} \leq \xi_0^{-p} = \mu^p. \quad (5.19)$$

**Caso 2** ( $|\xi| < 1$ ). Entonces

$$\Omega(\xi) = \xi^2 \mu^2 (1 + \xi^2)^{-p/2} \leq \mu^2. \quad (5.20)$$

#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

---

**Caso 3** ( $1 \leq |\xi| < \xi_0$ ). Entonces

$$\Omega(\xi) = \frac{\xi^2 \mu^2}{1 + \xi^2 \mu^2} (1 + \xi^2)^{-p/2} \leq \frac{\xi^{2-p} \mu^2}{1 + \xi^2 \mu^2} \leq \xi^{2-p} \mu^2.$$

Si  $0 < p \leq 2$ , se tiene

$$\Omega(\xi) \leq \xi_0^{2-p} \mu^2 = \mu^p. \quad (5.21)$$

Si  $p > 2$ , se tiene

$$\Omega(\xi) \leq \xi^{2-p} \mu^2 = \mu^2. \quad (5.22)$$

Se combinan las expresiones dadas por (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) y se concluye la prueba.  $\square$

#### 5.4.2. Cota Analítica del Error

En esta sección se brinda una expresión para la cota analítica del error cometido al aproximar la fuente real  $f$  con la obtenida mediante el método de regularización  $f_{\delta, \mu}$ .

**Definición 5.13** La norma en el espacio de Sobolev  $H^p(\mathbb{R})$ ,  $p > 0$  se define como

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} := \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 (1 + \xi^2)^p d\xi \right)^{1/2}. \quad (5.23)$$

Mediante la Definición (5.23) se da una técnica de elección de parámetro para la regularización propuesta y se encuentra una expresión analítica que acota el error de estimación. Esto, se puede ver en el siguiente resultado.

**Teorema 5.14** Se considera el problema inverso de determinar la fuente  $f(x)$  en (5.6). Sea  $f_{\delta, \mu}(x)$  la solución de regularización dada en (5.18) y se asume que  $f$  está acotada en  $H^p(\mathbb{R})$  para algún  $0 < p < \infty$  (5.23). Si se elige

#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

$$\mu^2 = \left( \frac{\delta}{\delta_M} \right)^{2/p+2} < 1, \quad (5.24)$$

entonces existe una constante  $K$  independiente de  $\delta$  tal que

$$\|f - f_{\delta,\mu}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq K \max \left\{ \left( \frac{\delta}{\delta_M} \right)^{2/p+2}, \left( \frac{\delta}{\delta_M} \right)^{p/p+2} \right\}.$$

*Demostración:* Por simplicidad de notación de ahora en adelante se denota  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Se define  $\hat{f}_\mu(\xi) := \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \hat{y}(\xi)$ , luego

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}_\mu(\xi) \right| = \left| \hat{f}(\xi) - \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \mu^2 \xi^2} \hat{y}(\xi) \right| = \left| \hat{f}(\xi) \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \frac{(1 + \xi^2)^{p/2}}{(1 + \xi^2)^{p/2}} \right|,$$

reordenando

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}_\mu(\xi) \right| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-p/2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \right| \left| \hat{f}(\xi) (1 + \xi^2)^{p/2} \right|.$$

Se utiliza la definición de la norma en el espacio de Sobolev ( $H^p(\mathbb{R})$ ) dada por la expresión (5.23),

$$\|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_\mu(\xi)\| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-p/2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \right| \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}. \quad (5.25)$$

Por la desigualdad triangular se tiene

$$\|\hat{f} - \hat{f}_{\delta,\mu}\| \leq \|\hat{f} - \hat{f}_\mu\| + \|\hat{f}_\mu - \hat{f}_{\delta,\mu}\|. \quad (5.26)$$

A partir de las desigualdades (5.25)-(5.26) junto con la definición de la fuente regularizada (5.17) se obtiene

$$\left\| \hat{f} - \hat{f}_{\delta,\mu} \right\| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-p/2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \mu^2} \right) \right| \|f\|_{H^p(\mathbb{R})} + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \|\xi\|^2 \mu^2} \right| \|\hat{y} - \hat{y}_\delta\|.$$

#### 5.4. ANÁLISIS DEL ERROR

Utilizando el Lema 5.11, el Lema 5.12 y la suposición de que el error en los datos está acotado ( $\|\hat{y} - \hat{y}_\delta\| \leq \delta$ ) se tiene que

$$\|\hat{f} - \hat{f}_{\delta,\mu}\| \leq \max\{\mu^p, \mu^2\} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{2\delta}{\mu^2} \max\left\{\frac{1}{t_0} + \frac{\beta}{2\nu t_0}; \nu + \alpha^2 + \frac{\beta}{2}\right\}.$$

Se utiliza  $\mu^2 = \left(\frac{\delta}{\delta_M}\right)^{p/2}$ , la identidad de Parseval [171] y la linealidad de la transformada de Fourier,

$$\|f - f_{\delta,\mu}\| = \|\hat{f} - \hat{f}_{\delta,\mu}\| \leq K \max\left\{\left(\frac{\delta}{\delta_M}\right)^{2/p+2}, \left(\frac{\delta}{\delta_M}\right)^{p/p+2}\right\}, \quad (5.27)$$

donde

$$K = C + 2\delta_M^{\frac{4}{p+2}} \max\left\{\frac{1}{t_0} + \frac{\beta}{2\nu t_0}; \nu + \alpha^2 + \frac{\beta}{2}\right\},$$

y  $C$  es la cota de la norma  $H^p(\mathbb{R})$  de  $f$ . Es decir,

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 (1 + \xi^2)^p d\xi\right)^{1/2} < C.$$

□

**Observación 5.15** *Notar que la cota (5.27) satisface*

$$\|f - f_{\delta,\mu}\| \longrightarrow 0 \text{ si } \delta \longrightarrow 0,$$

*lo que significa que la fuente estimada converge a la función fuente cuando el ruido en los datos tiende a 0.*

**Observación 5.16** *Observar que el caso  $p = \infty$  no se incluye en las hipótesis del Teorema 5.14, el motivo es que en este caso*

$$\|f - f_{\delta,\mu}\| = \|\hat{f} - \hat{f}_{\delta,\mu}\| \leq K \neq 0.$$

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

**Observación 5.17** *Notar que la cota obtenida para el error de regularización (5.27) es de tipo Hölder y solo depende de la suavidad de la fuente y los parámetros del modelo matemático.*

### 5.5. Ejemplos Numéricos

En esta sección se consideran cuatro ejemplos concretos de estimación de fuente para ilustrar el rendimiento del operador de regularización.

Para cada uno de los ejemplos abordados en esta sección, se eligen diferentes valores para los parámetros del problema de identificación de la fuente  $(\alpha^2, \beta, \nu, t_0)$ . Además, se considera, para simular el ruido en los datos, un conjunto de valores de desviación estándar  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ . El espacio se discretiza de manera uniforme y un conjunto de datos  $\{y_{\delta_1}, \dots, y_{\delta_N}\}$  se obtiene a partir de la evaluación de la solución  $u(x, t)$  en un instante de tiempo fijo dado  $t_0$  y agregando ruido, es decir,

$$y_{\delta_i} = y(x_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad x_i \in \mathcal{G},$$

donde  $\mathcal{G}$  es una discretización uniforme en  $\mathbb{R}$  elegida y  $\epsilon_i, i = 1, \dots, N$  son realizaciones de la variable aleatoria normalmente distribuida  $\eta$  con media 0 y desviación  $\epsilon$ . Al denotar  $y_i = y(x_i), i = 1, \dots, N$  y teniendo en cuenta el nivel de ruido  $\delta$  que satisface (5.4), el error

$$y - y_\delta = (y_1, \dots, y_N) - (y_{\delta_1}, \dots, y_{\delta_N}) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N),$$

es numéricamente calculado mediante el método de integración de Simpson, este cálculo, permite obtener un valor aproximado del error  $y - y_\delta$  que depende directamente del ruido. Se puede observar que el nivel de ruido  $\delta$  es función de la desviación

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

estándar  $\epsilon$ , es decir,  $\delta = \delta(\epsilon)$ . En la práctica, el valor  $\delta_M$  dado en (5.4) se obtiene a partir de los errores de calibración y medición de los instrumentos utilizados. Aquí se elige como el valor máximo de  $\delta$ . Luego se calcula  $\{\hat{y}_{\delta_1}, \dots, \hat{y}_{\delta_N}\}$  mediante la transformada FFT (Fast Fourier Transform) [268] y se obtiene la solución de regularización  $f_{\delta, \mu}$  dada en (5.18) usando la anti-transformada rápida de Fourier [81, 268], donde el parámetro de regularización  $\mu$  es elegido de acuerdo a (5.24), es decir,

$$\mu^2 = \left( \frac{\delta}{\delta_M} \right)^{2/p+2}.$$

Para cada uno de los ejemplos se grafican los resultados de las fuentes estimadas sin regularizar y las que se obtuvieron luego de la utilización del método de regularización presentado en este capítulo. Se incluye además, un cuadro de errores para cada ejemplo. En estos cuadros se consideran los errores relativos y los errores absolutos, las perturbaciones utilizadas para la construcción de las mismas son  $\{\epsilon_1; \dots; \epsilon_5\} = \{0, 01; 0, 03; 0, 05; 0, 08; 0, 1\}$ .

**Observación 5.18** *El lector puede notar que en algunos ejemplos el  $p$  considerado para la recuperación de la fuente  $f$  no se corresponde, pues  $f$  no está en ese espacio de Hilbert. Estos ejemplos se incluyeron igual con la finalidad de observar que la recuperación es razonable incluso en esos casos.*

**Ejemplo 5.19** *Para este ejemplo se consideran los siguientes parámetros  $\alpha^2 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\beta = 1 \times 10^{-5} \text{ m}/\text{s}$ ;  $\nu = 1 \text{ 1}/\text{s}$ ;  $N = 1001$ ;  $t_0 = 1 \text{ s}$  y  $t_0 = 5 \text{ s}$ . Además, los valores de perturbaciones utilizados son  $\epsilon \in \{0, 2; 0, 15; 0, 1; 0, 05\}$ . Por último, la fuente a estimar en este caso es*

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 10, \\ 1, & 10 \leq x \leq 20, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.28)$$

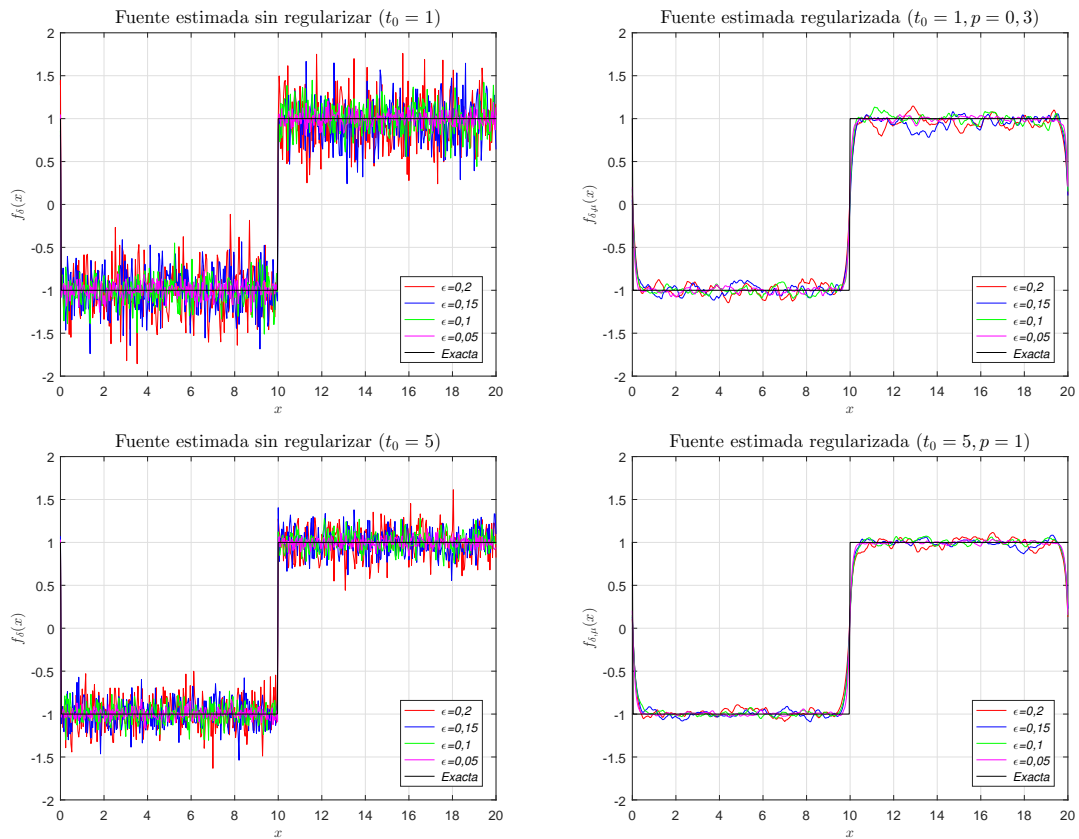


Figura 5.1: Ejemplo 5.19: Fuentes no regularizadas (izquierda) con  $t_0 = 1$  s (arriba),  $t_0 = 5$  s (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con  $t_0 = 1$  s,  $p = 0, 3$  (arriba),  $t_0 = 5$  s,  $p = 1$  (abajo) para diferentes niveles de ruido.



5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS
 

---

$\epsilon$	Errores Absolutos		Errores Relativos	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ $	$\ f - f_\delta\ /\ f\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ /\ f\ $
0,01	0,2305	0,0049	0,0364	0,0007
0,03	0,2875	0,0149	0,0454	0,0023
0,05	0,3215	0,0242	0,0508	0,0038
0,08	0,4135	0,0350	0,0653	0,0055
0,10	0,4756	0,0372	0,0752	0,0058

Cuadro 5.1: Ejemplo 5.19: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo  $t_0 = 1$  s y  $p = 1$ .

La fuente (5.28) que se recupera en el Ejemplo 5.19 es de interés en la teoría de señales [149, 190]. Este tipo de funciones resulta ser un ejemplo habitual en los problemas de recuperación de fuentes [288, 289]. Esto se debe principalmente a que al ser una función discontinua puede aparecer el fenómeno de Gibbs [81, 268]. Dicho fenómeno indica que cuando se desarrolla una función en serie de Fourier y ésta no es continua en la región considerada, es posible que no haya una buena precisión en los entornos de las discontinuidades.

Como se puede visualizar en los gráficos de la Figura 5.1, el operador de regularización utilizado suaviza al operador inverso haciendo que la recuperación sea estable. La estimación de la fuente resulta estable para diferentes valores temporales de toma de medición  $t_0$  y para diferentes valores de  $p$ . Como es de esperarse, la estimación mejora para valores más chicos de perturbación  $\epsilon$ .

En el Cuadro 5.1 se incluyen los errores relativos y absolutos de estimación que también muestran la bondad del método. Los errores relativos varían de 3,64% a 7,52% para las fuentes sin regularizar y para las fuentes regularizadas el error relativo se encuentra entre 0,07% y 0,58%. Por ejemplo, para el caso  $\epsilon = 0,03$ , el error relativo de la estimación de la fuente sin regularizar es de 4,54% y el error relativo que se obtiene luego de aplicar la estrategia de regularización explicada en este capítulo es 0,23%.

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

**Ejemplo 5.20** Para este ejemplo se consideran los siguientes parámetros  $\alpha^2 = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\beta = 0 \text{ m/s}$ ;  $\nu = 0 \text{ 1/s}$ ;  $N = 1001$ ;  $t_0 = 0,1 \text{ s}$  y  $t_0 = 0,5 \text{ s}$ . Además, los valores de perturbaciones utilizados son  $\epsilon \in \{0,01; 0,007; 0,003; 0,001\}$ . Por último, la fuente a estimar en este caso es

$$f(x) = \begin{cases} \left(-\frac{x^3}{4} + \frac{3x}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{4}}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.29)$$

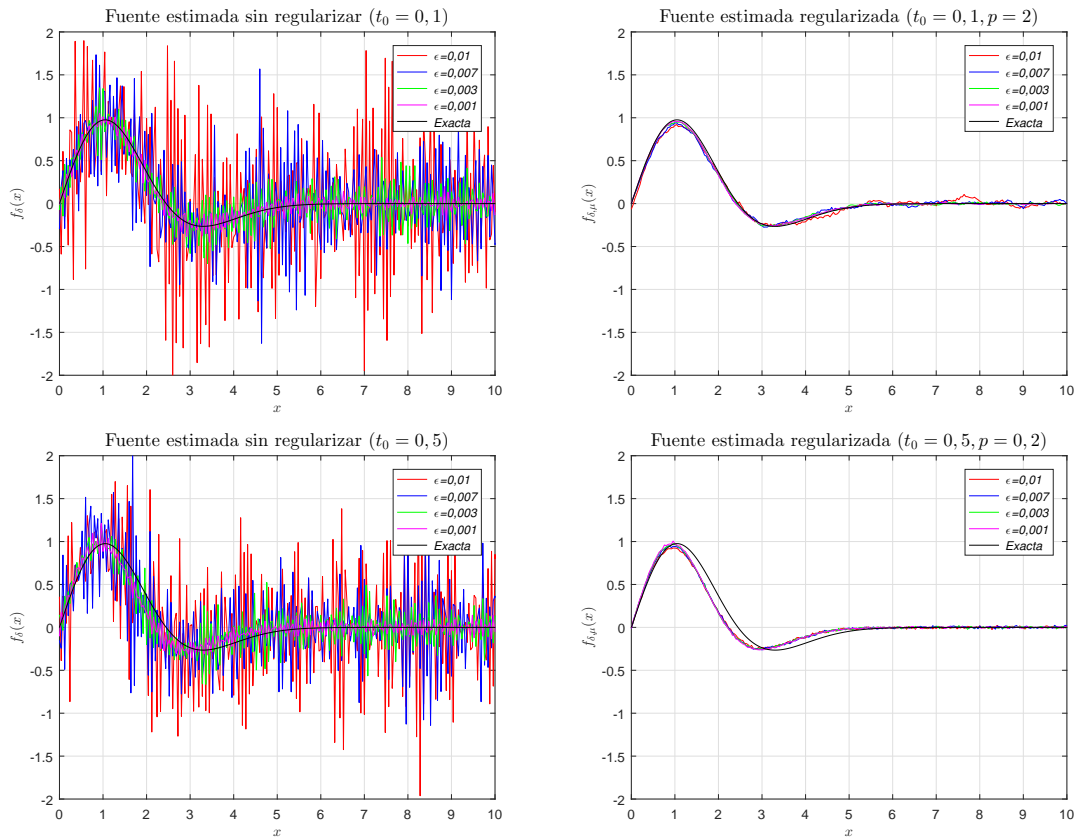


Figura 5.2: Ejemplo 5.20: Fuentes no regularizadas (izquierda) con  $t_0 = 0,1 \text{ s}$  (arriba),  $t_0 = 0,5 \text{ s}$  (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con  $t_0 = 0,1 \text{ s}$ ,  $p = 2$  (arriba),  $t_0 = 0,5 \text{ s}$ ,  $p = 0,2$  (abajo) para diferentes niveles de ruido.

5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS
 

---

$\epsilon$	Errores Absolutos		Errores Relativos	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ $	$\ f - f_\delta\ /\ f\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ /\ f\ $
0,01	0,1495	0,0203	0,0975	0,0132
0,03	0,4847	0,0233	0,3162	0,0152
0,05	0,7555	0,0246	0,4928	0,0160
0,08	1,1381	0,0256	0,7424	0,0167
0,10	1,6812	0,0286	1,0967	0,0187

Cuadro 5.2: Ejemplo 5.20: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo  $t_0 = 1$  s y  $p = 1$ .

La fuente (5.29) que se recupera en el Ejemplo 5.20 es de interés en problemas de transferencia de calor. Ver por ejemplo, [79]. Este tipo de funciones resulta ser un ejemplo habitual en los problemas de recuperación de fuentes en procesos de transferencia de calor [288, 289]. El Ejemplo 5.20 resulta interesante, pues ese tipo de fuentes ya han sido recuperadas mediante enfoques diferentes en problemas más simples donde se utiliza, en lugar de la ecuación parabólica completa, la ecuación de calor donde solo la difusión es tenida en cuenta [277–279].

Como se puede visualizar en los gráficos de la Figura 5.2, el operador de regularización utilizado, nuevamente, suaviza al operador inverso haciendo que la recuperación sea estable. La estimación de la fuente resulta estable para diferentes valores temporales de toma de medición  $t_0$  y para diferentes valores de  $p$ . Como es de esperarse, la estimación mejora para valores más chicos de perturbación  $\epsilon$ .

En el Cuadro 5.2 se incluyen los errores relativos y absolutos de estimación que también muestran el buen desempeño del método. Los errores relativos varían de 9,75 % a 109,67 % para las fuentes sin regularizar y para las fuentes regularizadas el error relativo se encuentra en 1,32 % y 1,87 %. Por ejemplo, para el caso  $\epsilon = 0,03$ , el error relativo de la estimación de la fuente sin regularizar es de 31,62 % y el error relativo que se obtiene luego de aplicar la estrategia de regularización explicada en este capítulo es 1,52 %.

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

**Ejemplo 5.21** Para este ejemplo se consideran los siguientes parámetros  $\alpha^2 = 0,5 \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\beta = 0 \text{ m/s}$ ;  $\nu = 0,5 \text{ 1/s}$ ;  $N = 1001$ ;  $t_0 = 0,1 \text{ s}$  y  $t_0 = 0,5 \text{ s}$ . Además, los valores de perturbaciones utilizados, en este caso, son  $\epsilon \in \{0,01; 0,005; 0,001; 0,0005\}$ .

Por último, la fuente a estimar es

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.30)$$

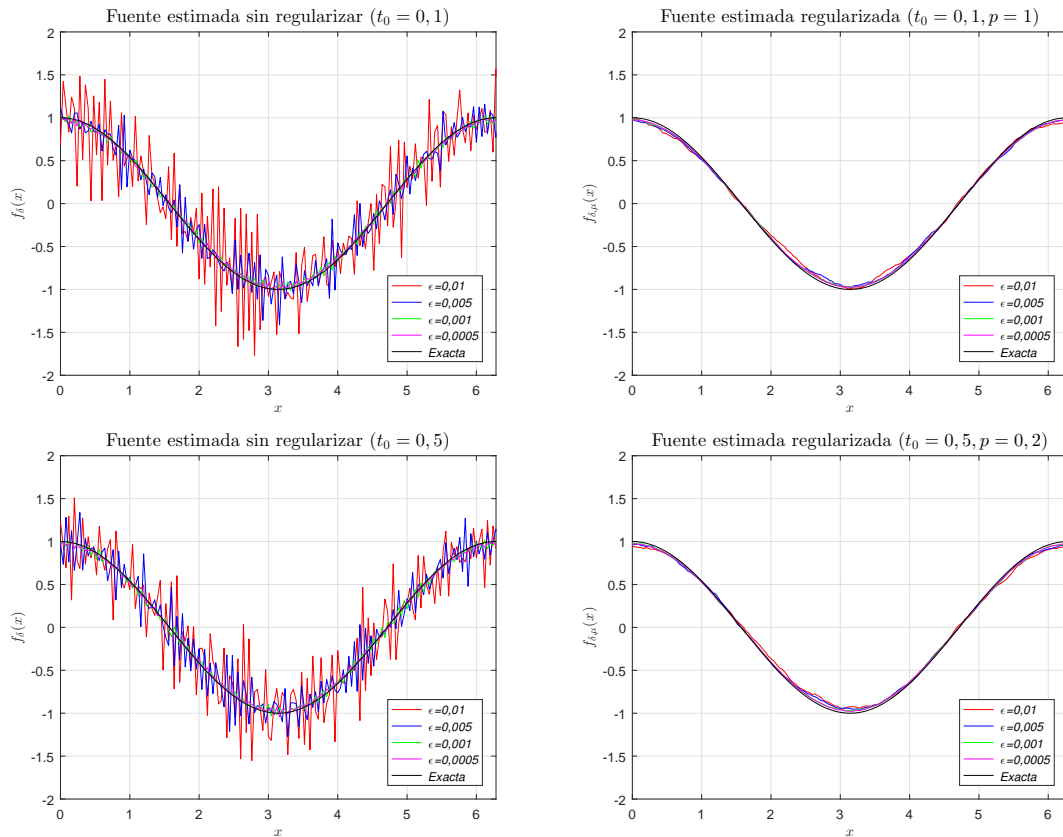


Figura 5.3: Ejemplo 5.21: Fuentes no regularizadas (izquierda) con  $t_0 = 0,1 \text{ s}$  (arriba),  $t_0 = 0,5 \text{ s}$  (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con  $t_0 = 0,1 \text{ s}$ ,  $p = 1$  (arriba),  $t_0 = 0,5 \text{ s}$ ,  $p = 0,2$  (abajo) para diferentes niveles de ruido.

5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS
 

---

$\epsilon$	Errores Absolutos		Errores Relativos	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ $	$\ f - f_\delta\ /\ f\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ /\ f\ $
0,01	0,0675	0,0246	0,0267	0,0097
0,03	0,1970	0,0267	0,0781	0,0105
0,05	0,3148	0,0268	0,1248	0,0106
0,08	0,5422	0,0280	0,2150	0,0111
0,10	0,6696	0,0302	0,2655	0,0120

Cuadro 5.3: Ejemplo 5.21: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo  $t_0 = 1$  s y  $p = 1$ .

La fuente (5.30) que se recupera en el Ejemplo 5.21 es de interés en diversos problemas de distintas características por las particularidades que esta función presenta. Es una función continua, derivable y periódica. Este tipo de funciones resulta ser un ejemplo habitual en los problemas de recuperación y/o identificación de fuentes tanto en la teoría de señales [149, 190] como diferentes problemas de transferencia de calor [288, 289].

Como se puede visualizar en los gráficos de la Figura 5.3 el operador de regularización utilizado, nuevamente, suaviza al operador inverso haciendo que la recuperación sea estable. La estimación de la fuente resulta estable para diferentes valores temporales de toma de medición  $t_0$  y para diferentes valores de  $p$ . Como es de esperarse, nuevamente, la estimación mejora notoriamente para valores más chicos de perturbación  $\epsilon$ .

En el Cuadro 5.3 se incluyen los errores relativos y absolutos de estimación que también muestran el buen desempeño del método. Los errores relativos varían de 2,67% a 26,55% para las fuentes sin regularizar y para las fuentes regularizadas el error relativo se encuentra entre 0,97% y 1,20%. Por ejemplo, para el caso  $\epsilon = 0,03$ , el error relativo de la estimación de la fuente sin regularizar es de 7,81% y el error relativo que se obtiene luego de aplicar la estrategia de regularización explicada en este capítulo es 1,06%.

## 5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

**Ejemplo 5.22** Para este ejemplo se consideran los siguientes parámetros  $\alpha^2 = 2 \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\beta = 0 \text{ m/s}$ ;  $\nu = 1 \text{ 1/s}$ ;  $N = 1001$ ;  $t_0 = 0, 2 \text{ s}$  y  $t_0 = 2 \text{ s}$ . Además, los valores de perturbaciones utilizados, en este caso, son  $\epsilon \in \{0,001; 0,002; 0,003; 0,004\}$ . Por último, la fuente a estimar es

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.31)$$

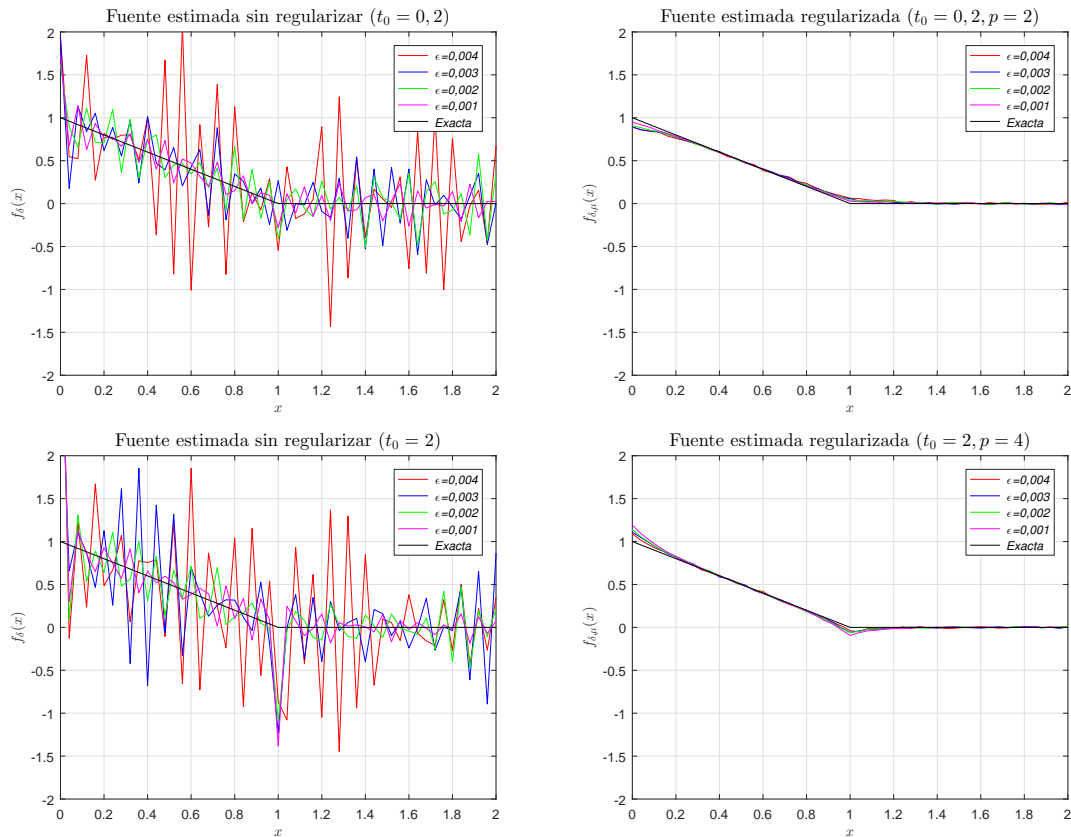


Figura 5.4: Ejemplo 5.22: Fuentes no regularizadas (izquierda) con  $t_0 = 0, 2 \text{ s}$  (arriba),  $t_0 = 2 \text{ s}$  (abajo). Fuentes regularizadas (derecha) con  $t_0 = 0, 2 \text{ s}$ ,  $p = 2$  (arriba),  $t_0 = 2 \text{ s}$ ,  $p = 4$  (abajo) para diferentes niveles de ruido.

5.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS
 

---

$\epsilon$	Errores Absolutos		Errores Relativos	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ $	$\ f - f_\delta\ /\ f\ $	$\ f - f_{\delta,\mu}\ /\ f\ $
0,01	0,1296	0,0084	0,1586	0,0103
0,03	0,4745	0,0127	0,5807	0,0156
0,05	0,6478	0,0143	0,7927	0,0176
0,08	1,1978	0,0178	1,4854	0,0219
0,10	1,2561	0,0185	1,5390	0,0225

Cuadro 5.4: Ejemplo 5.22: Errores absolutos y relativos de estimación asumiendo  $t_0 = 1$  s y  $p = 1$ .

La fuente (5.31) que se recupera en el Ejemplo 5.22 es de interés en diversos problemas de distintas características por las particularidades que esta función presenta. Si bien, es una función continua, tiene un punto donde no es derivable. Muchas veces la recuperación se dificulta en dichos puntos. Debido a esto, este tipo de funciones resulta también, ser un ejemplo habitual en los problemas de recuperación de fuentes, tanto en la teoría de señales [149, 190] como en problemas de transferencia de calor [288, 289].

Como se puede visualizar en los gráficos de la Figura 5.4 el operador de regularización, nuevamente, suaviza al operador inverso haciendo que la recuperación sea estable. La estimación de la fuente resulta estable para diferentes valores temporales de toma de medición  $t_0$  y para diferentes valores de  $p$ . Como es de esperarse, nuevamente, la estimación mejora notoriamente para valores más chicos de perturbación  $\epsilon$ .

En el Cuadro 5.4 se incluyen los errores de estimación que también muestran el buen desempeño del método. Los errores relativos varían de 15,86% a 153,90% para las fuentes sin regularizar y para las fuentes regularizadas el error relativo se encuentra entre 1,03% y 2,25%. Por ejemplo, para el caso  $\epsilon = 0,03$  el error relativo de la estimación de la fuente sin regularizar es de 58,07% y el error relativo que se obtiene luego de aplicar la estrategia de regularización explicada en este capítulo es

## 5.6. CONCLUSIONES

---

de 1,56 %.

**Observación 5.23** *Notar que los errores de aproximación de la fuente regularizada para los Ejemplos 5.20, 5.21 y 5.22 son considerables con respecto a los obtenidos en el Ejemplo 5.19. Esto resulta razonable frente al tamaño de los errores de recuperación que se obtienen al utilizar el operador inverso (sin aplicar el método de regularización).*

## 5.6. Conclusiones

En este capítulo se trata el problema inverso de identificar la fuente en una ecuación parabólica completa a partir de mediciones ruidosas. Se brinda una solución analítica para el problema de estimación y se muestra a partir de ésta que el problema está mal planteado, pues dicha solución no es estable. Con la finalidad de abordar este inconveniente, se define una familia de operadores de regularización diseñado específicamente para compensar el factor de inestabilidad en el operador inverso. Además, se incluye una regla de elección para los parámetros de regularización que se basa en el nivel de ruido de los datos y la suavidad de la fuente a identificar. Se demuestra que para la regla de elección de parámetros propuesta el método es estable. Se obtiene una cota para el error de estimación cometido que resulta ser óptima ya que es de tipo Hölder.

Se incluyen diversos ejemplos numéricos de recuperación de fuentes que pertenecen a diferentes espacios de Hilbert y se observa que en todos ellos se obtiene un buen desempeño del enfoque de regularización adoptado. Por otra parte, se comparan las fuentes recuperadas mediante el operador inverso con las obtenidas utilizando el operador de regularización y se concluye que el método de regularización propuesto, ofrece una mayor precisión en la estimación de las fuentes consideradas.



# Capítulo 6

## Un Problema con Interfaz

Los problemas de transferencia de calor en materiales multicapa o con interfaz sólido-sólido han sido muy estudiados en los últimos años debido a las múltiples y diferentes aplicaciones que se han encontrado en la ciencia y la ingeniería [63, 138, 145, 208, 297, 298]. Estos problemas tienen aplicaciones directas en distintas industrias, entre las más importantes, la metalúrgica [166], la tecnológica y electrónica [46], la automotriz [66], la aeroespacial [25] y la aviación [223].

El avance de la tecnología requiere materiales con propiedades térmicas, eléctricas, magnéticas, acústicas y ópticas particulares, debido a eso se han estudiado las propiedades en la interfaz de diferentes combinaciones de materiales. Entre las más analizadas se tienen las siguientes duplas: Al-Cu [294], Al-Si [270], Cu-Cu [290, 294], Cu-Si [290], Cu-Al [285], Si-Ge [269], Pb-Sn [105, 189], Pn-Sn [223], Pb-Al [166], Sn-Pb [225], Zn-Zn [195], Ti-Al [104].

Entre las diferentes propiedades en la interfaz, las que resultan de mayor interés en la bibliografía son: la tensión [294], la adhesión [284], la resistencia térmica [201, 290], la corrosión [223], la conductividad eléctrica [166, 263] y conductividad térmica [225], entre otras [117, 119].

## 6.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

Debido a la importancia y a la gran cantidad de aplicaciones de los materiales multicapa, se incluye en esta tesis un segundo problema directo que consiste en el proceso de transferencia de calor en una barra compuesta por dos segmentos consecutivos con interfaz sólido-sólido, embebida en un fluido (líquido o gaseoso). El problema puede considerarse como la transferencia de calor a través de un material de dos capas, donde el proceso de transferencia de calor ocurre en una sola dirección, perpendicular a las capas. Se obtiene una expresión para la solución analítica del problema sujeto a ciertas condiciones de borde. La solución analítica se obtiene mediante métodos de Fourier [96, 143].

Por otro lado, debido a que la expresión de la solución analítica hallada es muy compleja, se aborda numéricamente el problema de interés utilizando diferencias finitas [177, 184, 232] centradas en el espacio y hacia adelante en la variable temporal. La solución obtenida brinda información útil sobre los perfiles espacio-temporales de temperatura  $u(x, t)$ . Se imponen condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

### 6.1. Presentación del Problema

El problema a analizar puede ser considerado como el transporte de energía térmica en una barra de longitud  $L$  [m] y diámetro  $d$  [m] totalmente aislada en su superficie lateral, donde  $L \gg d$ . El proceso de difusión, resulta unidimensional. Se considera que la barra está construida con dos tramos consecutivos de materiales homogéneos (material  $A$  y material  $B$ ) ambos isótropos, por lo que los coeficientes de difusividad térmica  $\alpha_A^2, \alpha_B^2$  [m<sup>2</sup>/s] se suponen constantes. El tramo de la barra construida con el material  $A$  tiene una longitud  $l$  [m] y el tramo construido con el material  $B$  tiene una longitud  $L - l$  [m]. Por otra parte, se supone que la unión de ambos materiales es perfecta, por lo que no hay resistencia térmica en la interfaz.

## 6.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

El problema descrito en los párrafos anteriores se modeliza, en este caso, con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas de tipo parabólicas

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha_A^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_t(x, t) = \alpha_B^2 u_{xx}(x, t), & l < x < L, \quad t > 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Debido a que se desprecia la resistencia térmica, se pueden imponer condiciones de igualdad de temperatura y flujo en la interfaz. Es decir,

$$\begin{cases} u(x^+, t) = u(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \\ \kappa_B u_x(x^+, t) = \kappa_A u_x(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $\kappa_A$  y  $\kappa_B$  [**W/m °C**] representan los coeficientes de conductividad térmica de los materiales  $A$  y  $B$  respectivamente,

$$\begin{cases} u(l^-, t) = \lim_{x \rightarrow l^-} u(x, t), & t > 0, \\ u(l^+, t) = \lim_{x \rightarrow l^+} u(x, t), & t > 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Se supone además, que la temperatura en el borde izquierdo de la barra está controlada por una fuente a temperatura constante  $F$  [**°C**],

$$u(x, t) = F, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (6.4)$$

el borde derecho de la barra queda libre, en contacto con el fluido, dando lugar al fenómeno de convección, que se modela como

$$\kappa_B u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), \quad x = L, \quad t > 0, \quad (6.5)$$

donde  $h$  [**W/(m<sup>2</sup>°C)**] es el coeficiente de transferencia de calor por convección.



## 6.2. ESTADO ESTACIONARIO

**Teorema 6.1** Sean  $\kappa_A, \kappa_B, T_a, F, L, l, h \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $L > l$ . Dada la función  $u_e$  satisface  $u_e(\cdot) \in C^2((0, l))$  y  $u_e(\cdot) \in C^2((l, L))$ , el problema elíptico dado por

$$\begin{cases} u_e''(x) = 0, & 0 < x < l, \\ u_e''(x) = 0, & l < x < L, \\ u_e(x) = F, & x = 0, \\ \kappa_B u_e'(x) = -h(u_e(x) - T_a), & x = L, \\ u_e(x^+) = u_e(x^-), & x = l, \\ \kappa_B u_e'(x^+) = \kappa_A u_e'(x^-), & x = l, \end{cases} \quad (6.7)$$

tiene como solución

$$u_e(x) = \begin{cases} F + \frac{\kappa_B h(T_a - F)}{\eta} x, & 0 \leq x \leq l, \\ F + \frac{lh(\kappa_B - \kappa_A)(T_a - F)}{\eta} + \frac{\kappa_A h(T_a - F)}{\eta} x, & l < x \leq L, \end{cases} \quad (6.8)$$

donde

$$\eta = \kappa_A \kappa_B + \kappa_A h L + (\kappa_B - \kappa_A) h l. \quad (6.9)$$

*Demostración:* Debido a que la derivada segunda de la función  $u_e$  se anula en los intervalos  $(0, l)$  y  $(l, L)$  resulta que dicha función es lineal en cada uno de los intervalos considerados.

Por lo tanto, la función  $u_e$  resulta ser lineal a trozos. Es decir,

$$\begin{cases} u_e(x) = A + Bx, & 0 < x < l, \\ u_e(x) = C + Dx, & l < x < L, \end{cases}$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son coeficientes constantes que dependen de los parámetros del problema y se determinan a partir de las condiciones de borde y de interfaz del

## 6.2. ESTADO ESTACIONARIO

sistema (6.7).

Utilizando estas condiciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son las constantes  $A, B, C$  y  $D$ .

$$\begin{cases} A = F, \\ \kappa_B D = -h(C + DL - T_a), \\ A + Bl = C + Dl, \\ \kappa_A B = \kappa_B D. \end{cases} \quad (6.10)$$

El expresión (6.10) es un sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, es decir  $4 \times 4$ , que tiene solución única dada por

$$\begin{cases} A = F, \\ B = \frac{\kappa_B h (T_a - F)}{\eta}, \\ C = F + \frac{lh(\kappa_B - \kappa_A)(T_a - F)}{\eta}, \\ D = \frac{\kappa_A h (T_a - F)}{\eta}, \end{cases}$$

donde  $\eta$  viene dado por (6.9). Tal como se quería demostrar.  $\square$

**Observación 6.2** *En el caso particular donde la interfaz se encuentra en el medio de la barra ( $l = \frac{L}{2}$ ) la temperatura en el borde derecho de la misma ( $u_e(L)$ ) está dada por*

$$u_e(L) = F + \frac{\frac{L}{2}h(T_a - F)(\kappa_A + \kappa_B)}{\kappa_A\kappa_B + \frac{L}{2}h(\kappa_A + \kappa_B)}.$$

*Debido a que en este caso,  $u_e(L)$  depende de la suma y el producto de las conductividades térmicas, la temperatura en la punta derecha de la barra no cambia si se invierte el orden de los materiales.*

## 6.2. ESTADO ESTACIONARIO

---

**Observación 6.3** *La solución (6.8)-(6.9) es consistente, pues si se considera  $\kappa = \kappa_A = \kappa_B$  (es decir que los materiales A y B son iguales) se obtiene*

$$u_e(x) = F + \frac{h(T_a - F)}{\varsigma}x, \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde

$$\varsigma = \kappa + hL.$$

*Esta solución coincide con la que se obtiene en un problema estacionario de transferencia de calor en una barra homogénea, considerando las mismas condiciones de borde que en (6.7). Ver, por ejemplo [260].*

### 6.2.2. Ejemplos Numéricos

En esta subsección se abordan dos ejemplos numéricos con diferentes materiales y distintas ubicaciones para la posición de interfaz. Esto permite visualizar como cambia el perfil estacionario de temperaturas al modificar el punto de contacto para diferentes materiales.

Se considera una barra de longitud  $L = 1 \text{ m}$  compuesta por dos materiales diferentes, consecutivos, en contacto. Los datos utilizados para los gráficos son:  $F = 100^\circ\text{C}$  y  $T_a = 25^\circ\text{C}$ . El coeficiente de transferencia de calor ( $h$ ) se determina según lo explicado en el Capítulo 4. Las conductividades térmicas para los materiales considerados se encuentran en el Cuadro 2.2.

**Ejemplo 6.4** *En este ejemplo se considera el perfil espacial estacionario de temperaturas para distintas duplas de materiales y diferentes posiciones de puntos de contacto.*

En el gráfico de la izquierda de la Figura 6.2 se visualizan los perfiles estacionarios

## 6.2. ESTADO ESTACIONARIO

de temperatura para barras conductoras de Cobre-Aluminio y Aluminio-Cobre para  $l = 0,3 m$  y  $l = 0,5 m$ . Se observa que si el punto de contacto se encuentra en el medio de la barra, entonces la ubicación de los dos materiales a izquierda o a derecha no influye en el valor de la temperatura estacionaria que se alcanza en el borde derecho; esto no ocurre si el punto de contacto no está exactamente en el medio. Esto se corresponde directamente con lo comentado en la Observación 6.2. Por ejemplo, para el la barra de Aluminio-Cobre ( $l = 0,3 m$ ) la temperatura estacionaria en el borde derecho de la misma es  $u_e(L) = 97,6^\circ C$  y para la barra de Cobre-Alumino ( $l = 0,3 m$ ) se tiene que  $u_e(L) = 96,9^\circ C$ . Sin embargo, para los casos de las barras Aluminio-Cobre ( $l = 0,5 m$ ) y Cobre-Alumino ( $l = 0,5 m$ ) la temperatura estacionaria en el borde derecho es la misma y es aproximadamente  $u_e(L) = 97,4^\circ C$ .

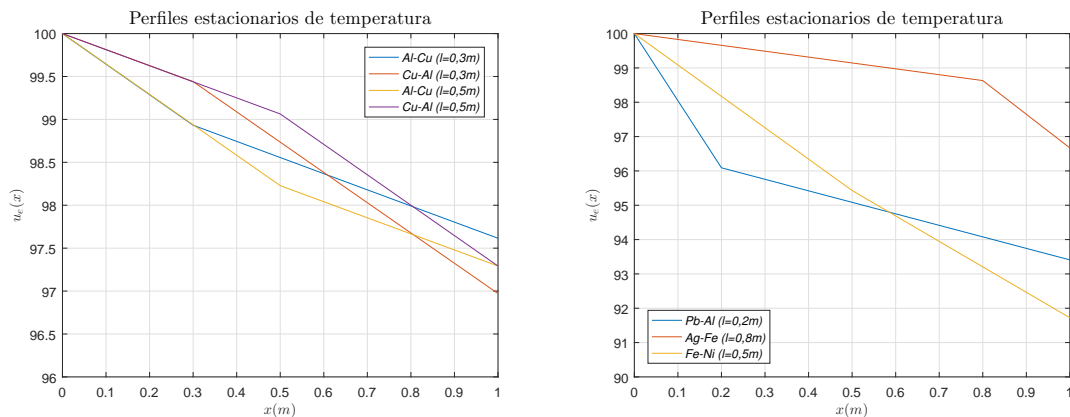


Figura 6.2: Ejemplo 6.4: Perfiles estacionarios de temperatura para diferentes materiales y distintos puntos de contacto.

En el gráfico de la derecha de la Figura 6.2 se visualizan los perfiles estacionarios de temperatura para barras de Plomo-Aluminio, Plata-Hierro y Hierro-Niquel para  $l = 0,2 m$ ,  $l = 0,8 m$  y  $l = 0,5 m$  respectivamente. Los casos utilizados se corresponden con tres situaciones bien diferenciadas, éstas son:  $\kappa_A < \kappa_B$  (Plomo-Aluminio),  $\kappa_A > \kappa_B$  (Plata-Hierro) y  $\kappa_A \cong \kappa_B$  (Hierro-Niquel) (el símbolo  $\cong$  indica que las conductividades térmicas son similares desde el punto de vista físico). En este gráfico se



## 6.2. ESTADO ESTACIONARIO

puede apreciar cómo se relacionan las pendientes de las rectas dependiendo de cada situación particular. Si se observan las pendientes en módulo, se ve que para el caso de la barra de Plomo-Aluminio ( $l = 0,2 m$ ) la pendiente cambia de mayor a menor, para el caso de la barra de Plata-Hierro ( $l = 0,8 m$ ) la pendiente cambia de menor a mayor y para el caso de la barra de Hierro-Niquel ( $l = 0,5 m$ ) las pendientes son muy semejantes.

**Ejemplo 6.5** En este ejemplo se considera el perfil espacial estacionario de temperaturas para barras de Plomo-Material donde  $l = 0,6 m$  y Material-Plata donde  $l = 0,4 m$  para diferentes materiales.

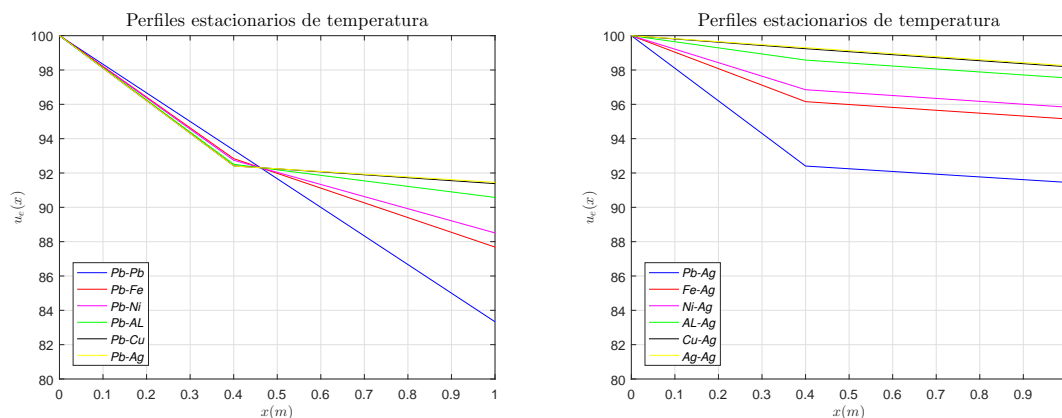


Figura 6.3: Ejemplo 6.5: Perfiles estacionarios de temperatura para barras de Plomo-Material (izquierda) y Material-Plata (derecha) con diferentes materiales.

En el gráfico de la izquierda de la Figura 6.3 se visualizan los perfiles estacionarios de temperatura para barras conductoras de Plomo-Material ( $l = 0,4 m$ ) para distintos materiales. Se observa que en el primer tramo los perfiles estacionarios de temperatura son muy parecidos, eso se relaciona con que el primer material es el mismo para las diferentes barras. Los segundos tramos se diferencian en relación con la conductividad térmica de cada material; pues, materiales más conductivos alcanzan mayor temperatura. Observar, por ejemplo, que para el caso Plomo-Hierro la temperatura estacionaria en el borde derecho de la barra es  $u_e(L) = 87,6^\circ C$  y

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

---

para la barra de Plomo-Cobre se tiene que  $u_e(L) = 91,7^\circ C$ .

En el gráfico de la derecha de la Figura 6.3 se muestran los perfiles estacionarios de temperatura para barras conductoras de Material-Plata ( $l = 0,4 m$ ) para distintos materiales. Se observa como se relacionan las pendientes de las rectas en cada caso. El segundo tramo para las distintas barras son rectas paralelas; eso se debe a que el segundo material es el mismo para los diferentes casos. Nuevamente se visualizan diferencias relacionadas con la conductividad térmica de los materiales. Observar, por ejemplo, que para el caso Plomo-Plata la temperatura estacionaria en el borde derecho de la barra es  $u_e(L) = 91,6^\circ C$  y para la barra de Cobre-Plata se tiene que  $u_e(L) = 98,2^\circ C$ . Esto se corresponde con los resultados teóricos dado que materiales más conductivos conducen el calor con mayor facilidad y por tal motivo alcanzan mayor temperatura.

### 6.3. Estado Evolutivo

En este apartado se aborda el problema transitorio o evolutivo descrito y esquematizado en la Sección 6.1 dado por las Ecuaciones (6.1)-(6.6). Luego de algunos resultados auxiliares se obtiene uno particular que brinda una expresión analítica para la solución transitoria o evolutiva.

Además, se obtiene una solución numérica, para el problema de interés, mediante diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Por otro lado, se discuten las condiciones necesarias para la estabilidad y convergencia de las soluciones numéricas.

Se incluyen experimentos numéricos con diferentes duplas de materiales y distintas ubicaciones del punto de interfaz. Estos experimentos brindan información de utilidad sobre los perfiles espacio-temporales de temperatura.

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

#### 6.3.1. Resultados Auxiliares

En esta subsección se enuncian y se demuestran algunos resultados auxiliares que son de utilidad para encontrar una expresión analítica de la solución del problema definido y esquematizado en la Sección 6.1.

**Lema 6.6** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  y  $g : D \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = cx + \arctg\left(\frac{tg(ax)}{b}\right)$ .

Entonces la imagen de la función  $g$  contiene al conjunto de los números reales positivos. Es decir,  $\mathbb{R}^+ \subseteq \text{Im}(g)$ .

*Demostración:* Basta con observar que  $\arctg\left(\frac{tg(ax)}{b}\right)$  es una función real acotada. Entonces al sumarle el término  $cx$  con  $c$  positivo, dado que  $cx$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito todos los reales positivos pertenecen al conjunto imagen de  $g$ .  $\square$

**Ejemplo 6.7** En la figura 6.4 se puede apreciar gráficamente la imagen de la función  $g$  para dos casos particulares.

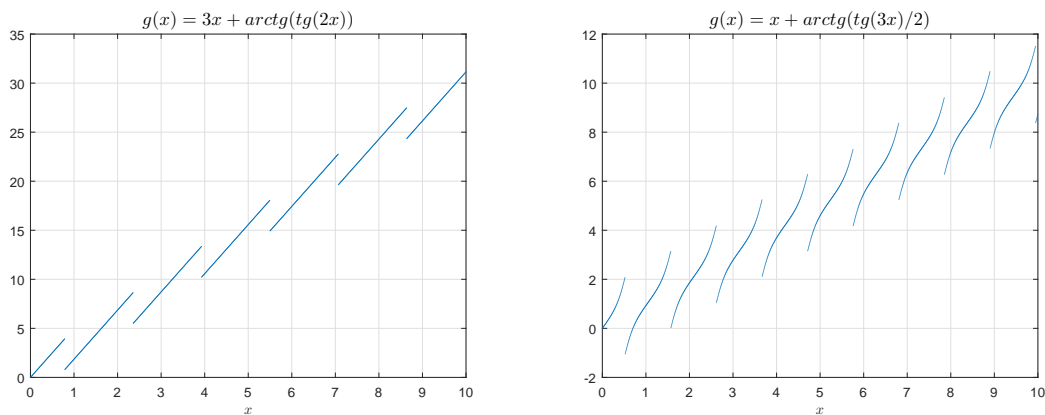


Figura 6.4: Casos particulares del Lema 6.6.

En el gráfico de la izquierda de la Figura 6.4 se observa que la imagen de la función  $g$  es el conjunto de los números reales positivos. En el gráfico de la derecha se visualiza que el conjunto imagen contiene a los números reales positivos ya que además, toma una parte negativa.

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

**Corolario 6.8** Sean  $a, b, c, m \in \mathbb{R}^+$  y  $g : D \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = cx + \arctg\left(\frac{tg(ax)}{b}\right)$ . Entonces existe un conjunto infinito numerable de soluciones positivas de la siguiente ecuación

$$tg(g(x)) = -mx. \quad (6.11)$$

*Demostración:* Debido al Lema 6.6 se sabe que la función  $g(x)$  tiene como imagen un conjunto que contiene a los números reales positivos. Esto implica que las funciones  $tg(g(x))$  y  $-mx$  se intersecan infinitas veces. Luego, se deduce que la Ecuación (6.11) tiene un conjunto infinito numerable de soluciones positivas. Tal como se quería demostrar.  $\square$

**Ejemplo 6.9** En la Figura 6.5 se aprecian gráficamente algunas de las infinitas soluciones positivas de la Ecuación (6.11) para dos casos particulares con diferentes parámetros.

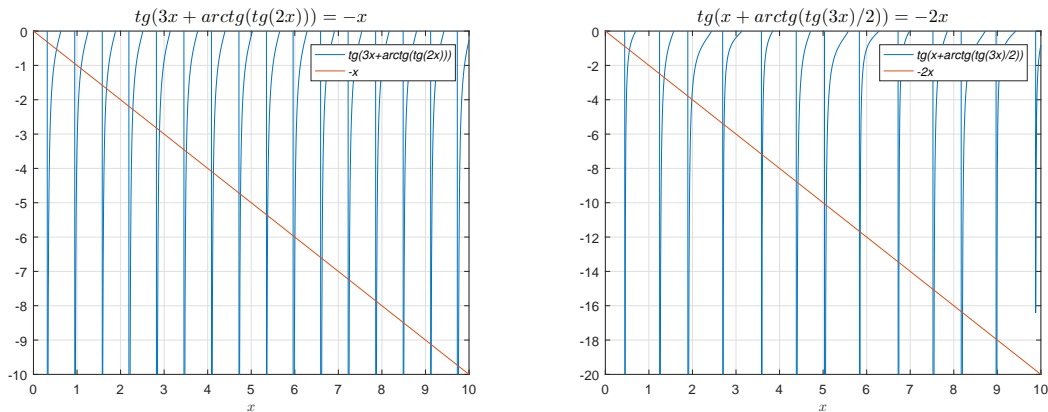


Figura 6.5: Casos particulares de la Ecuación (6.11).

**Observación 6.10** Por el Corolario 6.8 se sabe que la Ecuación (6.11) tiene infinitas soluciones positivas, pero ésta es una ecuación trascendente y las soluciones deben hallarse numéricamente para cada caso particular.

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

El Cuadro 6.1 tiene, a manera de ejemplo, las primeras 10 soluciones positivas de la ecuación

$$tg \left( x + \arctg \left( \frac{tg(2x)}{3} \right) \right) = -x. \quad (6.12)$$

utilizando tres dígitos decimales de precisión.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
0,801	1,855	2,570	3,846	4,833	5,661	7,929	8,789	10,102	11,049

Cuadro 6.1: Primeras 10 soluciones positivas de la Ecuación (6.12).

**Teorema 6.11** Sean  $\alpha, \kappa, \kappa_B, l, L \in \mathbb{R}^+$ . Existe un conjunto infinito numerable de soluciones positivas de la ecuación

$$tg(xL) = \frac{-\kappa_B Ax - hB}{hA - \kappa_B Bx}, \quad (6.13)$$

donde

$$A = \kappa \alpha \cos(\alpha l x) \cos(lx) + \text{sen}(\alpha l x) \text{sen}(lx) \quad (6.14)$$

y

$$B = \text{sen}(\alpha l x) \cos(lx) - \kappa \alpha \cos(\alpha l x) \text{sen}(lx). \quad (6.15)$$

*Demostración:* Se reemplazan las expresiones (6.14),(6.15) en (6.13). Se multiplica y se divide por  $\cos(lx)$  y  $\cos(\alpha l x)$ , se obtiene

$$tg(xL) = \frac{-\kappa_B x [\kappa \alpha + tg(\alpha l x) tg(lx)] - h [tg(\alpha l x) - \kappa \alpha tg(lx)]}{h [\kappa \alpha + tg(\alpha l x) tg(lx)] - \kappa_B x [tg(\alpha l x) - \kappa \alpha tg(lx)]}, \quad (6.16)$$

se manipula algebraicamente la expresión (6.16) y se tiene que

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = \frac{tg(\alpha l x) - \kappa \alpha tg(lx) + [\kappa \alpha + tg(\alpha l x) tg(lx)] tg(Lx)}{[\kappa \alpha + tg(\alpha l x) tg(lx)] - tg(Lx) [tg(\alpha l x) - \kappa \alpha tg(lx)]}, \quad (6.17)$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

operando (6.17) resulta que

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = \frac{tg(\alpha x) [1 + tg(lx)tg(Lx)] + \kappa\alpha [tg(Lx) - tg(lx)]}{\kappa\alpha [1 + tg(lx)tg(Lx)] - tg(\alpha x) [tg(Lx) - tg(lx)]}, \quad (6.18)$$

se utiliza en (6.18) la relación

$$tg(\theta_1) \pm tg(\theta_2) = tg(\theta_1 \pm \theta_2) [1 \mp tg(\theta_1)tg(\theta_2)] \quad (6.19)$$

y entonces

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = \frac{tg(\alpha x) + \kappa\alpha tg((L-l)x)}{\kappa\alpha - tg(\alpha x)tg((L-l)x)}. \quad (6.20)$$

Se multiplica y se divide a (6.20) por  $\kappa\alpha$  y se obtiene

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = \frac{\frac{tg(\alpha x)}{\kappa\alpha} + tg((L-l)x)}{1 - \frac{tg(\alpha x)}{\kappa\alpha} tg((L-l)x)},$$

equivalentemente

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = \frac{tg\left(\arctg\left(\frac{tg(\alpha x)}{\kappa\alpha}\right)\right) + tg((L-l)x)}{1 - tg\left(\arctg\left(\frac{tg(\alpha x)}{\kappa\alpha}\right)\right) tg((L-l)x)}, \quad (6.21)$$

se utiliza en (6.21) la relación (6.19) y se obtiene

$$\frac{-\kappa_B x}{h} = tg\left(\arctg\left(\frac{tg(\alpha x)}{\kappa\alpha}\right) + (L-l)x\right).$$

Debido al Corolario 6.8 queda probado el Teorema 6.11.  $\square$

**Teorema 6.12** *Dados  $\kappa_A, \kappa_B, \alpha_A^2, \alpha_B^2, h, L, l \in \mathbb{R}^+$ ,  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$ . Sean las funciones  $X, T$  que satisfacen  $X \in C^2((0, l))$ ,  $X \in C^2((l, L))$  y  $T \in C^1((0, \infty))$ , entonces el sistema acoplado*

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

$$\left\{ \begin{array}{ll} X''(x) - \zeta_1 X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X''(x) - \zeta_2 X(x) = 0, & l < x < L, \\ T'(t) - \zeta_1 \alpha_A^2 T(t) = T'(t) - \zeta_2 \alpha_B^2 T(t) = 0, & t > 0, \\ X(x) = 0, & x = 0, \\ \kappa_B X(x) = -hX(x), & x = L, \\ X(x^+) = X(x^-), & x = l, \\ \kappa_B X'(x^+) = \kappa_A X'(x^-), & x = l, \end{array} \right. \quad (6.22)$$

tiene como solución

$$\left\{ \begin{array}{ll} X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\alpha \lambda_n x), & 0 \leq x \leq l, \\ X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa \alpha \cos(\alpha \lambda_n l) \text{sen}(\lambda_n(x-l)) + \text{sen}(\alpha \lambda_n l) \cos(\lambda_n(x-l)), & l < x \leq L, \\ T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C e^{-\lambda_n^2 \alpha_B^2 t}, & t > 0, \end{array} \right. \quad (6.23)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa = \frac{\kappa_A}{\kappa_B}$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_B^2}{\alpha_A^2}} = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$  y  $\lambda_n$  son las soluciones positivas de la Ecuación (6.13)-(6.15).

*Demostración:* La parte espacial del sistema (6.22) depende de las variables de separación  $\zeta_i$  con  $i = 1, 2$ . Como se vio en el Lema 2.5 el problema da solución distinta de la trivial si los autovalores son negativos. Es decir, existe  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\zeta_i = -\lambda_i^2$  con  $i = 1, 2$  de forma tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} X(x) = A_1 \text{sen}(\lambda_1 x) + B_1 \cos(\lambda_1 x), & 0 \leq x \leq l, \\ X(x) = A_2 \text{sen}(\lambda_2 x) + B_2 \cos(\lambda_2 x), & l < x \leq L. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

De la parte temporal del sistema (6.22) se obtiene que  $\lambda_1^2 \alpha_A^2 = \lambda_2^2 \alpha_B^2$  o equivalente-

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

---

mente  $\lambda_1 = \alpha\lambda_2$  donde  $\alpha = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$ . Luego

$$T = Ce^{-(\alpha\lambda_2)^2 \alpha_A^2 t} = Ce^{-\lambda_2^2 \alpha_B^2 t}, \quad t > 0, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (6.25)$$

utilizando (6.25) en (6.24), se obtiene

$$\begin{cases} X(x) = A_1 \operatorname{sen}(\alpha\lambda_2 x) + B_1 \operatorname{cos}(\alpha\lambda_2 x), & 0 \leq x \leq l, \\ X(x) = A_2 \operatorname{sen}(\lambda_2 x) + B_2 \operatorname{cos}(\lambda_2 x), & l < x \leq L. \end{cases} \quad (6.26)$$

Debido a la condición  $X(0) = 0$  sigue que  $B_1 = 0$  y como la primera ecuación de la expresión (6.26) vale para cualquier valor de  $A_1$  se considera, sin pérdida de generalidad,  $A_1 = 1$ .

Para simplificar la notación se sustituye  $\lambda_2 = \lambda$ ,  $A = A_2$  y  $B = B_2$  con lo que el sistema (6.26) se puede reescribir

$$\begin{cases} X(x) = \operatorname{sen}(\alpha\lambda x), & 0 \leq x \leq l, \\ X(x) = A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \operatorname{cos}(\lambda x), & l < x \leq L. \end{cases} \quad (6.27)$$

Por otra parte, utilizando la condición  $\kappa_B X'(L) = -hX(L)$  se obtiene que  $\lambda$  es la solución de la ecuación

$$\operatorname{tg}(xL) = \frac{-\kappa_B A x - hB}{hA - \kappa_B B x}, \quad (6.28)$$

donde  $A$  y  $B$  se determinan a partir de las condiciones de interfaz dadas por

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha\lambda l) = A \operatorname{sen}(\lambda l) + B \operatorname{cos}(\lambda l), \\ \kappa \alpha \operatorname{cos}(\alpha\lambda l) = A \operatorname{cos}(\lambda l) + B \operatorname{sen}(\lambda l), \end{cases} \quad (6.29)$$

donde  $\kappa = \frac{\kappa_A}{\kappa_B}$ . Se resuelve el sistema (6.29) y se obtienen los valores de  $A$  y  $B$  cuyas expresiones son



### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

$$\begin{cases} A = \kappa \alpha \cos(\alpha l \lambda) \cos(l \lambda) + \operatorname{sen}(\alpha l \lambda) \operatorname{sen}(l \lambda), \\ B = \operatorname{sen}(\alpha l \lambda) \cos(l \lambda) - \kappa \alpha \cos(\alpha l \lambda) \operatorname{sen}(l \lambda). \end{cases} \quad (6.30)$$

Por el Teorema 6.11 se sabe que la ecuación (6.28) donde  $A$  y  $B$  vienen dados por la expresión (6.30), tiene un conjunto infinito numerable de soluciones. Es decir,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ . Debido a esto se denota  $\lambda_n = \lambda$  y se reemplaza (6.30) en (6.27). Se utiliza el principio de superposición [47] con lo que se obtiene (6.23) tal como se quería demostrar.  $\square$

#### 6.3.2. Solución Analítica

En esta subsección se da una expresión analítica para la solución del problema de interés. Éste fue presentado y esquematizado en la Sección 6.1, su formulación matemática viene dada por un sistema de tipo parabólico formado con las ecuaciones (6.1)-(6.6).

**Teorema 6.13** Sean  $\alpha_A^2, \alpha_B^2, \kappa_A, \kappa_B, F, h, T_a, L, l \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $L > l$ . Dada la función  $u$  que satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, l))$ ,  $u(\cdot, t) \in C^2((l, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , el problema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha_A^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_t(x, t) = \alpha_B^2 u_{xx}(x, t), & l < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, t) = F, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa_B u_x(x, t) = -h(u(x, t) - T_a), & x = L, \quad t > 0, \\ u(x^+, t) = u(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \\ \kappa_B u_x(x^+, t) = \kappa_A u_x(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \\ u(x, t) = T_a, & 0 < x < L, \quad t = 0, \end{cases} \quad (6.31)$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

tiene como solución

$$u(x, t) = u_e(x) + \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0,$$

donde

$$u_e(x) = \begin{cases} F + \frac{\kappa_B h (T_a - F)}{\eta} x, & 0 \leq x \leq l, \\ F + \frac{lh(\kappa_B - \kappa_A)(T_a - F)}{\eta} + \frac{\kappa_A h (T_a - F)}{\eta} x, & l < x \leq L, \end{cases}$$

con

$$\eta = \kappa_A \kappa_B + \kappa_A h L + (\kappa_B - \kappa_A) h l$$

y  $\varphi(x, t) = X(x)T(t)$  donde  $X(\cdot)$ ,  $T(\cdot)$  están dados por

$$\begin{cases} X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\alpha \lambda_n x), & 0 \leq x \leq l, \\ X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa \alpha \cos(\alpha \lambda_n l) \text{sen}(\lambda_n(x-l)) + \text{sen}(\alpha \lambda_n l) \cos(\lambda_n(x-l)), & l < x \leq L, \\ T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C e^{-\lambda_n^2 \alpha_B^2 t}, & t > 0, \end{cases} \quad (6.32)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$ ,  $\lambda_n$  son las soluciones positivas de la Ecuación (6.13)-(6.15) y  $C$  viene dado por

$$C = 2(T_a - F) \left\{ \frac{1 - \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\kappa_B h}{\alpha \lambda_n} \text{sen}(\alpha \lambda_n l) + \kappa_A (\kappa_B + h(L-l)) \cos(\alpha \lambda_n l) \right]}{\alpha \lambda_n l - \cos(\alpha \lambda_n l) \text{sen}(\alpha \lambda_n l)} \right\}. \quad (6.33)$$

*Demostración:* Se considera la siguiente sustitución  $u(x, t) = u_e(x) + \varphi(x, t)$ , la cual se reemplaza en el sistema (6.31) y se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones de tipo parabólico con las condiciones que debe satisfacer la función  $\varphi(x, t)$ .

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_t(x, t) = \alpha_A^2 \varphi_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \varphi_t(x, t) = \alpha_B^2 \varphi_{xx}(x, t), & l < x < L, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa_B \varphi_x(x, t) = -h \varphi(x, t), & x = L, \quad t > 0, \\ \varphi(x^+, t) = \varphi(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \\ \kappa_B \varphi_x(x^+, t) = \kappa_A \varphi_x(x^-, t), & x = l, \quad t > 0, \\ \varphi(x, t) = T_a - u_e(x), & 0 < x < L, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.34)$$

Se utiliza separación de variables [47], es decir, se supone que existen funciones  $X(\cdot), T(\cdot)$  que satisfacen  $X \in C^2((0, l))$ ,  $X \in C^2((l, L))$  y  $T \in C^1((0, \infty))$  tales que  $\varphi(x, t) = X(x)T(t)$ . Se reemplaza en el sistema (6.34) y se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} X(x)T'(t) = \alpha_A^2 X''(x)T(t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ X(x)T'(t) = \alpha_B^2 X''(x)T(t), & l < x < L, \quad t > 0, \\ X(x)T(t) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa_B X'(x)T(t) = -h X(x)T(t), & x = L, \quad t > 0, \\ X(x^+)T(t) = X(x^-)T(t), & x = l, \quad t > 0, \\ \kappa_B X'(x^+)T(t) = \kappa_A X'(x^-)T(t), & x = l, \quad t > 0, \\ X(x)T(t) = T_a - u_e(x), & 0 < x < L, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.35)$$

De las primeras dos ecuaciones del sistema (6.35) se deduce que existen  $\zeta_i \in \mathbb{R}$  con  $i = 1, 2$  tal que

$$\zeta_i = \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \implies \left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \zeta_i X(x) = 0, \\ T'(t) - \zeta_i \alpha^2 T(t) = 0. \end{array} \right.$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

Es decir,

$$\zeta_1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \implies \begin{cases} X''(x) - \zeta_1 X(x) = 0, \\ T'(t) - \zeta_1 \alpha^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

y

$$\zeta_2 = \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \implies \begin{cases} X''(x) - \zeta_2 X(x) = 0, \\ T'(t) - \zeta_2 \alpha^2 T(t) = 0. \end{cases} \quad (6.37)$$

Utilizando las Ecuaciones dadas por la expresiones (6.36)-(6.37) en el sistema (6.34) se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} X''(x) - \zeta_1 X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X''(x) - \zeta_2 X(x) = 0, & l < x < L, \\ T'(t) - \zeta_1 \alpha_A^2 T(t) = T'(t) - \zeta_2 \alpha_B^2 T(t) = 0, & t > 0, \\ X(x) = 0, & x = 0, \quad t > 0, \\ \kappa_B X'(x) = -h X(x), & x = L, \quad t > 0, \\ X(x^+) = X(x^-), & x = l, \quad t > 0, \\ \kappa_B X'(x^+) = \kappa_A X'(x^-), & x = l, \quad t > 0, \\ X(x)T(t) = T_a - u_e(x), & 0 < x < L, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.38)$$

Por el Teorema 6.12 la solución del sistema (6.38) viene dada por el conjunto de ecuaciones (6.32) donde el parámetro  $C$  se determina mediante la condición inicial.

Es decir, se utiliza

$$X(x)T(t) = T_a - u_e(x), \quad 0 < x < l, \quad t = 0 \quad (6.39)$$

o

$$X(x)T(t) = T_a - u_e(x), \quad l < x < L, \quad t = 0. \quad (6.40)$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

Si se toma, por caso, (6.39) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \operatorname{sen}(\alpha \lambda_n x) = (T_a - F) \left[ 1 - \frac{\kappa_B h}{\eta} x \right].$$

De donde se deduce que  $C$  representa los coeficientes del desarrollo en serie de funciones propias de la función  $(T_a - F) \left[ 1 - \frac{\kappa_B h}{\eta} x \right]$  y por definición [47] se determinan según

$$C = \frac{\int_0^l (T_a - F) \left[ 1 - \frac{\kappa_B h}{\eta} x \right] \operatorname{sen}(\alpha \lambda_n x)}{\int_0^l \operatorname{sen}^2(\alpha \lambda_n x)} dx, \quad (6.41)$$

luego de integrar por partes (6.41) se obtiene (6.33). Con esta última observación se concluye la prueba.  $\square$

**Observación 6.14** Al tomar  $\kappa_C = \kappa_A = \kappa_B$  y  $\alpha_M^2 = \alpha_A^2 = \alpha_B^2$  (es decir que los materiales  $A$  y  $B$  son iguales) se obtiene

$$u_e(x) = F + \frac{h(T_a - F)}{\eta} x, \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde  $\eta$  se reduce a  $\eta = \kappa_C + hL$ . Además,  $\alpha = \kappa = 1$  lo que implica que usando la relación

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_1),$$

se tiene que  $X(\cdot)$  y  $T(\cdot)$  se reescriben como

$$\begin{cases} X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\lambda_n x), & 0 \leq x \leq L, \\ T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C e^{-\lambda_n^2 \alpha_M^2 t}, & t > 0, \end{cases}$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

---

donde  $C$  para este caso viene dado por

$$C = \frac{2(T_a - F)}{\lambda_n} \frac{h}{Lh + \kappa_C \cos^2(\lambda_n L)}.$$

Por último, los autovalores  $\lambda_n$  son las infinitas soluciones positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg}(xL) = -\frac{\kappa_C}{h}x.$$

Resulta entonces que la solución del Teorema 6.13 es consistente, pues para el caso  $\kappa_C = \kappa_A = \kappa_B$ ,  $\alpha_M^2 = \alpha_A^2 = \alpha_B^2$  coincide con la que se obtiene en un problema de transferencia de calor en una barra homogénea considerando las mismas condiciones de borde que en (6.31). Ver, por ejemplo [260].

#### 6.3.3. Solución Numérica

Debido a que la expresión analítica dada en el Teorema 6.13 es muy difícil de abordar, se trata numéricamente, mediante diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia delante en la variable temporal, el problema de interés. Más detalles sobre el método numérico pueden verse en el Apéndice A.

Para ello se define una malla bidimensional similar a la propuesta en 2.14 pero en ésta se tiene en cuenta la interfaz. Es decir,

$$\mathcal{P} = \{(x_i, t_j) / i = 1, 2, \dots, N_L; j = 1, 2, \dots, M; x_i \in \mathcal{P}_x, t_j \in \mathcal{P}_t\},$$

donde

$$\mathcal{P}_x = \begin{cases} \{x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{N_L}, x_i = (i-1)\Delta x, i = 1, \dots, N_L\}, \\ \{x_{N_L} < x_{N_L+1} < \dots < x_i < \dots < x_{N_L}, x_i = (i-1)\Delta x, i = N_L, \dots, N_L\} \end{cases}$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

y

$$\mathcal{P}_t = \{t_1 < \cdots < t_j < \cdots < t_M, \quad t_j = (j-1)\Delta t, \quad j = 1, \dots, M\}.$$

Específicamente  $\mathcal{P}_x$  es la partición asociada a la variable espacial  $x$ ,  $\mathcal{P}_t$  la correspondiente partición asociada a la variable temporal  $t$ .  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  son los pasos de discretización espacial y temporal respectivamente, estos se determinan numéricamente y se definen en una malla equidistante como  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta t = t_i - t_{j-1}$ . El siguiente resultado permite ver la forma general de la discretización por diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en el tiempo de nuestro problema particular dado por el sistema (6.31).

**Lema 6.15** Sean  $\alpha_A^2, \alpha_B^2, \kappa_A, \kappa_B, F, h, T_a, L, l \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$  y  $L > l$ . Dada la función  $u$  que satisface  $u(\cdot, t) \in C^2((0, l))$ ,  $u(\cdot, t) \in C^2((l, L))$  y  $u(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$ , la discretización del problema parabólico dado en (6.31) utilizando diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia delante en la variable temporal tiene la siguiente expresión

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i,j+1} = \tau_1 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1 - 2\tau_1) u_{i,j}, & i = 2, \dots, N_l - 1, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j+1} = \tau_2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1 - 2\tau_2) u_{i,j}, & i = N_l + 1, \dots, N_L - 1, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = F, & i = 1, \quad j = 1, \dots, M, \\ u_{i,j} = \frac{h\Delta x T_a + \kappa_B u_{i-1,j}}{\kappa_B + h\Delta x}, & i = N_L, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = \frac{\kappa_B u_{i+1,j} + \kappa_A u_{i-1,j}}{\kappa_A + \kappa_B}, & i = N_l, \quad j = 2, \dots, M, \\ u_{i,j} = T_a, & i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \end{array} \right. \quad (6.42)$$

donde  $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$  y

$$\tau_1 = \frac{\alpha_A^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \tau_2 = \frac{\alpha_B^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (6.43)$$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

---

*Demostración:* Solo basta observar que según lo desarrollado en el Apéndice A, se tiene que

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}, \quad u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (6.44)$$

Se reemplazan las expresiones (6.44) en el sistema (6.31) y se obtiene (6.42)-(6.43) tal como se quería demostrar.  $\square$

**Lema 6.16** *Se puede garantizar para el problema algebraico (6.42) una precisión de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio.*

*Demostración:* La demostración de este resultado surge de manera inmediata debido a la Observación A.4 realizada en el Apéndice A.  $\square$

**Lema 6.17** *Las soluciones numéricas del problema discreto (6.42) obtenidas mediante diferencias finitas centradas en la variable espacial y hacia delante en la variable temporal resultan estables y convergentes si*

$$\text{máx} \{ \alpha_A^2, \alpha_B^2 \} < \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t}. \quad (6.45)$$

*Demostración:* Según [177] las soluciones numéricas del problema (6.42) son estables y convergentes si

$$\tau_1, \tau_2 < \frac{1}{2},$$

equivalentemente

$$\text{máx} \{ \tau_1, \tau_2 \} < \frac{1}{2}. \quad (6.46)$$

Se reemplazan las Ecuaciones (6.43) en (6.46) y se obtiene (6.45). Tal como se quería probar.  $\square$



### 6.3.4. Ejemplos Numéricos

En esta subsección se consideran dos ejemplos numéricos para el problema (6.42) donde el fluido disipativo es aire. Se grafican los perfiles temporales de temperatura en la interfaz y en el borde derecho de la barra. También se grafican los perfiles espaciales de temperatura para diferentes instantes de tiempo. Además, se obtienen distribuciones donde se visualizan los perfiles espacio-temporales para diferentes combinaciones de materiales.

Los pasos de discretización (espacial y temporal) y los parámetros físicos utilizados en las simulaciones numéricas son:  $\Delta x = 0,01\text{ m}$ ;  $\Delta t = 0,1\text{ s}$ ;  $L = 1\text{ m}$ ;  $F = 100^\circ\text{C}$ ;  $T_a = 25^\circ\text{C}$ . El coeficiente de transferencia de calor ( $h$ ) se determina según lo explicado en el Capítulo 4. Las propiedades térmicas del fluido se obtienen de [51]. Los coeficientes de conductividad y difusividad térmica para los diferentes materiales considerados fueron tomados del Cuadro 2.2.

**Ejemplo 6.18** *En este ejemplo se considera el proceso de difusión para barras de Plomo-Material utilizando diferentes materiales. La posición de interfaz elegida es  $l = 0,6\text{ m}$ .*

En la Figura 6.6 se pueden ver los perfiles temporales de temperatura en la interfaz ( $x = l$ ) de la barra y en el borde derecho de la misma ( $x = L$ ).

Se aprecia que en la interfaz las temperaturas en el estado estacionario son muy similares para los diferentes materiales. Tal como se observó en la Figura 6.3, esto se debe a que el primer material es el mismo para las diferentes barras consideradas. Por otra parte, en el borde derecho de la barra, los resultados numéricos se corresponden cualitativamente con los analíticos [49]. La combinación Plomo-Material alcanzan mayores valores de temperatura cuando el material es más conductivo (valores más altos de coeficiente de conductividad térmica). Esto tiene sentido físico dado que

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

como el primer material en todas las barras es el mismo, el segundo material es el que determina cuáles son las duplas que alcanzan mayor temperatura. Ver por ejemplo, que en la punta derecha ( $x = L$ ) a  $t = 50 h$  la temperatura en la barra de Plomo-Plomo es aproximadamente de  $91^\circ C$  y en la barra de Plomo-Plata es de  $95^\circ C$ .

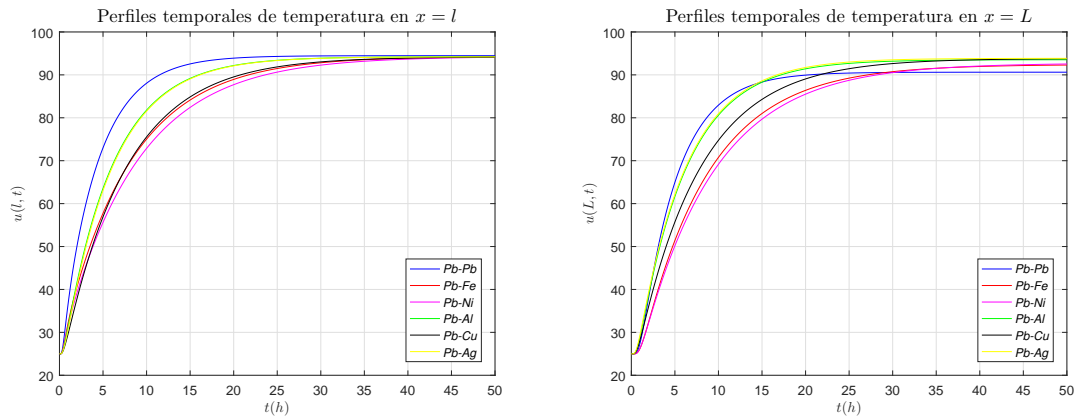


Figura 6.6: Ejemplo 6.18: Perfiles temporales de temperatura para barras de Plomo-Material utilizando diferentes materiales. En la interfaz ( $x = l$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

En la Figura 6.7 se pueden ver los perfiles espaciales de temperatura (temperatura a lo largo de toda la barra) para dos instantes particulares de tiempo  $t = 5 h$  y  $t = 45 h$ .

Se visualiza como a las 5 horas ( $t = 5 h$ ) ninguna de las barras alcanzan el estado estacionario; por ejemplo, la barra de Plomo-Plomo ni siquiera tiene comportamiento lineal a trozos. Sin embargo, a las 45 horas ( $t = 45 h$ ) todas las barras alcanzaron dicho estado. También queda en evidencia que las barras que llegan a mayor temperatura son las que están construidas con materiales más conductivos (conductividades térmicas mayores). Ver por ejemplo, que a  $t = 45 h$  en  $x = 0,8 m$  la barra de Plomo-Plomo está a una temperatura de aproximadamente  $92,5^\circ C$  y la barra de Plomo-Plata a una temperatura de  $94,2^\circ C$ . Para el mismo instante de tiempo en  $x = 1 m$  la barra de Plomo-Plomo se encuentra a una temperatura de  $90,5^\circ C$

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

y la barra de Plomo-Plata a una temperatura de  $93,9^{\circ}C$ . Por otra parte, como se ve en la Figura 6.7 (derecha) el perfil espacial de temperaturas para tiempos altos tiende a tener un comportamiento lineal a trozos como se probó en el Teorema 6.1. Además, se visualiza que los segundos tramos son casi constantes para los materiales más conductivos. Esto se debe a que al ser buenos conductores alcanzan mayor temperatura.

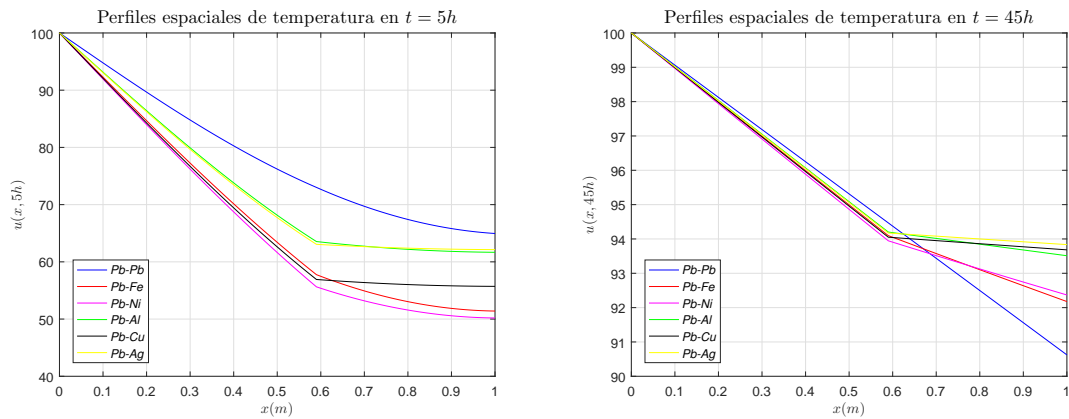


Figura 6.7: Ejemplo 6.18: Perfiles espaciales de temperatura para barras de Plomo-Material utilizando diferentes materiales. Para  $t = 5 h$  (izquierda) y  $t = 45 h$  (derecha).

En la Figura 6.8 se pueden ver los perfiles espacio-temporales de temperatura para una barra de Plomo-Hierro (izquierda) y una de Plomo-Cobre (derecha).

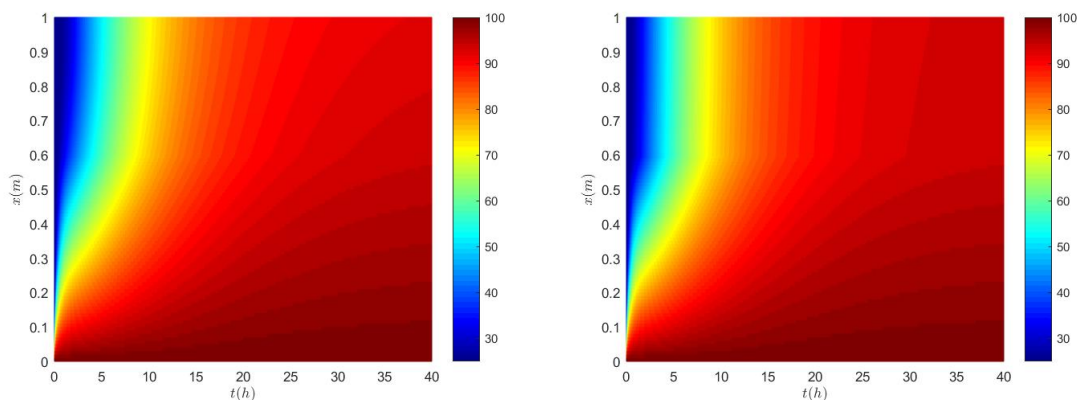


Figura 6.8: Ejemplo 6.18: Distribución de temperatura. Plomo-Hierro (izquierda) y Plomo-Cobre (derecha).

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

Se aprecian distribuciones similares aunque la correspondiente a la barra de Plomo-Cobre presenta un color rojo más intenso para tiempos altos y posiciones cercanas al borde derecho de la barra ( $x = L$ ). Esto se relaciona directamente con que el Cobre es un material más conductivo y difusivo que el Hierro, motivo por el cual se alcanzan temperaturas más altas en tiempos más corto.

**Ejemplo 6.19** *En este ejemplo se considera el proceso de difusión para barras compuestas por Material-Plata utilizando diferentes materiales. La posición de interfaz elegida es  $l = 0,4 m$ .*

En la Figura 6.9 se pueden ver los perfiles temporales de temperatura en la interfaz ( $x = l$ ) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ).

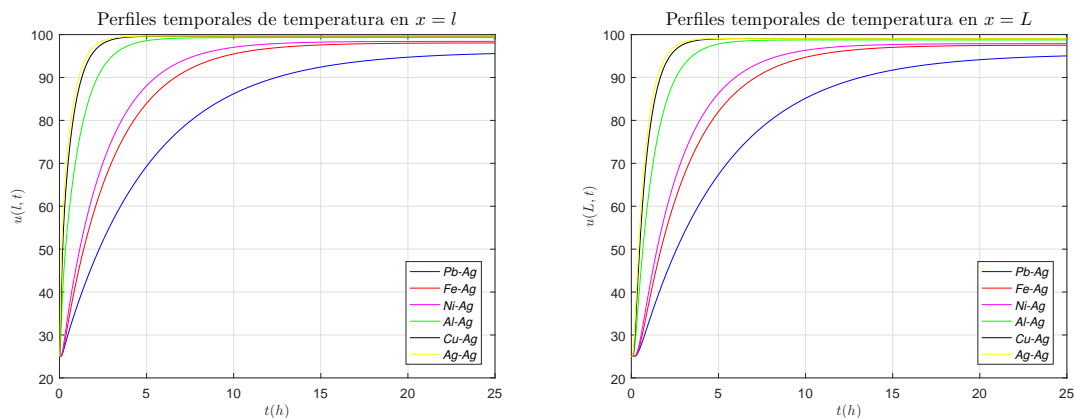


Figura 6.9: Ejemplo 6.19: Perfiles temporales de temperatura para barras de Material-Plata utilizando diferentes materiales. En la interfaz ( $x = l$ ) (izquierda) y en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ) (derecha).

Se aprecia que en la interfaz las temperaturas en el estado estacionario son muy similares para los diferentes materiales, salvo para la barra de Plomo-Plata que a las 25 horas ( $t = 25 h$ ) aún no alcanza dicho estado. Las leves diferencias que existen en cuanto a la temperatura en la interfaz, se deben a las distintas conductividades térmicas de los materiales del primer tramo de la barra. En el borde derecho de la barra, los resultados numéricos se corresponden cualitativamente con los analíticos

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

[49] dado que la combinación Material-Plata alcanza mayores valores de temperatura cuando el material es más conductivo (valores más altos de conductividad térmica). Ver por ejemplo, que en la punta derecha ( $x = L$ ) a  $t = 25 h$  la temperatura en la barra de Plomo-Plata es aproximadamente de  $95^{\circ}C$  y en la barra de Cobre-Plata es de  $99^{\circ}C$ .

Además, en ambos gráficos se visualiza que si el primer material es más difusivo, la temperatura aumenta con mayor velocidad. Esto se debe a que como el segundo material es el mismo en todas las barras, el primero resulta determinante en cuánto a la velocidad de aumento de temperatura. Por ejemplo, en  $x = l$  a las 5 horas ( $t = 5 h$ ) la barra de Plomo-Plata se encuentra a una temperatura de  $70^{\circ}C$  mientras que la de Cobre-Plata está a una temperatura de  $98^{\circ}C$ . En el mismo instante de tiempo pero en el borde derecho ( $x = L$ ) las mismas barras se encuentran aproximadamente  $68^{\circ}C$  y  $97^{\circ}C$  respectivamente.

En la Figura 6.7 se pueden ver los perfiles espaciales de temperatura (temperatura a lo largo de toda la barra) para dos instantes particulares de tiempo  $t = 2 h$  y  $t = 15 h$ .

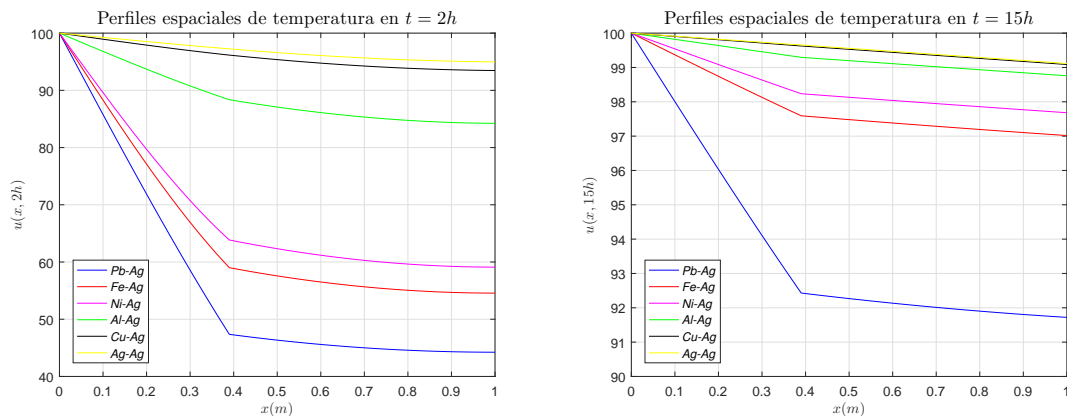


Figura 6.10: Ejemplo 6.19: Perfiles espaciales de temperatura para barras de Material-Plata utilizando diferentes materiales. Para  $t = 2 h$  (izquierda) y  $t = 15 h$  (derecha).

En la Figura 6.10 se visualiza cómo a las 2 horas ( $t = 2 h$ ) ninguna de las barras

### 6.3. ESTADO EVOLUTIVO

alcanza el estado estacionario. Sin embargo, a las 15 horas ( $t = 15 h$ ) todas las barras, menos la de Plomo-Plata, alcanzaron dicho estado. También queda en evidencia que las barras que llegan a mayor temperatura son las que están construidas con materiales más conductivos. La explicación de este hecho se debe, nuevamente, a que como el segundo material es el mismo en todas las barras, el primero resulta determinante en la temperatura que se alcanza en el borde derecho. Ver, por ejemplo, que a las 15 h en  $x = 0,8 m$  la barra de Plomo-Plomo está a una temperatura aproximada de  $91,9^{\circ}C$  y la barra de Plomo-Plata se encuentra a una temperatura  $99,3^{\circ}C$ . En el mismo instante de tiempo en  $x = 1 m$  la barra de Plomo-Plomo alcanza una temperatura de  $91,7^{\circ}C$  y la barra de Plomo-Plata se encuentra a una temperatura aproximada de  $99,1^{\circ}C$ .

Por otra parte, como se ve en la Figura 6.10 (derecha) el perfil espacial de temperaturas para tiempos altos tiende a tener un comportamiento lineal a trozos como se probó en el Teorema 6.1. Además, se visualiza que los gráficos correspondientes a segundos tramos son paralelos, eso se debe a que los segundos materiales son los mismos para todas las duplas consideradas.

En la Figura 6.11 se pueden ver los perfiles espacio-temporales de temperatura para una barra de Niquel-Plata (izquierda) y una de Aluminio-Plata (derecha).

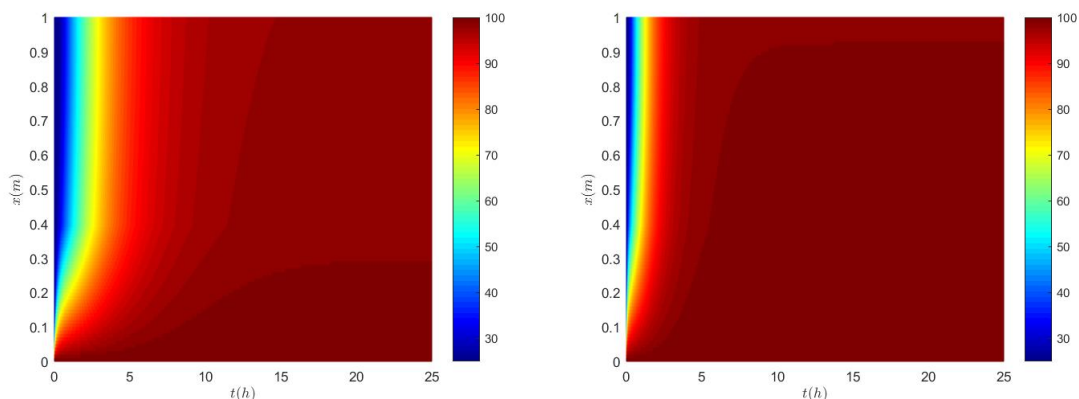


Figura 6.11: Ejemplo 6.19: Distribución de temperatura. Niquel-Plata (izquierda) y Aluminio-Plata (derecha).

## 6.4. CONCLUSIONES

---

Se distingue claramente la diferencia en el comportamiento del modelo, lo cual, se relaciona directamente con que el Aluminio es un material mucho más conductivo y difusivo que el Niquel. Por este motivo, la barra de Aluminio-Plata alcanza temperaturas más altas en tiempos menores que la barra de Niquel-Plata. Este hecho se visualiza en el gráfico, pues en la figura de la derecha predomina un color rojo intenso.

**Observación 6.20** *Notar que para la elección de parámetros realizada en cada uno de los ejemplos se satisface la condición de convergencia y estabilidad dada por la expresión (6.45). Esta expresión indica que las soluciones numéricas resultan estables y convergentes si se cumple la siguiente relación*

$$\text{máx} \{ \alpha_A^2, \alpha_B^2 \} < \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t}. \quad (6.47)$$

*Los pasos de discretización utilizados en los Ejemplos 6.18-6.19 son:  $\Delta x = 0,01 \text{ m}$ ;  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ . Se reemplazan estos datos en la expresión (6.47) y se obtiene,*

$$\text{máx} \{ \alpha_A^2, \alpha_B^2 \} < 5 \times 10^{-4}. \quad (6.48)$$

*Como se puede ver en el Cuadro 2.2, la inecuación dada en (6.48), se satisface para todas las duplas de materiales considerados.*

## 6.4. Conclusiones

En este capítulo se modela el proceso de transferencia de calor a lo largo de una barra compuesta por dos segmentos consecutivos con interfaz sólido-sólido, donde cada tramo corresponde a un material isótropo y homogéneo, embebida en un fluido (líquido o gaseoso) en movimiento con velocidad constante. El borde izquierdo de

#### 6.4. CONCLUSIONES

---

la misma permanece a temperatura constante, mientras que el derecho queda en contacto con el fluido, dando lugar al fenómeno de convección.

Para modelizar este problema se utiliza un sistema acoplado de ecuaciones de tipo parabólico con una condición de borde de tipo Dirichlet a izquierda y de tipo Robin a derecha. Se halla la solución analítica para el problema estacionario y a partir de métodos de Fourier, se obtiene una expresión para la solución analítica del problema evolutivo de interés. Debido a que la expresión hallada es muy compleja para ser usada en los ejemplos que aquí se presentan, se resuelve el problema numéricamente utilizando diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal. Se imponen condiciones de estabilidad y se testea la convergencia del método con diferentes ejemplos numéricos.

Estos resultados muestran que los perfiles de temperatura obtenidos son consistentes cualitativamente con la teoría, pues estos resultan razonables en función de los datos utilizados y son acordes con la física del problema, dado que si se comparan barras donde uno de los materiales es el mismo, las que tienen el material diferente más conductivo, alcanzan mayor temperatura y el más difusivo aumenta su temperatura con mayor rapidez.



# Capítulo 7

## Localización del Punto de Contacto

La localización del punto de contacto en problemas de transferencia de calor en materiales multicapa o con interfaz sólido-sólido tiene diferentes aplicaciones en el campo de la ingeniería. Puede ser aplicado en la ingeniería química, para la determinación de impurezas en diferentes materiales [16, 165] y para la separación de metales por medio de polímeros [196, 293]. En la ingeniería farmacéutica, para la identificación de impurezas en medicamentos [95] y en la industria cosmética [11], entre muchas otras aplicaciones que exceden el alcance de esta tesis.

En este capítulo se presenta un problema inverso relacionado con el problema directo que se estudió en el Capítulo 6. Se propone la estimación de un nuevo parámetro relacionado directamente con el problema de interfaz, éste es la determinación del punto de contacto entre los materiales  $A$  y  $B$  [261].

Dado que la longitud  $l$  [m] permanece constante en todo el proceso de transferencia de calor, se utiliza para la estimación, el problema en régimen estacionario y ésta se realiza a partir de una única medición ruidosa de flujo térmico en el borde derecho

## 7.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

---

de la barra ( $x = L$ ).

Se obtiene una expresión analítica para la aproximación de la ubicación del punto de contacto de los materiales. Se halla una cota para el error cometido en la aproximación que depende del ruido en la medición. Además, con la finalidad de conocer la dependencia local del parámetro estimado con el dato, se realiza un estudio de elasticidad. Ejemplos numéricos, de diferentes características, muestran la utilización del método propuesto.

### 7.1. Presentación del Problema

En esta sección se presenta formalmente el problema inverso que se va a estudiar. Se busca determinar la ubicación del punto de contacto ( $l$ ) entre los materiales  $A$  y  $B$  bajo las hipótesis del Teorema 6.1.

La estimación se realiza mediante una medición ruidosa de flujo  $q$  en  $X = L$  (borde derecho de la barra). Dado que el problema está en régimen estacionario, el flujo es constante en toda la barra. Se denota por  $q$  [ $\mathbf{W}/\mathbf{m}^2$ ] al flujo térmico en  $x = L$  que satisface

$$|q - q_\epsilon| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad (7.1)$$

donde  $q_\epsilon$  representa la medición del flujo y  $\epsilon$  el nivel de ruido en el dato del flujo. Éste, se determina en la práctica, teniendo en cuenta el error de los instrumentos de medición utilizados.

### 7.2. Determinación del Parámetro

En esta sección se resuelve de manera analítica el problema inverso de determinación en cuestión, considerando que el problema de transferencia de calor se encuentra en

## 7.2. DETERMINACIÓN DEL PARÁMETRO

régimen estacionario.

El siguiente resultado brinda una expresión analítica para el problema de estimación de  $l$  que depende de los parámetros del modelo y del flujo térmico  $q$  en el borde derecho de la barra ( $x = L$ ).

**Teorema 7.1** Sean  $\kappa_A, \kappa_B, T_a, F, L, h, q \in \mathbb{R}^+$  tal que  $F > T_a$ ,  $0 < l < L$ ,  $\kappa_A \neq \kappa_B$  y

$$q_m = \frac{\kappa_m h(F - T_a)}{Lh + \kappa_m} < q < \frac{\kappa_M h(F - T_a)}{Lh + \kappa_M} = q_M, \quad (7.2)$$

donde

$$\begin{cases} \kappa_m = \text{mín} \{ \kappa_A, \kappa_B \}, \\ \kappa_M = \text{máx} \{ \kappa_A, \kappa_B \}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Dada la función  $u_e$  que satisface  $u_e(\cdot) \in C^2((0, l))$  y  $u_e(\cdot) \in C^2((l, L))$ , el problema de determinación de  $l$  en

$$\begin{cases} u_e''(x) = 0, & 0 < x < l, \\ u_e''(x) = 0, & l < x < L, \\ u_e(x) = F, & x = 0, \\ \kappa_B u_e'(x) = -h(u_e(x) - T_a), & x = L, \\ u_e(x^+) = u_e(x^-), & x = l, \\ \kappa_B u_e'(x^+) = \kappa_A u_e'(x^-), & x = l, \\ q = -\kappa_B u_e'(x), & x = L, \end{cases} \quad (7.4)$$

tiene como solución

$$l = \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q} - \frac{1}{h} - \frac{L}{\kappa_B} \right). \quad (7.5)$$

*Demostración:* Se considera el sistema (7.4) sin la condición de flujo (última con-

## 7.2. DETERMINACIÓN DEL PARÁMETRO

dición). Debido al Teorema 6.1 se conoce una relación entre la función  $u_e$  y los parámetros del modelo que viene dada por la expresión (6.8)-(6.9), ésta es

$$u_e(x) = \begin{cases} F + \frac{\kappa_B h(T_a - F)}{\eta} x, & 0 \leq x \leq l, \\ F + \frac{lh(\kappa_B - \kappa_A)(T_a - F)}{\eta} + \frac{\kappa_A h(T_a - F)}{\eta} x, & l < x \leq L, \end{cases} \quad (7.6)$$

donde

$$\eta = \kappa_A \kappa_B + \kappa_A hL + (\kappa_B - \kappa_A)hl. \quad (7.7)$$

Se utiliza la condición de flujo del sistema (7.4) aplicada a la Ecuación (7.6)-(7.7) y se obtiene

$$q = -\kappa_B u_e'(L) = \frac{\kappa_A \kappa_B h(F - T_a)}{\eta} = \frac{\kappa_A \kappa_B h(F - T_a)}{\kappa_A \kappa_B + \kappa_A hL + (\kappa_B - \kappa_A)hl}. \quad (7.8)$$

Se despeja  $l$  de la Ecuación (7.8) y se obtiene la expresión (7.5) tal como se quería demostrar.

Dado que  $l$  es una función de  $q$ , corresponde ver que  $q$  satisface la condición necesaria y suficiente para la existencia de  $l$  dada por (7.2)-(7.3). El problema de determinación de  $l$  tiene sentido sii

$$0 < l < L,$$

equivalentemente

$$0 < \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q} - \frac{1}{h} - \frac{L}{\kappa_B} \right) < L. \quad (7.9)$$

Ahora se analizan dos casos:

**Caso 1:** ( $\kappa_A < \kappa_B$ ) Se opera algebraicamente a partir de (7.9) y se obtiene

$$\frac{\kappa_A h(F - T_a)}{Lh + \kappa_A} < q < \frac{\kappa_B h(F - T_a)}{Lh + \kappa_B}. \quad (7.10)$$

### 7.3. ESTIMACIÓN DEL ERROR

---

**Caso 2:** ( $\kappa_A > \kappa_B$ ) Se opera algebraicamente a partir de (7.9) y se obtiene

$$\frac{\kappa_B h(F - T_a)}{Lh + \kappa_B} < q < \frac{\kappa_A h(F - T_a)}{Lh + \kappa_A}. \quad (7.11)$$

Combinando las expresiones (7.10) y (7.11) se llega a (7.2)-(7.3) con lo que finaliza la prueba.  $\square$

**Observación 7.2** *Notar que las expresiones (7.2)-(7.3) brindan una condición necesaria y suficiente para el problema de determinación de  $l$  bajo las hipótesis del Teorema 7.1.*

## 7.3. Estimación del Error

En esta sección se obtiene una expresión analítica que acota el error cometido al aproximar la ubicación del punto de interfaz ( $l$ ) utilizando una medición ruidosa de flujo térmico  $q_\epsilon$ .

Independientemente de que el flujo medido ( $q_\epsilon$ ) cumpla las condiciones necesarias y suficientes dadas por las Ecuaciones (7.2)-(7.3), existirá un error en la estimación del punto de contacto que dependerá directamente del error ( $\epsilon$ ) en la medición de flujo. El siguiente resultado muestra una cota para el error de estimación del problema de interés.

**Teorema 7.3** *Se considera el problema inverso de determinación de la ubicación del punto de interfaz ( $l$ ) dado por (7.4). Sea  $l_\epsilon$  la solución de aproximación que depende de la medición ruidosa de flujo  $q_\epsilon$  en  $x = L$ . Se supone que el flujo  $q_\epsilon$  satisface las condiciones dadas por (7.1)-(7.3). Entonces existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tal que*

$$|l - l_\epsilon| \leq K,$$

### 7.3. ESTIMACIÓN DEL ERROR

donde  $K$  viene dado por

$$K = \frac{\kappa_A \kappa_B}{|\kappa_B - \kappa_A| (F - T_a)} \left( \frac{Lh + \kappa_m}{\kappa_m h} \right)^2 \epsilon.$$

*Demostración:* Debido a la Ecuación (7.5) se tiene que

$$l_\epsilon = \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q_\epsilon} - \frac{1}{h} - \frac{L}{\kappa_B} \right). \quad (7.12)$$

Considerando las expresiones (7.5) y (7.12) vale que

$$|l - l_\epsilon| = \left| \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q} - \frac{1}{h} - \frac{L}{\kappa_B} \right) - \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q_\epsilon} - \frac{1}{h} - \frac{L}{\kappa_B} \right) \right|,$$

operando algebraicamente se obtiene

$$|l - l_\epsilon| = \left| \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \left( \frac{F - T_a}{q} - \frac{F - T_a}{q_\epsilon} \right) \right|,$$

equivalentemente

$$|l - l_\epsilon| = \left| \frac{\kappa_A \kappa_B}{\kappa_B - \kappa_A} \right| \frac{F - T_a}{q q_\epsilon} |q - q_\epsilon|. \quad (7.13)$$

En función de la condición (7.2)-(7.3) se tiene que

$$q, q_\epsilon > \frac{\kappa_m h (F - T_a)}{Lh + \kappa_m}, \quad (7.14)$$

utilizando la condición (7.14) aplicada a (7.13) vale que

$$|l - l_\epsilon| \leq \left| \frac{\kappa_A \kappa_B}{(\kappa_B - \kappa_A)(F - T_a)} \right| \left( \frac{Lh + \kappa_m}{\kappa_m h} \right)^2 |q - q_\epsilon|,$$

por último, en función de la condición (7.1) se obtiene

$$|l - l_\epsilon| \leq \frac{\kappa_A \kappa_B}{|\kappa_B - \kappa_A| (F - T_a)} \left( \frac{Lh + \kappa_m}{\kappa_m h} \right)^2 \epsilon. \quad (7.15)$$

## 7.4. ANÁLISIS DE ELASTICIDAD

---

Tal como se quería demostrar. □

**Observación 7.4** *Notar que la expresión (7.15) indica, como es lógico, que el error de estimación de  $l$  depende del ruido en los datos. Pero independientemente de dicho ruido, la estimación empeora cuando los materiales  $A$  y  $B$  tienen conductividades térmicas similares. Esto se debe a que si  $\kappa_A \cong \kappa_B$  entonces  $|\kappa_B - \kappa_A| \cong 0$  luego  $|l - l_\epsilon| \rightarrow \infty$ . Desde el punto de vista físico, que las conductividades térmicas sean similares indica que la interfaz sólido-sólido se vuelve imperceptible.*

## 7.4. Análisis de Elasticidad

En esta sección se busca la relación que existe entre el parámetro estimado ( $l$ ) y el dato utilizado para la estimación ( $q$ ). Para tal fin se utiliza, nuevamente, la función de elasticidad [239] definida en la Sección 1.7 del Capítulo 1.

En este caso, la elasticidad del parámetro desconocido  $l$  con respecto al flujo térmico  $q$  viene dada por

$$E_l^q(q) = \frac{q}{l(q)} \frac{\partial l(q)}{\partial q}, \quad (7.16)$$

utilizando la expresión (7.5) aplicada en (7.16) se tiene que

$$E_l^q(q) = \frac{h\kappa_B (F - T_a)}{q(\kappa_B + Lh) - h\kappa_B (F - T_a)}. \quad (7.17)$$

La función de elasticidad de la longitud ( $l$ ) con respecto al flujo térmico ( $q$ ) dada en (7.17) tiene algunas propiedades particulares de utilidad que merecen ser destacadas. Las propiedades mencionadas son: la función siempre presenta un comportamiento asintótico, es una función estrictamente decreciente y el signo depende directamente de la relación que existe entre los coeficientes de conductividad térmica de los materiales  $A$  y  $B$ .

## 7.4. ANÁLISIS DE ELASTICIDAD

---

### 7.4.1. Comportamiento Asintótico

El siguiente resultado estudia el comportamiento asintótico de la función elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$ .

**Lema 7.5** *La función de elasticidad dada por la expresión (7.17) tiene comportamiento asintótico en*

$$q = \frac{h\kappa_B (F - T_a)}{\kappa_B + L h}.$$

*Demostración:* La prueba del resultado es inmediata, pues solo resta ver dónde se anula el denominador de la expresión (7.17).  $\square$

Lo interesante de este lema se resume en la siguiente observación.

**Observación 7.6** *Notar que el resultado dado en el Lema 7.5 tiene dos interpretaciones diferentes dependiendo del caso particular que se esté considerando.*

**Caso 1:** ( $\kappa_A < \kappa_B$ ) *En este caso se tiene que*

$$q = \frac{h\kappa_B (F - T_a)}{\kappa_B + L h} = \frac{h\kappa_M (F - T_a)}{\kappa_M + L h} = q_M. \quad (7.18)$$

**Caso 2:** ( $\kappa_A > \kappa_B$ ) *En este caso se tiene que*

$$q = \frac{h\kappa_B (F - T_a)}{\kappa_B + L h} = \frac{h\kappa_m (F - T_a)}{\kappa_m + L h} = q_m. \quad (7.19)$$

*En resumen, utilizando las Ecuaciones (7.18)-(7.19) se concluye que la función de elasticidad dada por (7.17) presenta una asíntota vertical en*

$$q = \begin{cases} q_M, & \kappa_A < \kappa_B, \\ q_m, & \kappa_A > \kappa_B. \end{cases}$$



## 7.4. ANÁLISIS DE ELASTICIDAD

---

### 7.4.2. Signo

El siguiente resultado estudia el signo de la función elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$ . Este resultado es interesante dado que la función de elasticidad puede ser negativa o positiva dependiendo de la relación existente entre las conductividades térmicas de los materiales  $A$  y  $B$ .

**Lema 7.7** *La función de elasticidad dada por la expresión (7.17) cumple*

$$\begin{cases} E_l^q(q) < 0 \iff \kappa_A < \kappa_B, & q_m < q < q_M, \\ E_l^q(q) > 0 \iff \kappa_A > \kappa_B, & q_m < q < q_M. \end{cases} \quad (7.20)$$

*Demostración:* El numerador de la función de elasticidad dada en (7.17) es independiente de  $q$  y estrictamente positivo. Por lo tanto, el signo de la elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$  depende del signo del denominador en (7.17).

Debido a lo observado en el párrafo anterior es necesario analizar, para demostrar el Lema 7.20, dos casos posibles

**Caso 1:** ( $\kappa_A < \kappa_B$ ) En este caso se tiene que

$$E_l^q(q) < 0 \iff q(\kappa_B + Lh) - h\kappa_B(F - T_a) < 0,$$

equivalentemente

$$E_l^q(q) < 0 \iff q < \frac{h\kappa_B(F - T_a)}{\kappa_B + Lh} \iff \kappa_A < \kappa_B. \quad (7.21)$$

De forma análoga

**Caso 2:** ( $\kappa_A > \kappa_B$ ) En este caso se tiene que

$$E_l^q(q) > 0 \iff q(\kappa_B + Lh) - h\kappa_B(F - T_a) > 0,$$

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

equivalentemente

$$E_l^q(q) > 0 \iff q > \frac{h\kappa_B(F - T_a)}{\kappa_B + Lh} \iff \kappa_A > \kappa_B. \quad (7.22)$$

Combinando las expresiones (7.21) y (7.22) se obtiene (7.20) lo que finaliza la prueba.

□

### 7.4.3. Monotonía

El siguiente resultado estudia la monotonía de la función elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$ . Este resultado también es de importancia dado que la función elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$  resulta ser, en todos los casos, estrictamente decreciente.

**Lema 7.8** *La función de elasticidad dada por la expresión (7.17) es estrictamente decreciente para todo  $q \in \mathbb{R}^+$ .*

*Demostración:* La prueba es simple, solo se debe derivar la función  $E_l^q$  con respecto a  $q$  y observar que la derivada es siempre negativa. Derivando dicha expresión se tiene que

$$\frac{\partial E_l^q}{\partial q} = -\frac{(F - T_a)(\kappa_B + Lh)h\kappa_B}{[q(\kappa_B + Lh) - h\kappa_B(F - T_a)]^2} < 0. \quad (7.23)$$

Dado que la derivada (7.23) es estrictamente negativa se tiene que la función de elasticidad de  $l$  con respecto a  $q$  es estrictamente decreciente tal como se quería probar. □

## 7.5. Ejemplos Numéricos

En esta sección se incluyen ejemplos numéricos con la finalidad de mostrar las ideas utilizadas en este capítulo. Se resuelve el problema directo para  $l$  conocido a partir

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

del cual mediante la Ecuación (7.8) se obtiene el valor de flujo exacto  $q$ . Se le agrega ruido para simular la medición experimental y se obtiene  $q_\epsilon$  con el que mediante la Ecuación (7.12) se halla el valor aproximado para el punto de contacto  $l_\epsilon$ .

Se consideran casos bien diferenciados relacionados con los coeficientes de conductividad térmica de los materiales. En el primer ejemplo se toman casos donde  $\kappa_A < \kappa_B$ , en el segundo  $\kappa_A > \kappa_B$  y en el tercer ejemplo se toman casos donde  $\kappa_A \cong \kappa_B$  (el símbolo  $\cong$  indica que las conductividades térmicas son similares desde el punto de vista físico).

Los datos utilizados en todos los ejemplos son  $L = 10\text{ m}$ ;  $F = 100^\circ\text{C}$ ;  $Ta = 25^\circ\text{C}$ . Los coeficientes de transferencia de calor por convección ( $h$ ) se determinan según lo explicado en el Capítulo 4.

Las propiedades térmicas del fluido (aire) se obtienen de [51]. Los coeficientes de conductividad térmica para los diferentes materiales considerados, fueron tomados del Cuadro 2.2.

**Ejemplo 7.9** *En este ejemplo se considera el problema inverso de estimación para el caso  $\kappa_A < \kappa_B$ . Para ello se toma una barra de Plomo-Cobre y otra de Plomo-Plata. En este ejemplo se busca estimar  $l = 4\text{ m}$ .*

En el caso de la barra de Plomo-Cobre, el valor exacto de flujo es  $q = 326,32\text{ W/m}^2$ , la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 194,44\text{ W/m}^2$  y  $q_M = 595,67\text{ W/m}^2$ .

En el caso de la barra de Plomo-Plata, el valor exacto de flujo es  $q = 328,07\text{ W/m}^2$ , la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 194,44\text{ W/m}^2$  y  $q_M = 605,49\text{ W/m}^2$ .

En el Cuadro 7.1 se muestran las estimaciones de  $l$  para valores de flujo térmico cercanos al verdadero, considerando la barra de Plomo-Cobre. En el Cuadro 7.2 se

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

muestran los resultados obtenidos para la barra de Plomo-Plata. En ambos casos se incluye el error absoluto y relativo de estimación.

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [m]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [m]	$ l - l_\epsilon  / l$
321	4,14	5,32	0,14	0,035
322	4,11	4,32	0,11	0,027
323	4,09	3,32	0,08	0,020
324	4,06	2,32	0,05	0,012
325	4,03	1,32	0,02	0,005
326	4,00	0,32	0,00	0,000
327	3,98	0,68	0,03	0,007
328	3,95	1,68	0,06	0,015
329	3,92	2,68	0,08	0,020
330	3,90	3,68	0,11	0,027

Cuadro 7.1: Ejemplo 7.9: Estimación de  $l$  para una barra de Plomo-Cobre.

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [m]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [m]	$ l - l_\epsilon  / l$
323	4,13	5,07	0,13	0,032
324	4,10	4,07	0,10	0,025
325	4,08	3,07	0,08	0,020
326	4,05	2,07	0,05	0,012
327	4,02	1,07	0,02	0,005
328	4,00	0,07	0,00	0,000
329	3,97	0,93	0,03	0,007
330	3,94	1,93	0,06	0,015
331	3,92	2,93	0,08	0,020
332	3,89	3,93	0,11	0,027

Cuadro 7.2: Ejemplo 7.9: Estimación de  $l$  para una barra de Plomo-Plata.

Se aprecia que las recuperaciones son razonables en función de los valores de flujo térmico utilizados y que la estimación empeora cuando el valor del flujo dista del verdadero. En la Figura 7.1 se muestran las elasticidades de  $l$  con respecto a  $q$  para la barra de Plomo-Cobre (izquierda) y para Plomo-Plata (derecha). En estos gráficos se denota, por simplicidad,  $E_e = E_l^q(q)$ ,  $E_m = E_l^q(q_m)$  y  $E_M = E_l^q(q_M)$ .

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En la Figura 7.1 se observa que la función de elasticidad es negativa, decreciente y que tiene un comportamiento asintótico en  $q = q_M$ . Esto se debe a que en ambos casos  $\kappa_A < \kappa_B$  y se relaciona con los resultados dados en los Lemas 7.5, 7.7 y 7.8.

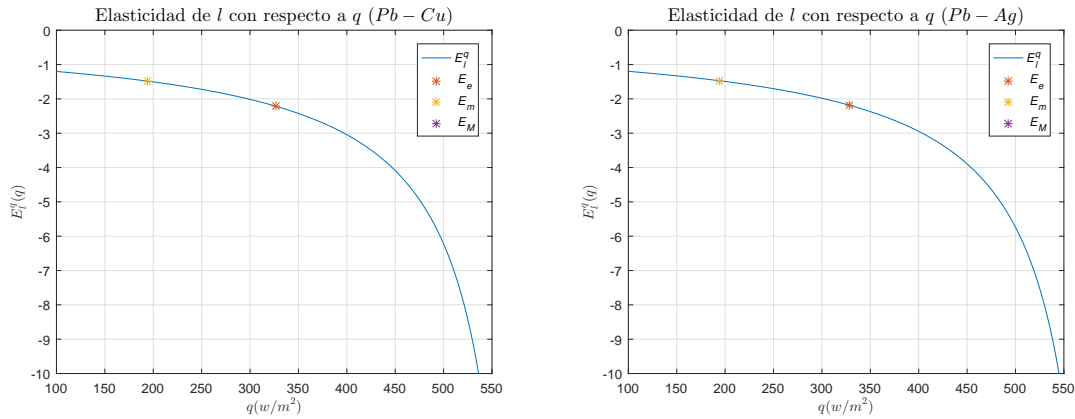


Figura 7.1: Ejemplo 7.9: Elasticidad de  $l$  en función de  $q$  para una barra de Plomo-Cobre (izquierda) y una de Plomo-Plata (derecha).

Los gráficos de la Figura 7.1 indican que un error de medición en el flujo térmico del 1 % se traduce en un error del alrededor del 2,1 % en la estimación del punto de contacto ( $l$ ).

**Ejemplo 7.10** *En este ejemplo se considera el problema inverso de estimación para el caso  $\kappa_A > \kappa_B$ . Para ello se toma una barra de Cobre-Plomo y otra de Plata-Plomo. En este caso se busca estimar  $l = 8$  m.*

En el caso de la barra de Cobre-Plomo, el valor exacto de flujo es  $q = 421,66$  W/m<sup>2</sup>, la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 194,44$  W/m<sup>2</sup> y  $q_M = 595,67$  W/m<sup>2</sup>.

En el caso de la barra de Plata-Plomo, el valor exacto de flujo es  $q = 425,56$  W/m<sup>2</sup>, la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 194,44$  W/m<sup>2</sup> y  $q_M = 605,49$  W/m<sup>2</sup>.

En el Cuadro 7.3 se muestran las estimaciones de  $l$  para valores de flujo térmico cercanos al verdadero, considerando la barra de Cobre-Plomo. Equivalentemente, en

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

el Cuadro 7.4 se realiza lo mismo para la barra de Plata-Plomo. En ambos casos se incluye el error absoluto y relativo de estimación.

Se aprecia, nuevamente, que las recuperaciones son razonables en función de los valores de flujo térmico utilizados y que la estimación empeora cuando el valor del flujo dista del verdadero.

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [m]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [m]	$ l - l_\epsilon  / l$
417	7,92	4,66	0,08	0,010
418	7,94	3,66	0,06	0,007
419	7,95	2,66	0,05	0,006
420	7,97	1,66	0,03	0,003
421	7,99	0,66	0,01	0,001
422	8,00	0,34	0,00	0,000
423	8,02	1,34	0,02	0,002
424	8,04	2,34	0,04	0,005
425	8,05	3,34	0,05	0,006
426	8,07	4,34	0,07	0,008

Cuadro 7.3: Ejemplo 7.10: Estimación de  $l$  para una barra de Cobre-Plomo

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [m]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [m]	$ l - l_\epsilon  / l$
420	7,91	5,56	0,09	0,011
421	7,93	4,56	0,07	0,008
422	7,94	3,56	0,06	0,007
423	7,96	2,56	0,04	0,005
424	7,97	1,56	0,03	0,003
425	7,99	0,56	0,01	0,001
426	8,00	0,44	0,00	0,000
427	8,02	1,44	0,02	0,002
428	8,04	2,44	0,04	0,005
429	8,05	3,44	0,05	0,008

Cuadro 7.4: Ejemplo 7.10: Estimación de  $l$  para una barra de Plata-Plomo.

En la Figura 7.2 se muestran las elasticidades de  $l$  con respecto a  $q$  para la barra de Cobre-Plomo (izquierda) y para Plata-Plomo. (derecha). En estos gráficos se denota

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

por simplicidad, nuevamente,  $E_e = E_l^q(q)$ ,  $E_m = E_l^q(q_m)$  y  $E_M = E_l^q(q_M)$ .

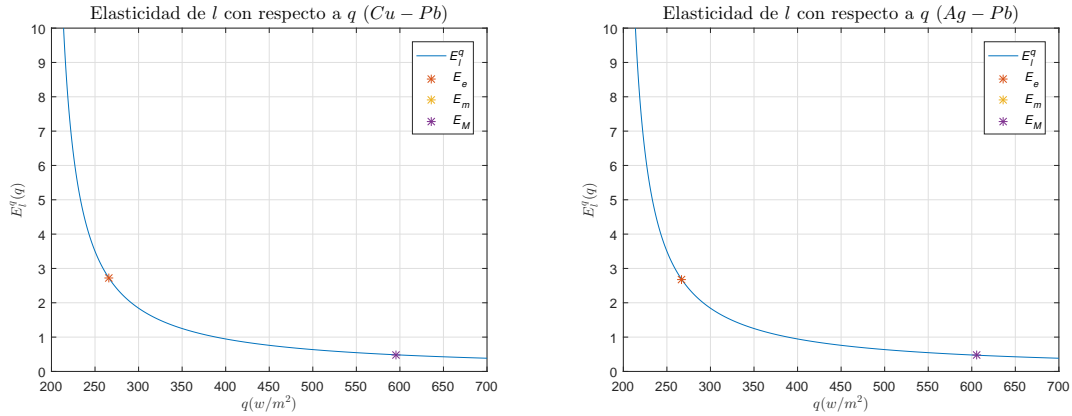


Figura 7.2: Ejemplo 7.10: Elasticidad de  $l$  en función de  $q$  para una barra de Cobre-Plomo (izquierda) y una de Plata-Plomo (derecha).

En la Figura 7.2 se observa que la función de elasticidad es positiva, decreciente y que tiene un comportamiento asintótico en  $q = q_m$ . Esto se debe a que en ambos casos  $\kappa_A > \kappa_B$  y se relaciona con los resultados dados en los Lemas 7.5, 7.7 y 7.8.

Los gráficos de la Figura 7.2 indican, para estos casos, que un error de medición en el flujo térmico del 1% se traduce en un error de alrededor del 2,8% en la estimación del punto de contacto ( $l$ ).

**Ejemplo 7.11** *En este ejemplo se considera el problema inverso de estimación para el caso  $\kappa_A \cong \kappa_B$ . Para ello se toma una barra de Hierro-Niquel y otra de Niquel-Hierro. En este caso se busca estimar  $l = 6$  m.*

En el caso de la barra de Hierro-Niquel, el valor exacto de flujo térmico es  $q = 330,92 W/m^2$ , la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 316,47 W/m^2$  y  $q_M = 355,26 W/m^2$ .

En el caso de la barra de Niquel-Hierro, el valor exacto de flujo térmico es  $q = 338,65 W/m^2$ , la condición necesaria y suficiente dada por (7.2)-(7.3) indica que  $q_m = 316,47 W/m^2$  y  $q_M = 355,26 W/m^2$ .

## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el Cuadro 7.5 se muestran las estimaciones de  $l$  para valores de flujo térmico cercanos al verdadero, considerando la barra de Hierro-Niquel. Equivalentemente, en el Cuadro 7.6 se realiza lo mismo para la barra de Niquel-Hierro. En ambos casos se incluye el error absoluto y relativo de estimación.

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [ $m$ ]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [ $m$ ]	$ l - l_\epsilon  / l$
326	7,32	4,92	1,32	0,220
327	7,05	3,92	1,05	0,175
328	6,78	2,92	0,78	0,130
329	6,51	1,92	0,51	0,085
330	6,24	0,92	0,24	0,040
331	5,98	0,08	0,02	0,003
332	5,71	1,08	0,29	0,005
333	5,45	2,08	0,55	0,091
334	5,19	3,08	0,81	0,135
335	4,93	4,08	1,07	0,178

Cuadro 7.5: Ejemplo 7.11: Estimación de  $l$  para una barra de Hierro-Niquel.

$q_\epsilon$ [ $W/m^2$ ]	$l_\epsilon$ [ $m$ ]	$ q - q_\epsilon $ [ $W/m^2$ ]	$ l - l_\epsilon $ [ $m$ ]	$ l - l_\epsilon  / l$
335	5,06	3,65	0,94	0,156
336	5,32	2,65	0,68	0,113
337	5,57	1,65	0,43	0,071
338	5,83	0,65	0,17	0,028
339	6,08	0,35	0,08	0,013
340	6,33	1,35	0,33	0,055
341	6,58	2,35	0,58	0,096
342	6,83	3,35	0,83	0,138
343	7,08	4,35	1,08	0,180
344	7,32	5,35	1,32	0,220

Cuadro 7.6: Ejemplo 7.11: Estimación de  $l$  para una barra de Niquel-Hierro.

En este ejemplo se visualiza que las recuperaciones no son tan buenas como en los ejemplos 7.9 y 7.10. Esto se relaciona con que las conductividades térmicas son muy



## 7.5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

parecidas y eso hace que el error de estimación aumente tal como se comentó en la Observación 7.4.

En la Figura 7.3 se muestran las elasticidades de  $l$  con respecto a  $q$  para la barra de Hierro-Niquel (izquierda) y para Niquel-Hierro (derecha). En estos gráficos se denota, nuevamente, por simplicidad  $E_e = E_l^q(q)$ ,  $E_m = E_l^q(q_m)$  y  $E_M = E_l^q(q_M)$ .

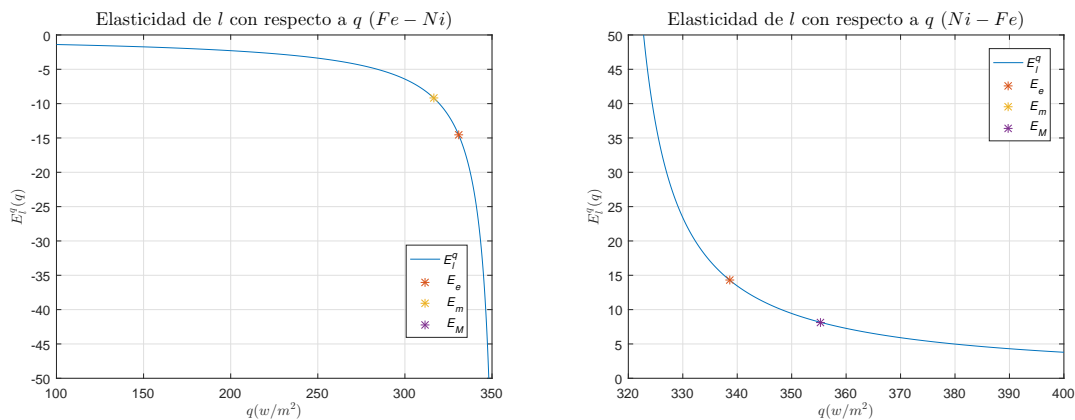


Figura 7.3: Ejemplo 7.11: Elasticidad de  $l$  en función de  $q$  para una barra de Hierro-Niquel (izquierda) y una de Niquel-Hierro (derecha).

En el gráfico izquierdo de la Figura 7.3 se observa que la función de elasticidad es negativa, decreciente y que tiene un comportamiento asintótico en  $q = q_M$ . Por su parte, en el gráfico derecho de la Figura 7.3 se visualiza que la función de elasticidad es positiva, decreciente y que tiene un comportamiento asintótico en  $q = q_m$ . Esto se debe a que en el primer caso  $\kappa_A < \kappa_B$  y en el segundo  $\kappa_A > \kappa_B$ . Lo observado se relaciona directamente con los resultados dados en los Lemas 7.5, 7.7 y 7.8.

Los gráficos de la Figura 7.3 indican, para estos casos, que un error de medición en el flujo térmico del 1 % se traduce en un error del alrededor del 14 % en la estimación del punto de contacto. Es evidente que en este caso la estimación no es tan razonable como en los ejemplos 7.9 y 7.10. Eso se debe a la similitud entre las conductividades.

Notar además, que la longitud del intervalo  $(q_m, q_M)$  se hace pequeña en el caso  $\kappa_A \cong \kappa_B$ . Esto implica que la medición de flujo  $q_e$  debe ser lo suficientemente precisa para

## 7.6. MÉTODO MEJORADO

---

que valga la condición necesaria y suficiente de existencia de solución del problema inverso de estimación dado por (7.2)-(7.3).

### 7.6. Método Mejorado

Lo interesante del método presentado en este capítulo es que la aproximación del parámetro se realiza con buena precisión utilizando una única medición de flujo. El error de aproximación queda sujeto a la exactitud de dicha medición y este puede aumentar notoriamente cuando las conductividades térmicas son similares tal como se observa en el Ejemplo 7.11.

Para minimizar este impacto, particularmente cuando las conductividades térmicas son similares, es conveniente realizar varias mediciones de flujo térmico, tomar el promedio ( $q_p$ ) y utilizar este valor para la aproximación de  $l_\epsilon$ . Justifiquemos mejor esta idea. El dato ruidoso de flujo térmico  $q_\epsilon$  puede ser pensado como el valor exacto de flujo al que se le adiciona el ruido de medición, es decir,

$$q_\epsilon = q + \epsilon_i, \quad (7.24)$$

donde  $\epsilon_i$  es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza  $\sigma^2$ , ( $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ). La varianza se determina, en cada caso, a partir de la expresión (3.9) dada en la Observación 3.1. Se considera ahora el promedio entre  $n$  mediciones ruidosas de flujo térmico donde los ruidos de medición son independientes y están idénticamente distribuidos

$$q_p = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}, \quad (7.25)$$

utilizando la expresión (7.24) en la Ecuación (7.25) se obtiene

## 7.6. MÉTODO MEJORADO

$$q_p = \frac{q + \epsilon_1 + q + \epsilon_2 + \dots + q + \epsilon_n}{n} = q + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i = q + \epsilon_p, \quad (7.26)$$

donde  $\epsilon_p$  resulta ser una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza  $\sigma^2/\sqrt{n}$ , ( $\epsilon_p \sim N(0, \sigma^2/\sqrt{n})$ ). Ver, por ejemplo, [93, 202].

Esto implica que el error de medición disminuye a medida que aumenta la cantidad de mediciones, por lo que la estimación del parámetro mejora a medida que se toman mayor cantidad de datos.

Se muestra el método mejorado para un caso particular. Se toma nuevamente el Ejemplo 7.11 para el caso de la barra de Hierro-Niquel donde se desea estimar  $l = 6m$ . El valor de flujo térmico exacto en este caso es  $q = 330,92 W/m^2$  y se supone, de acuerdo con [72, 141, 188], que el error máximo de medición es del 1%; es decir que  $\epsilon = 3,3092$ . Para simular las mediciones, de acuerdo con (7.26), se generan  $n$  números aleatorios ( $\epsilon_i, i = 1, \dots, n$ ) normalmente distribuidos con media  $q$  y desvío estándar  $\sigma$ , se los promedia y se obtiene  $q_p$  valor con el cual se aproxima  $l_\epsilon$ .

En el Cuadro 7.7 se observan los valores de flujo  $q_p$  para distintos  $n$  como también así el valor obtenido de  $l_\epsilon$  en cada caso. Además, se incluyen los errores absolutos y relativos para el flujo y la aproximación del parámetro. Se aprecia que a pesar de que las conductividades térmicas son similares, la estimación mejora a medida que se agregan mediciones de flujo térmico al problema inverso.

$n$	$q_p [W/m^2]$	$ q - q_\epsilon  [W/m^2]$	$l_\epsilon [m]$	$ l - l_\epsilon  [m]$	$ l - l_\epsilon  / l$
1	334,62	3,69	5,03	0,97	0,161
5	329,93	0,99	6,26	0,26	0,043
10	330,77	0,15	6,04	0,04	0,006
20	331,02	0,08	5,97	0,03	0,005
50	330,89	0,03	6,01	0,01	0,001

Cuadro 7.7: Estimación de  $l$  para una barra de Hierro-Niquel utilizando  $n$  mediciones de flujo térmico.

## 7.7. Conclusiones

En este capítulo se trata la localización del punto de contacto entre los materiales, para un problema estacionario de transferencia de calor con interfaz sólido-sólido. Se propone una técnica analítica para la estimación a partir de una sobre-condición ruidosa de flujo en el extremo derecho de la barra conductora. Se proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la estimación del parámetro y se presenta una cota analítica para el error de determinación.

Utilizando la función de elasticidad, se estudia la influencia local del punto de contacto con respecto al flujo medido. Los ejemplos numéricos indican que el enfoque introducido aquí es útil para determinar el punto de contacto entre los materiales, pero es necesario que el flujo se mida con la mayor precisión posible, ya que la determinación resulta muy sensible a los errores de medición. El análisis de elasticidad indica que las estimaciones de error pueden llegar a ser muy grandes cuando los materiales tienen conductividades térmicas similares. Esto se puede interpretar físicamente pues, cuanto más semejantes sean las conductividades térmicas, el punto de contacto se vuelve insignificante y la barra se parece más a una homogénea. Para este caso, se propone una técnica muy simple, basada en fundamentos estadísticos, que involucran varias mediciones de flujo y resulta mejorar notoriamente la estimación del parámetro.

# Conclusiones Generales

Los resultados generales obtenidos en esta tesis son los siguientes:

- Se encontraron soluciones analíticas para dos casos particulares de un proceso de transferencia de calor evolutivo para una barra inmersa en un fluido donde la temperatura en uno de sus extremos es considerada constante y el otro se deja libre en contacto con el fluido. En el primero, la barra es isotrópica y homogénea, admite fuentes independientes del tiempo y se permite la disipación de calor a lo largo de la misma. En el segundo, se considera una barra compuesta por dos tramos consecutivos, isotrópicos y homogéneos, sin fuentes ni términos disipativos. Las expresiones analíticas obtenidas resultaron consistentes, bajo diferentes aspectos, con la física del problema.
- Se obtuvieron soluciones numéricas por medio de un esquema convergente y estable que brinda información cualitativa sobre la evolución espacio-temporal de la temperatura a lo largo de la barra. Ésto permite su utilización para la simulación de mediciones, como datos, que son usados en los diferentes problemas inversos.
- Se estimó el parámetro de difusividad térmica con una precisión mayor a la utilizada en los datos ruidosos simulados, a partir de diferentes criterios de selección de datos. Se mejoró la estimación obtenida, mediante un análisis

## CONCLUSIONES GENERALES

---

numérico de sensibilidad y la implementación de herramientas de diseño óptimo.

- Se determinó la dependencia funcional del coeficiente de transferencia de calor con respecto al tiempo. Por otro lado, un análisis de elasticidad indicó que éste permite obtener perfiles de temperatura más precisos.
- Se identificó una fuente de generación de calor, independiente del tiempo, a partir de mediciones de temperatura en un instante dado, mediante un método de regularización. La técnica propuesta resultó de utilidad para estabilizar la solución del problema inverso considerado. Se incluyó un análisis del error y se obtuvo una cota del mismo.
- Se localizó el punto de contacto para una barra de dos tramos homogéneos consecutivos, considerando el estado estacionario, a partir de una simulación ruidosa de flujo térmico y el uso de herramientas estadísticas sencillas. Se incluyó un análisis del error, a partir de un estudio numérico de elasticidad. Por otro lado, se obtuvo una cota del mismo mediante un estudio analítico.

Estos resultados muestran que las técnicas utilizadas para las diferentes identificaciones son apropiadas para cada uno de los problemas inversos estudiados. Los distintos parámetros se determinan de forma razonable en función del nivel de ruido simulado en los datos. Por este motivo, estas estimaciones resultan útiles para mejorar el modelo propuesto con la finalidad de poder usar sus salidas para predecir y/o controlar los procesos de transferencia; ésto brinda una caracterización matemática más precisa del fenómeno estudiado. Además, permite desarrollar criterios y construir estrategias para mejorar, facilitar y simplificar las técnicas o procesos de medición.

# Posibles Líneas de Investigación

## Futura

Los problemas abordados en esta tesis dejan abiertos múltiples temas de investigación que son novedosos y de interés actual. Existen tres trabajos futuros transversales a todos los capítulos de esta tesis. El primero, es la generalización de las herramientas desarrolladas para la utilización en otros procesos de transferencia; por ejemplo, en problemas de transporte de materia. El segundo, se relaciona con la extensión natural de los resultados obtenidos a 2D y 3D. El último, es la implementación experimental de los métodos que aquí se presentan para una posterior comparación con los resultados numéricos.

A continuación se citan, las líneas de investigación futuras.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 2: sería interesante extender los resultados numéricos y analíticos obtenidos en este capítulo a una ecuación parabólica completa no lineal. Esto permitiría estudiar procesos de transferencia más generales, la transferencia de calor en un cuerpo anisótropo es un ejemplo de ello.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 3: se podría abordar, con las mismas herramientas utilizadas, la estimación simultánea de los coeficientes de difusividad y conductividad térmica. Éste es un problema inverso muy interesante, pues permitiría caracterizar materiales desconocidos sometiéndolos a un proceso simple de

## *POSIBLES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA*

---

transferencia de calor.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 4: resultaría de interés ampliar la metodología para hallar el coeficiente de transferencia de calor para diferentes geometrías de la pared disipativa. Por otra parte, extender el resultado, considerando además del proceso de convección, el de radiación. Esto permitiría hallar un coeficiente de transferencia de calor más realista que involucre a todos los procesos de transporte de energía térmica.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 5: sería de utilidad extender el resultado a fuentes definidas como funciones espacio-temporales. Por otra parte, resultaría interesante, con fines comparativos, la utilización de diferentes operadores de regularización. Otra línea de investigación importante, es el abordaje con estas herramientas, a diferentes aplicaciones concretas; como la determinación de contaminantes en capas de agua subterráneas, la identificación de fisuras en diferentes cuerpos y la localización de células tumorales en un tejido biológico, entre otras.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 6: Es natural la extensión de los resultados obtenidos a materiales compuestos, multicapa, con  $n$  interfaces sólido-sólido. Por otra parte, se podría incorporar al problema de estudio, el fenómeno de cambio de fase, la modelización de estos procesos, permitiría estudiar diversas situaciones más generales, utilizando la teoría de frontera libre.

Con respecto a lo realizado en el capítulo 7: resultaría útil obtener la solución de otros problemas inversos donde se determinen diferentes parámetros y la extensión inmediata relacionada con el capítulo 6 donde se busque localizar las  $n$  interfaces sólido-sólido.



# Apéndice A

## Diferencias Finitas

En este apéndice se da una breve introducción al método numérico de diferencias finitas [177, 184, 232]. Éste es el método que se utiliza para abordar las soluciones numéricas en esta tesis, particularmente se usan diferencias finitas centradas en el espacio y hacia delante en la variable temporal.

### A.1. Sobre el Método

El método de diferencias finitas es, tal vez, el método más simple para aplicar, particularmente para mallas con una geometría uniforme. Su mayor desventaja consiste en su incapacidad para tratar efectivamente la solución de problemas sobre formas geométricas irregulares. La aproximación por medio de diferencias finitas es el método más antiguo aplicado para obtener la solución numérica de ecuaciones diferenciales, se considera que la primera aplicación ha sido desarrollada por Euler en 1768.

La base del método de diferencias finitas consiste en la construcción de una malla estructurada, donde los nodos de la misma están localizados en las intersecciones

## A.1. SOBRE EL MÉTODO

---

de familias de líneas rectas. El reemplazo de las derivadas continuas de la ecuación diferencial por las expresiones aproximadas en diferencias finitas y la resolución del sistema de ecuaciones que queda planteado como consecuencia de la anterior sustitución.

Especifiquemos esta idea con mayor claridad. Se considera  $f(x)$  una función  $n + 1$  veces derivable en cualquier intervalo real abierto  $(a, b)$ . Por el teorema de Taylor, se tiene que para todo  $x \in (a, b)$  y  $\Delta x$  suficientemente pequeño de manera tal que  $x + \Delta x \in (a, b)$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + R_n(x + \Delta x),$$

donde  $n!$  denota el factorial de  $n$  y  $R_n(x)$  es el resto o residuo, el cual representa la diferencia entre el polinomio de Taylor de grado  $n$  y el valor original de la función. Ahora, si se restringe el razonamiento solo a la derivada de primer orden de la función se obtiene

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R_1(x + \Delta x),$$

o equivalentemente, se despeja la función  $f'(x)$  de esta expresión y se obtiene la derivada dada por diferencias. Es decir,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{R_1(x + \Delta x)}{\Delta x},$$

lo que nos lleva a concluir que si el incremento  $\Delta x$  es suficientemente chico, entonces vale la siguiente expresión

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (\text{A.1})$$

## A.2. Definiciones de Distintas Diferencias

La expresión (A.1) permite definir los diferentes tipos de diferencias. En primer instancia se debe discretizar el intervalo  $(a, b)$  de definición de la función obteniendo un conjunto de nodos  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  de manera tal que  $a = x_1$  y  $b = x_N$ , se supone por simplicidad que los nodos se construyen de manera equidistante, es decir,  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ . Basándonos en esta breve introducción se pueden definir tres tipos de diferencias finitas.

**Definición A.1** *Diferencia hacia delante* [1] se caracteriza por utilizar el valor de la función en el nodo siguiente para la aproximación de la derivada en el punto

$$D^+ f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = f'(x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi) \Delta x, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ .

**Definición A.2** *Diferencia hacia atrás* [1] se caracteriza por utilizar el valor de la función en el nodo anterior para la aproximación de la derivada en el punto

$$D^- f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} = f'(x_i) - \frac{1}{2} f''(\xi) \Delta x, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ .

**Definición A.3** *Diferencia centrada* [1] se caracteriza por utilizar el valor de la función en el nodo anterior y el valor de la función en el nodo siguiente para la aproximación de la derivada en el punto

$$D^0 f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} = f'(x_i) + \frac{1}{6} f'''(\xi) (\Delta x)^2, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

### A.3. Sobre los Errores de Aproximación

En [1] se describe de forma sencilla la manera de acotar el error cometido al utilizar el método de diferencias finitas para aproximar numéricamente la derivada de una determinada función. El error cometido al utilizar un método numérico se obtiene, de manera teórica, mediante la diferencia (en valor absoluto) entre el valor exacto de la solución analítica y el aproximado con el modelo numérico utilizado.

En cuanto al caso particular del método de diferencias finitas, se debe tener en cuenta dos posibles focos de generación y arrastre de error. El primero se relaciona de manera directa con los errores de redondeo, debido a la representación decimal de máquina. El segundo foco se relaciona con el error de truncamiento, el cual se puede definir como la diferencia entre el valor exacto y el valor obtenido utilizando diferencias finitas suponiendo aritmética perfecta, es decir, suponiendo que no existen errores de redondeo.

En otras palabras el error de truncamiento al aproximar por diferencias finitas a la derivada de la función  $f$  en un punto  $x_i$  se define como  $f'(x_i) - Df(x_i)$ . Entonces según (A.2) y (A.3) el error de truncamiento al aproximar por diferencias finitas hacia delante o hacia atrás es directamente proporcional a  $\Delta x$ , el error es de primer orden y se denota  $O(\Delta x)$ . Por su parte, al usar diferencias finitas centrada (A.4) el error es de segundo orden y se denota  $O((\Delta x)^2)$ , esto se debe a que es directamente proporcional a  $(\Delta x)^2$ . Debido a que  $\Delta x$  es muy chico utilizando el método centrado se comete menor error de truncamiento que con la aproximación hacia atrás o hacia delante.

Las fórmulas de diferencias finitas para aproximar derivadas de mayor orden pueden ser obtenidas usando las fórmulas para derivadas de menor orden. Por ejemplo, la fórmula de diferencia central para aproximar una  $f''$  viene dada por la siguiente expresión

### A.3. SOBRE LOS ERRORES DE APROXIMACIÓN

---

$$D^{0(2)}f(x_i) = D^+D^-f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2} = f''(x_i) + \frac{1}{12}f^{iv}(\xi)(\Delta x)^2.$$

**Observación A.4** *Es interesante observar que la aproximación numérica de la derivada segunda utilizando diferencias finitas centradas, resulta también, ser de segundo orden.*



# Apéndice B

## Fundamentación Física de la Convección

En este apéndice se da una breve fundamentación física del fenómeno de Convección. Los conceptos que aquí se exponen son utilizados en el Capítulo 4 de esta tesis.

### B.1. El proceso de Convección

En la Subsección 1.2.2 se observa que el proceso de convección requiere la presencia de movimiento de fluidos. Es justamente el movimiento del fluido el que mejora la transferencia de calor y debido a esto la velocidad de transferencia de calor por convección a través de un fluido es mucho más alta que por conducción.

El mecanismo de convección es el más complejo de los procesos de transferencia de calor [37] debido a la dependencia de muchas variables, pues además de depender de la configuración geométrica y la aspereza de la superficie, depende fuertemente de las propiedades termofísicas del fluido, entre ellas, el tipo de flujo (laminar o turbulento), la viscosidad dinámica  $\mu_d$  [**kg/m s**], la conductividad térmica  $\kappa$  [**W/m °C**],

## B.1. EL PROCESO DE CONVECCIÓN

---

la densidad  $\rho$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] y el calor específico  $c_p$  [ $\text{J}/\text{kg } ^\circ\text{C}$ ]. A pesar de dicha complejidad se observa que la razón de transferencia de calor por convección, en este caso, es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa mediante la ley de Newton dada en (1.3).

La constante de proporcionalidad  $h$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{ } ^\circ\text{C}$ ] en (1.3) se define como la razón de transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido por unidad de área superficial, por unidad de diferencia en la temperatura. Una cuestión a tener en claro a la hora de abordar el estudio de los procesos de transferencia de calor por convección es que el fluido se detiene por completo sobre la superficie, es decir, el fluido se adhiere a la superficie debido a los efectos viscosos y no se desliza. Esta condición de no deslizamiento es responsable del desarrollo del perfil de velocidad. La región geométrica del fluido adyacente a la superficie, en la cual los efectos viscosos son significativos se llama capa límite. Otra consecuencia directa de la condición de no deslizamiento es lo que se denomina arrastre superficial y representa la fuerza que un fluido puede ejercer sobre una superficie. Si se quiere la consecuencia más importante de la condición de no deslizamiento es que la transferencia de calor de la superficie del sólido hacia la capa de fluido adyacente a esa superficie se da por conducción pura, es decir,

$$\dot{q}_{conv} = \dot{q}_{cond} = -\kappa_f u_x(x, t), \quad (\text{B.1})$$

donde  $\kappa_f$  [ $\text{W}/\text{m } ^\circ\text{C}$ ] denota la conductividad térmica del fluido, recordando la expresión (1.3) dada por

$$\dot{q}_{conv} = -h(u_s - u_\infty), \quad (\text{B.2})$$

se combinan las Ecuaciones (B.1)-(B.2) y se obtiene una expresión para el coeficiente  $h$

$$h = \frac{-\kappa_f u_x(x, t)}{u_s - u_\infty}.$$



## B.2. Número Adimensional de Nusselt

En los estudios de los procesos de transferencia de calor por convección resulta muy útil considerar la razón existente entre la velocidad de la transferencia de calor por convección y la velocidad de la transferencia de calor por conducción. Esta razón se expresa matemáticamente

$$\frac{\dot{q}_{conv}}{\dot{q}_{cond}} = \frac{h(u_s - u_\infty)}{\kappa \frac{u_s - u_\infty}{d}} = \frac{hd}{\kappa_f} = N_u,$$

donde  $d$  denota la longitud característica y  $N_u$  se conoce en la bibliografía como el número adimensional de Nusselt. Este número representa el mejoramiento de la transferencia de calor a través de una capa de fluido como resultado de la convección en relación con la conducción, pues entre mayor sea el número de Nusselt más eficaz es la convección.

## B.3. Capa Límite Térmica

Un concepto importante a tener en cuenta a la hora de estudiar transferencia de calor por convección es la capa límite térmica que se define como la región de flujo sobre la superficie, en la cual la variación de la temperatura en la dirección normal a la superficie es significativa. El espesor de la capa límite térmica a lo largo de la superficie se define como la distancia desde la superficie, para la cual  $(u - u_s) = 0,99(u_s - u_\infty)$ , este espesor aumenta en la dirección del flujo. La razón de la transferencia de calor por convección en cualquier parte a lo largo de la superficie está relacionada directamente con el gradiente de temperatura en ese lugar. Por lo tanto, la forma del perfil de temperaturas en la capa límite térmica impone la transferencia de calor por convección entre la superficie sólida y el fluido que fluye sobre ella.

## B.4. Número Adimensional de Prandtl

Otro número adimensional importante en este análisis es el número de Prandtl, que sirve para describir el espesor relativo de la capa límite. Físicamente mide la relación entre la difusividad molecular de la cantidad de movimiento y la difusividad molecular del calor, matemáticamente

$$Pr = \frac{\nu_c}{\alpha^2} = \frac{\mu_d c_p}{\kappa_f}, \quad (\text{B.3})$$

donde  $\nu_c$  es la viscosidad cinemática [ $\text{m}^2/\text{s}$ ],  $\alpha^2$  la difusividad térmica [ $\text{m}^2/\text{s}$ ],  $\mu_d$  viscosidad dinámica [ $\text{kg}/\text{m s}$ ],  $c_p$  el calor específico [ $\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}$ ] y  $\kappa_f$  la conductividad térmica [ $\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$ ].

## B.5. Mecanismos de Transferencia de Calor por Convección

Básicamente existen dos mecanismos de transferencia de calor por convección. La convección puede ser forzada interna o externamente mediante algún dispositivo mecánico (bomba o ventilador) donde se “fuerzan” los efectos deseados. Este tipo de convección es muy compleja, pues incluye, entre otras cosas, el análisis del intercambio de energía mecánica a energía térmica. El segundo mecanismo que es el que se trata en este capítulo es la convección que se da sin presencia de estos dispositivos mecánicos, se conoce en la bibliografía con el nombre de convección natural [37, 51]. Muchas aplicaciones científicas de la transferencia de calor comprenden la convección natural como el mecanismo principal, el enfriamiento de equipos electrónicos, la transferencia de calor de los calentadores eléctricos o radiadores de vapor de agua, son algunos de los tantos ejemplos.

## B.6. CONVECCIÓN NATURAL

---

Consideremos un ejemplo concreto para comprender mejor este fenómeno. Supongamos que se extrae del horno un alimento caliente, éste se expone al aire más frío, debido a ello la temperatura de la superficie exterior disminuye y la del aire adyacente se eleva como resultado de la conducción desde el contorno del alimento hacia el aire. Como consecuencia, el alimento pronto estará rodeado por una capa de aire más caliente y el calor es transferido de esta capa hacia las capas exteriores del aire. La temperatura del aire adyacente al alimento es más elevada y debido a ello su densidad es más baja, puesto que a presión constante la densidad de un gas es inversamente proporcional a su temperatura. Por lo tanto, la situación puede ser representada como gas de baja densidad rodeado por gas de alta densidad y las leyes naturales dictan que el gas menos denso suba. Este fenómeno puede caracterizarse como que el aire calentado sube. El espacio que deja el aire más caliente en los alrededores inmediatos del contorno del alimento es vuelto a ocupar por aire frío y así sucesivamente se repite este proceso hasta que el alimento se enfría y alcanza la temperatura del aire circundante.

## B.6. Convección Natural

La convección natural es tan eficaz en el calentamiento de las superficies frías en un medio ambiente más caliente como lo es el enfriamiento de superficies calientes en un medio ambiente más frío [37]. Tratemos de entender mejor las razones físicas de este fenómeno. En un campo gravitacional existe una fuerza neta que empuja hacia arriba un fluido ligero en uno más pesado, la fuerza hacia arriba ejercida por un fluido sobre un cuerpo sumergido completo o parcialmente se llama fuerza de flotabilidad o de empuje aerostático. La magnitud de esta fuerza es igual al peso del fluido desplazado, es decir,

$$F_{flot} = \rho_f g V_c,$$

## B.7. COEFICIENTE DE EXPANSIÓN VOLUMÉTRICA

---

donde  $\rho_f$  es la densidad media del fluido [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ],  $g$  es la aceleración gravitacional [ $\text{m}/\text{s}^2$ ] y  $V_c$  es el volumen del cuerpo que está sumergido [ $\text{m}^3$ ].

Luego, a falta de otras fuerzas, la fuerza vertical neta que actúa sobre el cuerpo es la diferencia entre su peso y la fuerza de flotabilidad, ley conocida como el principio de Arquímedes [51], es decir,

$$F_N = P - F_{flot} = \rho_c g V_c - \rho_f g V_c = g V_c (\rho_c - \rho_f),$$

donde  $F_N$  es la fuerza neta vertical [ $\text{N}$ ],  $P$  es el peso del cuerpo [ $\text{N}$ ],  $F_{flot}$  es la fuerza de flotabilidad [ $\text{N}$ ] y  $\rho_c, \rho_f$  es la densidad del cuerpo y del fluido respectivamente [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].

## B.7. Coeficiente de Expansión Volumétrica

En los estudios de transferencia de calor la variable principal es la temperatura y resulta conveniente expresar la fuerza neta de flotabilidad en términos de la diferencia de temperatura, para esto es necesario expresar la diferencia de densidades en términos de diferencia de temperaturas, lo cual requiere el conocimiento de una propiedad que represente la variación de la densidad de un fluido con la temperatura a presión constante. La propiedad que nos proporciona esta información es conocida en la literatura y se denomina coeficiente de expansión volumétrica  $\beta_V$  que se define como

$$\beta_V = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{u_\infty - u}, \quad (\text{B.4})$$

donde  $\rho_\infty, u_\infty$  son la densidad y la temperatura del fluido lejos de la superficie y  $u$  es la temperatura termodinámica medida en escala absoluta [ $\text{K}$ ].

En el caso particular de que el fluido considerado sea un gas ideal, la Ecuación (B.4)

## B.8. NÚMERO ADIMENSIONAL DE GRASHOF

---

se reduce a

$$\beta_V = \frac{1}{u}.$$

Por lo tanto, entre mayor sea la diferencia de temperatura entre el fluido adyacente a una superficie caliente y aquel que está lejos de ella, mayor será la fuerza de empuje y más fuertes las corrientes de convección natural. Como consecuencia, más alta será la razón de la transferencia de calor.

La magnitud de transferencia de calor por convección natural entre una superficie y un fluido está relacionada de manera directa con el gasto de este último. Entre mayor sea el gasto, más alta será la razón de transferencia de calor. Dicho gasto se establece por el equilibrio dinámico de la flotabilidad y la fricción.

## B.8. Número Adimensional de Grashof

Las ecuaciones que rigen el flujo de convección natural son las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de conservación de la energía. A partir de las cuales es posible determinar un parámetro adimensional que representa los efectos de la convección natural a través de la razón entre la fuerza de flotabilidad y la fuerza viscosa que actúan sobre el fluido. Dicho parámetro es conocido en la bibliografía como el número de Grashof y definido por

$$G_r = \frac{g\beta_V d^3 (u_s - u_\infty)}{\nu_c^2}. \quad (\text{B.5})$$

## B.9. Relación entre los Números Adimensionales

La transferencia de calor por convección natural sobre una superficie depende de la configuración geométrica de ésta así como de su orientación. También depende de la

## B.9. RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS ADIMENSIONAL

---

variación de la temperatura sobre la superficie y de las propiedades termofísicas que intervienen. Las complejidades del movimiento del fluido hacen que sea muy difícil de obtener relaciones analíticas sencillas para la transferencia de calor mediante la resolución de las ecuaciones que rigen el movimiento y la energía. Es decir, existen algunas soluciones analíticas para la convección natural, pero carecen de generalidad, ya que se obtienen para configuraciones geométricas sencillas con algunas hipótesis simplificadoras. Debido a ello, las relaciones de transferencia de calor en la convección natural se basan en estudios experimentales. Las correlaciones empíricas para el número adimensional promedio de Nusselt indican que puede ser calculado como

$$N_u = \frac{hd}{\kappa_f} = C(R_a)^n = C(G_r P_r)^n, \quad (\text{B.6})$$

donde  $C, n$  son constantes que dependen de la geometría y se determinan experimentalmente,  $R_a, G_r$  y  $P_r$  son los números adimensionales de Rayleigh, Grashof (B.5) y Prandtl (B.3) respectivamente.

# Bibliografía

- [1] Agnelli, J.P. *Estimación de parámetros y clasificación de datos*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba (2011).  
<https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/158/DMat60.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [2] Ahmadabadi, M., Arab, M., and Maalek Ghaini, F.M. *The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem*. Engineering Analysis with Boundary Elements **33**(10) (2009), pp. 1231–1235.  
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.05.001>
- [3] Akrivis, G., Makridakis, C. and Nochetto, R. *A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations*. Mathematics of Computation **75**(254) (2006), pp. 511–531.  
<http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-05-01800-4>
- [4] Alaña, J.E. *Optimal measurements locations for parameter estimation of non linear distributed parameter systems*. Brazilian Journal of Chemical Engineering **27**(4) (2010), pp. 627–642.  
<https://doi.org/10.1590/S0104-66322010000400015>
- [5] Al-Gwaiz, M.A. *Sturm-Liouville theory and its applications*. Springer, Berlin (2008).  
<https://doi.org/10.1007/978-1-84628-972-9>
- [6] Alifanov, O.M. and Artyukhin, F.A. *Regularized numerical solution of non-linear inverse heat conduction problem*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics **29**(1) (1975), pp. 934–938.  
<https://doi.org/10.1007/bf00860643>

- [7] Al-Khalidy, N. *On the solution of parabolic and hyperbolic inverse heat conduction problems*. International Communications in Heat and Mass Transfer **41**(23) (1998), pp. 3731–3740.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00102-1](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00102-1)
- [8] Al-Najem, N.M., Osaman, A.M., El-Refae, M.M and Khanafer, K.M. *Two dimensional steady-state inverse heat conduction problems*. International Communications in Heat and Mass Transfer **25**(4) (1998), pp. 541–550.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933\(98\)00041-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933(98)00041-4)
- [9] Alonso, A.A., Kevrekidis, I.G., Banga, J.R. and Frouzakis, C.E. *Optimal sensor location and reduced order observer design for distributed process systems*. Computers and Chemical Engineering **28**(1–2) (2004), pp. 27–35.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0098-1354\(03\)00175-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0098-1354(03)00175-3)
- [10] Ames, W.F. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic, New York (1977).  
<https://doi.org/10.1016/c2013-0-10291-7>
- [11] Andrisano, V., Cavrini, V., Summer, P. and Passuti, S. *Determination of impurities in oxidation hair dyes as raw materials by liquid chromatography (HPLC)*. International Journal of Cosmetic Science **17**(2) (1995), pp. 53–60.  
<https://doi.org/10.1111/j.1467-2494.1995.tb00109.x>
- [12] Antoniadis, C. and Christofides, P.D. *Integrating nonlinear output feedback control and optimal actuator/sensor placement for transport-reaction processes*. Chemical Engineering Science **56**(15) (2001), pp. 4517–4535.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509\(01\)00123-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509(01)00123-3)
- [13] Arlot, S. and Celisse, A. *A survey of cross-validation procedures for model selection*. Statistics Surveys **4** (2010), pp. 40–79.  
<https://doi.org/10.1214/09-ss054>
- [14] Asanov, A. *Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind*. De Gruyter, Berlin (1998).  
<https://doi.org/10.1515/9783110943238>
- [15] Aster, R.C., Borchers, B. and Thurber, C.H. *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier, Amsterdam (2018).  
<https://doi.org/10.1016/c2015-0-02458-3>



BIBLIOGRAFÍA

---

- [16] Aziz, A., Jan, S., Waqar, F., Mohammad, B., Hakim, M. and Yawar, W. *Selective ion exchange separation of uranium from concomitant impurities in uranium materials and subsequent determination of the impurities by ICP-OES*. Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry **284**(1) (2010), pp. 117–121.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10967-009-0444-5>
- [17] Backus, G.E. and Gilbert, J.F. *Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems*. Geophysical Journal International **13**(1–3) (1967), pp. 247–276.  
<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02159.x>
- [18] Bairi, A., Zarco-Pernia, E. and García de Mará, J.M. *A review on natural convection in enclosures for engineering applications. The particular case of the parallelogrammic diode cavity*. Applied Thermal Engineering **63**(1) (2014), pp. 304–322.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.10.065>
- [19] Bakushinsky, A., Goncharsky, A., Rber, D.C. and Brown, B.H. *Ill-posed problems: theory and applications*. Springer, Netherlands (1994).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-1026-6>
- [20] Banks, H.T., Dediu, S. and Ernstberger, S.L. *Sensitivity functions and their uses in inverse problems*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems **15** (2007), pp. 683–708.  
<http://dx.doi.org/10.1515/jiip.2007.038>
- [21] Banks, H.T., Holm, K. and Kappel, F. *Comparison of optimal design methods in inverse problems*. Inverse Problems **27**(7) (2011), 075002.  
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/7/075002>
- [22] Banks, H.T., Rubio, D., Saintier, N. and Troparevsky, M.I. *Optimal electrode positions for the inverse problem of EEG in a simplified model in 3D*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **4** (2013), pp. 521–524.  
[https://drive.google.com/file/d/1YMQxHaDM0-tJ4uhGKcJCLHkX\\_rfz5Tu/view](https://drive.google.com/file/d/1YMQxHaDM0-tJ4uhGKcJCLHkX_rfz5Tu/view)
- [23] Banks, H.T., Rubio, D., Saintier, N. and Troparevsky, M.I. *Optimal design for parameter estimation in EEG problems in a 3D multilayered domain*. Mathematical Biosciences and Engineering **12**(4) (2015), pp. 739–760.  
<https://doi.org/10.3934/mbe.2015.12.739>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [24] Barber, D.C. *Electrical impedance tomography/applied potential tomography*. Engineering Science and Education Journal **2**(3) (1993), pp. 101–103.  
<https://doi.org/10.1049/esej:19930031>
- [25] Barturkin, V. *Micro-satellites thermal control-concepts and components*. Acta Astronautica **56**(1–2) (2005), pp. 161–170.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.09.003>
- [26] Basha, H.A. and El Habel, F.S. *Analytical solution of the one-dimensional time-dependent transport equation*. Water Resources Research **29**(9) (1993), pp. 3209–3214.  
<https://doi.org/10.1029/93WR01038>
- [27] Bayazitoglu, Y., Suryanarayana, P.V.R. and Sathuvalli, U.B. *High temperature thermal diffusivity determination procedure for solids and liquids*. Journal of Thermophysics and Heat Transfer **4**(4) (1990), pp. 462–468.  
<http://dx.doi.org/10.2514/3.209>
- [28] Beck, J.V. *Calculation of thermal diffusivity from temperature measurements*. Journal of Heat Transfer **85**(2) (1963), pp. 181–182.  
<https://doi.org/10.1115/1.3686050>
- [29] Beck, J.V. *Determination of optimum, transient experiments for thermal contact conductance*. International Journal of Heat and Mass Transfer **12**(5) (1969), pp. 621–633.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(69\)90043-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(69)90043-X)
- [30] Beck, J.V. *Nonlinear estimation applied to the nonlinear heat conduction problem*. International Journal of Heat and Mass Transfer **13**(4) (1970), pp. 703–716.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90044-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90044-X)
- [31] Beck, J.V. and Arnold, K.J. *Parameter estimation in engineering and science*. Wiley, New York (1977).  
<https://doi.org/10.1002/aic.690240233>
- [32] Beck, J.V. *Sequential estimation of thermal parameters*. Journal of Heat Transfer **99**(2) (1977), pp. 314–321.  
<https://doi.org/10.1115/1.3450687>

BIBLIOGRAFÍA

---

- [33] Beck, J.V. *Criteria for comparasion of methods of solution of the inverse heat conduction problems*. Nuclear Engineering and Design **53**(1) (1979), pp. 11–22.  
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(79\)90035-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90035-9)
- [34] Beck, J.V., Litkouhi, B. and Clair, J.R.C. *Efficient sequential solution of the nonlinear inverse heat conduction problem*. Numerical Heat Transfer **5**(3) (1982), pp. 275–286.  
<https://doi.org/10.1080/10407788208913448>
- [35] Beck, J.V., Blacwell, B. and Clair, J.R.C. *Inverse heat conduction: ill-posed problem*. Wiley, New York (1985).  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19870670331>
- [36] Beck, J.V. *Filter solutions for the nonlinear inverse heat conduction problem*. Inverse Problems in Science and Engineering **16**(1) (2008), pp. 3–20.  
<https://doi.org/10.1080/17415970701198332>
- [37] Bejan, A. *Convection heat transfer*. Wiley, New York (2013).  
<https://dx.doi.org/10.1002/9781118671627>
- [38] Ben-Israel A. *The moore of the Moore-Penrose inverse*. Electronic Journal of Linear Algebra **9** (2002), pp. 150–157.  
<http://dx.doi.org/10.13001/1081-3810.1083>
- [39] Beroza, G.C. and Spudich, P. *Linearized inversion for fault rupture behavior: application to the 1984 Morgan Hill, California, earthquake*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth **93**(B6) (1988), pp. 6275–6296.  
<https://doi.org/10.1029/JB093iB06p06275>
- [40] Bharati, V.K., Singh, V.P., Sanskrityayn, A. and Kumar, N. *Analytical solution of advection-dispersion equation with spatially dependent dispersivity*. Journal of Engineering Mechanics **143**(11) (2017), pp. 1–11.  
[http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)em.1943-7889.0001346](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0001346)
- [41] Bird, R. *Transport phenomena*. Wiley, New York (2002).  
<https://doi.org/10.1115/1.1424298>
- [42] Bonesky, T. *Morozov's discrepancy principle and Tikhonov-type functionals*. Inverse Problems **25**(1) (2008), pp. 1–11.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/25/1/015015>

- [43] Bonnet, M. *Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity*. Engineering Analysis with Boundary Elements **15**(1) (1995), pp. 93–102.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0955-7997\(95\)00022-G](http://dx.doi.org/10.1016/0955-7997(95)00022-G)
- [44] Burggraf, O.R. *An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications*. Journal of Heat Transfer **86**(3) (1964), pp. 373–380.  
<https://doi.org/10.1115/1.3688700>
- [45] Burns, J.A., Rubio, D. and Troparevsky, M.I. *Sensitivity computations for elliptic equations with interfaces*. In Proceedings ICNPAA-2006 Conference on Mathematical Problems in Engineering and Aerospace Sciences, (2006).  
[https://www.researchgate.net/profile/Maria-Troparevsky-2/publication/254391011\\_SENSITIVITY\\_COMPUTATIONS\\_FOR\\_ELLIPTIC\\_EQUATIONS\\_WITH\\_INTERFACES/links/00b7d53b1564fdff06000000/SENSITIVITY-COMPUTATIONS-FOR-ELLIPTIC-EQUATIONS-WITH-INTERFACES.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Maria-Troparevsky-2/publication/254391011_SENSITIVITY_COMPUTATIONS_FOR_ELLIPTIC_EQUATIONS_WITH_INTERFACES/links/00b7d53b1564fdff06000000/SENSITIVITY-COMPUTATIONS-FOR-ELLIPTIC-EQUATIONS-WITH-INTERFACES.pdf)
- [46] Cahill, D.G., Ford, W.K., Goodson, K.E., Mahan, G.D., Majumdar, A., Maris, H.J., Merlin, R. and Phiiopot, S.R. *Nanoscale thermal transport*. Journal of Applied Physics **93**(2) (2003), pp. 793–818.  
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1524305>
- [47] Cain, G. and Meyer, G.H. *Separation of variables for partial differential equations: an eigenfunction approach*. CRC Press, Florida (2005).  
<https://doi.org/10.4324/9780203498781>
- [48] Calvetti, D., Morigi, S., Reichel, L. and Sgallari, F. *Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics **123**(1–2) (2000), pp. 423–446.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00414-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00414-3)
- [49] Cannon, J.R. *The one-dimensional heat equation*. Cambridge University Press, Cambridge (1984).  
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09781139086967>
- [50] Cannon, J.R. and Duchateau, P. *Structural identification of an unknown source term in a heat equation*. Inverse Problems **14**(3) (1998), pp. 535–551.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/14/3/010>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [51] Cengel, Y.A. *Heat and mass transfer: a practical approach*. McGraw-Hill, New York (2007).  
[https://www.academia.edu/38856854/Heat\\_and\\_Mass\\_Transfer\\_A\\_Practical\\_Approach\\_3rd\\_Edition\\_by\\_Cengel20190418\\_8592\\_13b2vml](https://www.academia.edu/38856854/Heat_and_Mass_Transfer_A_Practical_Approach_3rd_Edition_by_Cengel20190418_8592_13b2vml)
- [52] Chadan, K., Sabatier, P.C. and Newton, R.G. *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer, Berlin (2012).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-83317-5>
- [53] Chai, J.C., Lee, H.S. and Patankar, S.V. *Finite volume method for radiation heat transfer*. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **8**(3) (1994), pp. 419–425.  
<http://dx.doi.org/10.2514/3.559>
- [54] Chantasiriwan, S. *Inverse heat conduction problem of determining time-dependent heat transfer coefficient*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **42**(23) (1999), pp. 4275–4285.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00094-0](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00094-0)
- [55] Chantasiriwan, S. *Steady-state determination of temperature-dependent thermal conductivity*. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **29**(6) (2002), pp. 811–819.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933\(02\)00371-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933(02)00371-8)
- [56] Charles, R. *Elementary differential equations*. CRC Press, Florida (2018).  
<https://doi.org/10.1201/9781315152103>
- [57] Chaskalovic, J. *Finite element methods for engineering sciences: theoretical approach and problem solving techniques*. Springer, Berlin (2008).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76343-7>
- [58] Chatterjee, S. and Hadi, A.S. *Sensitivity analysis in linear regression*. Wiley, New York (1988).  
<http://dx.doi.org/10.1002/9780470316764>
- [59] Chen, H.T., and Lin, J.Y. *Simultaneous estimations of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **41**(14) (1998), pp. 2237–2244.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00260-3](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00260-3)

- [60] Chen, U.C., Chang, W.J. and Hsu, J.C. *Two-dimensional inverse problem in estimating heat flux of pin fins*. International Communications in Heat and Mass Transfer **28**(6) (2001), pp. 793–801.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933\(01\)00283-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933(01)00283-4)
- [61] Cheng, W., Fu, C.L. and Quian, Z. *A modified Tikhonov regularization method for a spherically symmetric three-dimensional inverse heat conduction problem*. Mathematics and Computers in Simulation **75**(3–4) (2007), pp. 97–112.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2006.09.005>
- [62] Cheng, W., Fu, C.L. and Quian, Z. *Two regularization methods for a spherically symmetric inverse heat conduction problem*. Applied Mathematical Modelling **32**(4) (2008), pp. 432–442.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2006.12.012>
- [63] Chung, D.D.L. *Thermal interface materials*. Journal of Materials Engineering and Performance **10**(1) (2001), pp. 56–59.  
<http://dx.doi.org/10.1361/105994901770345358>
- [64] Chung, T.J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge (2010).  
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511780066>
- [65] Churchill, S.W. *Free convection around immerser bodies. Heat Exchange Design Handbook*. Hemi-sphere Publishimng (2002).  
<http://dx.doi.org/10.1615/hedhme.a.000174>
- [66] Clausing, A.M. and Chao, B.T. *Thermal contact resistance in a vacuum environment*. Journal of Heat Transfer **87**(2) (1965), pp. 243–250.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3689082>
- [67] Cokburn, B., Karniadakis, G.E. and Shu, C.W. *The development of discontinuous Galerkin methods*. Springer, Berlin (2000).  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_1)
- [68] Collatz, L. *The numerical treatment of differential equations*. Springer, Berlin (1960).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-05500-7>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [69] Craig, I.J.D. and Brown, J.C. *Inverse problems in astronomy. A guide to inversion strategies for remotely sensed data*. Bristol, England and Boston (1986).  
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986ipag.book.....C/abstract>
- [70] Crank, J. and Nicolson, P. *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **43**(1) (1947), pp. 50–67.  
<https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>
- [71] Cuch, D.A., El Hasi, C.D., Rubio, D. and Urcola, C. *Preprocesamiento de datos para el modelado de la segregación en un problema de transporte*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **4** (2013), pp. 738–741.  
[https://drive.google.com/file/d/1YMVQxHaDMO-tJ4uhGKcJCLHkX\\_rfz5Tu/view](https://drive.google.com/file/d/1YMVQxHaDMO-tJ4uhGKcJCLHkX_rfz5Tu/view)
- [72] Danisman, K., Dalkiran, I. and Celebi, F.V. *Design of a high precision temperature measurement system based on artificial neural network for different thermocouple types*. Measurement **39**(8) (2006), pp. 695–700.  
<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2006.03.015>
- [73] Dantas, L.B. and Orlande, H.R.B. *A function estimation approach for determining temperature dependent thermophysical properties*. Inverse Problems in Engineering **3**(4) (1996), pp. 261–279.  
<http://dx.doi.org/10.1080/174159796088027627>
- [74] Das, D., Roy, M. and Basak, T. *Studies on natural convection within enclosures of various (non-square) shapes—A review*. International Journal of Heat and Mass Transfer **106** (2017), pp. 356–406.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.034>
- [75] Das, P., Begam, S. and Singh, M.K. *Mathematical modeling of groundwater contamination with varying velocity field*. Journal of Hydrology and Hydromechanics **65**(2) (2017), pp. 192–204.  
<https://doi.org/10.1515/johh-2017-0013>
- [76] Díaz, J. and Lions, P.L. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*. Pitman, London (1985).  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19870670311>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [77] Doicu, A., Trautmann, T. and Schreier, F. *Numerical regularization for atmospheric inverse problems*. Springer, Berlin (2010).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-05439-6>
- [78] Dou, F.F. and Fu, C.L. *Determining an unknown source in the heat equation by a wavelet dual least squares method*. Applied Mathematics Letters **22**(5) (2009), pp. 661–667.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2008.08.003>
- [79] Dou, F.F., Fu, C.L. and Yang, F.L. *Optimal error bound and Fourier regularization for identifying an unknown source in the heat equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics **230**(2) (2009), pp. 728–737.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.01.008>
- [80] El Badia, A. and Ha-Duong, T. *An inverse source problem in potential analysis*. Inverse Problems **16**(3) (2000), pp. 651–663.  
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/3/308>
- [81] Eldén, L., Berntsson, F. and Reginška, T. *Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation*. SIAM Journal on Scientific Computing **21**(6) (2000), pp. 2187–2205.  
<http://dx.doi.org/10.1137/S1064827597331394>
- [82] Engl, H.W. *Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates*. Journal of Optimization Theory and Applications **52**(2) (1987), pp. 209–215.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF00941281>
- [83] Engl, H.W., Hanke, M. and Neubauer, A. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic, Boston (1996).  
<https://www.springer.com/gp/book/9780792341574>
- [84] Enting, I.G. *Inverse problems in atmospheric constituent transport*. Cambridge University Press, Cambridge (2002).  
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511535741>
- [85] Eymard, R., Gallouët, T. and Herbin, R. *Finite volume methods*. Handbook of Numerical Analysis **7** (2000), pp. 713–1018.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S1570-8659\(00\)07005-8](http://dx.doi.org/10.1016/S1570-8659(00)07005-8)



- [86] Farcas, A., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. and Mera, S. *A dual reciprocity boundary element method for the regularized numerical solution of the inverse source problem associated to the Poisson equation*. Inverse Problems in Engineering **11**(2) (2003), pp. 123–139.  
<http://dx.doi.org/10.1080/1068276031000074267>
- [87] Farcas, A. and Lesnic, D. *The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable*. Journal of Engineering Mathematics **54**(4) (2006), pp. 375–388.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10665-005-9023-0>
- [88] Farnia, I. and Beck, J.V. *A Numerical solution of transient heat conduction equation for heat treatable alloys whose thermal properties change with time and temperature*. Journal of Heat Transfer **99**(3) (1977), pp. 471–478.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3450720>
- [89] Feijóo, R.A., Padra, C., Saliba, R., Taroco, E. and Venere, M.J. *Shape sensitivity analysis for energy release rate evaluation and its application to the study of three-dimensional cracked bodies*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **188**(4) (2000), pp. 649–664.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00353-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00353-9)
- [90] Flach, G.P. and Özisik, M.N. *Inverse heat conduction problem of simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity per unit volume*. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications **16**(2) (1989), pp. 249–266.  
<https://doi.org/10.1080/10407788908944716>
- [91] Fu, C.L. *Simplified Tikhonov and Fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics **167**(2) (2004), pp. 449–463.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.10.011>
- [92] Gibou, F., Fedkiw, R.P., Cheng, L.T. and Kang, M. *A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains*. Journal of Computational Physics **176**(1) (2002), pp. 205–227.  
<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2001.6977>
- [93] Giri, N.C. *Introduction to probability and statistics*. CRC Press, Florida (1993).  
<https://doi.org/10.1201/9780203749920>

- [94] Gordon, C. Webb, D.L. and Wolpert, S. *One cannot hear the shape of a drum*. Bulletin of the American Mathematical Society **27**(1) (1992), pp. 134–138.  
<http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00289-6>
- [95] Görög, S. *Identification and determination of impurities in drugs*. Elsevier, Amsterdam (2000).  
[https://doi.org/10.1016/s1464-3456\(00\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s1464-3456(00)x8001-5)
- [96] Grafakos, L. *Classical Fourier analysis*. Springer, New York (2008).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-09432-8>
- [97] Groetsch, C.W. *Inverse problems in the mathematical sciences*. Vieweg, Braunschweig (1993).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-99202-4>
- [98] Grysa, K., Cialkowski, M.J. and Kaminski, H. *An inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses*. Nuclear Engineering and Design **64**(2) (1981), pp. 169–184.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0029-5493\(81\)90002-9](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5493(81)90002-9)
- [99] Guenther, R. and Lee, J. *Sturm-Liouville problems. Theory and Numerical Implementation*. CRC Press, Florida (2018).  
<http://dx.doi.org/10.1201/9780429437878>
- [100] Hadamard, J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. The Mathematical Gazette **12**(171) (1924), pp. 173–174.  
<https://doi.org/10.2307/3603014>
- [101] Hahn, D.W. and Özisik, M.N. *Heat conduction*. Wiley, New York (2012).  
<https://doi.org/10.1002/9781118411285>
- [102] Hairer, E., Norsett, S.O. and Wanner, G. *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*. Springer, Berlin (2008).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
- [103] Haji-Sheikh, A. and Buckingham, F.P. *Multidimensional inverse heat conduction using the Monte Carlo method*. Journal of Heat Transfer **115**(1) (1993), pp. 26–33.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2910662>

BIBLIOGRAFÍA

---

- [104] Han, Z.H., Guo, P.X. and Zhou, S.G. *Study on the interface and performance of Ti-Al laminated composite electrode materials*. Journal of New Materials for Electrochemical Systems **18**(3) (2015), pp. 159–164.  
<https://doi.org/10.14447/jnmes.v18i3.363>
- [105] Han, Z.H., Yu, X., Zhu, P., Zhou, S.G. and Yang, Y. *Formation mechanism of phase interface for diffusion couple of Pb/Sn layered composite*. Journal of New Materials for Electrochemical Systems **20**(2) (2017), pp. 83–87.  
<http://dx.doi.org/10.14447/jnmes.v20i2.303>
- [106] Hangos, K. and Cameron, I. *Process modelling and model analysis*. Academic Press, Cambridge (2001).  
[https://doi.org/10.1016/s1874-5970\(01\)x8001-6](https://doi.org/10.1016/s1874-5970(01)x8001-6)
- [107] Hansen, P.C. *Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **11**(3) (1990), pp. 503–518.  
<http://dx.doi.org/10.1137/0911028>
- [108] Hansen, P.C. *Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve*. SIAM review **34**(4) (1992), pp. 561–580.  
<http://dx.doi.org/10.1137/1034115>
- [109] Hansen, P.C. and Oleary, A.P. *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*. SIAM Journal on Scientific Computing **14**(6) (1993), pp. 1487–1503.  
<http://dx.doi.org/10.1137/0914086>
- [110] Hansen, P.C., Kilmer, M.E. and Kjeldsen, R.H. *Exploiting residual information in the parameter choice for discrete ill-posed problems*. BIT Numerical Mathematics **46**(1) (2006), pp. 41–59.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10543-006-0042-7>
- [111] Hernández-Morales, B., Brimacombe, J.K. and Hawbolt, E.B. *Application of inverse techniques to determine heat-transfer coefficients in heat-treating operations*. Journal of Materials Engineering and Performance **1**(6) (1992), pp. 763–771.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF02658259>
- [112] Hills, R.G. and Hensel, E.C. Jr. *One-dimensional nonlinear inverse heat conduction technique*. Numerical Heat Transfer **10**(4) (1986), pp. 369–393.  
<http://dx.doi.org/10.1080/10407788608913525>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [113] Hoerl, A.E. and Kannard, R.W. *Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems*. *Technometrics* **12**(1) (1970), pp. 55–67.  
<http://dx.doi.org/10.1080/00401706.1970.10488634>
- [114] Hoerl, A.E., Kannard, R.W. and Baldwin, K.F. *Ridge regression: some simulations*. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **4**(2) (1975), pp. 105–123.  
<http://dx.doi.org/10.1080/03610927508827232>
- [115] Hofmann B. *Regularization for applied inverse and ill-posed problems*. Springer, Berlin (1986).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-322-93034-7>
- [116] Holder, D. *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*. CRC Press, Florida (2004).  
<https://doi.org/10.1201/9780367801595>
- [117] Hölder, J., Niedermeyer, J. Redenbach, C. Ecke, N. Schlarb, A., Andrä, H. and Klein, P. *The effective thermal conductivity of double-reinforced composites*. *Heat and Mass Transfer* **56**(10) (2020), pp. 2847–2857.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00231-020-02897-8>
- [118] Hon, Y.C., Li, M. and Melnikov, Y.A. *Inverse source identification by Green's function*. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **34**(4) (2010), pp. 352–358.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.09.009>
- [119] Hristov, J. *Thermal impedance at the interface of contacting bodies: 1-D examples solved by semi-derivatives*. *Thermal Science* **16**(2) (2012), pp. 623–627.  
<http://dx.doi.org/10.2298/TSCI111125017H>
- [120] Huang, C.H. and Özisik, M.N. *Direct integration approach for simultaneously estimating temperature dependent thermal conductivity and heat capacity*. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications* **20**(1) (1991), pp. 95–110.  
<http://dx.doi.org/10.1080/10407789108944811>
- [121] Huang, C.H., Yan, J.Y. and Chen, H.T. *Function estimation in predicting temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements*. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **9**(4) (1995), pp. 667–673.  
<http://dx.doi.org/10.2514/3.722>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [122] Huang, C.H. and Yan, J.Y. *An inverse problem in simultaneously measuring temperature dependent thermal conductivity and heat capacity*. International Journal of Heat and Mass Transfer **38**(18) (1995), pp. 3433–3441.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(95\)00059-I](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(95)00059-I)
- [123] Huang, C.H. and Chin, S.C. *A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium*. International Journal of Heat and Mass Transfer **43**(22) (2000), pp. 4061–4071.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00044-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00044-2)
- [124] Imber, M. and Khan, J. *Prediction of transient temperature distributions with embedded thermocouples*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal **10**(6) (1972), pp. 784–789.  
<http://dx.doi.org/10.2514/3.50211>
- [125] Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. Wiley, New York (1996).  
<https://www.worldcat.org/title/fundamentals-of-heat-and-mass-transfer/oclc/33403372>
- [126] Isakov, V. *Inverse problems for partial differential equations*. Springer, New York (2017).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5>
- [127] Islam, S.H., Sarma, D. and Begun, P. *Heat and mass transfer on unsteady MHD free convection flow of chemically reactive and radiative flow past a vertical porous plate in slip flow regime with heat source/sink and thermal diffusion*. JP Journal of Heat and Mass Transfer **18**(1) (2019), pp. 109–132.  
<http://dx.doi.org/10.17654/HM018010109>
- [128] Jai, A.E. *Distributed systems analysis via sensors and actuators*. Sensors and Actuators A: Physical **29**(1) (1991), pp. 1–11.  
[https://doi.org/10.1016/0924-4247\(91\)80026-L](https://doi.org/10.1016/0924-4247(91)80026-L)
- [129] Jin, B. and Marin, L. *The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering **69**(8) (2007), pp. 1570–1589.  
<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1826>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [130] Johansson, B.T. and Lesnic, D. *Determination of a spacewise dependent heat source*. Journal of Computational and Applied Mathematics **209**(1) (2007), pp. 66–80.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.026>
- [131] Johansson, B.T. and Lesnic, D. *A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature*. Applicable Analysis: An International Journal **87**(3) (2008), pp. 265–276.  
<http://dx.doi.org/10.1080/00036810701858193>
- [132] Jurkowski, T., Jarny, Y. and Delaunay, D. *Estimation of thermal conductivity of thermoplastics under moulding conditions: an apparatus and an inverse algorithm*. International Journal of Heat and Mass Transfer **40**(17) (1997), pp. 4169–4181.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00027-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00027-6)
- [133] Kac, M. *Can one hear the shape of a drum?*. The American Mathematical Monthly **73**(4) parte 2 (1966), pp. 1–23.  
<https://doi.org/10.1080/00029890.1966.11970915>
- [134] Kanwal, R.P. *Generalized functions: theory and applications*. Elsevier, North Holland (2004).  
<https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8174-6>
- [135] Keller, J.B. *Inverse problems*. The American Mathematical Monthly **83**(2) (1976), pp. 107–118.  
<http://dx.doi.org/10.2307/2976988>
- [136] Kim, S., Chung B-J., Chan M. and Youn, K. *A note on the direct estimation of thermal properties in a transient nonlinear heat conduction medium*. International Communications in Heat and Mass Transfer **29**(6) (2002), pp. 787–795.  
[https://doi.org/10.1016/S0735-1933\(02\)00369-X](https://doi.org/10.1016/S0735-1933(02)00369-X)
- [137] Kim, S. and Lee, W. *An inverse method for estimating thermophysical properties of fluid flowing in a circular duct*. International Communications in Heat and Mass Transfer **29**(8) (2002), pp. 1029–1036.  
[https://doi.org/10.1016/S0735-1933\(02\)00431-1](https://doi.org/10.1016/S0735-1933(02)00431-1)

- [138] Kim, K., Mun, S., Jang, M., Sok, J. and Park, K. *Thermoelectric properties of Ni/Ge-multilayer-laminated silicon*. Applied Physics A **127**(1) (2021), pp. 1–7.  
<https://doi.org/10.1007/s00339-020-04200-2>
- [139] Kirsch, A. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer, New York (2011).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-8474-6>
- [140] Kittas, C. Boulard, T. and Papadakis, G. *Natural ventilation of a greenhouse with ridge and side openings: sensitivity to temperature and wind effects*. Transactions of the ASAE **40**(2) (1997), pp. 415–425.  
<http://dx.doi.org/10.13031/2013.21268>
- [141] Kollie, T.G., Horton, J.L., Carr, K.R., Herskovitz, M.B. and Mossman, C.A. *Temperature measurement errors with type K (Chromel vs Alumel) thermocouples due to short-ranged ordering in Chromel*. Review of Scientific Instruments **46**(11) (1975), pp. 1447–1461.  
<https://doi.org/10.1063/1.1134086>
- [142] Korbicz, J. and Uciński D. *Sensors allocation for state and parameter estimation of distributed systems*. Discrete Structural Optimization (1994), pp. 178–189.  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-85095-0\\_18](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-85095-0_18)
- [143] Körner, T.W. *Fourier analysis*. Cambridge university press, Cambridge (1989).  
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09781107049949>
- [144] Hossain, M.Z. and Floryan, J.M. *Natural convection in a horizontal fluid layer periodically heated from above and below*. Physical Review E **92**(2) (2015), 023015.  
<https://doi.org/10.1103/physreve.92.023015>
- [145] Krotov, O., Gromyko, P., Gravit, M., Belyaeva, S., Sultanov, S. *Thermal conductivity of geopolymer concrete with different types of aggregate*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering **1030**(1) (2021), pp. 12–18.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1030/1/012018>
- [146] Kryzhniy, V.V. *Direct regularization of the inversion of real-valued Laplace transforms*. Inverse Problems **19**(3) (2003), pp. 573–583.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/19/3/307>

BIBLIOGRAFÍA

---

- [147] Lam, T.T. and Yeung, W.K. *Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems*. Journal of Thermophysics and Heat Transfer **9**(2) (1995), pp. 335–344.  
<https://doi.org/10.2514/3.665>
- [148] Landford, D. *New analytic solutions of the one-dimensional heat equations for Temperature and heat flow rate both prescribed at the same fixed boundary (with applications to the change problem)*. Quarterly of Applied Mathematics **24**(4) (1967), pp. 315–322.  
<https://doi.org/10.1090/qam/211094>
- [149] Landgrebe, D.A. *Signal theory methods in multispectral remote sensing*. Wiley, New York (2003).  
<http://dx.doi.org/10.1002/0471723800>
- [150] Lattès R. and Lions, J.L. *The method of quasi-reversibility: applications to partial differential equations*. Elsevier, New York (1969).  
<http://www.sidalc.net/cgi-bin/wxis.exe/?IsisScript=UACHBC.xis&method=post&formato=2&cantidad=1&expresion=mfn=033704>
- [151] Lawson, R.N. *Implications of surface temperatures in the diagnosis of breast cancer*. Canadian Medical Association Journal **75**(4) (1956), pp. 309–310.  
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1824571/>
- [152] Lawson, R.N. and Chughtai, M.S. *Breast cancer and body temperatures*. Canadian Medical Association Journal **88**(2) (1963), pp. 68–70.  
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1920940/>
- [153] Le, T.T. and Nguyen, L.H. *A convergent numerical method to recover the initial condition of nonlinear parabolic equations from lateral cauchy data*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems **14**(3) (2020), pp. 287–300.  
<https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0028>
- [154] Lesnic, L., Elliot, L., Inghan, D.B., Clennell, B. and Knipe, R.J. *The identification of the piecewise homogeneous thermal conductivity of conductors subjected to a heat flow test*. International Journal of Heat and Mass Transfer **42**(1) (1999), pp. 143–152.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00132-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00132-X)



- [155] Li, K.C. *Asymptotic optimality for  $C_p$ ,  $CL$ , cross-validation and generalized cross-validation: discrete index set*. The Annals of Statistics **15**(3) (1987), pp. 958–975.  
<https://doi.org/10.1214/aos/1176350486>
- [156] Li, H.Y. and Yang, C.Y. *A genetic algorithm for inverse radiation problems*. International Journal of Heat and Mass Transfer **40**(7) (1997), pp. 1545–1549.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(96\)00233-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(96)00233-5)
- [157] Li, G.S., Tan, T.J., Cheng, J. and Wang, X.Q. *Determining magnitude of groundwater pollution sources by data compatibility analysis*. Inverse Problems in Science and Engineering **14**(3) (2006), pp. 287–300.  
<http://dx.doi.org/10.1080/17415970500485153>
- [158] Li, Q. and Nguyen, L.H. *Recovering the initial condition of parabolic equations from lateral Cauchy data via the quasi-reversibility method*. Inverse Problems in Science and Engineering **28**(4) (2020), pp. 580–598.  
<https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1643850>
- [159] Lindqvist, P. *Notes on the stationary  $p$ -Laplace equation*. Springer, New York (2019).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-14501-9>
- [160] Liu, C.S. *An two-stage LGSM to identify time dependent heat source through an internal measurement of temperature*. International Journal of Heat and Mass Transfer **52**(7–8) (2009), pp. 1635–1642.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.09.021>
- [161] Liu, C.S., Hong, H.K. and Atluri, S.N. *Novel algorithms based on the conjugate gradient method for inverting ill-conditioned matrices, and a new regularization method to solve ill-posed linear systems*. Computer Modeling in Engineering & Sciences **60**(3) (2010), pp. 279–308.  
<http://dx.doi.org/10.3970/cmesc.2010.060.279>
- [162] Liu, C.S. *Optimally scaled vector regularization method to solve ill-posed linear problems*. Applied Mathematics and Computation **218**(21) (2012), pp. 10602–10616.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.04.022>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [163] Loganathan, P. and Dhivya, M. *Thermal and mass diffusive studies on a moving cylinder entrenched in a porous medium*. Latin American applied research **48**(2) (2018), pp. 119–124.  
<https://doi.org/10.52292/j.laar.2018.269>
- [164] Lucy, L.B. *Astronomical inverse problems*. Reviews in Modern Astronomy **7** (1994), pp. 31–50.  
<http://adsabs.harvard.edu/full/1994RvMA....7...31L>
- [165] Luke, C.L. and Campbell, M.E. *Determination of impurities in germanium and silicon*. Analytical Chemistry **25**(11) (1953), pp. 1588–1593.  
<https://doi.org/10.1021/ac60083a004>
- [166] Ma, H.Y., Zhu, P.X., Zhou, S.G., Xu, J., Huang, W.F., Yang, H.M. and Chen, M.J. *Preliminary research on Pb-Sn-Al laminated composite electrode materials applied to zinc electrodeposition*. Advanced Materials Research **150–151** (2010), pp. 303–308.  
<http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.150-151.303>
- [167] Macleod, R., Dirks, W.G., Matsuo, Y., Kaufmann, M. Milch, H. and Drexler H.G. *Widespread intraspecies cross-contamination of human tumor cell lines arising at source*. International Journal of Cancer **83**(4) (1999), pp. 555–563.  
[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0215\(19991112\)83:4%3C555::AID-IJC19%3E3.0.CO;2-2](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0215(19991112)83:4%3C555::AID-IJC19%3E3.0.CO;2-2)
- [168] Maillet, D., Degiovanni, A. and Pasquetti, R. *Inverse heat conduction applied to the measurement of heat transfer coefficient on a cylinder: comparison between an analytical and a boundary element technique*. Journal of Heat Transfer **113**(3) (1991), pp. 549–557.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2910601>
- [169] Makinde, O.D. and Aziz, A. *MHD mixed convection from a vertical plate embedded in a porous medium with a convective boundary condition*. International Journal of Thermal Sciences **49**(9) (2010), pp. 1813–1820.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.05.015>
- [170] Markowich, P.A. *Applied partial differential equations: a visual Approach*. Springer, Berlin (2007).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-34646-3>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [171] Marks, R.J. *Handbook of Fourier analysis & its applications*. Oxford university press, New York (2009).  
<https://doi.org/10.1093/oso/9780195335927.001.0001>
- [172] Martin, T.J. and Dulikravich, G.S. *Inverse determination of boundary conditions and sources in steady heat conduction with heat generation*. Journal of Heat Transfer **118**(3) (1996), pp. 546–554.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2822666>
- [173] Martin, T.J. and Dulikravich, G.S. *Inverse determination of temperature-dependent thermal conductivity using steady surface data on arbitrary objects*. Journal of Heat Transfer **122**(3) (2000), pp. 450–459.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.1287726>
- [174] Mcadams, W.H. *Heat transmission*. McGraw-Hill, New York (1954).  
<https://www.worldcat.org/title/heat-transmission/oclc/683455>
- [175] Miyakawa, M. and Bolomey, J.C. *Non-invasive thermometry of the human body*. CRC Press, Florida (1996).  
<http://dx.doi.org/10.1201/9780367811044>
- [176] Moré, J.J. *The Levenberg-Marquardt algorithm: implemetation and theory*. Numerical analysis. Springer, Berlin, Heidelberg (1978).  
<http://dx.doi.org/10.1007/BFb0067700>
- [177] Morton, K.W. and Mayers, D.F. *Numerical solution of partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge (2005).  
<http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511812248>
- [178] Nara, T. and Ando, S. *A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation*. Inverse Problems **19**(2) (2003), pp. 355–369.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/19/2/307>
- [179] Natterer, F. *Error bounds for Tikhonov regularization in Hilbert scales*. Applicable Analysis: An International Journal **18**(1–2) (1984), pp. 29–37.  
<http://dx.doi.org/10.1080/00036818408839508>
- [180] Natterer, F. *The mathematics of computerized tomography*. SIAM, Philadelphia (2001).  
<http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898719284>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [181] Ohe, T. and Ohnaka, K. *A precise estimation method for locations in an inverse logarithmic potential problem for point mass models*. Applied Mathematical Modelling **18**(8) (1994), pp. 446–452.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)90306-9](http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X(94)90306-9)
- [182] Osgood, B., Phillips, R. and Sarnak, P. *Compact isospectral sets of surfaces*. Journal of Functional Analysis **80**(1) (1988), pp. 212–234.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236\(88\)90071-7](http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236(88)90071-7)
- [183] Osman, A.M. and Beck, J.V. *Investigation of transient heat transfer coefficients in quenching experiments*. Journal of Heat Transfer **112**(4) (1990), pp. 843–848.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2910490>
- [184] Özisik, M.N. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC Press, Florida (2015).  
<https://doi.org/10.1201/9781315168784>
- [185] Palmieri, J.V. and Rathjem, K.A. *CAVE 3-A General transient heat transfer computer code utilizing eigenvectors and eigenvalues*. NASA Contractor Report 145290, Virginia (1978).  
<https://ntrs.nasa.gov/citations/19780010416>
- [186] Pennes, H. *Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm*. Journal of Applied Physiology **1**(2) (1948), pp. 93–122.  
<http://dx.doi.org/10.1152/jappl.1948.1.2.93>
- [187] Pérez Guerrero, J.S. and Skagga, T.H. *Analytical solution for one-dimensional advectiondispersion transport equation with distance-dependent coefficients*. Journal of Hydrology **390** (2010), pp. 57–65.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2010.06.030>
- [188] Pert, E., Carmel, Y., Birnboim, A., Olorunyolemi, T., Gershon, D., Calame, J., Liroyd, I.K. and Wilson, O.C. *Temperature measurements during microwave processing: the significance of thermocouple effects*. Journal of the American Ceramic Society **84**(9) (2004), pp. 1981–1986.  
<https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.2001.tb00946.x>
- [189] Prabhu, K.N., Kumar, S.T. and Venkataraman, N. *Heat transfer at the metal/substrate interface during solidification of Pb-Sn solder alloys*. Journal of Materials Engineering and Performance **11**(3) (2002), pp. 265–273.  
<http://dx.doi.org/10.1361/105994902770344051>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [190] Rabiner, L.R. and Gold, B. *Theory and application of digital signal processing*. Harvard, Massachusetts (1975).  
<http://dx.doi.org/10.1109/TSMC.1978.4309918>
- [191] Rabitz, H., Kramer, M. and Dacol, D. *Sensitivity analysis in chemical kinetics*. Annual Review of Physical Chemistry **34**(1) (1983), pp. 419–461.  
<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.pc.34.100183.002223>
- [192] Rafajlowicz, E. *Design of experiments for eigenvalue identification in distributed-parameter systems*. International Journal of Control **34**(6) (1981), pp. 1079–1094.  
<https://doi.org/10.1080/00207178108922583>
- [193] Rafajlowicz, E. *Optimal experiment design for identification of linear distributed parameter systems: frequency domain approach*. IEEE Transactions on Automatic Control **28**(7) (1983), pp. 806–808.  
<https://doi.org/10.1109/TAC.1983.1103309>
- [194] Rafajlowicz, E. *Optimum choice of moving sensor trajectories for distributed parameter systems identification*. International Journal of Control **43**(5) (1986), pp. 1441–1451.  
<https://doi.org/10.1080/00207178608933550>
- [195] Ramesh, G. and Prabhu, K.N. *Heat transfer at the casting/chill interface during solidification of commercially pure Zn and Zn base alloy (ZA8)*. International Journal of Cast Metals Research **25**(3) (2012), pp. 160–164.  
<http://dx.doi.org/10.1179/1743133611Y.0000000026>
- [196] Rao, T.P., Sobhi, D. Daniel, S. and Gladis, J. M. *Tailored materials for preconcentration or separation of metals by ion-imprinted polymers for solid-phase extraction (IIP-SPE)*. TrAC Trends in Analytical Chemistry **23**(1) (2004), pp. 28–35.  
[https://doi.org/10.1016/S0165-9936\(04\)00106-2](https://doi.org/10.1016/S0165-9936(04)00106-2)
- [197] Rashad, A.M, Chamkha, A.J. and Modather, M. *Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal circular cylinder embedded in a porous medium filled with a nanofluid under convective boundary condition*. Computers & Fluids **86** (2013), pp. 380–388.  
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.07.030>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [198] Rashedi, K. and Yousef, S.A. *Ritz-Galerkin Method for solving a class of inverse problems in the parabolic equation*. International Journal of Nonlinear Science **12**(4) (2011), pp. 498–502.  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1086.9901&rep=rep1&type=pdf>
- [199] Reed, M.C. *Abstract nonlinear wave equations*. Springer, New York (1976).  
<https://doi.org/10.1007/bfb0079271>
- [200] Rensfelt, A., Mousavi, S., Mossberg, M. and Soderstrom, T. *Optimal sensor locations for nonparametric identification of viscoelastic materials*. Automatica **44**(1) (2008), pp. 28–38.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2007.04.007>
- [201] Rogers, G.F.C. *Heat transfer at the interface of dissimilar metals*. International Journal of Heat and Mass Transfer **2**(1–2) (1961), pp. 150–154.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(61\)90022-9](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(61)90022-9)
- [202] Rohatgi, V.K. and Saleh, A.M.E. *An introduction to probability and statistics*. Wiley, New York (2015).  
<https://doi.org/10.1002/9781118799635>
- [203] Rubinstein, R. Y. and Kroese, D.P. *Simulation and the Monte Carlo method*. Wiley, New York (2016).  
<http://dx.doi.org/10.1002/9781118631980>
- [204] Rubio, D. and Troparevsky, M.I. *The EEG forward problem: theoretical and numerical aspects*. Latin American Applied Research **36** (2006), pp. 87–92.  
<https://www.semanticscholar.org/paper/The-EEG-forward-problem%3A-theoretical-and-numerical-Rubio-Troparevsky/4abe4d0f4822d06c21206cc9fa42ea8a1b9998ad>
- [205] Rubio, D. and Troparevsky, M.I. *Sensitivity analysis on a simplified model of the EEG inverse problem*. Mecánica Computacional **26**(24) (2007), pp. 2086–2092.  
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/1248/1192>
- [206] Rubio, A.D., Zalts, A. and El Hasi, C.D. *Numerical solution of the advection-reaction-diffusion equation at different scales*. Environmental Modelling & Software **23**(1) (2008), pp. 90–95.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2007.05.009>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [207] Rubio, D., Saintier, N. and Troparevsky, M.I. *Optimal design techniques for parameter estimation in a bacterial growth model*. *Mecánica Computacional* **33**(32) (2014), pp. 2023–2036.  
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/4803/4734>
- [208] Rubio, D., Tarzia, D.A. and Umbricht, G.F. *Analytical and numerical solution of a heat transfer problem with solid-solid interface*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2021). **En etapa de revisión**.  
<https://www.journals.elsevier.com/international-journal-of-heat-and-mass-transfer>
- [209] Ruperti, N.J., Raynaud, M. and Sacadura, J.F. *A method for the solution of the coupled inverse heat conduction-radiation problem*. *Journal of Heat Transfer* **118**(1) (1996), pp. 10–17.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.2824022>
- [210] Rust, B.W. and O'leary, D.P. *Residual periodograms for choosing regularization parameters for ill-posed problems*. *Inverse Problems* **24**(3) (2008), pp. 1–30.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/24/3/034005>
- [211] Saliba, R., Padra, C., Vénere, M.J., Taroco, E. and Feijóo, R.A. *Adaptivity in linear elastic fracture mechanics based on shape sensitivity analysis*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**(34–35) (2005), pp. 3582–3606.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.046>
- [212] Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F. and Ratto, M. *Sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models*. Wiley, New York (2004).  
<http://dx.doi.org/10.1002/0470870958>
- [213] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. and Tarantola, S. *Global sensitivity analysis: the primer*. Wiley, New York (2008).  
<http://dx.doi.org/10.1002/9780470725184>
- [214] Salva, N.N. and Tarzia, D.A. *A sensitivity analysis for the determination of unknown coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity*. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **38**(4) (2011), pp. 418–424.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.12.017>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [215] Salva, N.N. and Tarzia, D.A. *Simultaneous determination of unknown coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity*. JP Journal of Heat and Mass Transfer **5**(1) (2011), pp. 11–39.  
<https://www.austral.edu.ar/investigadores/wp-content/uploads/2020/03/Salva-Tarzia-JPJJournalHeatMassTransfer-5201111-39.pdf>
- [216] Sanskrityayn, A., Suk, H. and Kumar, N. *Analytical solutions for solute transport in groundwater and riverine flow using Greens function method and pertinent coordinate transformation method*. Journal of Hydrology **547** (2017), pp. 517–533.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.02.014>
- [217] Santa Cruz, G.A., Bertotti, J., Gonzalez, S.J., Gossio, S., Alvarez, D., Roth, B.M.C., Menendez, P., Pereira, M.D., Albero, M., Cubau, L., Orellano, P. and Liberman, S.J. *Dynamic infrared imaging of cutaneous melanoma and normal skin in patients treated with BNCT*. Applied Radiation and Isotopes **67**(7–8) (2009), pp. S54–S58.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apradiso.2009.03.093>
- [218] Savateev, E.G. *On problems of determining the source function in a parabolic equation*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems **3**(1) (1995), pp. 83–102.  
<http://dx.doi.org/10.1515/jiip.1995.3.1.83>
- [219] Sawaf, B., Özisik, M.N., and Jarny, Y. *An inverse analysis to estimate linearly temperature dependent thermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium*. International Journal of Heat and Mass Transfer **38**(16) (1995), pp. 3005–3010.  
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(95\)00044-A](https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00044-A)
- [220] Scherzer, O. *The use of Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems*. Computing **1993**(51) (1993), pp. 45–60.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF02243828>
- [221] Serra, D. *Empirical determinants of corruption: a sensitivity analysis*. Public Choice **126**(1) (2006), pp. 225–256.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s11127-006-0286-4>
- [222] Sharafutdinov, V.A. *Integral geometry of tensor fields*. Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, Utrecht, (1994).  
<http://dx.doi.org/10.1515/9783110900095>



BIBLIOGRAFÍA

---

- [223] Shervedani, R.K., Isfahani, A.Z., Khodavisy, R. and Hatefi-Mehrjardi, A. *Electrochemical investigation of the anodic corrosion of Pb-Ca-Sn-Li grid alloy in H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> solution*. Journal of Power Sources **164**(2) (2007), pp. 890–895.  
<https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2006.10.105>
- [224] Silin, N., Masson, V.P. and Marino, R. *Heat transfer in a short parallel-plate channel in the transition regime*. Experimental Heat Transfer **25**(1) (2012), pp. 12–28.  
<https://doi.org/10.1080/08916152.2011.556312>
- [225] Silva, J.N., Moutinho, D.J., Moreira, A.L., Ferreira, I.L. and Rocha, O.L. *Determination of heat transfer coefficients at metal-mold interface during horizontal unsteady-state directional solidification of Sn-Pb alloys*. Materials Chemistry and Physics **130**(1–2) (2011), pp. 179–185.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.matchemphys.2011.06.032>
- [226] Silva-Neto, A.J. and Özisik, M.N. *Two-dimensional inverse heat conduction problem of estimating the time-varying strength of a line heat source*. Journal of Applied Physics **71**(11) (1992), pp. 5357–5362.  
<https://doi.org/10.1063/1.350554>
- [227] Sivergina, I.F., Polis, M.P. and Kolmanovsky, I. *Source identification for parabolic equations*. Mathematics of Control, Signals, and Systems **16**(2–3) (2003), pp. 141–157.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00498-003-0136-6>
- [228] Snieder, R. and Trampert, J. *Inverse problems in geophysics*. In Wavefield inversion (pp. 119-190), Springer, Vienna (1999).  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-2486-4\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-2486-4_3)
- [229] Sobol, I.M. *A primer for the Monte Carlo method*. CRC Press, Florida (2017).  
<http://dx.doi.org/10.1201/9781315136448>
- [230] Stolz, G. Jr. *Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes*. Journal of Heat Transfer **82**(1) (1960), pp. 20–25.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3679871>
- [231] Stone, H.L. *Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis **5**(3) (1968), pp. 530–558.  
<http://dx.doi.org/10.1137/0705044>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [232] Strikwerda, J.C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM, Philadelphia (2004).  
<https://doi.org/10.1137/1.9780898717938>
- [233] Sumana, C. and Venkateswarlu, C. *Optimal selection of sensors for state estimation in a reactive distillation process*. *Journal of Process Control* **19**(6) (2009), pp. 1024–1035.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2009.01.003>
- [234] Sun, N.Z. and Sun, A. *Mathematical modeling of groundwater pollution*. Springer, New York (1996).  
<https://www.springer.com/gp/book/9781475725605>
- [235] Sun, Y. and kagawa, Y. *Identification of electric charge distribution using dual reciprocity boundary element models*. *IEEE Transactions on Magnetics* **33**(2) (1997), pp. 1970–1973.  
<http://dx.doi.org/10.1109/20.582682>
- [236] Sun, C. and Trueman, C.W. *Unconditionally stable Crank-Nicolson scheme for solving two-dimensional Maxwell's equations*. *Electronics Letters* **39**(7) (2003), pp. 595–597.  
<http://dx.doi.org/10.1049/el:20030416>
- [237] Sun, N.Z. *Inverse problems in groundwater modeling*. Springer, New York (2013).  
<https://www.springer.com/gp/book/9780792329879>
- [238] Svergun, D.I. *Determination of the regularization parameter in indirect-transform methods using perceptual criteria*. *Journal of Applied Crystallography* **25**(4) (1992), pp. 495–503.  
<http://dx.doi.org/10.1107/S0021889892001663>
- [239] Sydsaeter, K., Strom, A. and Berck, P. *Economists' mathematical manual*. Springer, Berlin (2005).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-28518-2>
- [240] Tanaka, M. and Du, Q. *Boundary element methods: principles and applications*. Elsevier, Amsterdam (1990).  
<https://doi.org/10.1016/C2009-0-11170-4>

BIBLIOGRAFÍA

---

- [241] Tarzia, D.A. *Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face*. International Journal of Heat and Mass Transfer **26**(8) (1983), pp. 1151–1157.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(83\)80169-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(83)80169-0)
- [242] Tarzia, D.A. *The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity*. International Communications in Heat and Mass Transfer **25**(1) (1998), pp. 139–147.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933\(97\)00145-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933(97)00145-0)
- [243] Temam, R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer, New York (1997).  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3>
- [244] Thomas, J.W. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. Springer, New York (1995).  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4899-7278-1>
- [245] Thomaseth, K. and Cobelli, C. *Generalized sensitivity functions in physiological system identification*. Annals of Biomedical Engineering **27**(5) (1999), pp. 607–616.  
<https://doi.org/10.1114/1.207>
- [246] Trevola, P. *A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles*. International Journal of Heat and Mass Transfer **32**(8) (1989), pp. 1425–1430.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(89\)90066-5](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(89)90066-5)
- [247] Trong, D.D., Long, N.T. and Alain, P.N.D. *Nonhomogeneous heat equation: identification and regularization for the inhomogeneous term*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **312**(1) (2005), pp. 93–104.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.037>
- [248] Trong, D.D., Quan, P.H. and Alain, P.N.D. *Determination of a two-dimensional heat source: uniqueness, regularization and error estimate*. Journal of Computational and Applied Mathematics **191**(1) (2006), pp. 50–67.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.022>
- [249] Troparevsky, M.I., Rubio, D. and Saintier, N. *Sensitivity analysis for the EEG forward problem*. Frontiers in Computational Neuroscience **4** (2010), pp. 1–6.  
<http://dx.doi.org/10.3389/fncom.2010.00138>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [250] Troparevsky, M.I., Rubio, D. and Saintier, N. *A note on optimal design methods for parameter estimation*. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* **3** (2011), pp. 511–514.  
<https://drive.google.com/file/d/1t2jyMU9vFWMV5x2wqV3BmhgtantTKMVi/view>
- [251] Tu, J., Yeoh, G.H. and Liu, C. *Computational fluid dynamics*. Elsevier, Amsterdam (2008).  
<https://doi.org/10.1016/b978-0-7506-8563-4.x5001-0>
- [252] Ucinski, D. *Optimal measurement methods for distributed parameter system identification*. CRC Press, Florida (2004).  
<http://dx.doi.org/10.1201/9780203026786>
- [253] Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación y análisis de sensibilidad para el coeficiente de difusividad en un problema de conducción de calor*. *Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas* **6**(12) (2015), pp. 38–58.  
[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_Estimaciony analisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_Estimaciony analisisdesensibilidadRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)
- [254] Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Sobre un método de regularización para identificar una fuente en una ecuación elíptica*. *Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas* **6**(12) (2015), pp. 59–71.  
[https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130\\_Articulo\\_SobreunmtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf](https://rince.unlam.edu.ar/upload/adjuntos/articulo/130_Articulo_SobreunmtododeregularizacinRInCENro12Vol6diciembre2015.pdf)
- [255] Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *Función de convección en un problema de conducción de calor con interfaz*. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* **6** (2017), pp. 577–580.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-6-2017.pdf>
- [256] Umbricht, G.F., Rubio, D. and El Hasi, C. *A regularization operator for the source approximation of a transport equation*. *Mecánica Computacional* **37**(50) (2019), pp. 1993–2002.  
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6032>
- [257] Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Identificación de la fuente en una ecuación de transferencia de calor en un tejido biológico*. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* **7** (2019), pp. 405–408.

BIBLIOGRAFÍA

---

- <https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>
- [258] Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D. *Problemas inversos asociados a un proceso estacionario de transferencia de calor*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **7** (2019), pp. 593–596.
- <https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/06/MACI-Vol-7-2019.pdf>
- [259] Umbricht, G.F. *Estimación de la fuente en una ecuación de Poisson: mediante un método de regularización*. Editorial Académica Española, Riga, Letonia, Unión Europea (2019).
- <https://www.eae-publishing.com/catalogue/details/es/978-620-0-33344-5/estimaci%252525C3%252525B3n-de-la-fuente-en-una-ecuaci%252525C3%252525B3n-de-poisson>
- [260] Umbricht, G.F., Rubio, D., Echarri, R. and El Hasi, C. *A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection*. Latin American Applied Research **50**(3) (2020), pp. 229–234.
- <https://doi.org/10.52292/j.laar.2020.179>
- [261] Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation technique for a contact point between two materials in a stationary heat transfer problem*. Mathematical Modelling of Engineering Problems **7**(4) (2020), pp. 607–613.
- <http://dx.doi.org/10.18280/mmep.070413>
- [262] Umbricht, G.F. *Identification of the source for full parabolic equation*. Mathematical Modelling and Analysis **26**(3) (2021), pp: 339–357.
- <https://doi.org/10.3846/mma.2021.12700>
- [263] Umbricht, G.F., Rubio, D. and Tarzia, D.A. *Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface*. International Journal of Heat and Technology **39**(2) (2021), pp. 337–344.
- <https://doi.org/10.18280/ijht.390202>
- [264] Umbricht, G.F. and Rubio, D. *Estimación del coeficiente del término difusivo en una ecuación parabólica completa*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial **8** (2021), pp. 325–328.
- <https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vol-8-2021.pdf>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [265] Umbricht, G.F., Rubio, D. and El Hasi, C. *Solución analítica de un problema de transferencia de energía térmica con generación de calor, disipación por convección y flujo lateral*. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* **8** (2021), pp. 679–682.  
<https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vo1-8-2021.pdf>
- [266] Van den Berg, F.W.J., Hoefsloot, H.C.J., Boelens, H.F.M. and Smilde, A.K. *Selection of optimal sensor position in a tubular reactor using robust degree of observability criteria*. *Chemical Engineering Science* **55**(4) (2000), pp. 827–837.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509\(99\)00360-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509(99)00360-7)
- [267] Vande Wouwer, A., Point, N., Porteman, S. and Remy, M. *An approach to the selection of optimal sensor locations in distributed parameter systems*. *Journal of Process Control* **10**(4) (2000), pp. 291–300.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0959-1524\(99\)00048-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0959-1524(99)00048-7)
- [268] Van Loan, C. *Computational frameworks for the fast Fourier transform*. SIAM, Philadelphia (1992).  
<http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970999>
- [269] Volz, S., Saulnier, J., Cheng, G. and Beauchamp, P. *Computation of thermal conductivity of Si/Ge superlattices by molecular dynamics techniques*. *Microelectronics Journal* **31**(9–10) (2000), pp. 815–819.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0026-2692\(00\)00064-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0026-2692(00)00064-1)
- [270] Ward, D.K., Curtin, W.A. and Qi, Y. *Aluminum-silicon interfaces and nanocomposites: a molecular dynamics study*. *Composites Science and Technology* **66**(9) (2006), pp. 1151–1161.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2005.10.024>
- [271] Weber, C.F. *Analysis and solution of ill-posed inverse heat conduction problem*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **24**(11) (1981), pp. 1783–1792.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(81\)90144-7](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(81)90144-7)
- [272] Wei, J.J., Chang, C.J., Chou, N. K. and Jan, G.J. *ECG data compression using truncated singular value decomposition*. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine* **5**(4) (2001), pp. 290–299.  
<https://doi.org/10.1109/4233.966104>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [273] Widder, D.V. *The heat equation*. Academic Press, London (1976).  
<https://www.elsevier.com/books/the-heat-equation/widder/978-0-12-748540-9>
- [274] Woltring, H.J. *A Fortran package for generalized, cross-validatorspline smoothing and differentiation*. *Advances in Engineering Software* **8**(2) (1986), pp. 104–113.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0141-1195\(86\)90098-7](http://dx.doi.org/10.1016/0141-1195(86)90098-7)
- [275] Woodbury, K.A. and Ke, Q. *An inverse algorithm for direct determination of heat transfer coefficients*. *Proceedings of National Heat Transfer Conference* (2000), pp. 663–670.  
<https://www.tib.eu/en/search/id/BLCP%3ACN038219133/An-Inverse-Algorithm-for-Direct-Determination-of/>
- [276] Yamamoto, M. *Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle*. *Mathematical and Computer Modelling* **18**(1) (1993), pp. 79–88.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177\(93\)90081-9](http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177(93)90081-9)
- [277] Yan, L., Fu, C.L. and Yang, F.L. *The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem*. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **32**(3) (2008), pp. 216–222.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.08.002>
- [278] Yan, L., Yang, F.L. and Fu, C.L. *A meshless method for solving an inverse spacewise-dependent heat source problem*. *Journal of Computational Physics* **228**(1) (2009), pp. 123–136.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.09.001>
- [279] Yan, L., Fu, C.L. and Dou, F.F. *A computational method for identifying a spacewise-dependent heat source*. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* **26**(5) (2010), pp. 597–608.  
<https://doi.org/10.1002/cnm.1155>
- [280] Yang, C.Y. *Non-iterative solution of inverse heat conduction problems in one dimension*. *Communications in Numerical Methods in Engineering* **13**(6) (1997), pp. 419–427.  
[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199706\)13:6%3C419::AID-CNM63%3E3.0.CO;2-S](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199706)13:6%3C419::AID-CNM63%3E3.0.CO;2-S)

- [281] Yang, C.Y. *A linear inverse model for the temperature-dependent thermal conductivity determination in one-dimensional problems*. Applied Mathematical Modelling **22**(1-2) (1998), pp. 1-9.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(97\)00101-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(97)00101-7)
- [282] Yang, C.Y. *Estimation of the temperature dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problem*. Applied Mathematical Modelling **23**(6) (1999), pp. 469-478.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(98\)10093-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10093-8)
- [283] Yang, C.Y. *Determination of the temperature dependent thermophysical properties from temperature responses measured at medium's boundaries*. International Journal of Heat and Mass Transfer **43**(7) (2000), pp. 1261-1270.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00142-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00142-8)
- [284] Yang, P. and Liao, N.B. *Surface sliding simulation in micro-gear train for adhesion problem and tribology design by using molecular dynamics model*. Computational Materials Science **38**(4) (2007), pp. 678-684.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2006.06.004>
- [285] Yang, P., Liao, N.B., Li, C. and Shang, S.H. *Multi-scale modeling and numerical analysis of thermal behavior of Cu-Al interface structure in micro/nano manufacturing*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **10**(4) (2009), pp. 483-491.  
<http://dx.doi.org/10.1515/IJNSNS.2009.10.4.483>
- [286] Yang, F. and Fu, C.L. *The method of simplified Tikhonov regularization for dealing with the inverse time-dependent heat source problem*. Computers and Mathematics with Applications **60**(5) (2010), pp. 1228-1236.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2010.06.004>
- [287] Yang, F. and Fu, C.L. *A simplified Tikhonov regularization method for the heat source*. Applied Mathematical Modelling **34**(11) (2010), pp. 3286-3299.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2010.02.020>
- [288] Yang, F. and Fu, C.L. *Two regularization methods to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature*. Mathematical and Computer Modelling **53**(5-6) (2011), pp. 793-804.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2010.10.016>



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [289] Yang, F. and Fu, C.L. *A mollification regularization method for the inverse spatial-dependent heat source problem*. Journal of Computational and Applied Mathematics **255**(C) (2014), pp. 555–567.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.012>
- [290] Yu, J., Yee, A.L. and Schwall, R.E. *Thermal conductance of Cu/Cu and Cu/Si interfaces from 85 K to 300 K*. Cryogenics **32**(7) (1992), pp. 610–615.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0011-2275\(92\)90291-H](http://dx.doi.org/10.1016/0011-2275(92)90291-H)
- [291] Yuge, T., Dediu, S. and Ernstberger, S.L. *Experiments on heat transfer from spheres including combined natural and forced convection*. Journal of Heat Transfer **82**(3) (1960), pp. 214–220.  
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3679912>
- [292] Zeng, Y. and Anderson, J.G. *A composite source model of the 1994 Northridge earthquake using genetic algorithms*. Bulletin of the Seismological Society of America **86**(1B) (1996), pp. S71–S83.  
<https://pubs.geoscienceworld.org/ssa/bssa/article-abstract/86/1B/S71/120060/A-composite-source-model-of-the-1994-Northridge?redirectedFrom=fulltext>
- [293] Zhai, S., Zhang, P., Xian, Y., Zeng, J. and Shi, B. *Effective thermal conductivity of polymer composites: theoretical models and simulation models*. International Journal of Heat and Mass Transfer **117** (2018), pp. 358–374.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.067>
- [294] Zhang, L., Yang, P., Chen, M. and Liao, N. *Numerical investigation on thermal properties at Cu-Al interface in micro/nano manufacturing*. Applied Surface Science **258**(8) (2012), pp. 3975–3979.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apsusc.2011.12.075>
- [295] Zhao, Z. and Meng, Z. *A modified Tikhonov regularization method for a backward heat equation*. Inverse Problems in Science and Engineering **19**(8) (2011), pp. 1175–1182.  
<https://doi.org/10.1080/17415977.2011.605885>
- [296] Zhao, Z., Xie, O., Meng, Z. and You, L. *Determination of an unknown source in the heat equation by the method of Tikhonov regularization in Hilbert scales*. Journal of Applied Mathematics and Physics **2**(2) (2014), pp. 10–17.  
<http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2014.22002>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [297] Zhou, L., Parhizi, M., Jain, A. *Analytical solution for temperature distribution in a multilayer body with spatially varying convective heat transfer boundary conditions on both ends*. Journal of Heat Transfer **143**(3) (2021), 034501.  
<https://doi.org/10.1115/1.4048968>
- [298] Zhou, L., Parhizi, M., Jain, A. *Temperature distribution in a multi-layer cylinder with circumferentially-varying convective heat transfer boundary conditions*. International Journal of Thermal Sciences **160**(3) (2021), 106673.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106673>
- [299] Zimmerman, W.B. *Multiphysics modeling with finite element methods*. World Scientific Publishing Company, Singapore (2006).  
<http://dx.doi.org/10.1142/6141>
- [300] Zueco Jordán, J. *Solución de problemas inversos en conducción de calor mediante el método de simulación por redes*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena (2009).  
<https://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/794/jzj.pdf?sequence=6>

# Índice Alfabético

- Calor, 2–5, 21, 51, 87, 89, 124, 126, 128, 130, 131, 136, 139, 151, 154, 162, 163, 181, 195, 196
- absorbido, 5
  - almacenado, 5, 89
  - conducido, 5
  - de calentamiento, 54
  - de enfriamiento, 54
  - específico, 2, 5, 54, 55, 88, 193, 195
  - metabólico, 104
  - multidimensional, 81
  - por conducción, 102, 194
  - por convección, 80, 132, 172, 194, 195, 198
- Coefficiente, 2, 80–84, 86, 87, 89, 90, 95, 193
- constante, 82, 101
  - convectivo, 89
  - de conductividad térmica, 2, 5, 22, 43, 45, 54, 55, 71, 81, 82, 95, 132, 154, 168, 172, 192, 193, 195
  - de convección, 80, 81, 172
  - de difusividad térmica, 2, 4, 5, 21, 43, 44, 54, 55, 59, 60, 62–65, 71–73, 75, 77, 78, 95, 131, 154, 195
  - de expansión volumétrica, 197
  - de película, 7, 82, 89, 132, 154, 172
  - de sensibilidad, 16
  - de transferencia de calor, 3, 7, 22, 80–82, 87, 101, 132, 136, 154
  - de viscosidad cinemática, 195
  - de viscosidad dinámica, 192
  - del desarrollo en serie de funciones propias, 28, 150
- Condición, 5, 12, 25, 56, 70, 81, 135, 145, 166, 167, 181
- auxiliar, 39
  - de borde, 17, 25, 26, 28, 31, 33, 38, 46, 78, 81, 86, 101, 103, 131, 133, 134, 151
  - de contorno, 9, 10, 39, 81
  - de convergencia, 50, 70, 139, 160
  - de estabilidad, 139
  - de flujo, 132, 164, 165, 167
  - de frontera, 10, 39
  - de interfaz, 145
  - de no deslizamiento, 193
  - de temperatura, 132
  - de tipo Dirichlet, 26, 33, 78, 101
  - de tipo Robin, 26, 78, 86, 101
  - disipativa, 43
  - inicial, 9, 10, 26, 28, 30, 33, 39, 149
  - necesaria, 139, 179
  - necesaria y suficiente, 165, 166, 172, 174, 176, 181
  - particular, 7, 55
  - suficiente, 179
- Densidad, 3, 5, 193, 196, 197
- de un gas, 196
  - del cuerpo, 88, 197
  - del fluido, 54, 88, 197
  - media del fluido, 197
- Discretización, 16, 39
- bidimensional, 68
  - del problema parabólico, 41, 152
  - del sistema, 69

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- espacial, 40, 69, 152  
 espacio-temporal, 68, 154  
 pasos, 43  
 por diferencias finitas, 41, 69, 152  
 temporal, 16, 40, 69  
 uniforme, 119
- Diseño, 2, 104, 129  
 óptimo, 2, 18, 73, 74  
 óptimo de experimentos, 19, 73, 74,  
 76–78  
 de mínima varianza, 19  
 de un sistema, 54  
 experimental, 16
- Ecuación, 2, 7, 23, 26, 36, 68, 89, 106,  
 108, 114, 165–167, 169, 171, 172,  
 187, 193, 197  
 algebraica, 39  
 convectiva, 198  
 de Bernoulli, 10  
 de calor, 20, 26, 28, 38, 46, 103, 124  
 de cantidad de movimiento, 198  
 de Cauchy-Euler, 10  
 de conservación de la energía, 198  
 de continuidad, 198  
 de convección-difusión, 103  
 de difusión-advección-reacción, 3  
 de difusión-convección-reacción, 3  
 de la energía, 199  
 de Laplace, 38  
 de movimiento, 199  
 de onda, 38  
 de Poisson, 38  
 diferencial, 28, 30, 38, 102, 111, 186  
 diferencial ordinaria, 25, 108  
 diferencial parcial lineal, 19  
 en derivadas parciales, 2, 39  
 evolutiva, 103  
 parabólica completa, 3, 20, 33, 78,  
 102, 103, 105, 124, 129  
 trascendente, 24, 141
- Elasticidad, 2, 17, 82, 91, 92, 101, 163,  
 168–171, 174, 176, 178, 181  
 de  $D$  con respecto a  $p$ , 17  
 de  $l$  con respecto a  $q$ , 168–171, 173–  
 176, 178  
 de  $u$  con respecto a  $h$ , 91, 93  
 en el borde, 92, 94, 97, 99  
 en valor absoluto, 92–95, 97–101  
 multivariable, 18  
 relativa, 95, 97–100
- Energía, 4, 199  
 almacenada, 88  
 arrastrada, 6  
 conservación, 198  
 intercambio, 195  
 mecánica, 195  
 térmica, 11, 47, 48, 87, 88, 131, 195  
 transferida, 6
- Error, 12, 60, 63, 67, 95, 119, 120, 174,  
 189  
 absoluto, 120–127, 173, 175, 177, 180  
 chico, 92  
 cuadrático medio, 57  
 de aproximación, 119, 128, 163, 166,  
 179  
 de calibración, 12, 16, 119  
 de determinación, 59–65, 181  
 de estimación, 18, 59–66, 73, 77, 91,  
 93, 101, 104, 109, 112, 116, 122,  
 124, 126, 128, 129, 166, 168, 173,  
 175–178  
 de instrumentación, 12, 106, 163  
 de medición, 12, 16, 56, 60, 61, 63–67,  
 106, 109, 119, 166, 174  
 de minimización, 15, 18  
 de observación, 109  
 de primer orden, 189  
 de recuperación, 128  
 de redondeo, 189  
 de regularización, 15, 119  
 de segundo orden, 189

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- de truncamiento, 189
- en los datos, 104, 118
- pequeño, 91
- relativo, 59–66, 73, 77, 120–128, 173, 175, 177, 180
- Estabilidad, 12, 104, 110
  - con filtros, 15
  - condiciones, XL, XLII, 21, 38, 52, 70, 131, 161
  - dada, 50, 160
  - de la solución, 12, 13, 16, 43, 109
  - del método, 42
  - inestabilidad, 13, 104, 129
  - numérica, 14
- Estado, 5, 45
  - casi estacionario, 89
  - de equilibrio térmico, 5
  - estacionario, 5, 45, 47, 72, 80, 82, 84–86, 89, 91, 92, 94, 96, 99, 101, 133, 154, 155, 157, 159, 162, 164, 181
  - evolutivo, 80, 103
  - transitorio, 5, 80, 87, 89, 90, 101
- Estimación, 1, 17, 18, 54–57, 60–66, 73, 75, 78, 82, 89, 91, 101, 104, 106, 109, 122, 124, 126, 128, 129, 162, 163, 166, 168, 172–179, 181
  - óptima, 17
  - del calor específico, 12
  - de  $\delta$ , 89
  - de  $h$ , 92, 93, 96, 98
  - de  $l$ , 168, 172–178, 180
  - de calor, 9, 16
  - de estados, 18
  - de la conductividad térmica, 12, 55
  - de la difusividad térmica, 55, 78
  - de la fuente, 12, 112, 119, 120, 122, 124, 126, 128
  - de la solución, 103
  - de parámetros, 1, 11, 18, 57, 59–65, 67, 74, 77, 78, 81, 101, 162, 181
  - del calor metabólico, 104
  - del coeficiente de transferencia de calor, 12, 82, 87, 101
  - directa, 55
  - propuesta, 57
  - simultánea, 54, 55
- Fenómeno, 1, 13, 122, 196
  - de cambio de fase, 6
  - de condensación, 6
  - de conducción, 1, 4, 9, 81, 102, 139, 192–194, 196
  - de convección, 1, 4, 6, 12, 22, 48, 80–82, 87, 95, 132, 192–196, 198, 199
  - de difusión, 4, 21, 103, 124, 131, 154, 157
  - de ebullición, 6
  - de Gibbs, 122
  - de radiación, 12
  - de transporte, 3
  - del mundo real, 7
  - físico, 2, 12, 82, 93, 196
  - térmico, 1
- Fluido, 3, 6, 7, 22, 80, 83–85, 88, 89, 92, 93, 96, 98, 99, 154, 172, 192, 193, 196–198
  - adyacente, 6, 193, 198
  - cercano, 6
  - circundante, 87
  - común, 80
  - convectivo, 192
  - desplazado, 196
  - disipativo, 43, 83, 154
  - en contacto, 87, 132
  - en movimiento, 3, 4, 21, 51, 160, 192, 199
  - ideal, 197
  - lejos de la superficie, 197
  - ligero, 196
  - nano, 81
  - que fluye, 6, 194
  - que se adhiere, 193

## ÍNDICE ALFABÉTICO

---

- Flujo, 4, 81, 164–166, 172, 173, 175, 178–181, 194  
 convectivo, 4, 198  
 de calor, 54  
 de temperatura, 5  
 exacto, 171, 172, 174  
 interno, 4  
 laminar, 192  
 lateral, 4, 48  
 medido, 166  
 sobre la superficie, 194  
 térmico, 8, 104, 162–164, 166, 172–180  
 turbulento, 192
- Fuente, 4, 11, 28, 38, 49, 50, 83, 96, 98, 102, 103, 105, 106, 108, 110, 112, 116, 119, 120, 122, 124, 126, 128, 129  
 de calor, 9  
 de temperatura, 96, 97, 101, 105  
 estimada, 120  
 externa, 4, 21, 28, 33, 43, 44, 46, 48, 51, 83  
 inversa, 103  
 no regularizada, 121–128  
 puntual, 22  
 real, 116  
 regularizada, 117, 121–128  
 suave, 119, 129  
 térmica, 97, 98
- Fuerza, 193, 196, 197  
 de empuje, 196, 198  
 de flotabilidad, 196–198  
 neta, 196, 197  
 peso, 196, 197  
 vertical, 197  
 viscosa, 198
- Función, 26, 29, 31–33, 35, 40, 41, 59, 62, 65, 69, 75, 106, 111, 113, 114, 122, 124, 126, 128, 164, 165, 167, 171, 173, 187–189
- aproximada, 17  
 autofunciones, 26, 27  
 Beta, 10  
 continua, 48, 126, 128  
 creciente, 113, 114  
 de elasticidad, 91, 168–171, 174–176, 178, 181  
 de Green, 11, 102  
 de sensibilidad, 17, 67, 74, 75, 78  
 de temperatura, 68, 77, 81  
 decreciente, 113  
 derivable, 48, 126  
 discontinua, 122  
 discretizada, 39  
 espacio-temporal, 28  
 Gamma, 10  
 generalizada, 13  
 monótona, 23  
 par, 114  
 periódica, 126  
 propia, 26, 29  
 secuencial, 81  
 temporal, 30, 83, 87, 91, 95
- Ley, 4  
 de enfriamiento de Newton, 6, 80, 193  
 de Fourier, 4  
 física, 7  
 natural, 196  
 principio de Arquímedes, 197
- Método, XL, XLII, 2, 21, 38, 39, 52, 93, 101, 103, 122, 124, 126, 128, 131, 161, 163, 179, 180  
 analítico, 9, 11, 84  
 antiguo, 186  
 aproximado, 54  
 centrado, 189  
 clásico, 9, 10, 14, 84, 91  
 convergente, 109, 111  
 cuadrados mínimos, 15  
 de autovalores, 11

## ÍNDICE ALFABÉTICO

---

- de coeficientes indeterminados, 10
- de Crank-Nicolson, 39
- de cuasi-reversibilidad, 103, 109
- de Davidon-Fletcher-Powell, 15
- de descomposición en valores singulares amortiguada, 14
- de descomposición en valores singulares truncada, 14
- de diferencias finitas, XL, XLII, 11, 21, 38, 39, 42, 52, 55, 78, 103, 131, 161, 186, 189
- de elementos de contorno, 81
- de elementos finitos, 11, 39
- de elementos límite, 102, 103
- de especificación de función secuencial, 14, 81
- de especificación funcional, 11
- de estabilidad condicional, 103
- de Fourier, XXXIX, XLII, 20, 29
- de integración, 54, 119
- de la Curva-L, 15
- de modelado, 2
- de mollificación, 103
- de Monte Carlo, 15, 39, 81
- de optimización, 14
- de planteo, 2
- de reciprocidad dual, 102
- de regresión Ridge, 14
- de regularización cuasi-reversible, 14
- de regularización, 2, 13, 14, 103, 104, 109, 111, 116, 120
- de regularización de Tikhonov, 14
- de regularización iterativo, 14, 103
- de regularización modificado, 103
- de Ritz-Galerkin, 103
- de separación de variables, 10, 11
- de Simpson, 119
- de solución, 2
- de solución fundamental, 102, 103
- de volúmenes finitos, 39
- de volumen de control, 11
- del disparo, 103
- del factor integrante, 10
- del gradiente conjugado, 15, 55
- del trucamiento de Fourier, 103
- directo, 14
- estable, 129
- híbrido, 14
- habitual, 83
- indirecto, 14
- integral, 11
- iterativo, 11, 14, 55
- logarítmico potencial, 102
- numérico, 9, 13, 38, 39, 46, 78, 189
- periodograma residual acumulativo, 15
- principio de discrepancia, 15
- proyectivo, 102
- simple, 186
- simplificado de Tikhonov, 103
- sin malla, 103
- usual, 87
- validación cruzada generalizada, 15
- variación de parámetros, 10
- Mediciones, 9, 12, 15, 16, 18, 54, 55, 57, 59–65, 67, 77, 78, 104, 105, 109
- óptimas, 75, 76, 104
- de flujo, 179–181
- de temperatura, 9, 56, 59, 62, 65, 66, 73, 78, 103, 105
- equiespaciadas, 59–64
- experimentales, 9, 11, 58
- numéricas, 11
- ruidosas, 11, 55, 56, 78, 102, 103, 105, 129
- sensores, 74, 77
- simuladas, 62, 180
- simultáneas, 66
- Modelo, 1, 46, 91, 98, 100, 160, 164, 165
- de Pennes, 104
- de transporte, 1
- experimental, 7

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- inverso, 55  
 matemático, 12, 16, 17, 103, 119  
 numérico, 95, 189  
 propuesto, 13
- Número, 195**  
 adimensional de Grashof, 84, 89, 198, 199  
 adimensional de Nusselt, 84, 194  
 adimensional de Prandtl, 84, 195, 199  
 adimensional de Rayleigh, 199  
 complejo, 112  
 promedio de Nusselt, 199
- Operador**  
 acotado, 110  
 continuo, 7, 110, 111  
 de regularización, 104, 109–111, 119, 122, 124, 126, 128, 129  
 funcional de minimización, 57  
 integral, 107  
 inversa de Moore-Penrose, 13  
 inverso, 104, 122, 124, 126, 128, 129  
 lineal, 7, 107, 110, 111  
 matriz de covarianzas, 19  
 matriz de información de Fisher, 19, 74  
 transformada de Fourier, 10  
 transformada de Laplace, 10
- Parámetro, 2, 8, 9, 11, 15–18, 55, 84, 111, 120, 122, 124, 126, 129, 134, 141, 149, 162, 165, 179–181**  
*a posteriori*, 15  
*a priori*, 15, 111  
 a estimar, 57, 59–65, 67, 77, 78, 81, 91, 101, 168  
 adimensional, 198  
 conocido, 198  
 de minimización, 57, 74  
 de regularización, 2, 15, 104, 110, 116, 120, 129
- del modelo, 119  
 del problema, 119  
 estrictamente positivo, 5  
 físico, 154  
 geofísico, 14  
 geométrico, 10  
 relevante, 7  
 significativo, 92  
 térmico, 9, 10, 74, 83, 85, 90–93, 96, 98, 99  
 termodinámico, 8
- Perfil, 9, 93**  
 de composición atmosférica, 14  
 de elasticidad, 92, 94, 97, 99, 100  
 de sensibilidad, 71, 72, 75  
 de temperatura, 21, 43–49, 77, 82, 86, 90, 91, 94, 97, 99–101, 131, 133, 136–139, 154–159, 194  
 de velocidad, 193  
 en la interfaz, 136, 154  
 equivalente, 48, 50  
 espacial, 45, 47, 49, 72, 75, 77, 92, 136, 154–156, 158, 159  
 espacio-temporal, 9, 21, 43, 46, 48, 49, 72, 86, 131, 139, 156, 159  
 estacionario, 136–139  
 obtenido, 49  
 térmico, 9, 105  
 temporal, 44, 46–49, 71, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100, 154, 155, 157
- Posición, 3, 21, 55, 56, 59, 62, 72, 75, 76, 78, 81**  
 capa límite, 88, 193–195  
 de interfaz, 136, 154, 157  
 de punto de contacto, 136  
 de toma de medición, 55  
 en la barra, 46, 59, 65, 66, 72, 76, 77, 84, 86, 90, 92–94, 96, 97, 99, 100, 157  
 fija, 55, 62, 78  
 particular, 76



## ÍNDICE ALFABÉTICO

---

- Problemas, 1, 21, 22, 25, 43, 51, 54, 70, 103, 104, 111, 124, 126, 128, 131–134, 161
- algebraicos, 42, 70, 153
  - bien planteados, 14, 104
  - consistentes, 37
  - convergentes, 43
  - de conducción de calor, 11
  - de control, 10
  - de determinación, 74, 81, 102
  - de diseño óptimo, 74
  - de estimación, 18, 87, 129
  - de frontera móvil, 10
  - de identificación, 19, 108–111, 119, 126
  - de interés, 21, 35, 38, 106, 131, 139, 146
  - de minimización, 74
  - de optimización, 10, 19, 57, 74
  - de recuperación, 122, 124, 126, 128
  - de Sturm-Liouville, 24, 25
  - de transferencia de calor, 38, 55, 81, 82, 84, 124, 126, 128, 130, 131, 136, 151, 154
  - de transporte, 101
  - definidos, 22, 23, 133, 140
  - directos, 7, 9, 20–22, 56, 58, 82, 105, 131, 133
  - discretos, 43, 70, 153
  - elípticos, 134
  - en ciencia e ingeniería, 17
  - estacionarios, 9, 11, 80, 133, 136, 181
  - estudiados, 28, 38, 43
  - evolutivos, 9, 80, 139
  - físicos, 38
  - geométricos, 186
  - inversos, 1, 7–11, 13, 14, 16–18, 55, 56, 81, 82, 105, 109, 111, 116, 129
  - inversos, que consiste en la identificación de la fuente, independiente del tiempo,, 103
  - lineales, 10
  - mal planteados, 2, 12–14, 102, 104, 108, 129
  - matemáticos, 7, 19
  - no lineales, 81
  - numéricos, 71
  - parabólicos, 26, 28, 30, 33, 35, 83, 106, 146, 152
  - particulares, 39, 41, 55, 81, 109, 152
  - presentados, 57
  - transitorios, 10, 11, 139
  - unidimensionales, 81
- Ruido, 11, 12, 15, 59, 62, 63, 65, 102, 103, 105, 110, 119, 129, 162, 168, 181
- aleatorio, 58
  - definido, 110
  - en la medición, 11, 55, 56, 62, 65, 163, 166
  - en los datos, 15, 56, 77, 78, 105, 119, 129, 163, 168
  - máximo, 106
  - simulado, 172
- Sensibilidad, 2, 16, 67, 74, 75
- dada, 71
  - en valor absoluto, 71–73, 75, 76, 78
  - generalizada, 17
  - numérica, 56
- Sistema, 1, 25, 27, 30–32, 35, 37, 39, 41, 68, 69, 71, 108, 135, 144, 145, 148, 149, 152, 164, 165
- óptimo, 54
  - acoplado, 68, 143
  - actual, 8
  - algebraico, 70
  - de control, 2
  - de coordenadas, 35
  - de ecuaciones, 39, 132, 135, 187
  - de parámetros distribuidos, 1, 2, 19, 74
  - dinámico, 2, 19

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- discretizado, 69  
 físico, 8  
 fijo, 35  
 homogéneo, 29  
 industrial, 2  
 lineal, 19, 135  
 móvil, 35  
 no homogéneo, 29  
 parabólico, 28, 34, 37, 56  
 termodinámico, 7
- Solución, 9, 13, 18, 20, 24–26, 29–31, 33,  
 36, 38, 102, 104, 106, 108, 109,  
 119, 133, 134, 136, 140, 141, 144,  
 151, 164  
 óptima, 19  
 abordada, 59  
 admisible, 57  
 algebraica, 70  
 analítica, XXXIX, XLII, 20, 26, 42,  
 84, 108, 129, 131, 146, 189, 199  
 aproximada, 17, 39, 166  
 compleja, 38  
 convergente, 42  
 de la ecuación, 27, 32, 145, 151  
 de menor norma, 13  
 de regularización, 110, 116, 120  
 del problema, 13, 21, 23, 35, 37, 38,  
 57, 58, 83, 106, 109, 111, 131, 146,  
 179, 186  
 del sistema, 27, 29, 32, 34, 35, 37, 39,  
 68, 149  
 estable, 43  
 evolutiva, 139  
 fundamental, 102, 103  
 inestable, 103, 129  
 numérica, 16, 42, 43, 70, 71, 139, 153,  
 186  
 positiva, 23–26, 29, 31, 34, 36, 37,  
 141, 142, 144, 147, 151  
 regularizada, 15, 111  
 transitoria, 139
- trivial, 25
- Término, 2, 4, 140  
 advectivo, 2  
 conductivo, 2  
 convectivo, 2  
 difusivo, 2  
 disipativo, 35, 38, 44, 46–48, 83  
 fuente, 48, 83, 103, 105
- Temperatura, 3, 5, 6, 9, 21, 43–50, 54–57,  
 59, 62, 65, 67, 75, 77, 78, 80–82,  
 87, 89, 91, 93, 96–101, 103–105,  
 131–133, 137–139, 154–156, 158,  
 159, 193, 194, 197  
 a presión constante, 197  
 ambiente, 5, 21, 22, 51, 84, 88, 133  
 aproximada, 159  
 asintótica, 45  
 constante, 21, 22, 51, 132  
 del aire, 196–198  
 en el borde, 22, 84, 86, 90, 94, 96, 97,  
 99, 132, 137–139, 154  
 en el medio, 44, 46, 48  
 en la capa límite, 194  
 en la interfaz, 154, 157  
 en la superficie, 7, 8, 80–84, 86–89,  
 95, 96, 98, 100, 101, 196, 199  
 estacionaria, 45, 47, 82, 84–86, 94, 96,  
 99, 101, 137–139, 154, 157  
 exterior, 4  
 lejos de la superficie, 7, 84  
 media, 88  
 medida, 58, 66, 73  
 sensores, 56  
 simulada, 60, 62, 63, 65  
 termodinámica, 197
- Transferencia, 1, 77, 102  
 de calor, 1, 4, 6, 8, 9, 11, 15, 22, 38,  
 46, 48, 54, 74, 80, 81, 89, 95, 96,  
 98, 101, 124, 126, 128, 130, 131,  
 136, 151, 154, 162, 163, 172, 181,

## ÍNDICE ALFABÉTICO

---

192–195, 197–199  
de energía, 3, 4  
de energía térmica, 3, 6, 21  
de información, 3  
de masa, 3  
normal, 4  
unidimensional, 3