



DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación
Universitaria (CONEAU). *Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

Algoritmo para la construcción de curvas que separan diferentes órdenes de sincronización

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO

AUTOR: **Rubén Gustavo Paccosi**

DIRECTORA: DRA. ALEJANDRA FIGLIOLA

CO-DIRECTOR: DR. JORGE FRANCISCO GALÁN VIOQUE

23 de Febrero 2021

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). Resolución N° 1178/11. Calificación “B”.

FORMULARIO “E” TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor.

El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis:

- a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.
 - b) Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS.
 - c) Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.
- a. Título completo del trabajo de Tesis: Algoritmo para la construcción de curvas que separan diferentes órdenes de sincronización.
 - b. Presentado por: Paccosi, Rubén Gustavo.
 - c. E-mail del autor: gpaccosi@ungs.edu.ar
 - d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología.
 - e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Universidad Nacional de General Sarmiento.
 - f. Para recibir el título de:
 - a) Grado académico que se obtiene: Doctor.
 - b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología.

- g. Fecha de la defensa: 23 / Febrero / 2021
- h. Director de la Tesis: Figliola, Alejandra.
- i. Tutor de la Tesis: Dr. Guillermo Jorge
- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis (Co-Director): Galán Vioque, Jorge Francisco.
- k. Descripción física del trabajo de Tesis:
 - 190 páginas;
 - 53 figuras.
- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis: El alcance geográfico de la tesis es internacional.
- m. Temas tratados en la Tesis: sincronización de osciladores, bifurcación de órbitas periódicas, continuación numérica, lenguas de Arnold.
- n. Resumen en español:

En esta tesis realizamos un análisis de las bifurcaciones que exhibe un sistema acoplado de dos osciladores Van der Pol no idénticos. Dicho análisis permitió comprender la estructura dinámica en donde la sincronización con órdenes $n:m$ se presenta ($n, m \in \mathbb{N}$), esto es, un oscilador realiza n oscilaciones mientras el segundo hace m oscilaciones en el mismo período. Proponemos una técnica computacional innovadora, sobre la base de un método de continuación numérica, que permite la construcción de curvas, ubicadas en el espacio de parámetros asociado al sistema acoplado, que actúan como fronteras separando diferentes órdenes de sincronización. La relevancia de esta técnica radica en su aplicación a todo tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, independientemente de la dimensión (finita) y del tipo de acople.

o. Resumen en portugués:

Nesta tese, realizamos uma análise das bifurcações que exibem um sistema acoplado de dois osciladores Van der Pol não idênticos. Essa análise nos permitiu entender a estrutura dinâmica em que é apresentada a sincronização com os pedidos $n:m$ ($n, m \in \mathbb{N}$), ou seja, um oscilador executa oscilações de n enquanto o segundo gera m oscilações no mesmo período. Propomos uma técnica computacional inovadora, baseada em um método de continuação numérica, que permite a construção de curvas, localizadas no espaço de parâmetros associado ao sistema acoplado, que atuam como bordas separando diferentes ordens de sincronização. A relevância desta técnica reside na sua aplicação a todos os tipos de equações diferenciais ordinárias acopladas, independentemente da dimensão (finita) e do tipo de acoplamento.

p. Resumen en inglés:

In this thesis we perform an analysis of the bifurcations exhibiting a coupled system of two non-identical Van der Pol oscillators. This analysis allowed us to understand the dynamic structure where synchronization with orders $n: m$ is presented ($n, m \in \mathbb{N}$), that is, an oscillator performs n oscillations while the second makes m oscillations in the same period. We propose an innovative computational technique, based on a numerical continuation method, which allows the construction of curves, located in the parameter space associated with the coupled system, which act as borders separating different synchronization orders. The relevance of this technique lies in its application to all kinds of ordinary differential equations coupled, regardless of the dimension (finite) and the type of coupling.

q. Aprobado por:

Dr. Daniel Juan Pagano, Dr. Diego Fernando Rial y Dr. Mariano Fernando De Leo

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Mariano Fernando De Leo

Firma del autor de la tesis:

Rubén Gustavo Paccosi



DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). *Resolución N° 1178/11. Calificación "B".*

Publicaciones:

- En revistas con referato
 - Rubén Gustavo Paccosi, Alejandra Figliola, and Jorge Galán-Vioque. *A Bifurcation Approach to the Synchronization of Coupled Van der Pol Oscillators* - SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS, vol. 13, No. 3, pp. 1152–116, 2014.

Aportes Originales:

En el capítulo 5 de esta tesis se presenta el principal aporte en esta investigación, esto es, una técnica computacional que construye fronteras en el espacio de parámetros del sistema dinámico que separan diferentes órdenes de sincronización. Dicha técnica consiste en plantear un adecuado sistema de ecuaciones con condiciones de contorno. Estas condiciones son fijadas por la periodicidad del ciclo límite, por la necesidad de unicidad de la solución, denominada condición de fase de Poincaré, y por último una condición de tangencia que da cuenta de la transición de un orden de sincronización a otro diferente. La familia de órbitas que mantiene invariante esta última condición, resulta ser una frontera que separa diferentes órdenes de sincronización en el espacio de parámetros generado por el

parámetro de acople y por el parámetro que diferencia las frecuencias naturales de los osciladores que conforman el sistema dinámico. Este aporte forma parte del trabajo publicado en la revista más arriba mencionada.

Agradecimientos

A la Dra. Alejandra Figliola y muy especialmente al Dr. Jorge Galán Vioque. Quiero agradecer también a los Doctores E. Freire, S. Wieczorek, F. Schilder y E. Doedel por sus fructíferas discusiones y especialmente al Doctor A. Vanderbauwhede por su ayuda con la explicación de las simetrías para diferentes órdenes de la sincronización presente en los sistemas estudiados.

Índice general

Índice de figuras	XI
1. Introducción	1
2. Breve desarrollo histórico	12
2.1. Primeros desarrollos teóricos. Van der Pol	33
2.1.1. De los circuitos eléctricos a las luciérnagas, una búsqueda de principios universales	36
3. Sistemas dinámicos, bifurcaciones y sincronización	63
3.1. Nociones elementales de la teoría de los sistemas dinámicos	63
3.1.1. Puntos de equilibrio y órbitas periódicas	67
3.1.2. Estabilidad de las soluciones	68
3.1.3. Sistemas Lineales con coeficientes constantes	70
3.1.4. Sistemas no lineales autónomos	71
3.1.5. Ciclos límites	75
3.2. Nociones elementales de la teoría de bifurcaciones	83
3.2.1. Bifurcaciones en sistemas continuos	83
3.2.2. Diagramas de bifurcaciones	84
3.2.3. Bifurcaciones de puntos fijos en \mathbb{R}^n	86
3.2.4. Bifurcaciones de ciclos límites	91
3.2.5. Bifurcaciones en presencia de simetrías	94
3.3. Nociones elementales de la sincronización	97

3.3.1. Definición abstracta de sincronización	99
3.3.2. Sincronización n:m	100
4. Metodología de trabajo	102
4.1. Dos problemas de continuación numérica	104
4.2. La técnica de Keller	108
4.2.1. Continuación numérica en un parámetro	108
4.2.2. Continuación numérica en dos parámetros	111
4.3. Continuación numérica de puntos fijos	112
4.4. Continuación numérica de ciclos límites	113
4.4.1. Obtención de ciclos Límites en un punto Hopf	114
4.4.2. Continuación numérica de ciclos límites	115
5. Resultados	120
5.1. Estructura dinámica y orden de sincronización	122
5.1.1. Modelo	122
5.1.2. Continuación de puntos de equilibrio	123
5.1.3. Continuación de órbitas periódicas	125
5.1.4. Continuación en dos parámetros de bifurcaciones de ciclos límites	127
5.1.5. Islas de órbitas periódicas	130
5.1.6. Sobre cómo medir el orden de sincronización. Caracteriza- ción de la transición de un orden a otro diferente	133
5.2. Construcción de fronteras	136
5.2.1. La técnica que permite construir fronteras	137
5.2.2. Orden 1:2k. Bifurcación en presencia de simetría.	141
5.2.3. Simetrías	143
5.2.4. Extensión del espacio de parámetros y nuevas preguntas .	146
5.3. Conclusiones y perspectivas	147

ÍNDICE GENERAL	X
A. Teoremas fundamentales de la continuación numérica	152
A.0.1. Algoritmo	156
B. Continuación numérica	158
B.0.1. Justificación del Problema 4	158
C. Oscilaciones	163
C.1. El sistema desacoplado	163
Bibliografía	166

Índice de figuras

1.1. Dibujo original de Christian Huygens ilustrando su experimento con dos péndulos acoplados con un soporte común.	2
2.1. Esquema del funcionamiento de la lengüeta en el clarinete.	16
2.2. $\dot{x} = \text{sen}(x)$	20
2.3. Solución particular con $x_0 = \pi/4$	20
2.4. Diferentes soluciones de $\dot{x} = \text{sen}(x)$	21
2.5. Generalización de las ideas de Poincaré a “cualquier” sistema $\dot{x} = f(x)$ con f derivable	22
2.6. Clarinete sin fricción	23
2.7. Movimiento periódico	24
2.8. Familia continua de oscilaciones periódicas	24
2.9. La masa se acerca asintóticamente al origen	25
2.10. Primer ciclo límite presentado por Poincaré para la ecuación (2.4), dibujado en el espacio de fases (x, y) . La circunferencia mayor simplemente marca una porción del espacio (x, y) donde algunas soluciones aparecen graficadas. La circunferencia menor corresponde a la solución periódica $x^2 + y^2 = 1$. La espiral por fuera de esta circunferencia de radio unitario es una solución que se aleja de la solución periódica. La espiral interior corresponde a una solución que se aleja de la solución periódica mientras se acerca al origen $(0, 0)$	26

2.11. Izquierda: Cilco límite estable. Centro: ciclo límite inestable. Derecha:ciclo límite semi-estable	29
2.12. Esquema del mapa de Poincaré	30
2.13. Circuito RLC	33
2.14. Circuito RLC con resistor variable en el tiempo.	35
2.15. Soluciones de (2.16) con $B = 0$. $\lambda = 0,1$ (negro), $\lambda = 0,5$ (gris). (a) Espacio de fases. (b) $x(t)$	39
2.16. Primera columna: espacio de fases (\dot{x}, x) . Segunda columna: plano (F, x) . Tercera columna: Sección de Poincaré $\dot{x} = 0$. Cuarta columna: gráficos de $x(t)$ y $10F(t)$	40
2.17. Esquema ilustrando dos soluciones de la ecuación (2.24)	43
2.18. Región de sincronización 1 : 1 obtenida con el software AUTO 07p.	45
2.19. Izquierda: 0 es punto fijo estable. Centro: dos puntos fijos, uno estable, el otro inestable. Derecha: no existen puntos fijos	47
2.20. Esquema del rango de arrastre	49
2.21. La región roja encierra la zona en donde el sistema puede lograr un compromiso de frecuencia. La flecha indica una ruta de análisis del fenómeno de sincronización entre la luciérnaga y el dispositivo artificial	50
2.22. Esquema de dos péndulos acoplados	52
2.23. En la <i>región de sincronización</i> ambos péndulos lograron ajustar sus ritmos naturales, f_1 y f_2 , a un mismo ritmo ya que $F_1 - F_2 = 0$	52
2.24. Proyección de algunos ciclos límites, soluciones de la ecuación (2.42) sobre los espacios de fases (x, x') e (y, y') . La región verde corresponde al orden 1 : 1, la azul 1 : 3 y la negra 1 : 5.	62
3.1. Superior: estabilidad Liapunov. La solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero no necesariamente se aproxima a ella. Inferior: estabilidad asintótica. La solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero además se aproxima a ella indefinidamente.	69

3.2. Equivalencia topológica de dos campos vectoriales distintos. . . .	74
3.3. Péndulo accionado por una pesa.	75
3.4. Simulaciones para la ecuación (3.9)	80
3.5. Esquema del mapa de Poincaré	81
3.6. Esquema de los puntos fijos de $\dot{x} = r + x^2$. El punto lleno indica estabilidad del punto fijo y el blanco inestabilidad de éste.	85
3.7. Diagrama de bifurcaciones para el sistema $\dot{x} = r + x^2$. La línea continua indica estabilidad del punto fijo mientras que la punteada inestabilidad de éste.	85
3.8. Diagrama de bifurcaciones para la ecuación (3.13).	90
3.9. Órbitas correspondientes a las etiquetas de la figura 3.8.	91
3.10. Esquema de un diagrama para la bifurcación tangente de ciclos límites.	92
3.11. Esquema de un diagrama para la bifurcación toro de ciclos límites	94
3.12. Rotura espontánea de la simetría \mathbf{Z}_2	97
4.1. n puntos que solucionan la ecuación (4.1) obtenidos por simulación numérica.	106
4.2. Posible solución de la ecuación (4.1) obtenida por continuación numérica.	107
4.3. Esquema gráfico del algoritmo utilizado por AUTO 07p para la continuación numérica de puntos fijos o ciclos límites. El eje de abscisas corresponde al parámetro α ; en el eje de ordenadas ubicamos alguna norma de \mathbb{R}^n	109

5.1. Diagrama de bifurcación para el único punto de equilibrio. El segmento rojo indica la continuación que se construyó para dicho punto fijo. La región amarilla se corresponde con la estabilidad del origen; ninguna oscilación está presente. La curva de color verde más alta es la primera bifurcación (supercrítica) de Hopf y la curva verde más baja corresponde a la segunda bifurcación de Hopf. 124

5.2. Diagrama de la continuación numérica de ciclos límites nacidos en la curva superior de puntos Hopf variando μ y fijando $\delta = 10$ y sus bifurcaciones: de punto límite (LP1 y LP2) y bifurcación toro (TR1). 126

5.3. Espacio de parámetros: (a) Continuación en los parámetros (δ, μ) de las bifurcaciones LP1, LP2 dando lugar a las típicas lenguas de Arnold. En verde, la continuación para $\delta = 0$, en azul para $\delta = 10$ y en negro para $\delta = 25.5$. En magenta la curva representa la bifurcación local toro de órbitas periódicas. Las Figuras (b) y (c) muestran la parte superior de las lenguas para remarcar la interacción entre la bifurcación toro y la lengua con su terminación angulosa 127

5.4. Proyección de ciclos límites sobre los subespacios (x, \dot{x}) y (y, \dot{y}) . Superior: región 1:1 - Medio: región 1:3 - Inferior: 1:5 128

5.5. T_0 es el período empleado por el oscilador 1 que se mantiene constante mientras δ varía. $T_0/T = 1$ en $\delta \approx 0$ - $T_0/T = 3$ en $\delta \approx 8$ - $T_0/T = 5$ en $\delta \approx 20$ 129

5.6. Formación de un isolas de órbitas periódicas dentro de la lengua de sincronización 1 : 3. Los paneles de la izquierda ((a),(c),(e)) son diagramas de bifurcación para μ constante, mientras que los de la derecha ((b),(d),(f)) son diagramas de bifurcación de dos parámetros. El panel (a) corresponde a $\delta \sim 9,492$, (c) es para $\delta \sim 9,4917$, y (e) es para $\delta \sim 9,0$. En las subfiguras de la derecha, las curvas de puntos de silla de órbitas periódicas dentro de la lengua de sincronización están representadas en azul y presentan en el proceso de formación de isolas una forma de cola de golondrina. En negro, las curvas de puntos toro. en verde puntos de equilibrio Hopf. 131

5.7. El segmento rojo en (e) es la ruta a la región de sincronización 1:3 coloreada en azul. En (a),(b),(c) y (d) se grafican proyecciones de las órbitas periódicas sobre el plano $y - \dot{y}$ correspondientes a los puntos homónimos indicados en el segmento rojo. 133

5.8. Curvas donde se cumple las condiciones de tangencia que bordean las regiones de sincronización 1 : 3 (azul) y 1 : 5 (negro). Las líneas sólidas y discontinuas denotan respectivamente estabilidad e inestabilidad. 140

5.9. La estructura de la parte triangular superior para $k = 3$ (a) y $k = 5$ (b). La región azul corresponde al orden 1 : 3, mientras que la negra corresponde al orden 1 : 5. 141

5.10. Diagrama “completo“ de bifurcación para los dos parámetros δ y μ que incluye las lenguas de órbitas simétricas 1 : 1 (verde), 1 : 3 (azul) y 1 : 5 (negro) y las órbitas asimétricas de orden 1 : 2 y 1 : 4 (ambas rojas). 147

5.11. Parte superior de la lengua 1:5. En amarillo 1:5, en negro 3:5 y en rojo, 5:5 150

Capítulo 1

Introducción

“Cuando un niño quiere tomar algo que llama la atención porque se mueve lo que quiere tomar es el movimiento”.

Luis Felipe Noé

La naturaleza se va construyendo por interacciones entre objetos en movimiento, sean éstos animados o no, pequeños como neuronas o grandes como galaxias. En particular, el movimiento oscilatorio es una de las principales formas de existencia en la naturaleza [10]. El movimiento que nos interesa estudiar tiene algún grado de repetición, como por ejemplo el ritmo cardíaco; un péndulo; el gorjeo de los grillos; la tensión en un circuito electrónico; etc. Decimos que estos oscilan y al ser tratados como objetos abstractos son denominados *osciladores*. Cada uno, aisladamente, oscila con un conjunto de *frecuencias* que le es propio. ¿Qué podría ocurrirle a un grupo de osciladores si los ponemos a interactuar entre sí? Para comenzar a responder esta pregunta remontémonos al primer reporte científico sobre el fenómeno de sincronización presente en péndulos acoplados dado por Christian Huygens (1629-1695)¹. En el año 1673 Huygens observó el movimiento de un par de péndulos colgados de un mismo soporte. Después de un tiempo de iniciado sus movimientos, estos alcanzaban una y otra vez, un estado en el que se

¹El reloj de péndulo, el primer oscilador armónico descubierto, fue inventado en 1656 por Huygens inspirado en las investigaciones iniciadas por Galileo Galilei alrededor de 1602. En el siglo XVII surgió la idea de elegir un patrón natural que no variase con el tiempo para medir longitudes. Christian Huygens sugirió en 1664 la utilización de la longitud de un péndulo cuyo período fuera de un segundo, en consecuencia, la longitud propuesta fue $L = g(\frac{T}{2\pi})^2 \approx 9,8/6,28^2 m \approx 24,85 cm$

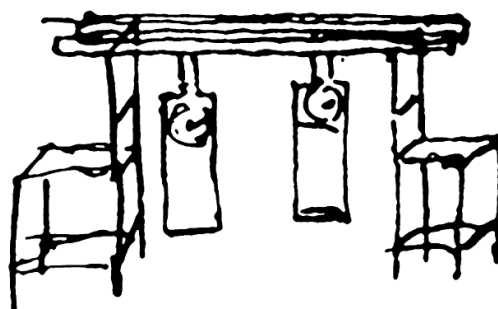


Figura 1.1: Dibujo original de Christian Huygens ilustrando su experimento con dos péndulos acoplados con un soporte común.

movían regularmente en direcciones opuestas, independientemente de la posición inicial en la que comenzaban a oscilar y de pequeñas y suaves perturbaciones que los péndulos tuvieran. El cálculo diferencial no había sido inventado aún para poder abordar este tipo de problemas, pero Huygens entendió correctamente (luego de hacer varios experimentos) que esta “coincidencia” o “acuerdo” alcanzado por ambos péndulos en sus respectivos ritmos era causado por el movimiento imperceptible del soporte; él usó la palabra *sympathy* para describir este fenómeno [32]. En aquellos experimentos los péndulos cambiaron sus comportamientos pasando de un régimen de oscilaciones independientes, a un régimen de oscilaciones estables compartiendo un mismo período. A partir de entonces, y como se describe en esta introducción y en el siguiente capítulo, una sucesión de experimentos y observaciones se realizaron en campos tan diversos como la música; la astronomía; la biología, etc. Tendremos que esperar al siglo XX para comenzar a referirse a la sincronización como un fenómeno universal y dar con conceptos generales que expliquen los resultados obtenidos en diferentes áreas, esto son, *frecuencias naturales de los osciladores*, *parámetros de diferenciación de frecuencias y de acople*, *sistemas auto-oscilantes*, *sistemas disipativos*, son parte de los conceptos indispensables que conjugados en la *teoría de los sistemas dinámicos* y la *teoría de las bifurcaciones*, permiten hacer una descripción del fenómeno en cuestión.

¿Por qué estudiar la sincronización? Este fenómeno se manifiesta en la natura-

leza muy frecuentemente, pero nos interesa resaltar algunas de sus consecuencias que podrían comenzar a justificar su estudio. Por ejemplo, este comportamiento puede ser de vital importancia para el buen funcionamiento de un sistema como el de un marcapasos. Este instrumento es capaz de mantener el latido cardíaco cuando fallan los mecanismos que producen el ritmo del corazón [85]. Otro ejemplo es el caso de los cardúmenes; los peces se mueven coordinadamente, sin golpearse unos a otros, manteniendo la distancia adecuada, sin perder el ritmo gracias a la información que obtienen de su entorno a través de un órgano sensorial llamado *línea lateral*. Dicho órgano recoge las vibraciones y turbulencias del agua; allí la sincronización es cooperación y supervivencia [85] [86] [87]. En los sistemas neuronales la sincronización puede aparecer en estados patológicos tales como la epilepsia generando comportamientos anormales. En estos casos el inicio o el cese de la sincronización refleja una variación en el estado del sistema y puede proporcionar información fisiológica significativa [24, 63, 75]. En el campo de la ingeniería está el conocido caso del Puente Tacoma. En 1940 el puente comenzó un movimiento rotacional que se sincronizó con el propio del viento, en consecuencia la estructura absorbió más energía eólica hasta quebrarse [11]. Aunque estos modos vibratorios han sido bien entendidos en el diseño de puentes después de este renombrado colapso, no se le había prestado mucha atención al movimiento lateral excitado por los peatones, que fue responsable de la gran vibración del puente del milenio. En el año 2000 y a dos días de haber sido inaugurado el puente que se suponía iba a ser el orgullo Londres, se clausuró. Decenas de personas caminando sobre el puente, oscilando como péndulos acoplados en una danza de vaivén, dejaron atónitos a los responsables de su construcción [87]. Acercándonos más a nuestros días, en 2017 el Premio Nobel de Medicina fue otorgado a Hall J., Rosbash M. y Young M. W. por sus trabajos sobre los mecanismos moleculares que controlan el reloj biológico interno de animales, plantas y humanos que regulan las variaciones fisiológicas que responden al ciclo de luz y oscuridad de la rotación terrestre. Estas variaciones se denominan ritmos circadianos y se en-

tienden como una red de osciladores interconectados en donde la sincronización con los ciclos del día y la noche juega un papel fundamental para mantener una buena salud física y psicológica de las personas.

En forma abstracta, cada persona en el puente de Londres, cada pez, cada neurona, pueden ser vistos como un oscilador, se tiene entonces, cientos, miles o trillones de osciladores interactuando. Todavía hoy en día se está lejos de comprender profundamente el mecanismo que explicaría por qué o cómo estos osciladores “acuerdan” un ritmo en común y emerge un comportamiento colectivo ordenado. Unos pocos osciladores interactuando entre sí, constituirían un problema más asequible en términos matemáticos, sin embargo, no deja de ser cierto que aún, el caso de dos péndulos acoplados como el que observó Christian Huygens, sigue siendo actualmente un problema abierto [70], aún cuando el comportamiento asociado a dos osciladores acoplados ha sido ampliamente estudiado [63]. Esto se debe en parte a la falta de una teoría matemática que permita resolver de manera general, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de orden mayor o igual que dos.

En el transcurso del tiempo nuevos modos de sincronización han aparecido. El más simple de estos, denominado *sincronización idéntica o completa*, implica coincidencia de los valores que toman las variables que definen el estado de cada oscilador, aunque en este caso, los osciladores son idénticos [23]. La *sincronización generalizada* se refiere a osciladores distintos en los que las trayectorias que describen las variables de estado se acercan a los mismos valores asintóticamente [76]. *Sincronización con retardo* [73], implica que las variables que describen los estados de cada oscilador coinciden de manera asintótica, pero con una diferencia dada por un tiempo de retraso τ . En la *sincronización de sistemas caóticos*², la idea que subyace es que aunque inicialmente evolucionan de manera diferente, al

²Una de las principales características que definen a un sistema como caótico es que aunque el sistema venga descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales si tomamos dos puntos iniciales tan cercanos como se quiera, las soluciones evolucionan de forma completamente diferente, dando lugar a recorridos separados por completo. Esta circunstancia se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales

acoplarse comienzan a seguir una trayectoria común [58]. En este último tipo de sincronización, en sus orígenes se había puesto en duda que dos sistemas caóticos pudieran sincronizarse, después de todo los sistemas caóticos son sensibles a los cambios leves en las condiciones iniciales, por lo que se podría esperar que las diferencias en las trayectorias de los sistemas caóticos acoplados aumenten exponencialmente.

Estos trabajos pioneros y el lenguaje matemático fueron dando precisión y ampliando el marco conceptual de este fenómeno hasta lograr un relativo acuerdo en la comunidad científica acerca de su significado. En el año 2000, R. Brown y L. Kocarev intentan unificar los diferentes tipos de sincronización en una definición que abarque a todos los casos conocidos [14]. El tipo de sincronización por nosotros analizado, responde a esta última definición. Bajo este marco, la sincronización será un movimiento periódico y tendrá dos características esenciales que interesa resaltar. Una de ellas, dinámica, que expresa que frente a pequeñas perturbaciones que sufra el sistema, éste vuelve a su ritmo original. Este tipo de comportamiento se representará en el espacio de variables del sistema mediante un tipo de órbita periódica denominada *ciclo límite*. La segunda característica se puede describir geoméricamente y se refiere a la forma que adopta este ciclo límite. Como se mostrará rigurosamente más adelante, dicha forma permitirá medir el *orden de sincronización* presente en el sistema; por ejemplo, si en un sistema formado por dos osciladores acoplados, uno de ellos realiza n oscilaciones en un determinado período y el segundo realiza m oscilaciones en el mismo período, diremos entonces que el orden de sincronización en el sistema acoplado está en una relación $n : m$. Este simbolismo se extiende a p osciladores acoplados: $n_1 : n_2 : \dots : n_p$.

En 1927, van der Pol y van der Mark realizan experimentos en circuitos electrónicos acoplados a una fuerza electromotriz (fem) periódica [93]. Para una fuerza $fem = E_0 \sin(\omega t)$ se produce en el sistema salidas con frecuencias $\omega/2; \omega/3,$

$\omega/4, \dots$, etc³. A partir de aquellos experimentos, la comunidad científica se ha interesado en los mecanismos mediante los cuales se produce una transición de un orden a otro diferente. Más cercano a nuestros días, en 2008, en el campo de la fisiología, se han realizado estudios sobre los efectos de la anestesia en los sistemas respiratorio y cardíaco de ratas. Estos sistemas poseen propiedades dinámicas de acople que permiten sincronizar sus oscilaciones en una jerarquía de diferentes órdenes. Durante el curso de la anestesia en intervenciones quirúrgicas a estos roedores, se han observado transiciones que se han producido en una secuencia ordenada 1 : 2 (comienzo de la anestesia); 1 : 3 y 1 : 4 (la anestesia está actuando); 1 : 5 (cuando la anestesia está actuando con mayor profundidad). A medida que la anestesia deja de surgir efecto, la secuencia se invierte manteniendo los órdenes encontrados. Esta transición sugiere que el orden de sincronización puede proporcionar una medida potencialmente útil de la profundidad de la anestesia y parecería plausible que resultados similares podrían aplicarse a los humanos [81]. Si bien los mecanismos a través de los cuales se lleva a cabo la sincronización todavía no se comprenden en general, y todavía no hay forma de predecir qué ecuaciones, y qué valores de sus parámetros, producirán o no la sincronización, la comunidad científica discute y explora posibles mecanismos que dan lugar a las transiciones entre las diferentes órdenes en modelos matemáticos que intentan simular el sistema cardio-respiratorio [81].

En esta investigación analizamos algunos de los mecanismos que se presentan en osciladores acoplados cuando un régimen de sincronización se alcanza. Dicho análisis permitió caracterizar cuál es el mecanismo para la transición de un orden a otro. Estos mecanismos, son estudiados en procesos continuos y dependientes de los parámetros que intervienen en las ecuaciones bajo análisis. Por lo tanto, se hace necesario un estudio en el espacio generado por dichos parámetros. Esto significa que si tenemos un sistema autónomo⁴ de ecuaciones diferenciales ordinarias

³Hasta ese entonces, sólo se conocía cómo multiplicar la frecuencia en el circuito.

⁴En los sistemas autónomos la variable tiempo no aparece explícitamente

(EDOs) de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

donde f es diferenciable con respecto a \mathbf{x} y respecto al vector paramétrico $\boldsymbol{\lambda}$. Cada punto de \mathbb{R}^p representará a un sistema dinámico. Al variar las componentes de interés del vector $\boldsymbol{\lambda}$, en general, se modifica la estructura dinámica del sistema.

Esencialmente, en la sincronización hay dos tipos de parámetros. Asumamos entonces $p = 2$, es decir, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$. En consecuencia quedan determinadas en el espacio biparamétrico regiones en donde el sistema puede presentar un movimiento periódico sincronizado o no presentarlo. Resulta indispensable conocer cuáles son esas regiones y sus límites, y agregamos, conocer el orden de sincronización dentro de ellas y entender las estructuras dinámicas subyacentes en cada una de esas regiones. Estos límites o fronteras en algunos casos adoptan formas geométricas bien definidas. Algunas de ellas tienen nombre propio y están ampliamente estudiadas, por ejemplo, las lenguas de Arnold. Estas lenguas tienen una forma triangular cuyos bordes a su vez, separan comportamientos periódicos de no periódicos [10]. Cuando acoplamos tres osciladores del tipo van der Pol, la región 1 : 1 : 1 presenta en algunos casos una forma de paralelogramo [47]. Otras regiones se estructuran en configuraciones sin formas definidas y en apariencia sin dinámica subyacente que las pueda relacionar [44].

Nosotros hemos podido dar una condición dinámica, correlativamente geométrica, en el ciclo límite que da cuenta de la transición de un orden de sincronización a otro diferente. Llamamos *condición de tangencia* a dicha caracterización. Habiendo logrado esta determinación, podríamos por *integración numérica* intentar obtener una sucesión de puntos en el espacio de parámetros en los cuales el sistema presenta ciclos límites estables con la condición de tangencia mencionada. Se podría pensar que uniendo esos puntos con algún método de interpolación en una curva, quedarían bien delimitadas regiones con diferentes órdenes de sincronización. Pero aún habiendo conseguido una secuencia de puntos relativamente

cercanos unos de otros, nada nos garantiza que la curva que resultara de unirlos sea la frontera buscada. En esta tesis proponemos una técnica computacional innovadora que permite construir esas fronteras salvando la dificultad dicha, más aún, dicha técnica pudo dar cuenta de la lógica subyacente que conecta dinámicamente regiones inconexas en el espacio de parámetros con igual orden de sincronización. La herramienta fundamental metodológica y computacional para la obtención de estos resultados fue la continuación numérica. En términos generales esta técnica consiste en un conjunto de algoritmos que permiten construir una curva o conjunto de curvas definidas implícitamente que dependen de los parámetros del sistema, y dan cuenta de la permanencia de objetos dinámicos estudiado cuando esos parámetros varían. Para nosotros estos objetos son puntos fijos y ciclos límites. Simultáneamente, la continuación numérica permite estudiar aspectos dinámicos de estos estados de equilibrio, como ser, su estabilidad y bifurcaciones del sistema. En 1953, D. F. Davidenko da un método de continuación numérica que consiste en una simple integración numérica. El método sólo es aplicable a unos pocos casos. Habrá que esperar hasta la década del setenta para que H.B. Keller (1925-2008) desarrolle un método más general denominado pseudo-longitud de arco. Keller es considerado el padre fundador de la continuación numérica [39]. Hoy en día existen diferentes métodos numéricos y softwares que llevan a cabo tal tarea. Nosotros empleamos el software AUTO 07p que es ampliamente aceptado por la comunidad de los sistemas dinámicos. Durante la construcción de estas curvas, los métodos de continuación numérica implementados en el computador deberán tener en cuenta el teorema de la función implícita (TFI) para monitorear la dependencia funcional del objeto geométrico bajo estudio respecto del parámetro λ . Esta es una de las diferencias fundamentales entre la simulación numérica y la continuación numérica. En resumen, mediante simulación numérica, la existencia del objeto geométrico se garantiza puntualmente. En la continuación numérica, si bien obtenemos también una sucesión de puntos, la existencia del objeto geométrico que estamos continuado es garantizada local-

mente en cada punto de la sucesión que vamos armando, gracias al TFI. Para mayor seguridad deberemos tomar un paso relativamente pequeño mientras realizamos la construcción de las curvas de continuación. Sin embargo, en aquellos puntos en donde el TFI no garantiza la existencia de una función, los algoritmos computacionales deberán contar con una serie de subrutinas que puedan detectar estas situaciones.

A grandes rasgos nuestro trabajo consistió, en primer lugar, en caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro diferente con lo que hemos denominado condición de tangencia. En segundo lugar construir, con la técnica de Keller, una familia de ciclos límites que tengan en común dicha condición geométrica. Este último conjunto se puede representar en el espacio biparamétrico como fronteras que separan diferentes órdenes de sincronización. Para ello el investigador puede ejecutar sus propios códigos o bien emplear algún software con bibliotecas ya incorporadas a las que se recurrirá cada vez que el investigador las necesitara. En ambos casos, se deberá estar alerta puesto que ningún código computacional nos ofrecerá garantía total de la veracidad de los resultados obtenidos, ni tampoco de una interpretación correcta de lo que el ordenador nos entregue. Para salvar estas dificultades, la teoría deberá orientar al investigador en la búsqueda en el ordenador; en nuestro caso la teoría de los sistemas dinámicos y la teoría de las bifurcaciones. Con esta base, nuestro objetivo general es:

entender la estructura y formas geométricas que adoptan las diferentes regiones en el espacio de parámetros donde el sistema presenta diferentes regímenes de sincronización,

esto significa:

1. Caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro diferente.
2. Proponer una técnica de continuación numérica que permita construir fronteras en el espacio de parámetros que separen regiones con diferentes órdenes

de sincronización.

Consideramos que estos objetivos fueron satisfactoriamente alcanzados y parte de los resultados mostrados en esta tesis fueron publicados en *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* en 2014 bajo el título, *A Bifurcation Approach to the Synchronization of Coupled Van der Pol Oscillators*. Tanto la caracterización del cambio de orden como la técnica de construcción de fronteras son aplicables a sistemas de osciladores independientemente de cómo son producidos los ciclos límites, del tipo de interacción que acopla los subsistemas y de la dimensión (finita) del sistema y estos son los aportes que hemos realizado en esta tesis.

La tesis se estructura de la siguiente manera:

- El primer capítulo es un estado del conocimiento sobre la cuestión de la “sincronización”. Se intenta orientar al lector en un camino que vaya dando cuenta de la importancia del problema elegido y la solución encontrada en el amplio abanico que abre hoy en día este fenómeno. Se presenta un breve desarrollo histórico marcando los hitos más relevantes que permitieron ir descubriendo las leyes propias que rigen el movimiento sincronizado. Estas leyes junto a las técnicas de continuación numérica permitieron el estudio dinámico y geométrico de las regiones en el espacio de parámetros donde se presenta un movimiento sincronizado.
- En el segundo capítulo se desarrolla el marco teórico que permite describir matemáticamente el fenómeno de sincronización en sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) acopladas y autónomas, esto es, la teoría de los sistemas dinámicos y la teoría de las bifurcaciones. Ambas teorías resultan base fundamental para la elaboración de una propuesta metodológica.
- En el tercer capítulo se desarrolla un protocolo para la construcción de las fronteras que dividen en el espacio de parámetros los diferentes órdenes de sincronización. Las técnicas de la continuación numérica nos permiten

establecer una metodología de trabajo singular para la construcción de estas fronteras.

- En el cuarto capítulo se presentan los dos modelos bajo estudio y sus correspondientes resultados. Estos modelos se componen de dos y tres EDOs del tipo van der Pol, acopladas en velocidad. Se elabora una técnica algorítmica computacional, que con ayuda de la metodología expuesta en el capítulo anterior, permite detectar la transición de un orden de sincronización a otro diferente y construir fronteras que separan regiones de diferentes órdenes de sincronización. Hacia el final del capítulo se da la discusión de todos los resultados obtenidos en nuestros bancos de prueba. Se logra entonces fundamentar la generalización de la técnica propuesta. Dinámica, geometría y cuestiones numéricas interactúan entre sí en esta exploración analítica y computacional.

Capítulo 2

Breve desarrollo histórico

En este capítulo presentamos resumidamente la evolución histórica de las ideas, que a nuestro entender, fueron más relevantes para la obtención de las leyes que rigen el movimiento sincronizado. Sin embargo, no pretendemos abarcar todos los tipos de sincronización existentes hoy en día; ya hemos mencionado algunos de ellos en el capítulo anterior. En este sentido, la exposición está organizada en función del punto de partida de nuestra investigación y de las herramientas que hemos utilizado para el cumplimiento de nuestros objetivos. Esto significa que sólo nos interesará la sincronización que resulta en un movimiento estable y con frecuencia constante. Esta característica dinámica se sintetiza en los ciclos límites. Si bien el cálculo diferencial se introdujo en la segunda mitad del siglo XVII, habrá que esperar a 1882 para que Jules Henri Poincaré (1854-1912) pueda encontrar y caracterizar en términos matemáticos a este tipo de soluciones [67]. Recién en 1927, van der Pol entre otros, sentará las bases matemáticas para el análisis de la sincronización. A partir de aquel momento y mientras la teoría de las bifurcaciones se iba profundizando, nuevos modos de sincronización fueron apareciendo y Siendo en diferentes contextos.

En el año 2000, Boccaletti y Brown, realizan intentos de unificación de los casos conocidos hasta entonces en una definición moderna que los abarque a todos [15] [14]. Nosotros hemos tomado la definición abstracta hecha por Boccaletti.

Con el adjetivo abstracto queremos significar que los entes que se conjugan en la definición no tienen una única naturaleza determinada. Desde esta definición, diremos que un sistema de osciladores se encuentra sincronizado si dicho sistema presenta como solución un ciclo límite estable. Este tipo de soluciones se puede proyectar sobre los subespacios de fases de los respectivos osciladores que conforman el sistema. Con esta descomposición se da lugar a un conjunto de oscilaciones periódicas, tantas como subsistemas haya, en las que se puede encontrar un período común a todas. Esta característica ha permitido cuantificar el orden de sincronización presente en el sistema, requisito en la definición dada por Boccaletti. Ya hemos mencionado en la introducción que, por ejemplo, si en un sistema formado por dos osciladores acoplados, uno de ellos realiza n oscilaciones en un determinado período y el segundo presenta m oscilaciones en el mismo período, entonces diremos que el orden de sincronización en el sistema acoplado está en una relación $n : m$. Nuestra definición coincide con la adoptada “implícitamente” por otros autores en similares estudios realizados en estos últimos años [42] [43] [44]. En uno de sus trabajos, estos autores han encontrado diferentes regiones de sincronización en el espacio de parámetros del sistema bajo análisis, sin poder dar una explicación dinámica que las conecte [44]. Este escenario con regiones, en principio inconexas, fue tomado como punto de partida para nuestra investigación.

En principio, la existencia de ciclos límites por sí sólo no es aceptada unánimemente en la comunidad científica; y así nos lo hizo saber uno de los revisores en el primer envío de nuestro trabajo a la revista de la SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS. Este inconveniente se zanjó luego de adoptar la definición dada por Boccaletti. Sin embargo creemos que nuestro punto de vista debe ser profundizado no sólo como una cuestión semántica. Es en este contexto que hemos cumplido con los objetivos de caracterizar la transición de un orden de sincronización a otro diferente y elaborar una técnica computacional que permita obtener fronteras en el espacio de parámetros en donde dicho cambio se produce.

Los primeros reportes científicos. Huygens y Lord Rayleigh

El fenómeno visto por Huygens no atrajo la atención de la comunidad científica en aquel entonces, o al menos quien escribe esta tesis no ha encontrado trabajos publicados al respecto hasta 1739. En aquel año, el relojero inglés John Ellicott informó en dos artículos publicados en The Royal Society sobre la influencia mutua en la marcha de dos péndulos colgados de un mismo soporte pero dispuestos de tal manera que las partes posteriores se enfrentaban una con otra. Le llamó la atención que dependiendo de la distancia que mediaba entre los péndulos, la marcha de uno de ellos se detenía [21]. En 1873, el astrónomo inglés William Ellis, intentó encontrar “simpatía” en 9 péndulos, pero en su caso, no la encontró [70]. Ni Ellicott ni Ellis hicieron mención a Huygens. En otro ámbito, el primer reporte científico en el campo de los sistemas de poblaciones fue realizado por Engelbert Kaempfer (1651-1716), quien durante su viaje por Siam en 1680, observó cómo las luciérnagas se sincronizaban, encendiéndose y apagándose como si estuvieran realizando una coreografía [35]. Los ritmos biológicos diarios se describieron científicamente por primera vez en plantas en 1729; Jean-Jacques Dortous de Mairan (1678-1771), intrigado por la rotación diaria de las hojas del heliotropo, realizó un experimento simple que consistió en exponer a esas plantas a la oscuridad constante. Observó entonces que el movimiento diario de las hojas persistió en ausencia de la luz del sol. Casi un siglo después se pudo demostrar que los ritmos del movimiento de las hojas de esa planta están controlados de forma endógena, al contrario de lo que se especulaba sobre causas en la rotación de la Tierra. Desde entonces la presencia del reloj biológico ha sido demostrada en muchos organismos [17]. Este tipo de sincronización se denomina hoy en día *unidireccional* ya que la influencia entre el sol y los organismos vivos no es recíproca a diferencia de los péndulos de Huygens.

Retornando al campo de la física, William Strutt (1842-1919), también conocido como Lord Rayleigh, experimentó con el sonido de organos musicales de

tubos¹. Rayleigh encontró que al colocar dos órganos “idénticos” uno al lado del otro, éstos pueden acoplarse a través del aire que los separa. Más precisamente, sucedió algo extraño, en lugar de que cada uno hiciera su propio sonido, los dos instrumentos apenas dieron un susurro. Pero si se ponía alguna barrera entre ellos, tocaban alto y claro. Así describió el fenómeno que hoy en día se conoce con el nombre de *extinción de oscilaciones*. En 1896 Rayleigh escribe su tratado *The Theory of Sound*. Esta obra se acepta como el inicio del estudio moderno de la acústica. En dicha obra presentó la analogía entre oscilaciones acústicas y las eléctricas o mecánicas. En el capítulo IV, titulado “*Vibrating systems in general*” se cuestiona acerca de cómo una oscilación puede permanecer sin decaer cuando el sistema es disipativo pero conectado a alguna fuente de energía [72]. Para responderse modeló la situación con una ecuación diferencial, conocida actualmente como la *ecuación del clarinete*. En realidad, Rayleigh no estudia dicha ecuación para el clarinete en particular, sino que lo hace en un contexto más general de instrumentos de viento. Para simplificar la exposición de este caso, seguiremos un desarrollo similar al mostrado por Abraham y Shaw en [1]. En el clarinete, la energía la suministra el instrumentista mediante el ingreso de flujo de aire. El instrumento posee una lengua o caña delgada que actúa como válvula y que transforma el flujo de aire en un movimiento oscilatorio que genera ondas sonoras. Asumamos la lengüeta de este instrumento como una varilla muy delgada y flexible unida a un objeto sólido, con una masa en su extremo.

Sin el clarinetista, el sistema es simplemente un resorte con rozamiento causado por la resistencia del aire. Si inclinamos la lengüeta hacia arriba o hacia abajo, al soltarla comenzará a oscilar pero el amortiguamiento producido por el aire hará regresar la masa a la posición de equilibrio. Este comportamiento se puede modelar usando la ley de Hooke² y un término de fricción lineal depen-

¹En aquel entonces no había laboratorios físicos en las universidades británicas. Aunque asociamos los nombres de Newton, Young, Faraday, entre otros, con la física experimental británica, los experimentos de estos hombres no se llevaron a cabo en la universidad. No fue sino hasta 1873 que la Universidad de Cambridge fundó el Laboratorio Cavendish y estableció una cátedra en física experimental.

²Robert Hooke (1635-1703) formuló lo que hoy se conoce como la ley de elasticidad de

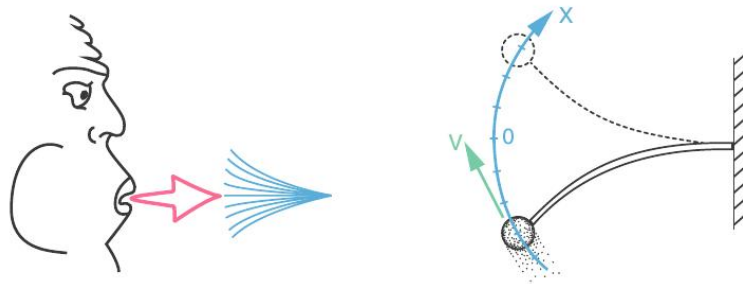


Figura 2.1: Esquema del funcionamiento de la lengüeta en el clarinete.

diente de la velocidad de la masa. Tenemos entonces que dos fuerzas expresadas como:

$F_H = -k_1x$, $k_1 > 0$ es la constante del resorte; y x la posición.

$F_f = -k_2\dot{x}$, $k_2 > 0$ es la constante de fricción y \dot{x} la velocidad.

Asumiendo que la masa es la unidad, y $k_1 = k_2 = 1$, se tiene entonces que la lengüeta se mueve según la ley:

$$\ddot{x} = F_H + F_f = -x - \dot{x}$$

Con la sustitución $\dot{x} = y$ la ecuación anterior se transforma en sistema bidimensional lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \end{cases} \quad (2.1)$$

Este sistema tiene como único punto fijo el $(0; 0)$, esto es, un único punto en donde velocidad y aceleración son nulas. La matriz Jacobiana correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hooke mientras trabajaba como ayudante de Robert Boyle. Esta ley establece, para el caso de un resorte, que la fuerza ejercida por éste es proporcional a la elongación provocada por una fuerza externa aplicada al extremo del mismo. Hooke lo publicó en forma de anagrama: *ceiinossttuw*, respetando el orden alfabético. Reveló su contenido un par de años más tarde de su publicación. Reordenando las letras del anagrama obtenemos la frase *Ut tensio sic vis*, que traducido del latín significa, *como la extensión, así la fuerza*.

cuyos autovalores asociados son $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{3}/2$. Por lo tanto, la solución general es:

$$\begin{cases} x(t) = e^{0,5t}(c_1 A_1 \cos(\sqrt{3}/2t - A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}/2t)) + c_2(A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{3}/2t + A_2 \cos(\sqrt{3}/2t))) \\ y(t) = e^{0,5t}(c_1(B_1 \cos(\sqrt{3}/2t - B_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}/2t)) + c_2(B_1 \operatorname{sen}(\sqrt{3}/2t + B_2 \cos(\sqrt{3}/2t))) \end{cases}$$

donde las letras indexadas son constantes reales a determinar por las condiciones iniciales del sistema. Cuando $t \rightarrow +\infty$, las variables x y y tienden de manera oscilatoria a cero, es decir, la lengüeta tiende a su posición de equilibrio inicial.

Cuando el clarinetista sopla, la situación cambia. El soplo excita una porción de masa de aire que mueve la lengüeta del instrumento. La acción de soplar suministra energía al sistema y por lo tanto actúa de modo contrario al rozamiento, llamamos a este comportamiento dinámico, *fricción inversa*. De esta manera Rayleigh logró combinar esta fricción inversa con una fricción normal. El resultado fue una oscilación que no decae salvo cuando el clarinetista deja de soplar. Este tipo de oscilaciones resultó, 45 años después, esencial en el campo de la electrónica de radiofrecuencia. ¿Cómo modelar esta nueva situación? Rayleigh agrega en la segunda ecuación del sistema (2.1) el término no lineal ky^3 . Luego deduce que k debe ser positivo. Si hacemos $k = 1$, el nuevo sistema queda:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - (y^3 - y) \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\ddot{x} + (\dot{x}^3 - \dot{x}) + x = 0$$

Para valores pequeños de \dot{x} , resulta $\dot{x}^3 \ll \dot{x}$ (o $y^3 \ll y$) y el término $(\dot{x}^3 - \dot{x})$ actúa contrariamente al rozamiento y en consecuencia, la amplitud de las órbitas tienden a aumentar. Para valores grandes de \dot{x} , se tiene $\dot{x}^3 \gg \dot{x}$ (o $y^3 \gg y$) y el término $(\dot{x}^3 - \dot{x})$ actúa como un término de fricción positiva. Rayleigh argumenta, mediante aproximaciones, que entre estos dos estados, debe haber algún estado

oscilatorio en el que el sistema se pueda equilibrar³.

El enfoque cualitativo en el Análisis: Poincaré.

Cinco años más tarde, Poincaré llamó *ciclo límite* al tipo de órbitas que obtuvo Rayleigh [67], y en 1937 Aleksandr Andronov (1901-1952) denominó *órbitas autosostenidas* en un contexto más general [47]. Esta clase de órbita periódica es fundamental en esta tesis pues es la que caracteriza al movimiento sincronizado en los sistemas propuestos para su estudio. En 1892 Poincaré publica el primer volumen de “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste”. En esa obra toma la no linealidad como objeto de estudio y aporta métodos y conceptos fundamentales para el análisis de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales que hoy en día continuamos utilizando. Poincaré introduce un nuevo punto de vista en el que prioriza el enfoque cualitativo en lugar del cuantitativo. Por ejemplo, en lugar de preguntar por las posiciones exactas de los planetas, pregunta si el sistema solar es estable para siempre, o si algunos planetas escapan del sistema solar para no regresar. Este poderoso enfoque geométrico se ha profundizado en la última centuria con aplicaciones que van más allá de la mecánica celeste. Es así que Poincaré da nacimiento a la topología para describir cualitativamente el comportamiento de las soluciones, esencialmente en aquellos sistemas que no tienen desarrollo analítico posible. Sus ideas, se profundizan en su *Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial* desarrollada en cuatro partes [66–69]. A continuación se da un ejemplo extraído de Strogatz en [85] para ejemplificar el poderoso enfoque creado por Poincaré aunque adaptado a un lenguaje más actual.

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO)

³En realidad Rayleigh estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación $\ddot{x} + k\dot{x} + k'\dot{x}^3 + n^2x = 0$. Con técnicas de aproximación deduce que k y k' deben tener distinto signo para lograr un movimiento oscilatorio permanente.

no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(x) \quad (2.2)$$

Nuestro objetivo es obtener información acerca de sus soluciones. Por separación de variables

$$dt = \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

lo cual implica

$$t = \int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln|\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C$$

Asumiendo la condición inicial $x = x_0$ en $t = t_0$, tenemos

$$C = |\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)|$$

Luego la solución de nuestro ejemplo es

$$t = \ln \left| \frac{\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)}{\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)} \right|$$

No es tan directa la interpretación de esta solución exacta. Pensemos en las siguientes preguntas:

- Asumamos $x_0 = \pi/4$, ¿qué sucede con x cuando $t \rightarrow +\infty$?
- para cualquier condición inicial x_0 , ¿qué sucede con x cuando $t \rightarrow +\infty$?

Veamos ahora el enfoque geométrico de Poincaré. Desde este punto de vista podemos imaginar la solución de una ecuación diferencial como un punto móvil que describe una trayectoria. La variable t representa al tiempo, x a la posición de ese punto móvil desplazándose a lo largo de el eje real, y $\frac{dx}{dt}$ ó \dot{x} a su velocidad. De este modo, $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$ representa un *campo vectorial* unidimensional. Este campo determina la velocidad de la partícula en cada posición x . La partícula se mueve hacia la derecha si $\dot{x} > 0$, hacia la izquierda

si $\dot{x} < 0$.

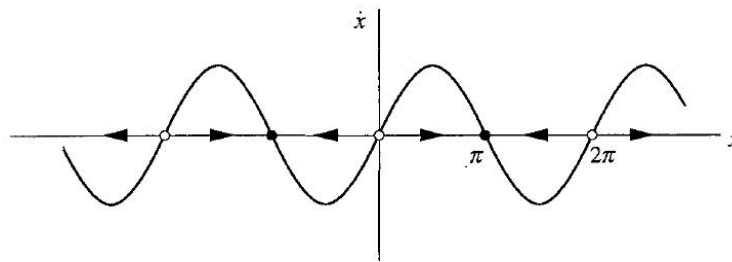


Figura 2.2: $\dot{x} = \sin(x)$

En el gráfico 2.2 se representa \dot{x} Vs x , la flecha indica el movimiento de la partícula según sea $\dot{x} > 0$ o $\dot{x} < 0$. La variable x se denomina *fase* o *variable de estado* y el eje de abscisas se llama *espacio de fases*. Si $\dot{x} = 0$, la partícula no se mueve, estos estados son denominados *puntos de equilibrio*. En este último caso, las funciones $x(t) = k\pi, \forall t \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, son soluciones constantes de la ecuación (2.2). Se pueden ver dos clases de puntos de equilibrio: llenos y vacíos. Los primeros indican puntos de equilibrio *estables* también denominado *atractores* o *sumideros* puesto que en un entorno de estos puntos la partícula se mueve hacia ellos. Los puntos fijos vacíos son *inestables*, pues en un entorno de ellos la partícula se mueve alejándose de dichos puntos.

Veamos ahora el escenario completo de las soluciones de $\dot{x} = \sin(x)$. Supongamos que una partícula comienza su movimiento en la posición $x = \pi/4$. Dicha partícula se mueve rápidamente hacia $x = \pi/2$ (ahí alcanza su mayor velocidad). Luego la partícula comienza a frenarse aproximándose asintóticamente a $x = \pi$; la solución está graficada en la Figura 2.3.

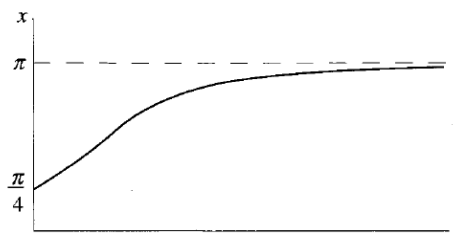


Figura 2.3: Solución particular con $x_0 = \pi/4$

El mismo razonamiento se aplica a cualquier condición inicial x_0 . En la

Figura 2.4 aparecen dibujadas algunas soluciones.

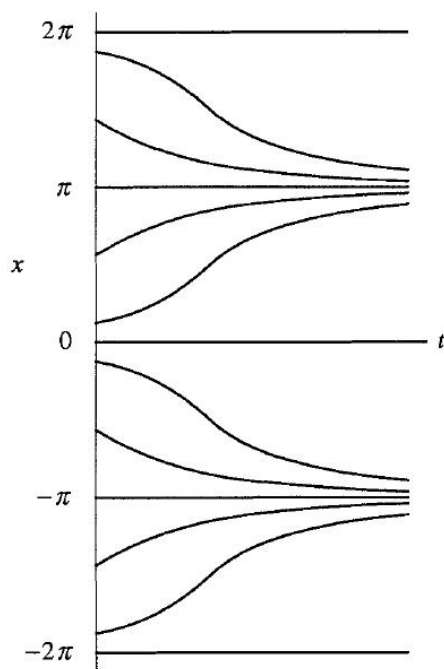


Figura 2.4: Diferentes soluciones de $\dot{x} = \text{sen}(x)$.

Las ideas desarrolladas en el ejemplo 1 las podemos aplicar en general a cualquier sistema de primer orden $\dot{x} = f(x)$ con f derivable. Sólo necesitamos graficar $f(x)$, ver Figura 2.5. La aproximación a los puntos fijos en estos sistemas de primer orden es monótona y esta característica imposibilita el movimiento periódico. Esto es debido a que entre dos ceros consecutivos, llamémoslos x_1^* y x_2^* respectivamente, la gráfica de $f(x)$, se encuentra o bien por encima del eje de abscisas, o bien por debajo de dicho eje por ser f continua (consecuencia del teorema de Bolzano). De este modo entre las dos soluciones constantes $x_1(t) = x_1^*$ y $x_2(t) = x_2^*$ cualquier otra solución $x(t)$ no cambia el signo de su derivada, de ahí que no pueda oscilar.

Cuando aumentamos la dimensión del sistema, nuevos comportamientos aparecen. Las soluciones periódicas se presentan en los sistemas n -dimensionales⁴ con

⁴A finales del siglo XIX, la geometría n -dimensional era aceptada como real, y así lo hace saber Poincaré en su *Analisis Situs* (1895), más precisamente, comienza diciendo: "La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier."

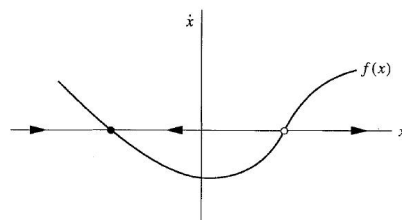


Figura 2.5: Generalización de las ideas de Poincaré a “cualquier” sistema $\dot{x} = f(x)$ con f derivable

$n \geq 2$. Estas soluciones son curvas cerradas en los espacios de fases correspondientes (x_1, x_2, \dots, x_n) , pues para un valor inicial $t = t_0$, las variables de estado se fijan en el vector $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))$, y al cabo de un período T , esas variables toman los mismos valores, pues al ser el movimiento periódico resulta la igualdad:

$$(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (x_1(t_0 + T), x_2(t_0 + T), \dots, x_n(t_0 + T))$$

En el capítulo IV de *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II)*, Poincaré, trabaja con $n = 2$ y hace una clasificación de los posibles comportamientos que pueden ocurrir en sistemas de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

con P y Q polinomios⁵.

El movimiento periódico más simple que puede presentar sistemas como el anterior, es el que realiza una masa puntual en un resorte sin fricción, como en el ejemplo del clarinete de Rayleigh. Retomemos entonces la ecuación (2.1) en la

⁵En 1900 se celebró en París el nuevo Congreso Internacional de Matemáticos. En dicho congreso, David Hilbert presenta 23 problemas principales de investigación para el nuevo siglo. El problema 16 de esa lista pregunta sobre la cantidad de ciclos límites que el sistema planteado por Poincaré podría llegar a tener. Si bien a lo largo del siglo se dieron soluciones parciales, este problema en su planteo general continúa abierto.

cual no se consideró ningún tipo de fricción:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \end{cases}$$

Supongamos que la bola en el extremo del fuelle comienza a moverse desde abajo hacia arriba como indica la siguiente figura.

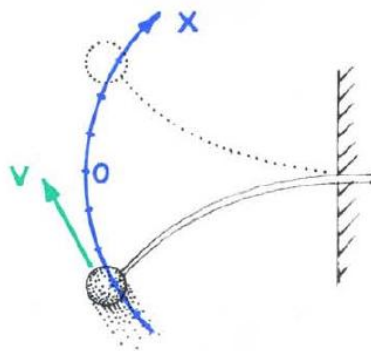


Figura 2.6: Clarinete sin fricción

Esta bola se suelta con velocidad inicial cero desde la posición más baja que indicamos como $x = -x_0$. Comienza a aumentar su velocidad hasta ser máxima $y = V_{MAX}$, esto ocurre cuando la bola pasa por la posición $x = 0$ (en esta posición la lengüeta no está flexionada). Luego va perdiendo velocidad, hasta detenerse en su punto más alto $x = x_{max}$. A continuación se mueve hacia $x = 0$ en donde alcanza la velocidad $y = -V_{MAX}$. Observemos que en dicho punto la velocidad es negativa pues la posición es dada por una función $x(t)$ decreciente. A partir de allí, en valores absolutos, nuevamente pierde velocidad hasta detenerse en el extremo más bajo de su trayectoria $x = -x_0$. Como dijimos anteriormente, en ausencia de fricción y de resistencia del aire, la masa seguiría oscilando para siempre y cada ciclo tomará un mismo tiempo $t = T$. La solución del sistema es representada por un par de funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ que definen una curva en el espacio de fases (x, y) y debe pasar por los siguientes puntos en los correspondientes tiempos:

- $x(0) = -x_0$, e $y(0) = 0$
- $x(T/4) = 0$, e $y(T/4) = V_{MAX}$
- $x(T/2) = x_0$, e $y(T/2) = 0$
- $x(3T/4) = 0$, e $y(3T/4) = -V_{MAX}M$
- $x(T) = -x_0$, e $y(T) = 0$

El movimiento es periódico, la masa vuelve a comenzar en la misma traza iniciada en $t = 0$.

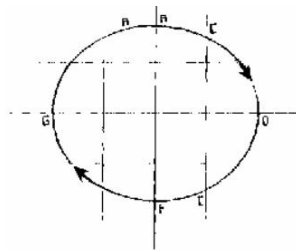


Figura 2.7: Movimiento periódico

Si ubicásemos la masa en otra posición diferente a x_0 , la trayectoria será similar. Así podremos obtener potencialmente una familia continua de oscilaciones periódicas parametrizada por la posición inicial que ocupa la bola.

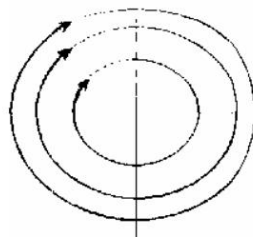


Figura 2.8: Familia continua de oscilaciones periódicas

En el caso real, hay fricción y resistencia del aire. La masa va perdiendo velocidad en cada oscilación. La representación gráfica en este caso se corresponde con espirales que se acercan asintóticamente al origen. Por tal motivo el punto

$(0;0)$ es llamado *atractor*. El origen, además representa la situación en la que la masa se encuentra detenida y la solución correspondiente viene dada por las ecuaciones $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$.

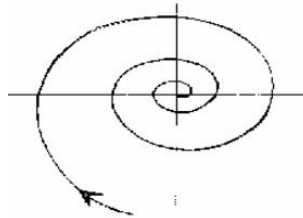


Figura 2.9: La masa se acerca asintóticamente al origen

El primer ciclo límite

Como mencionamos en el caso de la masa sin fricción, si consideramos otras posiciones iniciales desde las cuales soltar la lengüeta, todas estas oscilaciones, dibujarán un continuo de órbitas cerradas que en consecuencia ninguna de ellas está aislada. Por oposición, una órbita periódica será aislada si existiera un conjunto abierto U en el espacio de fases que contenga a dicha órbita, solución de la EDO, y no existiese en U otra solución periódica de la misma ecuación. Poincaré en la segunda parte de su “Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial“ [67], da algunos ejemplos puramente matemáticos de curvas periódicas aisladas. El primero de los ejemplos está dado por la ecuación:

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)} \quad (2.3)$$

que transformado a ecuaciones paramétricas resulta:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1) \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

donde el punto indica la derivada respecto del parámetro t . Poincaré demuestra que $x^2 + y^2 = 1$ es una solución periódica aislada de (2.4).

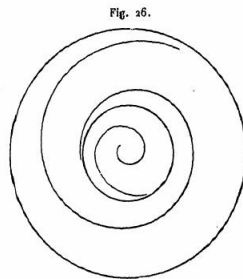


Fig. 26.
limite. Le système des caractéristiques présente donc l'aspect de la fig. 26.

Figura 2.10: Primer ciclo límite presentado por Poincaré para la ecuación (2.4), dibujado en el espacio de fases (x, y) . La circunferencia mayor simplemente marca una porción del espacio (x, y) donde algunas soluciones aparecen graficadas. La circunferencia menor corresponde a la solución periódica $x^2 + y^2 = 1$. La espiral por fuera de esta circunferencia de radio unitario es una solución que se aleja de la solución periódica. La espiral interior corresponde a una solución que se aleja de la solución periódica mientras se acerca al origen $(0, 0)$

Introduzcamos las coordenadas polares⁶:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta).$$

en donde:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Derivando esta última expresión respecto del parámetro t en ambos miembros, obtenemos:

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$$

reemplazando \dot{x} y \dot{y} en la ecuación anterior nos queda:

$$r\dot{r} = x[x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)] + y[y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)]$$

⁶La metodología de Poincaré para este caso particular se puede consultar en Perko, L. (1991), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York, pp. 248-267.

y ahora sustituyendo en la anterior ecuación las variables x e y por sus coordenadas polares, obtenemos:

$$r\dot{r} = r\cos(\theta)(r^2 + 1)] + r\sin(\theta)[r\sin(\theta)(r^2 - 1) + r\cos(\theta)(r^2 + 1)]$$

equivalentemente

$$\dot{r} = r\cos^2(\theta)(r^2 - 1) - r\cos(\theta)\sin(\theta)(r^2 + 1) + \sin^2(\theta)(r^2 - 1) + r\sin(\theta)\cos(\theta)(r^2 + 1)$$

y haciendo las simplificaciones correspondientes nos queda:

$$\dot{r} = r(r^2 - 1).$$

Por otro lado, usando la identidad $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ se deduce:

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$$

nuevamente reemplazando x e y por sus coordenadas polares y haciendo las simplificaciones adecuadas, obtenemos la siguiente expresión:

$$\dot{\theta} = r^2 + 1.$$

Resumiendo el sistema (2.4) en coordenadas polares resulta ser:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = r^2 + 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Analicemos las soluciones $x(r(t), \theta(t))$ e $y(r(t), \theta(t))$ en (2.5). De la segunda ecuación es claro que $\dot{\theta} > 0, \forall t \forall r$, en consecuencia x y y oscilan indefinidamente en sentido antihorario, excepto para la solución constante $r(t) = 0$, que en coordenadas rectangulares es $x(t) = y(t) = 0$. Si $r = 1$, resulta $\dot{r} = 0 \forall t$, por lo tanto, para

cualquier condición inicial del sistema que se encuentre sobre la circunferencia unitaria, la solución no cambiará su radio y rotará a velocidad angular constante sobre este. Por otro lado, si $r < 1$, entonces $\dot{r} < 0 \forall t$. De aquí que para condiciones iniciales dadas en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, las soluciones comienzan a oscilar alejándose de esta. Contrariamente, si $r > 1$, resulta $\dot{r} < 0 \forall t$, y en consecuencia, cualquier solución por fuera del círculo unitario se alejará de este. En resumen, la curva $x^2(t) + y^2(t) = 1$ es una solución aislada de (2.3) o (2.4).

En este mismo trabajo Poincaré da la definición de ciclo límite, que se puede traducir como sigue:

Un ciclo límite es una curva cerrada, solución de nuestra ecuación diferencial y cuyas otras curvas definidas por la misma ecuación se aproximan asintóticamente sin alcanzarlas.

El comportamiento asintótico está íntimamente ligado al de *estabilidad de la solución*. Si en un conjunto abierto del espacio de fases que contenga a un ciclo límite, todas las trayectorias se aproximan a él, decimos que tal ciclo es *estable*. Si todas las trayectorias se alejan, el ciclo límite es *inestable* y así ocurre con la solución $x^2(t) + y^2(t) = 1$ en el primer ejemplo de ciclo límite dado por Poincaré. Por último, podría ocurrir que para todo abierto algunas órbitas se acercasen y otras se alejasen, en ese caso la solución será *semiestable*. Esta definición hace que los ciclos límites aparezcan sólo en sistemas no lineales y disipativos, de lo contrario no hay órbitas periódicas aisladas como predice la teoría. En la Figura 2.11 se pueden observar tres ciclos límites ejemplificando los únicos tres tipos de estabilidad descripta.

Tanto Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) como Poincaré encararon la cuestión de la estabilidad. Este último, en 1881, estudió la solución al problema con la técnica denominada *Aplicación de primer retorno*. Esta aplicación no está definida en el espacio de estados del sistema, sino en un subespacio de dimensión inferior llamado *sección de Poincaré*. Veamos cómo funciona. Asu-

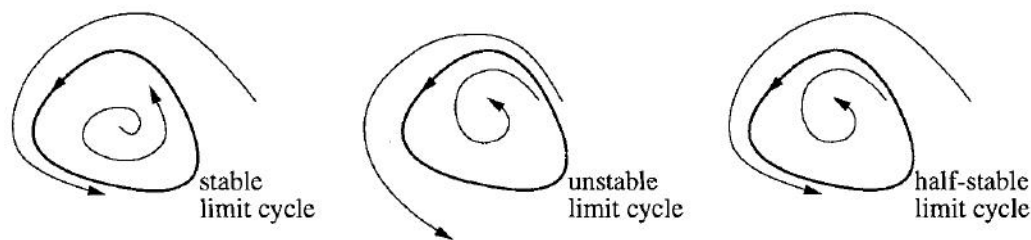


Figura 2.11: Izquierda: Ciclo límite estable. Centro: ciclo límite inestable. Derecha: ciclo límite semi-estable

mamos un ciclo límite Γ , solución del siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y f con todas sus derivadas continuas. Asumamos también que dicha solución pasa por un punto \mathbf{x}^* perteneciente a un hiperplano S (sección de Poincaré), que será perpendicular a Γ . La aplicación de Poincaré está definida en dicho hiperplano de modo tal que a cada $\mathbf{x} \in S$ le asigna el primer punto en el que la órbita que contiene a \mathbf{x} retorna a S . Si existiera un entorno U sobre el hiperplano S tal que $\mathbf{x}^* \in U$, y toda sucesión generada a partir de un punto inicial $\mathbf{x}_0 \in U$ convergiera a \mathbf{x}^* , entonces la órbita Γ será estable. Denotando con P a dicha transformación, en particular tendremos $P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ (ver Figura 2.12).

Resumiendo, la aplicación de Poincaré puede interpretarse como un sistema dinámico discreto definido en un espacio de fases con menor dimensión que el sistema continuo asociado. Este nuevo sistema preserva algunas características esenciales del sistema original y suele emplearse como un medio alternativo para analizar el sistema continuo. Sin embargo, no existe un método general para construir aplicaciones de Poincaré. En consecuencia, no siempre es posible hacer este tipo de análisis. En el capítulo siguiente daremos condiciones de existencia de P . La correspondencia entre el sistema discreto y el continuo es la siguiente:

- Una órbita periódica simple del sistema dinámico original se convierte en un único punto fijo en la sección de Poincaré.

- Una trayectoria cuasiperiódica se transforma en la imagen de un conjunto de puntos sobre S que cubren densamente una curva cerrada $C \subset S$.
- Un movimiento caótico se manifiesta en puntos distribuidos de modo errático en una región sobre S .

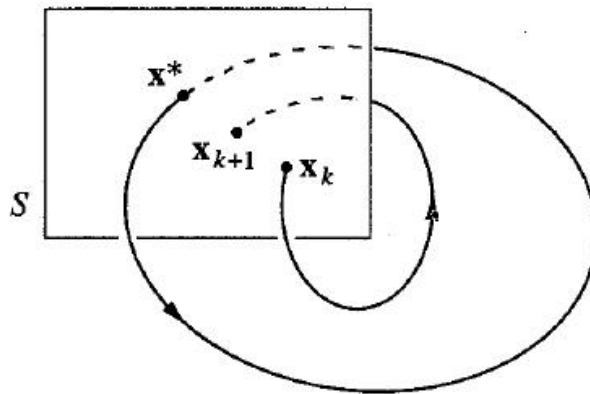


Figura 2.12: Esquema del mapa de Poincaré

Ya hemos mencionado que Andronov denominó órbitas autosostenidas a este tipo de órbitas. En sentido contrario, un ejemplo de oscilaciones no autosostenidas son observables en un simple péndulo de resorte helicoidal que cuelga de un techo sin ninguna fuente de energía interna. Éste oscila si recibe un impulso, pero estas oscilaciones desaparecen debido a la fricción con el aire. Para mantener las oscilaciones deberíamos impulsarlo repetidamente. ¿Y si no hubiera fricción?, la forma de las oscilaciones dependerían del impulso inicial. Recién en 1937, Andronov, sugerirá que los fenómenos periódicos en sistemas no lineales y no conservativos se pueden describir matemáticamente en términos de ciclos límites [52].

Poincaré también se preocupó especialmente por el surgimiento de ciclos límites cuando los parámetros de un sistema varían, en particular la pérdida de estabilidad de un punto fijo por el nacimiento de un ciclo límite. Esta bifurcación hoy en día recibe el nombre de bifurcación de Poincaré-Hopf-Andronov (por Henri Poincaré, Eberhard Hopf (1902-1983), y Aleksandr Andronov). Recién en 1942,

Hopf generalizará este resultado a sistemas n -dimensionales, de ahí también que se hable directamente de *bifurcación de Hopf*. Este manera de generar un ciclo límite se adapta a nuestra definición de sincronización. Es en este mecanismo que fuimos observados por uno de los revisores de la SIAM en la primera presentación de nuestros resultados. Salvamos esta observación adoptando la definición de Brown y Kocarev [14]; sin embargo, creemos que este punto de vista debe ser revisado no sólo como una cuestión semántica.

Ciencia y sociedad

Hagamos aquí una breve pausa con las cuestiones matemáticas. Recién ingresando al siglo XX podemos decir que los científicos se han visto implicados directa y abiertamente por primera vez en la historia, en los principales progresos económicos, industriales y militares de esa época [12]. Desde el punto de vista de la historia de la ciencia, es necesario averiguar qué fuerzas económicas y sociales han contribuido a determinar la orientación principal y el ritmo del progreso científico, e inversamente, los puntos en los cuales los descubrimientos científicos han llegado a modificar el curso de los acontecimientos económicos e incluso políticos. En este último sentido, uno de los progresos más importantes se produjo en el campo de las ondas de radio y de la electrónica [12]. Es sabido que las ondas electromagnéticas fueron producidas por Hertz en 1886 siguiendo la teoría de Maxwell acerca de su naturaleza y propiedades, pero hasta finales del siglo XIX no fueron utilizadas de manera práctica. El éxito comercial se debió a Guillermo Marconi (1874-1937) quien intentó enviar al otro lado del océano señales de telegrafía pero sin hilos, y lo logró. El 12 de diciembre de 1901, utilizando una cometa de 152,4 metros como antena, fue capaz de transmitir y recibir un mensaje constituido por la letra S del código Morse. Lo hizo desde Poldhu (Inglaterra) a Newfoundland (Canadá). La distancia entre los dos puntos es de unos 3500 kilómetros. En 1902, Marconi se embarcó y desde la nave pudo registrar señales emitidas diariamente desde una estación ubicada en Poldhu. Los resultados de

las pruebas demostraron que las señales de radio podían ser enviadas a cientos de kilómetros. En 1909 obtuvo el premio Nobel de Física por sus descubrimientos. El hecho implicaba la existencia de una especie de “espejo” que reflejaría las ondas de radio volviéndolas a enviar a la superficie terrestre. Edward Appleton, en los años veinte, empezó a estudiar el problema y consiguió demostrar que en distintas capas de la atmósfera existen tales “espejos” consistentes en iones producidos por la radiación solar. Tales capas recibieron el nombre de *ionósfera*. El espectacular éxito de Marconi aseguró el rápido desarrollo de la telegrafía sin hilos pero no hubiera llegado a alcanzar el lugar que ocupa en nuestra vida diaria de no ser por el descubrimiento de la válvula electrónica. En 1884 el laboratorio de Edison advierte que el filamento incandescente de una bombilla eléctrica podía retener carga positiva (protones) pero no negativa (electrones). Luego se colocó una placa metálica en el interior de la bombilla y se descubrió que se podía hacer pasar una corriente desde la placa al filamento pero no al revés. Ésta fue la primer válvula eléctrica. La rapidez con la que la válvula electrónica pasó de ser una curiosidad de laboratorio a ser un objeto vendible es un ejemplo de cómo la industria puede absorber la física del siglo XX. De la válvula se pasó al tríodo también llamado válvula de tres electrodos. Este dispositivo, a diferencia de la válvula eléctrica, amplifica y retroalimenta el sistema y fue utilizado con éxito para construir los primeros receptores de radio con amplificación y osciladores electrónicos. En 1927, Balthasar van der Pol encontró un ciclo límite extremadamente importante en un modelo matemático de válvula electrónica (lo que se conoce como tubo de vacío) y que tiene una importancia práctica relevante ya que éstas se usaron en las radios hasta que en 1947, Shodey, Bardeen y Brattain inventaron el transistor. El interés que suscitaron este tipo de comunicaciones indujo a la realización de pruebas en muchos países. Una de ellas, la construcción de la torre Eiffel; si bien en su propia página web se puede leer que fue construida por Gustave Eiffel con motivo de la Exposición Universal de 1889 que conmemoraba el primer centenario de la Revolución Francesa, no deja de ser cierto que uno de los nombres

de fantasía de este monumento, durante la primera guerra mundial, fue "la gran oreja". Durante la primer guerra mundial los franceses lograron interceptar una comunicación alemana sin codificar: "entendido, ganar la orilla sur de Marne". El gobernador de París, reunió a 670 taxis de la ciudad para enviar con urgencia seis mil reservistas a Marne. En este contexto histórico, van der Pol lleva adelante la construcción y estudio de circuitos electrónicos con resistencias variables, cuyas ecuaciones diferenciales dan la ley que rige la evolución de la corriente en un circuito. Así entonces, el problema de buscar señales estables, investigado por Rayleigh en su teoría del sonido, continuó con el estudio de las ecuaciones que modelizan los circuitos construidos por van der Pol. A su vez, la consistencia de los diversos componentes utilizados en el tríodo permitió la reproducción exacta de los experimentos, lo que facilitó la investigación sobre oscilaciones autosostenidas.

2.1. Primeros desarrollos teóricos. Van der Pol

Un circuito eléctrico o instalación eléctrica es un conjunto de elementos que están unidos entre si y permiten una circulación de corriente eléctrica que va desde un inicio, recorre un camino y vuelve a ese mismo punto de partida. En la figura 2.13 está representado nuestro circuito RLC en serie. Este consiste de un resistor R de resistencia constante, una bobina L y un capacitor C .

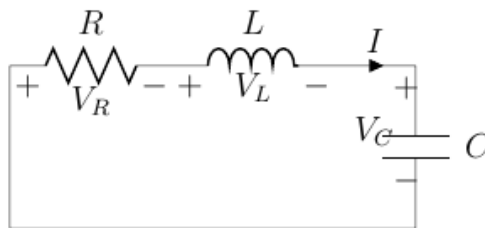


Figura 2.13: Circuito RLC

Para plantear la ecuación diferencial correspondiente, consideremos la diferencia de tensión en cada componente.

- Para la resistencia:

$$V_R = RI$$

- Para la bobina

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

donde L es la inductancia, una propiedad física de la bobina.

- Para el capacitor

$$V_C = \frac{1}{C}Q$$

donde C es la capacidad del componente para recoger y almacenar energía en forma de carga eléctrica.

luego por la ley de Kirchoff, que dice que en un circuito cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a cero, tenemos la siguiente expresión:

$$V_R + V_L + V_C = 0 \quad (2.7)$$

o equivalentemente

$$\frac{dV_R}{dt} + \frac{dV_L}{dt} + \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

Si R , L y C son constantes, reacomodando los términos obtenemos:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (2.9)$$

Esta ecuación, en estructura, es idéntica a la ecuación que describe el movimiento de una partícula de masa M , sujeta a un resorte con constante de rigidez k , en un medio con viscosidad c ⁷. Esto es:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.10)$$

⁷Asumimos que la fuerza de amortiguamiento se opone al movimiento de la partícula proporcionalmente a la velocidad.

Intuitivamente la partícula se detendrá a causa del rozamiento. Si lo hace oscilando o no, dependerá, como se puede leer en cualquier texto de ecuaciones diferenciales, del signo de $k^2 - c^2$. Si es negativo, el cuerpo se detendrá oscilando (movimiento amortiguado), caso contrario el cuerpo se detendrá sin oscilaciones (movimiento subamortiguado). En términos del circuito, la resistencia consumirá cualquier excitación que se le provea.

Pasemos ahora a la situación con un resistor variable, es decir, V_R/I no es constante en el tiempo. La evolución temporal de la corriente eléctrica está dada por la ecuación:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{dV_R(I)}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (2.11)$$

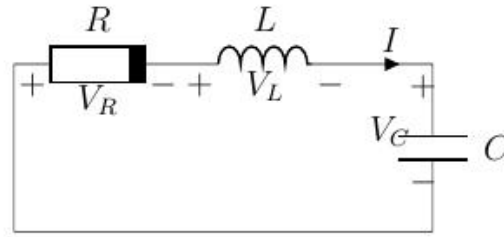


Figura 2.14: Circuito RLC con resistor variable en el tiempo.

Si realizamos el cambio de escala $\tau = \sqrt{LC}t$ obtenemos:

- $\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dI}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $\frac{dV_R(I)}{dt} = \left(\frac{dV_R(I)}{dI} \frac{dI}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dV_R(I)}{dI} \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \frac{dI}{d\tau}$
- $\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dI}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\left(\frac{dI}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{d^2 I}{d\tau^2} \frac{1}{LC}$

la ecuación anterior se transforma en

$$L \frac{d^2 I}{d\tau^2} \frac{1}{LC} + \left(\frac{dV_R(I)}{dI} \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \frac{dI}{d\tau} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (2.12)$$

equivalentemente

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} + \left(\frac{dV_R(I)}{dI} \sqrt{\frac{C}{L}} \right) \frac{dI}{d\tau} + I = 0 \quad (2.13)$$

Si denominamos $f(I) = \frac{dV_R(I)}{dI} \sqrt{\frac{C}{L}}$ nos queda

$$\ddot{I} + f(I)\dot{I} + I = 0 \quad (2.14)$$

Si $f(I) = 1 - I^2$, la ecuación anterior se conoce como ecuación de van der Pol.

En 1928, en un trabajo titulado *The Heartbeat considered as a Relaxation Oscillation, and an Electrical Model of the Heart*, van der Pol analizó la siguiente ecuación que más tarde llevará su nombre:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.15)$$

Haciendo el cambio de variables $y = \dot{x}$, la ecuación (2.15) se transforma en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(1 - x^2)y - \omega^2 x \end{cases}$$

en el cual van der Pol observó un tipo de órbita periódica que llamó *onda de relajación* [95]. La utilizó para modelar el latido del corazón, un martillo neumático, etc. Para valores positivos de λ , el término no lineal $\lambda(1 - x^2)\dot{x}$ actúa como una fuerza de rozamiento positiva para $|x| > 1$ causando que grandes amplitudes decaigan. Por otro lado, si $|x| < 1$, las oscilaciones aumentan en amplitud. Entre un y otro estado se encuentra un ciclo límite estable.

2.1.1. De los circuitos eléctricos a las luciérnagas, una búsqueda de principios universales

En esta sección queremos mostrar dos casos que fueron encarados en el siglo XX por B. Van der Pol en el campo de la electrónica en la década del 20 y por

Bard Ermentrout (1954-) y John Rinzel en el campo de poblaciones de luciérnagas en la década de los 80. En ambos casos la sincronización es unidireccional, esto significa que el acople se da sólo en un sentido. A diferencia de los ejemplos planteados por Huygens, Kaempfer y Dortous de Mairan siglos antes, los investigadores en el siglo XX ya dispusieron de una matemática para el estudio de los sistemas dinámicos basada en los métodos creados por Poincaré y Lyapunov. Los dos ejemplos que a continuación mostramos nos permitirán introducirnos en el campo de la sincronización en el contexto de la teoría de las bifurcaciones y en el contexto de la modelización y la continuación numérica. La matemática ha permitido encontrar un lenguaje universal para describir el fenómenos en campos tan diversos como los dos planteados.

La solución que el lector verá es analítica y respeta a grandes rasgos los caminos desarrollados por los autores originales. Creemos que son clarificadores conceptualmente y dan dimensión histórica al fenómeno de la sincronización y por tales motivos los exponemos. Sin embargo, como hemos mencionado en distintas oportunidades, hoy en día en muchos casos resulta inevitable recurrir al computador, y apelar a desarrollos analíticos cada vez que los sistemas bajo estudio lo permitan. En particular, nuestros resultados, como se verá en posteriores capítulos, si bien son guiados por la teoría, principalmente los obtuvimos con ayuda del software AUTO 07p.

En 1927, van der Pol presenta el caso más simple de sincronización en un trabajo titulado *Forced Oscillations in a Circuit with non-linear Resistance. (Reception with reactive Triode.)* [92]. Allí analiza el caso de un oscilador débilmente no lineal interactuando con una fuerza periódica.

En su trabajo, van der Pol no hace mención a la teoría de las bifurcaciones, sin embargo da condiciones sobre los parámetros del sistema para que las órbitas periódicas del estado sincronizado sean estables. Para exponer algunas de sus ideas vamos a seguir a Balanov et al. en *Synchronization: From Simple to Com-*

plex [10]. En nuestra investigación no hemos empleado los métodos de van der Pol, sin embargo, la exposición de su trabajo es muy clara y precisa para una primera caracterización del fenómeno en cuestión. Vale aclarar que sus métodos, generalizados hoy en día, siguen empleándose. Aquí sólo mostraremos los resultados principales que llevan a determinar la región en donde la sincronización se presenta con orden 1:1 para el siguiente sistema:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos(\Omega t) \quad (2.16)$$

En donde λ es el parámetro que controla el nacimiento de ciclos límites estables. Si $\lambda < 0$ el origen es el único punto fijo estable y el sistema no presenta soluciones periódicas. Si $\lambda = 0$ la bifurcación de Andronov-Hopf aparece, por lo tanto, el punto fijo se mantiene pero pierde estabilidad y un ciclo límite comienza a nacer con frecuencia $\omega > 0$. Balthasar van der Pol asumió $\omega_0 \approx \Omega$ y $0 < \lambda \ll 1$. Se deduce que cuando $B = 0$ y con los valores pequeños de λ asumidos, la solución de (2.16) para grandes valores de t es cuasiarmónica, esto es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.17)$$

donde A, ω_0 y φ_0 son constantes, en donde φ_0 se denomina *fase inicial* de la oscilación. La figura 2.15 muestra dos soluciones con $B = 0$. Una de ellas, en color negro, corresponde a una solución cuasiarmónica como (2.17) para un valor $\lambda = 0.1$. La otra corresponde a $\lambda = 0.5$, en gris, se puede observar cómo se deforma esta última respecto de la cuasiarmónica.

Cuando $B \neq 0$, resultados empíricos muestran que si $\Omega - \omega \approx 0$ las oscilaciones del sistema forzado $x(t)$ se vuelven periódicas. El problema principal es encontrar el rango de frecuencias para Ω en donde el oscilador y la fuerza acuerdan ir a un mismo ritmo. Cuando se logra este acuerdo, hablaremos de *sincronización forzada* de orden 1:1. El adjetivo “forzada” hace referencia a que el oscilador recibe la influencia de la fuerza $F(t)$.

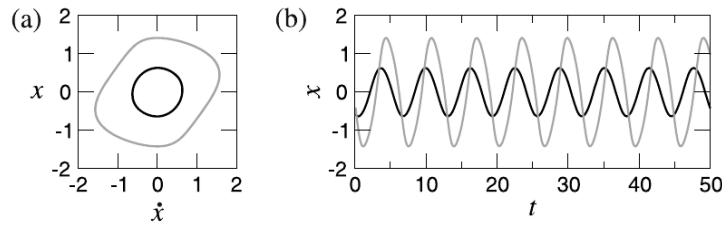


Figura 2.15: Soluciones de (2.16) con $B = 0$. $\lambda = 0,1$ (negro), $\lambda = 0,5$ (gris). (a) Espacio de fases. (b) $x(t)$.

Diferentes soluciones numéricas para (2.16) se muestran en la figura 2.16. En las simulaciones fijamos $\omega = 1$ y $B = 0,01$. Luego podemos tomar diferentes valores de Ω cercanos a ω . La figura 2.16 tiene cuatro columnas. En la primera columna se da el espacio de fases (\dot{x}, x) . En la segunda columna se grafica (F, x) . En la tercera columna se muestra la sección de Poincaré con $\dot{x} = 0$. La cuarta columna da los gráficos de $x(t)$ y $10F(t)$ (amplificamos $F(t)$ para poder realizar una comparación).

Podemos observar que si Ω es bastante próximo a ω ($\Omega - \omega \approx 0$), $x(t)$ resulta periódica y las trayectorias en el espacio de fases (\dot{x}, x) tienden a un ciclo límite estable. La sección estroboscópica en el espacio (F, x) es un punto fijo que corresponde al ciclo límite. Este punto se obtuvo cuando F toma su máximo valor. Cuando Ω se aleja de ω , la amplitud de las oscilaciones comienza a variar periódicamente.

Siguiendo con el caso $B \neq 0$, para valores pequeños de λ , el sistema (2.16) es “próximo” a un sistema lineal forzado, esto significa que su solución es de la forma

$$x(t) = A(t)\cos(\Omega t + \varphi(t)) \quad (2.18)$$

Con esta consideración, la función $x(t)$ puede caracterizarse con la *amplitud* $A(t)$ y la función $\varphi(t)$ da la diferencia de *fase* entre la fuerza y la solución (2.18). Puesto que B. van der Pol asume que la solución es cuasilineal. En consecuencia $A(t)$ y $\varphi(t)$ son funciones lentas comparadas con $\cos(\Omega t)$. Estas nuevas condiciones se

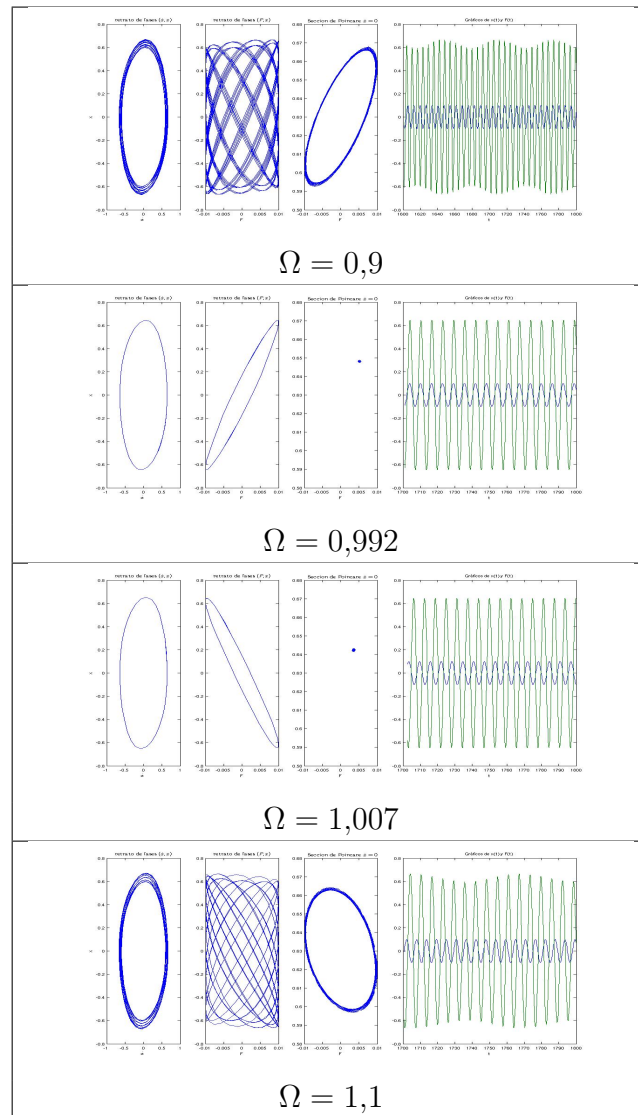


Figura 2.16: Primera columna: espacio de fases (\dot{x}, x) . Segunda columna: plano (F, x) . Tercera columna: Sección de Poincaré $\dot{x} = 0$. Cuarta columna: gráficos de $x(t)$ y $10F(t)$.

traducen como:

$$\dot{A}(t) \ll \Omega A(t) \quad \text{y} \quad |\dot{\varphi}(t)| \ll \Omega$$

y con las consideraciones realizadas el sistema (2.16) se denomina *cuasilineal*.

Luego de reemplazar (2.18) en la ecuación (2.16), llegamos al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3 - \frac{B}{2\Omega}\text{sen}\varphi \\ \dot{\varphi} = \Delta - \frac{B}{2A\Omega}\text{cos}\varphi \end{cases} \quad (2.19)$$

en donde

$$\Delta = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\Omega} \approx \omega - \Omega$$

Las ecuaciones (2.19) se denominan *ecuaciones truncadas* para la amplitud y para la fase de las soluciones de (2.16). La importancia de estas ecuaciones reside en que el tiempo aparece en ellas implícitamente, es lo que se denomina, un *sistema autónomo*. Con la transformación hecha, las órbitas periódicas de (2.16) se corresponderán con los puntos fijos de (2.19), esto es, encontrar las soluciones de $\dot{A} = 0$ y $\dot{\varphi} = 0$.

Analicemos el sistema (2.19) comenzando con el caso $B = 0$, esto es:

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3 \\ \dot{\varphi} = \Delta \end{cases} \quad (2.20)$$

Observemos que las ecuaciones son independientes entre sí, lo que hace más fácil el análisis aún. la ecuación:

$$\frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3 = 0 \quad (2.21)$$

Tiene dos soluciones en el problema físico, $A_1 = 0$ y $A_2 = 2\sqrt{\lambda}$ (descartamos la solución negativa). La solución A_1 corresponde a la ausencia de oscilaciones en (2.16). La solución A_2 corresponde a una órbita periódica solución aproximada de (2.16), y es la que principalmente nos interesa. Estudiamos la estabilidad de ambas soluciones con el signo de las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_A(A)}{\partial A} \right|_{A=0} &= \left. \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{8}A^3 \right|_{A=0} = \frac{\lambda}{2} > 0 \\ \left. \frac{\partial f_A(A)}{\partial A} \right|_{A=2\sqrt{\lambda}} &= \left. \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{8}A^3 \right|_{A=2\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{8}4\lambda = -\lambda < 0 \end{aligned}$$

La fase en esta caso es:

$$\varphi(t) = \Delta t$$

Consideremos ahora el caso del oscilador débilmente forzado, esto es, $B \neq 0$ y $B \ll \epsilon A_2$, con $\epsilon \ll 1$ y $\Omega \approx 1$. Con estas asunciones, el término $\frac{B}{2\Omega} \text{sen} \varphi$ en (2.19) se puede pensar como una pequeña perturbación de

$$\dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3 \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la amplitud en el sistema débilmente forzado no será muy diferente de A_2 , pues esta última, solución para $B = 0$, es estable⁸. En consecuencia, la nueva solución oscilatoria, $A(t) \approx 2\sqrt{\lambda}$, será también estable. La segunda ecuación de (2.19):

$$f_\varphi(\varphi) = \Delta - \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \cos \varphi \quad (2.23)$$

nos permitirá estudiar la sincronización del oscilador con la fuerza externa. Sus puntos fijos verifican:

$$\cos \varphi = \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \quad (2.24)$$

esta última ecuación tendrá soluciones si se cumple:

$$4\sqrt{\lambda}\Omega|\Delta| \leq B \quad (2.25)$$

⁸La ecuación (2.22) se puede resolver de manera exacta aplicando la transformación de Bernoulli $z = A^{-2}$. Su solución explícita es $A(t) = \left(\sqrt{(4\lambda)^{-1} + Ce^{-\lambda t}} \right)^{-1} \approx 2\sqrt{\lambda}$, pues el término transitorio $Ce^{-\lambda t}$ tiende a cero ya que asumimos λ positivo. Además $A(t)$ es asintóticamente estable (ver definición 5) y se desprende del estudio de soluciones en el plano (z, \dot{z}) .

y en este caso tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \\ \varphi_2 &= 2\pi - \cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B}\end{aligned}$$

Las soluciones φ_1 y φ_2 se pueden ilustrar en la figura 2.17.

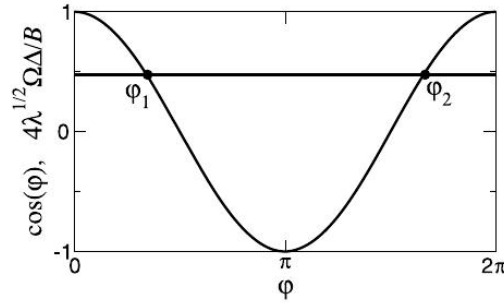


Figura 2.17: Esquema ilustrando dos soluciones de la ecuación (2.24)

La estabilidad está determinada por el signo de las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_1} &= \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \operatorname{sen} \left(\cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right) \\ &= \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \sqrt{1 - \cos^2 \left(\cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right)} = \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right)^2} \geq 0 \quad (2.26)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_2} &= \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \operatorname{sen} \left(2\pi - \cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right) \\ &= \frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \left[\operatorname{sen}(2\pi) \cos \left(\cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right) - \cos(2\pi) \operatorname{sen} \left(\cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right) \right] \\ &= -\frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \sqrt{1 - \cos^2 \left(\cos^{-1} \frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right)} = -\frac{B}{4\sqrt{\lambda}\Omega} \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta}{B} \right)^2} \leq 0 \quad (2.27)\end{aligned}$$

De aquí, φ_1 es un punto fijo inestable, por lo tanto, se corresponde con una órbita periódica inestable. El otro punto fijo, φ_2 , es estable y significa que la solución $A(t)$ mantendrá una diferencia de fase constante e igual a φ_2 . Esto quiere decir que el oscilador oscila a una frecuencia Ω y por lo tanto habrá sincronización 1 : 1. Resumiendo, habrá sincronización para valores relativamente pequeños de B en la región determinada por la desigualdad (2.25). El borde de dicha región está determinado por la siguiente igualdad:

$$B = 4\sqrt{\lambda}\Omega|\Delta|$$

o equivalentemente, dependiendo del signo de Δ :

$$B = 4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta \quad \text{ó} \quad B = -4\sqrt{\lambda}\Omega\Delta$$

Sobre dichos bordes tenemos respectivamente $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = \pi$. Observe que estos valores son el ingreso a la región 1 : 1. Pequeñas modificaciones en los valores de B o Δ podrían sacar al sistema del estado sincronizado. En términos de la teoría de las bifurcaciones, se produce una *bifurcación de ciclos límites de tangencia*, esto es, dos ciclos límites en el sistema (2.16) nacen en los bordes, uno estable y el otro inestable. La figura 2.18 muestra la región completa 1 : 1. La misma fue obtenida por continuación numérica implementada en el software AUTO 07p. Observe que el método de van der Pol nos permitió obtener una aproximación de dicha región sólo para valores relativamente muy pequeños en el vértice inferior de la zona triangular. Sin embargo como podemos ver observar en la figura 2.18, la región es acotada. Tal figura la podríamos haber obtenido si hubiéramos usado una aproximación en coordenadas rectangulares. Por último, los métodos de van der Pol fueron generalizados por Andronov y Vitt, en 1937 [6].

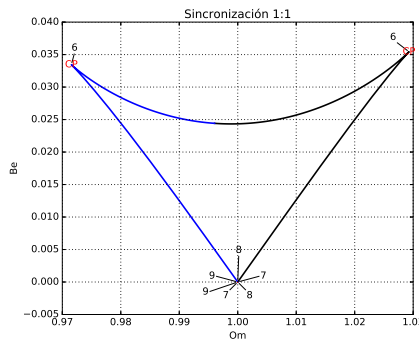


Figura 2.18: Región de sincronización 1 : 1 obtenida con el software AUTO 07p.

Sincronización de un tipo de luciérnaga con un destellador electrónico

En el prólogo hemos mencionado el viaje que Kaempfer realizara por Siam durante 1680. En *The History of Japan (With a Description of the Kingdom of Siam)* él describe a las luciérnagas destellando sincronizadamente. Hoy en día es sabido que todos los machos son susceptibles de ser influenciados por sus vecinos. Hanson en 1978 estudió esta influencia experimentalmente colocando diferentes tipos de luciérnagas frente a un estímulo artificial destellando periódicamente [29]. En esos experimentos observó que para un rango del período del destellador cercano al natural período de las luciérnagas, éstas fueron capaces de sincronizarse con el estímulo artificial. Este rango es denominado *rango de arrastre*. En 1984 Bard Ermentrout (1954-) y Jhonn Rinzel retoman el problema que llamó la atención de Kaempfer y presentan un modelo matemático que da cuenta del comportamiento de un tipo de luciérnaga denominada *Pteroptyx cribellata* frente a un estímulo externo artificial (destellador electrónico) [20]. Mostramos a continuación el modelo desarrollado por ambos. Esta descripción es una adaptación extraída de Strogatz en [85]. Nosotros completamos su desarrollo con un estudio más detallado en el espacio de parámetros.

Llamemos $\theta(t)$ a la fase que describe el destello de la luciérnaga, donde $\theta = 0$ se corresponde con el instante en que la luciérnaga da su primer destello. La función $\theta(t)$ puede pensarse como un pulso periódico, por ejemplo, una onda de

relajación, en donde cada pico se corresponde con un destello. Ellos asumieron que en ausencia del estímulo artificial la luciérnaga destella a una frecuencia ω constante, es decir que $\dot{\theta} = \omega$. Supongamos ahora que la fase del estímulo artificial está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{\Theta} = \Omega$$

donde $\Theta = 0$ es la fase inicial del dispositivo. El modelo de Ermentrout y Rinzel trabaja de la siguiente manera. Si la fase del estímulo llegara a estar adelantada respecto a la fase de la luciérnaga, entonces esta última acelerará su destello para intentar sincronizarse. Inversamente la luciérnaga bajará su velocidad de destello si la del estímulo fuera más lenta que la de ella. La ecuación que modeliza esta situación es:

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta) \quad (2.28)$$

donde $A > 0$ es el parámetro de acople y mide la capacidad que tiene la luciérnaga de ajustar su propia frecuencia a la del estímulo externo. Esta ecuación puede ser entendida en el campo vectorial del círculo con $0 \leq |\Theta - \theta| < \pi$. Así entonces si $\Theta > \theta$ la luciérnaga acelera su frecuencia pues $\dot{\Theta} > \omega$.

Para poder observar el rango de arrastre de frecuencias observaremos la dinámica de la diferencia de frecuencias

$$\dot{\phi} := \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin \phi \quad (2.29)$$

Esta ecuación puede ser adimensionalizada introduciendo el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} \tau &= At \\ \mu &= \frac{\Omega - \omega}{A} \end{aligned} \quad (2.30)$$

con esta transformación obtenemos:

$$\dot{\phi} = \mu - \text{sen}(\phi) \quad (2.31)$$

donde

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.32)$$

El escenario que se arma se puede observar en la figura 2.19.

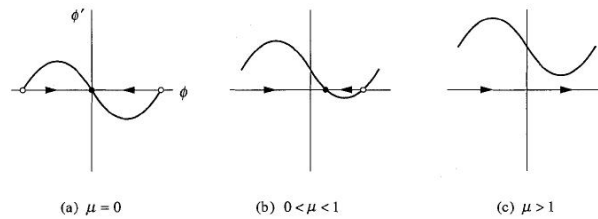


Figura 2.19: Izquierda: 0 es punto fijo estable. Centro: dos puntos fijos, uno estable, el otro inestable. Derecha: no existen puntos fijos

Si $\mu = 0$ todas las órbitas independientemente de la condición inicial se dirigen hacia el punto fijo estable $\phi^* = 0$, y por lo tanto la luciérnaga tiende a destellar con una frecuencia Ω logrando una *perfecta sincronización* (ver figura 2.19 (a)).

Para $0 < \mu < 1$, existen dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable como se puede ver en la figura 2.19 (b). Para cualquier condición inicial que no corresponda a la del punto fijo inestable, la solución tenderá al punto fijo estable. Esto significa que la diferencia de fase se aproxima a una constante y por lo tanto se logra un *compromiso de fase*. Equivalentemente, $\phi' = 0$, implica un *compromiso en frecuencia*. Decimos entonces que la frecuencia natural de la luciérnaga ω se ve arrastrada hacia la frecuencia del estímulo Ω . A medida que μ se acerca a 1, ambos puntos fijos, el estable y el inestable, se acercan más y más hasta que en $\mu = 1$ una bifurcación de tangencia ocurre. En términos geométricos la gráfica y el eje de abscisas se cortan en un punto. Para $\mu > 1$ los compromisos han desaparecido, es significa que la luciérnaga no podrá ajustar su ritmo interno al del estímulo artificial. Podrán destellar al mismo ritmo pero sólo porque el estímulo fue puesto

en marcha a una velocidad de destello idéntica al de la luciérnaga, pero no hay ajuste posible que la luciérnaga pueda naturalmente realizar (ver figura 2.19 (c)). Como el arrastre de fase es equivalente al arrastre de frecuencia, hablaremos de arrastre a secas y el contexto nos dirá si estamos en un caso u otro.

Volvamos entonces a la ecuación (2.29) y calculemos sus puntos fijos:

$$\Omega - \omega + A \sin(\phi) = 0$$

de donde

$$\sin(\phi) = \frac{\Omega - \omega}{A}$$

esta última ecuación admite solución si

$$-1 \leq \frac{\Omega - \omega}{A} \leq 1 \quad (2.33)$$

Asumiendo que ω y A están fijos, la última desigualdad nos pone condiciones sobre Ω para que exista arrastre de frecuencia:

$$-A + \omega \leq \Omega \leq A + \omega$$

El rango de arrastre se esquematiza en la figura 2.20. Para A fijo, si Ω está “lejos” de ω le será imposible a la luciérnaga entrar en un régimen de sincronización con el destellador artificial. Cuando Ω alcance los extremos $\omega - A$ u $\omega + A$, una bifurcación de silla-nodo se produce y dos puntos fijos quedarán establecidos, uno estable y el otro inestable si Ω ingresa a la región de arrastre como muestra la figura 2.19 (b).

Definamos el siguiente parámetro :

$$\delta := \Omega - \omega$$

δ da la diferencia de frecuencias entre la del destellador y la de la luciérnaga.

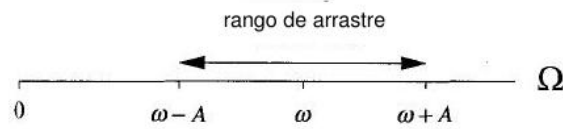


Figura 2.20: Esquema del rango de arrastre

Por otro lado tenemos el parámetro A que indica la capacidad que tiene la luciérnaga de ajustar su propia frecuencia a la del estímulo externo. ¿Qué ocurre si variamos δ o A ? Si $A = 0$ no hay interacción en el sistema luciérnaga-estímulo, es decir, la luciérnaga no tiene capacidad de adaptar su propio ritmo al del destellador. Estamos en presencia de un sistema sin acople. Al variar A estamos modificando teóricamente la capacidad que tiene la luciérnaga de sincronizarse con el dispositivo artificial. La ecuación (2.33) es equivalente a

$$-A \leq \delta \leq A \quad (2.34)$$

Esta inecuación dibuja en el *espacio de parámetros* (δ, A) una región. Si agregamos la condición $0 \leq A \leq 1$ tenemos el triángulo rojo de la figura 2.21. Tomemos un punto cualquiera en su interior. Esto significa que hemos fijado un sistema luciérnaga-estímulo (2.29) en valores correspondientes a las coordenadas de dicho punto. Como estamos en el interior del triángulo, se verifica la condición (2.34) o equivalentemente la condición (2.33). Esto significa que la luciérnaga modificará su frecuencia natural ω acercándola a la frecuencia del destellador Ω (salvo si la condición inicial de la ecuación diferencial correspondiera a la de la solución inestable).

Elegir un punto que no perteneciera al triángulo rojo (siempre $A \leq 1$), equivaldrá a que la luciérnaga no podrá sincronizarse con el destellador.

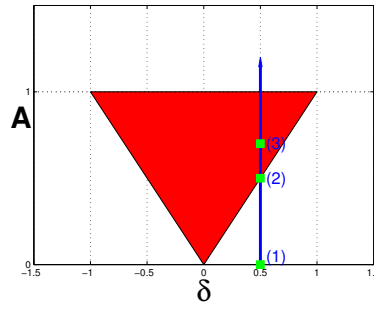


Figura 2.21: La región roja encierra la zona en donde el sistema puede lograr un compromiso de frecuencia. La flecha indica una ruta de análisis del fenómeno de sincronización entre la luciérnaga y el dispositivo artificial

Evolución de la dinámica a lo largo de una ruta en el espacio de parámetros

Fijemos δ en el valor 0.5 y $A = 0$. En este caso en el sistema no hay interacción entre la luciérnaga y el dispositivo, tal situación está indicada en la figura 2.21 con (1). Comencemos a aumentar A moviéndonos a lo largo del camino en color azul al que llamaremos *ruta*. Mientras los valores de A no toquen el borde del triángulo la luciérnaga no será capaz de sincronizarse con el estímulo externo. Una vez que alcancemos el borde, indicado con (2), estamos en presencia del nacimiento de dos puntos fijos, esto es, una bifurcación silla-nodo. Si seguimos aumentando A , ingresamos a la región roja y el sistema presenta dos puntos fijos, uno estable, el otro inestable, según se muestra en la figura 2.19 (b).

La región roja de la figura 2.21 se conoce con el nombre de *lengua de Arnold*. Este término describe en contextos más generales regiones en el espacio de parámetros donde osciladores ajustan sus frecuencias, ya sean que interactúen con fuerzas externas en los sistemas llamados *guiador-esclavo* o en interacciones mutuas, donde el comportamiento de un oscilador modifica el de otro y viceversa. A este tipo de sincronización se la denomina *sincronización mutua*.

SINCRONIZACIÓN MUTUA

El caso que sigue en complejidad al del oscilador forzado es el de dos osciladores acoplados bidireccionalmente. Huygens fue probablemente el primer científico que observó este caso en el siglo XVII [32]. Descubrió que un par de relojes de péndulo suspendidos de un soporte común lograron sincronizar en antifase, es decir, los péndulos oscilaron con frecuencias iguales pero en sentidos opuestos. Huygens dijo que la causa del movimiento sincronizado alcanzado por dos péndulos se debió al movimiento imperceptible del soporte común que los sostenía a ambos. En el siglo XIX, Rayleigh describió el interesante fenómeno de la sincronización mutua de los órganos de tubos en su famoso tratado "La teoría del sonido". Allí informó que dos tubos de órgano con bocas muy cercanas podían sonar al unísono [72]. A principios del siglo XX, después de los estudios de van der Pol y Appleton, comenzó un auge en este campo. Se descubrieron fenómenos de sincronización en muchos sistemas eléctricos, electromecánicos y de radio. Luego el interés por la sincronización decayó hasta que en los años 60-70 del siglo XX, la aparición de giroscopios láser provocó un renacimiento del fenómeno [47]. Los estudios prosiguieron y hasta nuestros días sistemas de dos ecuaciones del tipo van der Pol acopladas continúan brindando nuevos resultados [42] [43].

En términos generales la interacción de dos osciladores no es simétrica. Para comenzar a comprender este caso supongamos dos péndulos unidos con algún soporte de modo tal que cada uno sienta la influencia del otro según muestra el esquema de la figura 2.22. Por más parecidos que estos péndulos sean, nunca tendrán la misma frecuencia. Estamos entonces en presencia de dos osciladores que aisladamente tienen respectivamente diferentes frecuencias naturales f_1 y f_2 . Asumida la influencia de uno en el otro y viceversa, estos péndulos podrían comenzar a oscilar con un período común. Existen dos factores que determinarán si la sincronización se logra o no:

- **Fuerza de acople:** Este concepto describe cuán fuerte o débil es la interacción que interviene en el sistema.

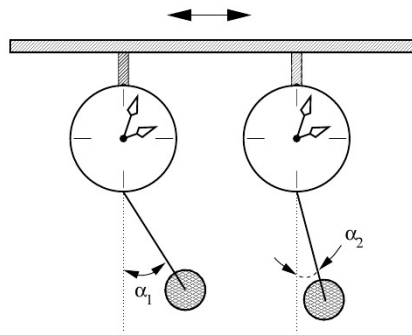


Figura 2.22: Esquema de dos péndulos acoplados

- **Diferencia de frecuencia:** $\Delta f = f_1 - f_2$ cuantifica la diferencia de frecuencias naturales cuando los osciladores están desacoplados.

Veamos cómo podemos caracterizar este ajuste de ritmos. Comencemos midiendo las frecuencias que logran ambos osciladores una vez acoplados y llamémoslas F_1 y F_2 respectivamente y hagamos la diferencia $\Delta F = F_1 - F_2$. Si ΔF llegara a anularse, esto significaría que ambos péndulos lograron entrar en sincronización con orden 1:1. Para visualizar esta situación grafiquemos ΔF contra Δf . La curva obtenida en la figura 2.23 es una curva clásica en el estudio de la sincronización independientemente de la naturaleza de los osciladores que interactúan.

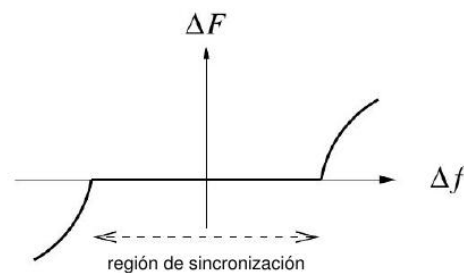


Figura 2.23: En la *región de sincronización* ambos péndulos lograron ajustar sus ritmos naturales, f_1 y f_2 , a un mismo ritmo ya que $F_1 - F_2 = 0$.

La *región de sincronización* de la figura 2.23, también denominada *rango de arrastre*, nos muestra que allí los péndulos acoplados terminan oscilando con la

misma frecuencia, es decir, lograron ajustar sus ritmos internos a una misma frecuencia ya que $F_1 - F_2 = 0$. En la práctica se reemplaza $=$ por \approx . Diremos también que ambos péndulos lograron un *compromiso de frecuencias*.

En términos de la definición clásica [62], la sincronización mutua es entendida como la transición de un movimiento cuasiperiódico desarrollado sobre una superficie tórica a un ciclo límite. Generalmente cuando las frecuencias naturales de los osciladores desacoplados están en una relación $n\omega_1 \approx m\omega_2$, estos podrían entrar en un régimen de sincronización de orden $n : m$ si luego de acoplarse, las nuevas frecuencia naturales Ω_1 y Ω_2 están en una relación $n\Omega_1 = m\Omega_2$.

Retomando una línea histórica, los primeros trabajos analíticos sobre sincronización mutua de dos osciladores no lineales acoplados débilmente comienzan con los trabajos de Mayer y Gaponov en la década del 30 del pasado siglo [63]. Focalizándonos en el modelo por nosotros analizado, en 1980, R. H. Rand y P. J. Holmes analizan el caso de dos osciladores van der Pol acoplados débilmente [71]. El sistema estudiado por ellos es de la forma:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} - \epsilon(\mathbf{I} - \mathbf{U}^2)\dot{\mathbf{x}} = \epsilon(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}) \quad (2.35)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$\epsilon \ll 1$ y \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ellos investigaron las bifurcaciones de los movimientos periódicos que se producen a medida que varían los coeficientes de acoplamiento. Utilizaron métodos de aproximación de van der Pol pero se restringieron al orden $1 : 1$.

En 1983, Rand y D. W. Storti [83] analizan el caso de dos van der Pol acoplados por las variables de posición para valores de acople relativamente grandes:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} - \epsilon(\mathbf{I} - \mathbf{U}^2)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.37)$$

en donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Ellos estudiaron esencialmente la sincronización de orden 1 : 1 desde la teoría de las perturbaciones, esto es mediante expansiones en series de potencias y también empleando la transformada de Fourier y simulaciones numéricas.

SINCRONIZACIÓN CON MÁS DE DOS OSCILADORES

En el año 2005, Storti et all., estudian la generación de patrones en la locomoción de medusas. Para ello extienden los modelos de Holmes y Rand a 4, 8, 16 osciladores acoplados todos con todos. También estudian la sincronización mediante ecuaciones truncadas para la amplitud y fase de las oscilaciones [50].

Describamos a continuación algunos aspectos que consideramos interesantes en los inicios de la sincronización para una cantidad relativamente mucho mayor que dos osciladores acoplados . El nodo sinoauricular recibe el nombre común de marcapasos cardíaco y es una de las estructuras del miocardio compuesta por un grupo de aproximadamente 10.000 células y tiene la función de generar el ritmo eléctrico que ordena al resto del corazón latir. Debe hacerlo de manera confiable, minuto tras minuto, se podría decir que durante tres mil millones de latidos en la vida. Naturalmente surge la pregunta sobre si son necesarias tantas células, si no podrían hacer el trabajo sólo unas pocas. Strogatz plantea que probablemente unas pocas células no conformarían un diseño robusto puesto que podrían funcionar mal o morir. Este es el problema sobre el que se preguntó Charles Samuel Peskinin (1946-), un matemático estadounidense conocido por su trabajo en el modelado matemático del flujo sanguíneo en el corazón. Tales cálculos son útiles en el diseño de válvulas cardíacas artificiales. ¿Cómo estas células, sin “guía” o “acciones externas” logran sincronizarse? Observemos que la misma pregunta puede ser formulada para el caso de las luciérnagas. Ambos casos involucran

grandes poblaciones de individuos que disparan pulsos repentinos que sacuden los ritmos de los otros en su grupo, acelerándolos o ralentizándolos de acuerdo con reglas específicas. En ambos casos, la sincronización parecería inevitable. El reto fue explicar por qué esto debería ser así. En 1975, Peskin examinó esta pregunta en el marco de un modelo simplificado [60]. Cada célula del marcapasos cardíaco se puede pensar como un circuito eléctrico oscilante equivalente a un condensador en paralelo con una resistencia, siguiendo el modo pensado por van der Pol. A continuación, Peskin idealizó el marcapasos cardíaco como una enorme colección de estos osciladores matemáticos. Por simplicidad, asumió que todos los osciladores son idénticos. En 1975 Peskin propuso un modelo de 10.000 osciladores para describir las células del corazón. Hizo dos conjeturas

- El sistema debería sincronizar para cualquier condición inicial.
- El sistema sincronizaría aún si los osciladores no fueran idénticos.

Pero cuando intentó probar sus conjeturas, se topó con obstáculos técnicos. No había procedimientos matemáticos establecidos para manejar grandes sistemas de osciladores acoplados por impulsos repentinos y discontinuos. Entonces retrocedió y se enfocó en el caso más simple posible: dos osciladores idénticos. Ahora el problema se volvió manejable; para este caso especial, demostró que la sincronización era inevitable.

En 1990 Strogatz y Mirollo estudiaron un modelo simple de osciladores biológicos basado en el creado por Peskin para el marcapasos cardíaco. El modelo consiste en una población de osciladores idénticos. El resultado principal fue que, para casi todas las condiciones iniciales, la población evoluciona a un estado en el que todos los osciladores se disparan sincronizadamente. Los ejemplos de este modelo incluyen poblaciones de luciérnagas, grillos, células marcapasos y grupos de mujeres cuyos ciclos menstruales se sincronizan mutuamente. Ellos estudian la sincronización en fase.

Cuando los osciladores no son idénticos, otros escenarios pueden aparecer. En este sentido, el físico japonés Yoshiki Kuramoto en 1975 presenta un modelo en

donde la sincronización puede ser alcanzada por la población entera, o se puede presentar de a grupos, etc, dependiendo de cómo se distribuyan las frecuencias y del tipo de acople. Para un estudio detallado de este modelo se puede consultar el documento titulado *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, cuyos autores son Mirollo y Strogatz [53]. En términos coloquiales imaginemos una población muy grande de corredores con diversas habilidades sobre una pista circular. La regla de interacción es que cada corredor mira a todos los demás y calcula una corrección de velocidad tentativa relativa a cada uno y los promedia para obtener la corrección que realmente realizará. Por ejemplo, supongamos que los corredores forman un grupo bastante ajustado en algún momento. La regla de Kuramoto le dice al líder que reduzca la velocidad (de su propia velocidad preferida), algo sensato ya que todos están detrás de él. Un corredor en el medio del grupo recibe mensajes mixtos, algunos diciéndole que acelere, otros que disminuyan la velocidad. Un corredor en la parte posterior siente la presión del resto de corredores para ir más rápido. El modelo más simple para la situación descripta, dado Kuramoto, tiene la siguiente expresión:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N (\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.39)$$

donde ω_i es la frecuencia preferida (velocidad) del corredor i , K es el parámetro de acople que regula la velocidad del corredor i en función de la de los demás, y N asegura que el modelo funciona coherentemente cuando $N \rightarrow \infty$. La pregunta es si los corredores terminarán corriendo de manera amalgamada. Para responder esta pregunta, Kuramoto asume que la distribución de las frecuencias ω_i es una distribución gaussiana. Con este escenario, existe un valor crítico K_c de modo tal que si $K > K_c$, los corredores terminan corriendo todos con una misma frecuencia y en fase. Cuando K se mantiene menor a K_c se puede observar que los corredores se aglutinan en grupos; a este estado se lo denomina *sincronización parcial*.

Podemos notar aquí que al igual que los modelos dados por Storti, Rand y Holmes, Kuramoto estudia la sincronización en fase. Con este último ejemplo damos por concluido esta sección. Sin dejar de mencionar que cuando los osciladores son millones, el planteo de ecuaciones diferenciales ordinarias se hace inoperante. La mecánica estadística y la teoría de la información en conjunto se ocupan del comportamiento colectivo [86]. De esta manera, este último enfoque complementa la debilidad del desarrollado en los sistemas dinámicos.

SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS CAÓTICOS

En las últimas décadas la investigación científica y tecnológica se ha dirigido hacia la sincronización de sistemas caóticos. Estos sistemas dependen sensiblemente de las condiciones iniciales, y por tanto, dos trayectorias que surgen de valores iniciales muy cercanos se separan exponencialmente a lo largo del tiempo. Sin embargo, tras el famoso trabajo de Pecora y Carroll de 1990, se ha mostrado que dos comportamientos caóticos aleatorios e imprevisibles que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan de manera conveniente.

Los grandes trabajos sobre la sincronización del caos se atribuyen a Fujisaka, Picovsky y Afraimovich [Afraimovich et al. 1986; Fujisaka & Yamada 1983; Picovsky 1984] y a Pecora & Carroll [Pecora & Carroll 1990] quienes presentaron los primeros ejemplos sobre la sincronización de sistemas caóticos acoplados unidireccionalmente.

Por último, el movimiento caótico no tiene un período o frecuencia natural. Aquí ya se presenta una diferencia fundamental con los osciladores periódicos y autosostenidos. Si bien al acoplarse dos sistemas, como por ejemplo, uno periódico y otro caótico, estos pueden terminar desarrollando un movimiento periódico o uno caótico [47].

UNA DEFINICIÓN COMO MARCO DE REFERENCIA COMÚN A TODOS LOS CASOS VISTOS

En general, la bibliografía especializada y frecuentemente citada, explícitamente no presenta una definición formal de lo que entendemos por sincronización [63], [10], [86]. Sin embargo, todos esos textos describen coloquialmente las diferentes formas en las que el fenómeno puede aparecer: la sincronización idéntica o completa [23] que implica coincidencia de los estados para osciladores que son idénticos; la sincronización generalizada que se refiere a osciladores distintos en los que las trayectorias que describen las variables de estado se acercan asintóticamente [76]; la sincronización con retardo [73] que implica que las variables que describen los estados coinciden asintóticamente, pero con una diferencia dada por un tiempo de retraso τ ; etc.

Entonces, habiéndose presentado diferentes tipos de sincronización, surgió la interesante cuestión sobre si se podría construir una definición que abarque los diferentes tipos existentes. El problema fue encarado por Brown [14] en el año 2000 y por Boccaletti et al. un año más tarde [15]. Presentamos a continuación aspectos esenciales de la definición dada por el último autor.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.40)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ es el campo de velocidades del sistema. El espacio de fases de (2.40) queda determinado por el producto cartesiano de los subespacios de fases $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Boccaletti, al igual que Brown, considera separar la dinámica del sistema en dinámicas correspondientes a los subsistemas, esto es, si llamamos $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ al conjunto de todas las soluciones de (2.40) y $\phi(\mathbf{z}_0)$ es una solución perteneciente a χ con la condición inicial $\mathbf{z}_0 = [\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0] \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, entonces $\phi_x(\mathbf{z}_0)$ y $\phi_y(\mathbf{z}_0)$ son las proyecciones de $\phi(\mathbf{z}_0)$ sobre \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} respectivamente. A partir de esta separación de dinámicas, Boccaletti define

un conjunto de funciones en espacios abstractos que permiten medir propiedades de los subsistemas en relación a, por ejemplo, frecuencias, o estados de fase, número de oscilaciones, etc., de modo tal que se pueda establecer una relación entre estas medidas para obtener una definición precisa de la sincronización de manera abarcativa. La tarea para nosotros, fue entonces aplicar esta definición a los problemas que encaramos en nuestra investigación.

MÉTODOS NUMÉRICOS

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas más importantes en Matemática Aplicada. Lo es en sí mismo pero también porque es un paso intermedio en la resolución de muchos otros problemas de gran relevancia, entre ellos, la continuación numérica. En 1947 John von Neumann y Herman Goldstine publicaron un artículo sobre la propagación de errores al resolver un sistema lineal: “Numerical inverting of matrices of high order”. El objetivo de estos investigadores era encontrar un método eficiente y fiable para resolver sistemas de ecuaciones lineales en los ordenadores modernos que estaban desarrollándose por entonces⁹. Debido a que esta fue la primera vez que se realizó un análisis de este tipo, a veces se considera a este documento como el origen del análisis numérico moderno. A partir de entonces la complejidad de los cálculos se incrementó drásticamente con la introducción de las computadoras digitales. Uno de las personas más importantes en este sentido fue Herbert Bishop Keller (1925-2008). Sus contribuciones científicas principalmente versaron sobre problemas de contorno y los métodos numéricos en problemas de bifurcaciones. Esencialmente, la técnica de trabajo de Keller se basa en la continuación numérica y en el método de pseudo longitud de arco por él ideado. Ya hemos descrito sucintamente en el prólogo este método y una de sus diferencias con los métodos de simulación

⁹En los comienzos de la computación digital, ingenuamente se creía que las computadoras no cometerían los mismos errores de distracción que hacían los humanos. Sin embargo, un número real o complejo tiene infinitas cifras decimales y un computador trabaja con un número finito de números. Esto ya es una limitación muy importante. En aquella época, no estaba claro en absoluto si utilizar la eliminación Gaussiana era una elección adecuada o no.

numérica.

En nuestro caso podemos resumir la continuación numérica en la resolución del siguiente sistema algebraico:

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = 0, \quad \text{con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p, n, p \in \mathbb{N}. \quad (2.41)$$

En 1953, D. F. Davidenko da un método de resolución para $n = p = 1$. Diferenciando 2.41 en ambos miembros obtenemos la siguiente igualdad:

$$Df = Df_x dx + Df_\lambda d\lambda = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{dx}{d\lambda} = -Df_x^{-1} Df_\lambda$$

Integrando esta ecuación en algún valor inicial (x_0, λ_0) obtenemos una curva solución. Claro está, el método falla si $Df_x^{-1} = 0$. En 1976, Keller da su método que permite sortear esta dificultad. En el capítulo 4 explicamos la técnica con mayor detalle. En 1979, Eusebius J. Doedel, quien estuvo trabajando con Keller en el California Institute of Technology presenta el software AUTO que emplea el método elaborado por Keller. Este software puede resolver, entre otros tipos de problemas a los siguientes:

- Problemas algebraicos

$$\mathbf{f}(u) = 0 \quad \text{con } \mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n .$$

- Problemas de contorno

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{con } 0 < t < 1 \text{ y } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u})$$

donde \mathbf{g} mapea en $\mathbb{R}^{n_{bc}}$, y n_{bc} es la cantidad de condiciones de contorno.

Si bien esta lista es incompleta, es suficiente para nuestros propósitos, pues en nuestro trabajo sólo hemos empleado esos dos problemas.

NUESTRO PUNTO DE PARTIDA

En el año 2009 aparece publicado un trabajo de Kuznetsov et al. titulado “Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization” [44]. El sistema analizado con métodos de simulación numérica fue:

$$\begin{aligned}
 x' &= x_1 & (2.42) \\
 y' &= y_1 \\
 x_1' &= (\lambda_1 - x^2)x_1 - x - \beta x^3 - \mu(x_1 - y_1) \\
 y_1' &= (\lambda_2 - y^2)y_1 - (1 + \delta)y - \beta y^3 - \mu(y_1 - x_1)
 \end{aligned}$$

Los autores implícitamente asumen que el sistema se encuentra en un movimiento sincronizado si presenta como solución un ciclo límite estable. La forma geométrica que adopta la solución proyectada en los respectivos subespacios de fases (x, x_1) y (y, y_1) dará el orden de sincronización mutua que presenta el sistema. Más precisamente, si en el período compartido por ambos subsistemas, el oscilador de variables x y x_1 realiza n giros mientras el oscilador de variables y e y_1 realiza una cantidad m , el orden de sincronización será $n : m$. En base a esta descripción, los autores separan el espacio de parámetros (δ, μ) en regiones con diferentes órdenes de sincronización. La figura 2.24 muestra los resultados obtenidos para $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ y $\beta = 0$.

Nuestro trabajo comienza analizando este estudio. Un conjunto de preguntas surgió. Compartimos algunas de ellas a modo de cierre de este capítulo.

- ¿Los cambios de colores indican bifurcaciones?
- ¿Se pueden computar sus fronteras?
- ¿Existe alguna estructura dinámica en esas regiones? ¿Por qué aparecen regiones triangulares sobre la banda horizontal verde?

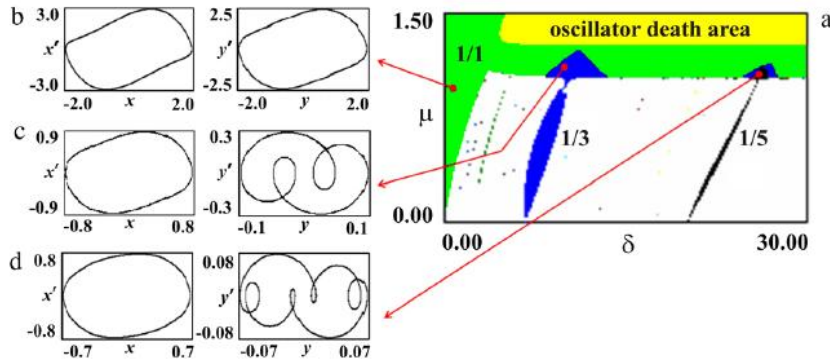


Figura 2.24: Proyección de algunos ciclos límites, soluciones de la ecuación (2.42) sobre los espacios de fases (x, x') e (y, y') . La región verde corresponde al orden 1 : 1, la azul 1 : 3 y la negra 1 : 5.

- ¿Por qué la región triangular negra se encuentra dentro de la región azul?
- ¿Por qué no se observa el orden 1 : $2n$, $n \in \mathbb{N}$?

La búsqueda de respuestas a esta y otras preguntas permitió caracterizar cuál es el mecanismo para la transición de un orden a otro. Estos mecanismos, son estudiados en procesos continuos y dependientes de los parámetros que intervienen en las ecuaciones bajo análisis. Por lo tanto, se hace necesario un estudio en el espacio generado por dichos parámetros. Con esta caracterización logramos proponer una técnica computacional innovadora que ha permitido la construcción de fronteras que separan diferentes órdenes de sincronización. Parte de los resultados mostrados en esta tesis fueron publicados en SIAM Journal on Applied Dynamical Systems en 2014 bajo el título, *A Bifurcation Approach to the Synchronization of Coupled Van der Pol Oscillators*. La técnica es aplicable a sistemas de osciladores independientemente de cómo son producidos los ciclos límites, del tipo de interacción que acopla los subsistemas y de la dimensión del sistema.

Capítulo 3

Sistemas dinámicos, bifurcaciones y sincronización

En este capítulo se desarrolla la teoría necesaria para describir matemáticamente el fenómeno de sincronización en sistemas de EDOs acopladas y autónomas. Comenzamos este capítulo exponiendo los elementos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos y los de la teoría de las bifurcaciones. Una vez establecido este marco conceptual, nos introducimos en el dominio de la sincronización.

3.1. Nociones elementales de la teoría de los sistemas dinámicos

La noción de sistema dinámico surgió como la generalización del concepto de sistema mecánico, cuyo movimiento se describe por las leyes de Newton expresadas mediante ecuaciones diferenciales. Como se desarrolló en el capítulo anterior, esta noción fue cambiando gradualmente adquiriendo un sentido más profundo y extendiéndose a sistemas de diversas naturalezas: física, química, biológica, etc. Esto se ha debido, en parte, a los avances en las teorías matemáticas. Grafos, cadenas de Markov, teoría de operadores en el análisis funcional, etc., son algunas de las herramientas que permiten describirlos. En esta tesis, expresamos a los sis-

temas dinámicos con ecuaciones diferenciales ordinarias. Desde este enfoque, un sistema dinámico es la formalización de un *proceso determinista*, esto es, un proceso en el que frente a idénticas condiciones iniciales de un experimento, se deben obtener siempre los mismos comportamientos como resultados. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en algún abierto U y t es la variable que representa el tiempo, son ejemplos de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico en el que la variable independiente t no aparece se llama *autónomo* y será el único tipo de sistema dinámico empleado en esta tesis, y aunque t esté escrita en símbolos, el lector deberá entender que éste aparece de manera implícita. La función $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ resulta ser *solución* de (3.1), también denominada *flujo*, si al derivarla respecto al tiempo obtenemos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, esto es, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. El vector $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, denominado *variable de estado*, describe el comportamiento del sistema en cada instante t , y sus componentes se llaman *fases*. Por lo tanto, todos los posibles estados de un sistema dinámico están caracterizados por puntos n-dimensionales que se encuentran en algún conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ denominado *espacio de fases*. A veces nos interesará conocer sólo un conjunto discreto de puntos de $\mathbf{x}(t)$, indicados como $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n), \dots$, en cuyo caso haremos referencia a ella simplemente con el nombre de *mapa*. La gráfica $(t, \mathbf{x}(t))$ se denomina *curva integral* y la curva determinada por los puntos $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ se denomina *traza*. La representación geométrica de todas las soluciones de la ecuación (3.1) se denomina *espacio de fases*. Así, dada una EDO, la meta es encontrar todas sus soluciones, tarea imposible de cumplir puesto que no existe método general de resolución para los sistemas no lineales. Por tal motivo, nuestra búsqueda está orientada esencialmente a encontrar información cualitativa sobre el comportamiento de sus soluciones más que a dar valores exactos de las mismas. El tipo de problema por nosotros enca-

rados, se conocen como *problemas de valor inicial* o *problemas de Cauchy*, esto es:

Definición 1. *Un problema de valor inicial o problema de Cauchy (PVI) consiste en la búsqueda de una función $x(t)$ definida para los valores t de un intervalo $[a, b]$, que sea solución de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ en $[a, b]$, y que en un punto t_0 del intervalo $[a, b]$ tome el valor \mathbf{x}_0 . En símbolos:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Como no siempre es posible encontrar la solución de una ecuación diferencial, habrá que recurrir a la utilización de métodos numéricos que permitan obtener valores aproximados de la solución que se busca. Pero para que estos métodos sean válidos previamente hay que asegurar la existencia y unicidad de las soluciones. El siguiente teorema, llamado teorema de Picard-Lindelöf, o de Cauchy-Lipschitz, o de existencia y unicidad, debido a Emile Picard (1856-1941), garantiza que el sistema anterior tenga solución única en una región acotada de \mathbb{R}^n . La demostración se puede consultar en Hirsch [30].

Teorema 1. Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz en \mathbf{x} , es decir, existe $L \geq 0$ tal que para $(t, \mathbf{x}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ arbitrarios se tiene

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

entonces el problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

admite una única solución definida en $[a, b]$; en donde el símbolo $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, significa que en un instante $t = t_0$, el sistema se encuentra en el estado $\mathbf{x}_0 = (x_1(t_0), \dots, x_2(t_0))$.

El intervalo de definición que asegura el teorema 1 en general no es óptimo, puede ocurrir que exista una solución del sistema 3.3 definida en un intervalo mayor. Por ejemplo, consideremos $\dot{x} = x$ con valor inicial $x(0) = 1$. La función $f(t, x) = x$ es localmente Lipschitz para $t \in [-1, 1]$ pues si tomamos $L = 1$, $|x - y| \leq 1|x - y|$ pero realmente puede extenderse a todo \mathbb{R} , porque $x(t) = e^t$ es solución de este problema.

Definición 2. Sean $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ dos soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, definidas respectivamente $I_1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y en $I_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diremos que $\mathbf{y}(t)$ es una prolongación de $\mathbf{x}(t)$ cuando $I_1 \subset I_2$ y se verifique $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) \forall t \in I_1$.

Diremos que una solución es maximal cuando no existe ninguna otra solución que la prolongue. El intervalo en el que está definida esta solución se llama intervalo maximal.

Algunas soluciones maximales son de sumo interés, pues actúan como centros organizadores del flujo en el espacio de fases del sistema correspondiente. Las

soluciones constantes en el tiempo y las soluciones periódicas son ejemplos de ello.

3.1.1. Puntos de equilibrio y órbitas periódicas

Definición 3. Una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.1) que pasa por el punto \mathbf{x}_0 , se llama punto de equilibrio si no cambia en el tiempo, es decir, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

De la definición anterior se desprende que los puntos de equilibrio son raíces de la ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Puesto que el campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es casi siempre no lineal y no existe nada de carácter general para resolver ese sistema de ecuaciones homogéneo deberemos recurrir a métodos numéricos para la obtención de dichos puntos. Otros nombres empleados para estas soluciones son *puntos fijos* o *puntos críticos*.

Definición 4. Una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.1) que pasa por el punto \mathbf{x}_0 , se dice periódica de período $T > 0$, si existe dicho T de modo tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Puesto que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0 + T)$ este último tipo de solución queda graficada en el espacio de fases en una curva cerrada. Como ya hemos mencionado, en esta tesis, estamos interesados principalmente en un tipo particular de órbitas periódicas, esto es, los ciclos límites, de los cuales, hablaremos más adelante. La localización de órbitas periódicas es un problema más complejo que el de encontrar puntos fijos. En general no es posible desarrollar un método numérico para la localizarlas. Sin embargo, podemos detectar los parámetros del sistema para los cuales un ciclo límite se genera.

3.1.2. Estabilidad de las soluciones

Los puntos fijos y las órbitas periódicas generalmente organizan el espacio de fases en un entorno de ellos mismos, en el sentido que, la dinámica presente en cada uno de ellos, determina respectivamente la evolución temporal de las soluciones en un entorno de los puntos fijos y en un entorno de las órbitas cerradas. El concepto de *estabilidad* debido a Aleksandr Liapunov (1850-1918) desarrollado en “Problema general de la estabilidad del movimiento”, juega un papel fundamental en dicha organización.

Definición 5. Diremos que una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.1) estable o estable Liapunov si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier otra solución $\mathbf{y}(t)$ de (3.1) si $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta$ entonces $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \epsilon$, para todo $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

De la definición 5 se desprende que las soluciones que comienzan “lo suficientemente cerca” del equilibrio $x(t)$, lo hacen para siempre, pero no necesariamente convergen a dicho equilibrio; y ésto debe ocurrir para cualquier ϵ que uno elija. Un péndulo sin rozamiento es un ejemplo de ello.

Definición 6. Diremos que una solución $\mathbf{x}(t)$ de (3.1) es asintóticamente estable si es estable Liapunov y dado cualquier otra solución de (3.1) existe una constante $b > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < b$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0.$$

La estabilidad asintótica significa que las soluciones que comienzan lo suficientemente cerca no solo permanecen así por siempre, sino que también convergen al equilibrio $x(t)$.

Algunas observaciones acerca de estas dos definiciones:

- En ambos casos se considera el tiempo no acotado, es decir, infinito.

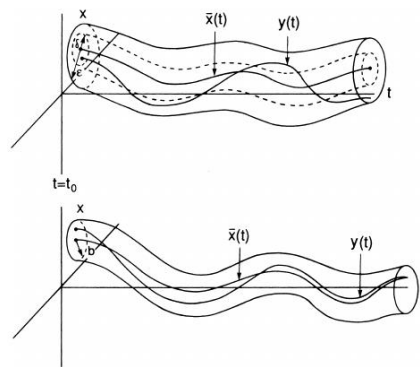


Figura 3.1: Superior: estabilidad Liapunov. La solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero no necesariamente se aproxima a ella. Inferior: estabilidad asintótica. La solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero además se aproxima a ella indefinidamente.

- Ambas son aplicables a sistemas autónomos, puesto que para los sistemas no autónomos, δ y b dependerían explícitamente del tiempo t_0 .
- Estabilidad asintótica implica estabilidad Liapunov, no vale la recíproca.
- En el gráfico superior de la figura 3.1, la solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero no necesariamente se aproxima a ella. Éste es el caso de la estabilidad Liapunov.
- En el gráfico inferior de la figura 3.1, la solución $y(t)$ permanece en un entorno de $x(t)$, pero además se aproxima a ella indefinidamente. Éste es el caso de la estabilidad asintótica.

Las últimas dos definiciones no proveen un método para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones del sistema. En la siguiente sección establecemos un resultado teórico de aplicación práctica para determinar la estabilidad de un punto fijo en cualquier EDO autónoma. Más adelante nos dedicamos a la estabilidad de órbitas cerradas.

3.1.3. Sistemas Lineales con coeficientes constantes

El estudio de los sistemas dinámicos lineales de la forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está completamente entendido. Con ayuda del álgebra lineal podremos conocer el espacio de fases en su totalidad, sólo necesitamos obtener los autovalores de la matriz A (aún en el caso que A sea una matriz con coeficientes complejos). El conocimiento de estos sistemas es importante para determinar la estabilidad de los puntos fijos en los sistemas no lineales, más precisamente, dado un sistema de este segundo tipo, los autovalores de la matriz del término de orden uno en su correspondiente desarrollo en serie de Taylor, nos dará información local del flujo en una vecindad del punto fijo de este sistema no lineal¹. Sin embargo, esta metodología es válida sólo en algunos casos como veremos más adelante. Para un estudio detallado de ambos tipos de sistemas se puede consultar el libro de Hirsch [30].

Consideremos entonces:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (3.4)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de coeficientes constantes y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. El siguiente teorema nos da una fórmula explícita para todas las soluciones de (3.4).

Teorema 2. *La solución de (3.4) para una condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ es*

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$$

y no hay otra solución.

donde la exponencial e^{At} se define como:

$$e^{At} = I_n + A t + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n t^n + \dots \quad (3.5)$$

¹Es un proceso semejante al del cálculo diferencial donde se obtiene información de la función a partir de su derivada.

y la matriz I_n es la identidad de $\mathbb{R}^{n \times n}$. La dinámica del sistema (3.4) se reduce a estudiar el comportamiento de la serie (3.5). Como hemos mencionado, este comportamiento depende de los autovalores de la matriz A . Se nos presentan entonces los siguientes casos:

- Caso I: A tiene autovalores reales de signos opuestos. En este caso el origen es denominado *silla-nodo* y es *inestable*.
- Caso II. A tiene todos sus autovalores con parte real negativa. En este caso el origen es llamado *sumidero* y tiene la particularidad de que todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ convergen a él, es decir, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. El punto fijo es asintóticamente estable.
- Caso III. A tiene todos sus autovalores con parte real positiva. En este caso el origen es denominado *fuentes* y toda solución $\mathbf{x}(t)$ se aleja del único punto fijo del sistema, en símbolos, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\mathbf{x}(t)| = \mathbf{0}$. El punto fijo es inestable.
- Caso IV. A tiene autovalores imaginarios puros. En este caso se debe hacer un estudio detallado.

3.1.4. Sistemas no lineales autónomos

A diferencia de los sistemas lineales, para los cuáles siempre podemos encontrar la solución explícitamente de acuerdo a la fórmula dada por el teorema 2, no existe ninguna regla de carácter universal para los sistemas no lineales. Más aún, la variedad de comportamientos en el tiempo de las soluciones que puede presentar un sistema no lineal, aún de baja dimensión, aumenta considerablemente. De todos modos, puntos fijos y órbitas periódicas son, esencialmente, las soluciones de interés para nosotros.

Afortunadamente, en algunos casos se puede conocer cómo se organiza el flujo alrededor de los puntos fijos de los sistemas no lineales. En cuanto a las

órbitas periódicas, nos interesan los ciclos límites, y como ya hemos mencionado, el problema de encontrarlos es un problema de mayor complejidad que el de encontrar puntos fijos. Los ciclos límites no aparecen en sistemas lineales como el mostrado en la ecuación (3.4).

Puntos de equilibrio

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Asumamos $\mathbf{f} \in C^2$ y que el sistema tienen un punto fijo aislado notado \mathbf{x}^* . Los autovalores de la matriz del término de orden uno en el correspondiente desarrollo en serie de Taylor del campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ determinan si es posible conocer, localmente, el comportamiento del flujo en un entorno del punto fijo del sistema. La metodología de trabajo se denomina *proceso de linealización del sistema*. Veamos cuál es el procedimiento de trabajo.

Si queremos determinar el tipo de estabilidad que tiene esta solución constante deberemos entender el comportamiento asintótico de funciones $\mathbf{x}(t)$ que sean soluciones de (3.6) en un entorno de \mathbf{x}^* . Para ello definamos $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ y derivemos esta última expresión respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{x}} && (\mathbf{x}^* \text{ es constante}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{u}) && (\text{sustitución}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) && (\text{Taylor}) \\ &= D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) && (\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)$ representa a los términos de orden mayor o igual a dos.

Para $n = 1$, tenemos que si $Df(x^*) = f'(x^*) \neq 0$, los términos $\mathcal{O}(u^2)$ se

pueden despreciar y podremos escribir

$$\dot{u} \approx f'(x^*)u. \quad (3.8)$$

El término de la derecha es la *linealización* del sistema (3.6) en x^* . Si $f'(x^*) < 0$, $u(t)$ decrece exponencialmente y en consecuencia soluciones próximas a x^* se aproximan asintóticamente a dicha función constante, lo que significa que la solución x^* es asintóticamente estable. Si $f'(x^*) > 0$, $u(t)$ crece exponencialmente, por lo tanto, soluciones próximas a x^* se alejan de dicho punto de equilibrio, entonces x^* es inestable. Si $f'(x^*) = 0$, el término cuadrático no se puede ignorar y no hay nada de carácter general para decidir la estabilidad de x^* ; debe ser determinada en cada caso particular. Resumiendo, la estabilidad de x^* cuando $f'(x^*) \neq 0$ es la misma que la del punto fijo $u = 0$ en el sistema lineal asociado $\dot{u} = f'(x^*)u$. La extensión de este resultado a sistemas de mayor dimensión se sintetiza en el siguiente resultado.

Teorema 3. *Si \mathbf{x}^* es un punto fijo aislado del sistema (3.1) y todos los autovalores de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ tienen parte real negativa, dicha solución es asintóticamente estable.*

En otros términos, la solución constante $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, tiene el mismo tipo de estabilidad que el punto fijo del sistema lineal $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ cuando todos los autovalores de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ tienen parte real negativa (una prueba de este teorema se puede consultar en Wiggins [91]). Diremos que ambos sistemas, localmente, tienen un comportamiento *topológicamente equivalente*, o *cualitativamente similar*, noción que definiremos a continuación.

Equivalencia topológica entre campos vectoriales

En esta sección daremos criterios para decidir si dos sistemas distintos $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ tienen comportamientos dinámicos similares. Esta

comparación la haremos entre los respectivos espacios de fases recurriendo a la topología. Dos sistemas son topológicamente equivalentes (localmente), si uno de ellos, es una transformación distorsionada del otro, que no presenta cortaduras. Para completar la equivalencia se agrega que la transformación debe preservar el sentido del flujo. Este tipo de transformación se denomina *homeomorfismo*, más precisamente, esta transformación es una función que a cada punto del espacio de fases de un sistema (o de una porción de este) le corresponde un único punto del segundo espacio de fases (o de una porción de este) de modo tal que dicha función sea biyectiva continua con inversa también continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos. Podemos dar ahora la definición correspondiente:

Definición 7. Sean $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ dos campos vectoriales definidos en dos abiertos U y V de \mathbb{R}^n . Diremos que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es topológicamente equivalente a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ cuando exista un homeomorfismo $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ que transforme órbitas de \mathbf{f} en órbitas de \mathbf{g} preservando el sentido dado por la parametrización del tiempo.

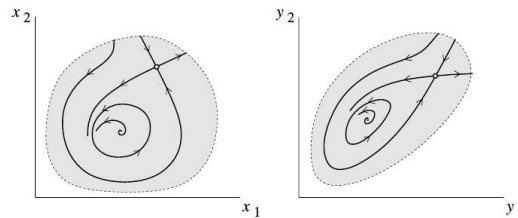


Figura 3.2: Equivalencia topológica de dos campos vectoriales distintos.

Definición 8. Un punto fijo del sistema (3.1) se denomina hiperbólico si $Df(x^*)$ no tiene autovalores con parte real cero.

El teorema de Hartman-Grobman² nos asegura que los sistemas $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ y

²Este teorema fue demostrado por Philip Hartman (1915-2015) en 1960 y publicado por Grobman en 1962.

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ son topológicamente equivalentes si \mathbf{x}^* es un punto fijo para $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ tiene todos sus autovalores con parte real distinta de cero.

Teorema 4. (Hartman-Grobman). Sea $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo C^1 , y sea \mathbf{x}^* un punto de equilibrio hiperbólico para \mathbf{f} (i.e. todos sus autovalores tienen parte real no nula). Entonces existen V, U entornos abiertos de \mathbf{x}^* y de 0 y un homeomorfismo $\mathbf{h} : V \rightarrow U$ que transforma órbitas de V en órbitas de U preservando el sentido dado por la parametrización del tiempo.

Hasta aquí los resultados teóricos respecto a los puntos fijos que más interesan a nuestros fines. A continuación desarrollamos la teoría básica y necesaria para un conjunto de órbitas periódicas particulares denominadas *ciclos límites*.

3.1.5. Ciclos límites

El movimiento que nos interesa es periódico pero con la propiedad de ser Lyapunov estable, es decir, soluciones cercanas a dicha solución convergen a ella. Este tipo de órbitas recibe el nombre de *ciclo límite*. Ejemplifiquémoslo en un péndulo mecánico accionado por una pesa.



Figura 3.3: Péndulo accionado por una pesa.

- Su mecanismo transforma la energía potencial en un movimiento oscilatorio

periódico que se mantiene gracias a la pesa que actúa como **fente de energía interna**. El movimiento continúa hasta que la cuerda que sostiene la pesa no tenga más recorrido.

- Estos sistemas se modelan con ecuaciones autónomas, es decir, no dependen explícitamente del tiempo, en consecuencia, la órbita periódica $x(t)$ en el espacio de fases correspondiente es indistinguible gráficamente de $x(t + t_0)$ para todo t_0 .
- **La forma exacta del movimiento oscilatorio como así también su ritmo, están completamente determinados por los parámetros internos del sistema** (masa, largo del péndulo, etc.) y no depende de cómo el péndulo fue puesto en marcha.
- Si el péndulo es ligeramente perturbado, éste retoma su *ritmo*, denominado **frecuencia natural**, o **ritmo interno**, es decir, **la oscilación es estable**, y a la órbita se la denomina **órbita autosostenida**. Diremos también que el péndulo tiene la capacidad de **autoorganizarse**.
- Un ejemplo de oscilaciones no autosostenidas son observables en un simple péndulo de resorte helicoidal que cuelga de un techo sin ninguna fuente de energía interna. Éste oscila si recibe un impulso, pero estas oscilaciones desaparecen debido a la fricción con el aire. Para mantener las oscilaciones deberíamos impulsarlo repetidamente. ¿Y si no hubiera fricción?, la forma de las oscilaciones dependerían del impulso inicial. Este contraejemplo agrega dos características más al tipo de osciladores que nos interesan, nuestros sistemas son **disipativos** y **no lineales**.

Este tipo de movimiento se denomina *movimiento autosostenido*. El nombre fue propuesto por Andronov, Khaikin y Vitt en 1937 [6] y es un concepto clave para el tipo de sincronización por nosotros estudiado.

Definición 9. *Un ciclo de un sistema dinámico continuo se denomina ciclo límite si es una órbita aislada, es decir, es la única órbita periódica que existe en un conjunto abierto en el espacio de fases que la contiene.*

Estos ciclos pueden tener diferentes formas en los espacios de fases correspondientes y recíprocamente en las gráficas que muestren sus variaciones temporales. Dos parámetros asociados a estas gráficas son el *período* T y la *frecuencia* f . El primero indica el tiempo que dura una oscilación, mientras que el segundo da cuenta del número de oscilaciones en un período. La relación existente entre ambos es:

$$f = \frac{1}{T}$$

Otra forma de caracterizar el ritmo de las oscilaciones es mediante la *frecuencia angular* ω :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

De aquí en más, ω , será denominada *frecuencia natural*. Más adelante veremos que esta frecuencia puede ser modificada debido a la interacción del oscilador con otro sistema.

Ecuación de van der Pol

Un prototipo de ecuación para este tipo de órbita periódica es el modelo de van der Pol ya presentado en su contexto histórico. En general, la característica de estas oscilaciones se traduce en el modelo con la aparición de un término de amortiguación no lineal que cambia su signo amplificando la oscilación cuando la amplitud es relativamente pequeña mientras la amortigua para amplitudes grandes. La ecuación introducida por van der Pol es de la forma:

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.9)$$

Donde el término de amortiguación no lineal $(x^2 - \lambda)\dot{x}$, cambia su signo según el ritmo de la oscilación. Si $|x| > \sqrt{\lambda}$, la fricción es positiva y en términos de movimiento de una partícula, ésta tiende a frenarse. Por otro lado, si $|x| < \sqrt{\lambda}$, la fricción es negativa y la partícula tiende a acelerar. A su vez, el parámetro λ controla la aparición de ciclos límites y ω es la frecuencia natural del oscilador. Realizando la sustitución $\dot{x} = y$ obtenemos el sistema bidimensional equivalente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -(x^2 - \lambda)y - \omega^2 x \end{cases}$$

Fijado ω , este sistema presenta al origen $(0; 0)$ como único punto de equilibrio para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicando el método de linealización descrito en 3.1.4, podremos estudiar la estabilidad del origen analizando los autovalores de la matriz asociada al sistema linealizado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + \lambda y. \end{cases}$$

Entonces, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

tiene autovalores

$$\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Si $\lambda < 0$, la matriz del sistema linealizado tiene autovalores con parte real negativa, y en consecuencia, el origen es asintóticamente estable para todo ω . Según el teorema de Hartman-Grobman (teorema 4), el sistema lineal y el van der Pol son topológicamente equivalentes en un entorno de $(0; 0)$. La situación cambia cuando $\lambda = 0$. La equivalencia topológica entre ambos sistemas no se puede garantizar, pero el origen se torna inestable cuando $\lambda > 0$. En la figura 2.16 se pueden observar soluciones numéricas obtenidas por simulación en un computador para $\lambda = 1,5$. El ordenador nos muestra la inestabilidad local del

origen. A su vez, el sistema presenta un ciclo límite estable. Colocando condiciones iniciales en el problema de valor inicial correspondiente, las soluciones tienden al ciclo límite. Este tipo de problemas se encuadra dentro de los *sistemas de Liénard*. Estos sistemas son de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (3.10)$$

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias para la existencia de un único ciclo límite presente en la dinámica del sistema.

Teorema 5. *(de Liénard)* Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las siguientes condiciones:

- $f(x)$ y $g(x)$ son continuamente diferenciables $\forall x$.
- $g(-x) = -g(x) \forall x$.
- $g(x) > 0 \forall x > 0$.
- $f(-x) = f(x) \forall x$.
- La función impar $F(x) = \int_0^x f(u)du$ tiene exactamente un cero en $x = a$, es negativa si $0 < x < a$, es positiva y no decreciente para $x > a$ y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Entonces, el sistema (3.10) tiene un único ciclo límite rodeando al origen de coordenadas.

Mecánicamente los sistemas del tipo Liénard se puede interpretar como el movimiento de una partícula de masa unitaria sujeta a una fuerza de amortiguamiento $-f(x)y$ y una fuerza de restauración $-g(x)$. Así la condición de imparidad sobre $g(x)$ en el teorema de Liénard se puede interpretar como la fuerza que hace

un resorte mientras que las condiciones sobre $f(x)$ implican que el amortiguamiento es negativo para valores relativamente pequeños de $|x|$ y positivo para valores relativamente grandes de $|x|$. En conjunción, oscilaciones con grandes amplitudes decaen, oscilaciones con pequeñas amplitudes crecen. No es sorpresa que el sistema tienda a establecerse en una oscilación autosostenida como lo asumió Lord Rayleigh en el siglo XIX.

Si $g(x) = \omega^2$ y $f(x) = (x^2 - \lambda)$ obtenemos nuestra ecuación de van der Pol. En consecuencia, los resultados mostrados por el computador, se corresponden con los resultados teóricos del teorema de Liénard. Si suponemos $\lambda > 0$, el primer y tercer términos de la ecuación (3.9) corresponden a los de un oscilador armónico, pero el segundo término es de amortiguamiento o fricción. Si $|x| > \lambda$, la fricción es positiva y en términos de movimiento de una partícula, ésta tiende a frenarse. Por otro lado, si $|x| < \lambda$, la fricción es negativa y la partícula tiende a acelerar.

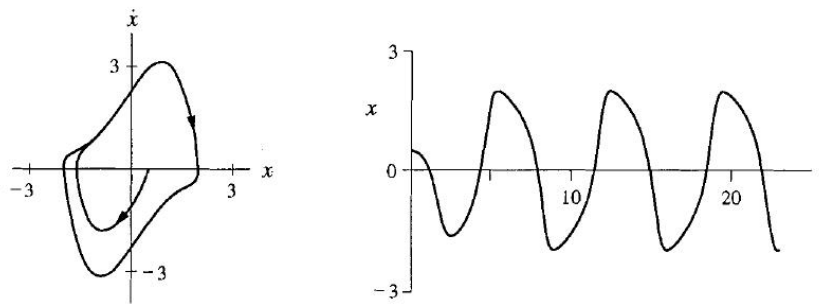


Figura 3.4: Simulaciones para la ecuación (3.9)

Para sistemas de dimensión mayor a dos, el problema de encontrar ciclos límites no está resuelto. Sin embargo, podemos conocer condiciones generales para cuando un ciclo límite se genera, en términos más precisos, podemos saber para qué valores de los parámetros del sistema, un ciclo límite nace con un radio tan pequeño como uno quiera. Este problema corresponde a la teoría de las bifurcaciones y se encara en la siguiente sección.

Mapas de Poincaré

Poincaré presenta la “Teoría de los ciclos límites” en el capítulo VI de su segundo trabajo “Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial“. Lo hace apelando a la *Teoría del consecuente* que expuso anteriormente y que contiene en esencia el principio de lo que hoy se llama una *aplicación de Poincaré* o *mapa de Poincaré*. La teoría de los consecuentes se puede esquematizar en el siguiente modo. Consideremos un sistema n -dimensional $\dot{x} = f(x)$. Sea S una superficie de dimensión $n - 1$, denominada *sección de Poincaré*. Una aplicación de Poincaré, notada como P , es una sucesión de puntos sobre dicha superficie que se genera de este modo: el siguiente de un punto intersección del flujo con S , es otro que se obtiene cuando la órbita en su giro vuelve a S , en símbolos escribimos $P(x(t_k)) = x(t_{k+1})$, donde $t_{k+1} - t_k$ es el tiempo transcurrido en el giro correspondiente, lo llamamos *tiempo de retorno*. Se requiere que el flujo en

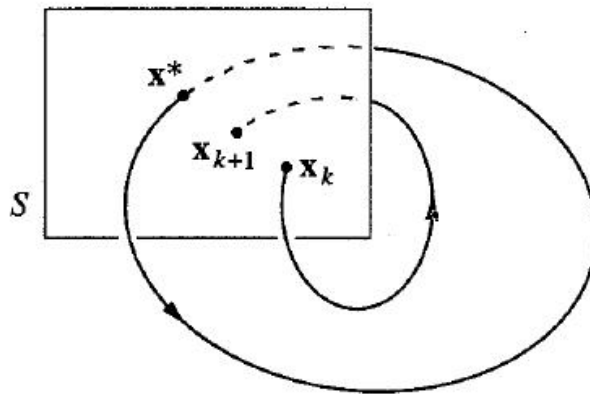


Figura 3.5: Esquema del mapa de Poincaré

todo x_k sea *transversal* a S ; esto es $f(x_k) \cdot n(x_k) \neq 0$, donde “ \cdot ” es el producto interno vectorial habitual y $n(x_k)$ es el vector normal a S en x_k . Si x^* es un punto tal que $P(x^*) = x^*$, entonces la trayectoria que pasa por x^* es una órbita cerrada del sistema $\dot{x} = f(x)$, cuyo tiempo de retorno es su período T , es decir, $t_{k+1} - t_k = T \forall k \in \mathbb{N}_0$. Este mapa se puede interpretar como un sistema dinámico discreto y desde esta óptica x^* pasa a ser una solución constante del sistema y

por lo tanto un punto fijo. Observando el comportamiento de la función P en una vecindad de x^* podremos determinar la estabilidad del ciclo límite asociado a x^* .

Definición 10. *Sea x^* un punto fijo de una aplicación de Poincaré P , dicho punto es estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|x_0 - x^*\| < \delta \rightarrow \|x_n - x^*\| < \varepsilon$, donde x_0 es el punto inicial de la secuencia x_n .*

Estabilidad de ciclos límites

Introduzcamos las coordenadas relativas a S con la notación $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, de modo tal que $\xi = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ corresponda a x^* en S (la sección de Poincaré tiene dimensión $n - 1$). El origen $\xi = \mathbf{0}$ es un punto fijo del mapa $P : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Un resultado conocido, cuya demostración se puede consultar en Kuznetsov [44], determina la estabilidad de los ciclos límites.

Teorema 6. *Tenemos una aplicación P con las propiedades antes mencionadas, donde x^* es un punto fijo de esa aplicación. Si la matriz $A = \frac{dP}{d\xi}|_{\xi=0} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ tiene todos sus autovalores localizados en el círculo abierto unidad, entonces dicho punto fijo es estable. Y vale también el enunciado recíproco.*

La matriz A se denomina *matriz de monodromía*. El resultado anterior es independiente del x^* , de la sección S y de las coordenadas locales que se consideren para el ciclo límite. Los autovalores de A son denominados *multiplicadores de Floquet* o simplemente *multiplicadores*, y salvo raras excepciones, no existe una fórmula para calcularlos, se debe recurrir a métodos numéricos. El siguiente paso es estudiar qué le ocurren a los puntos fijos y a los ciclos límites de los sistemas dinámicos continuos cuando los parámetros que intervienen en las ecuaciones correspondientes varían. La teoría de las bifurcaciones se encarga de ello.

3.2. Nociones elementales de la teoría de bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones consiste en el estudio de los cambios en la estructura cualitativa del conjunto de soluciones en una familia multiparamétrica de ecuaciones diferenciales cuando sus parámetros varían. El principal resultado es una clasificación en el espacio de parámetros del sistema de los diferentes comportamientos dinámicos que se presentan. Este resultado se puede visualizar en lo que denominamos *diagrama de bifurcaciones*. Por otro lado, la naturaleza de estos cambios depende también de las simetrías que pudieran tener las ecuaciones. En este sentido la *teoría de grupos* nos facilita el estudio del comportamiento dinámico y geométrico de los ciclos límites, principal objeto de estudio en esta tesis.

3.2.1. Bifurcaciones en sistemas continuos

Consideremos la siguiente *familia parametrizada* de EDOs:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p \text{ con } n, p \in \mathbb{N} \text{ y } f \text{ diferenciable en } \mathbf{x} \text{ y } \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.11)$$

Cuando los parámetros de (3.11) varían, el espacio de fases también lo hace. Se abren entonces dos posibilidades: o bien el nuevo espacio de fases es topológicamente equivalente al primero (no hay cambios cualitativos), o bien no lo es (hay cambios cualitativos). En este contexto, la teoría de las bifurcaciones analiza y establece condiciones generales bajo las cuales un sistema dinámico parametrizado cambia cualitativamente su espacio de fases cuando sus parámetros cruzan determinados *valores críticos*.

Definición 11. *Llamamos bifurcación a un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. Al valor que tome λ en donde se produce tal cambio lo denominamos punto de bifurcación.*

En nuestro caso nos restringimos sólo a las bifurcaciones que atañan a puntos fijos y ciclos límites, más precisamente nos interesa³:

- la aparición de ciclos límites por pérdida de estabilidad de un punto fijo, conocida como *bifurcación de Hopf*
- la pérdida de estabilidad de ciclos límites denominada *bifurcación toro*
- la colisión y desaparición de ciclos límites denominada *bifurcación de tangencia* o *bifurcación nodo-silla de ciclos límites*
- *bifurcación de rotura de simetría* en ciclos límites.

La manera de visualizar estos cambios cualitativos en la dinámica de una familia parametrizada de EDOs es mediante los *diagramas de bifurcaciones*.

3.2.2. Diagramas de bifurcaciones

Definición 12. *Un diagrama de bifurcaciones de un sistema dinámico es una clasificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica.*

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Sea el sistema monoparamétrico:

$$\dot{x} = r + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

³Estas bifurcaciones están en función del modelo presentado. Otros modelos pueden requerir otras bifurcaciones.

en donde r es el parámetro que puede tomar cualquier valor real. En la figura 3.6 se puede observar esquemáticamente lo que sucede con los puntos fijos del sistema cuando r varía. Si r es negativo el sistema presenta dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable; si $r = 0$ hay un punto fijo semiestable y si r es positivo el sistema no presenta puntos fijos.

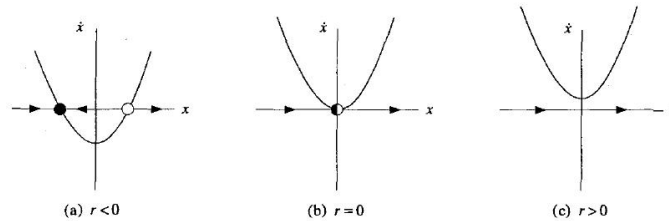


Figura 3.6: Esquema de los puntos fijos de $\dot{x} = r + x^2$. El punto lleno indica estabilidad del punto fijo y el blanco inestabilidad de éste.

Una visión global de lo que ocurre con el sistema cuando r varía, se obtiene al dibujar una curva en el espacio (r, x) que represente a todas las soluciones de la ecuación algebraica $x^2 + r = 0$; tal gráfico es denominado *diagrama de bifurcaciones*. En la figura 3.7, en el eje de abscisas ubicamos al parámetro r y en las ordenadas alguna medida del objeto geométrico que estamos analizando, sin embargo, en este ejemplo, por ser un punto fijo de un sistema unidimensional, simplemente colocamos el valor de x . De este modo, el diagrama nos da información sobre la familia parametrizada de puntos fijos. La línea continua indica que x es un punto fijo estable mientras que la punteada nos señala su inestabilidad.

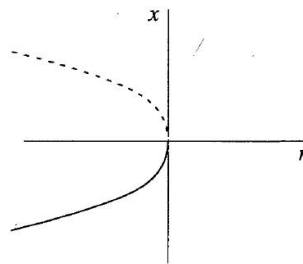


Figura 3.7: Diagrama de bifurcaciones para el sistema $\dot{x} = r + x^2$. La línea continua indica estabilidad del punto fijo mientras que la punteada inestabilidad de éste.

En general, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la representación gráfica se podrá hacer en un sistema

bidimensional de coordenadas $(r, \|\mathbf{x}\|)$, en donde $\|\cdot\|$ será la norma euclídea. Las bifurcaciones de sistemas monoparamétricos se podrán visualizar también en una recta que representará a los valores del parámetro. En el ejemplo 2, dicha recta queda dividida en dos semirrectas en donde el origen o valor cero de nuestro parámetro, indica el punto de bifurcación (silla-nodo). Para valores positivos de r , el sistema no posee equilibrios; para valores negativos de r tenemos dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. Cuando analizamos sistemas multiparamétricos ($\lambda \in \mathbb{R}^p$), en los casos más simples, los diagramas de bifurcaciones estarán compuestos por un número finito de regiones en \mathbb{R}^p . Dentro de cada región, los espacios de fases serán localmente, topológicamente equivalentes. Estas regiones están separadas por fronteras o límites, que podrán ser curvas o superficies. Los límites podrán cruzarse o sólo encontrarse. Una frontera de bifurcación se define por un lado, especificando el objeto geométrico, (nuestros casos de interés son equilibrios y ciclos límites); por otro lado, el tipo de bifurcación que presenta el sistema en relación al objeto; en el ejemplo 2, el límite es un punto ($r = 0$) y la bifurcación es la silla-nodo de equilibrios. Cuando esas fronteras son cruzadas, una bifurcación se produce en el sistema correspondiente.

Definición 13. *Llamamos codimensión de una bifurcación en un sistema del tipo (3.11) a la diferencia entre la dimensión del espacio de parámetros y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.*

En esta tesis trabajaremos exclusivamente con bifurcaciones de codimensión igual a uno.

3.2.3. Bifurcaciones de puntos fijos en \mathbb{R}^n

Examinemos el caso más simple en el que se puede presentar una bifurcación para un punto fijo aislado en el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

donde \mathbf{f} es diferenciable con respecto a \mathbf{x} y λ . Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ un equilibrio hiperbólico para $\lambda = \lambda_0$. Las bifurcaciones que puede sufrir este sistema en relación a los puntos fijos, dependen de los autovalores de la matriz jacobiana obtenida por el método de linealización de Poincaré desarrollado en 3.1.4.

Asumamos que el sistema (3.12) tiene un equilibrio hiperbólico en $\mathbf{x} = x_0$ para $\lambda = \lambda_0$. Existen dos maneras en las cuales dicho punto deja de ser hiperbólico. Una de ellas se da cuando en un valor crítico $\lambda = \lambda_0$, la matriz jacobiana $Df(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, presente al menos un autovalor cero; la segunda manera es cuando posea un único par de autovalores imaginarios puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. El caso que nos interesa es el que conduce a la aparición de ciclos límites, objeto principal en nuestro análisis. Si este ciclo límite surge a partir de la pérdida de estabilidad de un punto fijo, decimos que se produce una *bifurcación de Andonov-Hopf*, o simplemente *bifurcación de Hopf*.

Bifurcación de Hopf

Existen diferentes modos en los que un ciclo límite puede aparecer (desaparecer) en un sistema dinámico cuando un parámetro de interés cambia. Expondremos el caso que concierne al nacimiento del ciclo límite por pérdida de estabilidad de un punto fijo, que denominamos bifurcación de Hopf, cuyo teorema homónimo esencialmente emplea como condición necesaria para que la bifurcación ocurra a un par de números complejos conjugados dependientes del parámetro que varía. Nosotros presentamos una versión extraída de [78]. Esta versión sirve a nuestros propósitos.

Teorema 7. Sea un sistema autónomo como el dado en (3.12), en el que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ es dos veces diferenciable respecto de \mathbf{x} y λ . Asumamos también que (3.12) posee una familia analítica⁴ $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ de puntos fijos que satisface $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$. Sin pérdida de generalidad supongamos $\mathbf{x}(\lambda) \equiv \mathbf{0}$. Supongamos también que para cierto valor $\lambda = \lambda_0$, la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \lambda_0)$ tiene un único par de autovalores imaginarios puros $\mu(\lambda_0) = \pm i\beta$. Si $\left. \frac{d(\operatorname{Re}(\mu(\lambda_0)))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$, entonces un ciclo límite nace en $(\mathbf{0}, \lambda_0)$ con período inicial $T_0 = \frac{2\pi}{\operatorname{Im}(\mu(\lambda_0))}$ cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0^+$.

La estabilidad del ciclo límite, queda determinada por lo que se denomina *primer coeficiente de Lyapunov*⁵ que también depende de λ . Si este coeficiente es negativo el ciclo límite es estable; si es positivo es inestable. A estas bifurcaciones las denominamos *supercrítica* y *subcrítica* respectivamente.

Ejemplo 3. Retomemos la ecuación de van der Pol que venimos analizando en diferentes momentos.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -(x^2 - \lambda)y - \omega^2 x \end{cases} \quad (3.13)$$

Fijemos $\omega = 1$. Este sistema posee al origen como un único punto de equilibrio para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. El campo vectorial pertenece a C^∞ , es decir, es infinitamente diferenciable. Linealizamos el sistema aplicando el proceso expuesto en 3.1.4, y calculamos los autovalores de la matriz jacobiana especializada en el origen,

⁴Una función analítica es aquella que puede expresarse como una serie de potencias convergente.

⁵Los detalles de su cálculo se pueden consultar en Kuznetsov [45].

esto es, las raíces del determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - \lambda \end{vmatrix}$$

Los autovalores dependientes del parámetro λ son

$$\lambda_{1,2}(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

De aquí podemos concluir que para valores negativos del parámetro, el punto fijo es estable, perdiendo estabilidad en $\lambda = 0$, en donde se cumple la primer condición del teorema 7, esto es, en dicho punto el sistema tiene dos autovalores: $2i$ y $-2i$. Esta inestabilidad se mantiene para $\lambda \geq 0$. también se cumplen las dos últimas condiciones, pues

$$Re(\lambda) = \lambda/2 > 0 \text{ si } \lambda > 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d(Re(\lambda(\lambda)))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} > 0.$$

Por lo tanto un ciclo límite nace en $\lambda = 0$ produciéndose entonces una bifurcación de Hopf.

La figura 3.8 muestra el diagrama de bifurcaciones correspondiente. La recta $x = 0$ contiene todos los puntos fijos y el valor $r = 0$ es el punto de bifurcación. En este valor nace un ciclo límite estable. Para construir el diagrama de bifurcaciones completo se implementó el software AUTO 07p. Este software es ampliamente aceptado en la comunidad de los sistemas dinámicos y en el capítulo donde desarrollamos la metodología de análisis para nuestros problemas, se detallará con precisión las características esenciales del mismo. Entonces, en el diagrama de bifurcaciones en cuestión, el eje de abscisas representa al único parámetro del sistema, y en el de ordenadas se puede utilizar alguna medida del objeto en cuestión; en particular, AUTO 07p emplea la norma euclídea para puntos fijos, y para soluciones periódicas

$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ generalmente emplea la norma:

$$d = \sqrt{\int_0^1 \sum_{k=1}^n U_k(x)^2 dx} \quad (3.14)$$

en donde n es la dimensión del sistema. Empero, en pantalla, el software utiliza el mismo símbolo para ambas normas, este es, $L2-NORM$. En dicho gráfico se puede observar una línea roja curva de coordenadas (r, d) , esta par ordenado indica el valor de r en donde hay un ciclo límite y d es la norma definida en (3.14). De este modo, el diagrama de bifurcación conecta una curva de puntos fijos con una curva de órbitas periódicas.

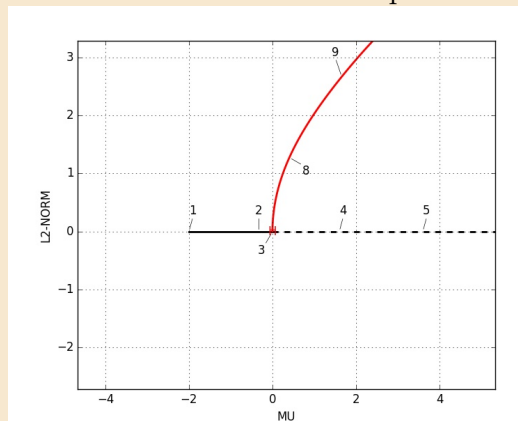


Figura 3.8: Diagrama de bifurcaciones para la ecuación (3.13).

En la figura 3.9 se puede observar en un mismo espacio de fases a los ciclos límites etiquetados con números según correspondan con los de la curva roja en la figura 3.8. En dicha figura cada órbita está asociada a un par ordenado (r, d) y por lo tanto son órbitas de distintos sistemas y en consecuencia, no pueden compartir un mismo espacio de fases.

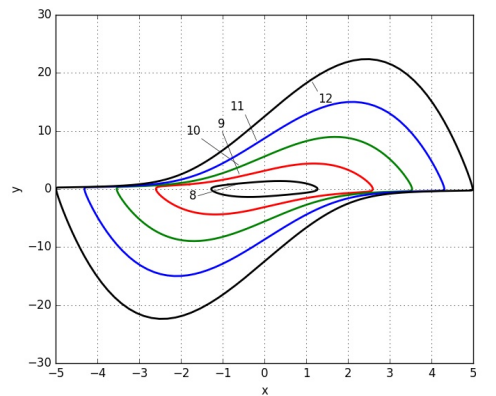


Figura 3.9: Órbitas correspondientes a las etiquetas de la figura 3.8.

3.2.4. Bifurcaciones de ciclos límites

Las bifurcaciones que puede presentar un sistema en relación a sus ciclos límites depende de los multiplicadores de Floquet, entonces, el estudio se lleva a cabo analizando los puntos fijos de los mapas de Poincaré correspondientes. Para un estudio detallado de las bifurcaciones de ciclos límites consultar Kuznetsov [45], aquí presentamos los elementos básicos teóricos para poder fundamentar nuestros resultados.

Asumamos la existencia de un ciclo límite L_0 en el sistema (3.11), con $\lambda = 0$. Sea P_λ el mapa de Poincaré con su correspondiente sección Σ ; en símbolos: $P_\lambda : \Sigma \rightarrow \Sigma$. En un nuevo sistema de coordenadas $n - 1$ -dimensional notamos con $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ al punto de intersección entre L_0 y Σ . Por lo tanto, ξ es un punto fijo para la transformada discreta P , es decir, $\xi^* = P((\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}))$. Dicho punto será hiperbólico si todos sus multiplicadores de Floquet se encuentran dentro del círculo unidad y existirán sólo tres maneras en las cuales ξ_0 puede perder tal propiedad, y por lo tanto sufrir una bifurcación. Geométricamente, ésto se producirá si alguno de los multiplicadores $\mu(\lambda)$ atravesaran el círculo unidad en alguna de las siguientes formas cuando λ varíe:

1. Para el valor $\mu = 1$, en cuyo caso se producirá una colisión de ciclos límites.
2. Si $\mu = -1$, se produce una bifurcación que duplica el período del ciclo.

3. Cuando los multiplicadores son de la forma $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ con $0 < \theta_0 < \pi$, en cuyo caso un toro nacerá en el espacio de fases.

Otra bifurcación sobre la que nos detendremos más adelante es la de ruptura de simetría que presentaremos en un marco conceptual particular. Por ahora, sólo explicaremos a continuación estos tres escenarios con más detalles.

Bifurcación tangente de ciclos límites

El mecanismo mediante el cual dos ciclos límites, uno estable y el otro inestable, colisionan y desaparecen cuando un parámetro del sistema varía, se conoce como *bifurcación pliegue* o *bifurcación tangente de ciclos límites*⁶.

Definición 14. La bifurcación asociada a la aparición de un multiplicador $\alpha = 1$ se denomina *bifurcación tangente de ciclos límites*.

La figura 3.10 muestra esquemáticamente este proceso. En ella se dibujan el flujo

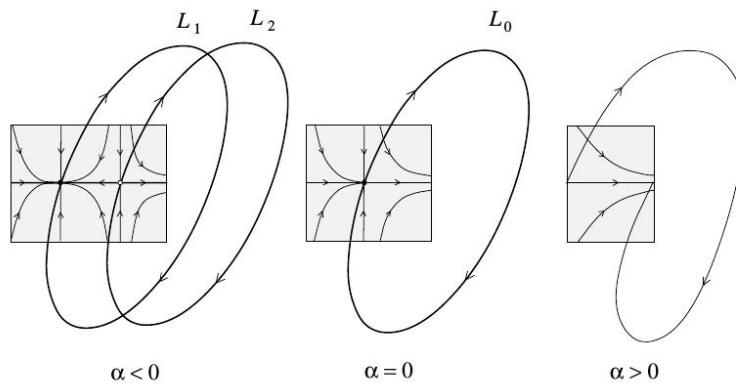


Figura 3.10: Esquema de un diagrama para la bifurcación tangente de ciclos límites.

y la sección de Poincaré correspondiente (región oscura). Se observa que para valores de α negativos el sistema presenta dos ciclos límites, consecuentemente

⁶En un sentido inverso, este mecanismo se puede presentar cuando dos osciladores pasan de un movimiento de oscilaciones independientes, a un régimen periódico y estable. Las lenguas de Arnold son un ejemplo de ello.

dos puntos fijos se dibujan en la sección transversal al flujo, uno de ellos estable, el otro inestable. Cuando $\alpha = 0$, los ciclos límites colisionan y desaparecen en $\alpha > 0$ ⁷.

Bifurcación toro de ciclos límites

La bifurcación asociada a la aparición de un multiplicador $\alpha_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ con $0 < \theta_0 < \pi$ se denomina *bifurcación toro de ciclos límites* también conocida como *bifurcación de Neimark-Sacker*. La bifurcación toro que nos concierne explica cómo un ciclo límite estable puede perder esta propiedad a partir del nacimiento de un toro estable, variando ligeramente un parámetro. En la figura 3.11 se esquematiza esta bifurcación. Allí se dibujan el flujo y la sección de Poincaré correspondiente tal como lo hicimos con la bifurcación pliegue. Se observa que para valores negativos de α el sistema presenta un ciclo límite, consecuentemente un punto fijo se dibuja en la sección transversal a la órbita. Cuando $\alpha > 0$, la órbita periódica pierde estabilidad de modo tal que el flujo cercano a ella se aleja y comienza un movimiento, en general, cuasiperiódico que geoméricamente cubre densamente la superficie de un toro, y en consecuencia, en la sección de Poincaré correspondiente, dibuja un conjunto de puntos que llenan también densamente un ciclo límite⁸.

Por último, a esta altura es pertinente preguntarse si una modificación en el orden del movimiento sincronizado es o no es una bifurcación. De no serlo, estaríamos hablando de un cambio geométrico y no de uno cualitativo en la dinámica del sistema. Corresponda a un caso u otro, deberemos encontrar un método que nos permita construir nuestras fronteras en el espacio de parámetros. Los *métodos de continuación numérica* son una herramienta poderosa para emprender dicha

⁷Los sistemas por nosotros estudiados son biparamétricos. Una curva de puntos de bifurcación de tangencia se dibuja en el espacio bidimensional generado por esos parámetros. Estas curvas corresponden a las lenguas de Arnold, que resultan ser fronteras que separan diferentes órdenes de sincronización en el espacio de parámetros.

⁸Podría ser que la curva sobre el toro sea periódica y por lo tanto en la sección de Poincaré correspondiente se dibujará un punto fijo estable. Este fenómeno se conoce como resonancia, pero es más habitual el movimiento cuasiperiódico.

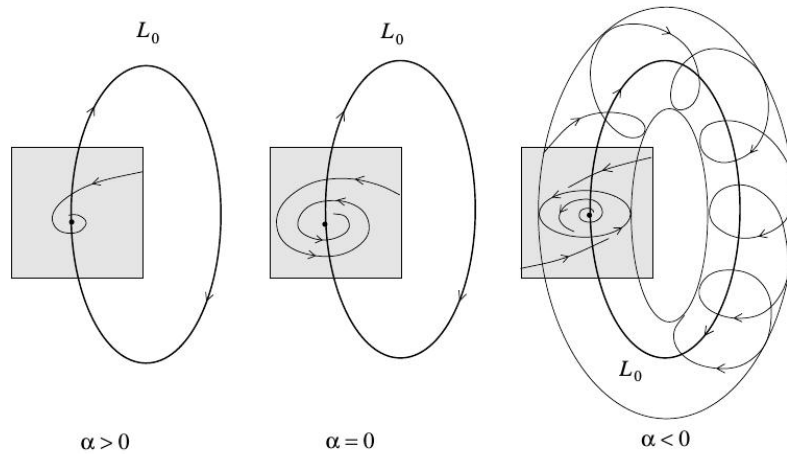


Figura 3.11: Esquema de un diagrama para la bifurcación toro de ciclos límites

tarea. Adelantamos la respuesta negativa que será justificada más adelante. A su vez, como veremos en el capítulo correspondiente a los resultados, estas regiones encierran a otras cuyas fronteras sí son bifurcaciones. Estas fronteras son las conocidas lenguas de Arnold. Más aún, estas lenguas tienen subregiones en donde cambia el orden de sincronización.

3.2.5. Bifurcaciones en presencia de simetrías

Para un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

una simetría en nuestra investigación, queda representada en las ecuaciones por la existencia de una matriz invertible \mathbf{S} que satisface:

$$\mathbf{S}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{S}(\mathbf{x})) \quad (3.16)$$

De aquí que las simetrías en las ecuaciones algebraicas determinan la geometría de las soluciones en el espacio de fases correspondiente en el siguiente sentido.

Por un lado, si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (3.16) tal que $\mathbf{S}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)$, decimos

que \mathbf{S} es una simetría de $\mathbf{x}(t)$. En particular, si $\mathbf{x}(t)$ es una solución periódica y en (3.16) se cumplen condiciones de unicidad, entonces $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{S}\mathbf{x}(t)$ difieren en alguna fase $t_0 \in \mathbb{R}$, esto es, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t - t_0)$. En este caso diremos que el par (\mathbf{S}, t_0) es una simetría de la solución periódica $\mathbf{x}(t)$. Este tipo de simetría tiene una componente espacial \mathbf{S} y otra temporal t_0 .

Por otro lado, podría ocurrir también que $\mathbf{S}\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}(t)$. Esto obliga a que la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema aparezca en conjuntos de soluciones relacionadas por la simetría \mathbf{S} . Por ejemplo, en este segundo caso si \mathbf{S} fuera una simetría central con centro en el origen, ocurrirá que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)$, es decir, cada solución $\mathbf{x}(t)$ deberá tener su pareja $\mathbf{S}\mathbf{x}(t)$.

A continuación demostraremos que el conjunto de todas las \mathbf{S} , que satisfacen (3.16) con la multiplicación habitual (composición en términos de transformaciones lineales), tiene estructura de grupo, es decir, dadas dos matrices inversibles \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 que satisfacen (3.16) valen las dos siguientes afirmaciones:

$$(1) \mathbf{S}_1^{-1} \text{ satisface (3.16)}$$

$$(2) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \text{ satisface (3.16)}$$

Para demostrar (1) notemos $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}_1\mathbf{x}(t)$. Luego

$$f(\mathbf{y}(t)) = f(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{y}(t)) = \mathbf{S}_1 f(\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{y}(t))$$

multiplicando el primer y último miembro por \mathbf{S}_1^{-1} obtendremos

$$\mathbf{S}_1^{-1} f(\mathbf{y}(t)) = f(\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{y}(t))$$

(2) se cumple pues

$$f(\mathbf{S}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^{-1}(\mathbf{x}(t))) = \mathbf{S}_1^{-1} f(\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{x}(t)) = \mathbf{S}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^{-1} f(\mathbf{x}(t))$$

Por supuesto, la matriz identidad \mathbf{I} hace el papel de elemento neutro en el grupo (\mathcal{G}, \cdot) en donde “ \cdot ” es el producto habitual de matrices. Por otro lado las simetrías

de cualquier solución periódica $\mathbf{y}(t)$ forman un subgrupo de \mathcal{G} , denominado *subgrupo de isotropía de $\mathbf{y}(t)$* definido como

$$\mathcal{G}_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{S} \in \mathcal{G} / \mathbf{S}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t)\}$$

Es decir, $\mathcal{G}_{\mathbf{y}}$ es el subgrupo de \mathcal{G} cuyos elementos son las matrices \mathbf{S} que dejan invariante $\mathbf{y}(t)$. Podría ocurrir que $\mathcal{G}_{\mathbf{y}}$ sea el singulete $\{\mathbf{I}\}$. Con estos conceptos vayamos ahora al campo de las bifurcaciones.

Supongamos ahora que (3.15) depende de un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, esto es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) \quad (3.17)$$

y que existe un grupo (\mathcal{G}, \cdot) tal para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{G}$ se cumple (3.16). Asumamos también que podemos construir una familia de soluciones \mathcal{F}_{α} dependientes del parámetro α perteneciente a algún intervalo de interés $[\alpha_a, \alpha_b] \subseteq \mathbb{R}$. La estructura del grupo \mathcal{G} y sus subgrupos puede ser usada para clasificar el comportamiento dinámico en esta familia de soluciones. Por ejemplo, podría ocurrir que en \mathcal{F}_{α} exista $\hat{\alpha} \in [\alpha_a, \alpha_b]$ (con su correspondiente solución $\hat{\mathbf{y}}(t)$) tal que los subgrupos de isotropías de las soluciones correspondientes al intervalo $[\alpha_a, \hat{\alpha})$ sean iguales al conjunto \mathcal{G} y que $\mathcal{G}_{\hat{\mathbf{y}}}$ sea un subconjunto propio de \mathcal{G} ⁹. Entonces diremos que en $\hat{\alpha}$ se produce una bifurcación denominada *ruptura espontánea de simetría*.

El grupo más simple de simetrías es el conjunto $\mathcal{G} = \{\mathbf{S}, \mathbf{I}\}$ con $\mathbf{S}^2 = \mathbf{I}$. Este grupo es denominado *grupo cíclico de orden 2* y es notado como \mathbf{Z}_2 . De existir una ruptura espontánea de simetría en este grupo, el subgrupo de isotropía $\mathcal{G}_{\hat{\mathbf{y}}}$ (correspondiente a la solución $\hat{\mathbf{y}}$ asociada al punto de bifurcación $\hat{\alpha}$) será el singulete $\mathcal{G}_{\hat{\mathbf{y}}} = \{\mathbf{I}\}$. La figura 3.12 muestra esquemáticamente esta situación en donde cada rama representa los dos grupos de isotropías presentes en el escenario planteado.

⁹Recordamos que A es un subconjunto propio de B si y sólo A es distinto del conjunto vacío y de B.

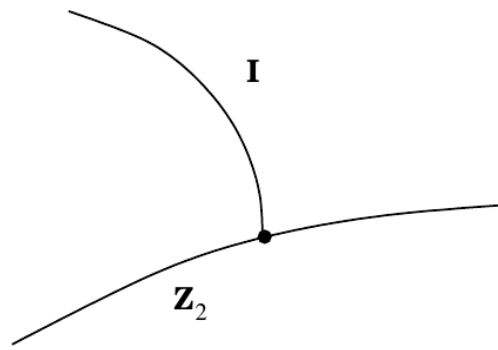


Figura 3.12: Rotura espontánea de la simetría Z_2

Para un estudio profundo de las bifurcaciones en presencia de simetrías se puede consultar [25] [26].

3.3. Nociones elementales de la sincronización

La bibliografía especializada, en general, presenta a la sincronización del siguiente modo [64][10]:

La sincronización se puede entender como la transición de un movimiento cuasiperiódico a un comportamiento periódico

en otras palabras:

La sincronización es un proceso en el cual, un conjuntos de objetos que oscilan independientemente unos de otros, de manera autosostenida y con órbitas estables, pasa a un régimen de ciclos límites estables cuando el sistema se acopla.

Queda claro desde este punto de vista que la sincronización no es un estado en sí mismo, sino que es un transición entre dos estados diferentes, el de un movimiento cuasiperiódico y uno periódico, representado este último por un ciclo límite. Geométricamente, el movimiento se visualiza en el espacio de fases sobre una superficie tórica. Cuando el sistema está desacoplado, generalmente, la solución del sistema cubre densamente dicha superficie. Cuando el sistema entra en un régimen de sincronización, luego de un tiempo (*término transitorio*), la

solución tiende asintóticamente a un ciclo límite sobre un toro.

Nuestro punto de vista es más amplio, más precisamente, nuestra definición considera ciclos límites independientemente de cómo estos hayan sido generados. En todo caso, nos interesa la transición para localizar el valor de los parámetros en donde se produce un cambio de orden en un movimiento ya sincronizado, en otros términos, nos interesa estudiar de manera continua caminos en el espacio de parámetros donde se produce un cambio de relación entre las frecuencias de los osciladores que se encuentran oscilando de tal manera que la solución periódica del sistema sea un ciclo límite. Recordemos nuevamente que, por ejemplo, en un sistema de dos osciladores acoplados, se considera que el sistema está en orden de sincronización $n : m$ ó n/m , si al proyectar dichos ciclos límites sobre los respectivos subespacios de fases, uno de ellos realiza n oscilaciones y el otro realiza m oscilaciones en el mismo período.

Construir una definición más amplia nos ha permitido cumplir con nuestro objetivo principal:

Entender la estructura y formas geométricas que adoptan las diferentes regiones en el espacio de parámetros donde el sistema presenta diferentes regímenes de sincronización.

Más específicamente:

Caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro diferente cuando al variar alguno de los parámetros del sistema se sale de una región y se ingresa a otra yuxtapuesta en el espacio de parámetros.

Más aún, hemos podido construir un algoritmo que permite graficar computacionalmente curvas que actúan de fronteras en el espacio de parámetros que separan regiones con diferentes órdenes de sincronización.

A su vez, estas fronteras nos han permitido explicar la dinámica subyacente en configuraciones de regiones en el espacio de parámetros sin aparente conexión entre sí.

3.3.1. Definición abstracta de sincronización

Damos a continuación la definición de sincronización presentada por Brown y Kocarev. Se asume el siguiente sistema dinámico autónomo de dimensión finita:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ es el campo de velocidades del sistema. El espacio de fases del sistema es el producto cartesiano de los subespacios de fases $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ correspondientes a los dos subsistemas. Brown y Kocarev se plantean cuatro tareas a tener en cuenta para poder decir que el sistema anterior se encuentra sincronizado. Esquemáticamente, estas tareas se resumen en poder proyectar la órbita solución del sistema en los respectivos subespacios de fases y luego poder detectar que un evento ocurre en un oscilador siempre que otro evento ocurre en el segundo oscilador. En general, los eventos son determinados por posiciones en el espacio de fases del sistema.

En esta tesis, uno de los objetos principales es la fracción que determina el orden de sincronización presente en el sistema. En consecuencia, los eventos estarán asociados a la cantidad de ciclos que se obtengan de la proyección del ciclo límite en los respectivos subespacios de fases.

Retornando a las cuatro tareas, éstas son:

1. Separar la dinámica del sistema en dinámicas correspondientes a los subsistemas, esto es, si llamamos $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ al conjunto de todas las soluciones de (3.18) y $\phi(\mathbf{z}_0)$ es una solución perteneciente a χ con la condición inicial $\mathbf{z}_0 = [\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0] \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, entonces $\phi_x(\mathbf{z}_0)$ y $\phi_y(\mathbf{z}_0)$ son las proyecciones de $\phi(\mathbf{z}_0)$ sobre \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} respectivamente.
2. Medir propiedades de los subsistemas en relación a, por ejemplo, frecuencias, o estados de fase, o número de oscilaciones, etc. Cualquier medida que se considere, deberá incluir el tiempo.

Se define una función $\mathbf{g}_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$. donde \mathbb{R} indica la variable tiempo y la imagen de $(\phi(\mathbf{Z}_0), t) \in \chi \times \mathbb{R}$ a través de \mathbf{g}_x será un vector k-dimensional que dará la propiedad a medir para el subsistema de variable \mathbf{x} . Similarmente se define \mathbf{g}_y para el segundo subsistema.

3. Comparar propiedades de los subsistemas dando alguna regla que permita establecer una relación entre las medidas de la propiedades de los subsistemas: para ello se debe construir una función independiente del tiempo $\mathbf{h} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$;

4. Finalmente, los dos subsistemas estarán sincronizados si y sólo si

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{Z}_0)), \mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{Z}_0)))\| = 0 \text{ ó } \|\mathbf{h}(\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{Z}_0)), \mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{Z}_0)))\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Las funciones $\mathbf{g}_{x,y}$ y \mathbf{h} se definen según el tipo de sincronización a estudiar.

Con estos preliminares podemos dar una primera definición de sincronización:

Definición 15. *Los subsistemas dados en (3.18) estarán sincronizados en la trayectoria $\phi(\mathbf{Z}_0)$ en relación a las propiedades \mathbf{g}_x y \mathbf{g}_y (definidas como en el punto 2), si existe un mapa $\mathbf{h} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{Z}_0)), \mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{Z}_0)))\| = 0 \text{ ó } \|\mathbf{h}(\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{Z}_0)), \mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{Z}_0)))\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma de \mathbb{R}^k .

3.3.2. Sincronización n:m

Pongamos en el contexto de esta tesis a la definición anterior. Aceptando entonces que la presencia de un ciclo límite como solución de nuestro sistema es equivalente a que el sistema esté en un régimen de sincronización, nos introducimos en una cuestión metodológica para la determinación del orden del fenómeno en cuestión.

Entonces, una vez proyectado el ciclo límite $\phi(\mathbf{z}_0)$ sobre \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} respectivamente, las funciones $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ darán el número de ciclos que se obtienen en cada proyección. Llamémoslos N_x y N_y respectivamente. En símbolos: $\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{z}_0)) = N_x$ y $\mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{z}_0)) = N_y$. La función \mathbf{h} que nos permite decir que el sistema está sincronizado en un orden $n : m$, estará supeditada a que se puedan encontrar enteros n y m tales que

$$\mathbf{h}(\mathbf{g}_x(\phi(\mathbf{z}_0)), \mathbf{g}_y(\phi(\mathbf{z}_0))) = nN_x - mN_y = 0$$

cosa que siempre será posible pues N_x y N_y son números naturales.

Con esta última ecuación, se da por finalizado el marco teórico básico que permitirá elaborar la propuesta metodológica del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Metodología de trabajo

Pese al amplio espectro de métodos analíticos existentes, resulta ineludible recurrir en muchos casos a métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, pues no existe casi nada de carácter general acerca de estos sistemas a diferencia de los lineales. La integración numérica es una herramienta eficaz si se quiere obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial; pero si lo que se quiere es conocer cómo cambia la dinámica del sistema cuando sus parámetros varían continuamente, se debe recurrir a los *métodos de continuación numérica*.

En un contexto más general que el de las bifurcaciones, la continuación numérica consiste en un algoritmo que permite construir computacionalmente una familia de soluciones de un sistema dinámico indexada por los parámetros del sistema. En nuestro trabajo las soluciones de interés son puntos fijos y principalmente ciclos límites. De esta manera el algoritmo numérico da cuenta de la permanencia de tales soluciones cuando los parámetros de la familia que las contienen varían de forma continua. Esas familias se pueden representar en una curva o conjunto de curvas definidas implícitamente que dependen de los parámetros del sistema. Para ambos tipos de soluciones podremos comenzar a trazar las curvas correspondientes con la técnica propuesta en 1979 por Herbert Bishop Keller (1925-2008) denominada *Continuación por Pseudo-Longitud de Arco* o *Algoritmo Predictor-*

Corrector [38]. La técnica monitorea simultáneamente las posibles bifurcaciones que el sistema podría presentar. Una vez detectada una de ellas, ya sea en la continuación numérica de un punto fijo o de un ciclo límite, se podrá construir una nueva familia de soluciones que mantenga invariante la condición que caracteriza a la bifurcación detectada. De esta manera se va completando el análisis de la dinámica subyacente en el sistema. Es esta técnica la que nos ha permitido cumplir con dos objetivos principales en esta tesis:

- *Caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro diferente.* Al variar algunos de los parámetros del sistema se sale de una región del espacio de parámetros con un determinado orden de sincronización y se ingresa a otra yuxtapuesta con diferente orden. Entre uno y otro orden se presenta un tipo de ciclo límite con características que se pueden sintetizar en una condición de tangencia a la sección de Poincaré.
- *Proponer una técnica de continuación numérica que permita construir fronteras en el espacio de parámetros que separen regiones con diferentes órdenes de sincronización.* Una vez identificada la condición de tangencia el siguiente paso es construir una familia de ciclos límites en la que todos sus elementos mantengan invariante dicha condición. Esta familia será la frontera buscada.

Los algoritmos se pueden traducir a diferentes códigos computacionales a gusto del investigador. Sin embargo nosotros no consideramos la elaboración de éstos. En este sentido, para aquellos que no quieran construirlos existen diferentes softwares especializados en sistemas dinámicos y bifurcaciones: Matcont, Content, Auto, Candys/QA, Janet, etc. La bibliografía consultada generalmente sugiere a Auto 07p como uno de los más estables y confiables softwares. Nosotros empleamos este último. El lector interesado puede consultar la bibliografía desarrollada por los propios autores del software: Doedel [19] en <https://sourceforge.net/projects/auto-07p/>. Para mayores detalles teóricos y

prácticos de la continuación numérica recomendamos consultar Kutznesov [45], Seydel [79].

4.1. Dos problemas de continuación numérica

Planteamos formalmente los dos problemas que hemos resuelto con la técnica de continuación numérica elaborada por Keller, esto es, la continuación de puntos fijos y la de ciclos límites.

Problema 1. *Continuación de puntos fijos.*

Habiendo obtenido un punto fijo, \mathbf{x}_0 , solución del sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p \text{ y } n, p \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

en donde el punto en la variable \mathbf{x} indica la derivada respecto al tiempo t , queremos construir la familia de puntos fijos indexada de manera continua por el parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ en alguna región de interés del espacio \mathbb{R}^p , con \mathbf{x}_0 perteneciendo a dicha familia.

La continuación numérica de órbitas periódicas es un problema de mayor complejidad. En principio, no existe un método general para encontrar ciclos límites. Para obtener una familia de ciclos límites es conveniente considerar el período como un parámetro independiente y hacer un reescalamiento del tiempo en (4.1) según se muestra a continuación:

$$\tau = \frac{t}{T}$$

de donde se deduce $\tau \in [0, 1]$. Asumamos que una de esas órbitas fue obtenida, denominémosla \mathbf{X}_0 . Con el reescalamiento hecho nuestro problema, en su expresión más general, se puede plantear como sigue.

Problema 2. *Continuación de ciclos límites.*

Habiendo obtenido un ciclo límite \mathbf{X}_0 de período $T = T_0$ en el valor $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$, solución del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p \text{ y } n, p \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

construir la familia de ciclos límites indexada en forma continua por el parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ en alguna región de interés del espacio \mathbb{R}^p , en donde \mathbf{X}_0 pertenece a dicha familia. \mathbf{f} tiene algún orden de derivabilidad respecto de \mathbf{x} y el punto en la variable \mathbf{x} indica la derivada respecto al parámetro τ .

Los sistemas (4.2) y (4.1) son equivalentes pues uno es un reescalamiento del otro. En consecuencia, las soluciones de uno son soluciones del otro y viceversa. Para solucionar este segundo problema deberemos agregar condiciones que den no sólo existencia sino unicidad en las soluciones, es lo que se dice, el problema debe estar *bien planteado*. Por otro lado, su discretización lo transforma en un problema algebraico en donde un ciclo límite es un conjunto de N puntos n -dimensionales. Esta transformación permitirá aplicar la técnica de Keller como si fuera un problema de continuación de puntos fijos.

Consideraciones generales sobre la continuación numérica

Nuestros dos problemas de continuación se reducen a un problema algebraico que lo podemos resumir en encontrar los ceros de la ecuación:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Generalmente uno comienza una continuación numérica variando una sola componente del vector paramétrico. Por tal motivo asumiremos $\alpha \in [\alpha_a, \alpha_b] \subseteq \mathbb{R}$. Comúnmente uno puede resolver este tipo de problemas sólo para un número finito de valores de α ; tomemos n valores: $\alpha_a = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha_b$. Suponga-

mos además que por algún método iterativo obtuvimos la sucesión $(\alpha_1, \|\mathbf{x}_1\|)$, $(\alpha_2, \|\mathbf{x}_2\|)$, ..., $(\alpha_n, \|\mathbf{x}_n\|)$, en donde, $\|\cdot\|$ es cualquier norma en \mathbb{R}^N . En la figura 4.1 aparece una gráfica posible con estos puntos. No los podremos conectar ingenuamente con ningún método de interpolación, pues nada nos garantiza que la línea que los una, sea una buena aproximación de la curva real, por más cercanos que estén los puntos unos de otros. Como se puede observar en estos pares ordenados, el parámetro es la abscisa pues se monitorea la dependencia funcional de \mathbf{x} respecto de α . De ahora en más, el contexto implícitamente dirá si estamos hablando de la sucesión de puntos en la continuación numérica o de las soluciones de \mathbf{f} .

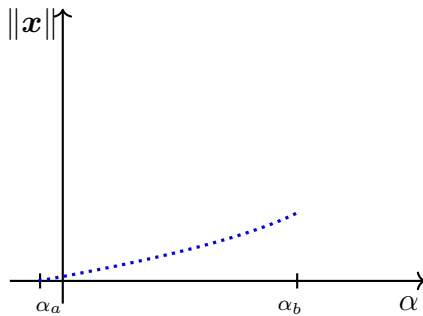


Figura 4.1: n puntos que solucionan la ecuación (4.1) obtenidos por simulación numérica.

Con técnicas de continuación numérica es esperable obtener una buena aproximación de la curva real sin ninguna necesidad de conocer la cuenca de atracción de las soluciones. Esto ya plantea una diferencia cualitativa importante respecto de la simulación numérica. En este sentido, en la figura 4.2 se ha dibujado la posible solución de (4.3) que contendría a los catorce puntos anteriores. Observe que esta solución posible está compuesta por dos curvas diferentes que se intersectan en un punto A y que hacen que existan valores de α para los cuales hay al menos tres soluciones de (4.3).

Siempre que se trabaje con un computador habrá que tener en cuenta que

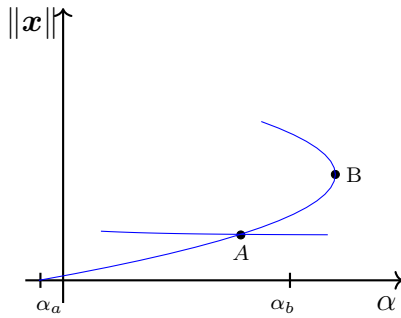


Figura 4.2: Posible solución de la ecuación (4.1) obtenida por continuación numérica.

aunque contemos con códigos que se ocupen de “casi todo”, su uso puede tener algunos inconvenientes, puesto que ningún estudio totalmente automatizado ofrece garantía ni de los resultados obtenidos, ni de una interpretación correcta de lo que el ordenador nos entregue. La experiencia del programador resulta esencial a la hora de interpretar y discutir resultados.

Para obtener gráficos próximos a las verdaderas curvas que dan las soluciones de (4.3) los métodos de continuación numérica implementados en el computador deberán tener en cuenta el teorema de la función implícita para ir monitoreando la dependencia funcional de $\|\mathbf{x}\|$ respecto del parámetro α .

Con este escenario formalicemos algunas ideas. Si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ es una función que admite derivadas continuas hasta el orden k .
- existe un punto $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}$.
- la matriz Jacobiana $\mathbf{f}_x := \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ tiene rango máximo, esto es $rg(\mathbf{f}_x | \mathbf{f}_\alpha) = n$ en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$, donde \mathbf{f}_α es la matriz de derivadas parciales del campo \mathbf{f} respecto de las componentes del vector paramétrico $\boldsymbol{\alpha}$

estos resultados ubican al problema bajo las hipótesis del teorema de la función implícita. En consecuencia existirá en un entorno U de $\boldsymbol{\alpha}_0$, una función $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\phi(\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{x}_0$, y $\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+p} / \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}\} =$

$\{(\phi(\alpha), \alpha) / \alpha \in U\}$. En este caso diremos que la solución (\mathbf{x}_0, α_0) “persiste” cuando α_0 varía.

Habiendo obtenido una solución, lo que sigue es construir una sucesión de puntos (\mathbf{x}_i, α_i) con $i = 1, \dots, N$ que aproxime a la curva que representa la familia de soluciones de la ecuación (4.3).

4.2. La técnica de Keller

La técnica de Keller resuelve en dos pasos el problema de comenzar a construir la sucesión de puntos (α_i, \mathbf{x}_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, todas soluciones de (4.3). Dicha técnica es denominada *algoritmo de continuación por pseudo-longitud de arco* o *algoritmo predictor-corrector*.

4.2.1. Continuación numérica en un parámetro

Asumamos que estamos bajo las hipótesis del TFI con $\alpha \in \mathbb{R}$. En términos geométricos existirá una curva diferenciable definida por α en un entorno de α_0 cuya gráfica se ubicará en \mathbb{R}^{n+1} o en un espacio bidimensional si graficamos $\|\mathbf{x}\|$ versus α . Pasemos a describir la técnica de Keller esquematizada en la figura 4.3.

Paso predictor:

Habiendo obtenido (\mathbf{x}_0, α_0) , solución de (4.3) con $\alpha \in \mathbb{R}$, calcularemos un punto $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha})$, que nos será útil para computar (\mathbf{x}_1, α_1) . Para ello resolvemos el siguiente sistema:

$$(\mathbf{f}_{\mathbf{x}} | \mathbf{f}_{\alpha})_{(\mathbf{x}_0, \alpha_0)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0$$

Este sistema es compatible, pues $(\mathbf{f}_{\mathbf{x}} | \mathbf{f}_{\alpha})$ tiene rango máximo, y esto significa que el núcleo de la transformación correspondiente tiene dimensión uno. Denotando a dicha solución como $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha})$, con $\|(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha})\| = 1$, esta será nuestra predicción. Gráficamente el vector $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha})$ es tangente a la curva definida por el TFI en (\mathbf{x}_0, α_0) .

Paso corrector:

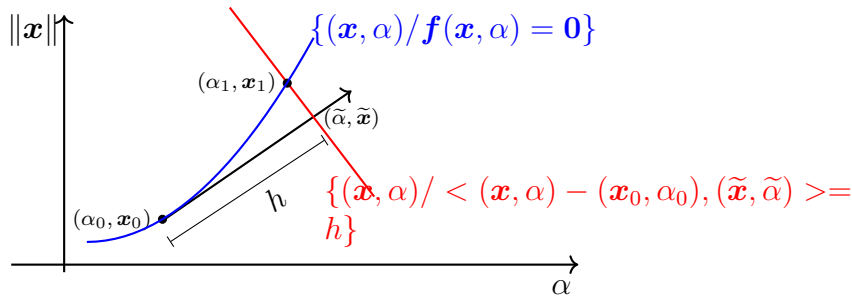


Figura 4.3: Esquema gráfico del algoritmo utilizado por AUTO 07p para la continuación numérica de puntos fijos o ciclos límites. El eje de abscisas corresponde al parámetro α ; en el eje de ordenadas ubicamos alguna norma de \mathbb{R}^n .

Haciendo uso de la predicción encontrada en el paso anterior, podremos encontrar el siguiente punto (\mathbf{x}_1, α_1) de la familia de soluciones en cuestión. Para obtenerlo, por algún método iterativo del tipo Newton resolvemos el siguiente sistema con $0 < h \ll 1$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) \\ \langle (\mathbf{x}, \alpha) - (\mathbf{x}_0, \alpha_0), (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}) \rangle - h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ representa a la familia de soluciones buscada. La ecuación $\langle (\mathbf{x}, \alpha) - (\mathbf{x}_0, \alpha_0), (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}) \rangle = h$, tiene como solución a los vectores (\mathbf{x}, α) tales que las proyecciones de $(\mathbf{x}, \alpha) - (\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ sobre el vector libre $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha})$ tienen módulo h . El punto (\mathbf{x}, α) que cumple ambas ecuaciones estará sobre la curva que define la familia de soluciones en cuestión. Iterando este proceso obtendremos la curva buscada.

¿Y si la dependencia funcional respecto al parámetro no existiera? La figura 4.2 muestra en los puntos A y B dos casos en los que esto sucede. En el punto A se produce una bifurcación de ramificación y en el punto B una bifurcación de tangencia. Aquí entra en juego una segunda diferencia con los métodos de simulación numérica. A medida que vayamos construyendo familias de soluciones, simultáneamente se buscarán las posibles bifurcaciones que en dichas familias se podrían presentar. Para detectarlas, los códigos computacionales tendrán que disponer de subrutinas que las contemplen. Estas subrutinas consisten en un con-

junto de funciones escalares denominadas *funciones de prueba* asociadas a cada tipo de bifurcación. Cuando alguna de estas funciones se anule significará que estaremos en presencia de la correspondiente bifurcación. Pero dar con estos puntos es prácticamente imposible. Veamos cómo ubicarlos. Una bifurcación será detectada entre dos puntos sucesivos \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_{k+1} de una curva de equilibrios o de ciclos límites, si alguna de las funciones de prueba, notémosla con la letra ψ , cambiara de signo, esto es, $\psi(\mathbf{x}_k) \cdot \psi(\mathbf{x}_{k+1}) < 0$. De ocurrir este hecho, el código deberá interpolar valores entre \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_{k+1} para lograr capturar con precisión predeterminada el punto de bifurcación. Este tipo de puntos está ejemplificado en la figura 4.2. En ella, en el punto A, se cruzan dos familias de soluciones y los códigos computacionales deberán ser capaces de cambiar de curva para saltar de una familia de soluciones a otra distinta. En tales puntos la dimensión del núcleo de la matriz jacobiana $(\mathbf{f}_x | \mathbf{f}_\alpha)$ debe ser por lo menos 2. En la misma figura, en el punto B ocurre que $rg(\mathbf{f}_x | \mathbf{f}_\alpha) = n$ y $rg(\mathbf{f}_x) = n - 1$, haciendo un intercambio adecuado de columnas en la matriz $(\mathbf{f}_x | \mathbf{f}_\alpha)$, nuevamente el problema estará bajo las hipótesis del teorema de la función implícita. Este intercambio de columnas se traduce en una rotación de la curva de soluciones en 90° .

Observación. *Queremos remarcar un aspecto del trabajo computacional. Hemos comentado que generalmente se comienza una continuación numérica, variando un solo parámetro del sistema. La idea es que en esa familia que se va construyendo se pueda detectar alguna bifurcación. Una vez detectada, el siguiente paso es activar un segundo parámetro de interés para obtener el gráfico de familias biparamétricas que mantengan invariante la bifurcación encontrada. Estos gráficos son denominados curvas de bifurcaciones.*

También podría ser que queramos detectar alguna característica en el objeto geométrico que estemos continuando que no se corresponda con ninguna bifurcación. Habiéndolo logrado, podremos activar un segundo parámetro de interés para comenzar a construir una familia biparamétrica de soluciones que mantengan invariante la característica encontrada.

Este protocolo de trabajo es el que hemos empleado para la obtención de nuestros resultados.

4.2.2. Continuación numérica en dos parámetros

Nuestros sistemas bajo estudio son biparamétricos¹. En consecuencia las fronteras que separarán en el espacio de parámetros a sistemas topológicamente equivalentes serán curvas. Estas curvas mantienen invariante la bifurcación detectada, esto es, las familias de soluciones ahora no sólo tendrán que verificar el sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{0}$ sino que también deberán satisfacer la ecuación escalar $\psi(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) = 0$. Resumiendo, el sistema algebraico a resolver será

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{0} \\ \psi(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) &= 0\end{aligned}$$

Este sistema está compuesto por $n + 1$ ecuaciones en un espacio $n + 2$ -dimensional con coordenadas $(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2)$.

Observación. *La continuación numérica en uno o dos parámetros se reduce en definitiva al problema de encontrar una curva $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definida por*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ con } \mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

Esto es un caso particular de los llamados problemas de continuación y la técnica de Keller, esquematizada en la figura 4.3, será nuestra herramienta fundamental de trabajo.

¹Recordemos que esencialmente hay dos parámetros fundamentales en el tipo de sincronización por nosotros estudiada, estos son, el parámetro de acople y el de diferenciación de frecuencias naturales.

4.3. Continuación numérica de puntos fijos

El Problema 1, esto es, el problema de la continuación numérica de puntos fijos, queda definido de tal forma que su solución es una directa aplicación del algoritmo de continuación por pseudo-longitud de arco a partir de un dato inicial (α_0, \mathbf{x}_0) . Previamente tendremos que elegir la componente paramétrica de interés sobre la que haremos la continuación manteniendo la otra componente constante. Notando α a la componente que variará en la continuación, el computador nos devolverá una secuencia finita de puntos fijos y de sus correspondientes parámetros: $\{(\alpha_i, \mathbf{x}_i)\}$, con $i = 1, \dots, N$. En general, en lugar de la sucesión mencionada, se toma esta otra, $\{(\alpha_i, \|\mathbf{x}_i\|)\}$, en donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma de \mathbb{R}^n . La bifurcación por antonomasia para el ingreso a un régimen de sincronización en la continuación de puntos fijos es la bifurcación de Hopf. Esto es, el punto de equilibrio pierde estabilidad provocando el nacimiento de un ciclo límite cuando un par de autovalores dependiente de los parámetros del sistema dinámico cruza el eje imaginario según lo predice el teorema 7 (teorema de Hopf). Una función de prueba posible para su detección propuesta por Kuznetsov en [44] es la siguiente:

$$\psi_H(\alpha_i, \mathbf{x}_i) = \prod_{j>k} (\lambda_j(\alpha_i, \mathbf{x}_i) + \lambda_k(\alpha_i, \mathbf{x}_i))$$

Esta función es real y diferenciable, y vale cero cuando un par de autovalores con parte real cero aparece en la ruta de equilibrios, es decir, cuando el sistema dinámico tenga un par de autovalores de la forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Puesto que también vale cero cuando $\lambda_1 = \kappa$ y $\lambda_2 = -\kappa$, con $\kappa \in \mathbb{R}$, en cuyo caso no se produce una bifurcación de Hopf, los códigos deberán considerar esta situación y observar también la parte imaginaria. Recordemos que detectar este punto es prácticamente imposible. Lo que ocurrirá en caso de presentarse la bifurcación en cuestión, en un paso (i) de la familia, $\psi_H(\alpha_i, \mathbf{x}_i)$ tendrá un signo diferente a $\psi_H(\alpha_{i+1}, \mathbf{x}_{i+1})$, en consecuencia el código computacional deberá interpolar valores entre α_i y α_{i+1} para lograr capturar con precisión predeterminada el punto de bifurcación.

Una vez detectada esta bifurcación el paso que sigue es construir en el espacio de parámetros (λ_1, λ_2) la familia de puntos fijos que mantienen constantemente cero a la función ψ_H . Sobre dicha curva nacen ciclos límites que serán tenido en cuenta en el estudio mismo de la sincronización en el sistema bajo estudio. En este caso, la técnica de Keller deberá ser aplicada al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{0} \\ \psi_H(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

en el que o bien α_1 o bien α_2 se mantiene constante. durante la continuación.

El programador deberá tener en cuenta que ψ_H también se anula cuando más de un par de autovalores cruza el eje imaginario, por ejemplo, podríamos pensar que estamos en una bifurcación de Hopf cuando en realidad estamos en presencia de una bifurcación doble Hopf, esto es, dos pares de autovalores cruzan el eje imaginario. Esta situación nuevamente nos pone en alerta al momento de interpretar directamente los resultados obtenidos por el ordenador. Siempre que se pueda, la teoría debe ser guía de cualquier búsqueda o en su defecto, tendremos que monitorear todos los autovalores.

4.4. Continuación numérica de ciclos límites

Como ya hemos mencionado, la continuación de ciclos límites es más compleja que la de puntos fijos. En principio, no existe un método general para encontrar ciclos límites. Si el sistema tuviera como solución estable a una de estas funciones, uno podría intentar encontrarla por simulación numérica como un problema de valor inicial. Claro está que dicha condición inicial deberá estar en la cuenca de atracción de la órbita periódica, cuestión ésta que no es trivial. La ubicación de los ciclos límites puede plantearse localmente suponiendo que la posición de una de estas soluciones es conocida aproximadamente, entonces por algún método iterativo obtenerla con mayor precisión. Luego, este ciclo límite, con su correspondiente

valor λ_0 , será el objeto inicial en la continuación numérica y se tomará como una aproximación para el ciclo en el siguiente valor λ_1 .

4.4.1. Obtención de ciclos Límites en un punto Hopf

Conociendo el punto de equilibrio \mathbf{x}^* y el parámetro λ_0 donde se produce la bifurcación de Hopf, el teorema 7 predice el período T_0 del ciclo límite naciente que es cuasiarmónico. Esta información nos permitirá conseguir una buena aproximación discretizada de dicho ciclo límite empleando algún método iterativo del tipo Newton-Raphson. Previamente realizamos una reparametrización del tiempo t haciendo la siguiente transformación:

$$\tau = \frac{t}{T_0}$$

de donde se deduce $\tau \in [0, 1]$. Con este cambio de escala nuestro problema consiste en:

Problema 3. *Encontrar el ciclo límite $\Gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, solución del sistema:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda_0) \quad (4.6)$$

con \mathbf{f} diferenciable, con la condición de contorno:

$$\Gamma(0) = \Gamma(1) \quad (4.7)$$

Asumiendo que el problema tiene solución, para encontrarla numéricamente realizamos la siguiente partición uniforme en τ con paso $h = 1/N$:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 = \tau_0 + h < \tau_2 = \tau_1 + h < \dots < \tau_N = \tau_{N-1} + h = 1$$

Con esta partición, un ciclo límite $\Gamma(\tau) = (\gamma_0(\tau), \gamma_1(\tau), \dots, \gamma_n(\tau))$, solución de (4.6) con la condición de contorno (4.7), en su versión discretizada puede ser

considerada con un conjunto de $N + 1$ puntos n -dimensionales, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &:= \left(x_1(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0) \right), \quad \mathbf{x}^1 := \left(x_1(\tau_1), \dots, x_n(\tau_1) \right), \dots, \\ \mathbf{x}^N &:= \left(x_1(\tau_N), \dots, x_n(\tau_N) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Con esta notación, el Problema 3 en su versión discreta queda como se muestra a continuación:

Problema 4. (Versión discreta del problema 3).

Hallar las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^j - \mathbf{x}^{j-1} - hT_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}^{j-1}, \boldsymbol{\lambda}_0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^N = \mathbf{0} \quad j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (4.9)$$

Este último problema lo podemos resolver con algún método iterativo del tipo Newton. Al ser la solución del Problema 3, un ciclo límite cuasiarmónico, podremos tomar como partida en el proceso iterativo a un conjunto de $N + 1$ puntos iniciales n -dimensionales sobre alguna circunferencia con centro \mathbf{x}^* y radio $\rho \ll 1$. Es esperable que el método converja a la solución exacta (discreta). Una vez obtenida esta solución con un error predeterminado, el siguiente paso es llevar adelante la construcción de la familia de ciclos límites que contiene como partida al ciclo nacido en la bifurcación de Hopf y monitorear si se produce alguna bifurcación.

4.4.2. Continuación numérica de ciclos límites

El Problema 2 de continuación de ciclos límites fue formulado como sigue: Habiendo obtenido un ciclo límite Γ_0 de período $T = T_0$ en el valor $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$, solución del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p \text{ y } n, p \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

construir la familia de ciclos límites indexada en forma continua por el parámetro λ en alguna región del espacio \mathbb{R}^p , en la que Γ_0 pertenece a dicha familia. El punto en la variable \mathbf{x} indica la derivada respecto al parámetro τ .

Vamos a resolverlo en el contexto de la continuación numérica en un parámetro.

Solución del Problema 2

Habiendo obtenido una solución periódica Γ_0 del sistema $\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ para algún $\lambda = \lambda_0$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ queremos construir la curva de ciclos límites variando alguna coordenada del parámetro λ . Para simplificar la notación asumamos $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir de Γ_0 , nos proponemos encontrar otra solución periódica Γ para $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda_0$ con $\Delta\lambda_0$ pequeño. Asumimos también que ambas soluciones son cercanas en período y forma geométrica. El problema se puede plantear como sigue:

Problema 5. (*Construcción de una familia monoparamétrica de ciclos límites*).

Dado un ciclo límite Γ_0 , de período T_0 , solución del siguiente sistema en $\lambda = \lambda_0$:

$$\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (4.11)$$

hallar otra solución $\Gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ próxima a Γ_0 , cercana en período y forma geométrica, tal que:

$$\Gamma(0) = \Gamma(1) \quad (4.12)$$

$$\int_0^1 \langle \Gamma'_0(\tau); \Gamma(\tau) \rangle d\tau = 0 \quad (4.13)$$

La condición (4.12) si bien se impone por periodicidad, no define una única solución de (4.11) puesto que cualquier punto de esas órbitas periódicas puede ser fase inicial de dicha solución, ya que $\Gamma(\tau) = \Gamma(\tau + 1)$ para todo τ . Para cum-

plir con la unicidad, se debe agregar la condición (4.13) denominada *condición de fase integral* (ver apéndice B para la justificación). El símbolo $\langle \cdot \rangle$ en el argumento de la integral indica el producto escalar habitual, en este caso, entre funciones vectoriales. Empleando la aproximación de un ciclo límite por $N + 1$ puntos n -dimensionales, la solución discreta al Problema 5 se traduce en (ver la justificación en el apéndice B):

Problema 6. (Versión discreta del Problema 5).

Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^j - \mathbf{x}^{j-1} - hT\mathbf{f}(\mathbf{x}^{j-1}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} & \text{con } j = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^N = \mathbf{0} \\ \sum_{j=0}^N \langle \mathbf{x}'_0(\tau_j); \mathbf{x}(\tau_j) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Tenemos así un sistema homogéneo que tiene $Nn+n+1$ ecuaciones con $Nn+n+2$ incógnitas. Este problema se ubica entonces en un problema de continuación numérica variando el parámetro λ y partiendo de una solución \mathbf{X}_0 (es el tipo de problema planteado en (4.4)). Considerando a la solución obtenida como objeto de lanzamiento para la siguiente órbita, obtendremos una familia uniparamétrica de órbitas periódicas que podrá ser graficada también en un espacio bidimensional en el que el eje de ordenadas podrá representar alguna norma o medida del ciclo límite y el eje de abscisas la variable independiente que será nuestro parámetro de interés. el software auto 07p, para una solución periódica $\boldsymbol{\Gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ generalmente emplea la norma

$$\sqrt{\int_0^1 \sum_{k=1}^n \gamma_k(t)^2 dt}$$

Al igual que para los equilibrios, si queremos considerar cuestiones dinámicas, los programas de cómputo deberán incluir en sus códigos, subrutinas que monitoreen multiplicadores de Floquet para poder determinar la estabilidad de los ciclos

límites a lo largo de una ruta. Además funciones de prueba se harán necesarias según cada tipo de bifurcación buscada.

Funciones de prueba para las bifurcaciones de ciclos límites

Las bifurcaciones consideradas en esta tesis, son todas de codimensión uno, esto significa que la diferencia entre la dimensión del espacio de parámetros y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación es uno. En este contexto daremos las funciones de prueba pertinentes a nuestro trabajo.

Para ciclos límites los programas computacionales deben trabajar con la matriz jacobiana $A = P_x$ del mapa de Poincaré asociada a cada órbita periódica que se va construyendo numéricamente. Para ver los algoritmos que obtienen esta matriz se puede consultar Kuznetsov [45] y Seydel [79]. Como ya hemos visto en el capítulo 3, los autovalores de A , también denominados multiplicadores de Floquet, dan cuenta de las posibles bifurcaciones que pueda tener la familia de órbitas que se va construyendo. Sean entonces $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ los correspondientes $n - 1$ multiplicadores de $A^{(2)}$. Según predice la teoría, existirán sólo tres maneras en las cuales una órbita puede tener una bifurcación de codimensión uno. Geométricamente, ésto se producirá si alguno de los multiplicadores $\mu(\lambda)$ llegara a atravesar el círculo unidad en alguna de las siguientes formas cuando el parámetro λ varíe:

1. Toma el valor $\mu = 1$, en cuyo caso se producirá una colisión de ciclos límites.
2. Si $\mu = -1$, se produce una bifurcación que duplica el período del ciclo.
3. Cuando los multiplicadores son de la forma $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ con $0 < \theta_0 < \pi$, en cuyo caso un toro nacerá en el espacio de fases.

Las funciones de prueba para la localización de las respectivas bifurcaciones son

²El n -ésimo multiplicador es $\mu_n = 1$.

- para la bifurcación de tangencia:

$$\psi_{tg}(\mathbf{x}, \lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j(\mathbf{x}, \lambda) - 1)$$

- para la bifurcación de duplicación de período:

$$\psi_{dp}(\mathbf{x}, \lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j(\mathbf{x}, \lambda) + 1)$$

- para la bifurcación toro

$$\psi_{tr}(\mathbf{x}, \lambda) = \prod_{j < k < n} (\mu_k(\mathbf{x}, \lambda) \mu_j(\mathbf{x}, \lambda) - 1)$$

Análogamente a lo que hicimos con la continuación de puntos fijos en dos parámetros, una vez detectada una bifurcación en la familia monoparamétrica de ciclos límites que estamos construyendo, el paso que sigue es activar un segundo parámetro y construir una familia biparamétrica que mantenga invariante la bifurcación detectada. Esto se logra agregando al sistema planteado en el Problema 6 la función escalar de prueba correspondiente. En este caso obtenemos un sistema de $Nn + n + 2$ ecuaciones con $Nn + n + 3$ incógnitas, el cual se encuadra en el Problema de continuación que se podrá resolver con la técnica de Keller.

Con este último resultado damos por concluido el marco teórico mínimo necesario para interpretar los resultados obtenidos en esta tesis.

Capítulo 5

Resultados

Este capítulo muestra los resultados principales de esta tesis que fueron publicados en SIAM Journal on Applied Dynamical Systems en 2014 bajo el título “A Bifurcation Approach to the Synchronization of Coupled van der Pol Oscillators” [56]. El trabajo consistió en el análisis de las bifurcaciones presentes en un sistema compuesto por dos osciladores del tipo Van der Pol acoplados en velocidad. Este análisis se llevó a cabo para comprender la apariencia y estructura de las regiones en el espacio de parámetros, generado por el parámetro de acople μ y el parámetro de discrepancia de frecuencias naturales δ , donde la sincronización se presenta con orden $1 : m$, con $m \in \mathbb{N}$. Un análisis hecho con posterioridad a la publicación permitió descubrir regiones con orden $n : m$, en donde n aumenta hasta alcanzar a m en una secuencia que depende de si m es par o impar. Todas estas regiones incluyen multiestabilidad de soluciones y están formadas por clásicas lenguas de Arnold limitadas por curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas. En la parte superior de dichas lenguas existen curvas de bifurcaciones toro y curvas de puntos Hopf. Otras curvas de bifurcaciones se configuran en un proceso que permite explicar la formación de estructuras dinámicas, en nuestro caso, las lenguas de Arnold presentan subregiones con estructura de islas. Estas estructuras generalmente se definen como curvas cerradas en el espacio de parámetros.

Hemos mencionado a lo largo de esta tesis numerosos ejemplos de sistemas

oscilantes sincronizados. En particular, en las últimas décadas se han realizado un gran número de estudios para investigar la sincronización en el sistema cardiorrespiratorio. Los trastornos de la interacción fisiológica en este sistema son la causa de muchas disfunciones y patologías. Se hace necesario conocer las leyes de dicha interacción que aún en estos días siguen siendo desconocidas [89]. Por un lado interesa conocer el orden de sincronización $n:m$ presente en diferentes situaciones, por citar algunos ejemplos, meditación [18]; sueño [96], etc. Por otro lado también interesa la transición entre los diferentes órdenes alcanzados, por ejemplo, en cirugías [82]. Nuestra definición de movimiento sincronizado a partir de la caracterización hecha en 3.3.1 nos ha permitido ampliar las regiones de sincronización más allá de las lenguas de Arnold. Con esta definición, logramos caracterizar la transición entre diferentes órdenes de sincronización. Hemos denominado *condición geométrica de tangencia* a dicha caracterización. Más aún, proponemos una técnica computacional innovadora que permite construir fronteras en el espacio de parámetros que separan diferentes órdenes de sincronización. Estas fronteras consisten en familias de ciclos límites indexadas por los parámetros δ y μ que mantienen invariante la condición de tangencia. De esta manera cumplimos los tres objetivos planteados en esta tesis:

1. Caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro orden diferente.
2. Entender la estructura dinámica de formas geométricas (no clásicas) que adoptan las regiones en el espacio de parámetros donde el sistema alcanza diferentes órdenes de sincronización.
3. Proponer una técnica computacional que permita la construcción de curvas (fronteras) en el espacio de parámetros que separan diferentes órdenes de sincronización aplicable a cualquier sistema de EDOs acopladas independientemente de la dimensión (finita) y del tipo de acople.

5.1. Estructura dinámica y orden de sincronización

En esta sección comenzamos el análisis de nuestro modelo. Se construyen curvas de bifurcación en dos parámetros: de Hopf, de toro y silla-nodo de órbitas periódicas formando las lenguas típicas de Arnold con presencia de islas en su interior. Por último, se analiza la transición de un orden de sincronización a otro diferente y definimos el orden de sincronización presente en el sistema.

5.1.1. Modelo

El sistema bajo estudio viene dado por dos ecuaciones del tipo van der Pol acopladas en modo disipativo¹:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0 \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde $\lambda_{1,2}$ son los *parámetros de control de la bifurcación de Hopf* respectivamente para cada subsistema, δ es el *parámetro de discrepancia de frecuencias* e indica cuán diferentes son las frecuencias naturales de cada oscilador (se toma $\delta > -1$ para que el sistema tenga sentido físico), y μ es el *parámetro de acople*.

Puesto que la existencia o no de sincronización depende esencialmente de μ y δ , fijamos $\lambda_1 = 1,25$ y $\lambda_2 = 1$ como caso testigo. De este modo el espacio de parámetros donde se estudiamos la dinámica es el plano (δ, μ) . Haciendo el

¹Hemos encontrado un comportamiento dinámico de mayor riqueza en este modelo que en el acoplado en posición (acople reactivo).

cambio de variables $\dot{x} = x_1$ y $\dot{y} = y_1$, el sistema (5.1) queda como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x_1 \\ \frac{dy}{dt} &= y_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= (\lambda_1 - x^2)x_1 - x - \mu(x_1 - y_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= (\lambda_2 - y^2)y_1 - (1 + \delta)y - \mu(y_1 - x_1)\end{aligned}\tag{5.2}$$

En concordancia con la estrategia metodológica desarrollada en el capítulo 4, se comenzó en el modo habitual, buscando puntos de equilibrio, hacer continuación de estos en un parámetro intentando encontrar bifurcaciones, en particular nos interesa la bifurcación de Hopf para dar comienzo a la búsqueda de ciclos límites².

5.1.2. Continuación de puntos de equilibrio

Este tipo de continuación numérica corresponde al Problema 1 que hemos planteado en la metodología de trabajo. El sistema tiene un único punto fijo para todos los valores reales que tomen δ y μ , este el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$. Comenzamos la continuación numérica del único punto fijo desde los valores iniciales $\delta = 10$ y $\mu = 2$. A medida que reducimos cualquiera de esos parámetros, el equilibrio pierde su estabilidad a través de una bifurcación de Hopf donde un par de valores propios complejos conjugados cruza el eje imaginario con velocidad distinta de cero. Allí entonces nace un ciclo límite cuyo primer coeficiente de Lyapunov resultó negativo. El signo indica que la bifurcación es supercrítica y en consecuencia la órbita periódica que nace es estable. Esta bifurcación se puede continuar en dos parámetros obteniéndose la primer curva (superior) de puntos de

²Otra manera de estudiar este fenómeno es hacer crecer el parámetro μ desde cero, valor éste en el cual los osciladores están desacoplados pero presentan ciclos límites nacidos de las respectivas bifurcaciones de Hopf controladas por $\lambda_{1,2}$. De este modo la sincronización puede ser entendida como la transición de un movimiento con dos frecuencias naturales diferentes desarrollado sobre un toro a un movimiento que tiende a un ciclo límite sobre dicho toro [64].

bifurcación Hopf, en color verde en la Figura (5.1). Para ello el software trabaja con la técnica de Keller aplicada a un sistema algebraico del tipo (4.5) mostrado en el capítulo anterior. Dicha curva, separa el espacio en dos regiones. Una región coloreada en amarillo. Allí el punto fijo es estable pues todos los autovalores del sistema linealizado tienen parte real negativa. En esa región, las soluciones oscilatorias se extinguen; a esa porción del plano se la denomina *área de extinción de las oscilaciones*. Si el sistema no estuviese acoplado, los subsistemas tendrían respectivamente ciclos límites estables (ver apéndice C), pero el acople produce que esas oscilaciones desaparezcan. La segunda región, en color blanca, es la región en donde se presentan oscilaciones.

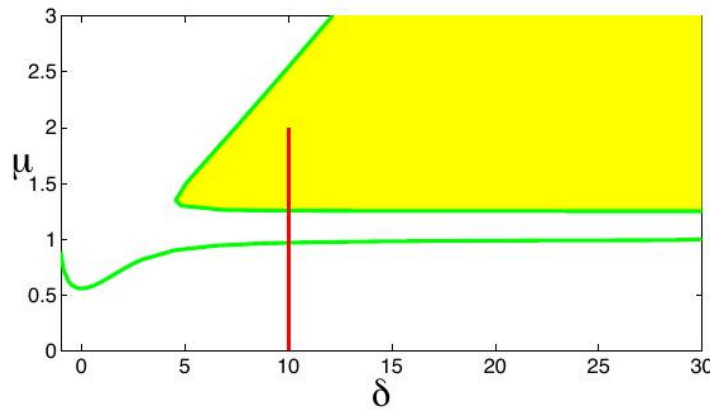


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación para el único punto de equilibrio. El segmento rojo indica la continuación que se construyó para dicho punto fijo. La región amarilla se corresponde con la estabilidad del origen; ninguna oscilación está presente. La curva de color verde más alta es la primera bifurcación (supercrítica) de Hopf y la curva verde más baja corresponde a la segunda bifurcación de Hopf.

Al disminuir aún más el valor de μ , el origen presenta una segunda bifurcación de Hopf en la que el otro par de valores propios complejos conjugados cruza el eje imaginario, lo que significa que el equilibrio ya inestable se vuelve doblemente inestable. También continuamos esta segunda bifurcación en los parámetros δ y μ obteniéndose la segunda curva (inferior) de puntos de bifurcación Hopf, también en color verde. Ambas curvas parecen encerrar una banda de longitud constante

y que se extiende hacia valores grandes de δ . El siguiente paso fue construir familias de ciclos límites nacidos en la curva superior de puntos Hopf variando el parámetro μ .

5.1.3. Continuación de órbitas periódicas

La construcción de las familias ciclos límites se hicieron tomando como partida a los nacidos en la curva superior de puntos Hopf. AUTO obtiene dichos ciclos con la técnica desarrollada en 4.4.1, Problema 4 descrito en el capítulo metodológico. Habiéndolos obtenidos, la continuación numérica se realiza según el Problema 6 presentado en el mismo capítulo.

Primer ruta de órbitas periódicas

Se comenzó la construcción de la familia de ciclos límites variando μ y fijando $\delta = 10$. El ciclo límite seleccionado como objeto de partida en la continuación numérica se corresponde en la Figura 5.1 con el punto de intersección del segmento rojo con la curva superior de puntos Hopf. De esta manera, esta nueva familia se superpone parcialmente en el espacio (δ, μ) con la de puntos fijos³. El diagrama de bifurcación correspondiente a esta familia es mostrado en la Figura 5.2 donde se grafica la norma dada por AUTO para los ciclos límites en función del parámetro μ . Cada punto de esta curva representa una órbita periódica que es el objeto geométrico que se está continuando y la línea punteada indica la inestabilidad de dichas órbitas mientras que la línea continua indica la estabilidad de las mismas. Se puede observar próximo a $\mu = 1$, un lazo con tres cambios de estabilidad. El primer cambio se produce en un punto límite de órbitas periódicas indicado como LP1 alrededor de $\mu = 0,9$ donde la curva hace un retroceso y pierde estabilidad mientras que el parámetro μ aumenta. La curva sigue hasta un segundo punto límite LP2 donde las órbitas recuperan su estabilidad y vuelve a disminuir el valor

³Puesto que los ciclos límites generados a partir de la bifurcación de Hopf no se encuentran sobre superficies tóricas, este contexto dinámico hace que bajo la definición clásica, no se esté hablando de sincronización.

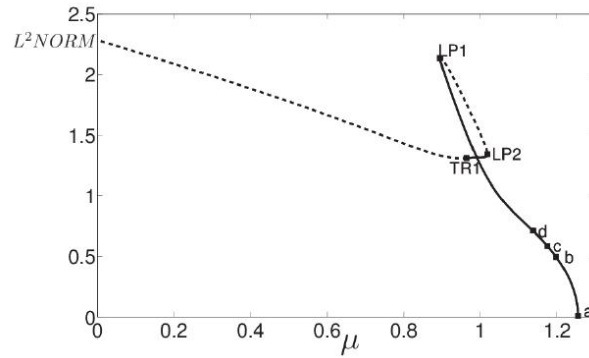


Figura 5.2: Diagrama de la continuación numérica de ciclos límites nacidos en la curva superior de puntos Hopf variando μ y fijando $\delta = 10$ y sus bifurcaciones: de punto límite (LP1 y LP2) y bifurcación toro (TR1).

μ ya con línea llena hasta que pierde nuevamente estabilidad en una bifurcación toro TR1, donde los multiplicadores de Floquet se alejan del círculo unitario con parte imaginaria distinta de cero. Luego la curva continúa hasta el desacople del sistema. Nótese que en el intervalo $[LP2, TR1]$ el sistema es biestable y si se quisiera capturar estas órbitas mediante simulación numérica dependerá de la base de atracción para ellas; pero debido a que el espacio de fases es \mathbb{R}^4 , se plantea un problema difícil de resolver. Esto muestra una de las ventajas de la continuación numérica frente a la simulación numérica.

Sobre dicha curva se indican puntos con las letras a-b-c-d correspondientes a soluciones particulares a las que se hará referencia de aquí en más. Estos valores no son arbitrarios, se seleccionaron para poder visualizar el comportamiento geométrico de las órbitas cuando se modifica el parámetro μ . El siguiente paso en la búsqueda de estructura dinámica es continuar en dos parámetros las bifurcaciones de punto límite y toro de ciclos límites.

5.1.4. Continuación en dos parámetros de bifurcaciones de ciclos límites

Bifurcación de punto límite - lenguas de Arnold

La continuación de ciclos límites nacidos en la curva superior de puntos Hopf con diferentes valores de δ (constantes), dio lugar a otras familias de órbitas periódicas. En algunas de ellas se obtuvo un bucle como el de la Figura 5.2, en la cual dos bifurcaciones de punto límite de ciclos límites fueron detectados. Para cada una de estas familias se realizó la continuación de las bifurcaciones LP1, LP2 en los parámetros δ y μ . Dichas continuaciones dieron como resultado tres regiones limitadas por curvas de puntos de bifurcación de sillan-nodos de órbitas periódicas coloreadas en verde, azul y negro. La Figura 5.3 las muestra. Estas tres regiones, para pequeños valores de μ se conocen como lenguas de Arnold y tienen un único punto de contacto con el eje δ , esto es, cuando $\mu = 0$.

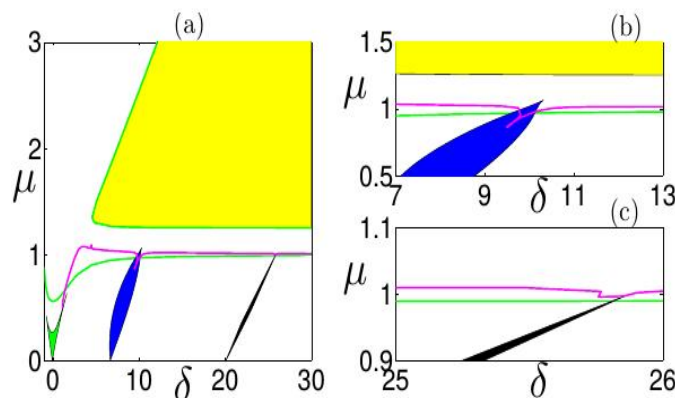


Figura 5.3: Espacio de parámetros: (a) Continuación en los parámetros (δ, μ) de las bifurcaciones LP1, LP2 dando lugar a las típicas lenguas de Arnold. En verde, la continuación para $\delta = 0$, en azul para $\delta = 10$ y en negro para $\delta = 25.5$. En magenta la curva representa la bifurcación local toro de órbitas periódicas. Las Figuras (b) y (c) muestran la parte superior de las lenguas para remarcar la interacción entre la bifurcación toro y la lengua con su terminación angulosa

Para comenzar a indagar qué ocurre en cada lengua de Arnold obtuvimos ciclos límites en el interior de cada una de las tres regiones. Luego proyectamos cada

órbita periódica sobre los subespacios de fases (x, \dot{x}) y (y, \dot{y}) . Estas proyecciones nos permiten observar el movimiento de cada oscilador por separado y en cada lengua respectivamente. La Figura 5.4 muestra tres de esos resultados, cada uno correspondiendo a cada lengua.

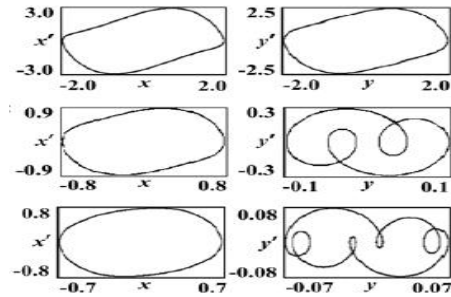


Figura 5.4: Proyección de ciclos límites sobre los subespacios (x, \dot{x}) y (y, \dot{y}) . Superior: región 1:1 - Medio: región 1:3 - Inferior: 1:5

Las formas que adoptan las soluciones proyectadas en cada subespacio muestran que mientras el oscilador de variables x, \dot{x} realiza siempre un giro, el segundo oscilador, realiza 1, 3 y 5 giros según en cuál región los parámetros se hallen. Decimos que el sistema se encuentra respectivamente en órdenes de sincronización 1:1, 1:3 y 1:5 ubicadas respectivamente en la región verde, azul y negra de la Figura 5.3.

Nacimiento de las lenguas de Arnold

A medida que μ se aproxima a cero, las proyecciones sobre el espacio (y, \dot{y}) , en cada una de las lenguas, se hacen más regulares, esto es, cada ciclo o giro de 360° que realiza el segundo oscilador es similar, a diferencia de lo que muestra la Figura 5.4 para valores relativamente grandes de μ . Si $\mu = 0$, el sistema está desacoplado y en consecuencia, las soluciones proyectadas en cada subespacio de fases, son dos ciclos límites estables e independientes (ver la justificación en el apéndice C, sección C.1). Para el sistema desacoplado, llamemos T_0 al período de oscilación del primer subsistema de variables x y x_1 que se mantiene constante para todo

valor de δ mientras μ valga cero; notemos como T al período del segundo subsistema. Observemos que T varía según lo hace δ . Los puntos de contacto de las lenguas con el eje δ en $\mu = 0$ pudieron ser estimados computando la razón T_0/T cuando los osciladores están desacoplados versus el parámetro δ . Esto nos permite orientar la búsqueda de diferentes órdenes de sincronización. En la gráfica 5.5, podemos observar el nacimiento de la lengua de la región 1:1 en la preimagen de $T_0/T = 1$, es decir, en $\delta \approx 0$; el nacimiento de la lengua de la región 1:3, en la preimagen de $T_0/T = 3$, esto es, en $\delta \approx 8$; etc.

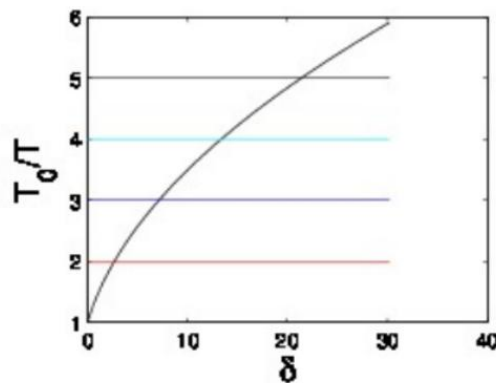


Figura 5.5: T_0 es el período empleado por el oscilador 1 que se mantiene constante mientras δ varía. $T_0/T = 1$ en $\delta \approx 0$ - $T_0/T = 3$ en $\delta \approx 8$ - $T_0/T = 5$ en $\delta \approx 20$.

El cociente T_0/T , o bien es racional, o bien no lo es. En ambos casos la dinámica se desarrolla sobre una superficie tórica, aunque el movimiento de cada oscilador es independiente del otro pues el sistema está desacoplado. Si T_0/T fuera racional, esto es $T_0/T = n/m$, con n y $m \in \mathbb{N}$, ambos osciladores compartirán un período en común dado por el mínimo común múltiplo de n y m . En consecuencia, la solución se visualizará como una curva cerrada sobre la superficie tórica. Si T_0/T fuera irracional, la órbita cubrirá densamente el toro, es lo que denominamos un movimiento cuasiperiódico. En el primer caso, una pequeña alteración de μ hace que el sistema inicie un proceso de sincronización. En cambio, los puntos de cuasiperiodicidad son inestables en el sentido que una pequeña modificación de μ podría resultar en un movimiento periódico.

Note el lector que si bien cada lengua está coloreada con un solo color, somos cuidadosos al mencionar que el orden $1 : k$ se da en el nacimiento, esto es, $\mu \approx 0$ como lo predice la teoría y lo muestra la Figura 5.5. Un análisis posterior exhibió para valores grandes de μ cambios en el orden de sincronización pasando de 1:3 a 3:3, o de 1:5 a 3:5 y luego a 5:5.

Bifurcación toro

La continuación de la bifurcación local toro en dos parámetros de órbitas periódicas correspondiente al punto TR1 en la Figura 5.2, es mostrada en la curva de color magenta en la Figura 5.3. Allí las subfiguras (b) y (c) muestran la parte superior de las lenguas para remarcar la interacción de estas con la bifurcación toro. Un análisis sistemático del comportamiento de las familias de órbitas periódicas que pasan por estas subregiones reveló más estructura en la parte superior de las lenguas azul y negra en la zona de interacción con la curva toro, a saber la aparición de islas de órbitas periódicas que se desprenden de la rama principal como se mostrará en el siguiente análisis.

5.1.5. Islas de órbitas periódicas

Si en un diagrama de bifurcación, una curva aparece cerrada y aislada, a esta figura se la denomina *isla*. La formación de islas depende esencialmente del valor del parámetro que se elige para lanzar una continuación y de la forma que van tomando las curvas sobre las que se están gestando las correspondientes islas. La detección de estos objetos no es inmediata, alegóricamente se puede decir que las islas se “esconden”. En nuestro problema aparecen islas de órbitas periódicas en las lenguas de Arnold correspondientes a los órdenes de sincronización 1:3 y 1:5.

¿Cómo lo hacen?, lo respondemos analizando en particular una subregión de lengua azul en la Figura 5.6.

Esta figura tiene una doble lectura, las subfiguras (a), (c) y (e) en la columna

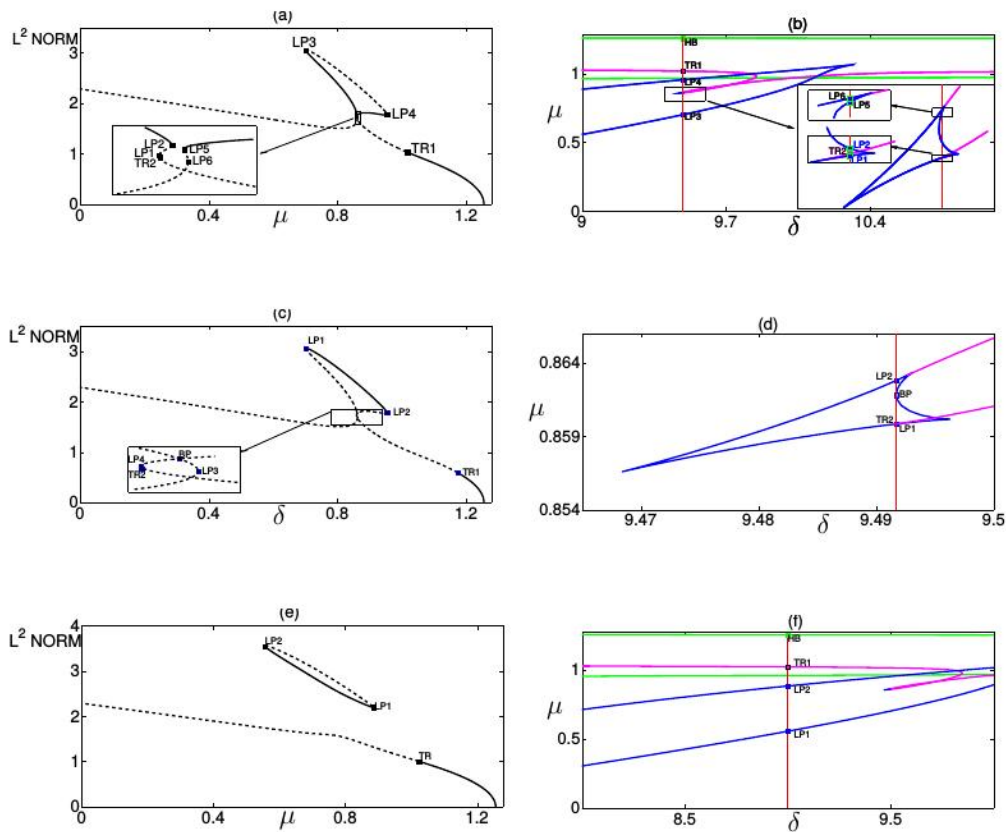


Figura 5.6: Formación de un islas de órbitas periódicas dentro de la lengua de sincronización 1 : 3. Los paneles de la izquierda ((a),(c),(e)) son diagramas de bifurcación para μ constante, mientras que los de la derecha ((b),(d),(f)) son diagramas de bifurcación de dos parámetros. El panel (a) corresponde a $\delta \sim 9,492$, (c) es para $\delta \sim 9,4917$, y (e) es para $\delta \sim 9,0$. En las subfiguras de la derecha, las curvas de puntos de silla de órbitas periódicas dentro de la lengua de sincronización están representadas en azul y presentan en el proceso de formación de islas una forma de cola de golondrina. En negro, las curvas de puntos toro. en verde puntos de equilibrio Hopf.

de la izquierda son continuaciones de ciclos límites con δ constante. Estas rutas verticales pasan por la lengua de orden 1 : 3. Correlativamente las subfiguras (b), (d) y (f) son diagramas de bifurcación en dos parámetros. La subfigura a corresponde (a) $\delta \sim 9,492$, la (c) es para $\delta \sim 9,4917$, y la (e) para $\delta \sim 9,0$. En (a), (b) y (c), se incluyen aumentos alrededor de los “cuellos” de los respectivos lazos para resaltar la interacción entre las diferentes curvas de bifurcación. En (a), aparecen 6 puntos de tangencia de ciclos límites, estos están

indicados como LP3, LP4 (estos son los más visibles) y LP1, LP2, LP5 y LP6 en la zona aumentada. Correlativamente en (b), se observa al hacer la continuación en dos parámetros de estas bifurcaciones que LP3, LP4 generan los bordes de la lengua $1 : 3$. A su vez, las otras LP están unidas por una misma curva con dos cúspides consecutivas, de ahí su nombre *cola de golondrina*⁴. Esta configuración de bifurcaciones tiene existencia en el lóbulo sobre el que se está produciendo un cuello de botella. Cuando este lóbulo se desprenda de la curva a la que pertenece, como se muestra en la subfigura (e), la isola estará formada.

Para $\delta \sim 9,492$, se puede observar que la isola está pronta a nacer, precisamente lo hará cuando los dos puntos límites LP2 y LP5 choquen en un punto ahora de ramificación indicado en (c) como BP. observe que al desaparecer esos dos puntos, hay una nueva indexación de puntos LP. El punto BP se corresponde con la tangencia de la línea vertical roja con uno de los lados de la cola de golondrina en (d).

Para valores aún más bajos de δ , panel (e), la isola ya está formada y está completamente separada de la rama principal. Este objeto aparece acotado por dos LP de órbitas periódicas etiquetados como LP1 y LP2, que si bien están marcados en (f), la continuación de la rama principal es incapaz de detectarla, es decir, pasa inadvertida la isola. En este sentido dijimos que se “esconden”. Más aún, resulta imposible capturar dicho objeto desde cualquier lanzamiento iniciado en la curva superior Hopf a partir de un valor menor a $\delta \sim 9,492$. Un analista desprevenido perdería información importante. Para capturarlo y dibujarlo como se muestra en (e), tendremos que tomar, por ejemplo, la órbita correspondiente a LP3 o a LP4, es decir, una órbita en los bordes de la lengua de arnold cuando el lóbulo en cuestión aún no se ha desprendido. Luego construir la familia de órbitas que mantienen invariante dicha bifurcación cuidando de acceder a los valores para los cuales el lóbulo se ha desprendido. A continuación, manteniendo δ constante

⁴Vale la pena aclarar que esta cola de golondrina tiene un tamaño muy pequeño y no aparece por casualidad. Estas regiones donde diferentes curvas de bifurcación se entrecruzan o apelmazan, debería llamar la atención del investigador; entonces allí debe refinar la búsqueda.

construir la correspondiente familia de órbitas periódicas. Al estar ubicados en la isola, esta última familia quedará graficada con una curva cerrada ⁵.

5.1.6. Sobre cómo medir el orden de sincronización. Caracterización de la transición de un orden a otro diferente

En la sección anterior se empleó el concepto *estado sincronizado* $1 : k$ sin comentar explícitamente cómo determinar dicho orden. Sabemos de acuerdo a la caracterización clásica de la sincronización que en el punto donde la lengua $1 : k$ nace, los osciladores comienzan a ajustar sus ritmos de modo tal que uno de los subsistemas gira k veces más rápido que el otro, pero no está claro qué sucede cuando μ va aumentando y alguno de los subsistemas cambia el valor k . Para comprender cómo el sistema realiza esa transformación elegimos una órbita periódica nacida sobre la curva superior de puntos Hopf. Construimos la familia vertical de ciclos límites correspondiente, disminuyendo el valor de μ y manteniendo δ constantemente igual a diez.

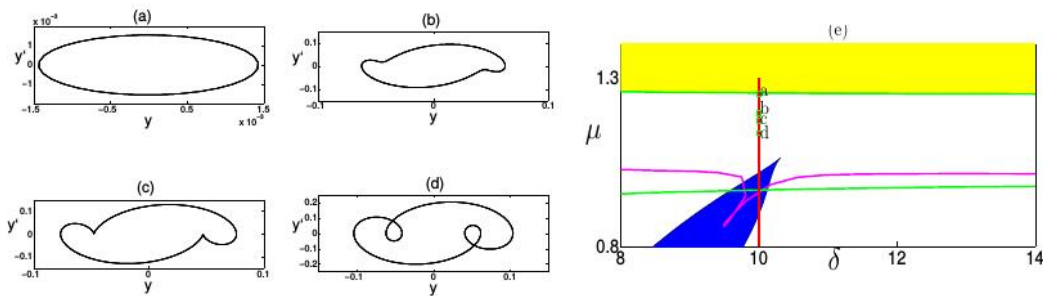


Figura 5.7: El segmento rojo en (e) es la ruta a la región de sincronización 1:3 coloreada en azul. En (a),(b),(c) y (d) se grafican proyecciones de las órbitas periódicas sobre el plano $y - \dot{y}$ correspondientes a los puntos homónimos indicados en el segmento rojo.

⁵El ojo del investigador debe estar alerta y prestar atención tanto a la evolución de las formas que vayan adoptando los diagramas de bifurcación, como al escenario que se vaya configurando con las bifurcaciones que van apareciendo en su proceso de búsqueda.

Para poder observar el comportamiento del segundo oscilador de variable y en la familia de ciclos límites, se han proyectado en el subespacio de fases (y, \dot{y}) las soluciones correspondientes a los puntos a, b, c y d, puntos— que por otro lado ya hemos indicado en la Figura 5.2. En las subfiguras (a), (b), (c) y (d) de la Figura 5.7 se muestran estas proyecciones. Podemos hacer las siguientes observaciones:

- En la subfigura (a) se ve una órbita redonda y pequeña como lo predice el teorema de Hopf para $\mu = 1,25494$.
- En (b) comienzan a desarrollarse dos lóbulos para el valor $\mu = 1.1977$.
- En (c), ambos lóbulos alcanzan en simultáneo y tangencialmente la sección de Poincaré $\dot{y} = 0$ con $\mu = 1,17460$.
- En el panel (d), los lóbulos (que ahora son bucles) caen por debajo del eje \dot{y} , con $\mu = 1,13711$.

Es importante señalar que todas las soluciones observadas a lo largo de la ruta seleccionada (y de todas las que hemos construido a partir de ciclos límites nacidos en la curva superior de puntos Hopf), exhiben una simetría orbital con centro en el origen, esto es, las órbitas proyectadas en los correspondientes subespacios de fases resultan invariantes frente a giros de 180° (veremos más adelante que esta propiedad no se verifica para un orden de sincronización 1:k, con k par). Esta simetría es heredada del sistema van der Pol sin acople. Para $\mu = 0$, nuestro sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 & (5.3) \\ \frac{dy}{dt} &= y_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= (\lambda_1 - x^2)x_1 - x - \mu(x_1 - y_1) \\ \frac{dx_1}{dt} &= (\lambda_2 - y^2)y_1 - (1 + \delta)y - \mu(y_1 - x_1) \end{aligned}$$

no se modifica con las transformaciones $(x, x_1) \rightarrow (-x, -x_1)$ o $(y, y_1) \rightarrow (-y, -y_1)$.

Sin embargo, cuando $\mu \neq 0$, (5.3) resulta invariante sólo si ambas transformaciones se realizan simultáneamente. Esto implica que si $(x(t), x_1(t), y(t), y_1(t))$ es solución, también lo será $(-x(t), -x_1(t), -y(t), -y_1(t))$. En consecuencia con lo desarrollado en 3.2.5 debe existir una matriz \mathbf{S} que satisface:

$$\mathbf{S}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{S}(\mathbf{x})) \quad (5.4)$$

y esta matriz es

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puesto que estamos refiriéndonos a órbitas periódicas y en función de la invariancia planteada, tenemos que (\mathbf{S}, π) es una simetría para las soluciones obtenidas. Esta propiedad queda expresada simbólicamente como se muestra a continuación:

$$(x(t), x_1(t), y(t), y_1(t)) = \mathbf{S}(x(t - \pi), x_1(t - \pi), y(t - \pi), y_1(t - \pi))$$

Esto implica que la tangencia mostrada en (c) se realiza en dos puntos. Es ahí cuando se produce la transición del orden 1 : 1 al orden 1 : 3. En otros términos, la transición queda caracterizado por una tangencia entre el ciclo límite y la sección de Poincaré $\dot{y} = 0$. Debemos tener en cuenta que en la subfigura (c) la órbita toca al eje $\dot{y} = 0$ de manera cuspidal debido a la proyección de la misma sobre el subespacio (y, \dot{y}) . En consecuencia, en esta familia de ciclos límites, ninguna bifurcación ocurre en la transición 1 : 1 a 1 : 3. Se puede observar también que con la definición de sincronización por nosotros adoptada en esta investigación, el sistema entra en un estado de sincronización de orden 1 : 3 antes de llegar a la lengua de Arnold correspondiente y antes de perder estabilidad (previo a producirse la bifurcación toro). Esta caracterización, desde un punto de vista clásico, queda fuera del fenómeno de sincronización pues el acceso no se

da por un ajuste de ritmos. Resumiendo, la tangencia mostrada en el panel (c) se puede considerar como el inicio de la sincronización con orden $1 : 3$ y por lo tanto se deberá agrandar la región de sincronización $1 : 3$ por fuera de la lengua de Arnold correspondiente a este orden.

En (d), el subsistema de variable y está realizando tres revoluciones, mientras que el otro subsistema sólo realiza una revolución; por lo tanto, el sistema acoplado ya ha ingresado a la región de orden $1 : 3$. Allí se puede observar que las órbitas cruzan el eje $\dot{y} = 0$ seis veces (tres veces en cada dirección) para un estado $1 : 3$. En general, para un cualquier orden $n : m$, la órbita proyectada en el subespacio (x, \dot{x}) cruzará $2n$ veces el eje $\dot{x} = 0$ y su proyección en (y, \dot{y}) cruzará $2m$ veces el eje $\dot{y} = 0$.

Con estos resultados mostrados, hemos cumplido el primero de los dos objetivos de esta tesis, el de caracterizar dinámica y geoméricamente la transición de un orden de sincronización a otro orden diferente. El problema que sigue es entonces determinar el conjunto de puntos del plano (δ, μ) que separa un orden de otro. En otros términos, construir la familia de órbitas periódicas que mantiene invariante la condición de tangencia. Esta se lleva a cabo en la siguiente sección.

5.2. Construcción de fronteras

En esta sección continuamos el estudio de nuestro modelo para cumplir con el segundo objetivo propuesto en esta tesis. Desde nuestro punto de vista, para estar en un estado sincronizado interesa que el ciclo límite sea estable, y esta condición es independientemente del modo en el que haya aparecido la órbita periódica. Este enfoque nos permitió ampliar las regiones en el espacio de parámetros más allá de, por ejemplo, las lenguas de Arnold. Se incorpora particularmente, una región de sincronización representada por la franja verde infinita de orden de sincronización $1 : 1$ limitada por las rectas $\mu = 1,25$ y $\mu = 1$. De este modo el ingreso a esta región no es un proceso de ajuste de ritmos como lo establece la

definición. clásica. Con nuestra definición, la bifurcación de Hopf (supercrítica) es otro mecanismo de ingreso a un estado de sincronización, en particular de orden 1:1. Esta frontera se contruye por una continuación numérica de puntos Hopf. Por tal motivo la incorporamos como tal a nuestros resultados y análisis.

La frontera que sigue ahora, es la que separa el orden 1 : 1 del orden 1 : 3. Para construirla tendremos que considerar la condición geométrica de tangencia presentada en la sección anterior. Una observación se hace necesaria, aunque no fue el caso, esta condición de tangencia no necesariamente se corresponde con la estabilidad de las órbitas periódicas, lo que haría a la transición 1 : 1 a 1 : 3 inobservable. Consecuentemente, para tener un *estado sincronizado observable* 1 : k , se necesitan cumplir dos condiciones simultáneamente

- La órbita debe ser estable.
- La familia de ciclos límites que se esté continuando tendrá que haber cruzado la curva de condición de tangencia.

la segunda condición nos dice que en la proyección del ciclo límite sobre el subespacio de fases de interés, se debe haber formado el bucle que cruce la sección de Poincaré $\dot{y} = 0$ como se ha mostrado en la Figura 5.7.

5.2.1. La técnica que permite construir fronteras

Resultará muy útil construir la familia de ciclos límites que mantenga invariante la condición de tangencia y así poder graficar una frontera que separe diferentes órdenes de sincronización en el plano (δ, μ) . La construcción de esta frontera implica resolver un problema con condiciones de contorno. Siguiendo la metodología expuesta en el Capítulo 4 primeramente realizamos una reparametrización del tiempo t haciendo la siguiente transformación:

$$\tau = \frac{t}{T_0}$$

de donde se deduce $\tau \in [0, 1]$. El sistema (5.2) queda como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Tx_1 \\ \frac{dy}{dt} &= Ty_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= T[(\lambda_1 - x^2)x_1 - x - \mu(x_1 - y_1)] \\ \frac{dy_1}{dt} &= T[(\lambda_2 - y^2)y_1 - (1 + \delta)y - \mu(y_1 - x_1)]\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para que este problema quede bien planteado seis condiciones de contorno se deben agregar:

- Cuatro condiciones son impuestas por la periodicidad de las soluciones.

$$x(0) = x(1)\tag{5.6}$$

$$x_1(0) = x_1(1)$$

$$y(0) = y(1)$$

$$y_1(0) = y_1(1)$$

- La quinta desempeña un papel equivalente a la condición de fase integral que planteamos en el Problema 5 del capítulo 4

$$\dot{y}(0) = 0\tag{5.7}$$

Esta condición se denomina *condición de fase de Poincaré* en la estándar continuación de órbitas periódicas. Impone que en el tiempo cero se tenga velocidad cero y se evite el cambio de fase.

- La última condición de frontera es la crucial e impone la condición de tangencia geométrica del lóbulo al comienzo (y al final debido a la periodicidad)

de la órbita periódica.

$$\dot{y}_1(0) = 0 \quad (5.8)$$

La órbita desde la cual comenzaremos el lanzamiento para la continuación numérica será una órbita que cumpla estas seis condiciones. Así entonces, el problema (5.5) con las condiciones de contorno (5.6)-(5.7)-(5.8) está bien planteado.

Una cuestión computacional a tener en cuenta cuando se realiza la continuación en AUTO: el número de parámetros libres (n_{par}) con los que se realiza la continuación debe ser igual al número de condiciones de contorno (n_{bc}) menos la dimensión del sistema (n) más uno; en nuestro caso, en fórmula

$$n_{par} = n_{bc} - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

Estos tres parámetros libres sobre los que se realiza la continuación son δ , μ y T , que, en general, cambian a lo largo de la curva.

Los resultados de esta continuación se muestran en la Figura 5.8 para $k = 3$ (curva azul) y $k = 5$ (curva negra). En las dos curvas obtenidas (frontera 1:3 y 1:5, las líneas discontinuas denotan la inestabilidad de la solución y como se discutió anteriormente, no depende de la tangencia, sino de haber cruzado las curvas de toros. Los puntos de contacto entre las curvas $k = 3$ y $k = 5$ deben ser analizados numéricamente con cuidado cuando se implemente la técnica de Keller, ya que ambas curvas periódicas cumplen simultáneamente las mismas condiciones de contorno.

Por encima de estas curvas, el sistema está en un orden 1 : 1, la tangencia aún no se ha producido. Tan pronto se la cruce, si la órbita es simétrica, dos lóbulos cruzan el eje $\dot{y} = 0$.

La Figura 5.9 muestra las nuevas regiones de sincronización que se acaban de explicar. La forma puntiaguda de las lenguas de órdenes 1 : 3 y 1 : 5 ya no están presentes, ya que la región ha sido agrandada por la parte superior triangular. Estas cúspides triangulares no conectadas a la curva de Hopf, rodeadas desde

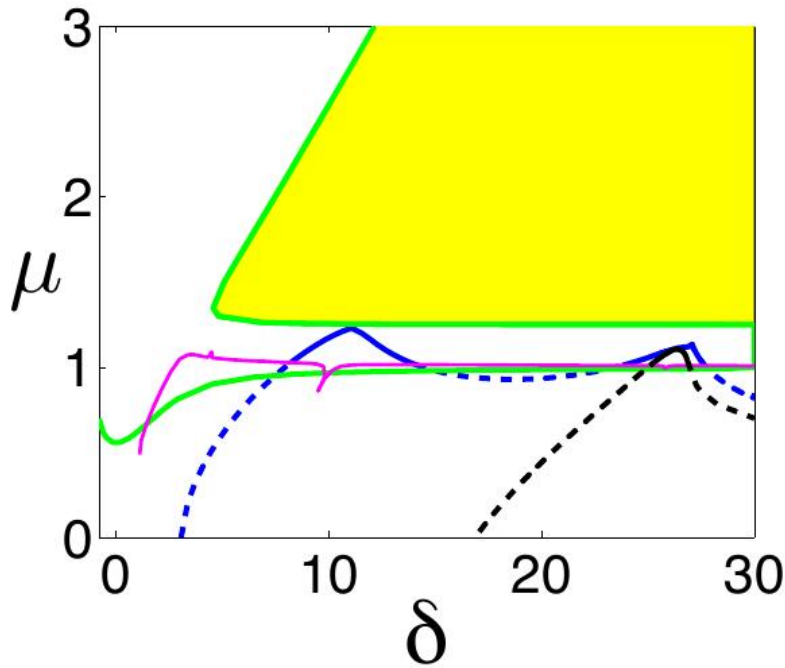


Figura 5.8: Curvas donde se cumple las condiciones de tangencia que bordean las regiones de sincronización 1 : 3 (azul) y 1 : 5 (negro). Las líneas sólidas y discontinuas denotan respectivamente estabilidad e inestabilidad.

arriba por la condición de tangencia y desde abajo por una curva de bifurcación de toro llamaron la atención de otros autores y fueron denominadas *degraded top* [44]. Por otro lado, desaparecen cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, las dos curvas de bifurcación Hopf graficadas en la Figura 5.1 colisionan produciéndose una bifurcación doble Hopf.

En resumen, en esta sección hemos desarrollado el principal aporte en esta investigación, esto es, una técnica computacional que construye fronteras en el espacio de parámetros que separan diferentes órdenes de sincronización. Dicha técnica consiste en plantear un adecuado sistema de ecuaciones con condiciones de contorno. Estas condiciones son fijadas por la periodicidad del ciclo límite, por la necesidad de unicidad de la solución, denominada condición de fase de Poincaré, y por último una condición de tangencia que da cuenta de la transición de un orden a otro diferente. La familia de órbitas que mantiene invariante esta última

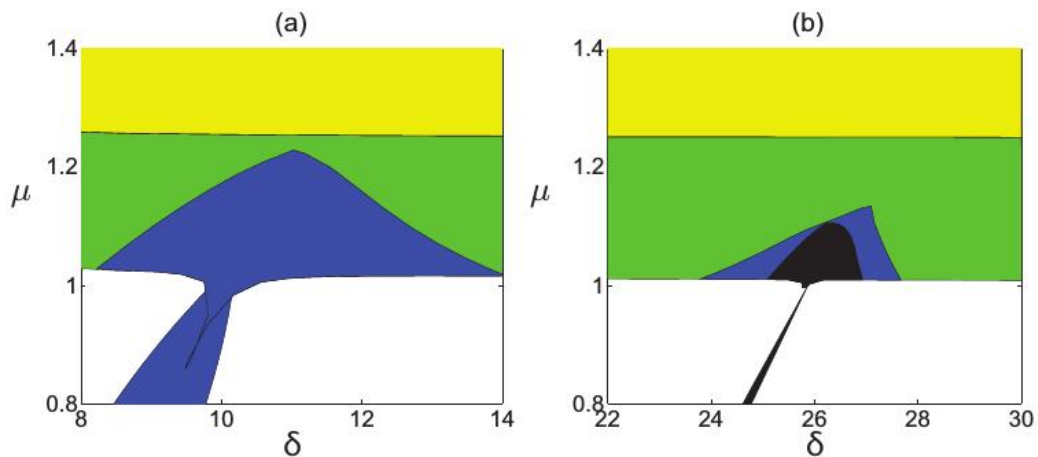


Figura 5.9: La estructura de la parte triangular superior para $k = 3$ (a) y $k = 5$ (b). La región azul corresponde al orden $1 : 3$, mientras que la negra corresponde al orden $1 : 5$.

condición, resulta ser una frontera que separa diferentes órdenes de sincronización en el espacio (δ, μ) . Una cuestión a tener presente en la construcción es que puede haber puntos de tangencia entre fronteras de distinto orden como lo muestra la Figura 5.9 (b). El investigador debe estar alerta a estas situaciones pues el computador podría pasar de una frontera a la otra.

Resta ahora desarrollar la sincronización para el orden $1:2k$, con $k \in \mathbb{N}$.

5.2.2. Orden $1:2k$. Bifurcación en presencia de simetría.

En 5.1.4 hemos caracterizado a las lenguas de orden sincronización $1:k$, con k impar, que nacieron en la recta $\mu = 0$. Como este caso desacoplado consiste en dos ciclos límite estables independientes, los toros resultantes donde se desarrolla la dinámica son hiperbólicos y genéricamente persistentes bajo pequeñas perturbaciones. Esto significa que también es esperable encontrar incluso lenguas de orden $1 : 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. En esta sección explicaremos por qué y cómo la ocurrencia de simetrías en sistemas de ecuaciones diferenciales afecta los tipos y la multiplicidad de soluciones que se bifurcan desde un estado estacionario invariante.

En nuestra investigación, en términos generales una simetría queda reflejada en las ecuaciones por la existencia de una matriz \mathbf{S} que satisface:

$$\mathbf{S}F(x, x_1, y, y_1) = F(\mathbf{S}(x, x_1, y, y_1)) \quad (5.9)$$

en nuestro modelo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos observado que cuando el sistema se encuentra en un orden de sincronización $1 : 2k+1$, las órbitas nacidas en la curva superior de puntos Hopf proyectadas sobre los respectivos subespacios de fases no se modifican con giros de 180° , en símbolos:

$$\mathbf{S}(x, x_1, y, y_1) = (x, x_1, y, y_1) \quad (5.10)$$

Sin embargo de encontrarse alguna órbita periódica de orden $1 : 2.k$, con $k \in \mathbb{N}$, su proyección sobre el subespacio (y, \dot{y}) deberá presentar $(2k - 1)$ lazos. Así por ejemplo, para $k = 1$, es decir, en el orden $1 : 2$, la proyección de la órbita periódica en el subespacio (y, \dot{y}) deberá presentar un único bucle y en consecuencia, al actuar sobre ella el giro de 180° , esta proyección no mantendría invariante a la órbita en cuestión. En otros términos

$$\mathbf{S}(x, x_1, y, y_1) \neq (x, x_1, y, y_1) \quad (5.11)$$

Por lo tanto, los ciclos límites deben aparecer de a pares. En síntesis, la presencia del orden $1 : 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ implicará una bifurcación forzada de ruptura de simetría.

Notemos como \mathcal{G} al conjunto de todas las matrices $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que representan

algún tipo de simetría en el sistema como lo muestra (5.9) o (5.10):

$$\mathcal{G} := \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / \mathbf{S}(x, x_1, y, y_1) = (x, x_1, y, y_1)\}$$

La pregunta que surge naturalmente es si la composición de cualquiera de esas transformaciones que pertenecen a \mathcal{G} también están en \mathcal{G} . Más precisamente, queremos investigar si \mathcal{G} posee alguna estructura algebraica, de existir, se podrían obtener resultados teóricos de mayor relevancia. Conocer qué estructura posee \mathcal{G} posibilita la aparición de determinadas bifurcaciones, por ejemplo, la bifurcación de rotura de simetría. Para este fin, el análisis se focaliza sólo en las simetrías espaciales puesto que el sistema no es reversible.

5.2.3. Simetrías

Consideremos dos operadores de simetría S_x y S_y que actúan sólo en uno de los subsistemas cambiando el signo de la variable x o y , sin alterar la variable de tiempo.

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La combinación de ambos operadores es otra simetría, $S = S_x \circ S_y$.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como se observó anteriormente, el sistema hereda de los subsistemas desacoplados, una simetría orbital de inversión con centro en el origen. Dicha simetría está representada por la matriz S . Más precisamente, para $\mu = 0$, el sistema (5.2) es simétrico tanto cuando actúan sobre él S_x o cuando lo hace S_y , y también cuando opera sobre el sistema la matriz S como producto de las dos primeras. Pero para $\mu \neq 0$, S_x y S_y deben actuar conjuntamente, pues el sistema (5.2) no es simétrico para una sola de las transformaciones ya que el término de acople lo prohíbe. La interpretación geométrica del operador S es que, para soluciones periódicas y simétricas, podemos reconstruir toda la órbita sabiendo solo la mitad de ella. Si $u(t) = (x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t))$ es el estado en t , se cumple la siguiente relación:

$$u\left(t + \frac{T}{2}\right) = Su(t) = S_x \circ S_y u(t)$$

para cualquier t . A este tipo de órbitas se las llama *S-ciclos*. Más generalmente, en $\mu = 0$ y para cualquier orden $p : q$, siendo T el período de la órbita y $u(t) = (x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t))$ el estado en t , se cumple la siguiente relación:

$$u\left(t + \frac{T}{2}\right) = Su(t) = S_x^p \circ S_y^q u(t) \quad (5.12)$$

para cualquier t , donde S_x^p y S_y^q resultan ser:

$$S_x^p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^p$$

$$S_y^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^q$$

La combinación de ambos operadores es otra simetría, $S^{p,q} = S_x^p \circ S_y^q$.

$$S = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^q \end{pmatrix}$$

Para $\mu \neq 0$, el término de acoplamiento conjuga las variables x e y , y este hecho impide que S_x y S_y actúen de forma independiente para cualquier valor de p y de q , sólo el operador S conserva la propiedad (5.9) o (5.10) en la región acoplada; en consecuencia la relación de simetría 5.12 puede persistir para $\mu \neq 0$ sólo si $S_x^p \circ S_y^q = S$, y esto ocurre cuando tanto p como q son impares. En particular, para la resonancia $1 : k$, significa que k tiene que ser necesariamente impar. En consecuencia, una bifurcación forzada de ruptura de simetría ocurre tan pronto como $\mu \neq 0$ para los valores pares que tome k .

Resumiendo, para $\mu = 0$ se tiene el siguiente conjunto de simetrías del sistema

$$\mathcal{G} := \{S_x; S_y; S; I_4\}$$

Para $\mu \neq 0$ se tiene:

$$\mathcal{G} := \{S; I_4\}$$

Por lo tanto el campo vectorial F es *equivariante* ya que (\mathcal{G}, \circ) tiene estructura de grupo, donde \circ es la multiplicación de matrices. La estructura del grupo \mathcal{G} obtenida en la región de acople es la más simple e importante de estos grupos y clasifica el comportamiento dinámico y sus posibles bifurcaciones [79].

En la Figura 5.5 se puede leer el valor aproximado $\delta_{1:2} \approx 2,4$ para el cual

$$\frac{T_x}{T_y} = 2$$

en donde T_x y T_y son los períodos respectivamente del primer y segundo oscilador. Esto es, el valor aproximado de δ en donde nace la lengua de Arnold de orden 1:2. En consecuencia se pasó a continuar verticalmente órbitas periódicas nacidas en la curva superior Hopf con un paso relativamente pequeño en la zona correspondiente a $\delta_{1:2}$. De esta manera se llegó a detectar puntos de bifurcación de rotura de simetría.

Desde estos puntos de bifurcación, es posible lanzar y continuar una familia de soluciones periódicas no simétricas que nos permitieron localizar lenguas de orden 1:2k.

En la Figura 5.10 se presenta el diagrama final de bifurcación de los osciladores van der Pol acoplados para $\lambda_2 = 1,25$, incluidas las lenguas con orden 1 : 2k par. Esta nueva estructura completa el diagrama de bifurcación de forma consistente y de manera atractiva. Las estrechas lenguas rojas entre lenguas de color verde ($k = 1$) y azul ($k = 3$) o entre la azul y la negra corresponden respectivamente a las lenguas de órbitas asimétricas de orden 1 : 2 y 1 : 4.

5.2.4. Extensión del espacio de parámetros y nuevas preguntas

Hasta ahora hemos obtenido resultados en el plano (δ, μ) con $\lambda = 1.25$. En esta última sección posibilitamos un trabajo futuro mediante una extensión del espacio de parámetros, esto es, el espacio tridimensional (δ, μ, λ) . Sin pérdida de

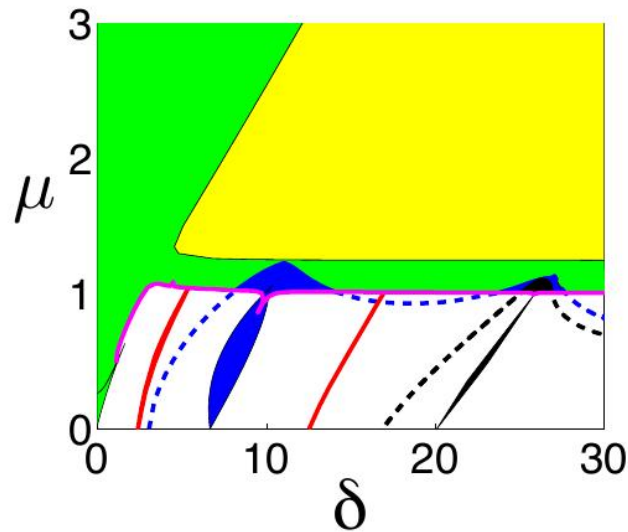


Figura 5.10: Diagrama “completo” de bifurcación para los dos parámetros δ y μ que incluye las lenguas de órbitas simétricas 1 : 1 (verde), 1 : 3 (azul) y 1 : 5 (negro) y las órbitas asimétricas de orden 1 : 2 y 1 : 4 (ambas rojas).

generalidad tomamos a λ como el valor del parámetro que controla la bifurcación de Hopf en el primer subsistema, es decir λ_1 .

Cuando $\lambda_1 = 1.25$, se observan dos curvas de puntos Hopf que se muestran en la Figura 5.1. En este caso, a medida que se reduce cualquiera de los parámetros, δ o μ , el único equilibrio pierde su estabilidad a través de una bifurcación de Hopf. Allí un par de valores propios complejos conjugados cruza el eje imaginario con velocidad distinta de cero. Cuando seguimos reduciendo, por ejemplo el valor de μ , una segunda bifurcación de Hopf se presenta, aunque el punto de equilibrio ya ha perdido estabilidad en la curva anterior.

5.3. Conclusiones y perspectivas

Se ha realizado un análisis de las bifurcaciones presentes en un sistema compuesto por dos osciladores del tipo van der Pol acoplados en velocidad. El aporte en esta investigación es una técnica computacional que construye fronteras que

separan diferentes órdenes de sincronización. Estas fronteras están ubicadas en el espacio generado por los parámetros de acople y de diferenciación de frecuencias naturales de los correspondientes osciladores que conforman el sistema dinámico estudiado. La solución consiste en construir una familia de ciclos límites indexada por los parámetros mencionados en la cual se mantiene invariante la condición que hemos denominado de tangencia, esto es, en donde se produce la transición de un orden de sincronización a otro diferente. Estos ciclos límites son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial. En dicho sistema aparecen los parámetros mencionados al que se agrega un tercer parámetro, el período de las órbitas periódicas. Según lo desarrollado en 5.2.1 podremos transformar este problema en otro equivalente pero con condiciones de contorno. Estas condiciones quedan fijadas por la periodicidad del ciclo límite; por la necesidad de unicidad de la solución (condición de fase de Poincaré) y por la condición de tangencia que da cuenta de la transición en cuestión. El método de continuación numérica denominado de pseudo longitud de arco permite construir la familia de ciclos límites que mantiene invariante la condición de tangencia. Esta técnica es aplicable a todo tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, independientemente de la dimensión (finita) y del tipo de acople. En un contexto más general, la continuación numérica de ciclos límites ha permitido comprender la apariencia y estructura de regiones en el espacio de parámetros con estados sincronizados con orden $n : m$. Así lo hicimos para la presencia de islas y para observar la conexión existente entre las regiones que coronaban las lenguas de Arnold de orden 1:3 y 1:5 según muestra la Figura 5.10.

En el sistema por nosotros investigado intervienen cuatro parámetros, estos son: λ_1 y λ_2 que controlan la bifurcación de Hopf en sendos osciladores; el parámetro de acople μ ; el parámetro δ que diferencia la frecuencia natural de un oscilador respecto al otro. En el espacio cuatridimensional $(\delta, \mu, \lambda_1, \lambda_2)$ existen esencialmente dos maneras por las cuales el único punto fijo del sistema pierde estabilidad y se da lugar al nacimiento de movimiento periódico:

- Una de ellas cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ en donde se produce una bifurcación doble Hopf. Estamos investigando este caso junto a los nuevos resultados ya presentados para una posible publicación.
- La segunda dinámica corresponde al caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Las regiones de sincronización quedaron caracterizadas por lenguas de Arnold limitadas por curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas con estructura de isolas. En la parte superior de dichas lenguas existen curvas de bifurcaciones toro y otra curva de puntos Hopf.

Sin pérdida de generalidad hemos fijado $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 + \lambda$ con $\lambda > 0$. Por lo tanto la investigación se ha llevado a cabo en una porción del espacio tridimensional (δ, μ, λ) .

A continuación detallamos las conclusiones y perspectivas.

- Las primeras bifurcaciones obtenidas para ciclos límites cuando $\lambda = 0,25$ han sido las de silla-nodo de órbitas periódicas. Al continuar estas bifurcaciones en el plano (δ, μ) , se han construido las regiones de sincronización 1:1, 1:3 y 1:5 (Figura 5.7). Para valores de μ pequeños, estas regiones se conocen con el nombre de lenguas de Arnold. En un análisis posterior a la publicación de estos primeros resultados pudimos construir con la misma técnica hasta ahora aplicada construir nuevas fronteras dentro de la región coloreada en azul correspondiente a un orden 3 : 3, y dentro de la de color negro fronteras para los órdenes 3 : 5 y 5 : 5 (Figura 5.11). Estos nuevos resultados junto a otros obtenidos fuera de la zona aquí investigada serán objetos de publicación.
- En las lenguas de resonancia 1:3 y 1:5 se han encontrado isolas. Estas configuraciones aparecen en los diagramas de bifurcaciones como curvas de sillanodos de órbitas periódicas y no son detectadas directamente. Su formación depende esencialmente de dos factores. Uno de ellos es el valor del parámetro que se elige para la construcción de la familia de ciclos límites.

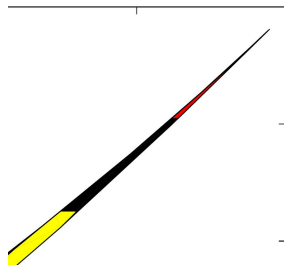


Figura 5.11: Parte superior de la lengua 1:5. En amarillo 1:5, en negro 3:5 y en rojo, 5:5

El segundo factor hace referencia a la forma que van tomando las curvas sobre las que se están gestando las correspondientes islas. El proceso se puede resumir en lóbulos que terminan desprendiéndose de la rama principal que se está construyendo. El desprendimiento se ha llevado a cabo por colas de golondrinas ubicadas en una porción muy pequeña del espacio de parámetros. El investigador debe estar alerta a la evolución de estas formas.

- En la parte superior de las lenguas de Arnold, aparece una subregión adicional rodeada por curvas de bifurcaciones toro de ciclos límites. El estudio podría extenderse para aclarar aún más la interacción con la bifurcación de puntos límite de órbitas periódicas. A su vez aplicar el método de continuación numérica a los toros nacientes en la bifurcación homónima.
- Se ha ingresado a las regiones $1 : k$, con $k = 2, 4$ por bifurcación de rotura de simetría. El encuentro de estas regiones fue posible gracias al cómputo de los valores $T_0/T(\delta)$ (Figura 5.5) lo cual nos ha permitido limitar la zona de búsqueda de estos órdenes de sincronización. El análisis teórico de la simetría terminó por completar el cuadro. También dentro de estas lenguas se han encontrado subregiones con órdenes 2:2 y 4:4.
- Adoptar una definición de sincronización más general que la clásica ha permitido extender las regiones de sincronización por sobre las lenguas de Arnold. La Figura 5.9 muestra estas extensiones. En dicha figura hay cúspides

triangulares coloreadas en azul que en trabajos anteriores se presentaron de manera inconexa [44]. Gracias a la técnica para construir fronteras, se ha logrado dar una explicación dinámica que conecta ambas regiones. Sus bordes superiores pertenecen a una misma familia que da cuenta de la transición 1:1 a 1:3.

- El espacio $-1 < \delta < 0$ comprime todas las lenguas de orden $n : m$ que se dan en $0 < \delta < \infty$ pues se invierten los valores numéricos en la relación $T_0/T(\delta)$. Queda pendiente completar el estudio en todo el plano $(\delta, \mu) = \mathbb{R}^2$
- Es pertinente comentar que hemos extendido el número de osciladores acoplados obteniendo similares resultados.
- Por último, el tipo de comportamiento encontrado en nuestro modelo corresponde al de sistemas bidimensionales. Por ejemplo, no se ha encontrado movimiento caótico. Esto obliga a profundizar la investigación.

Apéndice A

Teoremas fundamentales de la continuación numérica

El problema de la continuación numérica de equilibrios se reduce a encontrar los ceros de un campo vectorial multiparamétrico. Ineludiblemente tendremos que utilizar métodos numéricos para encontrar estos ceros; el método iterativo de Newton-Raphson es la técnica óptima para llevar a cabo esta tarea. A su vez queremos observar la dependencia funcional de estos equilibrios respecto a un grupo de parámetros que intervienen en el campo que define al sistema; el teorema de la función implícita se hace necesario puesto que esta dependencia en general no es explícita.

En cuanto al problema de ciclos límites, la continuación numérica de estas órbitas se lleva a cabo realizando una discretización de las ecuaciones diferenciales. De este modo, transformamos un problema del análisis en un problema algebraico y en consecuencia, equilibrios y ciclos comparten el mismo marco teórico para la construcción de los diagramas correspondientes.

Método de Newton

Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{f} es una función con derivadas continuas al menos hasta las de segundo orden. Como ya mencionamos anteriormente, el análisis de (A.1) generalmente comienza con la búsqueda de los equilibrios, es decir, los ceros del campo \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Si el sistema algebraico fuese lineal, tenemos una metodología que nos conduce directamente a las soluciones exactas, por ejemplo, la teoría de los determinantes. Si el campo \mathbf{f} no fuera lineal, en general, tendremos que recurrir a métodos numéricos y de esta manera el problema será resuelto partiendo de algún vector $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ próximo a la solución exacta. El método que genera una sucesión de puntos $\{\mathbf{x}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que bajo ciertas condiciones converge al equilibrio buscado, es conocido como *Método de Newton*.

Asumamos la existencia de un equilibrio aislado \mathbf{x}^* y que tenemos un punto \mathbf{x}_0 próximo a \mathbf{x}^* . Esencialmente el algoritmo se puede obtener a partir de la serie de Taylor de \mathbf{x} centrada en \mathbf{x}^0 :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} + r(\Delta\mathbf{x})$$

Despreciando el resto ¹ en la expresión anterior se tiene

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x}$$

Buscamos la dirección de avance $\Delta\mathbf{x}$ que haga que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ sea una

¹El error $r(\Delta\mathbf{x})$ se puede acotar pues $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k$ con $k \geq 2$.

raíz de (A.2), es decir,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

de donde

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Procediendo de manera inductiva, el método queda definido por la siguiente iteración:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}_j)\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) \quad (\text{A.3})$$

Sin embargo, no es necesario calcular la matriz inversa, llamando $\eta_j = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$, tendremos que resolver el sistema

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_j)\eta_j = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_j)$$

Un criterio habitual de parada en la ejecución del cálculo en este método es $\|\eta_j\| < \varepsilon_1$ y $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_j)\| < \varepsilon_2$ para $\varepsilon_{1,2}$ pequeños.

Teorema 8. Si el campo \mathbf{f} del sistema (A.1) tiene derivadas continuas hasta al menos las de segundo orden y tiene un equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ y la matriz jacobiana $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ es no singular, entonces hay una vecindad U de \mathbf{x}^* tal que la iteración (A.3) converge a \mathbf{x}^* desde cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0 \in U$. Más aún $\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \kappa_0 \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}^*\|^2$ con $j = 0, 1, 2, \dots$ para algún $\kappa_0 > 0$ y $\|\cdot\|$ cualquier norma en \mathbb{R}^n .

Observe que la convergencia es cuadrática e independiente de la estabilidad de \mathbf{x}^* . La ausencia de autovalores de valor cero equivale a pedir que $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ sea no singular.

Teorema de la Función Implícita

El teorema de la función implícita (TFI) nos brinda condiciones suficientes par que nuestro sistema algebraico $f(x, \lambda) = 0$, defina una función implícita en algún entorno de una solución dependiente del multiparámetro.

Teorema 9. (TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA)

Sea $\mathbf{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, es decir, \mathbf{G} es un campo vectorial de n componentes: $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$

tal que

- $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^1$.
- Existe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , tal que $G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$
- La matriz

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

es no singular en (\mathbf{a}, \mathbf{b})

entonces:

- existe un entorno abierto $W \subseteq \Omega$ de (\mathbf{a}, \mathbf{b})
- existe un entorno U de \mathbf{b}
- existe una función $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\phi(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$
- $\{(x, y) \in W / G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} = \{(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) / \mathbf{y} \in U\}$

Además para todo $\mathbf{y} \in U$ se verifica

- $D_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ también es no singular.
- la matriz jacobiana de ϕ , notada como $J_{\phi}(\mathbf{y})$ verifica

$$J_{\phi}(\mathbf{y}) = -(D_{\mathbf{x}}\mathbf{G}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}))^{-1}D_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y})$$

donde

$$D_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+1}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+2}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+p}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{n+1}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_{n+2}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{n+p}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_{n+1}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \frac{\partial g_n}{\partial x_{n+2}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_{n+p}}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

con $D_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- si $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^k$ entonces $\phi \in \mathcal{C}^k$

A.0.1. Algoritmo

El método de Newton proporciona un algoritmo para resolver ecuaciones no lineales utilizando un esquema iterativo. Supongamos que estamos interesados en resolver una ecuación $G(U) = 0$ para una función $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivable. Asumimos que esta función tiene un cero regular U_* , es decir, $G(U_*) = 0$ y el jacobiano $G_U(U_*)$ es inversible. Estamos interesados en encontrar dicho cero con un error predeterminado, esto es, existe $\epsilon > 0$ tal que la sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}^n$ definida por

$$U_{n+1} = U_n - G_U(U_n)^{-1}G(U_n)$$

converge a U_* cuando $n \rightarrow +\infty$ para cualquier U_0 que verifique $|U_* - U_0| < \epsilon$.

En cuanto a la resolución del problema de la continuación de ciclos límites, mencionamos que tendremos que reemplazar el sistema de ecuaciones con con-

diciones de contorno por otro de ecuaciones en diferencia; de este modo, obtendremos un problema que se podrá resolver también por el método iterativo de Newton. Entonces, la técnica de resolución es la misma.

Apéndice B

Continuación numérica

B.0.1. Justificación del Problema 4

Habiendo obtenido una solución periódica \mathbf{X}_0 del sistema $\dot{\mathbf{x}} = T f(\mathbf{x}, \lambda_0)$ con $\mathbf{x} \in R^n$ y $\lambda_0 \in R$ estamos preparados para construir una ruta de ciclos límites en un parámetro de interés que aquí llamamos λ . Entonces, a partir de \mathbf{X}_0 , nos planteamos encontrar otra solución periódica \mathbf{X}_1 para $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0$ con $\Delta\lambda_0$ pequeño. Asumimos que ambas soluciones son cercanas en período y forma geométrica. Para comenzar, hagamos la transformación:

$$\tau = \frac{t}{T}$$

de donde $\tau \in [0, 1]$. Con este reescalamiento nuestro sistema es:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T f(\mathbf{x}, \lambda) \tag{B.1}$$

Cualquier órbita periódica $\mathbf{X}(\tau)$ solución de (B.1) cumple:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(1) \tag{B.2}$$

Esta última condición si bien se impone por periodicidad, no define una única solución de (B.1) puesto que cualquier punto de esas órbitas periódicas puede ser fase inicial de dicha solución, puesto que $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_1(t + \sigma)$ para todo σ . Para cumplir con la unicidad, se debe agregar una condición denominada *condición de fase integral*. Previamente en el espacio vectorial de funciones periódicas $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ definimos el siguiente producto interno.

Definición B 1. Para dos funciones $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e $\mathbf{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ pertenecientes a $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ se define el siguiente producto interno:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i(t) y_i(t) dt$$

Con esta definición podremos armar una función auxiliar cuya derivada nos dará una condición de fase integral que se agregará al problema definido por (B.1) y (B.2) para dar unicidad al problema.

Fijadas dos órbitas del espacio $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{X}_0(t) = (x_{01}(t), x_{02}(t), \dots, x_{0n}(t))$ y $\mathbf{X}_1(t + \sigma) = (x_{11}(t + \sigma), x_{12}(t + \sigma), \dots, x_{1n}(t + \sigma))$, el objetivo es encontrar el σ que minimice la siguiente fórmula:

$$D(\sigma) = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \quad (\text{B.3})$$

Esta función $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en su dominio, por lo tanto existe un valor mínimo (teorema de Weierstrass). Notemos como $\hat{\sigma}$ al valor en donde se alcance tal mínimo. Ese valor será entonces el que ajustará la fase para que el problema de continuación de ciclos límites tenga solución única. Derivando (B.3) respecto de σ obtenemos¹

$$D'(\sigma) = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)' = 2(\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)$$

¹La derivada de el producto interno es: $(f, g)' = (f', g) + (f, g')$.

que especializada en $\hat{\sigma}$ queda

$$D'(\hat{\sigma}) = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)' = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^1 (x_{1i}(t + \hat{\sigma}) - x_{0i}(t)) \cdot x'_{1i} dt = 0 \quad (\text{B.4})$$

en cada integral podemos aplicar el método de partes:

$$\int_0^1 (x_{1i}(t + \hat{\sigma}) - x_{0i}(t)) \cdot x'_{1i} dt = (x_{1i}(t) - x_{0i}(t)) x_{1i}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x_{1i}(t) - x_{0i}(t))' x_{1i}(t) dt = 0$$

por periodicidad el primer término se anula, pues

$$(x_{1i}(t) - x_{0i}(t)) x_{1i}(t) \Big|_0^1 = (x_{1i}(1) - x_{0i}(1)) x_{1i}(1) - (x_{1i}(0) - x_{0i}(0)) x_{1i}(0) = 0$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Resolvemos ahora la segunda integral:

$$\int_0^1 (x_{1i}(t) - x_{0i}(t))' x_{1i}(t) dt = \int_0^1 x'_{1i}(t) x_{1i}(t) dt - \int_0^1 x'_{0i}(t) x_{1i}(t) dt$$

por periodicidad

$$\int_0^1 x'_{1i}(t) x_{1i}(t) dt = \frac{1}{2} x_{1i}^2(t) \Big|_0^1 = 0$$

En definitiva (B.0.1) queda como sigue:

$$D'(\hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x'_{0i}(t) x_{1i}(t) dt = 0$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Abusemos con la siguiente notación:

$$\int_0^1 \mathbf{X}'_0(t) \cdot \mathbf{X}_1(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x'_{0i}(t) x_{1i}(t) dt$$

Entonces nuestro problema queda enunciado como sigue:

Problema 4 Dado un ciclo límite \mathbf{X}_0 , su período T_0 y su parámetro correspondiente $\lambda = \lambda_0$, solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$, hallar otra solución $\mathbf{X}_1 \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ cercana a \mathbf{X}_0 , también cercana en período y forma geométrica, tal que:

- $\mathbf{X}_1(0) = \mathbf{X}_1(1)$
- $\int_0^1 \mathbf{X}'_0(t) \cdot \mathbf{X}_1(t) dt = 0$

Para resolverlo numéricamente tendremos que discretizar el problema anterior. Para ello, actuamos similarmente a lo hecho en la localización de ciclos límites al comienzo de esta sección. Consideramos nuevamente una partición uniforme del tiempo con paso $h = 1/N$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \dots < t_N = t_{N-1} + h = 1$$

Simplificamos la notación haciendo

$$\mathbf{x}_j := \mathbf{x}(t_j)$$

obtenemos entonces el conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{h} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j-1}, \lambda), \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N$$

con la condición de periodicidad dada por

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0$$

Discretizamos la solución periódica dato $\tilde{\mathbf{x}}$ dada por $N+1$ puntos n -dimensionales:

$\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N$ y empleamos el método del trapecio para resolver la integral

$$\int_0^1 \mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}'_0(t) dt \sim h \sum_{j=0}^N \left(\sum_{i=1}^n x'_{0i}(t_j) x_{1i}(t_j) \right)$$

Con estas aproximaciones y tomando un paso h pequeño, la solución discreta al Problema 5 se traduce en el siguiente algoritmo:

Algoritmo para la continuación de ciclos límites en un parámetro, Hallar los ceros de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}, T, \lambda) =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 - hT_0 f(\mathbf{x}_0, \lambda) \\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - hT_0 f(\mathbf{x}_1, \lambda) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-1} - hT_0 f(\mathbf{x}_{N-1}, \lambda) \\ \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_0 \\ \sum_{j=0}^N \left(\sum_{i=1}^n x'_{0i}(t_j) x_{1i}(t_j) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Apéndice C

Oscilaciones

C.1. El sistema desacoplado

En sección justificamos que nuestro modelo para $\mu = 0$ (sistema desacoplado), posee dos ciclos límites estables e independientes.

Nuestro modelo desacoplado queda como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \\ \ddot{y} - (1,25 - y^2)\dot{y} + (1 + \delta)y = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Ambas ecuaciones son casos particulares de la denominada ecuación de Liénard cuya forma general es:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Esta ecuación puede ser interpretada en términos mecánicos como el movimiento de una partícula de masa unitaria sujeta a una fuerza de amortiguamiento $-f(x)\dot{x}$ y una fuerza de elástica o de restauración $-g(x)$. Es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

El siguiente teorema establece que este sistema tiene un único ciclo límite estable bajo apropiadas hipótesis sobre f y g . Para una prueba del mismo se puede consultar Jordan & Smith [34].

Teorema 10. (*teorema de Liénard*)

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las siguientes condiciones

1. $\forall x$: $f(x)$ y $g(x)$ son continuamente diferenciables.
2. $\forall x$: $g(x) = -g(-x)$ es decir, g es una función impar.
3. Para $x > 0$ $g(x) > 0$
4. $\forall x$: $f(x) = f(-x)$, es decir, f es una función par.
5. La función impar $F(x) = \int_0^x f(u)du$ tiene exactamente un cero positivo en $x = a$, es negativa en $0 < x < a$ y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Entonces el sistema (C.3) tiene un único ciclo límite estable alrededor de origen en el plano de fases.

Retornemos a nuestro modelo desacoplado y analicemos sólo el primer subsistema, pues el análisis para segundo subsistema es similar.

Hagamos la transformación $y = \dot{x}$, en consecuencia el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y \\ \dot{y} = -(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

es equivalente a la primera ecuación de (C.1). Veamos si se cumplen las 5 hipótesis del teorema de Liénard.

1. $f(x) = (1 - x^2)$ y $g(x) = x$ son funciones continuamente diferenciables.
2. g es una función impar pues $\forall x$: $g(x) = -g(-x)$.
3. Para $x > 0$ $g(x) > 0$

4. $\forall x: f(x) = (1 - x^2) = (1 - (-x)^2) = f(-x)$, es decir, f es una función par.

5. La función impar

$$F(x) = \int_0^x (u^2 - 1)du = \frac{1}{3}x^3 - x$$

tiene exactamente un cero en $x = 1$, es negativa en $0 < x < 1$ y $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Por lo tanto podemos concluir que el primer oscilador de (C.1) posee un único ciclo límite alrededor del origen en el espacio de fases correspondiente.

Con un análisis similar, resulta que el segundo oscilador de (C.1) también posee un único ciclo límite alrededor del origen en el su respectivo espacio de fases.

Bibliografía

- [1] Abraham, R. H.; Shaw C. D.; *Dynamics. The geometry of behavior*, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, California, 1992.
- [2] Aggarwal, J.K.; Richie, C.G. *On Coupled van Der Pol Oscillators*, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. 13, pp. 465-466 , 1966.
- [3] Allgower E. L.; Kurt G., *Introduction to Numerical Continuation Methods*, Siam, Philadelphia, 1979.
- [4] Amrein W., Hinz A. M., Pearson D. B., *Sturm-Liouville Theory Past and Present*, Ed. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2005.
- [5] Andronov, A. A. S.E. Khaikin, *Theory of Oscillations*, Ed. Gostekhizdat, Moscow, 1937.
- [6] Andronov, A. A. Vitt, S.E. Khaikin, *Theory of Oscillations*, Pergamon, Elmsford, 1966.
- [7] Andronov, A.A. ; Vitt, A.A.; Zhurnal Prikladnoi Fiziki (J. Appl. Phys.) 7(4), 3 , 1930.
- [8] Anishchenko V.; Neiman A, Astakhov T.; Vadiavasova T; Schimansky-Geier L., *Chaotic and Stochastic Processes in Dynamic Systems*. Berlin, Springer-Verlag, 2002.
- [9] Appleton, E. V; Proc. Cambridge Philos. Soc. (Math. and Phys. Sci.) 21, 231, 1922.

- [10] Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O., *Synchronization: from simple to complex*. Ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [11] APS News, *1940: Collapse of the Tacoma Narrows Bridge*, Volume 25, Nro. 10, November 2016.
- [12] Bernal, John D., *Historia Social de la Ciencia*, Ediciones Península, Vol 2, Barcelona, 1991.
- [13] Blekhman I., *Synchronization in science and technology*, Nauka, Moscow, ASME Press, New York, 1988.
- [14] Brown, R.; Kocarev, L., *A unifying definition of synchronization for dynamical systems*, Chaos, Vol 10, Nro.2, 2000.
- [15] Boccaletti, S., Pecora, L. M.; Pelaez, A., *Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems*. Phys. Rev. E, 63, 066219, 2001.
- [16] Camacho, E., Rand, R. Howland H. *Dynamics of Two Van Der Pol Oscillators Coupled via a Bath*. International Journal of Solids and Structures, 41, 2133-2143, 2004.
- [17] Capel, J.; Lozano, R.; Martínez-Zapater, J. M.; Jarillo José A., *Ritmos y relojes circadianos de las plantas*, Revista Científica y Técnica de Ecología, Año XII, No 1, 2003.
- [18] Cysarz, D., Büsing, A., *Cardiorespiratory synchronization during Zen meditation*, Eur. J. Appl. Physiol. 95(1), pp. 88-95, 2005.
- [19] Doedel, E; Champneys, A; Fairgrieve, T; Kuznetsov, Y; Sandstede, B; Wang, X; *Auto97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)*, Technical report, Concordia University, 1997.
- [20] Ermentrout, G. B.; Rinzel, J., *Beyond a pacemaker's entrainment limit: phase walk-through*, Am. J. Physiol. **246**, R102, 1984.

- [21] Ellicott, J., *An account the influence which two pendulum clocks were observed to have upon each other*, The Royal Society, UK, 1739.
- [22] Ellicott, J., *Further observations and experiments concerning the two cloks above-mentioned*, The Royal Society, UK, 1739.
- [23] Fujisaka Hirokazu , Tomoji Yamada; *Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems: , Progress of Theoretical Physics*, Volume 69, Issue 1, , Pages 32–47, 1 January 1983.
- [24] Glass L.; Mackey M. C., *From clocks to chaos: The Rhythms of Life* Princeton Univ. Press, New Jersey, 1988.
- [25] Golubitsky, M; Schaeffer, D, *Groups and singularities in bifurcation theory*, volume 1, Ed. Springer, New York, 1986.
- [26] Golubitsky M.; Stewart I. N.; Schaeffer D., *Groups and singularities in bifurcation theory*, volume 2. App. Math. Sci. 69. Springer, New York, 1988.
- [27] Grebogi G., Ott E.; Yorke J. A., *Chaotich attractors in crisis*, Phys. Rev. Lett, 51(5): 339-342, 1983.
- [28] Grebogi,G; Ott,E; Yorke. J.A.; *Attractors on a N-torus. Quasiperiodicity versus chaos*. Physica D, 15:354-373, 1985.
- [29] Hanson F. E.,*Comparative studies of firefly pacemakers*, Federation Proc. 37, 2158.
- [30] Hirsch M. W., *Differential equations, dynamical systems and linear álgebra*, Ed. Academic Press Inc. California, 2004.
- [31] Hopf E., *Abzweigung einer period ischen Losung von einer stationaren Losungeines differential Systems*, Berl. Math .-Phys . Sachsische Akademie der Wissenschaften, B. 94, Leipzig, pp .1-22, 1942.
- [32] Huygens C.; *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Paris, 1673.

- [33] Jovanovic V.; Koshkin; S, *Synchronization of Huygens' clocks and the Poincare method*, Journal of Sound and Vibration, 331 , pp. 2887–2900, 2012.
- [34] Jordan D. W., Smith P., *Nolinear Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford, England, 1987.
- [35] E. Kaempfer. *The History of Japan (With a Description of the Kingdom of Siam)*. Sloane, London, 1727.
- [36] Katok,A; Hasselblatt, B, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995
- [37] Kawahara, T., *Coupled van der Pol oscillators—A model of excitatory and inhibitory neural interactions*, Biol. Cybern., 39 , pp. 37–43, 1980.
- [38] Keller H. B., *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. In P. H. Rabinowitz, editor, *Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384. (Academic Press, New York, 1978).
- [39] Krauskop, B., Osinga, H. y Galán-Vioque, J., *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path Following and Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [40] Kuramoto, Y., *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [41] Kuramoto, Y. in H. Arakai (Ed.), *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 39, Springer, New York, p. 420, 1975.
- [42] Kuznetsov, A. P.; Turukina, L. V.; Chernyshov, N. Y.; Sedova, Y. V.; *Oscillations and synchronization in a system of three reactively coupled oscillators*, International Journal of Bifurcation and Chaos 26(1):1650010, 2015.

- [43] Kuznetsov, A. P., Kuznetsov, S. P., Shchegoleva, N. A., & Stankevich, N. V. . Synchronization of forced reactively coupled van der Pol oscillators, ArXive, 2018.
- [44] Kuznetsov, A. P.; Roman, J., *Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol-Duffing oscillators. Broadband synchronization*, Phys. D, 238, pp. 1499–1506, 2009.
- [45] Kuznetsov, Yuri A.; *Elements of Applied Bifurcation Theory*; Springer; New York; 2004.
- [46] Krylov, N., Bogoliubov, M. M. , *Introduction to Non-linear Mechanics*, Izd. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kyïv, 1936.
- [47] Landa P. S., *Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1996
- [48] Linkens, D.A., *Stability of Entrainment Conditions for A Particular form of Mutually Coupled van der Pol Oscillators*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 23, 113-121, 1976
- [49] Linkens, D. A. , *The stability of entrainment conditions for RLC coupled van der Pol oscillators used as a model for inde pruebainal electrical rhythms*, Bull. Math. Biol., 39 , pp. 359–372, 1977.
- [50] Low L. A.; Reinhall P. G.; Storti D. W.; Goldman. E. B., *Coupled van der Pol oscillators as a simplified model for generation of neural patterns for jellyfish locomotion*, Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com), 2005.
- [51] Marsden, J. E.; Mc Cracken, M.; *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer, New York, 1976.
- [52] Minorsky N., *Introduction to non-linear machanics*, Ed. J . W. Edwards, 1947

- [53] R. E. Mirollo, Steven Strogatz; *Synchronization of pulse-coupled biological oscillators*, SIAM J. APPL. MATH., Vol. 50, No. 6, pp. 1645-1662, December 1990.
- [54] Mosekilde E, Maistrenko Y and Postnov D., *Chaotic synchronization. Applications to living systems*. World Scientific, Singapore, 2002.
- [55] Nana, B. and Wofo, P. (2006) *Synchronization in a Ring of Four Mutually Coupled Van De Pol Oscillators: Theory and experiment.*, Physical Review E, 74, 1-8, 2006.
- [56] Paccosi, R. G.; Figliola, A; Galán-Vioque, J. A Bifurcation Approach to the Synchronization of Coupled van der Pol Oscillators, SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS Vol. 13, No. 3, pp. 1152–1167, 2004.
- [57] Pastor, I., Perez, V.M., Encinas, F. Guerra, J.M. *Ordered and Chaotic Behavior of Two Coupled van der Pol Oscillators*, Physical Review E, 48, 171-182, 1993.
- [58] L. M. Percora and T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. 64, 821, 1998.
- [59] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York, 1991.
- [60] Peskin, Charles S., *Mathematical aspects of heart physiology*, Courant Institute Lecture Notes, 1975.
- [61] Picovsky A. S., *Phase synchronization of chaotic oscillators by a periodic external field*, Sov. J. Commun. Technol. Electron. 30: 85, 1985.
- [62] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [63] Picovsky AS, Rosenblum MG and Kurths J.(2001), *Synchronization. A universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, 2001.

- [64] Picovsky A. S., Rosenblum M. G., *Synchronization: A general phenomenon in an oscillatory world*, Nova acta Leopoldina NF 88: 255-268, 2003.
- [65] Alexander Pogromsky, Giovanni Santoboni, Henk Nijmeijer, *Partial synchronization: from symmetry towards stability*, Phys. D 172, 65–87, 2002.
- [66] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I partie)*, J. Math. Pures appi. 3(7), 375-422, 1881
- [67] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II partie)*, J. Math. Pures appi. 3(8), 251-296. (1882)
- [68] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (III partie)*, J. Math. Pures appi.4(1), 167-244. (1885)
- [69] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (IV partie)*, J. Math. Pures appi.4(2), 151-217. (1886)
- [70] Ramírez, J. P.; Olvera, L. A.; Nijmeijer, H.; Álvarez, J.; *The sympathy of two pendulum clocks: beyond Huygens' observations*, Nature International weekly journal of science, 2016.
- [71] Rand, R.H. and Holmes, P.J. *Bifurcation of Periodic Motion in Two Weakly Coupled van der Pol Oscillators*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 15, 387-399, 1998.
- [72] Rayleigh R. J., *The Theory of Sound*, vol. 2 (MacMillan, London, 1896.
- [73] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J., Phys. Rev. Lett. 76, 1804, 1996.
- [74] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J., Phys. Rev. Lett. **78**, 4193, 1997.
- [75] Rosso O.A. et al., *EEG analysis using wavelet-based information tools*, Journal of Neuroscience Methods, Vol. 153, pp. 163-182, 2006.

- [76] Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H., Phys. Rev. E 51, 980 1995.
- [77] Rulkov N. F., Sushchik M. M., Phys. Lett. A 214, 145 (1996).
- [78] Schmidt, Dieter S. *Hopf's Bifurcation Theorem an the Center Theorem of Liapunov with Resonance Cases*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **63**, 354-370, 1978.
- [79] Seydel, Rüdiger. *Practical Bifurcation and Stability Analysis* Interdisciplinary Applied Mathematics volume 5. Springer. Third Edition, 2009.
- [80] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Ed. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [81] Stefanovska A. et al., *Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system*, Physical review letters 85 (22), 4831, 2000.
- [82] García Álvarez D. et all, *High-order synchronization, transitions, and competition among Arnold tongues in a rotator under harmonic forcing*, Phys. Rev. E 77, 056203, 2008.
- [83] Storti, D.W. and Rand, R.H. *Dynamics of Two Strongly Coupled van der Pol Oscillators*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 17, 143-152, 1982.
- [84] Storti, D.W.; Rand, R.H., *Dynamics of Two Strongly Coupled Relaxation Oscillators*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 46, 56-67, 1986.
- [85] Strogatz Steven, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, 2000
- [86] Steven Strogatz, *SYNC. The emerging Science of Spontaneous Order* Ed. Hyperion, NY, First edition, 2003.
- [87] <https://www.youtube.com/watch?v=aSNrKS-sCE0>

- [88] Strutt, W.; *Theory of Sound*, London Macmillan and Co., Vol I, 1877.
- [89] Tonu V., Vovc V., Enache N. *Cardiorespiratory Coupling: A review of the Analysis Methods* Ed. iginyanu I., Sontea V., Railean S. (eds) 4th International Conference on Nanotechnologies and Biomedical Engineering. ICNBME 2019. IFMBE Proceedings, vol 77. Springer, Cham, 2002.
- [90] Winfree, A.T. *Biological Rhythms and th Behavior of Populations of Coupled Oscillators*, Journal of Theoretical Biology, 16, 15-42, 1967.
- [91] Wiggins, Stephen, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, Second Edition, NY, 2003
- [92] Van der Pol, Balthasar, *Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance*, (Reception with reactive triode), Phil. Mag. 3, 65, 1927
- [93] Van der Pol, Balthasar and J. van der Mark, *Frequency demultiplication*. *Nature*, 120(3019): 363–364, 1927.
- [94] Van der Pol, B. and van der Mark, J., *The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillation, and an Electrical Model of the Heart*. Philosophical Magazine, 6, 763-775, 1928.
- [95] Van der Pol, Balthasar ; J. van der Mark, *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart*, Phil. Mag. Suppl., 6, pp. 763–775, 1928.
- [96] Watson, B.O.; Buzsaki, G., *Sleep, memory brain rhythms*, Daedalus 144, 67–82, 2015.
- [97] Yamapi, R.; Wofo, P., *Dynamics and synchronization of coupled self-sustained electromechanical oscillators*, J. Sound Vibration, 285, pp. 1151–1170, 2005.