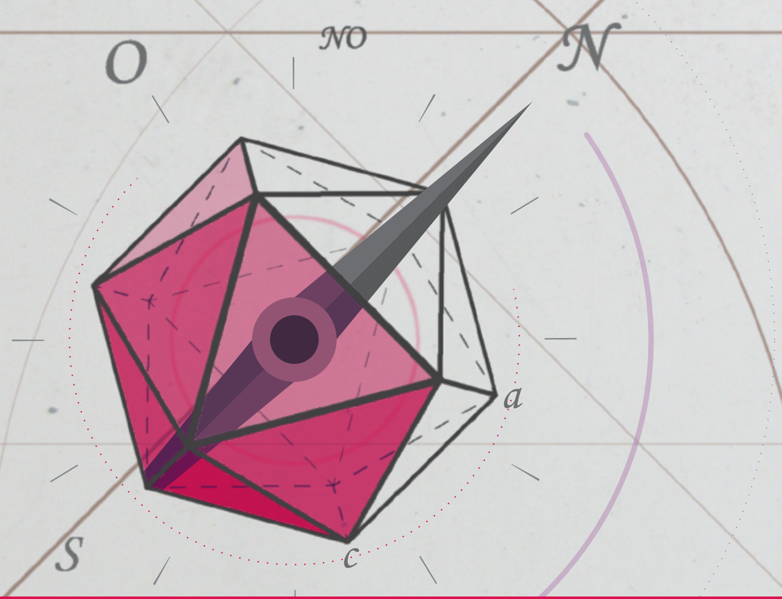
3ra edición, 2022
(REVISADA Y AMPLIADA)

Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática

Mabel Rodríguez (coordinadora)



Colección Educación

EDICIONES UNGS
Universidad Nacional de General Sarmiento

Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática

Mabel A. Rodríguez
(coordinadora)

3ra edición, 2022 (revisada y ampliada)

Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática

Autores
Patricia Barreiro, Paula Leonian, Tamara Marino,
Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez

EDICIONES UNGS
Universidad Nacional de General Sarmiento

Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática / Patricia Barreiro ... [et al.] ; coordinación general de Mabel Rodríguez. - 3a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2022.

Libro digital, PDF - (Educación / 35)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-630-637-9

1. Educación Científica. 2. Matemática. I. Barreiro, Patricia. II. Rodríguez, Mabel, coord.

CDD 510.78

EDICIONES **UNGS**

J.M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa - Ediciones UNGS

Libro
Universitario
Argentino

Índice

Introducción

Como punto de partida, tenemos una altísima valoración de la tarea del profesor de Matemática. Esto se debe a que la concebimos como una actividad profesional que implica tomar decisiones, justificarlas y conocer y tener disponible una amplia variedad de herramientas, estrategias y metodologías para adecuarlas a cada contexto, clase, institución, grupos de estudiantes, contenidos, etcétera. Desde esta perspectiva, la tarea docente resulta altamente compleja y exigente. Esto nos aleja de concebir la enseñanza como una tarea de transmisión de conocimientos, en la que el docente se pregunta: "¿qué debo enseñar hoy?", y nos acerca a la tarea de facilitar el aprendizaje, en la que el docente debe preguntarse: "¿qué es valioso que mis estudiantes aprendan de matemática?, ¿cómo haré para lograr que aprendan y cómo sabré si lo que propuse funcionó o en qué medida ocurrió?". Rápidamente se pone en evidencia que, para poder responder a estas últimas preguntas, necesitamos saber mucho. Mucho de matemática, ¡sin dudas!, pero mucho más aún… No solo necesitamos conocer avances en educación matemática, sino que también hay *cuestiones metodológicas* que resultarán claves para dilucidar cómo abordar esas preguntas. Este es el centro de este texto, y las cuestiones metodológicas están entendidas en dos sentidos: por un lado, en el de la programación o planificación de la enseñanza; y por otro lado, en el de la investigación educativa.

En lo que respecta a la planificación de la enseñanza, hemos puesto el énfasis en mencionar elementos que consideramos son claves para llevar adelante esa tarea. Algunos de esos elementos suelen ser minimizados o, usualmente, están fuera de los contenidos de la formación inicial del profesor. Entendemos que la planificación de la enseñanza es un asunto crucial y sumamente útil, pues nos permite anticiparnos a lo que ocurrirá en la clase. En esa anticipación haremos hipótesis, que podremos fundamentar y que pondremos a prueba al entrar al aula. Pero, a su vez, habremos previsto una serie de valiosos recursos y herramientas pensadas para actuar, en la inmediatez de la clase, de manera profesional.

En lo que respecta a la investigación educativa, hemos decidido incorporar aquí elementos que den pautas para transitar los primeros pasos en esta tarea. En muchas instituciones que forman profesores de Matemática se incluyen dentro de los planes de estudio cuestiones de metodología de la investigación. Esto ha sido fruto de largas discusiones en las que se ha puesto en valor la formación de los docentes con capacidad para investigar sus prácticas, entendido esto en un sentido académico. Nosotros consideramos que hay dos cuestiones claves alrededor de este tema. Una de ellas tiene que ver con el genuino interés que un profesor podría tener en entender o explicarse algo que ha advertido en su experiencia en procesos de enseñanza o aprendizaje de la matemática. Este tipo de curiosidad lleva, si el docente lo desea y conoce cómo hacerlo, a plantearse una investigación. Pero no es el único ambiente en el que necesitaríamos conocer ciertas pautas metodológicas que son propias de la investigación educativa. También necesitaríamos ponerlas en juego en otra cuestión central: la evaluación de nuestras propuestas docentes. Es decir, como docentes tenemos que evaluar lo que hemos puesto en práctica: nuestro programa de la materia, la guía de actividades, nuestras evaluaciones, nuestras devoluciones, etcétera. Para ello necesitaremos disponer de saberes metodológicos que nos permitan hacer esto bajo las pautas que rigen el mundo académico. Cabe aclarar que la investigación en el campo de la educación matemática no sigue los mismos métodos que la que se realiza en matemática. La educación matemática, como campo de conocimiento, se enmarca en las ciencias sociales, mientras que la matemática lo hace en las ciencias exactas. Vale la pena enfatizar esta diferencia porque los profesores de Matemática enseñamos una “ciencia dura”, pero para ello utilizamos perspectivas, instrumentos y recursos de las ciencias sociales. Cabe resaltar además que, dada la expansión de la educación matemática como campo de conocimiento, hoy en día contamos con desarrollos metodológicos que le son propios.

Este libro es el resultado de mucho trabajo y reflexión alrededor de estos dos ejes: cómo formar docentes que puedan planificar su enseñanza adecuadamente y cómo enseñar las metodologías que exige el primer tránsito por la investigación educativa. El texto no tiene la pretensión de ser un libro de metodología de la investigación educativa, sino que intentamos ofrecer un acercamiento a dichas tareas desde nuestra lectura, estudio y reflexión a partir de vivencias que hemos tenido y tenemos como investigadores y docentes que formamos profesores de Matemática.

Por todo esto, presentamos elementos que consideramos valiosos para el trabajo profesional del profesor de Matemática, y hemos concebido el texto de tal manera que resulte útil y claro tanto para un estudiante en formación como para un profesor graduado con más o menos experiencia.

Capítulo 1
Sobre análisis y fundamentaciones

Introducción

En nuestra vida cotidiana es común tener que analizar diversas situaciones para tomar una decisión. Por ejemplo: analizamos si nos conviene ir a un hotel o alquilar una casa cuando nos vamos de vacaciones; si nos conviene comprar comida hecha o cocinar; si en las próximas elecciones votaremos a un partido político o a otro. Las discusiones sobre estos aspectos podrían ser interminables, al punto de no poder ponernos nunca de acuerdo, y es totalmente admisible que las opiniones, gustos y diversos matices impregnen nuestros argumentos.

En cambio, en nuestra vida académica analizamos la pertinencia de ciertas tareas para una clase de Matemática, comparamos libros para elegir cuál usaremos y analizamos cómo nos resultó nuestra planificación anual, entre otras cosas. En estos casos, a diferencia de lo que ocurre en la vida cotidiana, no sería adecuado que nos rigiéramos por nuestras opiniones, gustos o impresiones. Entonces, las preguntas que surgen son: ¿qué significa, en este contexto académico, *analizar*?, ¿qué características debería tener, necesariamente, un análisis para ser adecuado?, ¿cómo se realiza cualquiera de los análisis que mencionamos a modo de ejemplo?, ¿sería válido que distintos análisis expresen diferentes posiciones?, entre otras.

Si pensamos en estas últimas preguntas, puede ocurrir que nos demos cuenta de que no tenemos en claro a qué nos referimos, en el contexto académico, con analizar. Es objetivo de este capítulo esclarecer este punto. Lo que presentamos aquí es bien general, no solo sirve para analizar consignas, secuencias, tareas, sino también textos del nivel medio, programas de materias, registros de clase, etcétera, y, como veremos, será una herramienta clave para trabajar en investigación educativa.

Por otro lado, a menudo se nos pide *fundamentar* nuestras opiniones, también una propuesta de cambio para una materia, o si elegimos un libro de texto para nuestro curso nos preguntan por qué ese y no otro. En cualquiera de estos casos, lo que debemos fundamentar es el porqué de tal o cual decisión, y qué es lo que nos lleva a sostenerla. Aquí las propuestas tampoco podrían ser discutidas desde el sentido común, pues no tendrían ningún sustento y serían fácilmente rebatibles. Como veremos, la estructura de la fundamentación será similar a la de un análisis, con algunos matices que mencionaremos a continuación.

Comenzaremos entonces por introducir algunas precisiones para saber cómo se realiza el análisis de un documento en el ámbito académico, mostraremos también un ejemplo y explicitaremos las diferencias con la fundamentación.

¿Qué significa analizar un documento?

Para comenzar un análisis, tenemos que contar con el documento que vayamos a analizar y con los elementos teóricos con los que analizaremos dicho documento. Es decir, nuestros "ingredientes" para el análisis son:

- **Documento a analizar:** Puede ser una consigna, una tarea, un listado de tareas, la planificación, el programa de la materia, la filmación de una clase, el registro escrito de una clase, un libro de texto, etcétera. Ya sea de autoría propia o ajena, el documento debe estar disponible en papel, audio o video, extraído de internet u otras fuentes.

- **Nociones teóricas y artículos que hablen sobre estas:** Para nosotros, las nociones serán elementos teóricos de educación matemática (aunque podrían ser de didáctica general, teoría del aprendizaje, etcétera); por eso, la estructura que aquí presentamos es aplicable a otros ámbitos académicos de las ciencias sociales.

Como dijimos en la introducción, la primera cuestión importante que debemos advertir es que si uno diera una opinión sobre un documento estaría haciéndolo desde el sentido común, sin una teoría que la avalara, y eso, en el ámbito académico, no puede ocurrir; no tendría valor y podría ser fácilmente rebatido. Para realizar un análisis debemos contar con elementos teóricos que lo sustenten. La idea es poder pensar qué es lo que la teoría seleccionada nos permitiría decir sobre el documento.

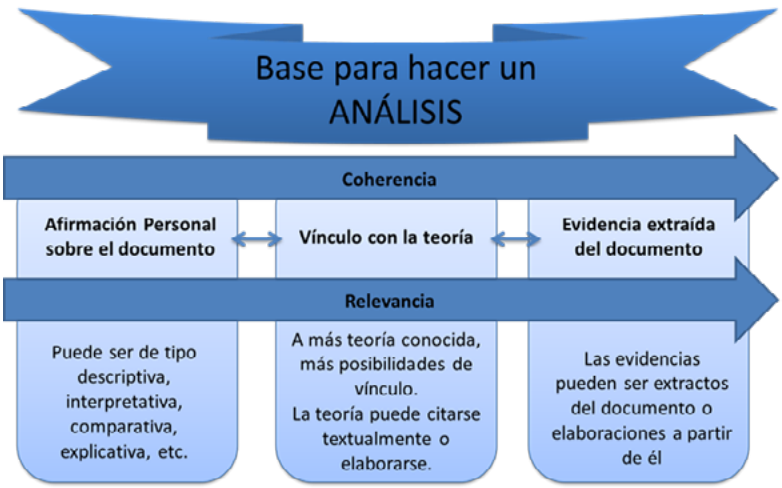
A diferencia de lo que muchas veces sucede al resolver actividades escolares de Matemática en las que la respuesta correcta es única, la teoría seleccionada nos permite decir distintas cosas sobre el documento, por lo que no hay una única forma de realizar un análisis correcto. Este es un punto clave para tener en cuenta en la realización de un análisis didáctico: de acuerdo con la teoría elegida para realizarlo y con lo que uno sea capaz de advertir para vincularla, se pueden sostener diversas afirmaciones.

Centralmente, lo que hay que lograr es identificar algún rasgo que se quiera resaltar, describir o explicar. Esto se expresa en *una afirmación personal* a propósito del documento, es decir, algo que se quiera decir o expresar. Es un juicio. Quien analiza deberá vincular dicho juicio con la teoría. Es decir, la teoría nos brinda herramientas para "mirar" el documento, entonces lo que hayamos visto en él –que manifestamos en nuestra afirmación– deberá poder vincularse con algún texto teórico. Eso habrá que redactarlo, para tener así un *vínculo con la teoría*. Finalmente, deberemos explicitar en qué parte del documento se encuentra aquello que nos interesa resaltar y vincular con la teoría. De este modo, le agregamos a la afirmación personal y al vínculo con la teoría *evidencias extraídas del documento*. Estos tres elementos son la base de un análisis en el ámbito académico. Por supuesto que cada uno tendrá su estilo de redacción y de organización. Se puede comenzar a redactar expresando la afirmación, luego se pueden mostrar las evidencias y, por último, vincular con la teoría; también se puede comenzar relatando lo que se ha visto (evidencias) para luego relacionarlo con la teoría y terminar dando una afirmación, entre otras opciones. La riqueza de un buen análisis se centra en la afirmación personal, en cómo esta se articula con la teoría y en la contundencia de las evidencias. Es importante resaltar que la teoría con la que se decida hacer el análisis será la que guíe qué mirar del documento, y será la que ponga las palabras claves para que se exprese la afirmación. A modo de ejemplo, si realizamos un análisis usando la Teoría de Situaciones Didácticas, nuestras afirmaciones hablarán de alguna de estas cuestiones: situaciones a-didácticas, de acción, formulación, validación, institucionalización, contrato didáctico, etcétera. Todas ellas son palabras propias de la línea y admiten un significado preciso en el marco de ella. Si se suma para el análisis otra línea de educación matemática, como la escuela anglosajona, se dirán cosas sobre si las actividades son o no un problema para el estudiante, sobre las heurísticas, los pasos en la resolución, la reflexión metacognitiva, etcétera. Nuevamente, estas últimas son palabras que adquieren un significado específico en la línea. Cabe señalar que cuanta más teoría se conozca, más posibilidades habrá de enriquecer un análisis y de distinguir y explicar fenómenos de un cierto documento.

Hay otras dos cuestiones que debemos tener en cuenta y que atraviesan cualquier análisis, que son la *coherencia* y la *relevancia*. La coherencia debe darse entre las tres partes del análisis: si la afirmación personal se refiere a "un cierto asunto", la teoría debe versar sobre "ese asunto" (y no sobre algo cercano) y las evidencias deben permitir sostener la afirmación. Si alguno de estos lazos falla, se desmoronará el análisis. La relevancia se refiere a que en nuestra afirmación señalemos un aspecto que pueda ser sostenido con varias evidencias. Si de manera aislada observamos un detalle mínimo y sobre él construimos el análisis, realzando y enfatizando ese detalle, habremos puesto la mirada en algo no relevante, y el análisis no será adecuado aunque exista una afirmación personal, un vínculo con la teoría y evidencias coherentes.

Lo explicado anteriormente se puede ver en el siguiente esquema:

Estructura básica de un análisis



Como necesariamente deben incluirse *evidencias* extraídas del documento que se analiza, nunca podrá ocurrir que el análisis sea tan genérico y teórico que no mencione aspectos propios de lo que se está analizando. Cuando no se incluyen evidencias, ocurre que el mismo análisis menciona cosas tan generales que cabría decirlas al analizar cualquier otro documento. Si esto pasara, el análisis de ese documento no estaría bien hecho.

Un detalle importante antes de los ejemplos: cuando tengamos que analizar una consigna (un ejercicio, un problema, etcétera), primero debemos resolverla, pues en esa resolución obtendremos las evidencias para el análisis. La formulación de la consigna podría sumar pocas evidencias y el análisis quedaría pobre. Se preguntará el lector: ¿desde qué perspectiva debo resolver la consigna: como experto (desde el docente) o poniéndome o imaginándome en los zapatos de un estudiante del nivel de destino de esa consigna? Les sugerimos *ambas*. Es decir, no escatimen en imaginar resoluciones y formas de encararlas, sean correctas o no. Este tipo de anticipaciones a una resolución enriquecerá mucho el análisis. Asimismo, esto tendrá otro valor para cuando pensemos en estar frente al curso y en cómo intervenir en la clase. "No ver" qué es lo que el estudiante podría hacer, nos dejará, como docentes, en una situación de vulnerabilidad y de necesidad de improvisar en la clase.

Cuando tenemos que analizar muchas consignas, una guía de trabajos prácticos o un libro (o muchos), realizar esto sería imposible. Es entonces cuando uno intenta buscar evidencias más generales, tomadas de varios lugares. Esto nos obliga a tener una mirada más global que cuando nos metemos de lleno en una actividad.

¡Ahora sí!, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: cómo queda un párrafo de un análisis

El documento que se analiza a continuación está disponible en el anexo y se presenta aquí como "un caso". Nos interesa, en este primer momento, mostrar cómo se ve un párrafo de un análisis. Es un caso sobre vivencias de clases de Matemática. Hemos utilizado para el análisis un único texto teórico: Ernest (2000).

Para que quede claro para el lector, señalamos entre corchetes las afirmaciones personales, el vínculo con la teoría y las evidencias.

Análisis: Por lo que se advierte a partir de su práctica de enseñanza, el profesor presenta rasgos de una concepción de la matemática como ciencia que, según los planteos de Ernest (2000), podemos ubicar en la filosofía absolutista [afirmación personal]. Desde esta perspectiva, las matemáticas "son consideradas como un cuerpo de sabiduría objetivo, absoluto, cierto e inmutable, que se apoya en las bases firmes de la lógica deductiva […]. Es un conocimiento completamente aislado, que tiene lugar para ser útil por su validez universal; por la misma razón, no depende de valores ni de culturas" (ob. cit.: 11) [vínculo con la teoría]. De esta manera, el profesor transmite una imagen absolutamente negativa de la matemática [afirmación personal], es decir, como un conocimiento rígido, fijo, lógico, inhumano, abstracto [vínculo con la teoría]. Esto queda en evidencia cuando cuenta que escribía largos ejercicios a modo de "platos perfectos en un restaurante refinado" (ob. cit.: 14) [evidencia].

Ernest plantea que aplicar esta concepción absolutista en la escuela da lugar a tareas matemáticas rutinarias e inconexas que solo sirven para aplicar procedimientos [vínculo con la teoría]. De esto se trataban, al parecer, las clases del profesor, como puede apreciarse en los siguientes fragmentos: "Pasábamos mucho tiempo viendo operaciones con expresiones algebraicas. Sumábamos, multiplicábamos y operábamos en general"; "Escribía ejercicios para que copiáramos y empezáramos a resolver en clase, el resto quedaba de tarea" [evidencias].

Ejemplo 2: análisis de una consigna en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas

Aquí analizamos una consigna en los términos de algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Si al lector le resulta desconocida la teoría, le sugerimos leer antes el capítulo 1 de Pochulu y Rodríguez (2012).

No cualquier elemento de esta teoría podría ser utilizado en el momento de analizar *un enunciado matemático*. Baste pensar que en un enunciado no se podría ver, por ejemplo, la devolución del docente, la institucionalización ni la gestión de la clase para que la lleve adelante un funcionamiento a-didáctico, entre otras cosas. Por lo tanto, lo primero que hay que decidir será qué elementos de la teoría poner en juego. Aquí nos restringiremos a hacer un análisis que nos permita anticipar si podrían darse las situaciones de acción, formulación y validación y, en tal caso, cómo podría ser el trabajo de los estudiantes en cada una de ellas.

Enunciado a analizar: Un mago, dirigiéndose al público, realiza el siguiente truco: "Piensen un número, súmenle 5, al resultado multiplíquenlo por 3, réstenle el doble del número que pensaron y vuelvan a restarle ese número inicial. El resultado alcanzado es 15". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido? ¿Por qué?

Siguiendo la observación realizada anteriormente, primero resolveremos la consigna desde todas las perspectivas que se nos ocurran. Recién después redactaremos el análisis.

Resolución: Desde un rol experto diríamos: llamando x al número pensado, expresamos: $(x + 5) \,.\, 3 - 2x - x = 15$, y nos preguntamos si esta igualdad vale para todo valor de x real. Al resolver, resulta que $3x + 15 - 3x = 15$, es decir, $0 = 0$, lo que nos indica que todos los reales satisfacen la ecuación, y podemos afirmar que el truco funcionará siempre.

Si consideramos posibles resoluciones por parte de los estudiantes, es altamente probable que estos den ejemplos y confíen en que eso es suficiente. Entonces, podríamos encontrar quienes escriban correctamente y quienes no. Por ejemplo:

Posibles resoluciones de estudiantes	Observaciones
Pienso el número 1, le sumo 5 y me da 6. Lo multiplico por 3 y tengo 18, resto el doble de mi número y queda 16, resto mi número inicial y me da 15. ¡Adivinó! Pruebo ahora con el número 2: primero obtengo 7, luego 21, luego 17 y luego 15. Listo, ¡funciona!	Escribe bien y se convence con ejemplos.
Otro estudiante piensa el 1 y escribe (o realiza la operación en la calculadora): a) $1 + 5 = 6 \,.\, 3 = 18 - 2 = 16 - 1 = 15$. b) $4 + 5 = 9 \,.\, 3 = 27 - 8 = 19 - 4 = 15$. Listo, ¡funciona!	Escribe mal y puede convencerse con ejemplos.

Otro estudiante prueba con un valor "raro" (grande, decimal, irracional). Elige el número 1273: 1273 + 5 = 1278 . 3 = 3834 - 2546 = 1288 - 1273 = 15. ¡Vale!	Escriba bien o mal, se convence porque su argumento es que "si con un valor raro vale, valdrá siempre".
Otro estudiante se equivoca en la cuenta y responde mal: 4 + 5 = 9 9 . 3 = 27 27 - 4 = 23 23 - 4 = 19	No advirtió que se equivocó en el tercer paso y responde coherente con su error.
Otro estudiante realiza lo siguiente: $(x + 5) . 3 - 2x - x = 15$ $3x + 15 - 3x = 15$ Cancelo $3x$ 15 = 15 Respuesta: es falso. Solo serviría si se pensara el número 15. ¡Lo reemplazo y da!	Aquí se ve que el estudiante puede plantear correctamente, resolver bien e interpretar mal la resolución. Cuando verifica "y le da", confirma que ha resuelto bien (lo que no es correcto).
Otro estudiante podría pensar: El número que piense siempre se va a cancelar porque se multiplica por 3, pero luego se resta tres veces ese número (en dos partes: primero se resta el doble del número e inmediatamente se resta una vez más el número inicial). Esto hace que "no importe el número". Además, el resto de la cuenta ¡da 15! Porque debo sumar 5 y ese 5 multiplicarlo por 3: (7 + 5) . 3 - 14 - 7 = 15	Aquí el número 7 tiene una connotación de número general. Más allá del valor 7, el estudiante "lo trata" como una letra y muestra que se cancelará.

Análisis: Considero que la consigna dada permitiría a un estudiante transitar por situaciones de acción, formulación y validación, si el docente la enmarcara en una situación a-didáctica, y cuidara la a-didacticidad en la gestión de su clase [afirmación personal]. Al respecto, Barreiro y Casetta (2012) señalan que es el docente quien debe seleccionar los problemas con los que el estudiante va a trabajar. Asimismo, tomando las ideas de Brousseau, proponen características generales de estas tres situaciones, que a continuación retomamos para nuestro análisis [vínculo con la teoría].

Observando las posibles resoluciones por parte de los estudiantes que encontramos en la primera columna de la tabla, reconocemos diferentes formas de explorar y abordar la resolución [evidencia]. Las autoras mencionan que, en la situación de acción, el estudiante "explora el problema, moviliza conocimientos anteriores y los reorganiza para su interpretación" (p. 20) [vínculo con la teoría]. En este caso, posibles formas de llevar adelante la exploración se ven en la primera columna, y los conocimientos anteriores apelados son de operatoria con números de distintos conjuntos y, en el caso de que lleguen a una expresión simbólica, con el pasaje del lenguaje coloquial al simbólico [evidencia]. Respecto de la situación de formulación, que se entiende como el momento en que los estudiantes comunican sus resultados o conjeturas [vínculo con la teoría], entendemos que podría darse al expresar estas posibilidades: "el truco del mago es válido", "el truco del mago no siempre es válido" [evidencia]. La validación pone en juego la necesidad de llegar a un acuerdo sobre la validez de lo expresado, como se indica en el texto mencionado [vínculo con la teoría]. Los estudiantes podrían apelar a distintas acciones de validación [afirmación personal] (Barreiro *et al.*, 2009), como indicamos a continuación. La acción A1, hacer ensayos o intentos [vínculo con la teoría], puede verse en toda la primera columna, excepto en las dos últimas celdas [evidencia]. Si el estudiante advirtiera que a partir de pocos ejemplos está respondiendo a un planteo general, podríamos decir que, además, está generalizando a partir de sus ejemplos (A4) [vínculo con la teoría]. Esto suele suceder cuando los ejemplos que el estudiante elige mantienen una lógica en su elección (como si tomara los números 1, 2, 3 y 4, por ejemplo) [evidencia]. En la última celda se vería a un estudiante realizando las acciones A11 y A13 (ejemplificar mostrando regularidades y explicar). Cuando el estudiante concluye que $x = 15$ y verifica [evidencia], está realizando la acción A17 (reconocer la adecuación o no del resultado) [vínculo con la teoría], aunque matemáticamente sea incorrecto. El que simboliza, resuelve y responde correctamente (como el experto mencionado), formula un razonamiento simple (A21), utiliza un procedimiento conectado con la actividad (A3) [vínculo con la teoría], en este caso "la simbolización" [evidencia], y explica su respuesta (A13) [vínculo con la teoría].

En conclusión, afirmamos que esta consigna permitiría a los estudiantes diversos caminos para transitar las situaciones de acción, formulación y validación, por lo que podríamos anticipar que es una consigna adecuada para utilizar en una clase enmarcada en el enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas [afirmación personal].

Como puede verse, las evidencias las hemos tomado de las resoluciones posibles, sin las cuales nada de este análisis podría haberse sostenido.

¿Qué significa fundamentar una propuesta?

Una fundamentación tiene la intención de poner de manifiesto *lo valioso de una producción propia*. Comenzamos mencionando que las pautas con las que se debe realizar una fundamentación son las mismas que hay que tener en cuenta para realizar un análisis. Sin embargo, hay dos cuestiones implícitas que resaltamos aquí:

- aquello que se fundamenta (sea una consigna, una secuencia, un programa, etcétera) es *una producción propia*;
- el tipo de afirmación personal que debe estar presente (junto con los demás elementos del análisis) debe expresar alguna *cualidad favorable* sobre aquello que estamos queriendo fundamentar.

Una fundamentación se realiza cuando uno quiere mostrarle a otro y "defender" alguna propuesta personal. Si al elaborar una fundamentación encontramos que hay cuestiones que no podemos defender, tenemos que mejorarla antes de presentar nuestra propuesta. Nótese que la fundamentación es, además, una herramienta valiosa para evaluar y mejorar nuestra propia producción.

Pero debemos tener cuidado con el uso del término *fundamentación*. Muchas veces, cuando armamos un programa, programación o planificación anual de una materia, además de objetivos, nos piden contenidos, formas de evaluación, etcétera. Esto se suele denominar también *fundamentación*. Suele ser, incluso, lo primero que debemos completar de esa programación anual. En esos casos, el término está usado con otro significado. Se espera que nosotros hagamos una declaración de posiciones. Tendríamos que expedirnos en cuanto a cómo concebimos la enseñanza de la matemática, el aprendizaje, la matemática en sí, o sobre cómo tomamos el diseño curricular para organizar nuestra propuesta, por ejemplo. Es un espacio para decir cómo pretendemos llevar adelante nuestro curso, pero como es lo primero que figura en el programa, no tendríamos de dónde tomar evidencias si entendiéramos el significado de esa fundamentación como lo tratamos en este capítulo. Si la fundamentación fuera lo último de una planificación anual, *podría ser* (indaguen en sus instituciones qué esperan de ese apartado) que sí se pueda tomar alguna referencia de lo que antes se completó en ese programa (los objetivos que se plantearon, el modo de organización de las unidades, etcétera) para hacerla funcionar como evidencia.

Para cerrar este capítulo queremos mencionar que entendemos que conocer esta estructura otorga una herramienta muy útil para el docente o el estudiante en sus distintos roles (elegir materiales, fundamentar propuestas, hacer devoluciones, sostener posiciones, etcétera).

Queremos señalar también lo interesante y valioso de las discusiones académicas cuando se utiliza esta estructura, más allá de que una persona escoja una perspectiva teórica y otra elija otra posición. Esto enriquece el campo académico y, por supuesto, nuestro propio conocimiento. Las opiniones, en cambio, no. Lo presentado aquí permite trascender la opinión y ubicarnos en el plano de lo esperado en el contexto académico.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T. y Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" (72)*, 39-60.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas (3)*, 9-28.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.). (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones ungs-eduvim.

Capítulo 2
Consignas para la clase de matemática

Introducción

A la hora de planificar las clases sobre un cierto contenido matemático nos encontramos ante la tarea de seleccionar o diseñar consignas, actividades o tareas para llevar al aula. Muchas veces buscamos ideas para trabajar en clase, en libros de texto o en internet. Incluso en ciertas oportunidades diseñamos nuestras consignas para trabajar el contenido que nos hemos propuesto abordar. Claramente, esta tarea de selección o de elaboración de consignas no es sencilla. Al pensar en ellas, necesitamos que atiendan al contenido, que sean factibles de ser realizadas por nuestros estudiantes, que requieran conocimientos previos que nuestros estudiantes dispongan, que promuevan un trabajo interesante para el estudiante, etcétera, y, muchas veces, ante la necesidad y el apuro las elegimos porque hay algo de ellas que "nos gusta". Con un poco de objetividad, es claro que esto no podría funcionar como criterio. De todos modos, más allá de eso, lo preocupante es que no siempre logramos que nuestras consignas sean "ricas" para el estudiante desde el punto de vista matemático. Aquí necesitaríamos explicitar qué queremos expresar con "ricas". Sin embargo, dejaremos eso para un poco más adelante en este capítulo.

Por otra parte, las consignas que comúnmente encontramos en la bibliografía son aquellas que implican resoluciones vinculadas a la aplicación de procedimientos, fórmulas y estrategias conocidas, o a la utilización de una propiedad o de una definición matemática. Es difícil encontrarse con otro tipo de propuestas de trabajo, como por ejemplo planteos de situaciones abiertas que requieran búsqueda de información, actividades para modelizar algún fenómeno, establecimiento de condiciones para que cierta cuestión sea válida, etcétera. Tampoco es usual encontrar consignas en las que, luego de haber resuelto alguna actividad, se invite al estudiante a desarrollar la reflexión sobre su propio quehacer, sobre lo matemático puesto en juego, sobre las ventajas o desventajas de utilizar o no ciertos procedimientos o recursos, etcétera. Este último tipo de consignas se vincula con la dimensión metacognitiva del aprendizaje, y debería tener un rol tan importante en él como aquellas consignas que le plantean al estudiante una resolución matemática específica.

En relación con las vinculadas al quehacer matemático, a las cuales en adelante llamaremos *consignas matemáticas*, nos proponemos ofrecer criterios para su redacción y selección, además de elementos que permitan realizar una valoración acerca de su potencial para el trabajo en el aula. En cuanto a las consignas referidas a lo metacognitivo, a las cuales en adelante llamaremos *consignas metacognitivas*, nos interesa aportar herramientas para su diseño y elaboración en el contexto del trabajo con cierto contenido o asunto matemático.

Antes de comenzar, queremos resaltar que esto solo ¡no basta! Tendremos que pensar cómo entrarán en la clase, qué hará el docente con ellas, para qué las propone, en qué momento de su planificación lo hace, etcétera. Esto lo desarrollaremos en el capítulo 6.

Comenzaremos ahora por ponernos de acuerdo en el significado que algunos términos tendrán a lo largo de este libro.

Con *consignas* nos referimos a los enunciados de tareas matemáticas que un docente plantearía en un aula. Es decir, nos circunscribimos al enunciado con la redacción que presente.

Una *tarea* se conforma de tres partes: una consigna, un contexto y el objetivo que el docente plantea y para el cual "elige" esa consigna. El contexto nos dará una idea del trabajo que se viene realizando, cómo se trabaja en la clase, qué contenidos se han trabajado, etcétera. Retomaremos esto en el capítulo 3 y daremos allí mayores precisiones y ejemplos.

Las *planificaciones de clases* contienen *colecciones de tareas* diseñadas o seleccionadas con ciertos criterios de secuenciación, de acuerdo con decisiones del docente, a lo que conviene sumar anticipaciones de posibles errores y formas de intervenir en el aula, evaluación, etcétera. Nos dedicaremos a las planificaciones en el capítulo 6.

En la sección siguiente entraremos de lleno en los criterios para seleccionar consignas o para diseñarlas. El concepto que acuñamos para tal fin y presentamos es el de *potencial matemático de consignas*.

Sobre consignas matemáticas

Proponemos que la valoración de una consigna se realice en función de la riqueza matemática que podría vivenciar un estudiante al abordarla. Por supuesto que, como venimos mencionando, un análisis *a priori* en este sentido no es garantía de que se lleve a cabo en el aula, pues entran en escena la gestión del docente, para qué propone la consigna, etcétera. Aun reconociendo esto, queremos por un momento quitar de escena al docente y solo atender a la consigna. Veremos luego cómo esto se articula con las decisiones del docente a la hora de planificar y gestionar su clase.

El potencial matemático de una consigna

El concepto que entendemos que nos es útil para hacer esta valoración es el de *potencial matemático* (pm) *de una consigna*. El pm de una consigna alude a dos aspectos:

- a las *posibilidades de exploración* que la consigna habilita o no; y
- a las *posibilidades de argumentar* sobre la validez de la resolución o de la respuesta.

Consideramos valioso que una consigna pueda admitir que el estudiante tenga posibilidades de exploración y argumentación porque eso le permitiría tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, eventualmente podría recurrir a heurísticas (Rodríguez, 2012), utilizar distintas habilidades generales matemáticas (Delgado Rubí, 1997), reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer su manera de explicar el porqué de su respuesta, argumentar por qué le parece válida su propuesta, etcétera. De ese modo, se asimilaría al trabajo del matemático, lo que legitima el tipo de trabajo que se realizaría en el aula de Matemática del nivel que sea.

Respecto de las posibilidades de exploración, hay a su vez dos cuestiones que entendemos que las favorecen. Ellas son:

- que la consigna admita diferentes caminos de resolución; y
- que la consigna no incluya pasos a seguir, es decir que no esté pautado lo que el estudiante debe ir resolviendo, de qué manera y en qué momento.

De este modo, con la intención de valorar el pm de una consigna en un análisis *a priori*, primero analizamos los dos ejes: las posibilidades de exploración y las de argumentación. Luego, en función de dicho análisis proponemos realizar una valoración cualitativa, que iría entre dos extremos:

- un *PM pobre* (o débil), que se da en el caso en que la consigna no admite exploración y no requiere ningún tipo de argumentación; y
- un *PM rico*, que se da en el caso opuesto, es decir, ante una consigna que abre las posibilidades al estudiante para que él explore y argumente.

A continuación mostraremos ejemplos de consignas con pmrico y pmpobre. Resultará claro para el lector que habrá grises, es decir, casos en los cuales el pmno sea ni rico ni pobre. Mostraremos también ejemplos de este caso, en los que no nos preocupará cómo graduar la valoración del pm sino simplemente reconocer que está en una situación intermedia, y podremos expresar por qué no resultó rico, lo que nos dará elementos, como docentes, para cuando necesitemos reformular consignas.

Ejemplos de análisis del potencial matemático de las consignas

Ejemplo 1: consigna 1

“Se tiene un barril de madera que pesa 25 kg vacío y tiene capacidad para 100 litros de líquido. ¿Es posible que el barril pese 106,4 kg si se vierte en él aceite que pesa 0,74 kg por litro? Explicar”.

Analicemos las posibilidades de exploración y las de argumentación de esta consigna. Por un lado, observamos que no están indicados qué pasos realizar. Un estudiante podría intentar hacer una tabla con valores, como la que sigue, e intentar encontrar un resultado de 106,4 al tanteo, lo que tal vez no le resulte fácil pues la cantidad de litros es 110. En ese momento debería advertir que excedió la capacidad del barril y debería responder que no es posible.

Tabla de relaciones entre los litros de aceite, el peso del líquido y el peso del barril

Litros de aceite vertido	Peso del líquido vertido (kg)	Peso total del barril
1	0,74	25 + 0,74 = 25,74
2	1,48	26,48
3	2,22	27,22

Otra forma de pensarlo sería considerar la posibilidad extrema de verter 100 litros de un aceite que pesa 0,74 kg por cada litro. En ese caso, el peso del líquido sería de 74 kg como máximo posible, y al sumarle el peso del barril vacío daría un total de 99 kg, de modo que no se alcanzarían los 106,4 kg.

Otra posibilidad es plantear la ecuación $0{,}74 \,.\, x + 25 = 106{,}4$; en la que el miembro de la izquierda representa el peso total del barril para x litros vertidos, y el miembro de la derecha representa el peso sobre el que se está analizando la posibilidad o no de ser alcanzado. De la resolución analítica se obtienen 110 litros, por lo que en la respuesta debe indicarse que no es posible que el barril alcance el peso propuesto, pues este puede contener, según el dato de la consigna, como máximo 100 litros de aceite. También se podría hacer un gráfico cartesiano, plasmar allí puntos, trazar una recta, una semirrecta o un segmento (según, si se consideran o no las restricciones) y explorar valores a partir de él. De este modo, consideramos que la consigna admite posibilidades de exploración y de argumentación, razón por la cual valoramos el pm de esta consigna como *rico*.

Ejemplo 2: consigna 2

“Se tiene un barril de madera que pesa 25 kg vacío y tiene capacidad para 100 litros de líquido. Si el peso de cada litro de aceite que se utiliza es de 0,74 kg:

1) Calcular el peso del barril para 1 litro de aceite vertido. Repetir para 2 y 3 litros.
2) Llamando *x* a la cantidad de litros de aceite vertidos en el barril, hallar la expresión de la función de *x* que da el peso total del barril.
3) Utilizando la expresión hallada, calcular la cantidad de litros de aceite vertidos si el peso del barril es de 106,4 kg”.

Para responder a la primera consigna, solo se deben hacer las cuentas: un litro pesa 0,74 kg, por lo que el peso del barril es de 0,74 + 25; dos litros pesan 2 . 0,74 = 1,48, con lo que el barril pesa 1,48 + 25; y con tres litros, 3 . 0,74 = 2,22, de modo que el peso total del barril es de 2,22 + 25 = 27,22 kg. El primer ítem induce la resolución del segundo, de modo que se espera que el estudiante plantee la expresión: $f(x) = 0{,}74 \, . \, x + 25$. En el tercer punto, la consigna obliga a utilizar la expresión, por lo que se debería plantear $0{,}74 \, . \, x + 25 = 106{,}4$, y a partir de allí despejar el valor de *x*. Como la ecuación puede resolverse con el valor $x = 110$, es muy probable que no se cuestione si es o no factible esa respuesta, la cual debería descartarse retomando el dato de que la capacidad máxima del barril es de 100 litros. La consigna no invita a argumentar en ningún caso y no da posibilidades de decisión para resolverla. En cada paso, al estudiante se le indica exactamente qué debe hacer. De este modo, consideramos que la consigna no admite posibilidades de exploración y de argumentación, razón por la cual valoramos el pm de esta consigna como *pobre*.

Como caso intermedio, proponemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: consigna 3

“Se tiene un barril de madera que pesa 25 kg vacío y tiene capacidad para 100 litros de líquido. Si el peso de cada litro de aceite que se utiliza es de 0,74 kg:

1) Calcular el peso del barril para 1 litro de aceite vertido. Repetir para 2 y 3 litros.

2) Llamando *x* a la cantidad de litros de aceite vertidos en el barril, hallar la expresión de la función de *x* que da el peso total del barril.
3) Decidir si es posible que el barril pese 106,4 kg y expliquen su respuesta. (Sugerencia: releer las condiciones dadas en el enunciado)".

En este caso, nos focalizaremos en el tercer punto, pues los dos primeros son iguales al ejemplo anterior. Nótese que la consigna no dice expresamente que hay que usar la expresión anterior, lo que da algún tipo de libertad para tomar decisiones. Tal vez algún estudiante utilice la expresión como en el ejemplo anterior, u otro analice el caso extremo hallando el peso máximo que admite el barril y eso le dé información para responder y explicar. La sugerencia del último ítem permite pensar, en este análisis *a priori*, que quien redactó la consigna está suponiendo que el estudiante tomará la expresión hallada en el ítem 2, planteará la ecuación, la resolverá y, al hallar 110, no cotejará con el enunciado. Por ello, la consigna le pide al estudiante "releer las condiciones dadas en el enunciado", para evitar que se equivoque y responda incorrectamente.

En este caso, las posibilidades de exploración estarían asociadas al ítem 3, pero la sugerencia las disminuye. Asimismo, en ese punto se debe argumentar la respuesta, lo que nos haría pensar que hay posibilidades de argumentación, aunque, en la mirada global de la consigna, esta presencia es débil. En este caso, consideramos que el pm de la consigna no es *rico*, pero es levemente mejor que en el ejemplo anterior. Tal vez, el lector advierta que no nos es necesaria una graduación fina en este punto porque este análisis, a su vez, va dando elementos que nos permitirían pensar cómo mejorar la consigna para que la valoración de su potencial matemático se incremente.

En esta primera serie de tres ejemplos hemos considerado que las consignas tuvieran un contexto extramatemático. La intención es rebatir la idea, comúnmente instalada, de que las consignas con contexto extramatemático son valiosas para el estudiante. Esto, visto en términos del pm, no es siempre así. De hecho, hemos visto que las consignas presentadas podrían tener pm rico o débil.

Tampoco hay una vinculación entre que el enunciado sea intramatemático y el pm pobre. Veamos esto a continuación, con otros ejemplos de valoración del pm en consignas intramatemáticas.

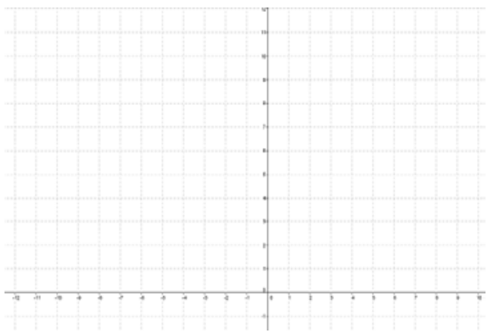
Ejemplo 4: consigna 4

"Dada *f*: R - {0} → R, *f(x)* = 1/*x* + 10, completar la siguiente tabla y graficar la hipérbola equilátera en el sistema de ejes".

Tabla de valores y ejes cartesianos para completar

x	*f(x)*
0	*No existe*
0,1	…
0,01	
4	
8	
12	

14	
-0,1	
-0,01	
-4	
-8	
-12	
-14	



En este caso, la exploración y la argumentación están ausentes, por lo que el pm de esta consigna es *pobre*.

Ejemplo 5: consigna 5

"Dada *f*: R - {0} → R, *f(x)* = 1/*x* + 10, anticipar qué tipo de gráfico podría representar esta función y qué tipo de gráfico seguro no se obtendrá. Explicar. ¿De qué información se necesitaría disponer para verificar la anticipación? Realizar el gráfico (libremente), comparar con la anticipación y explicar si lo obtenido concuerda o no con ella".

En este caso, la consigna habilita a argumentar qué tipo de gráfico podría obtenerse y a descartar otros gráficos de funciones previamente estudiadas. A modo de ejemplo, un estudiante podría afirmar que no será una recta, pues el tipo de función no se corresponde con el formato $y = mx + b$; otro estudiante podría asegurar que no es una recta horizontal, o que no será una parábola, etcétera. Cada uno propondrá su argumentación y no habrá una única respuesta posible. Al momento de tener que responder qué información requeriría, el estudiante podría pensar en hacer una tabla de valores, si fue un recurso usado en funciones anteriormente estudiadas, o bien podría decir que necesita recurrir a la teoría o buscar información sobre ese tipo de expresiones, lo que indica que hay distintos caminos para resolver y que el recorrido no está determinado. Al permitirse graficar como se desee, el estudiante deberá decidir si quiere hacer una tabla de valores o no. En el caso de que decida hacerla, deberá proponer los valores de x, la escala en el gráfico, etcétera. Mientras que si decide buscar información o utilizar un graficador en una computadora, sus caminos y decisiones a tomar serán otros. En un software graficador, según cuál sea, tal vez la curva se muestre como una recta vertical en el rango que está predeterminado por *default*. En este caso, deberán explicar qué ocurre y tomar otros caminos alternativos.

Esta tarea no solo permite explorar, sino que puede resolverse con distintos recursos y tiene una fuerte presencia de la argumentación, e incluso del contraste posible entre la anticipación y la argumentación, lo que hace que su pm sea *rico*.

Ejemplo 6: consigna 6

"Dada f: R - {0} → R, $f(x) = 1/x + 10$, anticipar qué tipo de gráfico seguro no se obtendrá en la representación gráfica de esta función. Explicar por qué. Realizar una tabla de valores para representar la función".

En este caso podemos observar que la consigna exige argumentación. Si bien hay un pedido explícito para hacerlo, la intención de *anticipar* implica un esfuerzo previo que obliga a imaginar la curva o tener algo en mente, antes de generar una justificación. Según el énfasis que el docente haya puesto en estudiar el dominio de funciones y su relación con el gráfico, es posible que algún estudiante considere el dominio de la función y proponga alguna anticipación del gráfico. También podría ocurrir que realice una tabla de valores inspirado en lo que la consigna pide a continuación. Por otro lado, la indicación para realizar el gráfico es explícita y no le abre al estudiante la posibilidad de realizar otros procedimientos. Si bien esta consigna cumple con una parte de lo que planteamos en el análisis del pm, hay aspectos que podrían fácilmente mejorarse para enriquecerlo. Podemos afirmar que esta consigna forma parte de aquellas en las que el pm es *intermedio*.

Sobre consignas metacognitivas

El concepto de metacognición

En este apartado, de corte teórico, queremos fundamentar por qué es importante incluir este tipo de consignas en la enseñanza de la matemática, cualquiera sea el nivel educativo.

Para ello, organizamos el escrito presentando primero, muy sintéticamente, qué significa el término *metacognición* y la terminología vinculada a dicho término. También analizamos las relaciones entre lo metacognitivo y el aprendizaje de la matemática para que quede de manifiesto la necesidad de incluir consignas metacognitivas en la clase de Matemática. En un segundo momento presentaremos algunas pautas para la propuesta de trabajo que el docente lleve a la clase de Matemática.

Terminología referida a la metacognición

El término *metacognición* suele referirse tanto al conocimiento de los propios procesos cognitivos como a la regulación de dichos procesos (Garófalo y Lester, 1985; Brown, 1987). El primer aspecto suele entenderse como *conocimiento metacognitivo*, y para matemática incluye:

- La autoevaluación y la toma de conciencia de las propias fortalezas, debilidades o limitaciones cognitivas y de otras características personales, relativas al proceso de aprendizaje, que pueden afectar el desempeño en general o ante una situación específica matemática.
- Las creencias acerca de cómo afectan las variables afectivas, como la ansiedad, la motivación o la perseverancia, entre otras, en el desempeño como aprendiz. Por ejemplo, saber que "ponerse nervioso" en un examen hace que haya más posibilidades de equivocarse.
- Las creencias acerca de lo que trata la matemática. Por ejemplo, que la matemática es "hacer cuentas".
- Las creencias acerca de la naturaleza de las situaciones matemáticas y de qué características hacen que estas sean de mayor o menor complejidad. Por ejemplo, los problemas en los que aparecen "letras" (variables) son difíciles.

- El conocimiento de las estrategias de aprendizaje disponibles: cómo se aplican y bajo qué condiciones algunas resultan más o menos efectivas. Por ejemplo, saber que para abordar situaciones matemáticas se tiene disponible la estrategia de analizar casos de forma sistemática, y que ello permite establecer regularidades. Este conocimiento incluye también reconocer que esa estrategia permite explorar y conjeturar sobre dicha regularidad pero no asegura su validez general.
- La conciencia de qué se espera frente a cierta situación, qué estrategias matemáticas pueden usarse, cuál es la más adecuada, qué tipo de respuesta se espera frente a dicha situación, etcétera.

El segundo aspecto al que alude el término *metacognición* incluye la regulación de los procesos cognitivos. Se considera que la disponibilidad de conocimientos metacognitivos hace que la persona pueda tener mayor control sobre su desempeño en el aprendizaje de la matemática. Justamente, tener, por ejemplo, un conocimiento metacognitivo adecuado acerca de las estrategias disponibles favorece que la persona pueda decidir y seleccionar de manera deliberada cuáles son las estrategias o procedimientos adecuados frente a la resolución de una determinada consigna.

Relaciones entre lo metacognitivo y el aprendizaje de la matemática. La necesidad de incluir consignas metacognitivas

La reconocida importancia de la metacognición en el ámbito de la educación se sostiene con el gran número de investigaciones que aportan evidencias sobre la estrecha relación entre lo metacognitivo y el desempeño cognitivo en situación de aprendizaje. Según Garófalo & Lester (1985), muchos investigadores están convencidos de que las creencias, decisiones y acciones metacognitivas son determinantes en el éxito o el fracaso en una gran variedad de situaciones. Incluso, sostienen que para tener una actuación cognitiva exitosa no es suficiente con poseer el conocimiento adecuado, sino que hay que tener la conciencia y el control de ese conocimiento y de cómo se lo ha aprendido.

En lo relativo al aprendizaje de la matemática, la metacognición previene el hacer irreflexivo o los "cálculos ciegos", y, además, les permite a los estudiantes utilizar los conocimientos adquiridos de manera flexible y estratégica (Vermeer, 1997; Verschaffel, 1999, en Desoete, 2011).

Existen diversos trabajos y estudios (Schoenfeld, 1992; Mevarech & Kramarski, 1997; Desoete *et al.*, 2003; Lai, 2011; Yang & Lee, 2013) que sugieren que la metacognición es "enseñable", y que los estudiantes que han recibido entrenamiento metacognitivo mejoran su desempeño matemático, por ejemplo, en la resolución de problemas y en el razonamiento matemático.

Por ello consideramos que la inclusión de consignas que apunten a desarrollar aspectos metacognitivos es de central importancia para el aprendizaje de la matemática, debido a que, además de lo expresado anteriormente, es a partir de este tipo de quehacer que los estudiantes podrán desarrollar un control sobre su desempeño en la resolución de diferentes situaciones, al advertir las condiciones de uso, las posibilidades y/o limitaciones de determinadas estrategias y procedimientos matemáticos y al tomar conciencia de las características que definen a las distintas situaciones matemáticas: qué tipo de respuestas o resoluciones son adecuadas o son las esperadas, qué tipo de estrategias o procedimientos son pertinentes, cuáles son los más adecuados, etcétera. Por otro lado, a nivel personal podrán advertir qué es lo que les resulta más difícil, cuáles son sus errores más comunes y, por ende, a qué aspectos de su desempeño deben prestar más atención. Creemos que sin esta toma de conciencia se debilita el aprendizaje.

Las *consignas metacognitivas* son aquellas que invitan al estudiante a realizar una reflexión sobre el propio hacer cognitivo implicado en la resolución de uno o varios ejercicios o problemas u otro tipo de consigna. Así, se vuelven objeto de reflexión, por ejemplo: el proceso seguido durante la resolución de un problema en cuanto a las estrategias utilizadas a lo largo del proceso, ya sea vinculado a lo que se piensa (que puede ser verbalizado o no) como a lo que se plasma por escrito como resultado del proceso de pensamiento; el hacer implicado en la lectura de un texto sobre temas de matemática; la aplicación de un cierto procedimiento en la resolución de un ejercicio; el propio desempeño en cuanto a los errores cometidos; la utilización de recursos tecnológicos, etcétera.

A partir de la caracterización del conocimiento metacognitivo dada anteriormente, consideramos que es posible diferenciar dos tipos de consignas: las referidas a lo *metacognitivo personal*, que apuntan a generar un conocimiento metacognitivo referido a las características individuales con relación al aprendizaje y a su interacción con el conocimiento sobre las tareas o situaciones y las estrategias; y las vinculadas a lo *metacognitivo matemático*, cuyo foco es el conocimiento metacognitivo referido a las estrategias, a las tareas o situaciones y a la interacción entre ambas, en este dominio de conocimiento.

Las consignas metacognitivas personales apuntan, por ejemplo, a que el estudiante reconozca qué consignas le resultaron fáciles o no, cómo se ve a sí mismo como un resolvedor de problemas, si se sintió frustrado, si advirtió algún tipo de bloqueo, qué considera que aprendió, etcétera.

Las consignas metacognitivas matemáticas, en cambio, apuntan a que *el estudiante reconozca* aprendizajes matemáticos alcanzados o no. Por ejemplo, habiendo realizado ciertos procedimientos, *lograr que el estudiante advierta* cuándo es conveniente usarlos, cuáles son sus alcances, qué tipo de condiciones deben cumplirse para poder ser utilizados, etcétera. Lo destacado en cursiva pretende enfatizar que el docente deberá lograr eso en *contraposición a explicar él a los estudiantes* cuáles son los alcances de los procedimientos, qué condiciones se deben cumplir para utilizarlos, etcétera. ¡Es clave esta diferencia! O, por ejemplo, considerando determinados tipos de problemas matemáticos, lograr *que el estudiante reconozca* qué características presentan, cuáles son los recursos matemáticos apropiados para su abordaje, qué tipo de respuesta es adecuada, qué estrategias no le funcionaron, cuáles sí, etcétera.

Cabe aclarar que ambos tipos de consignas persiguen generar conocimiento metacognitivo mediante la reflexión y la autoevaluación sobre el propio desempeño puesto en marcha en la resolución de consignas matemáticas. Es conveniente, para que dicha reflexión resulte fructífera, que lo involucrado en el desempeño sea complejo y con cuestiones interesantes para analizar. Así, resultará más provechoso que las consignas metacognitivas propongan una reflexión sobre el desempeño ligado a la resolución de una colección de consignas, y no en relación con una consigna aislada.

En este texto nos interesa focalizar, en mayor medida, en las consignas referidas a lo metacognitivo matemático, y en menor medida en las vinculadas a lo personal, pues, como veremos, estas podrían quedar en una simplificación que no aporta sustantivamente al aprendizaje.

A veces se confunde esta dimensión metacognitiva y se cree que con solamente solicitar la explicación de una resolución o la justificación de una respuesta se está desarrollando la capacidad metacognitiva del estudiante. Es importante entender que "pedir una explicación" no es una consigna metacognitiva, puesto que el estudiante puede responderlas sin necesariamente tomar consciencia de sus procesos cognitivos. Para serlo deberían proponer, por ejemplo, alguna reflexión sobre algún aspecto de dicha explicación o justificación.

Por otro lado, nos interesa destacar que, desde un posicionamiento de tipo constructivista, es claro que los conocimientos metacognitivos deben ser construidos por los estudiantes para que ocurra el aprendizaje. De esta manera, estamos convencidos de que la capacidad metacognitiva y de reflexión sobre los procesos cognitivos no se desarrolla a partir de una explicación del docente en una clase de tipo expositiva; la capacidad de reflexionar se desarrolla reflexionando y no recibiendo una explicación acerca de cómo se reflexiona. Por ello es de central importancia que las consignas metacognitivas tengan la intencionalidad explícita de involucrar al estudiante en prácticas de reflexión.

Ejemplos de consignas metacognitivas

A continuación presentamos algunos ejemplos de consignas metacognitivas vinculadas a una colección de consignas matemáticas a partir de las cuales nos proponemos desarrollar una propuesta que promueva la reflexión sobre los recursos numéricos y algebraicos, en relación con sus alcances y limitaciones, y, en particular sobre el registro algebraico, una reflexión en torno a los distintos usos de la variable simbolizada.[1]

Para contextualizar la propuesta, consideramos que los estudiantes a los que se les proponen estas consignas han trabajado con aspectos básicos de álgebra elemental, como el pasaje del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones. Sin embargo, suele suceder que, a pesar de sus conocimientos previos, frente a cierto tipo de situaciones problemáticas los estudiantes no adviertan que lo algebraico representa un recurso sumamente útil, y suelen basarse en la aritmética para resolver y dar una respuesta a la situación planteada.

Las consignas matemáticas a partir de las cuales se plantearán las consignas metacognitivas son las siguientes:

1) Un mago plantea el siguiente truco: "Piensen un número entero, multiplíquenlo por 2, a ese resultado súmenle 3, multiplíquenlo por 3, súmenle 4 veces el número que pensaron incrementado en 3 y, finalmente, réstenle 21. ¡El número que obtuvieron tiene como primera cifra el número que habían pensado!".

¿Qué puede decirse del truco que plantea el mago? ¿Funciona siempre, para cualquier número pensado? ¿Por qué?

[1] Estamos considerando el Modelo 3 uv (los tres usos de la variable). Ver, por ejemplo, Ursini *et al.,* 2005.

2) Determinar, en cada caso, si la afirmación propuesta es verdadera o falsa y justificar.

   a) Existen números reales que verifican la siguiente condición: si a su cuadrado se le suma la mitad de su triplo, el resultado es 5/2.

   b) Ningún número real verifica la condición de que al restarle 5, luego multiplicar el resultado por 6, y, finalmente, sumar 3 veces dicho número, el resultado obtenido sea 13.

3) Comparar el área de un rectángulo con el área del rectángulo que se obtiene al incrementar un lado en un 10% y al disminuir el otro en un 10%.[2]

4) Se obtiene un rectángulo a partir de un cuadrado al que se le incrementa la altura en 7 unidades y se le disminuye su base en 2 unidades. El área del rectángulo obtenido resulta igual al área del cuadrado inicial incrementada en 4. ¿Cuánto miden los lados del cuadrado inicial?

No desarrollaremos en detalle cómo se implementarían estas consignas ni cómo se gestionarían en clase. Nos interesa destacar cuáles son los aspectos matemáticos que nos proponemos trabajar con ellas y qué tipo de reflexión metacognitiva queremos provocar en el estudiante, para luego mostrar la redacción de las consignas metacognitivas.

Como dijimos anteriormente, nos interesa generar una reflexión metacognitiva en torno a dos aspectos. Por un lado, en relación con las estrategias numéricas y algebraicas, analizar centralmente las limitaciones de las numéricas y las fortalezas de las algebraicas; y por otro lado, en relación específica con lo algebraico, favorecer la reflexión sobre los distintos usos de la variable simbolizada. Frente a estas consignas, se espera que las estrategias que surjan en primera instancia sean las numéricas, especialmente las de considerar casos particulares. Suele suceder que a partir de esta estrategia los estudiantes establezcan conclusiones generales. En algunos casos dichas conclusiones son ciertas, por ejemplo con la situación del mago de la consigna 1. En dicha situación efectivamente se cumple que para todos los números reales elegidos el mago adivina, pero lo que no advierten los estudiantes es que su conclusión, basada en unos pocos casos, queda a nivel de conjetura, y que para ser validada es necesario apelar, por ejemplo, a lo algebraico. En la consigna 3 también ocurre que el análisis de casos particulares invita a elaborar conjeturas que resultan verdaderas, por

[2] Extraído de Carnelli *et al.* (2007).

ejemplo que el área del rectángulo obtenido es siempre menor que el área del cuadrado inicial, pero, nuevamente, debe advertirse la necesidad de recurrir a lo algebraico para validar dicha afirmación. Por último, es importante destacar que el hecho de advertir las bondades de las estrategias algebraicas implica no solo saber que estas permiten demostrar afirmaciones generales sino también reconocer que favorecen una mejor comprensión de la situación. Por ejemplo, en la consigna 3 permiten visualizar que el área del rectángulo obtenido será siempre un 1% menor que el área del cuadrado original, independientemente del lado que disminuye o aumenta; o bien, en el caso de la consigna 1, por qué el resultado obtenido es un número que tiene como primera cifra el número elegido.

En otras situaciones, lo numérico podría invitar a establecer una conclusión falsa, como podría ocurrir en la consigna 2 (b) o en la consigna 4, si no se encuentran casos particulares que cumplan las condiciones dadas en cada situación.

El único caso en que la estrategia de "analizar casos particulares" funciona es en la consigna 2 (a), en la que resulta sencillo encontrar un valor que verifique la condición.

De esta manera, interesa que los estudiantes adviertan las limitaciones de lo numérico y las bondades del álgebra para la resolución de situaciones. Además, es importante que adviertan y tomen conciencia de las diferencias en las estrategias algebraicas que resultan útiles frente a las consignas planteadas. Suele suceder que los estudiantes asocian la presencia de letras en álgebra con un único uso de la variable: como incógnita. En las consignas planteadas resulta necesario apelar a este uso (consignas 2 y 4), pero también a su uso como número general (consignas 1 y 3). Es importante que los estudiantes desarrollen la capacidad de advertir estos distintos usos y de reconocer cuándo apelar a uno u otro (incluso, advertir que, a lo largo de la resolución de una misma situación, la variable puede adoptar distintos usos).

El tipo de consignas metacognitivas matemáticas que podrían diseñarse para plantear una reflexión que favorezca la construcción de un conocimiento metacognitivo acerca de las estrategias numéricas y algebraicas, y sobre los distintos usos de la variable (letras) frente a la resolución de situaciones problemáticas, podrían ser del tipo de las que presentamos a continuación.

Ejemplo 7: consigna metacognitiva matemática

“Entre las situaciones resueltas, ¿cuáles consideran que pueden ser resueltas solo analizando casos particulares?, ¿en cuáles consideran que esto no es suficiente? En este último caso, ¿contaron con alguna otra estrategia para utilizar?, ¿cuál?”.

Luego de discutir las respuestas a estas preguntas, se podría proponer:

Ejemplo 8: consigna metacognitiva matemática

“Realicen un escrito acerca de lo trabajado en relación con las estrategias numéricas y las algebraicas. Imaginen que es una explicación para un compañero que no estuvo presente en la clase correspondiente, y que a partir de dicha explicación quieren que su compañero pueda responder a las siguientes preguntas: frente a una situación problemática, ¿cómo podrían reconocer cuándo no alcanza, para responder, con analizar casos particulares?, ¿cómo podrían reconocer cuándo es necesario utilizar otras estrategias?, ¿cuáles serían?, ¿cuáles son las características que tiene que tener la situación para que sea necesario recurrir a estrategias algebraicas?”.

En relación con los distintos usos de la variable (Ursini *et al.*, 2005), y a partir de haber comparado las estrategias numéricas y algebraicas en torno a su utilidad en la resolución de las consignas matemáticas, se pueden plantear las siguientes consignas metacognitivas:

Ejemplo 9: consigna metacognitiva matemática

“Luego de analizar las resoluciones en las que tuvieron necesariamente que utilizar letras para resolver, ¿consideran que el significado que tienen o el uso que hicieron de ellas fue siempre el mismo para todas las situaciones? Si ese fuera el caso, mencionen diferencias o similitudes en este uso que les dieron a las letras”.

Luego de discutir estas respuestas y de establecer que los distintos usos involucrados son *como incógnita* y *como número general*, se les podría plantear a los estudiantes la siguiente consigna, también de tipo metacogntiva:

Ejemplo 10: consigna metacognitiva matemática

"Frente a una situación que requiera apelar a estrategias algebraicas, ¿podrían reconocer cuál uso de la letra es el involucrado?, ¿les sería útil?, ¿para qué?".

Para cerrar esta sección, mostraremos ahora algunos ejemplos de consignas metacognitivas personales y, a partir de ellas, usos interesantes y otros donde estas quedarían trivializadas.

Ejemplo 11: consignas metacognitivas personales

1) ¿Alguna de las consignas que resolviste te resultó más difícil que otra? Si ese fue el caso, ¿podrías decir por qué motivo?
2) ¿Te sentiste bloqueado en alguno de los casos?, ¿qué hiciste al respecto?
3) ¿Qué aprendiste hoy?, ¿reconocés algo que no hayas terminado de entender?

Si el docente considera estas respuestas para luego trabajar con los estudiantes sobre los aspectos personales, emocionales y actitudinales, la información que saque de allí será clave. Si, en cambio, esto queda en un plano de anécdota ligada a esta resolución, estas consignas quedarán trivializadas, probablemente no producirán aprendizajes y no será interesante proponerlas.

Entendemos que, muchas veces, en la clase el docente hace preguntas de este estilo. Queremos resaltar nuevamente el valor de diseñarlas, que formen parte de las planificaciones y que tengan una presencia intencional en la clase de Matemática. Los estudiantes podrán advertir que se llevan algo más allá de la consigna matemática que resolvieron. Habrán reconocido que algo podría serles útil más adelante, o sabrán que hay resoluciones que pueden o no funcionarles, y eso no necesariamente debe generarles angustia, por ejemplo. Si, en cambio, proponemos consignas matemáticas muy interesantes, ricas desde lo matemático, pero no hacemos ningún esfuerzo para que los estudiantes reflexionen sobre ellas, estos podrían no ver nada de lo valioso que nosotros vemos. Cambian de consigna, resuelven muchas tareas, pero no capitalizan su trabajo. Sus aprendizajes serán más débiles.

Por último, cerraremos este capítulo con algunas sugerencias para el momento de redactar consignas.

Criterios para la redacción de consignas

En esta sección presentamos recomendaciones que permiten mejorar la redacción de los enunciados y lograr mayor riqueza matemática. Algunos de estos criterios solo sirven para las consignas matemáticas, otros son más generales y servirán también para las consignas metacognitivas.

Criterio 1: de tipo general (tanto para las consignas matemáticas como para las metacognitivas)

Cada consigna la redactaremos *tal como se la daríamos a nuestros estudiantes*. Es decir, evitaremos descripciones o enunciados imprecisos o incompletos a los que les falte desarrollo y que solo plasmen la *idea* de lo que se quiere plantear en la clase. Además, lo expresado debe estar cuidado en el uso de la lengua natural y en el lenguaje matemático. Las formulaciones, los modos de denominar los objetos, el uso de símbología, etc., deben ser precisos y correctos. Los enunciados deben plantear una cuestión a ser resuelta. Por ejemplo, una consigna que no cumple este criterio es "2x-1=7", dado que no expresa qué debe hacerse con esa ecuación. Podría ser resolverla o decidir sin resolver cuántas soluciones podría tener, o verificar si un número dado es o no solución, etc. Los objetos matemáticos "no hablan por sí solos", y nuestros enunciados deben expresar esto con absoluta claridad, precisión y adecuación matemática. Si esto no se cumple, no tiene sentido seguir analizando los siguientes criterios.

Ejemplo 12: si no atendemos al criterio (en una consigna matemática)

Podríamos escribir lo siguiente (por ejemplo, en una planificación de clase): "Les daré a mis estudiantes un problema sobre funciones lineales para que encuentren la recta con dos puntos dados como dato". El que lee no sabe si los puntos serán (1, 10000) y (2000, 3), elegidos especialmente para enfrentar a los estudiantes a la dificultad de cómo realizar el trazo del gráfico en escala, o (0,85; $\sqrt{(2/3)}$) y (-0,34; *ln*2), en donde habría que tomar ciertas decisiones sobre cómo operar; o si se dará un texto en lenguaje coloquial como para que el estudiante extraiga de allí los datos, o si los puntos estarán explicitados; no se sabe si se pondrá en discusión la existencia de una función lineal cuyo gráfico contenga los puntos dados o si se da como dato que seguro existe, etcétera.

Ejemplo 13: si atendemos al criterio (en una consigna matemática)

"Decidir si existe alguna función lineal cuyo gráfico contenga a los puntos (-2, 3) y (4, -1). En caso de que exista, decidir si es única y hallar su expresión. Explicar cualquiera sea la respuesta dada".

Esperamos que el lector advierta la diferencia entre la consigna recién propuesta y la siguiente: "Hallar la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos (-2, 3) y (4, -1)".

Ejemplo 14: si no atendemos al criterio (en una consigna metacognitiva)

No alcanza con poner en una planificación "les pediré a mis estudiantes que reflexionen sobre lo aprendido hoy", pues no resulta claro sobre qué aspecto o asunto puntual el profesor quiere que sus estudiantes se focalicen.

Ejemplo 15: si atendemos al criterio (en una consigna metacognitiva)

Si nos interesa, por ejemplo, que los estudiantes reconozcan que hallar la expresión fue fácil por los números involucrados, pero que esa tarea podría haberse complicado mucho con números en otros conjuntos numéricos, podríamos preguntar: "¿Les resultó fácil hallar la expresión?, ¿por qué? ¿Se les ocurre cómo podría haber sido un enunciado en el que no les resultara tan simple hallar la expresión?".

En cualquier caso es importante que las consignas no sean demasiado amplias, como por ejemplo "reflexionar sobre lo aprendido hoy", sobre todo cuando los estudiantes están aprendiendo a trabajar con este tipo de consignas, puesto que, por un lado, frente a tanta "libertad" los estudiantes se sienten perdidos y no saben qué escribir, qué se espera como respuesta, qué significa reflexionar o en qué, de todo lo que ha surgido en la clase, poner la atención, y por otro lado pueden elaborar una reflexión que se aleje de lo que al profesor le interesa particularmente.

Criterio 2: para las consignas matemáticas

Si el enunciado relata alguna situación en un "contexto real", proponer preguntas que tengan que ver con el relato y su contexto, y evitar hacer preguntas sobre objetos matemáticos, ya que no tendría sentido que alguien se hiciera esas preguntas si estuviera en ese contexto.

Ejemplo 16: si no atendemos al criterio

"Se tiene un barril de madera que pesa 25 kg vacío y tiene capacidad para 100 litros de líquido. Se usa para envasar un aceite que pesa 0,74 kg por litro. Hallar la expresión de la función que describa el peso del barril en función de los litros de aceite vertidos. Graficar".

Ejemplo 17: si atendemos al criterio

Tal como lo mencionamos en nuestros primeros ejemplos de este capítulo: "Se tiene un barril de madera que pesa 25 kg vacío y tiene capacidad para 100 litros de líquido. ¿Es posible que el barril pese 106,4 kg si se vierte aceite que pesa 0,74 kg por litro? Explicar".

Criterio 3: para las consignas matemáticas

En la medida de lo posible, evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de algo buscado.

Ejemplo 18: si no atendemos al criterio

"Hallar la parábola que contiene a los puntos (1, 2), (3, 4) y (5, 6)".

En este enunciado se le da información al estudiante sobre: a) la existencia de tal parábola, y b) que es única ("la" parábola).

Ejemplo 19: si atendemos al criterio

"Decidir si existe alguna parábola que contenga a los puntos (1, 2), (3, 4) y (5, 6). En caso de que exista, ¿sería única?".

Aquí se abriría la discusión en las dos direcciones, tanto de existencia como de unicidad. Incluso podría completarse con "justificar la respuesta dada" o pedidos de ese estilo, que inviten a argumentar la afirmación dada.

Criterio 4: para las consignas matemáticas

Evitar, en la medida de lo posible, pedir directamente que el estudiante halle fórmulas, resuelva ecuaciones, trace gráficos, etcétera. En cambio, hacer algunas preguntas donde "eso" sea un requerimiento tal que, solo contando con él, se pueda responder la pregunta. El ejemplo 16 es un ejemplo que no atiende a este criterio.

Ejemplo 20: si atendemos al criterio

"Una empresa transporta aceites almacenados en barriles. Uno de los tipos de barriles que utiliza la empresa pesa 30 kg vacío y tiene una capacidad de 100 litros. En este tipo de barril se transporta un aceite que pesa 0,861 kg por litro. El otro tipo de barril, hecho con un material más resistente pero más liviano, pesa 25 kg vacío y también tiene capacidad para 100 litros. Este segundo tipo de barril se usa para transportar un aceite más pesado: 0,981 kg por litro. La empresa necesita balancear una camioneta que traslada estos barriles. Si admitimos que los barriles pueden no ir llenos del todo, ¿es posible cargar un barril de cada tipo con sus correspondientes aceites y que ambos se equilibren en peso? Piensen en cómo le explicarían al empresario si es posible o no".

En esta consigna, los estudiantes no podrán decidir al tanteo si es posible o no, necesariamente deberán recurrir al álgebra, plantear una ecuación y decidir cuántos litros verter en los barriles.

Criterio 5: para las consignas matemáticas

Incluir el pedido de argumentos o justificaciones en los que los estudiantes deban explicar en lenguaje coloquial por qué valen sus afirmaciones. El ejemplo anterior atiende a este criterio.

Criterio 6: para las consignas matemáticas

Si una consigna plantea, por ejemplo, elegir la opción correcta entre varias opciones, tratar de pedir explicaciones de por qué se descarta el resto.

Esperamos que con estos ejemplos quede claro el espíritu de estos criterios. Dejamos abierta la posibilidad de sumar otros.

A modo de cierre

Consideramos que es valioso reconocer el potencial matemático de las consignas para poder valorarlas en un estadío previo a tener que seleccionarlas o ajustarlas para formar parte de la planificación de una clase o de la clase en sí. Muchas veces confiamos en textos o sitios de internet, ya que entendemos que nos ofrecen problemas, actividades o consignas valiosas para el aula, pero lamentablemente esto no siempre ocurre.

Hemos sumado las consignas metacognitivas cuyo valor altamente formativo intentamos resaltar. Asimismo, los criterios para redactar consignas son elementos valiosos no solo para diseñarlas desde cero, sino para adaptar alguna ya diseñada y mejorarla a raíz de los análisis que propusimos. Esperamos que los ejemplos ilustren lo trabajado.

Referencias bibliográficas

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. En F. Reiner y R. Kluwe (eds.), *Metacognition, motivation and understanding*, 65-116. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez, M. (2007). *Matemática para el aprestamiento universitario*. Ediciones ungs .

Delgado Rubí, J. (1997). *Las habilidades matemáticas*. Documento interno del Seminario-Taller de Didáctica de la Matemática. utn Regional Haedo.

Desoete, A. (2011). Metacognition and mathematics in the classroom. En J. E. Warnick, K. Warnick y A. Laffon. (eds.), *Educational Policy and Practice: The Good, the Bad and the Pseudoscience.* Nueva York: Nova Science Publishers.

Desoete, A., Roeyers, H. & De Clercq, A. (2003). Can off-line metacognition enhance mathematical problem solving? *Journal of Educational Psychology, 95*(1), 188-200.

Garófalo, J. & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Educaction, 16*(3), 163-176.

Lai, E. (2011). Metacognition: A literature review. Research report. http://images.pearsonassessments.com/images/tmrs/Metacognition_Literature_Review_Final.pdf.

Mevarech, Z. & Kramarski, B. (1997). Improve: A Multidimensional Method For Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research Journal 34*(2), 365-394.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comps.), *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, 155-177. ungs-eduvim .

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. En D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370. Nueva York: MacMillan.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Editorial Trillas.

Yang, C. & Lee, S. (2013). The Effect of Instruction in Cognitive and Metacognitive Strategies on Ninth-Grade Students Metacognitive Abilities. *New Waves. Educational Research and Development, 16*(1), 46-55.

Capítulo 3
Actividad matemática del estudiante

Introducción

Una cuestión clave para pensar en cómo enseñar matemática es tratar de identificar, previamente, cuál será la *actividad matemática que realizará el estudiante ante nuestra propuesta de enseñanza*. Imaginemos una clase tradicional de Matemática. Esta tendría aproximadamente el siguiente formato: el docente presenta un tema, define conceptos, indica procedimientos, da ejemplos de lo que espera que el estudiante aprenda a hacer, pone al estudiante a realizar actividades similares a las de los ejemplos y, eventualmente, muestra alguna aplicación de lo trabajado. Otras veces presenta al inicio de la clase una situación problemática con la intención de motivar el tema. Si luego de esto la clase sigue con la misma estructura que recién describimos, estaremos también ante una clase tradicional.

Pensemos por un momento: ¿qué es lo que hace el estudiante durante este tipo de clases? Podríamos responder varias cosas: copiar, dispersarse, nada, pensar, relacionar, etcétera. Lo que sabemos es que el profesor seguramente quiera que preste atención y que piense, que relacione lo que él hace con cosas previamente estudiadas. Si la propuesta del docente no favorece a que eso ocurra, tal vez ocurra, pero… ¿y si no ocurre? ¿Nos conformaríamos con dar una clase en la que, debido a nuestra propuesta, el estudiante solo copie o se disperse? Seguramente responderíamos que no nos conformamos. Tampoco nos conformaría que esté activo resolviendo largas listas de consignas casi idénticas. Con lo cual, ajustemos ahora a qué nos referimos con *estar activo*. Es al reflexionar sobre esto que empieza a tener sentido que pensemos en cómo hacer que nuestra propuesta de enseñanza ponga al estudiante en un rol activo de trabajo significativo con la matemática. Es decir, no tendrá escapatoria: nuestra propuesta como docentes debe ubicar al estudiante en un rol en la clase a partir del cual trabaje con autonomía (al menos gradual), y que sea artífice de sus decisiones. En este sentido nos referimos aquí a que el estudiante tenga un *rol activo*. Es desde esta perspectiva que presentamos en este capítulo un concepto que es clave a la hora de pensar en enseñar matemática, que nos hace mirar al estudiante e identificar qué es lo que efectivamente trabaja, produce, matemáticamente hablando, ante nuestra propuesta didáctica. Esta idea es la que denominamos *actividad matemática (AM) del estudiante*, y la ampliaremos a continuación.

En el capítulo 2 trabajamos sobre las consignas y sobre la noción de potencial matemático, el cual nos permite tener una valoración de las consignas. Allí advertimos que los enunciados matemáticos tienen un cierto potencial, pero que sería clave establecer qué uso se les dará en la clase. En este capítulo vamos en esa dirección; veremos cómo lograr que ese potencial matemático sea la antesala de una actividad matemática rica de los estudiantes. Hacemos aquí una advertencia: una consigna rica en pm no garantiza que el estudiante realice una am valiosa. Bastaría imaginar esa consigna inmersa en una clase tradicional en la que sea el docente quien la resuelve. Análogamente, también es falso suponer que una consigna con un pm pobre significa necesariamente que el estudiante no realice una am sustantiva. Tal vez no durante la realización de la consigna, pero en preguntas o consignas siguientes, incluso de tipo metacognitivas, podría fortalecerse la am. Empezamos a vislumbrar que la actividad matemática que realice el estudiante está muy ligada a decisiones que el docente tome para su clase.

Llegó el momento de ir más allá de la consigna y enmarcarla en las decisiones del docente para su clase. Para ello, retomaremos el concepto de *tarea*. Volveremos a dar la definición para esclarecer algunos puntos que en el capítulo 2 estaban prometidos, y luego daremos ejemplos.

Definición de tareas y ejemplos

Una *tarea* se conforma de tres partes que deberían estar en un todo coherente:

a) un contexto;

b) el objetivo que el docente plantea y para el cual "elige" esa consigna;

c) una consigna.

La *consigna* es exactamente lo que veníamos trabajando: es el enunciado dado al estudiante, tal como le llega.

Con el *contexto* nos referimos a una descripción que nos ubica en el tipo de trabajo que vienen realizando los estudiantes, los conocimientos previos de los que disponen, el tipo de consignas que han venido realizando, el momento en que se plantearía o llevaría a cabo esa consigna (por ejemplo, antes o después de haber explicado un tema nuevo), la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, la realiza el docente, etcétera) y, tal vez, una anticipación de lo que se trabajará luego.

El objetivo que el docente plantea es el objetivo de aprendizaje, es decir, lo que él quiere que su estudiante aprenda (o comience a aprender) a partir de su clase.

Vale la pena distinguir aquí que los objetivos no son los *propósitos* del docente. Con esta última terminología nos referimos a cuestiones que le interesan al docente y que él intentará lograr en su clase. Un propósito podría ser favorecer la comunicación entre estudiantes. Esto es un propósito, pues el docente se lo propone, intentará lograrlo, pero si no lo logra, ¡nada pasa! Mientras que los objetivos son lo que el docente evaluará; en ellos el docente plasma logros irrenunciables que pretende que sus estudiantes alcancen.

Decimos que las tareas deben tener coherencia entre sus partes pues el objetivo debe estar en consonancia con el contexto y la consigna debe responder al objetivo y ser razonable para el contexto. De no darse esta coherencia, habría un problema inicial en la formulación de la tarea que habría que corregir.

Sobre el análisis de la coherencia en tareas

Ya sabemos que una tarea se conforma de tres partes. El contexto nos comunica cómo han venido trabajando los estudiantes, qué conocimientos tienen y cuáles aún no, qué tipo de trabajo han estado haciendo, con qué modalidad, qué tipo de trabajo se hará a continuación de la tarea propuesta, etcétera. Noten que el contexto no solo habla de qué se trabajó y cómo antes de llevar a cabo la consigna, sino que da idea de lo que el profesor piensa hacer luego de realizar el trabajo. Es un encuadre de “antes y después” que permite al lector entender la ubicación de la propuesta en las clases. Cuando un docente conoce ese contexto, plantea un objetivo de aprendizaje para sus estudiantes y luego elige, modifica o diseña una consigna (o varias) para trabajar en clase. Hay que pensar que esa elección de la consigna está hecha por el docente pensando que cuando el estudiante la resuelva estará acercándose o alcanzando el objetivo. Pero también el profesor debe pensar cómo planteará el trabajo en clase alrededor de esa consigna.

Muchas veces ocurre que el docente primero ofrece una consigna, los estudiantes trabajan y luego de ello, a través de preguntas a toda la clase, se alcanza el objetivo. Es clave darse cuenta de esto. Es decir, si resuelven la consigna, ¿el objetivo es alcanzado? o, luego de resolver la consigna, ¿es imperioso plantear otras cuestiones para alcanzar el objetivo?

Vamos a tratar de ayudar al lector a tener aguzada la mirada para detectar estas cuestiones, y otras, que atañen a lo que llamamos la coherencia de la tarea.

En realidad, para que una tarea resulte coherente, debemos revisar la coherencia entre:

a) contexto-consigna

b) contexto-objetivo

c) objetivo-consigna

Para cada uno de estos pares vamos a plantear una serie de preguntas, a modo orientativo, que habría que responder positivamente para considerar que se da esa coherencia. Luego, presentamos ejemplos que cumplan y que no cumplan esta coherencia.

Coherencia analizada	Preguntas orientativas
Contexto-consigna	¿El modo de trabajo al que los estudiantes están acostumbrados y el modo de trabajo propuesto para esta consigna están en sintonía o hay mucha disparidad? Con los conocimientos previos declarados en el contexto, ¿es posible que el estudiante resuelva la consigna?, el nivel de complejidad ¿es accesible como para que puedan abordarla con lo trabajado?
Contexto-objetivo	Con los conocimientos previos declarados en el contexto, ¿es alcanzable el objetivo?, ¿es pertinente en relación con lo que el contexto indica que se ha trabajado o se pretende trabajar?
Objetivo-consigna	Si el estudiante resuelve lo que está expresado en la consigna, por cualquier camino que elija utilizar, ¿alcanza el objetivo? No debería ocurrir que por alguna vía de resolución, el objetivo no sea alcanzado. Es decir, ¿la resolución "obliga" al estudiante a alcanzar el objetivo?

Consideramos que una tarea es coherente cuando las tres partes analizadas lo son. En tal caso, y solo si estamos antes tareas coherentes, tiene sentido avanzar en el análisis de la valoración de la actividad matemática de los estudiantes.

Ejemplos:

Ejemplo 1: tarea coherente

Contexto: Los estudiantes conocen y saben resolver analítica y gráficamente ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas y polinómicas (en casos sencillos), han trabajado con álgebra elemental, con conjuntos numéricos y suelen discutir el porqué de la validez de lo que hacen. Están acostumbrados al trabajo tanto individual como en pequeños grupos o de a pares. El docente está interesado en trabajar cuestiones de argumentación. Les da cada ítem por separado. No corrige las respuestas del ítem (a), simplemente cuando terminan de resolver, les da el ítem (b). Propone un trabajo individual.
Objetivo: Que el estudiante analice la validez de afirmaciones matemáticas.

Consigna:
Decidir, justificando adecuadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) No existe ningún número real cuyo duplo sea menor que su mitad.

b) Los únicos números reales que elevados al cuadrado dan un resultado menor que el mismo número son los valores entre 0 y 1.

Es importante aclarar que para poder encarar el análisis sobre la coherencia de una tarea es imprescindible realizar una anticipación de posibles resoluciones que la consigna habilita. Sin esta anticipación no tendremos disponibles las evidencias necesarias para responder de manera específica las preguntas sugeridas en la tabla presentada anteriormente.

Dejamos a continuación una *anticipación de posibles resoluciones que la consigna habilita*.

Resolución 1
Una forma de analizar la validez de las afirmaciones es probando con valores numéricos. Por ejemplo, para el ítem (a) se puede armar una tabla:

Afirmación: no existe ningún número real cuyo duplo sea menor que su mitad			
Número real elegido	**duplo**	**mitad**	**observación**
1	2.1 =2	½	El duplo NO es menor que la mitad
2	2.2=4	2/2=1	El duplo NO es menor que la mitad
5/2	(5/2).2=5	(5/2)/2=5/4	El duplo NO es menor que la mitad
-1	(-1).2=-2	-1/2	El duplo es menor que la mitad (contraejemplo)

Si los valores seleccionados corresponden únicamente a números reales positivos, la conclusión (errónea) a la que probablemente lleguen los estudiantes es que la afirmación es verdadera. Pero si analizan también para valores negativos, podrán arribar a una respuesta correcta. Bastará mostrar un contraejemplo para asegurar la falsedad de la afirmación.

Para el ítem (b) también puede estudiarse la validez de la afirmación a partir de valores numéricos.

Afirmación: los únicos números reales que elevados al cuadrado dan un resultado menor que el mismo número son los valores entre 0 y 1		
Número real elegido	**Cuadrado del número**	**Observación**
0	$0^2=0$	El resultado del cuadrado del número NO es menor que el mismo número
1/2	$(1/2)^2=1/4$	El resultado del cuadrado del número es menor que el mismo número
1/4	$(1/4)^2=1/16$	El resultado del cuadrado del número es menor que el mismo número
1	$1^2=1$	El resultado del cuadrado del número NO es menor que el mismo número
2	$2^2=4$	El resultado del cuadrado del número NO es menor que el mismo número
-1/2	$(-1/2)^2=1/4$	El resultado del cuadrado del número NO es menor que el mismo número
-1/4	$(-1/4)^2=1/16$	El resultado del cuadrado del número NO es menor que el mismo número

A partir de este tipo de tablas, los estudiantes pueden convencerse de que la afirmación es verdadera, sin advertir que, si bien la conclusión es correcta, trabajar únicamente desde "lo numérico" presenta limitaciones para garantizar la veracidad de la afirmación: solo permite generar una conjetura, que luego debe demostrarse apelando a otras estrategias (no numéricas).

Resolución 2

Otra forma de encarar el análisis de la validez de las afirmaciones es a partir de herramientas algebraicas: interpretando las condiciones planteadas como inecuaciones en el conjunto de los números reales.

Para el ítem (a), una manera de hacer un planteo algebraico sería la siguiente: no existe valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $2x < \frac{x}{2}$.

Resolviendo la inecuación $2x < \frac{x}{2}$ se llega a que los valores reales que verifican la desigualdad son aquellos que cumplen la condición $x < 0$. De esta manera, los estudiantes pueden responder que la afirmación es falsa argumentando que para cualquier número real negativo, la condición $2x < \frac{x}{2}$ se verifica. De este modo no solo probarían que es falsa la afirmación, sino que conocerían la totalidad de valores que, aisladamente, podrían servir como contraejemplo.

Para el ítem (b) se podría replantear la afirmación de la siguiente manera: con $x \in \mathbb{R}$, la condición $x^2 < x$ solo se verifica si $0 < x < 1$.

Al resolver la inecuación $x^2 < x$ se llega a la conclusión de que la desigualdad se verifica solamente cuando $x > 0 \wedge x < 1$, lo que permite corroborar que la afirmación es verdadera. Asimismo, esta resolución deja en evidencia que no habrá forma de responderla correctamente sin un argumento general.

Resolución 3

Una tercera forma de encarar el análisis de la validez de las afirmaciones es apelando a conceptos básicos de funciones y de la resolución gráfica de inecuaciones.

Para el ítem (a) puede interpretarse que las expresiones simbólicas involucradas en la inecuación corresponden a funciones lineales con dominio $\mathbb{R}$. De esta manera podría analizarse la condición $2x < \frac{x}{2}$ a partir de un gráfico cartesiano en el que se realicen los gráficos de ambas funciones lineales: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. Tomando como referencia el punto de intersección entre ambas funciones, que es el punto (0,0), puede verificarse que para $x > 0$ el gráfico de la función f "está por encima" del gráfico de g, lo que permite determinar que para el rango indicado vale $f > g$. Y si se analiza para $x < 0$, resulta que $f < g$, pues el gráfico de la función f "está por debajo" del gráfico de g. De esta manera puede arribarse a la misma conclusión planteada en la resolución 2: la afirmación es falsa, argumentando que para cualquier número menor real negativo, como por ejemplo $x = -1$, la condición $2x < \frac{x}{2}$ se verifica.

De manera análoga puede plantearse el ítem (b), a partir de trabajar con los gráficos de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$. Tomando como referencia los puntos de intersección entre ambas funciones, los cuales son (0,0) y (1,1), puede corroborarse gráficamente que el gráfico de f "está por debajo" del gráfico de g únicamente cuando $x \in (0,1)$. Con este argumento, los estudiantes pueden justificar que la afirmación es verdadera.

En esta resolución, los argumentos visuales descansan en el conocimiento de las propiedades de las funciones polinómicas involucradas, como por ejemplo la continuidad.

Coherencia analizada	**Preguntas orientativas**	
Contexto-consigna	¿El modo de trabajo al que los estudiantes están acostumbrados y el modo de trabajo propuesto para esta consigna están en sintonía o hay mucha disparidad? Con los conocimientos previos, ¿es posible resolver la consigna?, el nivel de complejidad ¿es accesible como para que puedan abordarla con lo trabajado?	Los estudiantes han trabajado de distintas maneras. Aquí se les plantea el trabajo individual para que cada uno exprese lo que considera que es suficiente para argumentar la veracidad o falsedad de los enunciados. Como puede apreciarse en las resoluciones presentadas, entendemos que es posible resolver la consigna con los conocimientos adquiridos sobre conjuntos numéricos, álgebra y funciones elementales. Probablemente el estudiante se quede en un plano de “dar ejemplos numéricos” como única forma de argumentar lo que sería suficiente en el ítem (a), pero no en el (b).
Contexto-objetivo	Con los conocimientos previos, ¿es alcanzable el objetivo?, ¿es pertinente?	Consideramos que es alcanzable el objetivo, pues están inmersos en un tipo de trabajo en el que analizan validez de proposiciones. Es probable que el estudiante analice erróneamente la validez, como se menciona en la resolución 1 del ítem (a), o que no advierta que probar con ejemplos no le alcanza para garantizar en la resolución 1 del ítem (b) que únicamente en el rango considerado se verifica la desigualdad. Si fuera el caso, al docente le servirá verlo para actuar en consecuencia.
Objetivo-consigna	Si el estudiante resuelve lo que está expresado en la consigna, por cualquier camino que lo haga, ¿alcanza el objetivo? No debería ocurrir que por algúna vía de resolución, el objetivo no sea alcanzado. Es decir, ¿la resolución “obliga” al estudiante a alcanzar el objetivo?	Como puede observarse en la anticipación de posibles resoluciones, y aunque resuelva erróneamente, el estudiante debe argumentar, pues es lo que la consigna solicita en ambos ítems. En cada una de las tres resoluciones presentadas se brindan argumentos (numéricos, gráficos o algebraicos) que permiten fundamentar la respuesta dada y que son evidencia de la coherencia estudiada.
Entendemos que la tarea es coherente		

Ejemplo 2: falla de la coherencia objetivo-consigna

Contexto: Los estudiantes conocen y saben resolver analítica y gráficamente ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas y polinómicas (en casos sencillos), han trabajado con álgebra elemental, con conjuntos numéricos y suelen discutir el porqué de la validez de lo que hacen. Están acostumbrados al trabajo tanto individual como en pequeños grupos o de a pares. El docente está interesado en trabajar cuestiones de argumentación. Les da cada ítem por separado. No corrige las respuestas del ítem (a) cuando terminan de resolverlo, les da el ítem (b). Propone un trabajo individual.

Objetivo: Que el estudiante reconozca en qué casos necesita apelar a los símbolos para tener certeza de la validez de sus afirmaciones

Consigna:

Decidir, justificando adecuadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) No existe ningún número real cuyo duplo sea menor que su mitad.

b) Los únicos números reales que elevados al cuadrado dan un resultado menor que el mismo número son los valores entre 0 y 1.

Como se mencionó anteriormente, antes de encarar el análisis de coherencia es imprescindible estudiar diferentes resoluciones para tener un mejor conocimiento de la consigna y poder contar con evidencias que fundamenten el análisis. A continuación se trabajará con la misma consigna del ejemplo 1, por lo que la anticipación de resoluciones es la desarrollada en dicho ejemplo.

Coherencia analizada	Preguntas orientativas	
Contexto-consigna	¿El modo de trabajo que los estudiantes vienen acostumbrados a realizar y el modo de trabajo propuesto para esta consigna, resultan en sintonía o hay mucha disparidad? Con los conocimientos previos, ¿es posible resolver la consigna?, el nivel de complejidad ¿es accesible como para que puedan abordarla con lo trabajado?	Ídem anterior

Contexto-objetivo	Con los conocimientos previos, ¿se ve alcanzable el objetivo?, ¿es pertinente?	El objetivo de "reconocer" en qué casos se debe apelar a los símbolos porque lo numérico (los ejemplos o contraejemplos) no alcanza es valioso, pertinente y central.
Objetivo-consigna	Si el estudiante resuelve lo que está expresado en la consigna, por cualquier camino que lo haga, ¿alcanza el objetivo? No debería ocurrir que por algúna vía de resolución, el objetivo no sea alcanzado. Es decir, ¿la resolución "obliga" al estudiante a alcanzar el objetivo?	Aquí la coherencia falla. El estudiante podría resolver la consigna correctamente. Es decir, proponer un contraejemplo en el ítem (a), expresar y trabajar simbólicamente en el (b) y no pensar en qué casos necesita apelar a los símbolos para tener certeza de la validez de sus afirmaciones, que es lo que el objetivo obliga a que el estudiante reconozca.
Entendemos que la tarea NO es coherente		

En este segundo caso, se podría mejorar la tarea para que resulte coherente el par objetivo-consigna. Por ejemplo, del siguiente modo.

Contexto: Los estudiantes conocen y saben resolver analítica y gráficamente ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas y polinómicas (en casos sencillos), han trabajado con álgebra elemental, con conjuntos numéricos y suelen discutir el porqué de la validez de lo que hacen. Están acostumbrados al trabajo tanto individual como en pequeños grupos o de a pares. El docente está interesado en trabajar cuestiones de argumentación. Les da cada ítem por separado. No corrige las respuestas del ítem (a) ni del ítem (b). Propone un trabajo individual en los dos primeros ítems y con toda la clase en las siguientes preguntas.

Objetivo: Que el estudiante reconozca en qué casos necesita apelar a los símbolos para tener certeza de la validez de sus afirmaciones.

Consigna:

Decidir, justificando adecuadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) No existe ningún número real cuyo duplo sea menor que su mitad.

b) Los únicos números reales que elevados al cuadrado dan un resultado menor que el mismo número son los valores entre 0 y 1.

Entre todos vamos a trabajar las siguientes preguntas. Les doy un rato para que las piensen y conversamos.

c) Pensar si resolvieron del mismo modo el ítem (a) y el (b). Identificar en cada caso lo que les basta utilizar para tener certeza de si es verdadera o falsa.

d) ¿A qué se debe que utilicen distintos recursos para tener certeza?

Luego de avanzada la discusión, les pide:

e) Dejar expresado por escrito ante qué tipo de pregunta deberán, necesariamente, utilizar símbolos para resolver y cuándo no es necesario.

Notarán que lo que en este caso asegura la coherencia son las preguntas que el docente propone a la clase que son posteriores a la resolución matemática. Lo que invita a la reflexión metacognitiva es posterior "al hacer", "al resolver". El docente obliga a que los estudiantes analicen en qué condiciones es imprescindible usar los símbolos. Esto hace que la tarea sea coherente.

Ejemplo 3: falla de la coherencia contexto-objetivo

Contexto: Los estudiantes han trabajado con conjuntos numéricos, operaciones y argumentación. Aún no han iniciado el trabajo algebraico. El docente está interesado en seguir trabajando cuestiones de argumentación. Les propone trabajar en grupos.
Objetivo: Que el estudiante argumente adecuadamente sobre la validez de proposiciones matemáticas universales.
Consigna:
Decidir, justificando adecuadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) No existe ningún número real cuyo duplo sea menor que su mitad.

b) Los únicos números reales que elevados al cuadrado dan un resultado menor que el mismo número son los valores entre 0 y 1.

Nuevamente, en este ejemplo, la anticipación de resoluciones, en la que basamos el análisis, es la desarrollada en el ejemplo 1. Aquí la falta de coherencia contexto-objetivo se pone de manifiesto porque los estudiantes aún no disponen de herramientas para utilizar argumentos de tipo "universal". Solo es posible sostener la validez de una proposición que valga para infinitos casos vía el álgebra o las funciones, temas que los estudiantes desconocen y que el docente no tiene intención de que se construyan aquí. Esto último puede notarse porque el foco del docente, plasmado en el objetivo, no es que el estudiante se aproxime a la necesidad de disponer de argumentos más generales o a conocer que "lo numérico no es suficiente".

Podría haber sido más interesante que el planteo del docente se enfocara en que el estudiante advierta que lo numérico no es suficiente. Este último sería un objetivo cognitivamente exigente (de tipo metacognitivo pues es él quien debe advertir algo), apropiado al tipo de trabajo realizado con números y argumentación y previo a lo simbólico. Bastaría en ese punto que quede señalado que no basta con lo que se ha aprendido y habrá que retomar el tema luego de trabajar cuestiones simbólicas o funcionales.

Ejemplo 4: falla de la coherencia contexto-consigna

Contexto: Los estudiantes conocen y han trabajado con funciones elementales: lineales, cuadráticas, polinómicas, homográficas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Conocen el concepto de derivadas y saben calcular derivadas de las polinómicas. Están acostumbrados al trabajo tanto individual como en pequeños grupos o de a pares. Nunca han trabajado con computadoras en clase ni tuvieron tarea domiciliaria para resolver con software ni en internet. El docente está interesado en trabajar con conjeturas planteadas por los estudiantes para luego analizar su validez. Propone un trabajo de a pares utilizando GeoGebra.
Objetivo: Que el estudiante plantee conjeturas matemáticas.
Consigna:

a) Realizar la siguiente construcción en GeoGebra:

   i) Construir un deslizador a que vaya de 0,5 a 4.

   ii) Definir por barra de entrada la función f(x)=a^x, es decir, $f(x)=a^x$.

   iii) Utilizar el comando Derivada [<Función>] para definir la función f' mediante Derivada[f]

b) Observar que, al mover el deslizador a, como es de esperar, varían tanto el gráfico de f como el de f'. Utilizar este recurso para buscar una función cuya derivada sea igual a la de la función misma.

Aquí falla la coherencia contexto-consigna porque la consigna requiere conocer algo mínimo de GeoGebra. Es probable que los estudiantes no sepan qué significa utilizar deslizadores, tal vez no hayan trabajado con el software antes (al menos no con este docente) y el planteo es sofisticado pues están obligados a hacer la construcción para luego conjeturar.

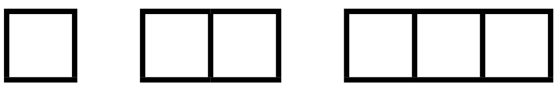
Ejemplo 5: coherencia objetivo-consigna débil

Incluimos este ejemplo para mostrar un caso –entro otros– en el que el profesor reconoce que una tarea tiene debilidad en la coherencia objetivo-consigna, pero igual decide llevarla a la clase. Esta debilidad se debe a que si un estudiante resuelve de un cierto modo no estaría alcanzando el objetivo, pero encuentra que otros varios caminos de resolución sí le permitirían aproximarse a él, por lo que igualmente lleva la tarea a la clase.
Contexto: Los estudiantes conocen las ecuaciones lineales, han trabajado transponiendo términos en ecuaciones descontextualizadas y han planteado simbólicamente ecuaciones a partir de enunciados en lengua natural. Esta consigna se inserta en un momento de repaso luego de haber trabajado en la clase con consignas de construcción de fórmulas a partir de una secuencia y el profesor indica que los estudiantes trabajarán de manera individual.
Objetivo: Que el estudiante plantee y resuelva ecuaciones
Consigna: Se tienen fósforos del mismo tamaño y se arman con ellos cuadrados en los que cada lado es un fósforo. La figura que ocupa el primer lugar está formada por un cuadrado, la que ocupa el segundo lugar está formada por dos cuadrados que comparten un lado, la figura que ocupa el tercer lugar está formada por tres cuadrados de modo que cada cuadrado con su consecutivo comparten un lado, y así sucesivamente…

¿Podría ser que en alguna ubicación existiera una figura que tuviera exactamente 15840 fósforos?

Vamos a hacer algunas posibles resoluciones de estudiantes.

Resolución 1.



La cantidad utilizada de fósforos es:

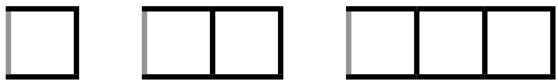
Para la primera figura de la sucesión:............................4
Segunda figura: ....4 + 3
Tercera figura: ....4 + 2.3

Cuarta figura:..4 + 3.3
Quinta figura: ....4 + 4.3
...
En general, en la figura n-ésima (con n un natural) ....4 + (n-1).3

Para analizar si con 15840 sobrarán fósforos, planteamos 4 + (n-1).3 = 15840. Resolvemos y resulta (n-1).3=15840-4 de donde n-1= 15836/3

Como 15836/3 no da un número natural, n – 1 = 5278,66666…. Lo que resultaría que n debería ser 5279,666…lo que es absurdo por ser n natural. Esto nos dice que no es posible que una de las figuras de la sucesión requiera exactamente 15840 fósforos.

Resolución 2.



La cantidad utilizada de fósforos es:

Para la primera figura de la sucesión: ....1 + 3
(el 1 corresponde al fósforo marcado en gris)
Segunda figura: ....1 + 2.3
Tercera figura: ....1 + 3.3
Cuarta figura:..1 + 4.3
Quinta figura: ....1 + 5.3
...
En general, en la figura n-ésima (con n un natural) ....1 + n.3

Análogamente al caso de recién, se plantea 1 + 3n = 15840 y la resolución arroja: n = 5279,6666…. Lo que debe entenderse como que no es posible formar ninguna figura con exactamente 15840 fósforos.

En estos dos casos, el estudiante efectivamente plantea y resuelve ecuaciones, que es lo que el objetivo plantea.

Habría otras resoluciones posibles que también atenderían al objetivo partiendo de otras expresiones equivalentes a las señaladas (que indican la cantidad de fósforos en función del número de la figura en la sucesión).

Resolución 3.

Otra resolución posible sería, partiendo de analizar la misma figura que la usada en la resolución 2, que un estudiante observe que el número de fósforos que se utiliza siempre se obtiene sumándole 1 a algún múltiplo de 3. Entonces, para analizar si alguna figura de la sucesión utilizara exactamente 15840 fósforos

esto significaría que 15840 – 1 debe ser un múltiplo de 3. Entonces todo se reduce a decidir si 15839 es múltiplo de 3. Sumando los dígitos que componen al número, encontramos 1 + 5 + 8 + 3 + 9 = 26 que no es múltiplo de 3. Por lo tanto, tras el uso de esta regla, resulta que podemos responder que es imposible construir alguna figura con esa cantidad de fósforos.
En esta última resolución, notamos que no fue necesario plantear ni resolver ecuaciones, por lo que esta consigna *no obligó* al estudiante a alcanzar el objetivo.

Como vemos en este caso, varias resoluciones posibles sí habilitarían a trabajar el objetivo planteado, pero hemos encontrado una (al menos) que no. En este caso, la coherencia se debilita… Igualmente, el docente podría querer llevar al aula esta tarea y estará alerta para ver cómo la resuelven los estudiantes.

Cabe señalar que si se diera el caso de que un estudiante resolviera como en el último caso y evadiera el objetivo, el docente no debería forzarlo a resolver por otro camino. Sencillamente, tendrá que proponer otra consigna para trabajar el objetivo planteado.

Veamos algunos ejemplos de tareas y cómo, intuitivamente, entendemos que el contexto y el objetivo pueden cambiar el sentido de la consigna y de la am que el estudiante lleve a cabo, una cuestión a la que nos acercaremos informalmente por ahora, pues no hemos definido aún esta noción.

Tarea 1

Contexto: Los estudiantes conocen las ecuaciones lineales, han trabajado transponiendo términos en ecuaciones descontextualizadas y han planteado simbólicamente ecuaciones a partir de enunciados en lengua natural. Esta consigna se inserta en un momento de repaso y el profesor indica que los estudiantes trabajarán de manera individual.
Objetivo: Que el estudiante plantee y resuelva ecuaciones.
Consigna: Un padre tiene 35 años y su hijo, 5. ¿Es posible que al cabo de algunos años la edad del padre sea tres veces mayor que la edad del hijo? Explicar.

Tarea 2

Contexto: Los estudiantes han trabajado en formular simbólicamente situaciones en las que reconocen algún patrón de comportamiento y no conocen las ecuaciones lineales. El docente espera que puedan encontrar por tanteo la respuesta para luego proponer otra situación en la que el tanteo no les resulte una estrategia útil. Propone trabajar en grupos.

Objetivo: Que el estudiante explore numéricamente una situación dada en lenguaje natural.

Consigna: Un padre tiene 35 años y su hijo, 5. ¿Es posible que al cabo de algunos años la edad del padre sea tres veces mayor que la edad del hijo? Explicar.

Aunque compartan la consigna, seguramente percibamos diferencias entre ambas tareas. Notamos que en ellas el docente planteó una modalidad de trabajo que requiere que sea el estudiante quien las lleve a cabo, lo que ubica a este en un rol protagónico frente al trabajo a realizar. A esa actividad (desempeño, trabajo, quehacer) que el estudiante realiza ante una tarea, la denominamos *actividad matemática del estudiante* (am).

Más que lograr precisión respecto de su definición, nos interesa *valorar la AM que realiza un estudiante frente a una tarea que propone el docente*.

Para ello proponemos nuevamente atender a dos ejes:

- el potencial matemático (pm) de la consigna; y
- el rol del estudiante y la exigencia cognitiva esperada (que se desprenden del contexto y del objetivo).

Consideramos que *la AM que realiza un estudiante frente a una tarea será valiosa* si el pm de la consigna no es pobre, si el rol que el docente le asigna al estudiante es activo (el estudiante es quien encara la resolución de la tarea) y si el objetivo que persigue el docente es cognitivamente exigente.

En el otro extremo de la valoración, consideramos que *la AM que realiza un estudiante frente a una tarea será pobre/baja* si el pm de la consigna es pobre, si el docente propone un tipo de trabajo en el que el rol del estudiante es pasivo (se advierte esto cuando quien resuelve la consigna es el propio docente) y/o si el objetivo no es exigente. Incluso, si el objetivo que persigue el docente fuera cognitivamente exigente, probablemente el estudiante no lo alcance si la decisión del docente es de resolver él la consigna.

Podemos ver que hay diversas posibilidades y matices. El interés en este capítulo es que podamos transmitir la idea central sobre la am que realiza el estudiante, luego las variantes quedarán a cargo del docente que planifica, las cuales darán libertad para ir ajustando las propuestas.

Pensemos cómo podemos valorar la actividad matemática que realiza un estudiante si debe, sostenidamente, aplicar procedimientos previamente conocidos. Seguramente coincida con nuestra intuición de que la valoración sea baja. Con esto último no queremos quitarle valor al aprendizaje de procedimientos, ni a la adquisición de destrezas puntuales o a la incorporación de aplicación efectiva de técnicas. Simplemente reconocemos que este último tipo de tareas puede tener cierto grado de complejidad inicialmente, pero esa complejidad irá desvaneciéndose a medida que el estudiante incorpore esos métodos, lo que lo pondrá en una exigencia cognitiva cada vez más baja, dado que en una tarea rutinaria se automatiza, se deja de analizar y de chequear si el método puede ser aplicado. Asimismo, esa naturalización de la aplicación de técnicas o procedimientos puede ser útil, lo que no contradice en nada lo que proponemos.

Lo central es que, ante una tarea matemática, el estudiante desarrolla am valiosa cuando el docente le permite actuar sobre la consigna, le deja libertad de acción y pensó para él un logro valioso. En este caso, el docente quiere que su estudiante pueda hacer algo que le exija pensar, indagar, explorar, relacionar, descartar y argumentar, y no solo repetir un procedimiento previamente conocido (insistimos, sin desmerecer el valor de incorporar procedimientos). A veces ocurre que el valor de la am ante una tarea se entiende al comprender cómo sigue el plan del docente y no mirándola en sí misma.

En los matices intermedios podremos encontrar muchas posibilidades. Por ejemplo, es fácil pensar en consignas cuyo pmno sea rico, pero, a raíz del planteo de los objetivos y del contexto, el docente logra sacarles jugo haciendo que los estudiantes realicen una am valiosa, probablemente porque hace preguntas o interviene en la clase para resaltar alguna cuestión. Esto, en rigor de verdad, sería plantear nuevas tareas, y aquellas que promueven una amvaliosa son estas últimas.

Por el lado opuesto, podríamos tener consignas con rico pmen las que la am del estudiante se desvanece porque el propio docente es quien resuelve, o porque ya enseñó cuestiones claves del contenido, lo que le deja al estudiante un trabajo con muy poca exigencia cognitiva.

Veamos cómo podemos poner en juego estas ideas valorando la am que podría realizar un estudiante frente a cada una de las dos tareas presentadas aquí.

Valoración de la actividad matemática del estudiante frente a cada una de las tareas 1 y 2

En ambas tareas la consigna es la misma. Para comenzar, habría que analizar su pm. Como nos hemos dedicado a esto en el capítulo 2, aquí no incluiremos este análisis, ni evidencias, ni resoluciones, simplemente diremos lo que entendemos que el lector va a obtener al realizar dicho análisis. Si el pm es bajo y no tenemos más información, ¡no seguimos!; la actividad matemática del estudiante tendrá una valoración negativa (si tuviéramos otras consignas para usar a continuación, entonces continuaremos analizando). Consideramos que el pm de esa consigna está en un nivel intermedio. Esto se debe a que los estudiantes podrían resolver la consigna por tanteo y, aunque no supieran ecuaciones, hacer un planteo simbólico. Como fuese el caso, deberán argumentar, lo que puede hacerse mostrando que el tiempo que debería pasar son 10 años, pues la edad del padre será de 45 y la del hijo, 15, por ejemplo.

Cuando esta consigna conforma la tarea 1, el estudiante ya sabe resolver ecuaciones y ha trabajado con consignas similares. El docente le plantea un trabajo individual para que repase. En este caso, la exigencia cognitiva que esta tarea le demandará será menor: sabe que podrá plantear una ecuación, que será del estilo trabajado y que conoce métodos para resolverla, independientemente de que le salga o no correctamente.

Cuando la misma consigna conforma la tarea 2, el estudiante desconoce el tema de las ecuaciones. En este caso se propone un trabajo en grupo, lo que le permitirá compartir con sus compañeros sus dudas, pensar estrategias, etcétera. Si apelara a un planteo, encontraría un escrito simbólico sobre el que probablemente no pueda avanzar ($35 + x = 3 \,.\, (5 + x)$), o podría recurrir al terreno de lo numérico y hacer un tanteo. En este último caso, podría hacer un tanteo aleatorio, sin demasiado criterio, o uno más organizado, por ejemplo probando de un año en un año. En la perspectiva del docente está proponerle otra tarea en la que el tanteo falle. Esto se interpreta como que su intención es habilitar el tanteo, como primer recurso para resolver ecuaciones, e inhabilitarlo rápidamente para poder apelar a los símbolos, como otra vía para intentar resolverlas. Entendemos que este contexto provocará, al darle la voz al estudiante, una am valiosa.

Nótese que no basta con ver el rol del estudiante. Podríamos pensar que en ambas el rol es activo y que eso bastaría para dar algún tipo de valoración de la am. Necesitamos tratar de entender las intenciones del docente.

Tampoco basta con mirar el objetivo. Podríamos decir que "plantear y resolver ecuaciones" es un objetivo cognitivamente exigente. Bastaría imaginar el momento en el que uno hace esto por primera vez. Ahora bien, ¿qué es lo que debilita la am en el primer caso? Si este fuera el objetivo, y lo consideráramos cognitivamente exigente, ¿sería adecuada la selección de esa consigna para que el estudiante alcance este objetivo? Aquí debemos responder que no. Justamente porque esta consigna podría resolverse al tanteo. Para el trabajo que los estudiantes venían desarrollando y para este objetivo, la consigna no sería apropiada, "si no se obliga" al estudiante a que realice una am valiosa.

Como puede verse, hay muchos matices y no hay valoraciones categóricas. Estamos tratando de que el lector se lleve un modo de mirar las tareas (antes solo las consignas), para llevarse luego un modo de pensar en el diseño de sus clases. Veamos más ejemplos que pueden afianzar las ideas que venimos trabajando.

Tarea 3

Contexto: Los estudiantes vienen trabajando con ecuaciones, ya vieron ejemplos similares y han discutido los posibles *conjuntos solución* para las ecuaciones lineales. Esta tarea se inserta en un listado de tareas similares. El docente propone trabajar en grupos con la intención de facilitar la escritura simbólica y poder proceder a resolver la ecuación sin el obstáculo de la simbolización.
Objetivo: Que el estudiante plantee, resuelva ecuaciones e identifique su conjunto solución.
Consigna: Un mago realiza el siguiente truco: "Piensen un número, súmenle 5, al resultado multiplíquenlo por 3, réstenle el doble del número pensado y vuelvan a restarle el número inicial. El resultado es 15". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido?, ¿por qué?

Tarea 4

Contexto: Los estudiantes han trabajado con algunas ecuaciones lineales con solución única, pero no se planteó la discusión sobre la cantidad de soluciones de una ecuación. Se espera que los estudiantes puedan plantear la ecuación y conjeturar que se verifica para todos los valores de la variable, o explorar numéricamente y ver que en todos los casos el truco del mago funciona, y preguntarse si acaso funcionaría siempre y cómo saberlo con certeza. Se propone un trabajo en grupos para favorecer las discusiones y el intercambio de opiniones que fortalezcan sus posiciones.
Objetivo: Que el estudiante explore numéricamente una situación contextualizada.

Consigna: Un mago realiza el siguiente truco: "Piensen un número, súmenle 5, al resultado multiplíquenlo por 3, réstenle el doble del número pensado y vuelvan a restarle el número inicial. El resultado es 15". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido?, ¿por qué?

Tarea 5

Contexto: Los estudiantes han trabajado con algunas ecuaciones lineales con solución única, pero no se planteó la discusión sobre la cantidad de soluciones de una ecuación. Se espera que los estudiantes puedan explorar numéricamente y ver que en todos los casos el truco del mago funciona, y que al preguntarse por qué funciona recurran al álgebra como la estrategia óptima de resolución. Como esto no basta para que reconozcan la necesidad de un planteo algebraico como el modo para tener certeza, se incluirá en el momento de la puesta en común la pregunta indicada antes. Se propone trabajar en grupos para favorecer las discusiones y fomentar la argumentación.
Objetivo: Que el estudiante reconozca la necesidad de un planteo algebraico como una estrategia para garantizar resultados universales.
Consigna: Un mago realiza el siguiente truco: "Piensen un número, súmenle 5, al resultado multiplíquenlo por 3, réstenle el doble del número pensado y vuelvan a restarle el número inicial. El resultado es 15". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido?, ¿por qué? (En la puesta en común, el docente preguntará a la clase: ¿reconocen si algún conocimiento matemático les resultó clave para resolver, sin el cual no habrían podido lograr la resolución? En caso afirmativo, ¿pueden explicar por qué razón fue imprescindible y qué tipo de consigna les fue dada para que esto ocurra?).

Valoración de la actividad matemática que podría realizar un estudiante ante las tareas 3, 4 y 5

La consigna de las tres tareas es la misma, solo se agrega una pregunta en la última. Si analizáramos el pm de esa consigna (nuevamente, no incluimos aquí el análisis, solo lo que resultaría sin incluir resoluciones y evidencias), encontraremos que tiene un pm rico. Esto se debe a que permite que el estudiante explore (que pruebe con ejemplos, encuentre una regularidad, simbolice, resuelva una identidad) y favorece la argumentación, dado que deberá argumentar por qué la afirmación del mago es verdadera para cualquier número que haya pensado. En la tarea 5, la pregunta prevista para la puesta en común es una consigna de tipo metacognitiva (ver capítulo 2), y es con ese tipo de pregunta que se fuerza a los estudiantes a reconocer el valor de ciertos objetos matemáticos para la resolución de un tipo de consignas. Sin estas preguntas, el estudiante podría o no darse cuenta, más allá de que resuelva perfectamente el enunciado.

Cuando esta consigna forma parte de la tarea 3, no le plantea una exigencia cognitiva alta a los estudiantes, puesto que ya estuvieron trabajando con ecuaciones, ya vieron ejemplos similares y esta consigna es una más de un listado de consignas parecidas. Por este motivo, podemos decir que su am se reduce a repetir ciertos procedimientos aprendidos antes. En cambio, cuando la consigna forma parte de la tarea 4, al no haberse planteado la discusión sobre la cantidad de soluciones de una ecuación, los estudiantes podrán explorar numéricamente y verificar que hay más de un valor que la verifica, pero deberá darse la discusión de si el hecho de haberse hallado varias alcanzará o no para saber que se tienen todas las soluciones. Esto hace que la am que el estudiante realiza sea valiosa porque verá en funcionamiento los alcances y limitaciones de lo que su estrategia numérica por casos plantea.

En la tarea 5 se pasa por un trabajo similar a la tarea 4, pero se mejora poniendo el énfasis en que los estudiantes sean conscientes de qué herramientas son indispensables para poder responder la consigna, interpretando la exhaustividad que solo permite el abordaje algebraico.

En estos análisis intentamos mostrar cómo puede variar la valoración de la am del estudiante a partir de modificar los objetivos y el contexto del que forme parte la consigna, aunque parta de un pm rico.

¡También puede ocurrir al revés!, es decir, una consigna cuyo pmno sea muy rico (sería aceptable, pero no pobre), y que al formar parte de una tarea con un buen objetivo y un contexto muy bien pensado mejore sustantivamente la am que realiza el estudiante en ese momento o en tareas siguientes. Esto último da pie a que pensemos que no todo se resuelve con "una tarea", sino que siempre estaremos pensando con una perspectiva aún más amplia: con secuencias de tareas. A esto nos referiremos en la sección siguiente.

Sobre secuencias didácticas o secuencias de tareas

Si bien en la sección anterior hemos mostrado el interés de definir y analizar tareas, es interesante pensar que una tarea aislada no brinda demasiada información sobre la relevancia de esta en el diseño e implementación de toda una unidad conceptual. Es decir, no brinda demasiada información sobre cómo el docente piensa en la enseñanza de un tema o unidad. Para dar algún juicio acerca de esto debemos contar con un conjunto de tareas, que, cuando se las concibe con ciertas características, se llaman *secuencias didácticas* o *secuencias de tareas*.

Mencionaremos, en primer lugar, algunas características de las secuencias de tareas o secuencias didácticas, y luego retomaremos la valoración de la am del estudiante ante una secuencia.

Una *secuencia de tareas* es un conjunto de tareas ordenadas y organizadas de forma tal que el orden de las tareas responda a objetivos del docente previamente planificados, y su complejidad está graduada de modo tal que, al transcurrir por ella, el estudiante pueda trabajar sobre ciertos conceptos, procedimientos y cuestiones que el docente se propuso con antelación.

Según Zabala Vidiella (1995), una secuencia es una manera de encadenar y articular diferentes actividades (en este texto, denominadas *tareas*) a lo largo de una secuencia didáctica. De esta forma, la secuencia puede aportar pistas acerca de la función que tiene cada una de las tareas en la construcción del conocimiento a propósito de diferentes contenidos.

Cuando hablamos de secuencia nos referimos a una serie de situaciones relacionadas unas con otras, y no a un conjunto de tareas independientes entre sí. Se trata de situaciones concebidas para volver sobre lo ya hecho, retomarlo en un contexto que necesariamente se habrá modificado, y dar oportunidad a todos los estudiantes de enrolarse en un proyecto que se sostiene en un ir y venir entre las tareas seleccionadas. Es decir que promueven acercamientos sucesivos a los contenidos, desde distintos contextos y significados, en forma integral, para ir de un todo indiferenciado y confuso, tras sucesivas aproximaciones, a un todo con mayor diferenciación.

No incluiremos aquí ejemplos de secuencias, pero veremos un ejemplo en el marco de una planificación en el capítulo 6. Nuestro interés será entonces valorar la am que realizaría el estudiante en una secuencia didáctica. Para ello proponemos algunos indicadores a atender. Ellos son:

- Que algunas de las consignas de las tareas sean consignas metacognitivas matemáticas (las consignas metacognitivas personales podrían no estar. De incluirse, atender a las observaciones hechas en el capítulo 2).
- Que se vea a lo largo de la secuencia la autonomía del estudiante, su rol activo, al menos gradualmente (es decir, las primeras tareas podrían estar más guiadas por el docente, pero, a medida que transcurre el trabajo, el docente debería ir planificando tareas a cargo del estudiante, con más autonomía y con exigencias crecientes).
- Que la am que las tareas promueven, en su conjunto, sea valiosa.

Debemos hacer una observación importante. El análisis que proponemos para valorar la secuencia a partir de los indicadores que explicitamos antes es previo a la planificación, pues en esta, además, se ponen en juego la anticipación de errores e intervenciones, la evaluación, etcétera.

Este capítulo presenta una cuestión central para el profesor, pues este intentará anticipar la am (y su valoración) que sus estudiantes realizarán en la clase, al momento de planificar la enseñanza y también luego, cuando analice los resultados de su práctica docente.

Hay una distinción que queremos expresar para no dar lugar a malentendidos. Cuando el docente planifica su enseñanza y diseña una secuencia, muchas veces se propone lograr cierta gradualidad en la complejidad de las situaciones que diseña o elige para sus estudiantes. No sería adecuado trasladar esa idea al concepto de am. Es decir, no debería un estudiante realizar am pobre primero para luego ir gradualmente realizando am más cercana a lo valioso. Sería interesante que mayoritariamente los estudiantes realizaran actividad matemática valiosa, y que la gradualidad que una secuencia podría plasmar se jugara en los contenidos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Zabala Vidiella, A. (1995). *La práctica educativa. Cómo enseñar*. Barcelona: Grao.

Capítulo 4
Criterios para valorar el uso de nuevas tecnologías en la clase de matemática

Introducción

En los tiempos actuales, a los desafíos que los docentes deben enfrentar día a día se suma el hecho de que muchos de sus estudiantes tienen computadoras portátiles en el aula, por lo que sería importante haber estudiado y reflexionado sobre cambios que, como docentes, tendríamos que incorporar en nuestras clases. Necesariamente, las consignas que les demos a nuestros estudiantes y los objetivos deberán ser diferentes, si admitimos que usen nuevas tecnologías. Hace tiempo, "graficar una función a partir de una expresión un poco más compleja que las habituales" era dificultoso y exigía hacer un análisis completo de esa expresión. Como meta ¡era muy exigente y valiosa matemáticamente hablando! Hoy en día, el objetivo "graficar funciones elementales" cambia de estatus si en las aulas incluimos las tic . Pasa a no ser complejo, a obtenerse con solo introducir la expresión y apretar un botón. ¡No es que no sea valioso graficar!, sino que no lo sería como meta. Podríamos pensar, en cambio, en otras preguntas matemáticamente valiosas, que para responderlas el estudiante *necesite tener el gráfico*, interpretarlo, entender si necesita definir otras escalas, etcétera.

Como la tecnología está más cerca de nosotros, no tendría sentido negarnos a que naturalmente se incluya su uso en nuestras clases de Matemática, en las casas, en las comunicaciones, etcétera. Es en este sentido que decimos que admitir que son recursos disponibles nos obliga a volver a pensar nuestras clases (en términos de consignas, objetivos, tareas, evaluación…).

Miremos retrospectivamente sobre lo que pasó hace años con la tabla de logaritmos ante el advenimiento de las calculadoras, y pensemos analogías con la actualidad. Habrá habido docentes que se resistieron a ese cambio porque entendían que usar la tabla tenía valor formativo, y que debía darse antes de habilitar el uso de las calculadoras. Habrá habido docentes que decidieron primero enseñar el uso de la tabla, de manera que el estudiante pudiera calcular logaritmos "por si acaso justo no contaba con la calculadora", para recién luego avalar hacer los cálculos con ella. Esto hoy está superado, y, sin dudas, como todo cambio, aquella transición no habrá sido fácil.

Tenemos que pensar que hoy en día estamos atravesando una transición similar. Es muy probable que si pudiéramos transportarnos al futuro y pudiéramos vernos en 2035, la discusión de si dejamos usar las computadoras no tendría sentido, estará resuelta como lo está hoy el uso de calculadoras para calcular logaritmos. Hoy obtener un logaritmo dejó de ser una meta, un fin, un objetivo, pero han aparecido otros objetivos valiosos matemáticamente y exigentes cognitivamente respecto de los logaritmos. Es decir, ¡no hemos perdido!, sino que podríamos pensar que ganamos riqueza matemática con otros planteos, en los que el cálculo de un logaritmo sea inmediato y nos permita *hacer otra cosa* con ese valor.

Si volvemos a nuestro presente, podemos pensar que esta transición nos obliga a cambiar nuestros objetivos, a poner el foco en otro lugar, valioso y exigente, en donde algunos cálculos, gráficos, cuentas, etcétera, puedan ser resueltos inmediatamente por la tecnología para que *vayamos por más*. Acá está el desafío, en decidir qué es ir por más y qué otras cosas podemos hacer. Eso es lo que nos toca pensar.

Podemos negarnos y resistirnos, pero irremediablemente estamos transitando el camino hacia la naturalización del uso de las tic , tal como pasó con las calculadoras. Entonces, les proponemos ¡no resistirnos!, y abrir un universo de otras posibilidades cuya riqueza matemática puede llegar a ser en extremo valiosa, desafiante y, por qué no, motivadora.

Si cambian los objetivos porque los estudiantes utilizan tic , y los recursos en la clase también, tendremos que modificar nuestras consignas de trabajo. No haremos *lo mismo que antes pero con computadoras*, sino que haremos *otra cosa*. Propondremos otro tipo de trabajo, otras consignas. Pensemos al revés:

en vez de ser una complicación, tenemos a disposición de nuestros estudiantes computadoras, celulares, calculadoras, videos, tutoriales, foros, etcétera, que podrían favorecer su aprendizaje. Son un recurso más, y nuestros estudiantes podrían apelar a todos estos recursos, tal como hacemos nosotros cuando queremos aprender algo: apelamos a todo lo que está a nuestro alcance. En vez de prohibir su uso, o relegarlo para un segundo momento después de que mostraron destreza en papel y lápiz, planteemos buenas preguntas, consignas y problemas, y que los estudiantes utilicen lo que necesiten para abordarlos. Estaríamos preparándolos para una mejor inserción en nuestra sociedad actual.

"Pero tendríamos que invertir mucho tiempo de nuestras horas de Matemática para explicar su uso", podrían estar pensando al leer esto. En realidad ¡no es así en nuestra propuesta! Pensemos lo siguiente: en relación con el uso de la calculadora, no nos pasamos clases explicando cómo usar cada botón, las diferencias según se tenga un modelo de calculadora u otro, no les damos de tarea a nuestros estudiantes *leer el manual*, etcétera. Los estudiantes prueban, encuentran, nos preguntan, se preguntan entre sí y cada uno accede a lo que necesita conocer y usa la calculadora con más o menos profundidad dependiendo de qué es lo que está resolviendo. Si solo pedimos cuentas, poco jugo le sacarán a la calculadora, o, del mismo modo, a los celulares. Si pidiéramos otras cosas, tal vez necesitarían usarlas con mayor potencia.

Supongamos que con esta presentación los convencimos de que hay que pensar cambios, otros objetivos y otras consignas, y queremos empezar. Seguramente apelaríamos a libros, artículos o a internet (casualmente, nosotros sí recurrimos a las tic cuando tenemos una pregunta desafiante. ¿Se ve la analogía con lo que queremos proponer para la clase de Matemática?) para ver qué encontramos, qué es lo que el Estado, las editoriales, los investigadores, etcétera, sugieren para los docentes. Es en este aspecto que este capítulo del libro viene a aportar. Queremos ofrecerles a los docentes herramientas que les permitan seleccionar o diseñar consignas para cuya resolución se pueda utilizar la tecnología disponible con un uso *pertinente y significativo*. Lo primero que debe quedar claro es que quien debe hacer un uso pertinente y significativo de las tic es el estudiante. El docente podría, o no, utilizar recursos tecnológicos en sus clases, pero cuando planifica la enseñanza, queremos que piense en actividades para el estudiante tales que, cuando use las tic, ese uso sea pertinente y significativo. ¿Por qué decimos pertinente? Porque no es que de ahora en más en todas las clases de Matemática y en cada tema todas las tareas deban incluir siempre el uso de tic. ¡No! Tenemos que tener algún criterio para entender si es o no pertinente utilizarlas. También dijimos que el uso de las tic debería ser significativo. Con esto nos estamos refiriendo a que lo matemático que el estudiante aprenda sea valioso. Si en lugar de escribir en el pizarrón el estudiante usa un PowerPoint, o si en lugar de leer un fragmento de un libro lo proyectamos, estaremos haciendo lo mismo que hacíamos con un *cambio cosmético*, pero nada de fondo habría cambiado. No queremos eso. Hay otras ilusiones muy comunes que aluden a que los estudiantes se motivan con las computadoras y que las computadoras sirven para ahorrar tiempo de clase. Veamos un poquito cada una de ellas.

Naturalmente, nuestros estudiantes tienen interés por las tecnologías: saben sobre celulares, usan redes sociales, tienen grupos de Whatsapp, Facebook, comparten su vida por Instagram, etcétera. Esto, de hecho, los motiva. Pero ¿significa que estarán motivados en la clase de Matemática si los dejamos usar computadoras o celulares? La respuesta es *no necesariamente*. Dependerá de muchos factores; sobre algunos de ellos podremos incidir y sobre otros no. Podremos incidir sobre las tareas que les demos para hacer. Aquí decir *tareas* tiene la connotación que queremos resaltar (ver capítulo 3): sobre las consignas, el objetivo de aprendizaje que nos habremos planteado y el modo de trabajo. En este contexto, tenemos un enorme campo para tratar de encontrar vías de motivación.

Sobre la ilusión de que las tecnologías ahorran tiempo, podríamos decir que es bastante cierta. Decimos "bastante" porque a veces nos pasará que perderemos una clase tratando de que algo funcione, o quizás se corte la luz y tengamos que pasar a un plan B (¡que ojalá no sea volver a la clase tradicional!). Muchas veces, las tecnologías nos ahorran tiempos de calcular o de graficar. Por ejemplo, si queremos trabajar con desplazamientos, en un graficador se ven de inmediato los efectos gráficos de cambiar parámetros. Lo que queremos resaltar es que las tic *no solo podrían ser usadas para ahorrar tiempo*. ¡Hay mucha matemática valiosa que podría abordarse solo si contamos con tecnología! Sí, *solo* si contamos con tecnología. Esto será significativo, en el sentido que mencionamos antes. Y entonces, ¡allí vamos! Repetimos aquí la intención de este capítulo: queremos ofrecer herramientas que les permitan a los docentes seleccionar o diseñar consignas para cuya resolución el estudiante pueda utilizar la tecnología disponible con un uso pertinente y significativo. Tal vez ahora, luego de esta serie de disquisiciones, esto empiece a quedar más claro.

Empezaremos mostrando algunos ejemplos prototípicos de consignas que se encuentran en internet.

Algunos recursos “tipo” de los que se encuentran en internet

En textos actuales y en internet podremos acceder a múltiples espacios que intentan darles ideas a los docentes para la incorporación de las nuevas tecnologías a las clases de Matemática. Como veremos en breve, será clave tener criterios para valorarlas.

Tipo 1

Un primer tipo de recurso disponible son los talleres o capacitaciones para docentes (Chaves Barboza, 2008), generalmente de un software específico. Suelen darse nociones generales del software, la disposición de los botones, lo que se encuentra al desplegar las opciones incluidas en cada uno, y las consignas suelen pedir que se sigan los pasos indicados, los cuales constituyen procedimientos efectivos para construir alguna figura o para utilizar un deslizador, por ejemplo. Para qué usar ese software en las clases de Matemática, cómo cambiar los objetivos, etcétera, son reflexiones que suelen no estar o quedar en un segundo plano.

Tipo 2

En entrevistas realizadas a docentes en Eduteka (2007) se encontró que el uso dado a programas se limitó a verificar resultados o a agilizar cálculos.

Tipo 3

Ya en un plano más sofisticado de diseño, se encuentran sitios con *applets* que requieren de conocimiento matemático más profundo y también tecnológico de quien los diseña, ¡aunque no necesariamente de quien los usa! Si el que los diseña puso en juego mucho conocimiento matemático, la consigna de “diseñar un *applet*” fue significativa *para él*. Pero hay que ver qué hará el estudiante con ese *applet*, qué lugar en la clase tendrá, qué objetivo matemático perseguirá el docente que seleccione el *applet* y cómo se piensa trabajar en la clase. Todo eso hará la diferencia entre que la actividad matemática del estudiante sea valiosa o bien que se reduzca a mover un deslizador o a apretar un botón “y ver qué sucede” (ver, por ejemplo, Fendt, 2012), o sea, completar resultados y recibir inmediatamente la corrección (a modo de ejemplo, ver Thatquiz, 2004).

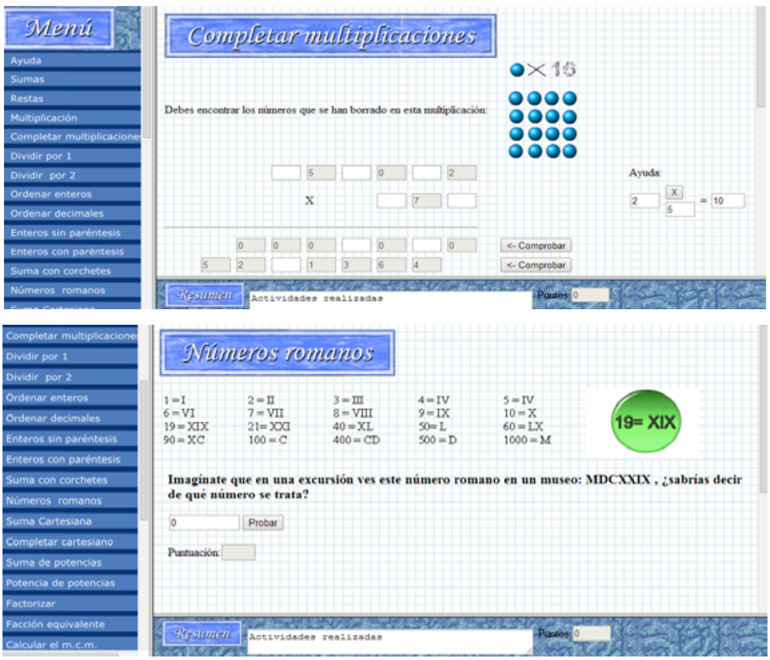
Si el uso de los recursos tecnológicos promueve una actividad matemática pobre en el estudiante, ¡no elegiríamos la consigna! No sería significativo ni pertinente llevar al aula ese tipo de consignas, al menos sin reflexión. Tal vez se nos ocurra cómo adaptarlas para darles un buen uso, matemáticamente rico, para el estudiante.

Tipo 4

Hay muchos sitios en los que se elige un tema matemático, la pantalla ofrece campos para completar y el sitio chequea las respuestas, indica cuántos errores se cometieron, cuántos aciertos, a veces ofrece lugares para consultar y a veces, tras el fracaso, redirecciona a un lugar en el que hay ejemplos resueltos del mismo tipo.

En un sitio de internet aparecen diferentes solapas donde hay que completar diferentes datos. Suelen verse con pantallas como la siguiente:

Imágenes de pantallas de sitios de internet



En general, aparecen carteles que dicen “correcto”, si es el caso, o, en este ejemplo, “Noooooo…”, si el resultado es erróneo.

Si analizamos las consignas para el estudiante en términos de su potencial matemático (ver capítulo 2), encontraremos que son pobres. En este tipo de consignas no hay exploración posible, ya que existe un solo camino para resolver y no hay pedidos de argumentaciones, ni opciones para hacerlas. Y si el docente pidiera argumentación en la clase, y el estudiante la hiciera sobre “lo que ve” en la pantalla, empeoraremos la situación si nos conformamos con eso. Sobre esto creemos que necesitamos hacer una aclaración o advertencia muy importante, por eso le dedicaremos el siguiente apartado.

El convencimiento de lo que vemos en pantalla versus su validez matemática

Al admitir el uso de tecnología es muy probable que nuestros estudiantes se convenzan de la validez matemática de algo, “porque lo ven”, “porque la pantalla lo muestra”, “porque es la respuesta que da la calculadora”, etcétera. Es una validación externa, diríamos en términos didácticos. El estudiante “cree” lo que ve, como si fuera una cuestión de fe más que de convicción con fundamentos matemáticos. El problema es que no advierte que esto es así. No se cuestiona la validez matemática, menos aún si “ver es suficiente garantía de ser válido”. Nos habrá pasado muchas veces que el estudiante obtiene un resultado en la calculadora que es erróneo (porque esta redondea, por ejemplo), pero sostiene su validez y le discute al profesor argumentando que “lo dice la calculadora”.

Para el profesor es claro el valor que tienen las argumentaciones matemáticas y la importancia de formar a los estudiantes en ellas, en el planteo de conjeturas, en cómo se decide si son verdaderas o falsas, en cómo se demuestran, cuándo, por qué, etcétera. Nosotros entendemos que esto es el eje del quehacer matemático. Por lo tanto, queremos advertir al docente y fortalecer sus estrategias. ¿Dónde vemos una dificultad? La mayor dificultad se presenta si el estudiante se convence de que *todo lo que ve es como él lo ve, y que vale porque lo ve*. Como docentes solemos querer que los estudiantes trabajen con conjeturas y que discutan su validez, den contraejemplos y argumentos más generales, validen, demuestren, etcétera. Lo que puede empeorar el problema mencionado es si las conjeturas que el estudiante formula, a raíz de su indagación en las tic , ¡resultan siempre verdaderas! Si esto pasara, el estudiante ratificará que lo que él ve vale y no le importarán los argumentos matemáticos; entenderá que no los necesita porque se convencerá de que “vale porque lo ve”.

¿Qué podemos hacer entonces? Vamos a tener que lograr que algunas veces sus conjeturas ¡sean falsas! Que “lo que ve, al menos algunas veces, sea falso”, que la tecnología lo engañe. Si no logramos esto, el estudiante ratificará que no necesita argumentar ni demostrar nada. Lo que vea tendrá, para él, valor de verdad.

Queremos mencionar un aporte que entendemos es valioso y va en esta línea, de Arcavi y Hadas (2003). Estos autores ponen en juego que la *visualización* no es “solo ver”, y la consideran como “la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar una información visual” (Hershkowitz, 1989, citado en Arcavi y Hadas [2003], p. 1). Como docentes, rápidamente tendríamos que pensar en cómo hacer que nuestros estudiantes trasciendan el “ver” ingenuo. Más allá de otros aportes que suman en el trabajo citado, estos autores ponen énfasis en generar consignas de trabajo que permitan que las TIC contradigan anticipaciones de los estudiantes. ¡Es justo lo que necesitamos! Este tipo de consignas pide, en un primer momento, que el estudiante anticipe, prediga, se adelante a cómo será un gráfico, una figura, un comportamiento, etcétera. Luego de esa anticipación se lo invita a seguir trabajando con las TIC, y estas le “hacen ver” que no ocurre su anticipación. Esta situación es la antesala de posibles discusiones matemáticas ricas, en las que se trate de entender si la anticipación era errónea, por qué ocurrió y, si era correcta, por qué la computadora me hizo ver otra cosa.

Dejamos por ahora esto aquí como posibilidad y como mensaje. Un poco más adelante retomaremos este caso en uno de los criterios que propondremos. Sigamos tratando de pensar qué consideraríamos sobre consignas si queremos elegirlas para que nuestros estudiantes las resuelvan usando TIC. O, por el contrario, qué características harían que no las seleccionemos. ¿Sería razonable considerar consignas en cuyo enunciado no aparezca la mención a algún recurso tecnológico, pero que para resolverlas se necesiten las TIC?, ¿cambiaría la resolución si incluyo tecnología o no?, etcétera.

Para responder a estas preguntas hemos elaborado criterios que nos permiten, en un análisis *a priori*, valorar la *pertinencia y significatividad del uso de TIC* en una consigna y en una secuencia.

Criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC para resolver consignas matemáticas

Los criterios que presentamos a continuación han sido elaborados en Barreiro y Rodríguez (2014) y perfeccionados en Barreiro (2015). Dichos criterios están alineados con los enfoques constructivistas en educación matemática, los cuales sostienen el rol activo del estudiante guiado por un docente que diseña, ajusta y coordina tareas. La intención es brindar herramientas para valorar la pertinencia y significatividad de que los estudiantes utilicen recursos tecnológicos en una consigna matemática.

Como veremos a continuación, algunos de esos criterios se pueden utilizar solo cuando se tiene una secuencia o un listado de consignas. Luego de presentarlos, indicaremos el modo de uso propuesto y daremos ejemplos.

Recordemos que si una consigna dice expresamente que para resolverla deben usarse tic , claramente podremos ver qué criterios están presentes, pero si no dice expresamente que se usen t ic, también haremos el análisis, pues podría ser muy diferente la resolución con o sin el uso de las tecnologías. Cualquiera sea el caso, un análisis de este tipo obliga a que la resolvamos con tic y sin tic (con papel y lápiz) para tener evidencias de lo que afirmemos.

Como docentes, haremos estas resoluciones poniéndonos en el lugar de nuestros estudiantes, teniendo en cuenta lo que saben y lo que saben hacer. No basta la resolución que podríamos hacer con una artillería matemática más elevada que la que se juega en el aula y que resuelva la situación. Decimos que no basta porque ese tipo de resolución le suma perspectiva al docente. Le permite ver con qué otros conceptos se vincula, cómo podrían abordarse, etcétera. Sin embargo, para evaluar cómo resultará en nuestros estudiantes, tendremos que ponernos en situación de clase. Aquí, como siempre, es clave el conocimiento que el docente tiene de sus estudiantes. Esto, en alguna medida, se asocia con ubicarnos en el contexto (al que nos referimos en el capítulo 3).

Criterio 1: *Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas* (puede verse en cada consigna, como su presencia en una secuencia).

Este criterio se refiere a que el trabajo con las tic debe generar una genuina búsqueda de pruebas, es decir que lo que la computadora o el software arrojen invite al estudiante a encontrar razones de por qué es válido lo que encontró. Aquí volvemos a reforzar que debemos evitar que el estudiante se convenza de la validez solo porque "lo dice la computadora" o porque "lo ve". Para ello será necesario que lo que la computadora muestre no sea siempre correcto, no sea siempre la solución al problema dado. Podría ocurrir que las tic ofrezcan pistas para buscar "pruebas" por fuera de ellas para entender cómo o por qué funciona determinada propiedad o regularidad encontrada, por ejemplo.

Criterio 2: *Imprescindibilidad de las TIC* (puede verse en cada consigna).

Con este criterio nos referimos a que lo matemático que se pone en juego cuando utilizamos tic no aparece si no usamos las nuevas tecnologías. La imprescindibilidad se pone de manifiesto si surgen relaciones matemáticas que sin el uso de tic no se advertirían –y no porque no se pueda abordar la tarea sin las tic –, como por ejemplo algunas regularidades. En algunos casos, el ordenamiento de muchos datos en un software permite anticipar algún comportamiento, o pueden visualizarse cuestiones matemáticas que den pie a plantear una conjetura que no se nos ocurriría sin la ayuda de algún software, entre otros casos. No nos referimos a que sea imposible resolverse en lápiz y papel, ni tampoco que el docente no pueda resolverlo sin tic . Lo que debe ocurrir es que haya relaciones sobre los objetos matemáticos puestos en juego que quedarán ocultas; no se nos ocurrirán afirmaciones, relaciones, conjeturas, etcétera, sobre ellas porque no se pondrán de manifiesto sin el uso de tic .

Vale la pena volver a mencionar, y así enfatizar, que para utilizar este criterio el docente tiene que ponerse en el lugar del estudiante, en cuanto a sus conocimientos, y pensar qué resoluciones podría este llevar a cabo. Es decir que el hecho de que el profesor –que sabe más matemática que el estudiante– pueda resolver sin necesidad de apelar a las tic , no basta para decir que estas "no son imprescindibles", pues tal vez el estudiante con sus conocimientos no pueda resolver o abordar la consigna.

Criterio 3: *No perder de vista el objetivo matemático* (puede verse en cada consigna, sea aislada o que forme parte de una secuencia).

Aquí debemos ver si la consigna está promoviendo la enseñanza de algo matemático. El foco de lo que se pretende enseñar debe ser matemático. No debe ocurrir que se esté enseñando el recurso tecnológico.

Criterio 4: *Incluir distintos usos de TIC* (es más razonable verlo en una secuencia).

Centralmente, hay tres grandes usos posibles de las tic :

a) utilización de algún software matemático;

b) uso de las tic como medio de comunicación, por ejemplo: chat, foros, redes sociales, PowerPoint o Prezi para presentaciones, etcétera; y

c) uso de internet para búsqueda de información.

La idea es que en una secuencia haya distintos usos de tic .

Criterio 5: *Complementariedad* (se utiliza solo en secuencias).

Debemos ver si el uso de tic es un recurso más, en el sentido de que no debería reemplazar otras formas de trabajo en la clase. Entendemos que no resultaría pertinente que, cualquiera sea el contenido a enseñar, en todas las consignas se proponga el uso de tic .

Criterio 6: *Libertad para apelar a las TIC* (puede verse en cada consigna, sea aislada o parte de una secuencia).

El estudiante debería poder decidir si para resolver la consigna le es útil o no usar tic . Es decir que no todas las consignas deberían incluir el mandato de ser resueltas utilizando tal o cual programa.

Criterio 7: *Libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar* (puede verse en cada consigna, sea aislada o parte de una secuencia).

En caso de que se apele a las tic, ya sea porque el estudiante lo decide o porque el enunciado de la consigna así lo establece, debería poder seleccionarse autónomamente qué programa utilizar o dónde buscar bibliografía. Para eso, algunas consignas no deberían dar indicaciones de cuál recurso seleccionar.

Ahora que hemos presentado los criterios, explicitaremos la forma en que proponemos utilizarlos.

Forma de uso de los criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC

Como lo que nos interesa es valorar la pertinencia y significatividad del uso de las tic en una cierta consigna o secuencia, los criterios funcionan como herramientas para tal fin. Ver si se cumplen o no los criterios no es el fin de lo que proponemos. Por esta razón es que no tienen el mismo estatus todos ellos.

Si una consigna no cumple el criterio de imprescindibilidad, seguro que la valoración de la significatividad de las tic será negativa. Del mismo modo ocurre si no se cumple el criterio de no perder de vista el objetivo matemático.

El criterio de búsqueda de pruebas puede o no verificarse en una consigna aislada. Lo importante es que esté presente en una secuencia. Es decir que si no se verifica en una consigna aislada, seguimos analizando la secuencia. Si llegamos al final y nunca se promovió la búsqueda de pruebas, entonces esa secuencia no pasa este criterio.

Si se dan los criterios de imprescindibilidad y de no perder de vista el objetivo matemático, todo lo demás que se cumpla enriquecerá la valoración y hará que el uso de tic para resolver esa consigna sea aún más significativo.

Por otra parte, si alguno de estos dos criterios recién mencionados no se cumple, ya no repararemos en los demás; termina el análisis y la valoración es negativa. Esto da un *orden* para analizar una secuencia o consigna con estos criterios:

- Si los criterios de imprescindibilidad y de no perder de vista el objetivo matemático no se cumplen, termina el análisis y se argumenta el porqué de la valoración negativa a partir de la ausencia de ellos.

- Si ambos criterios se cumplen, revisaremos cada uno de los demás (aquellos sobre los que sea pertinente pensar), y su presencia enriquecerá aún más una valoración que será positiva.

Observemos que el hecho de que se cumplan la mayoría de los criterios no alcanza para que la consigna tenga una propuesta significativa en cuanto a tic . Basta pensar en una consigna del tipo: "Graficar la función de expresión $y = x^2 + 1$ y explicar por qué el gráfico es el propuesto".

En este ejemplo no se cumple el criterio de imprescindibilidad, pues se puede hacer rápidamente un gráfico aunque sea con tabla de valores, por lo que la valoración es negativa. Sin embargo, podríamos pensar que el primero se cumple, pues se piden razones que justifiquen el gráfico, no se pierde el foco de lo matemático, se da libertad para apelar a las tic y, por lo tanto, el estudiante puede elegir qué software usar. Los otros criterios no se pueden aplicar, por ser solo una consigna. Si solo chequeáramos "cantidad" de criterios, podríamos pensar que ¡no está mal! Dos no se aplican y de los 5 restantes se cumplen 3. Esto es lo que no debe ocurrir: que se utilicen indiscriminadamente. Esta consigna tiene significatividad nula. Realmente la presencia de tic no es relevante.

Ejemplos de análisis de consignas con los criterios

Presentaremos a continuación algunas consignas y tareas y las analizaremos usando los criterios enunciados. Previamente realizaremos una descripción de la resolución del problema, prescindiendo de los caminos intuitivos que suelen tomarse en la fase inicial y limitándonos a narrar el camino exitoso que podría seguir un resolutor, o reflexiones didácticas que es pertinente rescatar.

Consigna 1: "Anticipar y justificar el desarrollo decimal que tendrá el número racional de la forma $1 / (2^n . 5^m)$, donde *n* y *m* son números enteros no negativos".

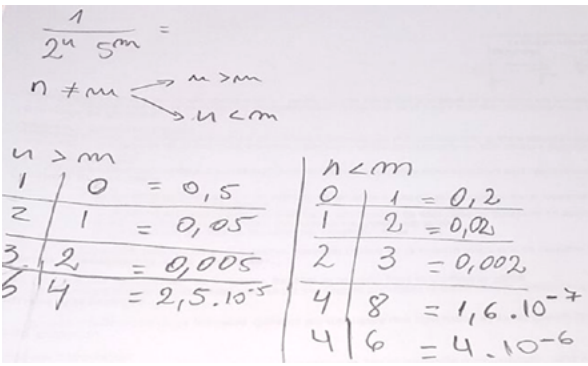
Antes de utilizar los criterios para analizar la pertinencia y significatividad del uso de tic , señalamos que quien analice debería resolver tanto en papel y lápiz como utilizando distintos recursos tecnológicos. De otro modo, quedará oculto lo que ocurre en uno y otro caso y se perderán las evidencias que son necesarias para el análisis.

Por esta razón, presentamos a continuación posibles resoluciones de ambos tipos: en papel y lápiz y con tic ; luego ofrecemos el ejemplo de análisis de la consigna.

Supongamos que resolvemos utilizando lápiz y papel, o tal vez con alguna ayuda de la calculadora. Una resolución que usualmente realizan los estudiantes es darles valores aleatorios a *m* y a *n*, y ver qué sucede con los resultados obtenidos. Esta exploración puede ser desordenada y, al tratarse de dos variables, podría pasar que no puedan evidenciar regularidades ni patrones en los resultados obtenidos. O, si lo hacen, podrían tal vez estar perdiendo otras.

Ilustremos esto con un ejemplo. Como podemos ver en la siguiente imagen, si bien hay una intención de distinguir dos casos posibles: cuando *n* es mayor que *m* y cuando *n* es menor que *m*, la exploración se reduce a elegir cuatro casos para la primera opción y cinco para la segunda, sin que esto posibilite que lleguen a una conjetura.

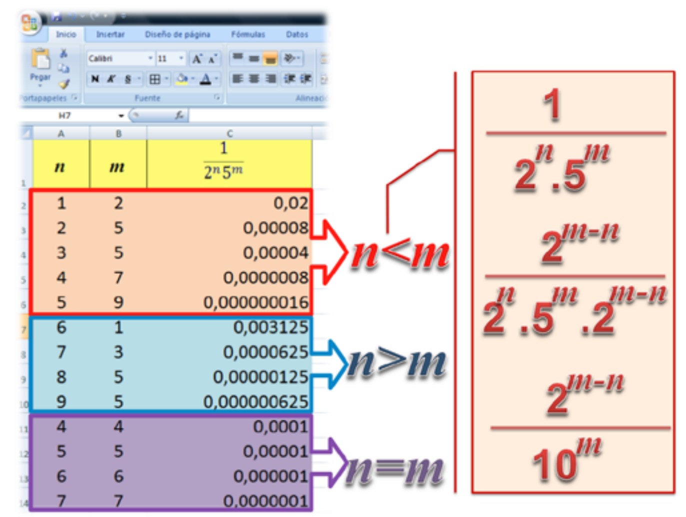
Resolución a mano de la consigna 1



Aunque pareciera que alguna relación se vislumbra, es muy costoso el trabajo de hacer las cuentas, la inversión de tiempo, el modo en que se organizan los datos, etcétera, lo que hace difícil la tarea de encontrar regularidades. Si volvemos a la imagen, podemos observar que, en estas elecciones de valores, en el primer cuadro *n* y *m* son consecutivos en los primeros tres casos y en el último no, lo que hace que el último valor no comparta las particularidades que en los primeros tres podrían advertirse. Un caso similar ocurre en la segunda tabla.

Al tratarse de dos variables, podemos hacer la distinción de tres grandes casos o categorías: (a) <, (b) >, (c) =. Si además sistematizáramos las expansiones decimales usando, por ejemplo, una planilla de cálculo, se podrían observar regularidades como las que se advierten en la tabla siguiente.

Regularidades observadas a partir de la sistematización de datos



Al analizar la información advertimos que la cantidad de dígitos que tenemos después de la coma coincide en número con el máximo entre n y m. Asimismo, para n distinto de m se tienen entre los dígitos que componen la expansión decimal potencias de 2 o de 5, cuyo exponente es la diferencia, en valor absoluto, entre n y m. ¿Cómo justificamos esta apreciación? Muy fácil: recurriendo a propiedades elementales de la potenciación en los enteros. Tomemos un caso, pues los otros son análogos. Sea $n < m$, por ejemplo, y multipliquemos al numerador y denominador por una potencia de 2, cuyo exponente sea la diferencia entre m y n. Al aplicar propiedades, resulta:

$$\frac{1}{2^n \cdot 5^m} = \frac{2^{m-n}}{2^n \cdot 5^m \cdot 2^{m-n}} = \frac{2^{m-n}}{2^{n+m-n} \cdot 5^m} = \frac{2^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{2^{m-n}}{10^m}$$

Esto es: la expansión decimal de este racional, para cuando $n < m$, tendrá m dígitos y aparecerá una potencia de 2 entre ellos, cuyo exponente es la diferencia entre m y n.

Con las resoluciones realizadas más arriba, analicemos la consigna teniendo en cuenta los criterios de pertinencia y significatividad de tic enunciados en este apartado.

¿Por dónde empezamos? Recordemos que no se trata de mostrar que la consigna admite la mayor cantidad de criterios porque no todos tienen la misma jerarquía. Iniciamos analizando si la consigna cumple con los dos principales criterios: de imprescindibilidad (criterio 2) y no perder de vista el objetivo matemático (criterio 3).

Como observamos en las resoluciones, la imprescindibilidad se manifiesta porque las conjeturas matemáticas pueden establecerse a raíz del uso de las tic . Las divisiones se podrían hacer con lápiz y papel, pero trascendiendo lo tedioso del trabajo y la posibilidad de cometer errores, ese modo de trabajo no permitiría identificar posibles regularidades como las mencionadas. En consecuencia, resolver el problema con tic o sin ellas no es indistinto. Esto nos lleva a decir que la consigna satisface el criterio referido a la imprescindibilidad de las tic .

Con el problema no se pierde de vista el objetivo matemático, pues propone anticipar y buscar regularidades sobre la familia de números en cuestión, como el enunciado lo expresa. Con lo dicho hasta aquí, la consigna cumple con los dos criterios rectores, por lo que promueve un uso pertinente y significativo de tic .

Ahora estamos en condiciones de seguir analizando con los demás criterios. Cuantos más criterios se cumplan, más rica será la consigna en el sentido que estamos analizando.

Observemos que este problema cumple con el criterio de favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas (criterio 1), no solo porque se pide justificar, sino porque, si bien a partir del uso de la planilla de cálculo se advierten ciertos patrones, es necesario determinar si efectivamente es una cuestión general, no ligada a casos particulares. Esto nos lleva a analizar matemáticamente cada conjetura. A modo de ejemplo, obtenemos la resolución para $n < m$ expuesta anteriormente.

Volviendo al enunciado, observamos que no está dicho qué programa utilizar ni de qué manera resolverlo, es el estudiante el que debe decidir si le es útil o no usar tic , por lo que la consigna otorga libertad para usar una planilla de cálculo, un software matemático particular o calculadora. Esto nos indica que la consigna cumple con los criterios 6 (libertad para apelar a las tic) y 7 (libertad de selección de qué recurso tecnológico utilizar), si acaso decide utilizar recursos.

Consigna 2: "Sea $f: R \to R$, con $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, describir y justificar las características gráficas de la familia de curvas que resultan al variar solo el parámetro b".

Si analizamos la consigna vemos que se deja un camino abierto para que se hagan diferentes interpretaciones, y que el estudiante necesariamente deba tomar decisiones. Podríamos argumentar que esto daría lugar a que aparezcan errores, pero casualmente eso es lo que queremos que ocurra. Los errores son importantes en una clase de Matemática como objeto de enseñanza y de aprendizaje, y ya los analizaremos.

Hay que tomar decisiones en cuanto a los valores de los parámetros a y c. Sabemos que no tiene importancia en qué valor dejamos fijo a c, y no ocurre lo mismo para a. Pero esto debe ser una *deducción que obtengan los estudiantes*, y no algo que nosotros les contemos.

Por otra parte, la consigna tiene cierto grado de ambigüedad cuando se pide analizar *las características gráficas de una familia de curvas*. Al estudiante seguramente le surja como interrogante: ¿qué debo analizar? Y es rico, desde el punto de vista matemático, que se haga este tipo de preguntas. Esto lo lleva a poner en juego formas matemáticas de pensar, y emula lo que ocurre cuando un matemático se enfrenta con actividades donde no siempre se tiene la certeza del camino a recorrer, y es necesario hacer algunos recortes, imaginar posibles caminos, conjeturar, explorar, etcétera.

Nuevamente, proponemos resoluciones en lápiz y papel y tic para contar con evidencias a la hora de redactar el análisis. A modo de ejemplo, en el siguiente link se puede observar una posible forma de resolución de esta consigna utilizando lápiz y papel: https://www.youtube.com/watch?v=7vxk8S6YqhQ. Se accede también escaneando este código qr:

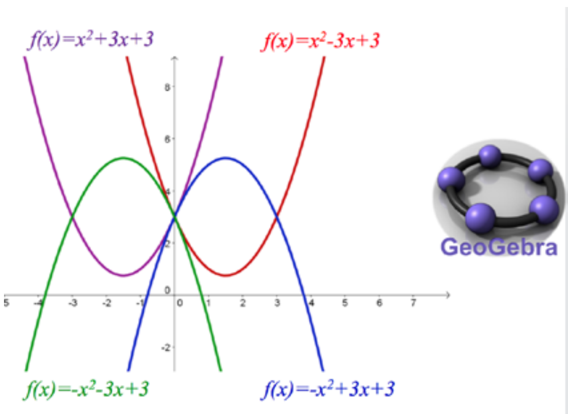
En los primeros minutos de este video se advierte una posible resolución "a mano", y luego ello se contrapone a la incorporación de la tecnología, en este caso, el programa GeoGebra.

Si bien hemos delineado en el apartado anterior algunas pautas que se podían observar en el video, profundizamos aquí sobre lo mencionado antes.

Este problema no condiciona el uso de un recurso, pero no da lo mismo abordarlo con tic o sin ellas. El uso de tic da lugar a que aparezcan innumerables hipótesis por parte de los estudiantes. Transcribimos aquí algunas de las que se han presentado cuando se implementó en cursos de la escuela secundaria y en estudiantes de profesorado:

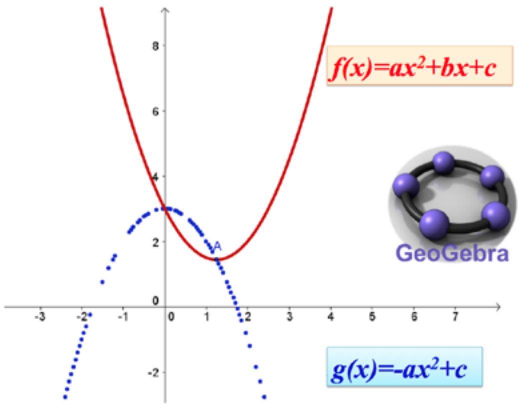
- A medida que *b* es más chico, las parábolas se hacen más grandes.
- Si *a* y *b* tienen los mismos signos, la parábola tiene el vértice a la izquierda del eje de ordenadas. En caso de que *a* y *b* tengan distintos signos, el vértice se encuentra a la derecha del eje de las ordenadas.
- Si *b* es positivo, la parábola corta con su rama creciente al eje de las ordenadas, y si *b* es negativo, la parábola corta al eje de las ordenadas con su rama decreciente.

Gráfico a partir del cual surgen las conjeturas



- Si b es negativo, la parábola se encuentra hacia la izquierda del eje de ordenadas, y si b es positivo, la parábola se encuentra hacia la derecha.
- Si b es negativo, la parábola se encuentra hacia la derecha, y si b es positivo, la parábola se encuentra hacia la izquierda.
- Los vértices de la familia de parábolas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ describen como lugar geométrico otra parábola: $y = ax^2 + c$.

Rastro que dejan los vértices de la familia de parábolas



- El parámetro b provoca corrimientos de la parábola, pero depende del signo que tenga el parámetro a.
- A medida que b decrece, o crece, la parábola desciende.

Analicemos algunas de las conjeturas que brindaron los estudiantes e intentemos ponernos en su lugar para comprender lo que están pensando. Por ejemplo: al decir que si a es negativo la parábola se va para arriba, ¿se está equivocando en lo que observa en la pantalla? ¿Qué es lo que está viendo? Con certeza ha fijado el parámetro a en un valor negativo, y luego tomó valores de b desde un valor positivo (o negativo) hasta 0. La secuencia de gráficas que ha dibujado con el software le hace "ver" que la parábola se "va para arriba". ¿Está mal que haya ocurrido esto? ¡No! Por el contrario, es matemáticamente rico el debate que esto nos ayuda a generar. Si hubiésemos dado nosotros los valores que el estudiante debe explorar, no se habría presentado nunca este error, y ellos no advertirían los criterios que nosotros hemos tomado para seleccionar valores para un parámetro (por ejemplo, que el parámetro *c* no influye en los desplazamientos del eje de simetría sobre el eje de abscisas, pero sí los parámetros *a* y *b*).

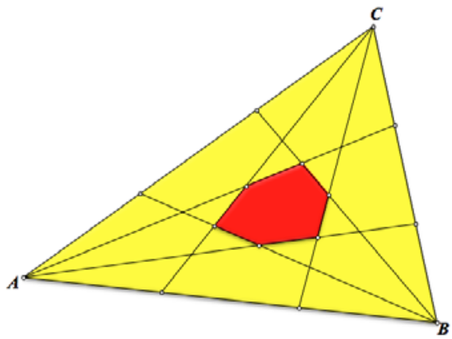
Si analizamos el resto de las conjeturas, notaremos que los estudiantes esgrimen argumentos con un vocabulario que está más allá de lo que esperamos en una clase de Matemática y en un contexto no mediado por las tic , como por ejemplo que la parábola se desplaza "a la derecha de la pantalla", o que se desplaza "a la parte superior izquierda del gráfico" (aludiendo a la vista gráfica que tienen en pantalla). Además, aparece la expresión *estiramiento*, que merece una discusión y debate con el grupo. Hacemos notar que hablamos de *debate* y no de que el docente *corrija* estas cuestiones. El desafío se encuentra en gestionar la clase para producir reflexiones y prácticas metacognitivas en los estudiantes, pues sabemos que no tiene ningún efecto repetir incansablemente lo que no se debe hacer en matemática.

Omitimos la validación que podríamos hacer de las conjeturas verdaderas y los contraejemplos que hallaríamos para las que son falsas, y pasamos al análisis de los criterios.

Como puede verse en los primeros minutos del breve video anterior, aún teniendo experticia para proponer casos particulares que faciliten la graficación manual, estamos lejos de llegar a alguna de todas las conjeturas que la exploración con tic permite. Por este motivo, consideramos que se cumple el criterio de imprescindibilidad para esta consigna. No se pierde de vista el objetivo matemático, se brinda libertad para decidir si es útil o no apelar a las tic y no se condiciona el uso de un recurso tecnológico particular.

Consigna 3: "Dividir cada lado de un triángulo en *n* partes congruentes, con $n \geq 3$. Analizar y fundamentar si existe alguna relación entre el área triangular y el área del hexágono central resultante de unir los dos puntos de corte, más próximos al punto medio de cada lado, con el vértice opuesto del triángulo".

Gráfico que acompaña al enunciado de la consigna



En el análisis que desarrollamos a continuación, dejamos a cargo del lector la resolución en lápiz y papel, y nos focalizamos en el uso de la tecnología para resolver. Por otra parte, mencionamos los criterios que la consigna cumple como indicios para completar un análisis. Queda a cargo del lector el vínculo con las evidencias desarrolladas en la resolución.

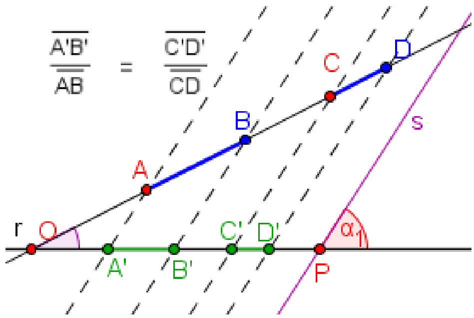
Analicemos la consigna: ¿cumple con los criterios que venimos enunciando? ¡Claro que sí! Pero veamos lo que involucra su resolución. Seguramente, la consigna pondrá incómodos a algunos docentes, pues solemos pensar que nuestros estudiantes no sabrán qué hacer ni cómo proceder. La idea es enseñarles a tomar decisiones, que equivocarse es bueno, y para ello hay que darles libertad. De todos modos, en nuestro diseño podemos tener preparadas algunas intervenciones que iremos dando "gota a gota" para aquellos grupos que no arranquen con el problema. La dificultad se encuentra en decidir en qué momento intervenir y no coartar lo que los estudiantes están pensando. Habrá que ser pacientes y observadores de las acciones de nuestros estudiantes: ¿están aún pensando un plan de acción, o ya lo han pensado y no saben cómo ejecutarlo?

Veamos algunas cuestiones que están detrás de la resolución. Está claro que es prácticamente imposible abordar la consigna sin el uso de un utilitario geométrico, por lo que el criterio referido a la imprescindibilidad de las tic se cumple sobradamente.

Luego de escoger un utilitario geométrico, habrá que dibujar un triángulo y dividir en partes congruentes cada uno de sus lados. ¿Cómo empezamos? Habrá que recurrir a la teoría relacionada, y podríamos hacerlo de la siguiente manera:

- Aplicar el Teorema de Thales. Eso nos lleva a trazar una semirrecta con origen en uno de los puntos extremos del segmento a dividir. El que todos conocemos, ¿verdad?

Resolución utilizando el Teorema de Thales

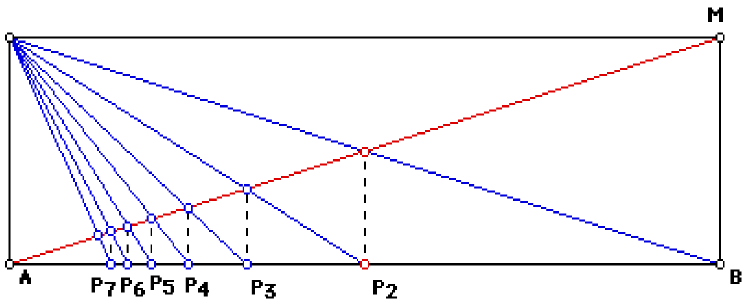


- Aplicar homotecias con un factor de escala. Sabemos que una homotecia es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor, y eso nos permitiría obtener puntos que se encuentran a 1/3, a 1/4, etcétera, de uno de los extremos.

Resolución utilizando homotecias

- Construcción GL&D. Construir un rectángulo cuyo lado sea el segmento a dividir. Posteriormente, trazar las diagonales y la proyección ortogonal del punto de intersección de las diagonales, lo que daría el punto medio. Si unimos el punto medio con uno de los vértices del rectángulo y proyectamos la intersección de este segmento con la diagonal, obtenemos la tercera parte (ver P_3 en la imagen). Si unimos la tercera parte con el vértice y proyectamos la intersección de este segmento con la diagonal, se obtiene la cuarta parte (ver P_4 en la imagen).

Gráfico de la resolución GL&D



- Para quienes manejan GeoGebra u otro utilitario geométrico, se puede crear una herramienta nueva, la cual con un clic permitirá dividir un segmento en partes congruentes.

Posteriormente, habrá que trazar las dos cevianas (segmentos de recta que unen un vértice de un triángulo con un punto en el lado opuesto a este) correspondientes a los puntos de trisección y determinar el hexágono convexo que resulte de la intersección de esas cevianas.

Calcular el área del triángulo y la del hexágono resultará sencillo al contar con un utilitario geométrico, pues si no dispusiéramos de él los cálculos se tornarían prácticamente imposibles para un estudiante.

Ahora bien, analizar si existe una relación conlleva a múltiples interpretaciones, y es bueno que estas aparezcan. El carácter dinámico de la figura construida permitirá mover los vértices del triángulo y determinar si la razón entre áreas se mantiene constante o cambia.

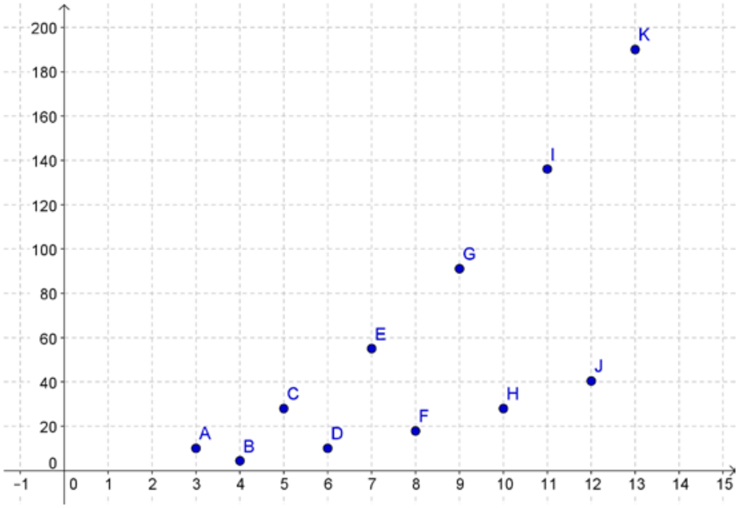
Los pasos anteriores deberán repetirse dividiendo los lados en 4, 5, 6, …, *n* partes congruentes y seleccionando, en todos los casos, las dos cevianas centrales. En este momento será oportuno sistematizar en una tabla la información, en la que aparezca el número de divisiones efectuadas sobre el lado del triángulo y las razones entre áreas correspondientes calculadas. No obstante, esta estrategia (organizar la información en una tabla) debería ser recuperada luego, en una puesta en común, para ayudar a los estudiantes a reflexionar sobre por qué es importante sistematizar información, qué es lo que permite o no disponer datos de cierta manera.

Tabla que relaciona el área con el número de partes congruentes de cada lado

Número de partes congruentes por lado	Razón entre las áreas (valores aproximados)
3	10
4	4,38
5	28
6	10
7	55
8	17,88
9	91
10	28
11	136
12	40,38
13	190

En este momento, si no se hace un cambio de registro resultará difícil establecer un modelo matemático que relacione ambas variables (excepto que se haya trabajado precisamente el reconocimiento de modelos polinómicos –diferencias divididas– a partir de registros tabulares), pues podría realizarse un ajuste polinómico para las divisiones pares, y otro para las impares.

Los pares ordenados de la tabla en un gráfico cartesiano



El problema continúa y hay que validar las relaciones que se encontraron. Las bases del problema corresponden al Teorema de Morgan, en honor a un estudiante del noveno año, Ryan Morgan, de la Patapsco High School, publicado en Watanabe *et al.* (1996). Es de destacar que el interés de Ryan Morgan se despierta, como él ya lo señalara, por la presentación de una actividad con computadora usando un software de geometría dinámica, durante la cual a los estudiantes se les solicitó redescubrir el Teorema de Marion. No obstante ello, Ryan no quedó complacido con verificar solo un teorema empleando un software, sino, más bien, se interesó por explorar lo que ocurriría si los lados del triángulo fueran fraccionados en más de tres segmentos congruentes.

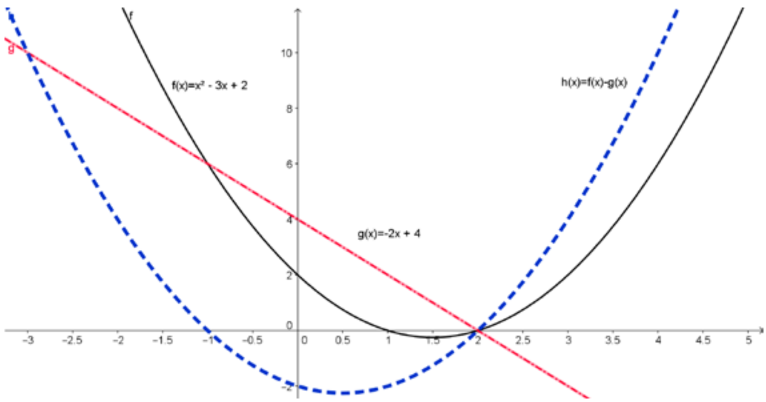
Retomemos ahora el análisis de los criterios. Habíamos expresado que claramente se satisface el de imprescindibilidad. También se cumple el criterio de favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas, pues se pide justificar la relación. Además, no se pierde de vista el objetivo matemático, y se induce a incluir distintos usos de tic si se lo relaciona con la historia del Teorema de

Morgan, no solo al uso de un software matemático sino también al uso de internet para búsqueda de información. Se da libertad para apelar a las tic y libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar.

Consigna 4: "Sea *f* una función polinómica de grado 2, *g* una función lineal y $h = f - g$, analizar y fundamentar si es posible anticipar las características que tendrá la representación gráfica de *h* conociendo las de *f* y *g*".

El enunciado de la consigna es suficientemente abierto para que el estudiante decida explorar con algunos casos particulares. Si bien no se propone trabajar con un software en particular, no resulta lo mismo utilizar o no tic . La calidad de la representación gráfica es relevante para este problema. Analicemos, por ejemplo, si efectuamos una representación gráfica de dos funciones cualesquiera:

Gráfico de un caso de la situación planteada



No resulta obvio para un estudiante detectar que las abscisas de los puntos de intersección entre *f* y *g* corresponden a las raíces de *h*. Asimismo, que la recta puede ser secante, tangente o no cortar a la parábola, lo cual lleva a anticipar que la función *h* tendrá raíces reales y distintas, reales e iguales o complejas conjugadas para cada una de estas instancias.

Las instancias de exploración del utilitario geométrico ayudan notablemente a consolidar algunas conjeturas, las cuales pueden validarse posteriormente apelando al registro algebraico.

Si bien la actividad es sencilla, cumple con el criterio de favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas, pues pide justificar las elecciones que se realizan. Podríamos prescindir de las tic , pero no resulta lo mismo resolver la consigna sin ellas. Hay instancias en que el utilitario geométrico se retroalimenta rápidamente con los cálculos, puntos de encuentro o precisión de representaciones gráficas, que ayudan notablemente en la resolución del problema. Estas características conceden elementos a favor para sostener el criterio de imprescindibilidad de las tic .

Con el problema se está promoviendo la enseñanza de algo matemático, y no se alude al recurso tecnológico, por lo que damos por cumplido el criterio de no perder de vista el objetivo matemático. Como el problema no pide utilizar un recurso en particular y se otorga libertad de selección para resolverlo, damos por cumplidos los criterios de libertad para apelar a las tic y libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar.

En este momento es preciso hacer una aclaración. En las consignas descriptas anteriormente, hemos mostrado, a partir del análisis, que son buenos ejemplos de consignas que habilitan un uso pertinente y significativo de tic . Sin embargo, el análisis realizado no se reduce solamente a estudiar los criterios de tic , sino que pone al lector en algunos contextos de trabajo en el aula y plantea diferentes escenarios que promueven diversos objetivos. Con esto queremos señalar que el lector podrá interpretar y reordenar la información, que de los análisis se desprende, para la elaboración de tareas (en el sentido del capítulo 3) que presenten un uso pertinente y significativo de tic .

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2003). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 15-25.

Barreiro, P. y Rodríguez, M. (2014). ¿Cómo lograr un uso significativo de las tic en las propuestas de enseñanza que los estudiantes de Profesorado de Matemática diseñan para el nivel medio? Comunicación presentada en el seminario interno “Nuevas tecnologías: aplicaciones en la enseñanza de la matemática y en la formación de profesores”. Buenos Aires: ungs .

Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática*. [Tesis de maestría]. Neuquén: Universidad Nacional del Comahue.

Watanabe, T., Hanson, R. & Nowosielski, F. D. (1996). Morgan's Thoerem. *The Mathematics Teacher, 89*(5), 420-423.

Capítulo 5
Criterios para intervenciones en el aula

Introducción

Si recordamos las primeras veces que dimos clases de Matemática (o, mirando hacia adelante, nos queremos imaginar cómo será ese momento), seguramente coincidamos en que, más allá de las buenas consignas que hayamos previsto, el objetivo, los recursos, etcétera, lo que nuestros estudiantes nos pregunten “en vivo” puede descolocarnos. La *gestión de la clase* puede ser uno de los momentos más difíciles de vivir, aunque de los más interesantes, porque estar allí nos permite aprender la gran tarea de *enseñar matemática*. Todo lo que hayamos aprendido antes, de matemática, de educación matemática, de psicología, de didáctica general, etcétera, son insumos valiosos, sin dudas, pero no aprendemos a enseñar sino hasta que estamos parados frente a una clase con estudiantes reales. Sea que nos estemos formando para ser docentes o si somos docentes con más o menos experiencia, cada uno de esos momentos –las clases– son únicos e irrepetibles, y serán nuestra fuente de datos para entender cómo mejorar nuestra enseñanza. En este capítulo nos dedicaremos a un asunto que se juega en la inmediatez de la clase, que fuerza al docente a tomar decisiones rápido, casi sin pensar: las *intervenciones en el aula* que deberá hacer en respuesta a preguntas de los estudiantes, a actitudes que observa, a inacción, etcétera. Como veremos en el capítulo 6, poder hacer anticipaciones de lo que podría ocurrir en el aula y tener previsiones sobre qué hacer en esos casos, nos permitirá entrar al aula más seguros, con un plan de trabajo pensado y fundamentado. Esta será la manera más segura y formativa para llegar al aula. Por ahora, entonces, nos dedicaremos a pensar en las intervenciones docentes. Haremos el ejercicio de imaginar que ante una pregunta de un estudiante tenemos tiempo para pensar, decidir y tener claro por qué le responderemos tal o cual cosa, y por qué no le responderíamos otras.

Entre las primeras cosas difíciles de imaginar para un estudiante de Profesorado, está pensar qué nos podrían responder nuestros estudiantes que no sea la respuesta correcta. Por lo general, solo imaginamos como posible respuesta de un estudiante la correcta. Quienes hemos transitado algo en la docencia ¡sabemos que esto está lejos de ser así! En clases tradicionales, donde el rol activo lo tiene el docente, ni siquiera sabemos lo que dirían los estudiantes, pero como estamos corridos de ese modelo, pensemos que, naturalmente, los estudiantes al trabajar resolviendo nuestras consignas estarán interactuando, preguntando, escribiendo, etcétera.

La situación que tal vez más incomoda al docente se da cuando un estudiante le pregunta algo que en ese momento no sabe si es o no correcto. Solo es diferente a lo que él pensó, y en ese caso es altamente probable que el profesor quiera llevar al estudiante a su forma de pensar. Eso sacaría al profesor de un lugar de "no saber" y lo pondría en un terreno tranquilo donde él domina la respuesta. Pero ¿y la inquietud del estudiante? ¿Sería adecuado diluirla? ¿Nos atreveríamos a decirle al estudiante o a toda la clase "no tengo idea de si lo que me mostrás es o no válido"? ¿Sería valioso para el estudiante vivir genuinos momentos en los que no sabemos algo de matemática y nos ponemos a dilucidar si vale o no? En toda perspectiva constructivista de enseñanza y aprendizaje de la matemática se sostiene que hacer matemática se acerca al modo de trabajo del matemático, quien no sabe cosas, indaga, explora, ajusta hipótesis, se contesta lo que no sabía, si puede, y así avanza. En perspectivas de tipo conductista, el profesor tiene un saber acabado que intenta pasarle a sus estudiantes. En este último enfoque no sería razonable que el profesor se planteara que no sabe algo, mientras que en el primero sería tan común desconocer o no saber que naturalmente diríamos "no sé, veamos en la clase". Esperamos que podamos ir naturalizando este tipo de intervención, más alineada con el quehacer matemático, y que no elijamos intervenir traccionando a nuestros estudiantes al terreno en el que, como profesores, estamos cómodos. Veamos, entonces, algunas pautas para pensar nuestras intervenciones en la clase.

Dos criterios rectores

Si retomamos lo que discutimos en el capítulo 2 referido a cómo lo metacognitivo entra en juego para que el estudiante aprenda, tendríamos rápidamente un primer criterio rector para nuestras intervenciones, que es *tratar de que nuestros estudiantes se den cuenta por sí solos* de cómo es la respuesta de lo que sea que nos pregunten. Es decir, no decirles si está bien o no una resolución, sino tratar de intervenir para que se den cuenta de ello; o no decir cómo se resuelve tal cosa, sino tratar de intervenir para que se den cuenta de qué podrían proponer, etcétera.

Es un cambio abismal pasar de *responder* a *pensar qué preguntarle al estudiante para que él se dé cuenta de la respuesta*. Decimos que es un criterio rector porque así como está planteado no queda expresado qué decir; sí nos indica qué *no decir*, y tampoco nos señala *cómo preguntar* para atenderlo.

Ejemplo 1

Si tenemos la siguiente consigna: "Decidan si es verdadero o falso que existen infinitos números entre 1,23 y 1,24 y justifiquen", y un estudiante nos dice:

Estudiante: es falso, porque los números son consecutivos.

Tal vez, no sepamos qué decirle. Lo que seguro *no* le diremos es:

Profesor: no es correcto, fijate que los números son distintos, y si mirás la propiedad de la densidad de los racionales, verás que sí hay infinitos números entre ellos.

No elegimos esta forma de intervenir, pues no hemos siquiera intentado que se dé cuenta de nada. Nos interesa poner este criterio rector en escena porque, cuando estemos en el aula, si todas nuestras anticipaciones fallaron y nos preguntan una cosa diferente, este criterio debería regir nuestra intervención.

Usar este criterio nos va a poner a pensar sostenidamente en preguntas del tipo: "¿cómo logro que mis estudiantes adviertan…?", "¿qué le puedo preguntar para que vea…?", "si le digo… ¿podría darse cuenta de…?". Espero que el lector advierta que es una forma de pensar nuestra –del docente–, previa a la pregunta que finalmente exprese.

Un segundo criterio rector es *tratar de entender qué pensó el estudiante antes de intervenir*. Esto también es básico porque nos permitiría entender o conjeturar qué pensó, en qué se equivocó, qué relacionó, etcétera. Si no hacemos esto, es como si fuéramos a la clase con un libreto preestablecido según el cual no importa qué originó la pregunta; el docente responde de un modo preformateado.

Ejemplo 2

Tenemos la misma consigna que en el ejemplo anterior.

Estudiante 1: es falso, porque son consecutivos.

Estudiante 2: es falso, porque hay solo 9, que son: 1,231; 1,232; 1,233; 1,234; 1,235; 1,236; 1,237; 1,238 y 1,239.

Estudiante 3: es verdadero, porque son racionales.

Todas estas respuestas están mal, sin embargo, el profesor podría decir:

Profesor: no es correcto, fijate que los números son distintos, y si mirás la propiedad de la densidad de los racionales, verás que sí hay infinitos números entre ellos.

Cada estudiante partió desde un pensamiento diferente, y la respuesta del profesor no atiende eso, y el segundo criterio rector no fue aplicado.

El primer estudiante, como ya dijimos, considera solo la parte decimal, la interpreta como números naturales consecutivos. A partir de ese error, responde. El segundo, en cambio, considera que solo puede construir esos números intermedios. Y del tercero, no sabemos qué piensa.

No entender qué es lo que nuestro estudiante piensa nos da la primera pauta para intervenir. ¡Pregúntenle! Pídanle que les explique, que les diga qué pensó. Recién ahí, habiendo entendido su punto de partida, podremos intervenir.

Ejemplo 3

Veamos cómo podría ser lo que acabamos de decir:

Estudiante 3: es verdadero, porque son racionales.

Profesor: ¿me podés explicar un poco cómo sería?

Estudiante 3: porque sabemos que hay infinitos racionales.

Recién acá el profesor entendió lo que el estudiante piensa o vincula erróneamente. Recién ahora podrá pensar: “¿qué le digo/pregunto?”.

En la siguiente sección daremos algunas pautas menos generales, pero, como se verá, todas tienen atrás este criterio rector. Allí podremos ver matices y cómo la forma en sí de preguntar puede hacer que nuestra intervención atienda al criterio o no.

Criterios para anticipar intervenciones de clase

Listamos a continuación algunos criterios, sin ánimo de exhaustividad. Veremos cómo se alinean con el criterio rector y sumamos ejemplos de diálogos en los que el lector podrá advertir el uso del lenguaje, el tipo de pregunta, cómo entra en juego lo matemático, etcétera.

Criterio 1: *Evitar que nuestra respuesta le dé al estudiante más información que la que su pregunta contiene.*

Es conveniente evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante, para evitar que no tenga idea de por qué, cuando él preguntó algo, el profesor respondió con otra cosa. Para nosotros eso puede ser muy claro, pero no para el estudiante.

Basta pensar en el ejemplo 1 recién analizado. En esa intervención, el docente da más información al estudiante al decirle que los números dados son racionales, y que ese conjunto tiene la propiedad de densidad. Todo esto induce al estudiante a pensar desde donde el docente lo hizo. Además de dar más información, el profesor no enfocó la cuestión principal, que es que el estudiante considera a la parte decimal como números naturales.

Criterio 2: *Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante.*

El segundo criterio rector nos invita a entender qué es lo que el estudiante pensó, en qué se equivocó, etcétera. Este criterio nos hace situar en la forma de pensar del estudiante para intervenir a partir de allí. Tratar de que se dé cuenta de su error (¡no decirle!, primer criterio rector) sin llevarlo a la lógica del profesor. Si lo lleváramos a lo que el profesor quiere, a su terreno, es muy probable que el estudiante abandone su resolución sin saber si estaba bien o no, o por qué estaba mal. También sucede a veces que el estudiante sigue sosteniendo su pregunta y el profesor lo tracciona a otra forma de resolver, y la situación puede tornarse tensa.

Ejemplo 4

En la explicación anterior hemos expresado qué es lo que el estudiante podría estar pensando cuando responde en el ejemplo 1. Entonces, en lugar de llevarlo a que, por ejemplo, use la densidad, podríamos primero intentar lograr que reconozca que lo que propone no es correcto, y que él mismo decida de qué otro modo encarar la actividad. A modo de ejemplo, podría pensarse en una intervención de este tipo:

Profesor: ¿por qué decís que son consecutivos?

Estudiante: porque 24 es el consecutivo de 23.

Profesor: entiendo… ¿Cuáles son los números que tenés que analizar?

Estudiante: 1,23 y 1,24.

Profesor: pero me dijiste recién 23 y 24.

Estudiante: ah, no, había considerado solo lo que está después de la coma. Lo pienso y le pregunto.

Aquí el docente solo ha logrado que el estudiante advierta su error, no lo ha inducido a su camino para resolver, y el problema vuelve a quedar en manos del estudiante. Sin embargo, *la intervención podría no estar concluida* aún porque el estudiante todavía no llega a concluir que es cierto que entre esos números hay infinitos. El profesor tendrá que volver a este estudiante más tarde, a ver cómo avanzó.

Criterio 3: *Una única intervención no siempre resuelve la duda del estudiante.*

En ocasiones, tal vez podamos dejar planteado algo, hacerle revisar al estudiante una definición, hacer cierto intento, etcétera, y volver a hacerlo unos minutos más tarde, para concluir nuestra intervención. De este modo, cuando estemos planificando, las intervenciones docentes previstas ante ciertas respuestas de los estudiantes pueden verse como un diálogo, tal como los estamos presentando aquí.

Criterio 4: *Si el estudiante no logra avanzar con nuestras intervenciones, podemos pensar hacia dónde queremos llevar su razonamiento, cuál será nuestra estrategia y, a partir de allí, intervenir.*

Notemos, antes del ejemplo, que este criterio no se contradice con los criterios rectores. Podemos entender qué pensó el estudiante, podemos no decirle qué hacer ni cómo hacerlo, pero antes de intervenir podemos tener pensado qué camino podríamos invitarlo a recorrer.

Ejemplo 5

Seguimos con el mismo ejemplo. Si el estudiante no logra avanzar, nosotros podemos elegir el modo en que vamos a ayudarlo. Por ejemplo:

a) Si queremos que el estudiante utilice la densidad de Q en R, podríamos decirle:

Profesor: ¿a qué conjunto pertenecen esos números?

Estudiante: a los reales.

Profesor: bien, ¿y a algún otro conjunto?

Estudiante: a los racionales.

Profesor: ok. Tomá tu cuaderno y fijate si alguna propiedad de estos números podría serte útil para resolver la actividad. Vuelvo en un rato.

Al volver…

Estudiante: utilizo la densidad y sé que entre ambos existe otro racional. (Aquí el profesor se da cuenta de que aún el estudiante no llega a advertir si hay o no infinitos).

Profesor: bien, ¿con eso te basta para responder la pregunta?

Estudiante: ah, no, porque me preguntan si hay infinitos.

Profesor: ¿entonces?

Estudiante: ¿podría repetir el mismo argumento?

Profesor: a ver, ¿cómo sería? (El docente no da por hecho que el estudiante se dio cuenta de entre qué números repetir el argumento para concluir con un razonamiento de tipo inductivo, y que podría seguir así indefinidamente).

Estudiante: tomo el 1,23 y el que está entre medio, y repito la forma de pensar. Así podría seguir infinitamente.

Recién aquí damos por terminada la intervención porque se resolvió el asunto.

b) Si, en cambio, tenemos en mente que queremos un argumento de tipo constructivo que muestre un modo posible de generar infinitos números entre ambos, podríamos intervenir del siguiente modo:

Profesor: ¿qué te pide el enunciado?

Estudiante: que vea si es cierto que hay infinitos números entre 1,23 y 1,24.

Profesor: ¿podrías mostrar *un* número entre ambos?

Estudiante: sí, 1,231.

Profesor: bien, ¿y otro?

Estudiante: 1,236.

Profesor: ¡bien! ¿Y creés que es cierto o no lo que se te pregunta?

Estudiante: creo que sí.

Profesor: ¿podrías *mostrar* los infinitos números?

Estudiante: no…

Profesor: y en cambio, ¿podrías generar algunos números de cierta forma que el que lea se dé cuenta de que con ese mismo patrón podría seguir indefinidamente? (Cuando ya intentamos otras intervenciones que no agregan información, a veces sigue sin destrabarse la situación y uno decide sumar información. Este es un caso en el que la intervención da más información de la que el estudiante trae).

Estudiante: tendría que pensarlo…

Profesor: dale, hacelo y después mostrame.

Estudiante: al rato…: 1,231; 1,2311; 1,23111; 1,231111, etcétera. Aquí, quien lee debería entender que el siguiente solo agrega un 1 y nunca me voy a pasar del 1,24.

Profesor: excelente (y da por terminada la intervención).

Criterio 5: *Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol.*

Así, irá favoreciendo la reflexión metacognitiva y el estudiante podrá ir incorporando elementos para saber autónomamente si lo que hizo es correcto o no. Este criterio muestra intervenciones asociadas a las consignas metacognitivas que mencionamos en el capítulo 2.

Ejemplo 6

Un estudiante le muestra al profesor su resolución de la ecuación *sen* $x = 1/2$ en $(0, 2\pi)$. Encontró que $S = \{\pi/6, 5/6\pi\}$.

Estudiante: ¿está bien lo que hice?

Profesor: ¿se te ocurre alguna manera de saber si las soluciones que encontraste son correctas o no?

Estudiante: y… sí, las verifico.

Profesor: a ver…

Estudiante: sí, dan las dos (lo hizo en la calculadora). Está bien, entonces.

Profesor: ¿estás seguro de que verificando esas soluciones encontraste el conjunto solución de la ecuación?

Estudiante: y… sí.

Profesor: ¿qué es el conjunto solución de una ecuación?

Estudiante: un conjunto con las soluciones.

Profesor: ¿con cuántas?

Estudiante: con todas las que haya.

Profesor: ¿podés asegurar que esas dos son todas las soluciones?

Estudiante: ah, bueno, con lo que hice no sé si no hay más.

Profesor: bueno, entonces habría que buscar algún argumento que justifique que no hay otras.

Estudiante: sí, no hay otras porque lo hice en la circunferencia trigonométrica, y ahí se ve que el seno vale 0,5 solo dos veces.

Profesor: bueno, claro. Entonces tenemos que las dos soluciones encontradas verifican la ecuación, y encontramos un argumento para justificar que no hay más.

Estudiante: entonces está bien.

Profesor: sí. Entonces, la verificación de las soluciones reemplazándolas en la ecuación, ¿para qué te sirve y para qué no?

Estudiante: me sirve para saber si esas soluciones están bien, pero no para saber si las encontré todas. Para eso tengo que buscar otra forma.

Profesor: muy bien, y esto ¿queda ligado a esta ecuación particular?

Estudiante: no, lo podría aplicar a cualquier ecuación que tenga.

Profesor: ¡excelente!

Criterio 6: *No intervenir solo cuando lo que el estudiante hizo está mal. Es decir, pedir explicaciones aun cuando la respuesta sea correcta.*

Si el profesor solo le pregunta al estudiante si está seguro, si está bien, etcétera, cuando lo que ve es incorrecto, el estudiante rápidamente sabrá que ante esas preguntas algo mal debe tener.

Si nos acostumbramos a pedir explicaciones aun cuando la respuesta es correcta, podríamos, por ejemplo, develar un argumento inválido que permite de todas maneras llegar a la solución correcta, pero por un camino inapropiado. Si no lo hiciéramos, no veríamos que está ocurriendo esto.

Ejemplo 7

Sigamos con el ejemplo 1, pero imaginemos esta situación:

Estudiante: es verdadero, por densidad.

Si no nos acostumbramos a preguntar cuando vemos una respuesta correcta, podríamos no ver cosas como la que sigue:

Estudiante: es verdadero, por densidad.

Profesor: ¿podrías explicarme a qué te referís?

Estudiante: a que sabemos que entre dos números racionales siempre hay otro.

Notemos que esto está doblemente mal. Por un lado, el estudiante podría no advertir que los números a los que hace referencia deben ser distintos, y por otro lado así como queda expresado no es claro por qué hay infinitos. Ante esta respuesta, ¡el profesor debe intervenir! Le dejamos pensar al lector qué haría en este caso.

Criterio 7: *Acostumbrarnos a intervenir pidiendo explicaciones, preguntando por qué, qué significa…*

Este tipo de intervenciones ayudarán al profesor a tratar de entender el modo de pensar del estudiante que lo llevó hasta el punto en que se inició la consulta.

Criterio 8: *No abandonar una intervención (aunque pase rato entre un diálogo y otro) hasta que haya quedado resuelto el problema que detectamos en el estudiante.*

En el ejemplo 5 mostramos dónde terminar la intervención, y en el ejemplo 4 mostramos que la intervención no se da por terminada, sino que habrá que volver.

Criterio 9: *Intervenir sobre cada error que veamos, aunque no haya sido objeto de la pregunta del estudiante (pulir el lenguaje, sea oral o escrito, la escritura simbólica, los gráficos, etcétera).*

Suele pasar que los estudiantes nos llaman para hacernos una pregunta, y nosotros atinamos a mirar su carpeta. En ese caso, muchas veces vemos en sus escritos cosas que están mal, aunque no sean sobre la pregunta. Separando las cosas, necesariamente debemos intervenir (por supuesto que atendiendo a los mismos criterios).

Estilos de intervenciones docentes

Si seguimos los dos criterios rectores que enunciábamos antes: *tratar de que nuestros estudiantes se den cuenta por sí solos de cómo es la respuesta de lo que sea que nos pregunten* y *tratar de entender qué pensó el estudiante antes de intervenir*, nos obliga a realizar un estudio previo de las respuestas que podrían dar sobre la actividad, para recién entonces poder intervenir en la clase.

Este estudio previo es muy relevante, y podemos encontrar las siguientes situaciones:

- Quienes hacen una exploración a conciencia de las posibilidades de resolución que tiene la actividad y logran aproximarse a los diferentes caminos (erróneos y acertados) que podría realizar el estudiante.
- Quienes especulan pensando que “tal vez podría hacer…”, pero sin realizar una exploración certera de los diferentes caminos ni imaginar las conjeturas o conclusiones que podrían formular los estudiantes.
- Quienes no hacen un estudio previo de lo que realizaría el estudiante, y ante conjeturas que son diferentes a la pensada por el profesor para

la actividad las desacreditan por considerar que no se ha entendido la consigna, o por no estar formulada con vocabulario específico.

Sin lugar a dudas, este estudio previo conduce a intervenciones que logran tener ciertas características distintivas. Nuevamente, sin ánimo de exhaustividad, podemos tener los siguientes estilos de intervenciones docentes en la clase de Matemática:

Estilo mayéutico: se realizan preguntas para que el estudiante llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones, y no por medio de un conocimiento aprendido. Este estilo es el que buscamos instaurar al enunciar los criterios para anticipar las intervenciones docentes.

Estilo paternalista: se realizan intervenciones que conllevan una reducción de la libertad y de la autonomía del estudiante, debido a que se sugiere el modo de realizar la tarea. Lo distinguimos cuando el docente sugiere el camino a seguir al realizar la intervención, ya sea mediante una invitación que formula para el estudiante ("fijate que los números son distintos, y si mirás la propiedad de la densidad de los racionales vas a ver que sí hay infinitos números entre ellos") o en la pregunta que le realiza ("¿tuviste en cuenta la densidad de los números racionales?").

Estilo falsacionista: se presenta cuando el profesor juzga como falsa una conjetura que es verdadera, ya sea por falta de un estudio previo de las resoluciones que tendría la actividad o porque le resulta inesperada la respuesta brindada por el estudiante. En consecuencia, buscando seguir uno de los criterios rectores que enunciamos (tratar de que el estudiante se de cuenta por sí solo de la respuesta) realiza intervenciones que pretenden refutar la conjetura mediante un contraejemplo o sugiriendo la exploración con más casos particulares.

Estilo dogmático: este estilo es clásico en un modelo tradicional de enseñanza de la matemática, donde se realizan intervenciones que ignoran lo realizado por el estudiante para proponer el modo en que el profesor tiene pensada la actividad. En este caso, no se busca partir de lo realizado por el estudiante, sino que se lo aparta de ese camino –sin importar si ha realizado una correcta resolución o si se está aproximando por otro procedimiento– para imponer el modo en que debería pensarse la actividad.

Reflexiones finales

Si empezamos a prestar atención a las preguntas y a nuestros modos de intervenir, iremos aprendiendo mucho de nuestro rol docente. Muchas veces nos encontraremos hablando por demás, diciendo más de lo que “deberíamos”. ¡No importa si esto ocurre! Porque darnos cuenta de esto es el primer paso para cambiarlo.

También iremos reconociendo tipos de preguntas que nos funcionan bien. Por ejemplo, cuando los estudiantes no saben ni por dónde empezar hay dos preguntas prototípicas que nos suelen hacer:

Estudiante 1: profe, no entiendo nada.

Estudiante 2: ¿cómo empiezo?

Si tratamos de entender las diferencias entre lo que llevó a los estudiantes a preguntar una u otra cosa, podemos ver que en la primera pregunta seguramente el estudiante *no tiene claro a dónde debe llegar*. No imagina cómo será la respuesta que debe obtener (si será un número, una expresión, un gráfico, etcétera). Tal vez tampoco tenga claro qué datos tiene. Sabiendo esto, podríamos pensar en intervenciones como: “Tratá de ver qué es lo que tenés que hallar”, “Imaginá cómo será tu respuesta”, “¿Podés darte cuenta de qué datos te da el ejercicio?”, etcétera.

La pregunta del estudiante 2 apunta a que el profesor le dé pistas sobre cómo resolver. Pregunta por el camino a recorrer, y esto ¡no lo diremos! Lo más interesante para pensar es que con esa pregunta no sabemos si el estudiante tiene claro a dónde debe llegar (y solo ocurre que no sabe cómo), o si no sabe a dónde debe llegar pero le interesa salir del asunto, resolver como sea, que alguien le indique el camino. Sabiendo esto, podríamos pensar en intervenciones como: “¿Tenés claro qué es lo que te pide el ejercicio?”. Acá queremos indagar si sabe o no a dónde llegar. Si sabe, es como el caso anterior. Si no sabe, podemos ver si reconoce qué datos tiene, igual que antes. Solamente con todo esto chequeado podríamos ver cómo intervenir respecto a los posibles caminos de resolución.

Una aclaración final que es importante, y que la dejamos para el final a propósito. Tenemos un límite para intervenir de este modo. Esto significa que muchas veces nos damos cuenta de que no podríamos sostener este tipo de intervención por mucho tiempo. A veces, el estudiante se enoja; otras veces, si lo dejamos “pensando” en realidad no piensa, se dispersa y lo terminamos perdiendo, ya que se siente desmotivado y deja la tarea. Esto significa que, como docentes, además de todo lo que dijimos que tenemos que tener en cuenta tendríamos que estar viendo el devenir de la clase, las actitudes, y más de una vez nos encontraremos destrabando situaciones, diciendo si algo está bien o no, dando más información que la que el estudiante trajo, mostrando caminos, etcétera. ¡No pasa nada! Lo interesante es, en primer lugar, advertirlo; y en segundo lugar, tener recursos para hacer otra cosa.

Hacer intervenciones apropiadas en la clase (apropiadas en el sentido de alineadas con este tipo de criterios) es una tarea compleja que pone de manifiesto el rol profesional del docente. No hay video, máquina, PowerPoint ni nada que sea capaz de entender qué pensó un estudiante cuando dijo algo. Nosotros sí, y si capitalizamos eso y reflexionamos sobre algunas cuestiones básicas iremos mejorando nuestra tarea docente. Mejoras que, por suerte, no acaban ni con los años ni con la experiencia.

Capítulo 6
Pautas para planificar

Introducción

Desde el comienzo del libro hemos estado aproximándonos a la compleja tarea de enseñar matemática, tratando de anticiparnos al momento de estar en el aula frente a los estudiantes. Hicimos esto cuando hablamos sobre cómo podríamos seleccionar consignas, luego pensamos cómo estas podrían formar parte de tareas en una clase, pensamos también en el uso de nuevas tecnologías, nos imaginamos el rol docente y nos anticipamos a las intervenciones que podríamos hacer en el aula. Todo esto que hemos estado haciendo aisladamente, ahora nos toca combinarlo, conjugarlo y, tal como si fueran piezas de un rompecabezas, lograr diseñar un todo coherente, valioso y, sobre todo, que cumpla la finalidad de lograr que los estudiantes aprendan matemática.

Bastaría pensar qué complejo es para un estudiante de Profesorado, cuando cursa la Residencia o Práctica Docente, articular estas piezas. Una forma sólida de entrar al aula, que le brinda al docente cierta seguridad, se logra cuando este es capaz de anticiparse a los hechos porque planificó o programó su clase. Esto suele registrarse por escrito, y es lo que se encuentra en las *planificaciones* o *programaciones de clase*. Necesitamos planificar una clase antes de llegar al aula para tener previsto lo máximo posible cómo será nuestra tarea en función de anticipaciones sobre respuestas de los estudiantes. De un modo análogo, planificamos todo el trabajo anual. Nos anticipamos a nuestra materia, pensamos y decidimos qué queremos lograr con nuestros estudiantes, qué nos proponemos, cómo lo haremos y cómo lo evaluaremos. Esta sería una *programación anual*, una *planificación anual* o un *programa* de la materia.

En ocasiones, hay requerimientos institucionales que exigen la presentación de un documento formal para que sea leído por otros (director, jefe de departamento, supervisor). Esto suele ocurrir con la planificación anual de una asignatura en el nivel secundario. En algunos concursos, para tomar horas u obtener cargos las instituciones exigen la planificación de una unidad temática o de una clase. Otra instancia en la que se exige la presentación formal de la planificación es en la formación docente: en materias del campo de la didáctica o de la educación matemática y en instancias de Práctica Docente o Residencia. También hay muchas otras ocasiones en las que la presentación de la planificación no es requerida. Esto ocurre con las clases que habitualmente damos los docentes. Rara vez la planificación de una clase debe ser presentada formalmente. Sin embargo, lo primero que nos interesa comunicar acá es el valor de tener un instrumento de este tipo para el docente, que tendrá a su cargo la gestión de la clase. La idea es no planificar por cumplir, sino porque nos es de utilidad. Trataremos de mostrar esto y vamos en esa dirección.

También hay instituciones que tienen sus propios formatos para las planificaciones, y otras que le dejan libertad al docente para que la diseñe como considere mejor.

Así como mencionamos que se puede planificar una clase, una unidad o un programa, también hay otras alternativas, como planificar temas, por ejemplo. En general casi todas las planificaciones contienen los mismos elementos, y el docente debe expedirse sobre los mismos asuntos. Lo que cambia es si lo hace de una forma global/macro (en las planificaciones anuales) o mucho más local/micro (en las clases), pasando por niveles intermedios (en unidades o temas).

En casi todas las planificaciones se espera que el docente se expida sobre:

- si fuera planificación anual, cómo se concibe a la asignatura en general y también dentro del plan de estudios del que forma parte (puede ser lo esperado en una sección que se llame “Fundamentación”. Recordar la distinción mencionada en el capítulo 1 al respecto del uso de este término);

- qué *propósitos* se plantean desde la enseñanza y qué *objetivos generales* se proponen para el aprendizaje (recordar la diferencia entre ambos mencionada en el capítulo 3);
- qué *contenidos* se desarrollarán y cómo se decide organizarlos: en unidades temáticas (si es planificación anual), en las clases (si es planificación de clases) u otro criterio;
- qué *objetivos específicos* se proponen para el aprendizaje de esos contenidos (sean para el año, para clases o como corresponda);
- cuáles son los *tiempos* propuestos para las distintas unidades temáticas (si es anual) o para las tareas en las clases;
- cuál es el *sistema de evaluación* que se piensa implementar y cómo se *acredita* el curso (si es anual) o cómo se evaluará lo aprendido en la clase/tema, si es el caso;
- cuál es la *modalidad de trabajo* que se imagina en la materia/clase; y
- qué *bibliografía* (obligatoria y complementaria) se le propone al estudiante (para el caso anual).

Veamos cómo nos manejamos para armar una planificación ¡con todos estos ingredientes!, más todo lo que hemos estado sumando en los capítulos anteriores.

Orientaciones para planificar la enseñanza de la matemática

Presentamos para los docentes orientaciones y sugerencias con la intención de que:

- tengan pautas que les guíen la producción de sus planificaciones;
- una vez terminada su primera versión de la planificación, vuelvan a revisarla a la luz de estas orientaciones (les sirve de guía para una autoevaluación y poder ajustar). Cabe señalar que aquí retomamos la noción de metacognición, desarrollada en el capítulo 2, pero ahora quien debe hacer la reflexión metacognitiva, respecto de su propuesta de planificación, es el futuro docente.

Cabe aclarar que sería conveniente que nuestros estudiantes del Profesorado conocieran estas pautas (u otras construidas por docentes de la Residencia o

Práctica Docente), si es que serán usadas para evaluar las planificaciones que ellos produzcan a lo largo de la materia.

¡Manos a la obra!

¿Por dónde empezamos?

1) **Nos tenemos que ubicar en la escala correspondiente a lo que tenemos que planificar:** si es el programa de una materia anual, una unidad, un tema, una secuencia de clases o una clase sola.

2) **Leer y estudiar:** tenemos que atender las pautas dadas en la normativa vigente en el Diseño Curricular. Si es el caso de planificar una unidad, tema o clase, estudiar el tema matemático de libros de nivel superior (revisar los conceptos matemáticos involucrados en el tema a planificar, distintas formas de definir un concepto, propiedades, sus demostraciones, aplicaciones, etcétera, a nivel de experto), revisar lo que presentan distintos libros de nivel secundario (ver las distintas selecciones y organizaciones, qué dejan afuera, qué definiciones tomaron, etcétera). Por otro lado, nuestra mirada se vería muy enriquecida si consideramos también revisar bibliografía de didáctica de la matemática del tema que debemos trabajar (considerar qué entradas al tema se proponen o descartan, cuáles contenidos son obstáculos epistemológicos, qué errores frecuentes se conocen y cómo se los podría abordar, etcétera).

3) **Conocer el contexto:** saber qué saberes tienen los estudiantes a quienes va dirigida la planificación, qué experiencias han realizado, qué tipo de actividad matemática han hecho, cómo trabajan más cómodos (en grupo, solos), qué tipo de consignas han resuelto, cuáles son sus gustos, intereses, etcétera. Se pueden conocer contenidos previamente trabajados así como otros que se dictan simultáneamente en otras asignaturas relacionadas (lo que suele denominarse *articulación vertical y horizontal*) o bien cuál es la idea para la continuación del trabajo propuesto.

4) **Pregunta orientadora:** en este momento, en el que ya sabemos qué debemos planificar, en qué nivel trabajaremos y cuál es el contexto en el que nos manejaremos, deberíamos preguntarnos: ¿por qué es importante para los estudiantes aprender este contenido? Si estamos en condiciones de tomar decisiones sobre un determinado contenido matemático o sobre la organización de la unidad temática, o sobre el trabajo que realizarán los estudiantes en una clase, deberíamos tener alguna respuesta a esta pregunta. Nos suelen preguntar:

"¿para qué me sirve este tema?, ¿en qué lo voy a usar?", y, al margen de incomodarnos, muchas veces respondemos desligándonos de la responsabilidad de las decisiones que estamos asumiendo. Solemos decir: "lo necesitarás más adelante", o "ya verás que es útil". De acuerdo con el nivel en el que estemos trabajando, a veces la elección del contenido es una imposición. Sin embargo, tenemos la libertad de elegir qué de ese contenido queremos trabajar y cómo hacerlo.

5) **Primer momento clave:** teniendo en cuenta todo lo anterior, debemos tomar las grandes decisiones (lo global). Es decir, *decidir el alcance de los contenidos*, presentando dos planos: el de los *saberes (contenidos o temas matemáticos)* y el del *saber-hacer (objetivos de aprendizaje)* que nosotros propondremos que los estudiantes desarrollen. Ambos planos están relacionados, ya que debemos pensar y respondernos *para cada contenido*: ¿qué de ese contenido quiero enseñar?, ¿qué no?, ¿con qué profundidad?, ¿qué actividad matemática desarrollarán los estudiantes con esos contenidos?, ¿qué podrán hacer y qué no?, etcétera. Esto *no* es ni *pensar en el orden* (secuencia) ni pensar *cómo* (con qué tareas lograrán que sus estudiantes aprendan eso). Por otro lado, y teniendo en cuenta que esta instancia es un momento de investigación sobre el tema, sería interesante buscar aplicaciones de este contenido tanto en la vida real como en otras materias o ramas de la matemática. Con la información encontrada y la decisión tomada, pensaremos luego en la secuencia: si queremos ir de lo general a lo particular, de lo particular a lo general, del todo a sus partes, qué incluiremos en cada clase, etcétera.

Esto puede hacerse del siguiente modo: nos planteamos chequear, sin avanzar más, que nuestra propuesta sea valiosa desde *lo matemático* que estamos proponiendo enseñar. ¿Cómo podríamos hacer esto nosotros? Revisando que tengamos clara *una meta, nuestro norte*. Debemos poder decir claramente *qué quiero que mis estudiantes logren*. Algo clave aquí es que no tendríamos que pensar en *qué voy a enseñar*, sino en *qué quiero que mis estudiantes aprendan, qué es irrenunciable para mí que ellos aprendan en mis clases y por qué*. Además, los contenidos deberían ser de interés, ser útiles dentro de la matemática o en la vida cotidiana; deberían poder conectarse entre sí y no tendrían que quedar afuera cuestiones sustantivas. Además, revisemos que hayamos pensando en que la actividad matemática que realizarán nuestros estudiantes sea valiosa con objetivos cognitivamente exigentes. También observemos si consideramos que podremos abordar lo que proponemos con *ese* grupo de estudiantes tanto por sus saberes como por sus particularidades. Revisemos nuestra secuencia, que tenga alguna lógica que para nosotros sea apropiada. Si no es así, ¡ajustemos!

Entrando en los detalles de la planificación

Luego de todo lo anterior, el segundo momento clave se presenta cuando debemos tomar las pequeñas decisiones (lo local). Dado un contexto de trabajo determinado, tenemos que *especificar* los objetivos, los contenidos (con algún tipo de organización, secuencia y tiempos esperados), las consignas que propondremos, la anticipación de errores e intervenciones posibles (si planificamos clases), la evaluación propuesta y la bibliografía.

Cada vez que planifiquemos una clase debemos considerar un momento de *inicio*, otro de *desarrollo* y otro de *cierre*. Trataremos de atender a la sugerencia de que nuestra planificación les explicite a los estudiantes qué se espera con la tarea dada, por qué es relevante trabajarla y cómo se vincula con lo trabajado anteriormente (esto no necesariamente debe hacerse antes de que la aborden, podría ser al final).

Objetivos

Recordemos plantear los objetivos pensando en *qué es lo que queremos que el estudiante sea capaz de hacer*. Aquí es donde se plasma con mayor claridad la actividad matemática que la propuesta que presentamos podría promover (tendremos que ver cómo hacemos jugar el modo de trabajo y en qué momento entra en la clase. Recordar lo visto en el capítulo 3). Recordar que algunos objetivos tienen una mayor demanda cognitiva que otros; algunos son transversales a distintos saberes, no se alcanza dominio de ellos en una clase ni con un tema, con lo cual habría que sostenerlos a lo largo del tiempo.

Los objetivos, para un programa, tienen un carácter mucho más general que para una unidad, para un tema o para una clase. En el caso de un programa, buscaremos *agrupar* cuestiones que queremos que los estudiantes aprendan para distintos contenidos. En el polo opuesto, si planificamos una clase seguro que tendremos que prever pocos objetivos, *valiosos y cognitivamente exigentes* (al menos, la mayoría de las veces). No olvidemos atender a que trabajen con cuestiones que caracterizan a la matemática como ciencia, como por ejemplo argumentar, utilizar lenguaje simbólico y natural apropiadamente, demostrar, conjeturar, resolver problemas, modelizar, etcétera.

Contenidos

Como ya tenemos la *mirada macro* de lo que pretendemos enseñar, lo que sigue es *presentar el recorte de contenidos* que proponemos para nuestra planificación. A veces es útil presentar algún esquema, estructura o mapa conceptual que muestre las relaciones que nosotros vemos en esos contenidos, lo que evitaría que solo demos un listado de ellos sin aparente conexión.

Con esto hecho, es momento de secuenciar y distribuir temporalmente contenidos y objetivos. Según la escala en la que estemos, distribuiremos los contenidos en unidades, en clases o en grupos de clases (podríamos pensar en cierta cantidad de clases para determinado tema). Una vez concluido esto, revisemos si los tiempos asignados son acordes con la importancia o significatividad de los contenidos y/o exigencias cognitivas planteadas, y si la propuesta es una selección coherente de contenidos y objetivos.

Trabajo que proponemos para la clase

1) Tomamos un *objetivo* y *redactamos* las consignas (tanto sea que las seleccionemos como que las diseñemos). Resolvemos cada una de ellas desde nuestro rol de expertos, en un primer momento, y luego imaginamos qué podría hacer un estudiante. Esto lo utilizaremos tanto para analizar el potencial matemático como para anticipar errores o posibles respuestas. Como punto de partida seleccionamos *consignas que tengan un potencial matemático alto o medio* (evitaremos aquellas en las que se vea un potencial bajo). Aquí usaremos los criterios para elaborar consignas. Si atendemos a ellos en el momento de seleccionarlas, ajustarlas o diseñarlas seguramente les aumentemos su potencial matemático. Consideremos pedir, si es necesario, que los estudiantes dejen registro escrito de lo que trabajan (sobre todo si usan computadoras).

2) Explicitamos cómo es el modo de trabajo que proponemos para la clase (si los estudiantes trabajarán solos o en grupo, si habrá puestas en común, quién las gestionará, si pasarán al pizarrón, quién elegirá al que pasará, si utilizarán material concreto o no, qué recursos se habilitarán, etcétera) y cuánto tiempo le asignaremos a cada una de ellas.

3) Analizamos si la actividad matemática que hará el estudiante con la tarea será significativa. Notemos que tiene sentido hacer esto dado que en este momento de la planificación quedó diseñada "una tarea". Recordemos aten-

der, en primer lugar, a que sean los estudiantes quienes resuelvan, propongan, exploren, discutan, argumenten, escriban, etcétera (es decir que *no* quede la resolución en manos del docente). Luego consideremos qué tipo de tareas venían resolviendo los estudiantes y pensemos qué les sumaría hacer esta nueva tarea. Aquello que les sume debería estar alineado con los objetivos y, por lo tanto, ser rico/interesante/desafiante/valioso en lo matemático, y en particular para el contenido involucrado.

4) Analizamos la pertinencia de incluir como recurso el uso de tecnología, considerando que a lo largo de una planificación de varias clases sería deseable hacerlo. Las consignas que propongamos deben *promover un uso pertinente y significativo* de tic . Recordemos los distintos usos de las tic y que los criterios no pueden verse en una consigna aislada sino en secuencias.

5) Si tenemos previsto, luego de que los estudiantes trabajen con las consignas, hacer preguntas a toda la clase porque sin ellas no se alcanzarían los objetivos, *redactamos esas preguntas* (del mismo modo que las preguntas que haríamos en debates o en puestas en común gestionados por nosotros).

6) Explicitamos de qué manera y con qué modalidad organizaremos la participación de los estudiantes durante la clase. Consideremos que, antes de formalizar lo trabajado, sería deseable que los estudiantes intenten argumentar sus respuestas y mostrar la validez de su propuesta, resolución o procedimiento. Si organizamos un intercambio alrededor de las argumentaciones, como *puestas en común*, consideremos que no siempre la gestión tiene que quedar a cargo de nosotros. Podríamos pensar otras estrategias (los estudiantes a cargo, o uno solo, distintos grupos exponiendo, etcétera). Incluso es interesante que les demos lugar a los estudiantes para que puedan proponer definiciones, procedimientos, etcétera, antes de la formalización a cargo nuestro. Evitemos redactar en *impersonal* esa modalidad porque no dará idea de quién hará cada cosa.

7) Detallamos los momentos de formalización de lo trabajado. Consideremos que tendremos que explicitar en la planificación lo matemático que quedará (definiciones, enunciados, propiedades, etcétera). Esto debe figurar con precisión. Al realizar esta formalización, intentaremos ir ajustando gradualmente el lenguaje con los estudiantes y atenderemos a dejar en el pizarrón las aproximaciones en lengua natural y no solo símbolos.

8) Redactamos las *consignas metacognitivas* para que *el estudiante reflexione* sobre lo hecho: desde lo matemático seguro, desde las tecnologías y desde lo personal. No hay que hacer esto luego de que los estudiantes hayan resuelto *cada una* de las consignas. Sería absurdo porque hay cuestiones que no podrían

hacerse, como la identificación de estrategias útiles o la comparación entre distintas estrategias. Podemos incluirlas luego de varias resoluciones o incluso después de varias clases, dependiendo de lo que nosotros consideremos que es valioso que los estudiantes adviertan y "se lleven" más allá de las particularidades de lo que hayan trabajado. Este es el sentido, y para eso es necesario que redactemos las consignas de tal manera que los invitemos a que ellos recuperen lo hecho. Nosotros proponemos que ellos comparen resoluciones, procedimientos, estrategias, pedimos que valoren métodos, recursos (tic , calculadora, papel y lápiz), preguntamos si advierten que sin cierto conocimiento matemático algo no podría haberse resuelto, etcétera. *Esos momentos y esas preguntas o consignas que activan la reflexión matemática, la referida a las TIC y a lo personal del estudiante*, deben estar redactadas. Recordemos lo que ya mencionamos en el capítulo 2: esto no significa que nosotros mostremos estas cosas ni que hagamos esa reflexión delante de ellos, sino que logremos que ellos la hagan.

Terminada esta etapa, haremos otro alto. Nuevamente, nosotros, los docentes, tendremos nuestra mirada reflexiva sobre lo que acabamos de hacer. Para esto, proponemos:

a) Chequear la coherencia de las tareas diseñadas. ¿Cómo hacemos esto nosotros mismos? Retomemos lo trabajado en el capítulo 3 sobre cómo analizar la coherencia de las tareas. Revisamos con esas pautas; si da coherente, avanzamos y si no es así, ¡ajustemos!

b) Chequear la pertinencia y significatividad de las tic . ¿Cómo hacemos esto? Tomamos los criterios (capítulo 4) y su modo de uso, y revisamos que se den.

c) Chequear que hayamos incluido *consignas metacognitivas*.

d) Chequear que la propuesta esté en consonancia con nuestra idea de por qué es importante que los estudiantes aprendan este contenido.

Anticipación de errores e intervenciones docentes

Vamos a pensar qué respuestas podrían dar los estudiantes (alrededor de dos o tres por consigna, en promedio), distintas estrategias posibles de usar, modos diferentes de resolver, etcétera, y cómo intervendríamos ante cada una de esas respuestas. Es necesario que podamos anticipar respuestas equivocadas y proponer intervenciones apropiadas, que atiendan a los criterios que trabajamos en el capítulo 5. Redactaremos preguntas que podríamos utilizar en caso de que los estudiantes no puedan avanzar con la tarea, para que puedan destrabarse y no se nos desorganice la clase. No describiremos los errores ni las intervenciones, es decir, imaginaremos una pregunta que podría hacernos un estudiante y, a partir de ella, planteamos un supuesto diálogo (atendiendo a las pautas para intervenciones que trabajamos en el capítulo 5) que podría darse entre estudiante y docente para resolver la consulta.

Evaluación

Cuando se trata de *una planificación anual*, proponemos un sistema de evaluación y explicitamos el vínculo con la acreditación. Describimos qué instrumentos utilizaremos (pruebas, trabajos prácticos, portfolios, listas de cotejo, exposiciones orales, etcétera), con qué criterios valoraremos la información y la transformaremos en una nota, y cómo ponderaremos esas notas para llegar a la nota de acreditación.

En la *planificación de unidades o temas* también debemos pensar cómo evaluar los aprendizajes alcanzados, aunque no necesariamente lleven a una nota. Podríamos usar la observación del trabajo en la clase registrando en una lista de cotejo entregas de tareas de portfolio, alguna presentación grupal, etcétera.

Si la *planificación es de una clase*, por un lado nos interesará observar qué actividad matemática han realizado los estudiantes, si la consigna resultó difícil o fácil, si la modalidad de trabajo funcionó, etcétera. Esto será un insumo para ajustar las posteriores planificaciones. Vamos a prever una evaluación para el momento de cierre de la clase, más allá de las observaciones que hagamos a lo largo de ella. Podrían hacerse preguntas al grupo, pedirle a un estudiante que realice una síntesis, etcétera.

En todos los casos recordemos que debemos lograr coherencia entre nuestros *objetivos*, nuestra *propuesta de enseñanza* y nuestra *evaluación*. Al mismo tiempo revisemos que los instrumentos que elijamos sean apropiados para evaluar los objetivos que se plantearon. Pueden verse algunas ideas de instrumentos de evaluación en matemática en el capítulo 6 de Pochulu y Rodríguez (2012).

Bibliografía

Pondremos la bibliografía que hayamos usado en nuestra planificación, referenciada con las Normas apa. En el caso de una planificación de programa, indicamos la bibliografía obligatoria y complementaria para el estudiante, también referenciada con las Normas apa.

Ya terminamos la planificación, ¿podría fundamentarla?

Esto requiere de nuestra parte un trabajo con los componentes de la fundamentación, que mencionamos en el capítulo 1. Es decir, tendremos que *hacer afirmaciones positivas o favorables sobre nuestra propuesta, sumar evidencias* (obtenidas de nuestra propuesta, objetivos, consignas, resoluciones, enunciados, uso de tic , errores e intervenciones, etcétera) *y vincularlas con la teoría* (de educación matemática, a lo que se le suman todos los criterios que hemos trabajado en este texto, que funcionarán como teoría: criterios para formular consignas, para intervenciones docentes, para valorar la significatividad de las tic , etcétera).

A veces tenemos que redactar la fundamentación, en cuyo caso debemos tener todos los cuidados con las citas textuales, parafraseos, evidencias y uso de las Normas apa. Si no se pide explícitamente, sería bueno que "tengamos en la cabeza" qué rasgos de nuestra planificación serían los que usaríamos en caso de tener que defender la propuesta, y en términos de qué cuestiones teóricas podríamos hacerlo.

Antes de finalizar, una mirada crítica a nuestro propio trabajo

Este es el momento para que, nuevamente, tomemos distancia de lo que hemos realizado, como si fuera *un trabajo de otro*, y lo pongamos a prueba con estas mismas pautas. Entonces, consideremos estas orientaciones y revisemos, como si estuviéramos corrigiéndole a otro, que cada una de las indicaciones aquí incluidas las cumpla nuestro trabajo. Si es así, ¡habremos terminado! Y no necesitaríamos que nadie nos revise. Si algo no nos funciona, es tiempo de ajustar y volver a mirarnos.

Ejemplo de una planificación

A continuación, mostramos la organización general de tres clases referidas a funciones lineales, y luego, en detalle, la planificación de una de ellas. Debemos mencionar que en la parte de *Alcance de contenidos* mostramos una lista de temas y objetivos que están relacionados con el tema de trabajo, pero esta no pretende ser exhaustiva debido a una cuestión de espacio. No presentamos una fundamentación de la planificación de esta clase, pero sí dejamos señalados elementos teóricos que utilizaríamos para fundamentarla y un breve detalle de nuestras decisiones.

Contexto

Los estudiantes están cursando el tercer año de la secundaria básica, han trabajado con consignas con contextos intra y extramatemáticos, están acostumbrados a trabajar en grupos y tienen manejo de software específico de matemática. En años anteriores han trabajado con lectura de gráficos y análisis de situaciones en las que existe una relación entre dos variables. Las clases que se proponen a continuación se utilizarán para introducir el concepto de función lineal.

Alcance de contenidos

Función lineal en la forma $y = mx + b$, interpretación de gráficos, pendiente y ordenada al origen, gráfico a partir de tabla y de datos de la pendiente y ordenada al origen, pertenencia de un punto a la recta (gráfica y analíticamente), intersecciones de rectas con los ejes. Similitudes y diferencias entre las funciones lineales y de proporcionalidad directa. Comportamientos lineales en contraposición a no lineales.

Objetivos para el tema

Con respecto al contenido, se espera que el estudiante:

- modelice situaciones extramatemáticas mediante funciones lineales;
- diferencie el comportamiento proporcional del lineal y del no lineal;
- extraiga datos a partir de funciones lineales presentadas de distintos modos;
- grafique funciones lineales a partir de distintos datos;
- proponga procedimientos para graficar funciones lineales;
- construya funciones lineales a partir de datos presentados de diferentes modos;
- proponga procedimientos para hallar una función lineal a partir de diferentes datos;

- reconozca ventajas y desventajas de las distintas formas de graficar y de hallar funciones lineales;
- interprete las nociones de pendiente y de ordenada al origen en el contexto de la situación a resolver.

Con respecto al quehacer en matemática, se espera que el estudiante:

- explique y argumente sus respuestas e interpretaciones;
- justifique la validez de los razonamientos empleados;
- formule hipótesis;
- explique qué estrategias matemáticas utiliza.

Secuencia de contenidos y tiempo de enseñanza

A continuación presentaremos una propuesta de tres clases para abordar el tema a trabajar. Vale aclarar que existen asuntos, de los planteados en el alcance de los contenidos y en los objetivos, que no llegan a abordarse a lo largo de estas tres clases; seguramente se necesitarán más clases para atender a todo lo planteado.

	Clase 1	**Clase 2**	**Clase 3**
Contenidos	Comportamiento lineal. Comparación con el comportamiento proporcional. Interpretación de gráficos.	Comportamiento lineal en contraposición con no lineales.	Pendiente, ordenada al origen e intersección con los ejes. Gráficos de funciones lineales.
Objetivos Que el estudiante…	Describa situaciones extramatemáticas mediante expresiones lineales. Compare el comportamiento lineal con el proporcional. Explique y argumente sus respuestas e interpretaciones.	Modelice situaciones extramatemáticas mediante funciones lineales. Compare el comportamiento lineal con otros no lineales. Explique y argumente sus respuestas e interpretaciones.	Explicite procedimientos para graficar funciones lineales. Explicite formas de obtención de la fórmula vía dos datos (ordenada al origen y pendiente, o dos puntos que pertenecen al gráfico de la función).

Planificación de la clase 1

Contenidos: comportamiento lineal.
Objetivos: que el estudiante...

- describa situaciones extramatemáticas mediante expresiones lineales;
- compare el comportamiento lineal con el de proporcionalidad directa; y
- explique y argumente sus respuestas e interpretaciones.

Inicio de la clase: (40 minutos). La clase se inicia con el docente explicando a los estudiantes que trabajarán en grupos de a lo sumo 4 integrantes para resolver la consigna 1.

Consigna 1: en una fábrica se producen dos tipos de aceites. Uno de ellos pesa 0,84 kg por litro, y el otro pesa 0,77 kg por litro. Esos aceites se vierten en barriles para su comercialización. Para el primero de ellos se utiliza un barril que vacío pesa 5 kg, y tiene una capacidad para 45 litros. Para el segundo aceite se usa otro tipo de barril que también admite como máximo 45 litros, pero que vacío pesa 8 kg, pues se exporta y debe estar reforzado.

a) Para balancear la camioneta en la que se realizan los envíos se requiere llenar los barriles de modo que todos pesen lo mismo. ¿Es esto posible? Explicar.

b) El trabajo de uno de los empleados de la fábrica es determinar el peso total de los barriles y etiquetarlos. Un día se encontró con que tenía muchos barriles para etiquetar (del primer tipo de aceite: el que pesa 0,84 kg por litro) con distinto volumen de aceite ya vertido en cada uno (ese dato lo tenía) y que la balanza se encontraba fuera de servicio. ¿Podrían proponerle al empleado alguna forma para que pueda hacer su trabajo de manera rápida y económica?

Lo que consideramos para la fundamentación

Intentamos que emerja la *expresión* de la función lineal (no decimos la *función lineal* pues no hay énfasis en dominio y codominio) en el sentido de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Entendemos que emerge la expresión debido a la necesidad de plantear la ecuación para hallar el valor buscado. Los valores están pensados para que no hallen a ojo el valor donde ambos barriles pesan lo mismo (se alcanza aproximadamente en 42,85 litros).

Esperamos que en la situación de acción (Barreiro y Casetta, 2012, en Pochulu y Rodríguez, 2012) intenten hacer cuentas para ver si, a ojo, hallan la respuesta, esbocen gráficos, y el no poder hallar el valor los invite a buscar expresiones.

Se espera algún tipo de validación, aunque sea basada en gráficos o en la cuenta en sí.

La consigna (b) apunta a trabajar el uso de las variables en relación funcional (Ursini *et al.*, 2005).

Anticipación de respuestas de los estudiantes e intervenciones docentes

Primera intervención

Estudiante: profe, no se cómo resolver.

Profesor: contame qué es lo que pensás.

Estudiante: no sé, los números están difíciles.

Profesor: y si los aceites en lugar de pesar 0,84 kg y 0,77 kg por litro pesaran 1,5 kg y 1 kg por litro, ¿se te facilitaría? (Si el estudiante avanza con estos valores, el profesor luego lo invitará a retomar la consigna tal como estaba planteada).

Segunda intervención

Estudiante: profe, multiplico 0,84 por la cantidad de litros que ponga de ese aceite y tengo el peso.

Profesor: ¿el peso de qué cosa obtendrías así?

Estudiante: el peso total.

Profesor: cuando cargues todo a la camioneta, ¿qué es lo que incide en el peso que cargás?

Estudiante: los litros de aceite que puse y lo que pesan los barriles.

Profesor: ¿me podés mostrar cómo se expresa esto en la cuenta que me decías al inicio?

Estudiante: ah, no, me faltó considerar el peso del barril. Ahora lo arreglo.

Desarrollo de la clase: (20 minutos). Puesta en común. La gestiona el docente. Invita a pasar al pizarrón a un estudiante por grupo. El docente deja que quede plasmado en el pizarrón tanto lo equivocado como lo correcto. No interviene para señalar errores ni aciertos. La consigna que les da a los estudiantes para la puesta en común es la siguiente:

Consigna 2: De cada grupo, un representante debe plasmar en el pizarrón:

a) Su respuesta y argumentación.

b) Algún intento que les haya fallado y por qué reconocieron que falló.

c) Alguna pregunta que les haya quedado pendiente o que se planteen.

d) Cada grupo debe revisar las respuestas de los otros equipos y las preguntas, y debe pensar: 1) si está o no de acuerdo y por qué, y 2) si tiene una respuesta a la pregunta del equipo.

Luego de 15 minutos, el profesor retoma lo expresado aquí y pregunta: ¿hay alguna cuestión matemática que adviertan que haya resultado clave para resolver esta tarea?

Lo que consideramos para la fundamentación

Se atiende a que los estudiantes realicen una reflexión metacognitiva sobre lo que no han podido aún comprender o resolver.

Se los invita a analizar resoluciones ajenas, considerar si son o no válidas y argumentar.

Queremos que adviertan que la expresión simbólica permitió trascender la búsqueda al tanteo y que sin las expresiones no habrían podido encontrar el valor buscado.

Intentamos que la discusión con los estudiantes en torno a esta necesidad aporte al desarrollo del sentido simbólico (Arcavi, 1994), porque lo sostendremos en las siguientes clases.

Desarrollo de la clase: (15 minutos). El docente le plantea a la clase lo siguiente y les pide a los estudiantes que decidan en grupo qué responder:

Consigna 3: Un empleado de la fábrica le dijo al dueño lo siguiente: “No hay modo de balancear la carga con estos barriles, pues hice cuentas con regla de tres, pasé los datos a un gráfico y las rectas que obtuve nunca se cortan, de modo que no es posible”.

Explicar si es o no correcto lo que afirma el empleado. Cualquiera sea su respuesta, justifíquenla.

Lo que consideramos para la fundamentación

Los estudiantes deben:

- explicar lo errado de la resolución propuesta dando cuenta de los conceptos matemáticos involucrados: la no proporcionalidad de la situación presentada en el primer problema; e
- identificar variables y graficar (según la descripción dada por el empleado).

Interesa que los estudiantes apelen al registro gráfico para visualizar la respuesta del empleado y que puedan vincular este registro con el coloquial.

Cierre de la clase: El docente retoma los aspectos centrales de esta clase a partir de las preguntas que plantea en la consigna 4, y le pide a un estudiante que pase al pizarrón y vaya haciendo un punteo sobre lo que se conversa en la clase. Es el docente quien gestiona las preguntas y organiza las respuestas. Les dará la voz a varios estudiantes de los diversos equipos.

Consigna 4: Hemos trabajado sobre actividades en las que las nociones matemáticas resultaron útiles: ¿cuáles fueron esas nociones?, ¿por qué fueron útiles?

En algún momento hubo una comparación entre las respuestas a estas actividades y lo que los estudiantes ya sabían sobre proporcionalidad directa. ¿Dónde se dio?, ¿cuáles son las conclusiones que se llevan?

El docente deja la siguiente consigna para que los estudiantes la lleven ya pensada a la siguiente clase:

Consigna 5: Volvamos al primer problema y consideremos solo el primer tipo de aceite. En ese problema hay vinculadas tres variables: cantidad de litros vertidos, peso del aceite vertido y peso total del barril (ya con el aceite en él). Decidan si hay proporcionalidad directa entre esas variables, tomándolas de a pares. Expliquen la respuesta.

Pensemos en los gráficos cartesianos de la relación entre cada par de variables. ¿Sobre cuáles de ellos pueden anticipar con certeza cómo serán y por qué?, ¿cuáles no conocen? En este último caso, ¿podrían anticipar alguna característica sobre esta nueva representación gráfica?

Lo que consideramos para la fundamentación

Con esta consigna se pretende destacar que dentro de la situación se pueden elegir variables que sí se relacionen con una proporcionalidad directa (peso del aceite vertido y cantidad de litros de aceite vertidos).

Por otro lado, se busca diferenciar dicha relación con la existente entre las variables: peso total del barril (con aceite en él) y cantidad de litros de aceite vertidos. Esta última no es de proporcionalidad directa.

Es interesante que los estudiantes establezcan algún paralelo entre ambas relaciones a partir del vocabulario que ya manejan sobre las funciones de proporcionalidad. Que puedan decir, por ejemplo, que tienen la misma pendiente, y que sospechen que el gráfico también sería una recta.

Por otro lado, esta consigna permitirá relacionarla con lo hecho en la consigna 3, en la que explicaron la no validez de la regla de tres simple directa.

Esta tarea permitirá en la clase siguiente retomar todas las cuestiones mencionadas (algunas de las cuales, seguramente, también surgieron a lo largo de la primera clase).

Como se ve en todo lo que desarrollamos hasta aquí, la tarea de planificar no es sencilla. Solo si reconocemos la utilidad que tiene –como herramienta que nos ayude a entrar mejor preparados al aula– podremos encarar con empeño esta tarea.

Las pautas que dimos en la sección “Ejemplo de una planificación” (con las modificaciones que consideren valiosas) podrían estar disponibles como un documento de trabajo para los estudiantes del Profesorado. Para ellos, entendemos que ese documento podría resultar una herramienta orientadora para que aprendan a planificar, una tarea cognitivamente exigente, sin dudas.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.) (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Ediciones ungs y eduvim.

Capítulo 7
El inicio de una investigación en educación matemática

Introducción

Empezar a hacer investigación en educación matemática suele verse como una empresa difícil, por ejemplo cuando uno está solo y tiene que hacer un proyecto para una tesis o pensar un problema para un concurso. Suele suceder que si no nos sale escribir un proyecto de investigación o dedicarle varias horas y nuestro mejor esfuerzo, nos sentimos frustrados, desamparados, como si debiéramos saber hacerlo por la formación recibida. ¡Y esto no es así! Hasta el más experimentado investigador tendrá que gestar un proyecto de investigación. Esta palabra, *gestar*, conlleva desde nuestra perspectiva dos aspectos claves: el tiempo y los cambios. Una gestación lleva tiempo, y necesariamente hay que ir haciendo cambios a lo largo de ese tiempo. Comenzar una investigación tiene estas características. Nos embarcamos en un proceso en el que hay que empezar a proponer cosas, esbozar ideas, pensar y expresarnos como podamos, aunque no tengamos precisión todavía: leer, buscar, modificar las primeras ideas, hacer cambios, volver atrás, ajustar, volver a leer… Este inicio es un proceso espiralado que nos va permitiendo ajustar, lograr claridad, elegir, etcétera, y que requiere tiempo. Ese trabajo no sale de un momento a otro, pero no es que "no *me* sale", sino que "no sale". Si logramos advertir esto, podremos disfrutar de esa gestación en lugar de padecerla.

Una aclaración sobre el término *investigar* o *investigación*. Como casi toda palabra, admite diversas acepciones. Un profesor puede dar como consigna "investigar sobre la vida de Pitágoras", o escuchamos en un noticiero que se inician "investigaciones policiales", o nosotros mismos decimos "quiero investigar por qué mis estudiantes no hacen las tareas", por ejemplo. En educación matemática, y en el ámbito académico en general, *no* llamaríamos a esto hacer investigación. Una investigación educativa no solo obliga a la producción de conocimiento (hasta aquí podríamos decir que los tres ejemplos anteriores cumplen con esto, en un sentido amplio) sino que, además, siempre debe conocerse bien lo que ya está estudiado sobre el tema para asegurarse de que lo propuesto no sea conocido; necesariamente debe ser explícito el posicionamiento teórico desde el cual se realiza el trabajo (diseñar instrumentos ya sea para obtener datos como para analizarlos); y, dicho informalmente, para alcanzar el objetivo propuesto se necesita definir cómo se hará y qué datos se deben obtener. No hay investigación sin usar teoría (no basta con mencionarla al inicio solamente), ni tampoco sin conocimiento de los umbrales ya alcanzados por el saber. Muchas veces es común encontrar *propuestas de clase* o *experiencias de aula* que se muestran como investigaciones. Es bueno saber que no lo son. Sin desmerecerlas en lo más mínimo, intentaremos que queden claras las diferencias entre una cosa y otra.

También vale la pena retomar algo que comentamos en la introducción: la diferencia entre hacer investigación en educación matemática y en matemática. Como ciencias, la primera es social, y la segunda es exacta. Por lo tanto, no comparten métodos.

En este capítulo nos proponemos compartir ideas que esperamos sean útiles para el momento de la gestación de investigaciones en educación matemática. Para ello hablamos aquí de cuestiones de organización y de orden metodológico que se ponen en juego en este proceso. En lo que sigue de este texto no es nuestra intención generar una discusión teórica sobre metodología de investigación, pues hay mucho escrito sobre ello. En cambio, hemos priorizado realizar un acercamiento desde la vivencia de prácticas de investigación en educación matemática. Hemos advertido la necesidad de explicitar ciertas cuestiones al trabajar en la formación inicial de investigadores, y son las que nos interesa compartir aquí.

Remarcamos que iremos incorporando lenguaje específico de las investigaciones, como estado del arte, marco teórico, objetivos, actividades de investigación, etcétera, que en un primer momento utilizaremos sin ahondar en detalles, pero que retomaremos a lo largo del escrito. En una primera instancia, el lector se llevará una idea general, pero, al avanzar en precisiones, volver al inicio ayudará a ajustar la comprensión, razón por la cual sugerimos darle más de una lectura a esta parte del libro. Están presentes las ideas desarrolladas en el capítulo 1, sobre análisis y fundamentaciones, cuando mencionemos *analizar datos* o *fundamentar diseños*, por ejemplo.

Sobre problemas y proyectos de investigación

A veces tenemos que presentar un *problema de investigación* o un *proyecto de investigación* y no siempre nos queda clara la diferencia entre ambos. También se piden proyectos de tesis, planes de tesis, etcétera. No abordaremos todos los casos, pero esperamos dar pautas como para que resulte más fácil entender qué nos están pidiendo y qué cuestiones necesariamente habría que incluir en uno u otro caso.

Aunque aquí establecemos algunas diferencias entre estos términos, alertamos al lector de que cada institución debe explicitar qué espera recibir. Es natural preguntar o pedir reglamentaciones. Es esperable que cada institución tenga escritas sus pautas. Por ejemplo, hay tesis de licenciatura que, por reglamento, deben ser el resultado de una investigación educativa, con lo que su proyecto de tesis debería ser un proyecto de investigación; mientras que en otras instituciones se explicita que no deben serlo, por lo que el proyecto de tesis no debe ser un proyecto de investigación.

Señalamos aquí que no hay unanimidad en cuanto a lo que estos términos significan, por lo cual lo que sigue es una posición adoptada.

¿Cómo iniciar el planteo de una investigación?

En general, al querer iniciar una investigación podemos empezar de dos maneras diferentes:

a) Con una problemática que nos interesa estudiar pero *sobre la que no tenemos definida una posición teórica al momento de empezar a pensar en el trabajo*.

b) Con una problemática que nos interesa estudiar pero *con una posición teórica previamente tomada*.

Veamos cuestiones propias de cada uno de estos casos.

En el primer caso, el proceso que tendríamos que transitar sería más o menos el siguiente:

1) Hacer una primera redacción de la *problemática*. Usamos este concepto para expresar una primera aproximación a lo que nos interesa estudiar, en términos que podríamos llamar *ingenuos*, en el sentido de que no utilizan jerga teórica propia del campo de la educación matemática. Bastaría pensar en alguien que se inicia en investigación, desconoce teoría de educación matemática, pero podría decir o expresar algo que observa, alguna dificultad que advierte, una posible explicación de algo, etcétera, situado en algún contexto. Esta primera descripción suele estar acompañada por preguntas que nos interesan, redactadas también sin términos teóricos, y sin tener la pretensión de responderlas todas. Estamos recién comenzando a delinear las primeras ideas y debemos tomar nota de ello expresándonos como podamos.

Una observación: este inicio aún no nos conduce al planteo de un *problema de investigación*.

2) Con esas ideas imprecisas o un poco difusas en nuestra mente, con un contexto que nos interesa (puede ser un cierto año de la escolaridad media, un nivel educativo, una provincia, etcétera), comenzamos una búsqueda bibliográfica que irá abonando (cuando se complete) a la construcción del *estado del arte* (ea). Debemos buscar investigaciones, aportes de otros investigadores, estudios, etcétera. Eso nos dará elementos para seguir pensando en nuestra problemática, ajustar preguntas, descartar otras y hacernos nuevas preguntas. Todo esto al tiempo que vamos viendo qué posiciones teóricas han sido usadas por otros investigadores para abordar estudios similares (en temática y en contexto, preferentemente) al que queremos formular. Al ir leyendo investigaciones, focalizando en los objetivos propuestos en ellas, en los resultados obtenidos y en la teoría que otros han seleccionado, podemos ir repensando nuestra problemática. Necesariamente iremos incorporando puntos de interés y lenguaje teórico, y el conocer resultados previos tal vez nos haga cambiar nuestras preguntas. Al ir cambiando y comenzando a ajustar nuestro planteo, que ya no es inicial, seguiremos buscando investigaciones, las cuales retroalimentarán este circuito.

Luego de estas idas y venidas, habremos definido algunas cuestiones para nuestro trabajo, habremos logrado más precisión y estaremos en condiciones de:

- establecer el *marco teórico* (mt) inicial para nuestro trabajo. Esto significa que proponemos desde qué perspectiva teórica haremos el trabajo. Podría ser parte de las cuestiones teóricas que hemos encontrado y que han sustentado otras investigaciones, o bien ser una perspectiva diferente. Si el caso es este último, tendremos que incluir las definiciones o referencias necesarias para que el planteo sea comprensible. Con las elecciones teóricas tomadas, ya contamos con vocabulario específico de educación matemática. Entonces,

- volvemos a nuestra problemática inicial (que habrá sufrido ajustes, tras las idas y venidas luego de las lecturas) y la reformulamos utilizando lenguaje teórico de nuestro mt. Las preguntas se reelaborarán a raíz del uso de la teoría y, para nuestro contexto, podremos establecer *objetivos de la investigación*.

Esta reformulación, que incluye el ea, el mt, las preguntas redactadas utilizando los conceptos teóricos y una breve descripción del contexto en el que se realizará la investigación, junto con los objetivos constituye nuestro *problema de investigación*.

En el otro caso, en el que partimos de una problemática que nos interesa estudiar ya con una posición teórica (mt) previamente tomada, tenemos desde el inicio elementos teóricos para expresar lo que queremos estudiar.

Aquí habría dos posibilidades:

a) que los objetivos sean de índole teórica (dentro de ese mt); o

b) que los objetivos no sean de índole teórica.

En el caso (a) el aporte esperado de la investigación sería un aporte a la teoría, es decir, una ampliación del mt en el que uno se ubicó o eligió inicialmente. Este es el caso que suelen plantear investigadores que hoy en día son "padres" de líneas teóricas en educación matemática, como Juan Díaz Godino del enfoque ontosemiótico, Yves Chevallard de la teoría antropológica de lo didáctico, Ed Dubinsky de la teoría apoe, entre otros, y que las siguen desarrollando, ajustando y ampliando.

El caso (b) podría ser usado para poner a prueba la teoría, por ejemplo.

Un *proyecto de investigación* debe contener uno o varios problemas de investigación, articulados o vinculados entre sí, pero eso no basta. Todo proyecto es un plan de trabajo en el que se expresa el recorrido que el investigador anticipa que realizará para estudiar aquello que le interesa. Para ello, necesariamente debe informar *cómo abordará su problema de investigación*, es decir, expresar qué datos necesita y cómo los obtendrá: si plantea un estudio cuantitativo, cómo analizará los datos, si habrá un grupo testigo o no, si hay muestras sobre las que se toman datos, con qué criterios se seleccionan, qué actividades deberá realizar, qué instrumentos deberá diseñar, en qué tiempos, etcétera. Esto forma parte de las *cuestiones metodológicas* de una investigación, que se piensa y define después de tener en claro los objetivos, dado que en ellas se responde a *qué necesito hacer para lograr el objetivo planteado*.

Como toda anticipación, muchas veces requiere ajustes intermedios por imprevistos, necesidad de hacer cambios teóricos, decisiones metodológicas que hay que ajustar, etcétera. Esto ¡no debe verse como un error o un fracaso del investigador!, sino como una señal de estar atentos y aprendiendo, de apertura y de comprensión del sentido del proyecto y de un interés irrenunciable por el problema a estudiar.

Se supone que para las decisiones metodológicas el investigador que se inicia recurre a un experto (director, profesor, etcétera). Sobre estas cuestiones metodológicas hay mucho escrito, lo que no significa que sea fácil, y es por eso que se espera el acompañamiento de alguien más experimentado.

Tenemos entonces dos cuestiones claves en una investigación: un *norte*, algo que nos desafía a estudiarlo (expresado en los objetivos), y un *camino* propuesto para alcanzar ese norte (expresado en las cuestiones metodológicas). No avanzaríamos en delinear un camino si no tenemos claro a dónde ir. Del mismo modo, las cuestiones metodológicas se plasman con posterioridad al establecimiento de los objetivos, y, ya sin la metáfora del norte, luego de tener delimitado el problema de investigación.

Como decíamos al inicio, puede no haber unanimidad en el formato que debe tener un proyecto de investigación, sin embargo seguramente sí lo haya en ciertas partes que lo componen y que incluimos a continuación. Observarán que distintas instituciones sugieren un cierto orden para la redacción de propuestas y otras, en cambio, no lo hacen.

En los capítulos siguientes retomaremos con detalle características de las secciones claves, por lo que, en este primer momento, pretendemos aclarar la estructura general de un proyecto de investigación.

Partes de un proyecto de investigación

En general, cualquiera sea el formulario que tengamos que completar para elevar un proyecto de investigación, encontraremos los siguientes apartados. Mencionaremos qué se espera leer en cada uno y en qué orden sería adecuado completarlos.

1) **Introducción:** en esta sección se espera ver el planteo general del trabajo. Suele comenzarse con el relato de una problemática general (que incluye nuestra problemática, la cual habrá dado origen al problema), global o macro, y luego el discurso debe ir llevando al lector a algo muy puntual, es decir, la descripción de la problemática que nos interesa estudiar: pequeña, específica, circunscripta a un lugar, etcétera. Aquí suelen tomarse autores que hablan de esa cuestión global, y se trata de ir relacionando lo que ellos dicen con lo nuestro, lo que nos preocupa, moviliza o interesa. Seguramente nuestra preocupación se sitúe en alguna institución, que es donde se efectivizará el trabajo de investigación. La institución y los sujetos que formarán parte de nuestro estudio conforman el *contexto de trabajo*, y esto requiere ser descripto, aunque de manera breve.

Sugerimos que esta sección sea casi lo último que redacten del proyecto, luego de haber tomado decisiones, de modo que aquí se puedan presentar, también de manera breve, el mt y los objetivos de la investigación.

Si el planteo del proyecto de investigación se inicia con un mt seleccionado, esto se verá en la introducción desde el comienzo, pero su determinación no se llevará a cabo, simplemente se informará y referenciará.

2) **Estado del arte y marco teórico:** tal vez, según las indicaciones o la reglamentación que rija, puedan ser dos secciones: una para el ea y otra para el mt. Detallaremos en qué consiste cada uno de ellos más adelante.

Si en la introducción quedó escrita la problemática general, se podría terminar esta sección retomándola para expresarla con la terminología del mt.

3) **Objetivos:** una breve descripción del contexto podría hacerse antes de presentar los objetivos. Indicaremos algunos detalles de cómo hacer esa descripción en el capítulo 8.

En esta sección se presentan los objetivos de investigación para el contexto descripto y considerando el mt presentado. Si el contexto no hubiese estado presentado antes con detalle, debería hacerse aquí, antes de plantear los objetivos.

4) **Metodología de investigación:** la metodología de investigación se piensa y define luego del planteo de los objetivos. La idea será respondernos qué podemos hacer –que sea pertinente y factible– para alcanzar los objetivos planteados.

Se espera en esta sección la identificación de las *actividades de investigación* y el *cronograma*. Este último se elabora en función de las actividades de investigación.

5) **Bibliografía:** en esta sección, la bibliografía que se incluya debe circunscribirse a la utilizada y referenciada en el escrito. No deben incluirse referencias

a lecturas que el investigador haya hecho pero no utilizó en lo que redactó. Se sugiere usar las Normas apa (American Psychology Association), las cuales están disponibles en muchos sitios de internet (en inglés, en el sitio oficial: http://www.apastyle.org/), pues entendemos que es la tendencia en el modo de citar en educación matemática, tanto en el cuerpo del escrito como en las referencias bibliográficas.

Hasta aquí hemos desarrollado lo relacionado con el planteo de un proyecto de investigación (o un problema de investigación), pero necesitamos más precisiones sobre los términos recién mencionados, cuestión que iremos abordando en lo que sigue.

Capítulo 8
Estado del arte y marco teórico

Introducción

En este capítulo presentamos las diferencias entre el estado del arte (ea) y el marco teórico (mt), ambos elementos claves en toda investigación. Ya los hemos mencionado antes, señalando algunas de sus características y ubicando a cada uno en la estructura de un proyecto o problema de investigación. Es momento de aclarar algunos puntos con mayor precisión, detallar cómo se conforma cada uno de ellos, explicar por qué no pueden estar ausentes en las investigaciones, etcétera. Empezaremos por el ea, que también suele denominarse *revisión bibliográfica* o *antecedentes*.

Estado del arte

En el ea se plasma lo que otros han investigado, o incluso lo que nosotros mismos hemos investigado previamente, sobre el tema que nos interesa o cercano a él. Al redactar el ea, el investigador debe mostrar que *conoce los aportes de otros investigadores sobre su tema de interés*, para poner en evidencia que lo que propone no está estudiado. ¿Por qué decimos que uno busca bibliografía sobre el tema o *cercana a él*? Esto se debe a que, a veces, el investigador no encuentra otras investigaciones que tomen justo lo que él se propone estudiar. Imaginemos, por ejemplo, que al investigador le interesa estudiar el vínculo que existe entre la escolaridad media y la inserción laboral en la Argentina, pero al buscar investigaciones encuentra bibliografía sobre el vínculo entre escolaridad *primaria* e inserción laboral en la Argentina, o entre escolaridad media e inserción laboral en Uruguay. Estos trabajos son *cercanos* y formarán parte del ea, el cual llevará resúmenes de esas investigaciones (citas textuales o frases del autor parafraseadas, según las Normas apa), y es condición que incluya *investigaciones* (no libros de texto) que sean *relativamente actuales*. Un ea no podría tener exclusivamente investigaciones de 1998 o anteriores, por ejemplo. El hecho de que el ea contenga trabajos actuales le da la seguridad al investigador de que lo que está encarando no ha sido investigado por otros, y que conoce qué es lo que existe sobre el tema.

Mencionamos aquí que será necesario tener en claro cuál es el *contexto de trabajo* al iniciar esta búsqueda. Una descripción del contexto de trabajo tendrá, luego, un lugar en la formulación del proyecto, antes de definir los objetivos. Ese contexto será aquel en que el investigador hará sus indagaciones, recabará datos, etcétera. Cuando hay que presentar el contexto en un proyecto o problema, se espera una descripción de este en términos de elementos que estén vinculados con el trabajo a realizar. Por ejemplo: si nos interesa estudiar en un curso de Matemática de un colegio secundario cómo incide el género de los estudiantes con su rendimiento, la descripción del contexto tendrá que tomar elementos generales del colegio, de la propuesta didáctica del curso y, particularmente, de la constitución, en términos de género, de los cursos. Si, en cambio, nos interesara en ese mismo curso estudiar cuestiones relativas al discurso oral de los estudiantes, los datos de género no serán necesarios.

Algunas preguntas que solemos hacernos son: ¿debo resumir cada trabajo leído?, ¿resumo todo completo o puedo seleccionar algo?, ¿cómo presento el ea?, es decir, ¿puedo poner un resumen tras otro? Aclaremos un poco esto. Cuando uno va a resumir un artículo para el ea, ¡no vamos a resumirlo todo! Lo primero que necesitamos hacer es una lectura *macro* del trabajo como para tratar de entender qué preguntas u objetivos se plantearon los autores, cómo los abordaron (advertir cuestiones metodológicas, si usaron algún instrumento, si el enfoque es cuantitativo o cualitativo, etcétera) y qué resultados obtuvieron. A partir de allí hay que elegir qué poner en el resumen en términos de lo que el investigador considera *más relevante* para su trabajo. Por ejemplo: si un artículo tiene un resultado clave, centramos el resumen en él y diluimos todo lo demás (tal vez ni decimos dónde se hizo, o con qué sujetos, nada de eso). Si lo que nos resulta clave del trabajo es el diseño de un instrumento para recabar ciertos datos, y los resultados de aplicarlo no nos resultan relevantes, el resumen se focalizará en presentar o hablar del instrumento, porque tal vez lo usemos o lo modifiquemos para adaptarlo a nuestro trabajo, y el resto estará presente en menor medida, o no estará. Si, en cambio, lo que nos parece clave es el mt, resaltaremos eso en el resumen, es decir, qué elementos teóricos consideraron. Como se ve, la clave está en *resumir focalizando en lo que más nos llamó la atención debido a su utilidad para nuestro trabajo*. Iremos también guardando las referencias de lo leído, si no, suele costar mucho trabajo luego recuperar dónde estaba eso que leímos. De este modo, vamos acumulando una serie de resúmenes que fuimos haciendo según encontramos los textos. Ahora bien, para organizar la escritura del ea no basta, o no es deseable, listar un resumen debajo del otro. Necesitamos *organizar el escrito con algún criterio*. Entonces, la idea es proceder de este modo: con todo leído desde esta perspectiva global, y habiendo resumido lo que más nos interesa, pensar y definir cómo conviene organizar los resúmenes. Es decir, hay que decidir en *términos de qué* se los organiza para presentar el ea. Esta decisión seguramente determinará las secciones del ea. Esto requiere que *tomemos cierta distancia* para decidir cómo organizar la sección. La redacción en sí, organizada en las secciones, toma lo sintetizado y conecta cada resumen con el que sigue, de modo de lograr una redacción fluida, como “dar el paso” de un trabajo a otro.

Importante: en el ea van resúmenes de trabajos aunque el investigador *no* esté de acuerdo con el enfoque teórico, con las decisiones metodológicas o con los resultados. Aquí hay que ser bien amplios, no importa si estamos de acuerdo o no, el ea debe incluir *lo que existe* o aquello a lo que podemos acceder sobre la temática. Veamos ahora cómo se vincula el ea con el mt, y qué se espera encontrar en este último.

Marco teórico

El mt se constituye por las elecciones sobre enfoques, posicionamientos y conceptos teóricos que el investigador hace para su trabajo. El mt toma elementos del ea. Podría ser una línea completa o podría contener conceptos teóricos, o bien podría contener modificaciones a alguna posición o definición ajena. En este último caso, suele indicarse la posición o definición original (que figura en el ea), el investigador explica por qué no le resulta apropiada para su trabajo y propone una modificación que queda expresada en él. A veces ocurre que en el planteo del proyecto tomamos una definición ya existente y la modificación surge con posterioridad, porque a lo largo del desarrollo del trabajo consideramos que podríamos tener más riqueza en lo encontrado si la modificamos. En el capítulo 10 hablamos sobre este trabajo de proponer nuevas conceptualizaciones propias.

De este modo, el mt presenta los conceptos teóricos con los que se desarrollará el trabajo: las herramientas conceptuales. ¿Cuál es el alcance de estos conceptos en la investigación?, es decir, ¿para qué se usan? La teoría es clave para *fundamentar el diseño de instrumentos* y para *analizar datos*, tal como señalamos en el capítulo 1. De este modo, todo el trabajo siempre quedará impregnado de mt. Los conceptos con los que se habla, se escribe, se fundamenta, se analiza son los del mt. Metafóricamente, solemos decir que "son los lentes a través de los cuales miramos nuestro problema". Si pensamos en esto, "cambiar de lentes nos haría ver otras cosas"… ¡y es exactamente así! Una misma problemática inicial podría dar lugar a distintos problemas de investigación, distintas investigaciones y distintos resultados, según las elecciones teóricas del investigador. Del mismo modo, "un dato" (pensemos en un video de una clase, o un registro de una entrevista) analizado con una teoría da una información diferente que si estuviera analizado con otra.

A veces se ven artículos o tesis que presentan un mt bien desarrollado, y cuando este termina todo lo que sigue no usa nada de él. Esto no puede ocurrir. Es una señal de que está mal realizado el trabajo.

¿Cómo presentamos el mt en un proyecto? Hay distintas formas. Quien se ubica completamente en una línea, podría simplemente decir que "el mt de este trabajo es la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, año)", o que "el mt de este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico (Godino, año)", o que "el mt de este trabajo es la Socioepistemología (Cantoral, año)" (se indica el/los autor/es y el año del/los trabajo/s que figurarán en las referencias bibliográficas.

Si, en cambio, la elección no nos introduce completamente en una línea porque consideramos más rico sumar distintos aportes teóricos, tendremos que explicar qué posiciones tomamos, vincular el escrito con lo presentado en el ea y explicar qué se eligió. Nuevamente se da el caso de que partimos de una definición ajena y la queremos adaptar, retocar y generar una nueva. En este caso, tendremos que indicar la autoría inicial (que seguramente se presentó en el ea) y especificar nuestra propuesta.

En cada enfoque teórico hay posiciones asumidas (por ejemplo, sobre el aprendizaje o sobre la matemática) y conceptos que son propios de esa línea, y, por lo tanto, esa teoría los define o caracteriza (hablaremos sobre esto más adelante). En esos casos, esas son palabras claves de la línea teórica, y deben ser usadas con el significado que se les ha asignado en la teoría. Por otra parte, los términos que no han sido definidos expresamente no son parte de los conceptos teóricos y tendrán el significado usual, el que encontramos en un diccionario. Decimos esto porque es importante tenerlo presente, ya que en muchos casos el término usado para designar un concepto teórico en una línea en educación matemática tiene, también, un significado en la cotidianeidad. Este último no será el significado con el que debemos usar el término cuando estemos en nuestra investigación. A modo de ejemplo, la palabra *problema* es definida en la Resolución de Problemas de un modo, mientras que la Teoría de Situaciones Didácticas la considera diferente, y en la vida cotidiana el significado es otro. El término *validación*, para la Teoría de Situaciones Didácticas tiene una acepción, mientras que para el Enfoque Ontosemiótico no se define, por lo que no es un concepto teórico y debe ser entendido a partir de lo que el diccionario exprese sobre él. Es imprescindible estar atentos a esta diversidad de significados y tener más o menos claro el panorama de líneas y de terminología utilizada en cada una de ellas, como para no confundirse ni para hacer un escrito en el que se mezclen significados y quede un producto no consistente.

Una sugerencia es estar muy atentos a las referencias bibliográficas, pues deberían encontrarse allí los referentes en los que se basó la teoría. Por ejemplo, si leemos "Esta propuesta de clase se basa en la Resolución de Problemas (Brousseau, año)", ya entenderemos que el concepto de problema se asocia al de situación a-didáctica. Pero si, en cambio, leemos "Esta propuesta de clase se basa en la Resolución de Problemas (Polya, año)", el concepto de problema será muy diferente. ¿Y si no se menciona a ningún autor? No tenemos idea de a qué se refiere. Como necesitamos evitar este tipo de ambigüedades, es que enfatizamos estos comentarios.

Con el mt explicitado, estamos en condiciones de retomar las preguntas de las que partimos, reformularlas y establecer nuestros objetivos de investigación. Pasemos al próximo capítulo para detallar cuestiones importantes sobre esto último.

Capítulo 9
Planteo de objetivos de investigación

Introducción

Como mencionamos en el capítulo 7, iniciarse en una tarea de investigación nos obliga a definir un *norte*, algo que nos guía y orienta y que, por supuesto, moviliza nuestro interés. Ese norte, en términos académicos, quedará expresado en los *objetivos de la investigación*. Dedicaremos este capítulo a realizar algunas distinciones importantes y a dar algunas pautas para su formulación. Recién cuando los objetivos están definidos, se comenzará a delinear el camino que proponemos transitar para alcanzarlos. Esto último es lo que se expresa en las *decisiones metodológicas*.

Objetivos de una investigación versus objetivos de aprendizaje

En general, el investigador en educación matemática fue, antes de tener este rol, un docente (y en muchísimos casos lo sigue siendo). Como docentes estamos muy pendientes de definir *objetivos de aprendizaje* (en el sentido que mencionamos en el capítulo 3). Lo hacemos cuando planificamos nuestras materias, las secuencias didácticas y las clases. Esos objetivos son los que nos guían en las evaluaciones a los estudiantes, entre otras cosas.

Cuando pasamos al plano de las investigaciones es usual transferir la idea de *objetivos de aprendizaje* a *objetivos de investigación*, y esto es incorrecto. Un docente fue formado para establecer objetivos de aprendizaje de sus estudiantes y diseñar sus clases para que ellos los alcancen. No tendría sentido que en investigación hiciéramos el mismo planteo. No necesitaríamos investigadores, solo docentes. Nadie contrataría a un investigador; no habría financiamiento especial para ello porque el docente en su rol sería suficiente. Esto, claramente, está mostrando que no pueden ser la misma cosa. Tratemos, entonces, de aclarar ideas.

Como ya hablamos de objetivos de aprendizaje, nos dedicaremos aquí a los de investigación. Pensemos que tener un objetivo de investigación es tener una meta definida tal que, para alcanzarla, deberemos hacer opciones metodológicas, diseñar instrumentos, fundamentar su diseño, recabar datos, analizar con teoría, etcétera. Todo está impregnado de teoría. La misma formulación de los objetivos de investigación es deseable que se haga utilizando la terminología del mt. Lo que alcancemos, expresado en nuestros objetivos, debe ser algo nuevo, un conocimiento nuevo para la comunidad educativa. Esto es una distinción clave que permite diferenciar ambos objetivos.

Los objetivos se redactan luego de haber elaborado el ea, establecido el mt, y se formulan para el contexto de trabajo que el investigador propone. Expresarán específicamente lo que se pretende alcanzar. Ya no hay planteos imprecisos ni preguntas ingenuas, hay teoría y esta aparece en la formulación de los objetivos.

A continuación daremos ejemplos de objetivos de investigaciones. Es probable que el lector desconozca algo de la terminología teórica que estos incluyen. No es problema. Solo es importante que advierta cómo la teoría aparece en los objetivos. Ponemos en cursiva los términos teóricos para que no se confundan algunas palabras con el significado usual del diccionario. En un proyecto, su definición o conceptualización debería estar antes del planteo de los objetivos, de modo que el lector cuando llegue a ellos pueda comprenderlos.

Ejemplo 1: ejemplo de un objetivo enmarcado en la resolución de problemas: “Describir las *heurísticas* presentes en estudiantes al finalizar un curso de Matemática de nivel preuniversitario”.

Ejemplo 2: ejemplo de un objetivo enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental: “Explicar, en términos de las componentes de una *praxeología*, la *génesis instrumental* de algunos de los *artefactos* presentados a los estudiantes".

Ejemplo 3: ejemplo de dos objetivos enmarcados en el Enfoque Cognitivo: 1) "Describir el uso del lenguaje natural y del *lenguaje simbólico* en la enseñanza de límite funcional"; 2) "Explorar formas de favorecer que los estudiantes superen *modelos mentales* erróneos del concepto de límite".

Objetivos de una investigación versus actividades de investigación

Una vez que tenemos establecidos los objetivos de la investigación, nos pondremos a pensar *cómo vamos a hacer para lograrlos*. Es el momento de delinear un camino que transitaremos para llegar a nuestro norte: los objetivos. Ese camino es el que se expresa en las decisiones metodológicas y que para el proyecto tenemos que pensar qué pasos tendremos que dar, qué tareas específicas necesitaremos realizar. Estos pasos o tareas son los que se denominan *actividades de investigación*. Es muy común encontrarse con actividades de investigación en el lugar de los objetivos de investigación, y esto también sería un error. Veamos ejemplos con la intención de aclarar. Algunas actividades de investigación podrían ser:

- Búsqueda bibliográfica.
- Ajustes al mt.
- Diseño y fundamentación de un test.
- Selección de una muestra.
- Aplicación del test.
- Análisis de los datos recogidos.
- Diseño y fundamentación de un dispositivo didáctico.
- Implementación del dispositivo didáctico.
- Sistematización y análisis de los datos recabados.
- Publicaciones en congresos y revistas especializadas.

- Redacción de artículos.

Aquí pueden encontrarse actividades como el "diseño de un dispositivo didáctico" y sería correcto. Si figura aquí es porque será una tarea que realizaremos, pero no es la finalidad de nuestro trabajo. El objetivo de nuestra investigación no es diseñar un dispositivo didáctico, sino que realizando esta y otras tareas tendremos datos para responder al objetivo.

Del mismo modo, suele verse como un objetivo de una investigación "analizar la incidencia del género de los estudiantes en su rendimiento". En realidad, la finalidad del trabajo no es *tener el análisis*, aunque sea algo que debamos hacer: analizar algo. Bastaría preguntarnos *para qué queremos analizar esta incidencia*, y probablemente la respuesta exprese el objetivo real de la investigación. Por ejemplo, este podría ser "describir el rendimiento de estudiantes en términos del género", o "proponer una explicación sobre el rendimiento de estudiantes en términos de su género".

Estas actividades de investigación, que marcan tareas acotadas y organizadas que deberemos llevar adelante, son las que se usan cuando tenemos que indicar un cronograma de trabajo. El cronograma se construye explicitando los tiempos previstos para cada una de las actividades de investigación. Puede presentarse del siguiente modo:

Cronograma de actividades												
Actividades de investigación	Meses											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Búsqueda bibliográfica y ampliación del marco teórico	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Acopio de las entregas periódicas de las tareas de los estudiantes	x											
Análisis de las tareas recabadas		x	x									
Selección de las muestras A y B					x							

Diseño y fundamentación de entrevistas para las muestras A y B					x							
Aplicación de las entrevistas						x						
Transcripción de las entrevistas						x	x					
Análisis de los datos recogidos							x	x	x			
Publicaciones en congresos y revistas especializadas	Para ir obteniendo resultados se prevé la presentación en congresos y revistas especializadas, así como también la redacción parcial de capítulos de la tesis											
Redacción de la tesis												

La buena formulación de objetivos es un requerimiento importante de toda investigación. El primer cuidado aparece al formular el proyecto. En ese momento, vale la pena tomarnos un tiempo, revisar y consultar para luego avanzar más sólidamente hacia ese rumbo.

Capítulo 10
Rumbo a una conceptualización propia

Introducción

Cuando hablamos de cómo ir elaborando el mt, mencionamos que una posibilidad es asumir completamente un enfoque teórico ya existente, pero no es la única forma. A veces pasa que la definición de un concepto no nos termina de resultar porque incluye casos que a nuestro criterio no deberían estar, y/o deja afuera otros que sí deberían estar incluidos. Si así ocurriera, necesitaremos generar una adaptación de ese concepto. Esto es una *conceptualización* propia de una noción en educación matemática. En este apartado describiremos cómo hacer este proceso.

Conceptualizaciones en educación matemática

Definir un concepto en educación matemática y en matemática tiene la misma connotación. Sin embargo, la idea de *caracterizar un concepto*, no.

En matemática uno usa el término *caracterización* de un concepto A cuando uno logra un teorema que establece que A es equivalente a B ("A $\Leftrightarrow$ B"), lo que lo habilita a "usar B" cada vez que necesite algo con A, y únicamente se podría tener una caracterización de un concepto si previamente se tuvo una definición de él.

En educación matemática, una *caracterización de un concepto* es, desde nuestra perspectiva, una idea diferente a lo que entenderíamos por esta expresión en matemática. Es un recurso que se usa cuando uno no logra definir el concepto y, a cambio (y tal vez temporalmente), intenta aproximarse a una definición, y entonces *da características* sobre ese concepto. Esas características no necesariamente *cubran* la totalidad del concepto (si uno tuviera *algo* que cubriera la totalidad del concepto, tal vez podría definirlo). Se admite que eso ocurra, y las caracterizaciones pasan a ser valiosas en este campo.

Como ejemplo mencionamos la noción de *obstáculo*. En general no se encuentran definiciones, pero hay acuerdo en el campo y se comparten las siguientes características de los obstáculos: se manifiestan a través de errores de los estudiantes, son un conocimiento y no una falta de él, tienen un campo de validez, aparecen aleatoriamente y son resistentes a contradicciones.

Hasta aquí tenemos que podemos tener o proponer una definición o una caracterización de un concepto. Otra opción que se usa cuando aún no se logra claridad para avanzar hacia la definición es *dar indicadores* que sean observables. Cabe señalar que esto también se usa cuando una definición o una caracterización tienen un alto nivel de abstracción y están planteadas en términos no observables. Los *indicadores* son la forma en que uno entiende que el concepto se pondrá de manifiesto, se observará, y dan herramientas operativas a quien necesita usar ese concepto.

Los indicadores nos dicen cómo mirar el concepto, qué buscar, aunque no necesariamente todo se encuentre presente. Lo complejo es que el investigador muchas veces se verá enfrentado a definir los indicadores porque no encuentra un trabajo previo que haya pensando en esto.

Ejemplo 1: un ejemplo de la necesidad de dar indicadores, aun teniendo una definición.

Si quisiéramos ver "los aprendizajes significativos alcanzados por estudiantes en un curso de Matemática", tendríamos que tener alguna definición o caracterización de *aprendizaje significativo*. Supongamos que la definición que tomamos es la que expresa Ausubel (1963): "El aprendizaje significativo es el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento" (p. 58). Tenemos la definición, pero nos preguntaríamos: ¿cómo la uso?, ¿cómo sabría si un estudiante adquirió y almacenó ideas e informaciones de matemática? Esto nos pone de manifiesto la necesidad de tener indicadores para poder *ver* esto en lo que los estudiantes hacen.

Ejemplo 2: un ejemplo en el que no se tiene ni definición ni caracterización, y solo se tienen indicadores.

Arcavi presenta indicadores del desarrollo del *sentido de los símbolos* (*symbol sense*). Inicia su texto diciendo que definir el *sentido simbólico* es una tarea muy complicada. Hace referencia al concepto de *sentido numérico* (*number sense*), sobre el que afirma que, todavía, una definición ha demostrado ser extremadamente difícil de alcanzar:

> Like Fey, we do not attempt to define "symbol sense", the task is too complicated. We think that "number sense" has been more widly discussed [...] and yet a definition has proved to be extremely elusive (1994: 24).

En su trabajo, en cambio, aporta indicadores de desarrollo del sentido simbólico conjuntamente con ejemplos de cada uno de ellos y explicaciones. De este modo, entendemos que *conceptualizar* incluye la posibilidad de dar una definición, proponer una caracterización o identificar indicadores. Y aquí va "o", es decir, tal vez no logramos definir, pero si podemos dar indicadores, o bien nos sale una caracterización que es operativa y consideramos que es suficiente, o si la caracterización que logramos expresar resulta abstracta, le sumamos indicadores… Ante cualquiera de estas posibilidades, desde nuestra perspectiva un sujeto estaría conceptualizando.

¿Cómo llegamos a una conceptualización propia?

Cuando queremos precisiones sobre una noción de educación matemática, en general lo primero que hacemos es buscar qué han dicho otros sobre ese concepto. De este modo, buscamos en aportes de investigadores, en artículos, en libros, etcétera, tomando los recaudos que toda búsqueda conlleva (confiabilidad de los sitios de internet, tener claro quién es el autor, etcétera). Para cuidar la confiabilidad de la fuente, en particular si tomamos sitios de internet, es recomendable considerar sitios de universidades o centros de investigación, autores conocidos del campo, actas de eventos relevantes que hayan tenido evaluación, etcétera.

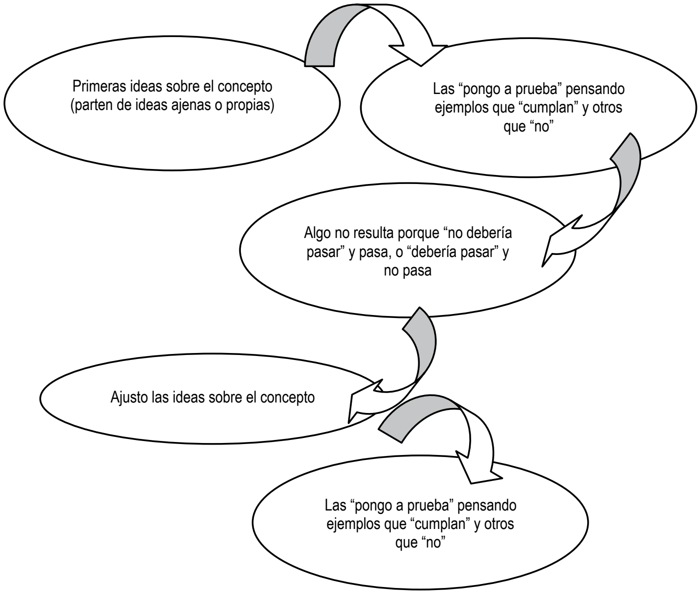
Una vez que encontramos una definición o caracterización, lo que hacemos es *ponerla a prueba* para ver cómo funciona, es decir, si resulta útil para nuestro trabajo, si se adecua a lo que esperamos. Esto significa usarla para probarla con ejemplos o situaciones que nos resultan familiares. Cuando el concepto nos es afín, uno tiene idea de cómo debería funcionar. A modo de ejemplo, si estamos queriendo conceptualizar las *habilidades matemáticas* y encontramos una definición que habilita a afirmar que si un sujeto resuelve correctamente la consigna "calcular el resultado de 2 - 1/3" es porque ha desarrollado la habilidad del cálculo, es probable que la definición encontrada no nos conforme. ¿Por qué razón? Porque tenemos una idea (que no podemos precisar aún) de lo que tendrían que ser las habilidades matemáticas. Resolver correctamente esa consigna no debería "pasar" lo que la definición diga. Es decir, al poner a prueba la definición encontrada, nos resulta no apropiada. Entonces, seguimos buscando y poniendo a prueba definiciones hasta que, si no la encontramos, nos aventuramos a proponer nuestra propia conceptualización.

Nuevamente, en ese caso tenemos tres opciones: a) definir, b) caracterizar (dar características), o c) dar indicadores. Cualquiera sea el caso que elijamos, nos estaremos embarcando en un proceso de idas y vueltas, las cuales se dan entre:

- nuestra primera propuesta, que suele partir de tomar ideas de otros que nosotros modificamos (para habilitar o deshabilitar esos casos que queremos que se incluyan o filtrar);
- poner a prueba nuestra propuesta y ver cómo nos resulta (para ello, el plan es pensar ejemplos que "pasen" nuestra conceptualización y otros que "no la pasen", para ver si esta responde a lo que queremos expresar);
- ajustar nuestra primera propuesta atendiendo a lo que advertimos cuando la pusimos a prueba (del mismo modo que ponemos a prueba una definición ajena).

Como dijimos, esto genera un circuito de idas y vueltas en el que vamos ajustando la definición, la caracterización o los indicadores, hasta que nos resulten adecuados y, al menos por ahora, cubran nuestras expectativas. Es muy normal que a medida que avancemos, y cuanto más ahondemos en el trabajo, más fino miremos y necesitemos nuevamente hacer ajustes. El siguiente esquema intenta plasmar esta idea, mostrando que este es un proceso espiralado y no circular, que puede continuar.

Esquema espiralado de construcción de un concepto



Hay que considerar que si logramos una conceptualización (vía definición, caracterización o indicadores) no debería ser ni tan abarcadora que admita todos los casos ni tan restrictiva que nada la satisfaga. Por eso siempre sugerimos acompañar nuestra conceptualización con ejemplos que "sí la pasen" y otros que "no la pasen". De ese modo, nosotros mismos hacemos explícitos casos en los que no se verifica el concepto y otros en los que sí.

Ejemplo 3: breve descripción del proceso transitado para conceptualizar *habilidades matemáticas*.

Tomamos aquí parte de lo relatado por Rodríguez (2016) en el trabajo referenciado. En el inicio de la búsqueda bibliográfica fueron considerados, entre otros:

1) Alberto *el al.* (2006) sostienen:

> Adherimos a las concepciones sobre las habilidades cognitivas entendidas como operaciones y procedimientos que puede usar el estudiante para adquirir, retener y recuperar diferentes tipos de conocimientos y que suponen el logro de capacidades, entre otras, para definir, demostrar, identificar,

> interpretar, codificar, recodificar, graficar, algoritmizar y calcular, modelar, comparar, resolver, aproximar, optimizar (p. 37).

Rodríguez señala que el vínculo con las capacidades no resulta clarificado en el texto.

2) Hernández (1998), citado en Williner (2011), identifica procedimientos con habilidades y las define como modos de actuación. Es usual encontrar que para conceptualizar la noción de habilidades se hace referencia a otros términos, como capacidades, procedimientos, competencias o destrezas sin incluir precisiones sobre ellos. También ocurre que otros autores consideran algunos de ellos como sinónimos.

3) En Ferrer Vicente (2000) se adopta la siguiente definición:

> Consideramos la habilidad matemática como la construcción y dominio, por el estudiante, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos (p. 54).

Desde la perspectiva de Rodríguez (2016), en esta definición no está la condición de desenvolverse adecuadamente, lo que habilitaría a concluir que un estudiante que hace algo mal tenga desarrollada una habilidad (es un ejemplo de un caso que no quisiéramos que "pase" la definición). Por otra parte, el listado de lo que debe ser utilizado (conceptos, propiedades, etcétera) ofrece una descripción de la actividad matemática, que es tan abarcadora que dificultaría estudiar si un sujeto dispone de una habilidad (tendría que ser capaz de hacer demasiado).

4) Delgado Rubí (1997) caracterizó las *habilidades matemáticas generales* mediante tres características: que sean inherentes al trabajo matemático, que sean generales para que se puedan trabajar a lo largo de la formación matemática, y que sean imprescindibles en la formación matemática.

Esta caracterización es muy general y aún no expresa cómo favorecer el desarrollo de las habilidades, cómo saber si un sujeto las tiene o no desarrolladas, por ejemplo.

5) En la bibliografía consultada se encontró que un modo de estudiar si un sujeto dispone o no de una cierta habilidad matemática se basa en que este sea capaz de resolver ciertas actividades, muchas de ellas de tipo rutinario. Se mencionan incluso exámenes estandarizados, como por ejemplo pruebas que se completan *online*, como la que puede verse en http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/634637/habilidades_matematicas.htm.

La indagación siguió y no se logró encontrar una conceptualización que se advirtiera operativa, de modo que se trabajó en generar una propia. A partir de allí, el texto relata el procedimiento seguido y las disquisiciones que resultaron de interés.

Algunas preguntas que la autora rescata como orientadoras del proceso de conceptualización son: el solo hecho de resolver bien una actividad, ¿nos permitiría afirmar que el sujeto dispone de la habilidad involucrada?, ¿tendría sentido que la conceptualización de habilidades que logremos habilite, por ejemplo, a afirmar que *graficar funciones cuadráticas mediante el uso de tabla de valores* es una habilidad?, ¿debería nuestra conceptualización de habilidades "dejar pasar" *graficar funciones elementales mediante tabla de valores* como una habilidad matemática?, ¿preferiríamos adoptar una definición de habilidad que deje este caso afuera?, ¿cómo pensar en la génesis de las habilidades no matemáticas, las habilidades matemáticas y las habilidades matemáticas con contenido?, ¿cómo podríamos pensar algún vínculo entre ellas?

Estas preguntas dieron lugar a la definición que figura en Rodríguez (2016) y que transcribimos aquí:

> Consideramos que una habilidad es un desempeño deliberado, no casual, adecuadamente realizado, que permite resolver correctamente una cierta problemática planteada.
>
> Se suman las siguientes aclaraciones:
>
> Aquí *desempeño* se entiende como una acción, se refiere a un hacer. El término *deliberado* se vincula con tener control sobre la acción realizada. Esto significa que una persona que tiene una habilidad controla lo que hace, es decir, antes de actuar piensa y toma decisiones. Luego actúa y ese hacer resulta correcto, es decir, "lo hace bien", pero no solo eso, sino que eso que hace le permite "llegar a buen fin". Esto último significa que responde la pregunta que se le planteó, resuelve el problema dado, avanza con un cuestionamiento que debía abordar, etcétera [...] Con cierta problemática planteada queremos expresar la diversidad de situaciones ante las cuales el sujeto podría poner en juego una habilidad. Un sujeto podría poner en juego una habilidad ante una gran gama de actividades, no necesariamente del mismo tipo. Notemos que un sujeto podría, deliberadamente, decidir ejecutar una acción, y esto hacerlo correctamente, pero podría ocurrir que con eso no baste para llegar a buen fin. De allí que consideramos que los elementos que deben conformar el concepto de habilidad son un desempeño o acción, su deliberado uso, la correcta realización de la acción,

y el hecho de llegar a buen fin. Esto permite definir *habilidad*, pues no involucra un campo de conocimientos específico.

Cuando el campo de conocimientos es la matemática, se tendrá la conceptualización de habilidades matemáticas.

En el artículo mencionado se trabajó con la definición para distinguir estudiantes que disponen de ciertas habilidades de aquellos que no, evaluar el grado de desarrollo o aprendizaje alcanzado de una habilidad y tener elementos para diseñar y fundamentar dispositivos didácticos para su enseñanza.

El texto sigue y da precisiones sobre las habilidades matemáticas sujetas a contenidos. Entendemos que, en este libro, este ejemplo es suficiente. Resulta valioso que el investigador reconozca que lo que encontró no resulta útil y se anime a generar su propia conceptualización. Es una actividad compleja y, por lo tanto, el valor formativo de transitar este proceso es altamente valioso.

Referencias bibliográficas

Alberto, M., Rogiano, C., Roldán, G. y Banchik, M. (2006). Fortaleciendo las habilidades matemáticas de los estudiantes ingresantes desde los entornos virtuales, 36-44. http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Alberto.pdf.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Ausubel, D. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. Grune and Stratton.

Delgado Rubí, J. (1997). *Las habilidades matemáticas*. Material del Seminario-Taller de Didáctica de la Matemática. Buenos Aires: utn Regional Haedo.

Ferrer Vicente, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. www.eumed.net/tesis/2010/mfv/.

Rodríguez, M. (2016). Habilidades matemáticas: una aproximación teórica. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(2), 809-824.

Williner, B. (2011). Estudio de habilidades matemáticas cuando se realizan actividades usando software específico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 27*, 115-129.

Capítulo 11
Instrumentos, datos e información

Introducción

En el capítulo 1 expresamos las pautas que deben tener los análisis y las fundamentaciones en el contexto académico, y mencionábamos que un uso de esas herramientas se da cuando necesitamos analizar *datos*. En este capítulo nos dedicamos a los datos –cómo se recogen, cuál es la diferencia con la información–, y damos algunas pautas para evitar errores metodológicos cuando esto se enmarca en investigaciones educativas.

Los datos y su importancia en investigación

Después de planteada una investigación, el investigador comienza a recorrer los pasos allí expresados, los cuales espera que lo conduzcan a su objetivo. En este tránsito, solemos necesitar *datos* a partir de los cuales nos debería ser posible decir algo sobre el objetivo planteado. Tener claro qué datos necesitamos y cómo haremos para obtenerlos, es un primer paso clave en esta etapa.

¿Qué datos necesitamos?

Esta pregunta se responderá en función del objetivo planteado. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Si el objetivo es *describir el uso del lenguaje natural y el simbólico en la enseñanza de límite funcional*, necesitaremos como datos filmaciones de clases en las que un docente enseñe límite funcional.

Ejemplo 2: Si el objetivo es *explorar formas de favorecer que los estudiantes superen modelos mentales erróneos del concepto de límite*, necesitaremos como datos:

- en un primer momento, algún escrito (o grabación de audio o video) de los estudiantes en el que se plasme el uso de modelos erróneos;
- una propuesta didáctica que se pondrá en funcionamiento con el fin de que el estudiante trascienda su modelo erróneo;
- y luego, otro escrito (o grabación de audio o video) en el que el estudiante muestre evolución respecto del modelo erróneo.

Ejemplo 3: Si el objetivo es *identificar errores matemáticos que un libro de texto induce*, no necesitamos recabar otros datos, estos están en el libro de texto.

Los instrumentos

Los datos que necesitamos se recaban, usualmente, mediante *instrumentos* que se diseñan para tal fin (también pueden usarse instrumentos ya existentes). Estos instrumentos pueden ser encuestas, tests, dispositivos didácticos, entrevistas, observaciones, etcétera.

Lo delicado del diseño de los instrumentos consiste en garantizar que mediante su aplicación obtengamos el dato que necesitamos y no otro. Por ejemplo: si necesitamos recabar datos sobre el desarrollo de una habilidad matemática en estudiantes (retomando la definición presentada en el capítulo anterior) y el instrumento que elegimos es un test consistente en una lista de consignas matemáticas a resolver, estaremos en problemas. Ese instrumento no nos permitirá decir algo sobre las habilidades matemáticas, pues no veremos nada sobre el control del estudiante, lo deliberado de sus actos. Solo veremos resoluciones.

Nosotros no ahondaremos en este sentido, pues hay mucha bibliografía en el terreno de la metodología de investigación que da precisiones para establecer la validez, fiabilidad y confiabilidad de los instrumentos. Cualquiera sea el instrumento elegido, una vez recabados los datos es importante guardar organizadamente lo recabado. Poner día, lugar, nombre del observador, institución, número de clase, etcétera. Si tenemos videos, etiquetarlos, hacer copias de seguridad y subirlas a sitios de internet. Perder los datos es frenar la investigación, y a veces es imposible volver a tenerlos o muy costoso replicar el trabajo para recabarlos nuevamente.

Algunas pautas sobre la observación

Cuando decidimos que nuestro instrumento será *la observación*, hay que tener en claro, en primer lugar, si esta será sin intervención nuestra o estamos habilitados a intervenir. En una clase, por ejemplo, un observador podría tener como rol simplemente registrar lo que ve, o también podría hacer preguntas. En esto se distingue la *observación no participante* de la *observación participante*.

De ser posible, considerar que grabar (al menos en audio) es una forma óptima de recabar datos. De todos modos, a veces esto no es fácil; no tenemos la aceptación y debemos registrar a mano. Explicamos a continuación algunas cuestiones que el observador debería tener en cuenta:

1) Si hiciera falta observar el trabajo en grupos en una clase, cada observador podría observar solo a un grupo y –si la hubiera– la parte de puesta en común o trabajo del conjunto de la clase. Es decir, no debería ir de grupo en grupo. A su vez, si esto debe hacerse por varias clases, habría que observar al mismo grupo.

2) Habría que avisarles a los estudiantes antes de comenzar la clase cuál será el rol de los observadores y por qué se suman a su espacio. Aquí se habilitará o no que se le pueda preguntar al observador.

3) Si estamos grabando, podemos aprovechar nuestra presencia para anotar impresiones, supuestos, pues tenemos la certeza de que en la grabación queda la versión fiel.

4) Si fuera necesario registrar las producciones de los estudiantes, considerar que habría que pedirlas, fotocopiarlas y devolverlas, o sacarles fotos en el aula o después. Se pueden sacar también fotos al pizarrón.

5) Cuando tengamos que registrar a mano sugiero dejar un espacio en la hoja para apreciaciones personales. Es importante tener en cuenta que lo central del registro es tomar nota de todo lo que se escucha y se ve, pero de manera textual. A modo de ejemplo de esta observación: si el profesor entra y dice "Buenos días, hoy vamos a trabajar con la actividad 1 que les entregaré", quien registra debe obtener exactamente esa frase. No sería correcto que su registro diga "el docente saludó y dio la tarea". En este ejemplo, la diferencia es menor porque no es relevante lo que está ocurriendo, pero el punto es que el registro textual *es el dato*, y este no está en el registro; lo perdimos y se nos desvanece el trabajo siguiente. El dato es lo que analizamos con elementos teóricos y se convierte en *información*. Quien registra no debe sintetizar, interpretar, omitir, pues estaría *modificando el dato*. Por eso es bueno haberse dejado un lugar para expresar las impresiones del observador, porque a veces uno quiere registrar cosas como: "para mí no entendió el enunciado", "creo que se desengancharon de la tarea cuando…", o "los veo muy motivados", etcétera).

Las minutas, un recurso práctico

La idea de hacer *una minuta* es registrar, con todo fresco, lo que uno vivió/percibió luego de aplicar un instrumento. Por ejemplo, puede ser luego de una observación, de una entrevista, cuando se terminó de aplicar un dispositivo didáctico, etcétera.

Durante la aplicación de algunos instrumentos, uno suele estar bastante ceñido al protocolo que diseñó y fundamentó con antelación. Sin embargo, en ese transcurso de la implementación uno tiene impresiones, sensaciones, cree que entiende por qué pasó tal cosa, considera que puede explicar algo de lo que vivió, etcétera. Durante la aplicación de los instrumentos no podemos hacer simultáneamente un análisis de los datos, simplemente porque estamos recabándolos. Entonces, la propuesta de la minuta es hacer un punteo, totalmente informal, en el que se exprese por escrito todo lo que se haya visto, vivido, percibido. Es un escrito para plasmar cosas distintas del dato. Se acerca más a un espacio para delinear posibles afirmaciones personales o juicios que luego formarán parte del análisis (capítulo 1) y que cerrarán o no en función de que uno pueda vincularlos con la teoría y sumarle *evidencias* extraídas de los datos (que serán las transcripciones o los videos, por ejemplo).

¡Hay que hacerlo! Uno cree que recordará por siempre lo que vivió en ese momento, ¡pero no es así! Hay que tener a mano una computadora portátil, un grabador o papel y lápiz, y apenas se termina se pueden juntar los investigadores presentes, hablar, intercambiar y registrar todo a la velocidad que les den las manos. Aquí no interesa tener una redacción pulida, importa registrar las impresiones de los investigadores involucrados.

Cuando se esta por comenzar el análisis de los datos (luego de las transcripciones, si fueran entrevistas, por ejemplo), se toman las minutas en búsqueda de posibles afirmaciones personales, y luego se vuelve a los datos a buscar evidencias. En ese momento del análisis es que se usan las minutas. Aquí, nuevamente, se articularán para el análisis la teoría del mt, sus afirmaciones y las evidencias extraídas de los datos.

La información

La información resulta de haber analizado datos con alguna teoría y las pautas explicitadas en el capítulo 1. Esto significa que un mismo conjunto de datos podría dar origen a distintas informaciones, según con qué teoría se lo analice.

A modo de ejemplo, imaginemos que videograbamos una clase que fue diseñada y gestionada bajo los lineamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas. El investigador que hizo el diseño de esa clase, porque necesitaba recabar ciertos datos en ella, la analizará y plasmará en su análisis afirmaciones expresadas en términos de, por ejemplo, cómo se puso en juego la a-didacticidad, cómo fue el trabajo de los estudiantes, si hubo rupturas del contrato didáctico, si se vio a los estudiantes validando sus producciones, etcétera. Como notarán, esto está impregnado de los elementos teóricos propios de la línea y son con los que analizamos la clase y nos expresamos. Si, en cambio, el video es tomado por otra persona, fuera del contexto de esa investigación, podría, por ejemplo, analizarlo utilizando otro enfoque teórico. Imaginemos la Resolución de Problemas. Es muy probable que su análisis exprese que los estudiantes no trabajaron individualmente –como es promovido por este último enfoque–, que el docente recapituló en la clase cuestiones referidas al contenido y no a las heurísticas puestas en juego, etcétera.

En este capítulo hemos querido solamente mencionar algunas pautas, que no siempre son explícitas, referidas a datos, información e instrumentos sin la pretensión de que esta lectura nos facilite el diseño de estos. Es una tarea muy compleja y, tal vez, para iniciarse, sería conveniente utilizar instrumentos ya diseñados y validados o contar con la guía de alguien que haya transitado previamente estos caminos.

Capítulo 12
Cómo redactar y presentar un artículo

Introducción

Una vez que hayamos trabajado en nuestro proyecto, lo hayamos delineado, transitado y hayamos obtenido los primeros resultados, es deseable que nos propongamos publicarlo. Esto, por un lado, nos será sumamente útil porque estaremos sometiendo nuestro trabajo a miradas de expertos en nuestro campo, y sus devoluciones, sugerencias o correcciones serán bienvenidas para seguir aprendiendo sobre esta tarea. Y, por otro lado, porque difundimos nuestro trabajo, queda en la comunidad y puede ser tomado, replicado, utilizado, discutido, etcétera, lo que es deseable en los ámbitos académicos que construyen conocimiento.

Si nos hemos convencido de esta necesidad, lo que sigue es redactar un artículo o *paper* y enviarlo a alguna revista especializada para que lo considere para su publicación. En este capítulo nos dedicamos a dar algunas pautas para la redacción de estos artículos.

¿Qué es lo que caracteriza a un *paper*?

Primero tenemos que tener en claro que un *paper* o un *artículo* es un escrito que contiene algo nuevo en el campo que corresponda. Eso nuevo podría ser de distinta índole. Por ejemplo:

- un resultado de una investigación;
- una mirada nueva sobre cosas sabidas (la mirada podría ser nueva porque tal vez el autor conectó textos o integró cuestiones que nadie había propuesto previamente);
- una propuesta para enseñar un tema que no esté visto ni escrito por otros;
- el diseño y la validación de un instrumento, etcétera.

¿Cómo se escribe un *paper*?

Para escribir un *paper* no hay un formato ni una plantilla universal, sin embargo existen algunos criterios para que cada uno se dé una idea y pueda organizarlo con su estilo. Lo primero que hay que saber es que un *paper* no se escribe en el mismo orden en el que se lee cuando está terminado. Se escribe en desorden, yendo y viniendo para ajustar detalles y la coherencia. Vamos a ahondar en algunas precisiones. En general, un *paper* llevará:

1) **Un título:** esto conviene pensarlo al final de todo, cuando el artículo esté completo y el autor pueda sintetizar en pocas palabras el asunto central que el trabajo comunica.

2) **Un resumen o *abstract*:** esto también se redacta al final de todo, cuando el autor pueda sintetizar en pocas palabras –¡no tan pocas como un título!, pero pocas– la idea de lo que contiene el trabajo. El resumen debe anticiparle al lector lo que va a encontrar cuando lea. Es recomendable que no lleve citas ni mención a autores, dado que muchas veces las revistas promocionan sus artículos exhibiendo solo el resumen y no se accedería a la referencia completa.

3) **Una introducción:** se puede comenzar a escribir el *paper* por la introducción, pero sabiendo que habrá que ir y venir entre esta parte y lo siguiente. En esas idas y venidas, esta parte se irá modificando. A medida que se vaya completando lo que sigue, habrá que volver a la introducción para lograr coherencia.

La introducción pone en tema al lector. Se trata de contarle, con más detalles que en el resumen, *qué es lo que el lector encontrará en el texto que sigue*. Aquí puede ir la problemática inicial, algún tipo de discusión sobre ella que se ha venido dando, una idea del mt y el objetivo planteado. En esta parte se podría incluso presentar una idea nueva y, tal vez, explicar cómo surgió (si de la experiencia docente, del análisis de textos teóricos, etcétera). Hacia el final de la introducción se podría contar cómo está diagramado el texto y qué contiene cada una de las secciones que siguen.

La introducción podría contener palabras teóricas sin necesidad de que su significado quede allí explicado, bastaría una referencia al autor. Esta parte del *paper* debería atraer la atención del lector.

4) **Distintas secciones, cada una con su nombre:** esta parte será muy distinta según el trabajo que se comunique. Tal vez, una sección sea “Estado del arte”, otra “Marco teórico”, o una sola que sea “Estado del arte y marco teórico”, o solo “Marco teórico” (porque hay restricciones de cantidad de páginas y no entra todo). Otra sección podría ser “Cuestiones metodológicas”, en la que se incluirán las decisiones tomadas sobre instrumentos, contexto, etcétera. Otra podría ser “Desarrollo”, en la que se volcará el trabajo realizado hasta la obtención de los datos, para luego en la sección “Resultados” expresar lo encontrado.

No es necesario, pero suele favorecer la lectura, anticipar con un renglón o dos qué contendrá la sección siguiente.

5) **Conclusiones, a modo de cierre o discusión:** en esta sección hay que retomar la idea central del trabajo, volver a decir qué se propuso el autor (dicho en la introducción) y lo que se hizo. Es un espacio para dejar preguntas que quedarán abiertas –que darán orientaciones sobre cómo seguir pensando–, preguntas que sería interesante abordar, etcétera. Es importante mostrar que el trabajo podría tener continuidad, que no es algo acabado.

6) **Referencias bibliográficas:** en esta sección se especifican los textos que fueron usados en el escrito. No hay que poner todo lo que se leyó, sino solo lo que se usó. Esto también se hará de acuerdo con las Normas apa (hay revistas que proponen sus propias normas).

Una observación importante: cuando esté terminada la primera versión completa del artículo, es conveniente hacer una lectura para chequear coherencia. ¿Cómo hacemos esto? Hay que ponerse en la posición de un lector. Revisar que lo que se anuncia en el resumen sea lo mismo que figura en la introducción y lo mismo que se retoma en las conclusiones. Revisar que cada vez que queden expresados los objetivos del trabajo se diga lo mismo y no parecido u otra cosa, volver a mirar que el título realmente exprese el contenido central del artículo, etcétera. Es muy fácil desviarse y que quede un escrito en el que no haya un hilo de coherencia. Este es un pulido final que es muy recomendable hacer.

Sobre las citas bibliográficas

Desde el capítulo 1 resaltamos la importancia de saber realizar adecuadamente citas textuales o parafraseos. Cabe señalar que es el que escribe quien podría quedar muy expuesto si no hace bien esto, al punto extremo de poder cometer plagio, incluso involuntariamente. Queremos dedicar esta sección a dar algunos ejemplos para que quede claro que hay pequeños matices que podrían transformar una cita en correcta o en incorrecta.

Todo el detalle minucioso está en las Normas apa (hoy en día está vigente la séptima edición), y este apartado de ninguna manera reemplaza su uso. A tal punto hay que tener cuidado, que no es lo mismo poner punto o punto y coma, si para indicar una página en la que figura la cita debemos usar *p.* o *pp.*, si va *&* o *y*, cuándo se usa *et al.*, qué es lo que va en itálica, etcétera. Para los ejemplos que siguen, consideramos la siguiente cita textual extraída de Arteaga *et al.* (2009):

> Una persona culta debería poder leer críticamente los gráficos estadísticos que encuentra en la prensa, internet, medios de comunicación y trabajo profesional. Esto supone no solo la lectura literal del gráfico, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada. Asimismo, debería conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo (p. 94).

Ejemplo 1: *una cita textual, correctamente incluida en medio de un escrito*.

En este trabajo nos interesa abordar cuestiones relativas a la enseñanza de la estadística a nivel medio. Queremos, primeramente, resaltar su utilidad. Al respecto, Arteaga *et al.* (2009) señalan:

> Una persona culta debería poder leer críticamente los gráficos estadísticos que encuentra en la prensa, internet, medios de comunicación y trabajo

profesional. Esto supone no solo la lectura literal del gráfico, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada. Asimismo, debería conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo (p. 94).

Por esta razón, en este trabajo plantearemos análisis de distintos datos estadísticos extraídos de nuestra realidad, así como la producción de información estadística.

Bibliografía

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Unión, 18*, 93-104.

Ejemplo 2: *reelaboración o parafraseo correctamente realizado en medio de un escrito*.

Arteaga *et al.* (2009) sostienen la importancia de que los sujetos extraigan información que circula por los medios usualmente, siendo capaces de hacer una lectura comprensiva de los gráficos y reconocer eventuales tendencias que sugieren los datos. Además, deberían ser capaces de construir gráficos de distinto tipo, conociendo las pautas para realizarlos.

Bibliografía

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Unión, 18*, 93-104.

Observación: Este ejemplo muestra que quien escribe reelabora lo que otro autor quiso decir, poniendo explícitamente de manifiesto su comprensión. En este caso, no hay citas textuales, no hay comillas ni itálica, simplemente la referencia señala que la idea central fue de otra persona, distinta a quien escribe.

Ejemplo 3: *una cita incorrecta*.

Para Arteaga *et al.* (2009), una persona culta debería poder leer críticamente los gráficos estadísticos que encuentra en la prensa, internet, medios de comunicación y trabajo profesional. Esto supone no solo la lectura literal del gráfico, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada. Asimismo, debería conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo.

Bibliografía

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Unión, 18*, 93-104.

Observación: el problema aquí es que lo escrito es textual y no está indicado como corresponde. Nótese que el hecho de incluir la referencia en la bibliografía *no basta*.

El proceso de escritura de un artículo es complejo, requiere cuidados y momentos en los que el autor tome distancia de lo producido para tener una mirada crítica sobre su propia producción. Iniciar esta tarea, pasarle el texto a colegas para tener una devolución y enviarlo a revistas con referato son acciones que permitirán que cada uno de nosotros mejoremos nuestro modo de comunicar y producir nuestros resultados.

Capítulo 13
Pautas para hacer una presentación audiovisual

Punto de partida

Antes de comenzar a preparar la presentación audiovisual con la que nos apoyaremos, hay que tener en cuenta el *tiempo* máximo que se tiene para hacer la exposición. Se debe ser respetuoso de los tiempos, de modo que parte de la formación profesional es poder hacer una buena presentación, cualquiera sea la cantidad de minutos que se disponga.

Este condicionamiento al tiempo máximo obliga al expositor a *elegir* qué presentar. Sugerimos pensar *qué se podría presentar que permita lucir el trabajo, que resulte claro y que mayoritariamente sea de elaboración personal* (en vez de contar teoría, por ejemplo[1]); en lugar de forzar la inclusión de todo lo hecho en los minutos disponibles.

Es bueno tener presente que esos minutos que se tienen son a veces la oportunidad que tenemos para despertar el interés en otros, para que se lleven ideas, etc., y podemos contar con que, si quieren saber más detalles, se podrán contactar con el autor. Cuando una presentación excede los tiempos dados,

[1] Excepto que la presentación sea para contar alguna teoría, por supuesto. De todos modos, en ese caso, la organización de cómo presentar estará a cargo del expositor.

muchas personas del auditorio abandonan, se van, los perdemos (porque van a escuchar otras ponencias en un congreso, por ejemplo, o porque tienen otras actividades y contaron con el tiempo anunciado), y suelen no llevarse lo más jugoso del trabajo. Los autores que se exceden en los tiempos suelen dejar para el final lo más importante. Eso es lo que justamente muchas personas se perderán porque quedó fuera de los márgenes. Sin contar con que, en algunos eventos, el moderador no permite seguir al expositor.

Dos comentarios antes de empezar con más pautas del diseño.

- Elegir qué queremos contar de nuestro trabajo obliga a tener algún criterio de selección, y eso suele ser evaluado (por ejemplo, por un jurado de tesis).
- El diseño de la presentación audiovisual es *muy personal.* Suele no ser útil que otro arme el PowerPoint que uno va a usar, porque se piensa en función de estilos personales (¿quiero mostrar toda la diapositiva?, ¿quiero dejar una cierta intriga de algo?, ¿decido empezar adelantando qué encontré?, etc.).

Pautas para el diseño

- **Cantidad de diapositivas:** estimar una diapositiva por minuto y considerar el punto siguiente.
- **Atención si se incluyen esquemas:** los esquemas son muy buenos porque sintetizan, muestran “el todo”, pero podría ser que uno pase mucho tiempo hablando sobre alguna de las partes y pierda el control total del tiempo. Si es la primera vez que van a usar una presentación audiovisual o saben que son de hablar mucho o que suelen conectar ideas, más vale evitarlos, al menos inicialmente.
- **Tamaño de letra:** no menor a 24 puntos. Esto es para las presentaciones en vivo, para asegurar que se verá desde lejos (sobre todo cuando uno desconoce la sala en la que deberá exponer).
- **Tipo de letra:** que se lea clara, sin arabescos.
- **Contraste de colores:** son preferibles fondos claros y letras oscuras que al revés.

- **No recargar las diapositivas de texto:** este es un punto clave. Por un lado, evitará que "ustedes se tienten a leer" o que la gente "lea cuando ustedes quieran que los escuchen". La idea es que el expositor cuente con un punteo, con el formato que sea, que le permita no olvidar nada, decir las cosas en el orden que quiere y hablar sobre lo que está punteado mostrando dominio de lo que dice. Si tiene diapositivas que un oyente podría leer y con las que podría comprender la presentación, habría que retocarlas de modo que "eso que está escrito sea el discurso oral del expositor". Ahora, ¿qué necesitaría tener punteado para poder producir ese discurso oral? Lo que respondan es lo que tendría que ir en el PowerPoint.

  Puede haber alguna definición de algún autor que sí será leída, por supuesto, si lo consideran necesario. Esto lo determinarán en función de la importancia que le otorguen y según los tiempos.

- **Animación:** pueden animar las diapositivas de forma que textos, imágenes, etc., aparezcan o desaparezcan.

  Ventajas: la animación permite controlar lo que la gente lee.

  Desventajas: podrían no recordar qué es lo que sigue y perder el hilo fluido del discurso, lo que podría sumarles una preocupación extra que los disperse del centro de la presentación. Consideren que cada uno de ustedes debe pasar las diapositivas (no cuenten con que otra persona las pase, esto es personal), así tienen el control de su discurso.

- **Carátula:** poner una carátula con los nombres (si hay más de un autor, pongan todos, aunque exponga solo uno), título, nombre del evento (logo de la universidad/institución que organiza) y radicación institucional de quien presenta (logo también, si queremos).

- **Agradecimiento:** poner una última diapositiva con un "muchas gracias" y un mail para el contacto. Sugerimos poner el mail al final y no en la carátula. Esto se debe a que, si a algún oyente le gustó el trabajo y quiere contactarlos, lo sabrá al final. Al inicio, aún está todo por pasar y es improbable que alguien copie el mail por las dudas.

- **Organización de la presentación:** es interesante que, luego de la carátula, haya una diapositiva que le muestre al oyente "lo que va a escuchar y cómo está pensada la charla". Suele utilizarse como título de esa parte “organización de la presentación / recorrido propuesto, etc.”. A veces, también al final verán que algunos expositores retoman esa misma diapositiva para sintetizar lo hablado. También se puede vislumbrar el final de la charla con un “a modo de cierre / para finalizar / reflexiones…”.

- **Bibliografía:** a veces se incluye, pero, en general, suele no leerse. Desde nuestra mirada, es más interesante que la pidan.
- **Para quienes exponen por primera vez:** sugerimos practicar, grabarse, tomarse el tiempo. Esto permite advertir que, si no hay modo de decir todo respetando los tiempos, será necesario recortar, ajustar la presentación y volver a practicar.

A modo de cierre

Si el lector llegó hasta aquí esperamos que se haya llevado elementos que le resulten útiles para pensar en la enseñanza de la matemática y para iniciar la investigación educativa. Seguramente haya advertido que nuestra intención fue ofrecer lineamientos generales y dar pautas y criterios para pensar y reflexionar sobre la tarea del profesor. ¡No hay recetas!, justamente porque el profesor ejerce una tarea profesional para la cual su formación debe brindarle elementos para pensar, decidir, justificar y cambiar.

Lo mejor que nos puede pasar como docentes es estar atentos para ver cómo funcionan nuestras propuestas y tener herramientas para sostener decisiones o para cambiarlas con fundamentos, trascendiendo el sentido común. Invitamos a los docentes o futuros docentes a mejorar este texto, a estudiar, poner a prueba y reflexionar sobre lo discutido aquí, y probablemente en un tiempo habrán generado pautas y criterios que nos permitan seguir creciendo en la apasionante tarea de lograr que nuestros estudiantes aprendan matemática.

Anexo
El *Negro* Castillo

Por Mabel Rodríguez[*]

Cursaba el cuarto año del bachillerato común en "el Dorrego", una escuela pública de Morón, en el año 1981. La escuela tenía la fama de ser "la mejor de la zona". Para entrar había que rendir un examen de ingreso riguroso o tener un hermano mayor que ya fuera estudiante. Por suerte, este último fue mi caso.

Al término del tercer año, el colegio hacía un listado con los promedios de los estudiantes, ordenados de mayor a menor, y le daba a cada estudiante, en ese orden, la opción de elegir la orientación con la que terminaría la secundaria. Las opciones eran las orientaciones al bachillerato: orientación común, pedagógica, social o deportiva. Era sabido que, en general, los estudiantes más aplicados se concentraban en el bachillerato común, y los que preferían rehuirle al estudio, en el deportivo. En mi caso, era buena alumna, nunca me había llevado materias y tenía un promedio aceptable, pero no sabía qué estudiaría al terminar el nivel medio, y mis mejores amigos iban a elegir "el común", así que, considerando esta razón suficiente, elegí 4° 1°, orientación común. Tal como la tradición lo anticipaba, el curso se había conformado con muy buenos estudiantes, es así que nos enorgullecía que Cecilia, la abanderada, y Raúl y María Julia, ¡los dos escoltas!, fueran de nuestro curso.

[*] Años más tarde de terminar la secundaria me recibí de licenciada y doctora en Matemática.

Con el tiempo nos fuimos conociendo, y la división era un ejemplo de diversidad en todos los aspectos: había compañeros de distintas religiones; algunos eran de familias muy adineradas, otros vivían al día y sus familias apostaban a que sus hijos progresaran (para ellos, el estar en ese curso era un buen anticipo); algunos compañeros aprendían rápido, no necesitaban estudiar fuera de clase; otros, en cambio, le dedicaban horas al estudio y a cumplir con las tareas. Éramos hijos de profesionales, de empleados o de obreros.

El clima era agradable, aunque con el tiempo se fueron formando grupos más cerrados, e incluso, al año siguiente, la división se transformó, literalmente, en una auténtica "división"; se formaron dos grupos, y éramos pocos los que nos manteníamos en el medio, en una posición más bien neutral.

Desde antes de llegar a tercero, diría desde que empezamos primer año, circulaban rumores sobre algunos profesores; el *Negro* Castillo era uno de ellos. Su nombre[1] y su sobrenombre inundaban los pasillos. Corrían las anécdotas, era renombrado, temido y padecido. Era el profesor de Matemática. Vestía saco, corbata, tenía el pelo corto, usaba anteojos y llevaba maletín, y su ropa estaba impregnada de un infinito olor a tabaco. Tenía un ojo medio desviado. Se decía que había sido boxeador. Nunca supimos si lo del ojo había tenido que ver o no con el boxeo, nosotros suponíamos que sí. El primer día de clase nos comunicó sus reglas, aunque no hacía falta; los rumores eran absolutamente fieles. Por ejemplo, no admitía que ningún estudiante entrara al aula después de él. Recuerdo el caso de Edgardo, un compañero que un día llegó al aula cuando Castillo estaba firmando el libro. El profesor estaba de pie, encorvado sobre el escritorio, y levantó la mirada sin erguirse. Edgardo no llegó a su asiento, Castillo lo mandó a la preceptoría y recibió cinco amonestaciones. No recuerdo otro caso en todo el año. El recreo anterior a la hora de Matemática siempre lo hacíamos más corto; todos estábamos en el aula antes de que Castillo entrara.

Uno de los motivos para "padecerlo", según nos habían avisado los compañeros que tenían hermanos más grandes, era que Castillo "tomaba pruebas sorpresa". Pero no sabíamos cuántas, solo que eran muchas. Cuando llegaba "el día", siempre repetía el mismo esquema: entraba al aula, saludaba y, medio sonriente, decía "saquen una hojita". Los minutos previos a su llegada al aula siempre eran paralizantes; el curso estaba expectante: "¿hoy nos tomará…?". Respirábamos cuando empezaba con la clase. Cuando comenzamos a conocerlo descubrimos, creo que por mera coincidencia, que siempre que nos tomaba

[1] Jorge Prudencio del Castillo (qepd).

prueba venía con el mismo saco a cuadritos marrón. Ese indicio nos alertaba y mantenía en vilo aún más, desde las horas anteriores a la nuestra.

Recuerdo las clases de álgebra. Después de saludarnos y de que nosotros dejáramos de temblar una vez que confirmábamos que ese día no habría prueba, empezaba la clase. Muy prolijamente y con una letra con ciertos arabescos que la hacían inimitable, Castillo escribía en el pizarrón, mientras hablaba casi sin darse vuelta. Nosotros no podíamos hacer otra cosa que copiar, ni siquiera podíamos respirar profundo; su ojo desviado nos hacía suponer que, aunque mirara hacia el pizarrón todo el tiempo, tenía un absoluto control de la clase. Ponía título, definiciones y ejemplos. Nosotros copiábamos, con mucho cuidado, para no olvidarnos de ninguna letra, ¡otra que números! Descubrimos que la matemática tiene más letras que números. Copiábamos rápido, no queríamos perdernos de nada. De todas maneras, él dejaba todo escrito en el pizarrón. Pasamos mucho tiempo viendo operaciones con expresiones algebraicas. Sumábamos, multiplicábamos y operábamos en general con expresiones que tenían todas las letras del abecedario. Vimos todos los casos de factoreo, ordenadamente, con ejemplos de cada uno. Sacábamos factores comunes a expresiones que, a duras penas, nos entraban en un renglón. Yo tenía letra chica, así que no tenía problemas.

Hacia el final de la explicación siempre nos preguntaba si habíamos entendido. Yo asentía, para mí era claro, pero entre mis compañeros había de todo: algunos entendían, otros no entendían nada y otros, solo un poco. Ninguno hacía nunca una pregunta; su imagen era tan impactante, imponente, que mantenía distancia, nadie se atrevía. Luego de la explicación escribía largos ejercicios para que copiáramos y empezáramos a resolverlos en la clase; el resto quedaba de tarea.

Tenía dos técnicas para hacer pasar a los estudiantes al pizarrón. Una de ellas era dejar la tiza apoyada sobre el banco del elegido, tras haber deambulado por el curso para decidir quién sería. La otra era, simplemente, preguntar quién quería pasar al pizarrón. La respuesta era… el silencio total. Yo tenía facilidad, los ejercicios me salían y me gustaba hacerlos. Mis compañeros, sobre todo aquellos a quienes no les salía nada, no le entendían nada al profesor o le tenían pánico, me miraban desesperados para que yo levantara la mano y me ofreciera a pasar. Y eso hacía, yo solía pasar. En general hacía bien los ejercicios. Cuando me confundía, Castillo me lo hacía notar en un tono suave, me señalaba dónde tenía que mirar y me daba tiempo para pensar. Entonces arreglaba el error y me volvía a mi banco satisfecha porque había entendido. Me acuerdo de una vez en la que hizo pasar a Luis. Castillo caminaba por los pasillos esperando que Luis terminara de resolver el ejercicio. Le preguntó en tono pícaro: ¿sos demorón? Luis, que estaba atrapado por la regla de los signos y las potencias, le respondió: “no, soy de Haedo”. Nadie entendió su broma por la tensión que había en el aula. Yo, en cambio, sonreí tímidamente. Castillo me miró sonriente y, en complicidad, le respondí con una sonrisa más amplia.

No titubeaba en mandar a diciembre o a marzo. Con el álgebra mandó a muchos. Solía decirnos: “Los que vayan a la universidad se van a acordar de mí. Esto lo tienen que saber, es lo que van a necesitar”. Claro, el comentario iba bien para los que quisieran seguir algo relacionado con las ciencias exactas. Ocurría que, entre mis compañeros, algunos querían estudiar abogacía, música, psicología y otras profesiones no relacionadas con la matemática.

Sus exámenes eran listas larguísimas de ejercicios del mismo tipo de los que habíamos practicado en las clases. Nos ponía más de ocho ejercicios para operar de todas las maneras posibles. Con eso nos mantenía ocupados toda la hora, no alcanzaba el tiempo para copiarse ni preguntarle al de al lado, al margen de que ¡había que tener coraje para copiarse con Castillo! Lo bueno era que él ponía 10 aunque uno no hubiera hecho todo. Si nos había tomado ocho ejercicios y resolvíamos bien seis, ya teníamos un 10. Eso era buenísimo. El 10 no era sinónimo de “perfección”, sino de haber sido capaz de resolver bastante. Además, como a lo largo del trimestre él coleccionaba nuestras notas por las tantas pruebas que nos había tomado, cuando tenía que cerrarlas eliminaba la menor de todas y no la pasaba a la libreta. Eso nos daba un cierto margen para equivocarnos. Mi caso era raro. Yo disfrutaba de esas pruebas, manipulaba letras y símbolos de acá para allá, y así como él coleccionaba nuestras notas, yo coleccionaba 10. Esto no era lo típico. La realidad era que muchos de mis compañeros, buenos estudiantes en general, se iban a marzo o se la llevaban previa, y muchos eran los casos en que la única materia que debían eternamente era… Matemática de 4°.

Quienes se llevaban la materia decían que Castillo “daba todo el programa”, y que este era muy largo. No tengo registro de eso. Nunca vi el programa. Con aprobar sus exámenes era suficiente.

Con el correr de las clases mis compañeros se sorprendían de mí. Recuerdo uno de esos días en los que nadie quería pasar al pizarrón a resolver un ejercicio que tenía paréntesis, corchetes, llaves, potencias… Levanté la mano y pasé. Llené el pizarrón, iba y venía. Terminé, retrocedí un paso, miré todo lo que había hecho y fui directo a un lugar en el que me había olvidado un corchete. Lo agregué y, sonriente, miré a Castillo, quien me felicitó y me mandó a sentar. Es el día de hoy que Julio, un compañero, me lo recuerda admirado. Creo que para muchos de mis compañeros esos "ganchos" y el idioma chino eran la misma cosa.

La matemática me empezó a atrapar. Hacía ejercicios fuera de clase. Me desafiaban y me causaba un placer indescriptible saber que había llegado a la solución correcta. Todos eran diferentes, no había rutina, había que ser creativo para resolver esos ejercicios. No había un único camino, se podía explorar. Castillo no nos exigía un libro de texto en particular, "cualquiera de 4° año sirve", decía. Yo usaba uno viejo que tenía en casa hasta que un día descubrí, en la biblioteca de Morón, uno que se llamaba *Los 5.849 ejercicios de álgebra*, o algo así (el número no me lo acuerdo exactamente, pero era de "ese tamaño"). Transité por esos ejercicios de arriba abajo, cotejaba mis respuestas con las que traía, me esforzaba por escribir mi respuesta de la misma forma que proponía el libro, e incluso detectaba en él algún que otro error. Sin dudas prefería eso a estudiar de memoria fechas de batallas y vestimentas de personajes históricos. Algunos compañeros se preguntaban para qué servía todo eso que veíamos en Matemática. Jamás se habrían animado a preguntárselo a Castillo, aunque habría sido interesante escuchar su respuesta. Yo no podría haber respondido, no tenía la menor idea de para qué servía todo eso que, a la vez, disfrutaba hacer. No podía imaginarle utilidad, pero tampoco me preocupaba no encontrársela.

La colección Educación de la Universidad Nacional de General Sarmiento reúne la producción editorial que resulta de las investigaciones, actividades y desarrollos en las áreas temáticas de educación, pedagogía, programación de la educación, política educativa, historia de la educación y didáctica. Estas líneas de investigación y docencia son fundamentales en el proyecto académico de la UNGS y tienen un desarrollo constante y permanente.

Este libro aborda dos interrogantes de gran interés en la educación matemática: qué cuestiones considerar para planificar y gestionar la enseñanza de la matemática y qué herramientas metodológicas son necesarias para realizar los primeros pasos en la investigación educativa.

Los elementos ofrecidos para el abordaje de ambas cuestiones resultan útiles tanto para un docente en formación como para un profesor graduado, con mayor o menor experiencia, que se desempeñe en el nivel medio o el superior.

Se presentan cuestiones teóricas y ejemplos que son fruto de investigaciones realizadas en educación matemática por los autores.

Se espera que la presentación del texto, su organización, el discurso utilizado y los ejemplos resulten accesibles y hagan del libro una herramienta útil y de lectura amena.

Colección Educación

Universidad Nacional de General Sarmiento

LUA Libro Universitario Argentino

ISBN 978-987-630-637-9

9 789876 306379