

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Estudio poliedral del problema de coloreo acíclico

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad
Nacional de General Sarmiento

Autor: **Mónica Braga**

Director: Javier Marengo

Fecha: 24 de noviembre de 2015

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

FORMULARIO "E" TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor

El autor de la tesis puede elegir entre las siguientes posibilidades para autorizar a la UNGS a difundir el contenido de la tesis: __a)__

- a) Liberar el contenido de la tesis para acceso público.*
- b) Liberar el contenido de la tesis solamente a la comunidad universitaria de la UNGS:*
- c) Retener el contenido de la tesis por motivos de patentes, publicación y/o derechos de autor por un lapso de cinco años.*

- a. Título completo del trabajo de Tesis: Estudio poliedral del problema de coloreo acíclico
- b. Presentado por: Braga Mónica Andrea
- c. E-mail del autor: mbraga@ungs.edu.ar
- d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en Ciencia y Tecnología.
- e. Institución o Instituciones que dictaron el Posgrado: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- f. Para recibir el título de:
 - a) Grado académico que se obtiene: Doctor
 - b) Nombre del grado académico: Doctor en Ciencia y Tecnología.
- g. Fecha de la defensa: 24 / 11 / 2015
 día mes año
- h. Director de la Tesis: Marengo Javier.
- i. Tutor de la Tesis:
- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Diego Delle Donne.
- k. Descripción física del trabajo de Tesis: Cantidad de páginas: 117 (111 corresponden a la tesis); Imágenes: 22.
- l. Alcance geográfico y/o temporal de la Tesis:
- m. Temas tratados en la Tesis: coloreo acíclico; combinatoria poliedral.
- n. Resumen en español:

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Un *coloreo* de un grafo es una asignación de colores a sus vértices de modo tal que todo par de vértices adyacentes recibe colores distintos. Un *coloreo acíclico* de un grafo es un coloreo tal que ningún ciclo del grafo recibe exactamente dos colores, y el *número cromático acíclico* $\chi_A(G)$ de un grafo G se define como el número mínimo de colores necesarios para garantizar la existencia de un coloreo acíclico de G . Dado un grafo G , el *problema de coloreo acíclico* consiste en hallar un coloreo acíclico de G con $\chi_A(G)$ colores. Este problema surge en el contexto de la implementación de algoritmos eficientes para el cálculo de matrices Hessianas poco densas y simétricas a través de métodos de sustitución.

Dado un grafo G y un entero k , el problema de determinar si $\chi_A(G) \leq k$ es un problema NP-completo, con lo cual no se conocen algoritmos eficientes (es decir, polinomiales en el tamaño de G) para este problema. En particular, el problema de determinar si $\chi_A(G) \leq 3$ es NP-completo.

Una técnica que suele ser exitosa para la resolución computacional de problemas de optimización combinatoria es el planteo de algoritmos basados en planos de corte, sobre la base de una formulación del problema como un modelo de programación lineal entera. Este enfoque involucra el estudio de la cápsula convexa de las soluciones factibles del modelo planteado, buscando familias de desigualdades válidas que puedan ser incorporadas en un algoritmo de este tipo. Dado que este enfoque resultó útil para muchos otros problemas, en esta tesis se comienza este estudio para el problema de coloreo acíclico.

En esta tesis se introduce un modelo de programación lineal entera para el problema de coloreo acíclico y se estudian sus propiedades. Se analiza la dimensión de la cápsula convexa de las soluciones factibles y, sobre esta base, se estudian desigualdades válidas y se analizan sus propiedades. Se presentan familias de desigualdades válidas basadas en ciclos y cliques del grafo, y se prueba bajo qué condiciones estas desigualdades definen facetas del poliedro cápsula convexa asociado con la formulación. Se muestra que todas las desigualdades presentadas en este trabajo definen facetas bajo condiciones generales.

Se estudia además el rango disyuntivo de las familias de desigualdades presentadas en este trabajo, asociado al operador BCC definido por Balas, Ceria y Cornuéjols. Se propone en esta tesis un concepto complementario al de rango disyuntivo, llamado *anti-rango disyuntivo* de una desigualdad válida. Este parámetro es de interés como medida teórica de la calidad de la desigualdad, y se estudian los anti-rangos disyuntivos de las desigualdades presentadas en este trabajo.

o. Resumen en portugués:

Resumo

Uma coloração de um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices tais que quaisquer dois vértices adjacentes recebem distintas cores. Uma coloração acíclica é uma coloração de tal modo que nenhum ciclo recebe exatamente duas cores, e o número cromático acíclico $\chi_A(G)$ de um grafo G é o número mínimo de cores em qualquer coloração acíclica de G . O problema de coloração acíclica surge no contexto do cálculo da matriz Hessiana através de

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

métodos de substituição. Dado um grafo G e um inteiro k , determinar se $XA(G) \leq k$ é NP-completo, mesmo para $k = 3$, de modo tal que não são conhecidos algoritmos eficientes (isto é, polinomiais no tamanho de G) para este problema.

A abordagem geralmente bem-sucedida para a solução de problemas de otimização combinatória, na prática, é a implementação de algoritmos baseados em planos de corte, com base em uma formulação de programação inteira do problema. Este método envolve o estudo do convex hull de todas as soluções viáveis, procurando desigualdades válidas que possam ser incorporados em um tal algoritmo. Esta abordagem tem atingido sucesso para muitos outros problemas, e nesta tese começamos essa análise para o problema de coloração acíclica.

Introduzimos um modelo de programação inteira para o problema de coloração acíclica e estudamos suas propriedades. Analisamos a dimensão do convex hull de todas as soluções viáveis e, com base nesse resultado, exploramos desigualdades válidas e analisamos suas propriedades. Apresentamos várias famílias de desigualdades válidas baseadas em ciclos e cliques no grafo, e procuramos condições que garantem que estas desigualdades definem facetas. Mostramos que todas as desigualdades introduzidas nesta tese definem facetas sob condições bastante gerais. Estudamos também o rango disjuntivo das famílias de desigualdades válidas apresentadas neste trabalho, associado com o operador BCC definido por Balas, Ceria, e Cornuéjols. Propomos nesta tese um parâmetro complementar, chamado de anti-rank disjuntivo de uma desigualdade válida. Este parâmetro é de interesse como uma medida teórica da força de uma desigualdade, e estudamos os anti-rangos das desigualdades apresentadas neste trabalho.

p. Resumen en inglés:

Abstract

A coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices such that any two vertices receive distinct colors whenever they are adjacent. An acyclic coloring is a coloring such that no cycle receives exactly two colors, and the acyclic chromatic number $XA(G)$ of a graph G is the minimum number of colors in any such coloring of G . The acyclic coloring problem arises in the context of efficient computations of sparse and symmetric Hessian matrices via substitution methods.

Given a graph G and an integer k , determining whether $XA(G) \leq k$ or not is NP-complete even for $k=3$, so no efficient algorithms (i.e., polynomial in the size of G) are known for this problem. In particular, the problem of determining whether $XA(G) \leq 3$ is NP-complete.

A usually-successful approach for solving combinatorial optimization problems in practice is the implementation of cutting-plane-based algorithms, based on an integer programming formulation of the problem. This method involves studying the convex hull of all feasible solutions, searching for valid inequalities that may be incorporated in such an algorithm. Since this approach has been very successful for many other problems, in this thesis we start such analysis for the acyclic coloring problem.

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluable y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

We introduce an integer programming model for the acyclic coloring problem and we study its properties. We analyze the dimension of the convex hull of all feasible solutions and, based on this result, we explore valid inequalities and analyze their properties. We present several families of valid inequalities based on cycles and cliques in the graph, and we prove conditions ensuring facetness. We show that all the inequalities introduced in this thesis are facet-defining under quite general conditions.

We also study the disjunctive rank of the families of valid inequalities presented in this work, associated with the BCC operator defined by Balas, Ceria, and Cornuéjols. We propose in this thesis a complementary parameter, called the *disjunctive anti-rank* of a valid inequality. This parameter is of interest as a theoretical measure of the strength of an inequality, and we study the anti-ranks of the inequalities presented in this work.

q. Aprobado por (Apellidos y Nombres del Jurado):

Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

Firma del autor de la tesis:

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGIA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).
Resolución N° 1178/11. Calificación "B".

Estudio poliedral del problema de coloreo acíclico

Publicaciones:

Publicaciones en revistas internacionales

- Braga M., Delle Donne D. y Marengo J., *A polyhedral study of the acyclic coloring problem*. Discrete Applied Mathematics 160 (2012) 2606--2617.
- Braga M. y Marengo J., *Exploring the disjunctive rank of some facet-inducing inequalities of the acyclic coloring polytope*. Enviado a RAIRO, en 3ra ronda de revisión.

Abstracts extendidos

- Braga M. y Marengo J., *Cycle-based facets of the acyclic coloring*. Proceedings of the VIII ALIO/EURO Workshop on Applied Combinatorial Optimization (2014).
- Braga M. y Marengo J., *Disjunctive ranks and anti-ranks of some facet-inducing inequalities of the acyclic coloring polytope*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 37 (2011) 213--218.
- Braga M. y Marengo J., *A polyhedral study of the acyclic coloring problem*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 35 (2009) 35--40.

Aportes Originales:

Se realiza en esta tesis un estudio del problema de coloreo acíclico, que surge en el contexto de la optimización no lineal con grandes números de variables. Se introduce un modelo de programación lineal entera para este problema (Capítulo 1) y se estudia el poliedro asociado con esta formulación. Se identifican propiedades generales como su dimensión, un sistema minimal de ecuaciones y las propiedades de facetitud de las restricciones del modelo (Capítulo 2). Se presentan ocho familias de desigualdades válidas basadas en ciclos y seis familias de desigualdades válidas basadas en ciclos y cliques del grafo. Se proporcionan condiciones bajo las cuales estas desigualdades definen facetas del poliedro bajo estudio, siendo en algunos casos condiciones necesarias y suficientes (Capítulos 3 y 4). Se estudia el rango disyuntivo de estas familias de desigualdades, definiendo y estudiando también una medida simétrica, que en esta tesis se propone denominar "anti-rango disyuntivo" (Capítulo 5). Finalmente, se presentan experimentos computacionales que analizan la calidad empírica de las desigualdades válidas halladas en el trabajo (Capítulo 6).

Estudio poliedral del problema de Coloreo acíclico

Tesista: Mónica Braga

Director: Javier Marengo

Universidad Nacional de General Sarmiento

Instituto de Ciencias

Noviembre 2015

A mi familia, que amo con toda mi alma.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi director Javier Marengo, por ayudarme a cumplir un sueño, por motivarme, guiarme y alentarme, por su generosidad intelectual, por tenerme tanta paciencia y ser tan buena persona. Mi agradecimiento es infinito!

A mis primeros amores, mi mamá Nelly y mi hermana Graciela, por ayudarme y apoyarme, por estar siempre y quererme tanto. A mi papá José María, que sé que está cerca de nosotros.

A mis grandes amores, mi esposo César y mis hijos Caro y Fede, por alentarme en todo momento, por confiar en mí, por su paciencia infinita y por hacerme tan feliz. A mis nuevos amores, Maru y Marian, por acompañarme y hacer felices a las personas que más quiero en el mundo.

A mi más tierno amor, mi nieto Ezequiel, por convertirme en ABUELA, por llenar mi corazón de emociones fuertes, por darme un nuevo impulso y energía, por dejarme derrochar mimos y regalarme día a día ese hermoso concierto de sonrisas... Te amo con toda mi alma!

A mis compañeros del Seminario de optimización: Daniel Negrotto, Diego Delle Donne, Ivo Koch, Javier Marengo, Javier Martínez Viademonte, Judith Faifman, Manuela Blaum, Marcelo Bianchetti, Marcelo Mydlarz, Martín Pustilnik, Ricardo Di Pasquale y Sebastián Guala, por sus aportes y consejos, por ayudarme en los momentos difíciles y por lograr que los encuentros sean un justo equilibrio entre lo académico, la camaradería y la excelencia culinaria. En especial quiero agradecer a Diego, por compartir sus ideas y conocimientos, por nuestras conversaciones tan fructíferas (académicas y de la vida), por su paciencia y por ayudarme siempre. A Javier MV, por sus charlas enriquecedoras y por estar siempre dispuesto a ayudarme. A Adriana Gaudiani y Santiago Montiel, por escucharme y tener siempre palabras de aliento.

A mis docentes, por todo lo que me enseñaron y ayudaron a superarme cada día.

A los jurados, por tomarse el tiempo para leer esta tesis y aportar con valiosos comentarios.

A todos los que trabajan en el Instituto de Ciencias de la Universidad de General Sarmiento, por generar un gran clima de trabajo. En especial quiero agradecer a Martín Safe, por hacer hasta lo imposible para ayudarme a alcanzar mi objetivo. A mis alumnos, por sus infinitas muestras de afecto.

Finalmente quiero agradecer a mis amigos del alma, Ana, Carol, Sandra, Duncan, Miguel y Toto, que siempre confiaron en mí y me ayudaron con sus palabras más de lo que se imaginan.

Resumen

Un *coloreo* de un grafo es una asignación de colores a sus vértices de modo tal que todo par de vértices adyacentes recibe colores distintos. Un *coloreo acíclico* de un grafo es un coloreo tal que ningún ciclo del grafo recibe exactamente dos colores, y el *número cromático acíclico* $\chi_A(G)$ de un grafo G se define como el número mínimo de colores necesarios para garantizar la existencia de un coloreo acíclico de G . Dado un grafo G , el *problema de coloreo acíclico* consiste en hallar un coloreo acíclico de G con $\chi_A(G)$ colores. Este problema surge en el contexto de la implementación de algoritmos eficientes para el cálculo de matrices Hessianas poco densas y simétricas a través de métodos de sustitución.

Dado un grafo G y un entero k , el problema de determinar si $\chi_A(G) \leq k$ es un problema NP-completo, con lo cual no se conocen algoritmos eficientes (es decir, polinomiales en el tamaño de G) para este problema. En particular, el problema de determinar si $\chi_A(G) \leq 3$ es NP-completo.

Una técnica que suele ser exitosa para la resolución computacional de problemas de optimización combinatoria es el planteo de algoritmos basados en planos de corte, sobre la base de una formulación del problema como un modelo de programación lineal entera. Este enfoque involucra el estudio de la cápsula convexa de las soluciones factibles del modelo planteado, buscando familias de desigualdades válidas que puedan ser incorporadas en un algoritmo de este tipo. Dado que este enfoque resultó útil para muchos otros problemas, en esta tesis se comienza este estudio para el problema de coloreo acíclico.

Se introduce un modelo de programación lineal entera para el problema de coloreo acíclico y se estudian sus propiedades. Se analiza la dimensión de la cápsula convexa de las soluciones factibles y, sobre esta base, se estudian desigualdades válidas y se analizan sus propiedades. Se presentan familias de desigualdades válidas basadas en ciclos y cliques del grafo, y se prueba bajo qué condiciones estas desigualdades definen facetas del poliedro cápsula convexa asociado con la formulación. Se muestra que todas las desigualdades presentadas en este trabajo definen facetas bajo condiciones generales.

Se estudia además el rango disyuntivo de algunas de las familias de desigualdades presentadas en este trabajo, asociado al operador BCC definido por Balas, Ceria y Cornuéjols. Se propone en esta tesis

un concepto complementario al de rango disyuntivo, llamado *anti-rango disyuntivo* de una desigualdad válida. Este parámetro es de interés como medida teórica de la calidad de la desigualdad, y se estudian los anti-rangos disyuntivos de las desigualdades estudiadas anteriormente.

Abstract

A *coloring* of a graph is an assignment of colors to its vertices such that any two vertices receive distinct colors whenever they are adjacent. An *acyclic coloring* is a coloring such that no cycle receives exactly two colors, and the *acyclic chromatic number* $\chi_A(G)$ of a graph G is the minimum number of colors in any such coloring of G . The acyclic coloring problem arises in the context of efficient computations of sparse and symmetric Hessian matrices via substitution methods.

Given a graph G and an integer k , determining whether $\chi_A(G) \leq k$ or not is NP-complete even for $k = 3$, so no efficient algorithms (i.e., polynomial in the size of G) are known for this problem. In particular, the problem of determining whether $\chi_A(G) \leq 3$ is NP-complete.

A usually-successful approach for solving combinatorial optimization problems in practice is the implementation of cutting-plane-based algorithms, based on an integer programming formulation of the problem. This method involves studying the convex hull of all feasible solutions, searching for valid inequalities that may be incorporated in such an algorithm. Since this approach has been very successful for many other problems, in this thesis we start such analysis for the acyclic coloring problem.

We introduce an integer programming model for the acyclic coloring problem and we study its properties. We analyze the dimension of the convex hull of all feasible solutions and, based on this result, we explore valid inequalities and analyze their properties. We present several families of valid inequalities based on cycles and cliques in the graph, and we prove conditions ensuring facetness. We show that all the inequalities introduced in this thesis are facet-defining under quite general conditions.

We also study the disjunctive rank of some of the families of the valid inequalities presented in this work, associated with the BCC operator defined by Balas, Ceria, and Cornuéjols. We propose in this thesis a complementary parameter, called the *disjunctive anti-rank* of a valid inequality. This parameter is of interest as a theoretical measure of the strength of an inequality, and we study the anti-ranks of the inequalities studied before.

Tabla de contenidos

Resumen	I
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Problema de coloreo acíclico	1
1.2. Motivación	2
1.3. Trabajos previos	3
1.4. Modelo de programación entera	6
1.5. Contenido de la tesis	8
2. Propiedades generales del poliedro de coloreo acíclico	11
2.1. Dimensión	11
2.2. Propiedades de la formulación	12
2.3. Análisis de las restricciones del modelo	14
3. Desigualdades válidas que involucran una cantidad fija de colores	19
3.1. Desigualdades two-color	19
3.2. Desigualdades reinforced two-color	31
3.3. Desigualdades semicycle weighted color	34
3.4. Desigualdades three-color	36
3.5. Desigualdades four-consecutive vertices	37
4. Desigualdades válidas que involucran conjuntos de colores	39
4.1. Desigualdades distinguished colors	39
4.2. Desigualdades three-consecutive vertices	40

4.3. Desigualdades prominent vertex	44
4.4. Desigualdades basket	45
5. Estudio de rangos disyuntivos	49
5.1. El operador BCC	50
5.2. Rango y anti-rango disyuntivo de desigualdades conocidas	53
5.2.1. Desigualdades two-color	53
5.2.2. Desigualdades distinguished colors	56
5.2.3. Desigualdades prominent vertex	61
5.2.4. Otras familias de desigualdades válidas	70
6. Experimentos computacionales	73
6.1. Marco empírico	73
6.2. Resultados sobre instancias de alta densidad	76
6.3. Resultados sobre instancias de mediana densidad	78
7. Conclusiones	81
7.1. Trabajos futuros	82
A. Conceptos básicos	85
A.1. Teoría de grafos	85
A.2. Teoría poliedral	86
A.3. Complejidad computacional	87
B. Herramientas computacionales	89
B.1. PORTA	89
B.2. Problema de programación lineal	90
B.3. <i>lrs</i>	90

Capítulo 1

Introducción

1.1. Problema de coloreo acíclico

Un *coloreo* de un grafo G es una asignación de colores a los vértices de G de forma tal que dos vértices adyacentes reciben distinto color. Un *coloreo acíclico* de un grafo es un coloreo tal que ningún ciclo de G recibe exactamente dos colores, i.e., el subgrafo de G inducido por dos clases de colores cualesquiera es acíclico. Por ejemplo, la Figura 1.1 muestra un grafo y una asignación de colores a sus vértices que define un coloreo. Este coloreo utiliza dos colores y por lo tanto no es acíclico, dado que todos los ciclos del grafo reciben exactamente dos colores. La Figura 1.2, en cambio, muestra un coloreo acíclico del grafo. Todos los ciclos del grafo reciben en este caso exactamente tres colores, y por lo tanto el coloreo es acíclico. En cualquier coloreo de un grafo los ciclos impares reciben al menos tres colores, con lo cual alcanza con chequear las condiciones de aciclicidad para los ciclos pares.

El *número cromático acíclico* $\chi_A(G)$ de un grafo G es el mínimo número de colores necesarios para obtener un coloreo acíclico de G . Por ejemplo, el grafo G de la Figura 1.2 tiene $\chi_A(G) = 3$. Dado

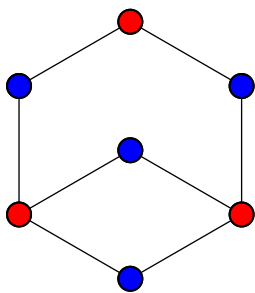


Figura 1.1: Coloreo.

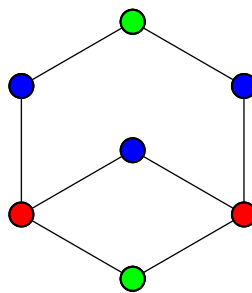


Figura 1.2: Coloreo acíclico.

un grafo G , el *problema de coloreo acíclico* consiste en hallar $\chi_A(G)$, y este problema es NP-hard [44]. Incluso determinar si el número cromático acíclico de un grafo es a lo sumo 3 es un problema NP-completo [70], de la misma forma que sucede para el número cromático clásico.

1.2. Motivación

El problema de coloreo acíclico surge naturalmente como modelo de optimización combinatoria en el contexto de la resolución de problemas de partición de matrices (ver, por ejemplo, [44, 45, 55, 56, 58, 59]). Muchos algoritmos para resolver problemas de optimización numérica y sistemas de ecuaciones no lineales requieren la estimación de la matriz Jacobiana o Hessiana asociada al problema.

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la *matriz Hessiana* de f en x es la matriz cuadrada $H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de las segundas derivadas parciales de f , donde el elemento h_{ij} de la matriz es $h_{ij} = \nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x)$. Esta matriz es generalmente simétrica y, cuando resulta de problemas con un gran número de variables, habitualmente es poco densa. Aprovechando esta estructura de las matrices, es posible reducir en forma significativa las evaluaciones de la función necesarias para calcular H , acortando así el tiempo de ejecución y el uso de memoria para este cálculo.

El problema de minimizar el número de evaluaciones necesarias para estimar dicha matriz se puede formular como un problema de coloreo acíclico [44]. Asumimos que conocemos las coordenadas de los elementos no nulos de la matriz, pero no sus valores. Con estos datos se construye un grafo G cuyos vértices representan las columnas de la matriz y dos vértices i, j serán adyacentes si el elemento ij de la matriz es no nulo (Figura 1.3). Sea $\mathcal{P} = \{C_1, \dots, C_k\}$ una partición de las columnas de H y, para cada $i = 1, \dots, k$, llamamos $d_i \in \{0, 1\}^n$ al vector característico de C_i . Es decir, la j -ésima coordenada de d_i es 1 si y sólo si $j \in C_i$, para $j = 1, \dots, n$. Decimos que \mathcal{P} es *sustituible* si $H \times (d_1, \dots, d_k)$ es una matriz triangular, y por lo tanto un sistema de ecuaciones sobre esta matriz se puede resolver por el método de sustitución.

En [55] se prueba que un coloreo acíclico de G corresponde a una partición sustituible de H y viceversa, donde los colores corresponden a los grupos de la partición (ver Figura 1.3). Más aún, una partición sustituible con el mínimo número de grupos está dada por un coloreo acíclico con la menor cantidad de colores. Por este motivo, es de interés contar con métodos para resolver el problema de coloreo acíclico en la práctica, y el objetivo de esta tesis es realizar una contribución en esta dirección.

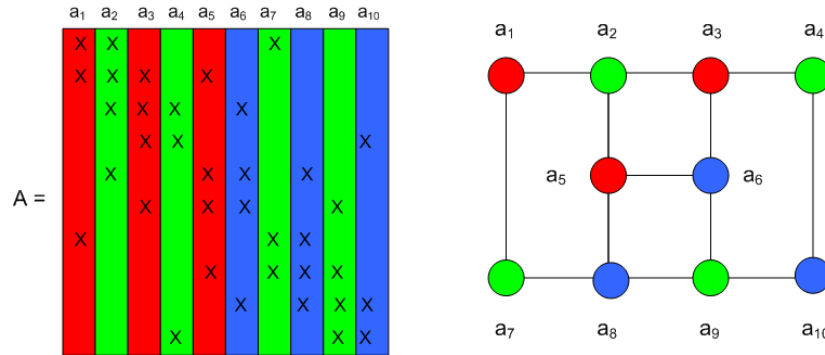


Figura 1.3: Partición sustituible de las columnas de la matriz simétrica y su representación como coloreo acíclico del grafo de adyacencia asociado.

1.3. Trabajos previos

El problema de coloreo acíclico fue introducido por Grünbaum en 1973 [60], como una generalización de la noción de *point arboricity*. En este trabajo se prueba que un grafo con grado máximo 3 tiene un coloreo acíclico con 4 colores. En [34], Burnstein probó que un grafo con grado máximo 4 tiene un coloreo acíclico con 5 colores. En [52] se demostró que un grafo con grado máximo 5 tiene un coloreo acíclico con a lo sumo 9 colores. En [110] se mejoró esta cota a 8 colores y en [72] a 7 colores. En [106] se demostró que un grafo con grado máximo 6 tiene un coloreo acíclico con a lo sumo 12 colores. Esta cota fue mejorada por Hocquard a 11 colores [61].

Un resultado general fue presentado en [7], donde se demostró que todo grafo G con grado máximo Δ tiene $\chi_A(G) \leq 50\Delta^{\frac{4}{3}}$. Además, existen grafos con $\chi_A(G) = \Omega(\Delta^{\frac{4}{3}}/(\log \Delta)^{\frac{1}{3}})$. Cai et al. [35] demostraron que el número cromático acíclico de los grafos con grado máximo $\Delta \geq 4$ y *girth* (la longitud del ciclo simple más corto en el grafo) $g \geq 4\Delta$, es lineal en su grado máximo, donde $\chi_A(G) \leq 12\Delta$. Fertin y Raspaud [51] demostraron que un grafo con grado máximo $\Delta \geq 5$ se puede colorear acíclicamente con $\Delta(\Delta - 1)/2$ colores si Δ es par, y con $\Delta(\Delta - 1)/2 - 1$ colores en caso contrario.

Gebremedhin et al. demostraron que todo coloreo propio de un grafo cordal es también un coloreo acíclico [59]. Dado que los grafos cordales pueden colorearse de manera óptima en tiempo polinomial, también se los puede colorear acíclicamente en tiempo polinomial.

El *genus* (o género) de un grafo G es el mínimo número natural n tal que G puede representarse sin cruces en una superficie de género n . Esto equivale al mínimo número de “manijas” o *handles* que hay que agregar a la esfera para que el grafo pueda ser dibujado sin que sus aristas se crucen. Por lo tanto, un grafo planar tiene genus 0.

Grünbaum [60] demostró que todo grafo planar tiene un coloreo acíclico con 9 colores y conjeturó que tiene un coloreo acíclico con a lo sumo 5 colores [60]. La validez de esta conjetura fue demostrada por Borodin en 1979 [19]. Previamente, Mitchem demostró en 1974 que los grafos planares se pueden colorear acíclicamente con 8 colores [90], Albertson y Berman con 7 colores [4] y Kostochka con 6 colores [69]. Adicionalmente, se probó en [30] que todo grafo planar con girth $g \geq 5$ tiene número cromático acíclico $\chi_A(G) \leq 4$; y si $g \geq 7$, entonces $\chi_A(G) \leq 3$.

Albertson y Berman demostraron en [3, 5] que todo grafo con genus mayor a 0 puede colorearse acíclicamente con $4n + 4$ colores. Alon et al. mejoraron esta cota en [8].

Un grafo es 1-planar si puede ser graficado en un plano de manera tal que cada arista cruce a lo sumo una vez otra arista. El número cromático acíclico de todo grafo 1-planar es a lo sumo 20 [29].

Una *subdivisión* de un grafo G consiste en reemplazar cada arista de G por un camino. A los vértices internos del camino se los llama *vértices de la división* (*division vertices*). Wood demostró en [109] que todo grafo tiene una subdivisión con dos vértices por arista que es acíclicamente 3-coloreable. Angelini y Frati [9] demostraron que todo grafo planar de n vértices tiene una subdivisión de un vértice por arista que es acíclicamente 3-coloreable donde el número total de vértices de la división es a lo sumo $3n - 6$. Mondal et al. [91] demostraron que todo grafo planar triangulado con n vértices tiene una subdivisión de a lo sumo un vértice por arista que es acíclicamente 4-coloreable con un total de vértices de la división de a lo sumo $2n - 6$. En [92] demostraron que estos grafos tienen una subdivisión de a lo sumo un vértice por arista que es 3-coloreable acíclicamente con una cantidad de vértices de la división de a lo sumo $2, 75n - 6$. En [93] se mejoraron estas cotas, probando que todo grafo planar tiene una subdivisión de 1 vértice que es 3-coloreable acíclicamente (respectivamente 4-coloreable), donde el número de los vértices de la división es a lo sumo $2n - 5$ (respectivamente $n - 3$).

Un *coloreo estrella* (*star coloring*) de un grafo es un coloreo en el cual ningún camino de longitud 3 del grafo G está coloreado con exactamente dos colores. Si $\chi_A(G) \leq k$, entonces $\chi_S(G) \leq k2^{k-1}$ [53], donde $\chi_S(G)$ denota el mínimo número de colores necesarios para obtener un coloreo estrella de G . Posteriormente esta restricción se mejoró en [6], demostrando que $\chi_S(G) \leq \chi_A(G)(2\chi_A(G) - 1)$.

Existen resultados adicionales que relacionan el coloreo acíclico y el coloreo estrella para ciertas clases de grafos, incluyendo grafos trivialmente perfectos y cografos [80]; cografos [81]; grafos centrales, medianos y totales de los grafos *bi-star* [11]; grafos centrales, medianos, totales y de líneas de los grafos *double star* [10]; y los grafos corona de $P_n \odot K_2$ [100]. También se obtuvieron numerosos resultados sobre estos coloreos en grafos construidos a partir de ciertas operaciones, como el producto cartesiano de caminos [50], árboles [66], ciclos [64] y grafos completos [65], y el *join* de grafos [79].

Un *coloreo no-repetitivo* de un grafo es un coloreo f en el cual no existe un entero $r \geq 1$ y un

camino simple v_1, \dots, v_{2r} tal que $f(v_i) = f(v_{i+r})$ para todo $i = 1, \dots, r$. En [47] se demostró que todo coloreo acíclico de un cografo es también no-repetitivo.

El *número cromático dirigido* (*oriented chromatic number*), de un grafo dirigido \vec{G} es el menor número de vértices en un grafo dirigido \vec{H} para el cual existe un homomorfismo de \vec{G} a \vec{H} . El número cromático dirigido $\chi_o(G)$ de un grafo no dirigido G es el máximo de los números cromáticos dirigidos de todas las posibles orientaciones de G . En [71] se estableció una cota superior del número cromático acíclico de un grafo G en términos del dirigido y en [101] una cota inferior del número cromático dirigido en términos del acíclico. En [99] se demostró una cota para el número cromático para el (n, m) -coloreo dirigido de un grafo G mixto (con n colores para colorear los arcos y m para las aristas), en función del número cromático acíclico del grafo subyacente no dirigido.

En [98] se relaciona el número cromático acíclico de un grafo G con el número cromático de todos sus menores (*minors*). Un *minor* de un grafo G se obtiene aplicando una secuencia de contracciones de aristas a un subgrafo de G .

Se conoce el número cromático acíclico para algunas clases de grafos, incluyendo el grafo central del grafo Dutch-Windmill, grafo Sunlet y grafos corona [104]; grafo central del grafo Gear [13]; grafos centrales de ciclos, bipartitos completos y grafos completos [12]; grafos medianos, centrales y totales de los grafos Helm [14]; grafos medianos, centrales y totales de los grafos estrella [105].

También se hallaron algoritmos polinomiales que obtienen el coloreo acíclico óptimo para ciertas clases de grafos: (even-hole, diamond)-free, trivialmente perfectos y cografos [80]; grafo central de los grafos Gear [13]; los cografos [79, 81]; P_4 -tidy y $(q, q - 4)$ -grafos [37, 76]; grafos distance hereditary y grafos con una descomposición split de ancho acotado [47].

Un *L-coloreo* de un grafo G es un coloreo válido tal que cada vértice recibe un color de su lista de colores asociada. Un grafo es *k-coloreable por listas* si existe un *L-coloreo* para cualquier asignación de una lista de k colores a cada uno de sus vértices.

En [22] Borodin et al. demostraron que todo grafo planar es 7-coloreable acíclicamente por listas. Es decir, si todo vértice v de un grafo planar G tiene una lista de siete colores posibles, entonces se puede obtener un coloreo de G que sea acíclico. Adicionalmente, conjeturaron que todo grafo planar es 5-coloreable acíclicamente por listas. Hasta donde sabemos esta conjetura sigue abierta, si bien se ha verificado para ciertas subclases de grafos planares [24, 40, 43, 96, 111]. Montassier et al. demostraron que esta conjetura es válida para todo grafo con *girth* mayor o igual a 5 [94]. En [96] se probó el mismo resultado para todo grafo planar sin 4-ciclos y 5-ciclos o sin 4-ciclos y 6-ciclos. Zhang y Xu [111] lo demostraron para grafos planares sin 4-ciclos ni 6-ciclos cordales. Chen y Wang [43], para grafos planares sin 4-ciclos ni triángulos a distancia menor a 3. Borodin e Ivanova [24] demostraron que todo

grafo planar es 5-coloreable acíclicamente por listas si no contiene triángulos adyacentes a i -ciclos con $3 \leq i \leq 5$, ni 4-ciclos adyacentes a i -ciclos con $4 \leq i \leq 6$. Luego demostraron que la conjetura es válida para todo grafo planar sin 4-ciclos [25].

En [107] se demostró que todo grafo planar sin 4-ciclos es 6-coloreable acíclicamente por listas y en [108] se mejoró este resultado. También se obtuvieron condiciones para que un grafo planar sea 4-coloreable acíclicamente por listas en [28, 26, 27, 39, 42, 41, 95] y 3-coloreable acíclicamente por listas en [21, 20, 62, 23, 63].

El problema de coloreo acíclico tiene una estrecha relación con el *minimum feedback vertex set problem*. Este problema consiste en hallar el menor conjunto de vértices de un grafo de manera tal que al borrarlos el grafo que se obtiene es acíclico. En [49] se estableció una conexión entre el número cromático acíclico del grafo y el cardinal de dicho conjunto.

Se desarrolló un algoritmo heurístico eficiente para el problema de coloreo acíclico en [58] basado en la explotación de la estructura de los subgrafos inducidos 2-coloreables. Este algoritmo, junto al algoritmo para recuperar los valores numéricos de la matriz Hessiana a partir de la representación obtenida utilizando el coloreo acíclico, forman parte del paquete de software ColPack [57]. Este algoritmo de recuperación se describe y analiza en forma detallada en [59], incluyendo su complejidad y estabilidad numérica y también se presentan resultados experimentales de estos dos algoritmos sobre casos reales.

Como puede verse a partir de los trabajos mencionados, todos los trabajos previos sobre este problema provienen de la teoría de grafos, probando cotas sobre la cantidad de colores necesaria para obtener coloreos acíclicos en clases particulares de grafos o bien estudiando propiedades del problema sobre clases particulares de grafos. No estamos al tanto de estudios que apunten a la resolución práctica de este problema, además de los métodos heurísticos mencionados en el párrafo anterior. Estas consideraciones –junto con el interés propio del problema como modelo combinatorio– motivan el estudio de este problema desde el punto de vista de la programación lineal entera, con el objetivo de fundar la base teórica sobre la cual pueda encararse la resolución de este problema en forma exacta por medio de técnicas basadas en planos de corte.

1.4. Modelo de programación entera

Con el objetivo de establecer un punto de partida para el estudio poliedral del problema de coloreo acíclico, introducimos en esta sección una formulación natural de programación entera para este problema. Sean $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y \mathcal{C} el conjunto de colores. Asumimos a lo largo de este trabajo que G no tiene vértices aislados. Para cada vértice $v \in V$ y cada color $c \in \mathcal{C}$, definimos la

variables de asignación x_{vc} , de modo tal que $x_{vc} = 1$ si al vértice v se le asigna el color c , y $x_{vc} = 0$ en caso contrario. Para todo color $c \in \mathcal{C}$ definimos la variable de color w_c , de modo tal que $w_c = 1$ si algún vértice utiliza el color c y $w_c = 0$ en caso contrario.

Llamemos $\mathbf{CC} \subseteq 2^V$ al conjunto de todos los ciclos de G . El problema de coloreo acíclico puede ser formulado en términos de las variables de asignación y color de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{c \in \mathcal{C}} w_c \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1 & \forall v \in V & \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$x_{uc} + x_{vc} \leq w_c \quad \forall uv \in E, \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (1.2)$$

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} + x_{vc'} \leq |\mathbf{C}| - 1 \quad \forall \mathbf{C} \in \mathbf{CC}, \quad \forall c, c' \in \mathcal{C}, c \neq c' \quad (1.3)$$

$$x_{vc} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (1.4)$$

$$w_c \in \{0, 1\} \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (1.5)$$

La función objetivo busca minimizar la cantidad de colores usados. Las restricciones (1.1) imponen que cada vértice debe recibir exactamente un color, mientras que las restricciones (1.2) evitan que dos vértices adyacentes reciban el mismo color. Notar que las restricciones (1.2) son suficientes para definir correctamente las variables w dado que asumimos que G no tiene vértices aislados. Finalmente, las restricciones (1.3) evitan que un ciclo reciba exactamente dos colores. Notar que estas restricciones no necesitan aplicarse sobre todo ciclo en \mathbf{CC} , dado que todo ciclo impar siempre recibe al menos tres colores en todo coloreo factible. Por lo tanto, podemos limitar las restricciones (1.3) solamente a los ciclos pares inducidos de G .

Definición 1.1. Definimos como $P_S(G, \mathcal{C}) \subseteq \mathbb{R}^{|V|+|\mathcal{C}|}$ a la cápsula convexa de los vectores $(x, w) \in \mathbb{R}^{|V|+|\mathcal{C}|}$ que satisfacen las restricciones (1.1)-(1.5).

El estudio de este poliedro es el objetivo principal de esta tesis. Analizaremos la cápsula convexa de los vectores de incidencia correspondientes a soluciones factibles del problema, con el objetivo de explorar sus propiedades generales y encontrar familias de desigualdades válidas que puedan ser incorporadas a un método basado en planos de corte. Estamos interesados en analizar la “calidad” teórica de las desigualdades válidas halladas, y para esto utilizaremos el hecho de definir facetas del poliedro en cuestión y el rango disyuntivo de las desigualdades, como medidas teóricas de su calidad. De esta forma, se espera obtener un conocimiento parcial de la estructura de esta cápsula convexa,

que pueda ser utilizado en la implementación práctica de un algoritmo basado en planos de corte para el problema. Estudios poliedrales similares se realizaron para muchos otros problemas de optimización combinatoria en general y de coloreo en particular, como por ejemplo el problema de coloreo clásico [36, 46, 54, 87, 88], el problema de coloreo equitativo [85], el problema de multicoloreo [89] y problema de coloreo con mínimas adyacencias [48].

La formulación dada por las restricciones (1.1)-(1.2) y (1.4)-(1.5) corresponde al problema de coloreo clásico de vértices y fue extensamente estudiada, junto con restricciones de rompimiento de simetrías, en [46, 87, 88]. Por este motivo en esta tesis nos concentramos en desigualdades válidas que surgen de las propiedades de aciclicidad, en particular sobre ciclos pares inducidos.

1.5. Contenido de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 damos algunas propiedades generales del poliedro asociado a la formulación introducida en la Sección 1.4. Caracterizamos la dimensión de $P_S(G, \mathcal{C})$ cuando $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$ y presentamos un sistema minimal de ecuaciones para el poliedro en este caso. También demostramos que el problema de coloreo acíclico no puede formularse en términos de las variables de asignación y orden correspondientes al *orientation model* presentado en [18]. Luego, se analizan las restricciones del modelo para determinar cuáles definen facetas del poliedro bajo estudio. Demostramos que las cotas inferiores para las variables de asignación y las cotas superiores para las variables de color definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$. También demostramos que definen facetas las restricciones de adyacencia y aciclicidad.

En el Capítulo 3 introducimos cinco familias de desigualdades válidas que surgen de las propiedades de aciclicidad que involucran una cantidad fija de colores y demostramos bajo qué condiciones definen facetas. En primer término presentamos las *desigualdades two-color*, definidas sobre un ciclo par del grafo. Demostramos la validez y determinamos condiciones necesarias y suficientes para las cuales definen facetas. Luego presentamos una primera generalización de esta familia de desigualdades, las *desigualdades 1-replicated two-color*, definidas sobre una estructura que se obtuvo reemplazando un vértice del ciclo por una clique. A partir de esta familia de desigualdades obtuvimos otra, las *desigualdades replicated two-color*, definidas sobre un “ciclo de cliques” (formalmente, sobre un K -ciclo). Estas familias de desigualdades también inducen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$. Un estudio similar se realiza sobre las familias de *desigualdades reinforced two-color* y las *desigualdades semicycle weighted color*. Estas familias se definen sobre un ciclo par y luego se generalizan sobre K -ciclos que cumplen con ciertas condiciones adicionales. Finalmente, presentamos dos familias de desigualdades válidas, las *de-*

sigualdades four-consecutive vertices y las *desigualdades three-color*. Las dos familias inducen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$. Los resultados de este capítulo fueron presentados en [31], salvo las generalizaciones de las desigualdades y las desigualdades semicycle weighted color.

En el Capítulo 4 se introducen cuatro familias de desigualdades que involucran un conjunto de colores, a diferencia de las presentadas en el capítulo anterior, y estudiamos bajo qué condiciones definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$. Tres de estas familias, las *desigualdades distinguished colors*, las *desigualdades three-consecutive vertices* y las *desigualdades prominent vertex*, están definidas sobre ciclos pares y se determinaron condiciones necesarias y suficientes para que definan facetas del poliedro bajo estudio. Las *desigualdades basket* están definidas sobre otro tipo de estructura, en la cual está involucrada un ciclo par y una clique. Finalmente, se generaliza esta familia de desigualdades considerando un ciclo par y un conjunto de cliques. Los resultados de este capítulo fueron presentados en [31], salvo las desigualdades basket y su generalización.

En el Capítulo 5 realizamos el estudio del rango disyuntivo de algunas de las familias de desigualdades presentadas en los Capítulos 3 y 4, con el objetivo de obtener una medida teórica alternativa de su fortaleza, además de las propiedades de facetitud. En primer término se introduce la definición del operador BCC de Balas, Ceria y Cornuéjols, que aplicado a la relajación de la cápsula convexa de las soluciones factibles genera una nueva relajación que está incluida en la anterior. También se define el rango disyuntivo de una desigualdad válida y se introduce la definición de anti-rango disyuntivo de una desigualdad válida, como un concepto dual del rango. Luego estudiamos el rango y anti-rango disyuntivo de algunas de las familias de desigualdades válidas presentadas en los capítulos anteriores. Los resultados de este capítulo fueron presentados en [33].

En el Capítulo 6 se presentan resultados preliminares de experimentos computacionales sobre un algoritmo de tipo branch & cut. Estudiamos el comportamiento de las desigualdades válidas y su efectividad de manera empírica, como una base para futuras implementaciones. El objetivo de este capítulo no es implementar un algoritmo completo para el problema, sino solamente contar con una primera fase de experimentos sobre las desigualdades halladas en este trabajo. Se describe la implementación de un algoritmo branch & cut para el problema, incluyendo procedimientos de separación para las familias de desigualdades válidas, y se muestran resultados de experimentos sobre esta implementación. Los resultados de este capítulo fueron presentados en [31].

Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos las conclusiones de este trabajo y algunas líneas potenciales de desarrollo futuro.

Capítulo 2

Propiedades generales del poliedro de coloreo acíclico

En este capítulo analizaremos algunas propiedades básicas del poliedro asociado a la formulación introducida en el capítulo anterior. En particular, resulta de interés caracterizar su dimensión, dado que contar con información sobre la dimensión es de gran ayuda para analizar si una desigualdad válida define una faceta del poliedro en cuestión. Caracterizaremos en la Sección 2.1 la dimensión de $P_S(G, \mathcal{C})$ cuando $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$, dando además un sistema minimal de ecuaciones para este caso. La Sección 2.2 presenta algunas propiedades generales de la formulación, incluyendo una discusión sobre alternativas para el modelado del problema. En la Sección 2.3 estudiamos cuáles de las restricciones del modelo planteado en el capítulo anterior definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$.

2.1. Dimensión

En primer lugar, estudiamos la dimensión de $P_S(G, \mathcal{C})$. El siguiente teorema caracteriza esta dimensión cuando $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$, dando además un sistema minimal de ecuaciones que será útil en las demostraciones de facetitud de los próximos capítulos. Si P es un poliedro, denotamos por $\dim(P)$ a su dimensión.

Teorema 2.1. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$, entonces $\dim(P_S(G, \mathcal{C})) = |V|(|\mathcal{C}| - 1) + |\mathcal{C}|$. Además, las restricciones (1.1) proveen de un sistema minimal de ecuaciones para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $\lambda z = \lambda_0$ una igualdad que es verificada por todas las soluciones $z = (x, w) \in P_S(G, \mathcal{C})$. Debemos probar que (λ, λ_0) es una combinación lineal de las restricciones (1.1).

Sea $c \in \mathcal{C}$ y sea $z = (x, w) \in P_S(G, \mathcal{C})$ una solución factible tal que $w_c = 0$ (esta solución existe dado que $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$). Sea $w' = w + e_c$ (i.e., w' se obtiene de w reemplazando $w_c = 0$ por $w'_c = 1$). Dado que $z' = (x, w')$ es también factible, entonces $\lambda z = \lambda_0 = \lambda z'$. Pero z y z' sólo difieren en las variables w_c , entonces $\lambda_{w_c} = 0$.

Sea $i \in V$ un vértice arbitrario y sean $c, c' \in \mathcal{C}$ dos colores distintos. Nombramos $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ al vector compuesto por unos. Sea $z = (x, \mathbf{1}) \in P_S(G, \mathcal{C})$ una solución factible con $x_{ic} = 1$ y $x_{jc'} = 0$ para todo $j \in V$ (i.e., el color c' no es utilizado en z). Dicha solución factible existe dado que $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$. Definimos $z' = (x', \mathbf{1}) \in P_S(G, \mathcal{C})$ a

$$\begin{aligned} x'_{jc} &= x_{jc} \quad \forall j \in V \setminus \{i\}, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \\ x'_{it} &= 0 \quad \forall t \in \mathcal{C} \setminus \{c'\}, \\ x'_{ic'} &= 1. \end{aligned}$$

Notar que z' es una solución factible dado que c' no es usado en z . Como $\lambda z = \lambda_0 = \lambda z'$ y z y z' sólo difieren en sus variables x_{ic} y $x_{ic'}$, entonces $\lambda_{x_{ic}} = \lambda_{x_{ic'}}$. Dado que c y c' son arbitrarios, concluimos que $\lambda_{x_{ic}} = \lambda_{x_{ic'}}$ para todo $c, c' \in \mathcal{C}$, luego λ es una combinación lineal de las restricciones (1.1). Por lo tanto, $\dim(P_S(G, \mathcal{C})) = |\mathcal{C}|(|V|+1) - |V| = |V|(|\mathcal{C}|-1) + |\mathcal{C}|$. Dado que los vectores de los coeficientes de las restricciones (1.1) son linealmente independientes, concluimos que (1.1) define un sistema minimal de ecuaciones para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Para la formulación dada en esta tesis, no resulta sencillo determinar la dimensión del poliedro asociado cuando $|\mathcal{C}| = \chi_A(G)$, dado que en este caso la dimensión depende fuertemente de la estructura del grafo. Esto mismo sucede para otras formulaciones de coloreo, como las consideradas en [46, 86, 87]. Por este motivo, el Teorema 2.1 considera el caso $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$, hipótesis que volverá a aparecer (eventualmente reforzada) en todas las demostraciones de facetitud a lo largo de esta tesis.

2.2. Propiedades de la formulación

Una propiedad interesante de la formulación (1.1)-(1.5) es que si minimizamos la función objetivo $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c$ sobre la relajación lineal, es decir, sobre el problema lineal que resulta de eliminar las condiciones de integralidad sobre las variables, entonces siempre se obtiene el valor 2. Sea $L(G, \mathcal{C})$ la *relajación lineal* del problema, es decir, el conjunto de los puntos que cumplen las restricciones (1.1)-(1.3) del modelo pero tales que $(x, w) \in [0, 1]^{|\mathcal{C}|(|V|+1)}$.

Proposición 2.1. *El óptimo de la función objetivo $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c$ sobre la relajación lineal $L(G, \mathcal{C})$ es 2.*

Demostración. Primero vamos a demostrar que el óptimo de la relajación es menor o igual a 2. Para ello vamos a mostrar una solución $(x, w) \in L$ tal que $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c = 2$. Sea (x, w) tal que $x_{vc_1} = x_{vc_2} = x_{vc_3} = \frac{1}{3}$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{C}$, para todo $v \in V$, y $w_{c_1} = w_{c_2} = w_{c_3} = \frac{2}{3}$. Este punto satisface las restricciones (1.1)-(1.3), por lo tanto pertenece a la relajación lineal, y además $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c = 2$. Por lo tanto, $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c \leq 2$.

Por otro lado, sea $uv \in E$. Por (1.2) tenemos que $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c \geq \sum_{c \in \mathcal{C}} (x_{uc} + x_{vc})$. Además, por (1.1), $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc} + \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 2$. Por lo tanto, $\sum_{c \in \mathcal{C}} w_c \geq 2$. □

Este teorema demuestra que optimizar sobre la relajación lineal de este problema aporta cotas débiles al valor óptimo del problema entero. De ahí la importancia de incorporar a nuestra formulación familias de desigualdades válidas (idealmente, que definan facetas) y que eventualmente puedan contribuir a mejorar estas cotas.

El problema de coloreo clásico de grafos puede ser formulado en términos de un conjunto de variables como las utilizadas en el *orientation model* [18]. Para $i \in V$, definimos las *variables de asignación* y_i donde $y_i = c$ si el color c es asignado al vértice i . Para todo $ij \in E$ definimos las *variables de orden* x_{ij} donde

$$x_{ij} = \begin{cases} \perp & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } y_i < y_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, el vector de incidencia de una solución factible z será de la forma

$$\chi^z = (\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{|V|}, \underbrace{x_{1i}, \dots, x_{jn}}_{|E|}).$$

El problema clásico de coloreo puede ser formulado en términos de las variables de asignación y las variables de orden. Por el contrario, el Teorema 2.2 demuestra que el problema de coloreo acíclico no admite una formulación en términos de estas variables.

Teorema 2.2. *No existe un modelo de programación entera para el problema de coloreo acíclico en términos de las variables de asignación y las variables de orden.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe esa formulación. Sea G un 4-ciclo, y definimos al conjunto de colores como $\mathcal{C} = \{1, \dots, 4\}$. Los siguientes vectores son los vectores de incidencia de dos coloreos acíclicos factibles:

$$\begin{aligned} \chi^{s_1} &= (1, 3, 1, 2, 1, 0, 1, 0), \\ \chi^{s_2} &= (1, 3, 1, 4, 1, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Como s_1 y s_2 son dos coloreos acíclicos, entonces el promedio de χ^{s_1} y χ^{s_2} se encuentra dentro de la cápsula convexa asociada a dicha formulación. Pero

$$\chi^s = \frac{\chi^{s_1} + \chi^{s_2}}{2} = (1, 3, 1, 3, 1, 0, 1, 0)$$

no es un coloreo acíclico. Por lo tanto, la formulación admite una solución entera no factible en la cápsula convexa asociada, contradiciendo nuestra suposición. \square

2.3. Análisis de las restricciones del modelo

Habiendo estudiado la dimensión de $P_S(G, \mathcal{C})$, estamos en condiciones de analizar cuáles restricciones y cotas del modelo definen facetas de este poliedro. Comenzaremos con las restricciones de adyacencia (1.2).

Proposición 2.2. *Sea $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Para $uv \in E$ y $c \in \mathcal{C}$ la desigualdad $x_{uc} + x_{vc} \leq w_c$ define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$ si y solo si no existe un vértice $i \in V$ tal que el conjunto $\{i, u, v\}$ sea una clique.*

Demostración. Sea F la cara definida por la desigualdad (1.2) del modelo, i.e,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C}) : x_{uc} + x_{vc} = w_c\}.$$

Si. Por contradicción, supongamos que existe un vértice $i \in V$ tal que el conjunto $\{i, u, v\}$ es una clique. Sea $z = (x, w) \in F$. Si $w_c = 1$, entonces $x_{uc} = 1$ o $x_{vc} = 1$. Como el vértice i es adyacente tanto a u como a v , entonces $x_{ic} = 0$. Si $w_c = 0$, entonces $x_{ic} = 0$. Por lo tanto, todos los puntos de la cara F satisfacen $x_{ic} = 0$, además de las igualdades del modelo (1.1). Entonces, $\dim(F) \leq \dim(P_S(G, \mathcal{C})) - 2$. Luego, concluimos que la desigualdad (1.2) no define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.

Solo si. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|(|V|+1)}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^T y = \lambda_0$ para todo $y \in F$. Para demostrar que (1.2) define faceta, tenemos que probar que λ es una combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (1.2) y de los vectores de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1). Es decir, debemos encontrar escalares α y β_i , $i \in V$, tales que

$$\lambda = \alpha \pi + \sum_{i \in V} \beta_i \gamma^i, \quad (2.1)$$

donde (π, π_0) es el vector de coeficientes de (1.2) y γ^i es el vector de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1) correspondientes al vértice i , para $i \in V$. Consideremos las siguientes construcciones:

1. Sea $z = (x, w)$ una solución factible tal que $z \in F$ y $w_d = 0$, con $d \neq c$. Esta solución existe dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Sea $z' = (x, w')$, donde w' se obtiene de w reemplazando $w_d = 0$ por

$w'_d = 1$. Notar que z' también satisface (1.2) por igualdad. Luego, $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Dado que z y z' solo difieren en las coordenadas w_d , entonces $\lambda_{w_d} w_d = 0 = \lambda_{w_d} w'_d$. Por lo tanto, $\lambda_{w_d} = 0$ para todo $d \in \mathcal{C}$ con $d \neq c$.

2. Sea $z = (x, w)$ una solución factible tal que $z \in F$ y $w_c = 0$. Sea $z' = (x', w')$, donde x' se obtiene de x reemplazando $x_{uc} = 0$ y $x_{ud} = 1$ por $x'_{uc} = 1$ y $x'_{ud} = 0$, y w' se obtiene de w reemplazando $w_c = 0$ por $w'_c = 1$. Notar que z' también satisface (1.2) por igualdad. Luego, $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Por lo tanto, $\lambda_{x_{ud}} = \lambda_{x_{uc}} + \lambda_{w_c}$, implicando que $\lambda_{w_c} = \lambda_{x_{ud}} - \lambda_{x_{uc}}$ para todo $d \in \mathcal{C}$, $d \neq c$.
3. Utilizando un argumento similar al anterior, concluimos que $\lambda_{w_c} = \lambda_{x_{vd}} - \lambda_{x_{vc}}$ para todo $d \in \mathcal{C}$, $d \neq c$.
4. Sea $z = (x, w)$ una solución factible tal que $z \in F$, $x_{id_1} = 0$, $x_{id_2} = 1$ y $w_{d_1} = 1$, con $i \in V$, $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$ y $d_1, d_2 \neq c$. Sea $z' = (x', w)$, donde x' se obtiene de x reemplazando $x_{id_1} = 0$ y $x_{id_2} = 1$ por $x'_{id_1} = 1$ y $x'_{id_2} = 0$. Por lo tanto, $\lambda_{x_{id_1}} = \lambda_{x_{id_2}}$, para todo $i \in V$ y $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$, $d_1, d_2 \neq c$.
5. Sea $z = (x, w)$ una solución factible tal que $z \in F$, el vértice $i \in V$, con $i \neq u, v$, utilice el color c y ningún vértice utilice el color $d \in \mathcal{C}$, con $d \neq c$. Tal solución existe dado que $\{i, u, v\}$ no es una clique. Sea $z' = (x', w)$, donde x' se obtiene de x reemplazando $x_{ic} = 1$ y $x_{id} = 0$ por $x'_{id} = 1$ y $x'_{ic} = 0$. Por lo tanto, $\lambda_{x_{ic}} = \lambda_{x_{id}}$, para todo $i \in V$, $i \neq u, v$ y $d \in \mathcal{C}$, $d \neq c$.

Definimos $\alpha = -\lambda_{w_c}$. También definimos $\beta_i = \lambda_{x_{id}}$, para todo $i \in V$, $i \neq u, v$, y $d \in \mathcal{C}$. Notar que la definición de β_i no depende de la elección del color d por los ítems 4 y 5. Definimos $\beta_u = \lambda_{x_{ud}}$ y $\beta_v = \lambda_{x_{uv}}$, con $d \in \mathcal{C}$, $d \neq c$. En este caso tampoco las definiciones de β_u y β_v dependen de la elección del color d por los ítems 2 y 3. De estas definiciones obtenemos $\lambda_{x_{uc}} = \alpha + \beta_u$ y $\lambda_{x_{vc}} = \alpha + \beta_v$. Por lo tanto, concluimos que λ es combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (1.2) y de los vectores de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1). Luego (1.2) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Analizamos ahora las restricciones de aciclicidad (1.3). Estas restricciones no definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$, y comprobamos este hecho mostrando que toda solución que se encuentra en la cara definida por una de estas desigualdades verifica también una igualdad que es linealmente independiente de las restricciones (1.1).

Proposición 2.3. *Para $\mathbf{C} \in \mathbf{CC}$, $c, c' \in \mathcal{C}$ con $c \neq c'$ la desigualdad $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} + x_{vc'} \leq |\mathbf{C}| - 1$ no define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(G, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (1.3), i.e.,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C}) : \sum_{v \in \mathcal{C}} x_{vc} + x_{vc'} = |\mathcal{C}| - 1\}.$$

Dado que cualquier solución $(x, w) \in F$ satisface también la igualdad $w_c + w_{c'} = 2$, entonces la restricción (1.3) del modelo no define faceta. \square

Continuamos con el estudio de las cotas de las variables. Primero presentamos los resultados correspondientes a las cotas de las variables de asignación.

Proposición 2.4. *Sea $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Para $v \in V$ y $c \in \mathcal{C}$, la restricción $x_{vc} \geq 0$ define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(G, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad $x_{vc} \geq 0$, i.e.,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C}) : x_{vc} = 0\}.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|(|V|+1)}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^T y = \lambda_0$ para todo $y \in F$. Para demostrar que $x_{vc} \geq 0$ define faceta, tenemos que probar que λ es una combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (1.2) y de los vectores de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1). Es decir, debemos encontrar escalares α y β_i , $i \in V$, tales que

$$\lambda = \alpha \pi + \sum_{i \in V} \beta_i \gamma^i, \quad (2.2)$$

donde (π, π_0) es el vector de coeficientes de $x_{vc} \geq 0$ y γ^i es el vector de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1) correspondientes al vértice i , para $i \in V$. Consideremos las siguientes construcciones:

1. Sea $z = (x, w)$ una solución factible tal que $z \in F$ y $w_d = 0$ con $d \in \mathcal{C}$. Esta solución existe dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Sea $z' = (x, w')$, donde w' se obtiene de w reemplazando $w_d = 0$ por $w'_d = 1$. Notar que z' pertenece a la cara F . Luego, $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Dado que z y z' solo difieren en las coordenadas w_d , entonces $\lambda_{w_d} w_d = 0 = \lambda_{w_d} w'_d$. Por lo tanto, $\lambda_{w_d} = 0$ para todo $d \in \mathcal{C}$.
2. Sea $z = (x, w)$ una solución factible que no utiliza el color c . Sea $z' = (x', w)$, donde x' se obtiene de x reemplazando, para algún vértice $i \in V$, $i \neq v$, $x_{id} = 1$ y $x_{ic} = 0$ por $x'_{id} = 0$ y $x'_{ic} = 1$. Notar que $z' \in F$. Luego, $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Por lo tanto, $\lambda_{x_{id}} = \lambda_{x_{ic}}$ para todo $i \in V$, $i \neq v$ y $d \in \mathcal{C}$, $d \neq c$.
3. Utilizando un argumento similar al anterior, se puede verificar que $\lambda_{x_{vd}} = \lambda_{x_{vd'}}$, para todo $d, d' \in \mathcal{C}$, $d \neq c$.

Definimos $\alpha = \lambda_{x_{vc}} - \lambda_{x_{vd}}$ y $\beta_v = \lambda_{x_{vd}}$. La definición de α y de β_v no depende de la elección del color d por el ítem 3. Definimos $\beta_i = \lambda_{x_{ic}}$ para $i \in V$, $i \neq v$. La definición de β_i tampoco depende de la elección del color por el ítem 2. De las definiciones obtenemos que $\lambda_{x_{vc}} = \alpha + \beta_v$. Entonces λ es combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad $x_{vc} \geq 0$ y de los vectores de coeficientes de las restricciones del modelo (1.1). Luego, la restricción $x_{vc} \geq 0$ define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Proposición 2.5. *Sea $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Para $v \in V$ y $c \in \mathcal{C}$ la restricción $x_{vc} \leq 1$ no define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(G, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad $x_{vc} \leq 1$, i.e.,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C}) : x_{vc} = 1\}.$$

Dado que cualquier solución $(x, w) \in F$ satisface también la igualdad $w_c = 1$, entonces la restricción $x_{vc} \leq 1$ no define una faceta de este poliedro. \square

Las siguientes proposiciones estudian los casos en los cuales las cotas de las variables de color definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$.

Proposición 2.6. *Sea $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Para $c \in \mathcal{C}$ la restricción $w_c \geq 0$ no define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(G, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad $w_c \geq 0$, i.e.,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C}) : w_c = 0\}.$$

Dado que cualquier solución $(x, w) \in F$ satisface también la igualdad $\sum_{v \in V} x_{vc} = 0$, entonces la restricción $w_c \geq 0$ no define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Proposición 2.7. *Sea $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G) + 1$. Para $c \in \mathcal{C}$ la restricción $w_c \leq 1$ define faceta.*

No incluimos la demostración de esta proposición debido a que involucra argumentos similares a los utilizados en las demostraciones anteriores.

Capítulo 3

Desigualdades válidas que involucran una cantidad fija de colores

La formulación estándar para el problema de coloreo clásico está dada por las restricciones (1.1)-(1.2) y (1.4)-(1.5). Este problema fue estudiado desde el punto de vista poliedral en [46]. Para evitar las soluciones simétricas de esta formulación, se presentaron otros modelos de programación entera y se realizaron estudios del politopo asociado en [86, 88]. Dado que este problema fue estudiado en profundidad, en esta tesis vamos a enfocarnos en desigualdades válidas que capturen las propiedades de aciclicidad. En particular, vamos a trabajar con desigualdades que estén definidas sobre ciclos pares inducidos y en combinaciones de ciclos y cliques. En este capítulo presentamos familias de desigualdades válidas que involucran una cantidad fija de colores.

Sea $\mathbf{C} \in \mathbf{CC}$ un ciclo par de G . Para $j \in \mathbf{C}$, sea $\mathbf{C}_j \subseteq \mathbf{C}$ el conjunto de todos los vértices $i \in \mathbf{C}$ tales que los dos caminos en \mathbf{C} de i a j tienen longitud par (i.e., el conjunto de vértices de \mathbf{C} que se encuentran a distancia par de j en \mathbf{C}). Notar que $|\mathbf{C}_j| = |\mathbf{C}|/2$. Para $j \in V$, sea $N(j)$ el conjunto de todos los vértices adyacentes a j y sea $N_{\mathbf{C}}(j) = \mathbf{C} \cap N(j)$. En este trabajo consideramos una *clique* como un subgrafo completo de G , no necesariamente maximal.

3.1. Desigualdades two-color

En esta sección presentamos las desigualdades válidas two-color, definidas sobre ciclos pares inducidos, y dos generalizaciones, definidas sobre una combinación de un ciclo par con cliques. Estas desigualdades, bajo ciertas condiciones, definen facetas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Definición 3.1. Sea \mathbf{C} un ciclo par de G , y sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$ con $c_0 \neq c_1$. Definimos

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq 1 + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_0} + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1}. \quad (3.1)$$

como la desigualdad two-color asociada con \mathbf{C}, c_0 , y c_1 .

Teorema 3.1. Las desigualdades two-color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible, y consideremos los siguientes casos:

1. Si z usa los colores c_0 y c_1 , entonces el lado izquierdo de la desigualdad (3.1) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$, porque z representa un coloreo acíclico. Notar que el lado derecho de la desigualdad, como los colores c_0 y c_1 son utilizados, es igual a $|\mathbf{C}| - 1$.
2. Si z usa el color c_0 y no utiliza el color c_1 , entonces el lado izquierdo de (3.1) es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$. El lado derecho de la desigualdad es mayor o igual que este valor por ser $w_{c_0} = 1$. Se puede utilizar un argumento similar si z usa el color c_1 y no utiliza el color c_0 .
3. Si los colores c_0 y c_1 no son utilizados por z , entonces el lado izquierdo de (3.1) es nulo, y la desigualdad se satisface trivialmente por ser el lado derecho al menos 1.

Dado que en los tres casos se satisface la desigualdad two-color (3.1) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$.

□

Notación. A lo largo de las demostraciones necesitaremos construir muchas soluciones factibles. Con el objetivo de describir eficientemente estas construcciones, introducimos la siguiente representación gráfica para soluciones factibles:

		c_0		c_1		...		c		...		c'	
		v		j		...		k		...			
		w											

Cada columna representa un color, y contiene los vértices o conjuntos de vértices que reciben el mismo color. En este ejemplo, los vértices v y w reciben el color c_0 , el vértice j recibe el color c_1 , y el vértice k recibe el color c . Al resto de los vértices se le asigna colores arbitrarios de manera tal que se genere un coloreo acíclico.

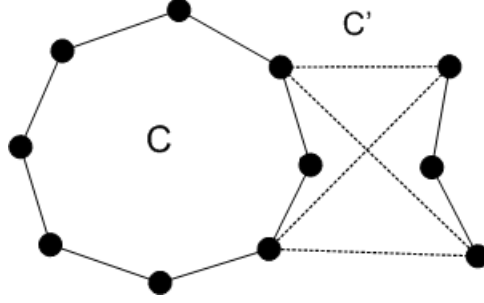


Figura 3.1: Ejemplo de un ciclo \mathbf{C} no binding, donde \mathbf{C}' es el ciclo con aristas punteadas.

Decimos que \mathbf{C} es un *ciclo binding* si G no admite ningún ciclo $\mathbf{C}' \subseteq G$ tal que $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}$ y $\mathbf{C}' \setminus (G \setminus \mathbf{C})$ sean conjuntos independientes. El siguiente resultado estudia las condiciones bajo las cuales las desigualdades two-color definen facetas. Es interesante ver que este teorema provee condiciones necesarias y suficientes para que (3.1) definan facetas del poliedro bajo estudio, siempre que \mathbf{C} sea un ciclo binding y que la cantidad de colores sea suficientemente alta.

Teorema 3.2. *Asumimos que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$ y \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad two-color (3.1) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$ si y solo si para cada vértice $i \in V \setminus \mathbf{C}$ existe $j \in \mathbf{C}$ tal que $ik \notin E$ para todo $k \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(\mathbf{C}, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (3.1), i.e.,

$$F = \{y \in P_S(G, \mathcal{C}) : \pi^T y = \pi_0\};$$

donde (π, π_0) es el vector de coeficientes de (3.1).

Si. Por contradicción, supongamos que existe un vértice $i \in V \setminus \mathbf{C}$ tal que para todo $j \in \mathbf{C}$, existe $k \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}$ con $ik \in E$. Sea $z = (x, w) \in F$, y probaremos que $x_{ic_0} = x_{ic_1} = 0$, concluyendo que F no define faceta para $P_S(G, \mathcal{C})$. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $w_{c_0} = w_{c_1} = 1$, entonces el lado derecho de la desigualdad (3.1) es igual a $|\mathbf{C}| - 1$. Dado que z satisface (3.1) por igualdad, entonces el lado izquierdo de (3.1) tiene que ser igual a $|\mathbf{C}| - 1$. Por lo tanto, exactamente $|\mathbf{C}| - 1$ vértices de \mathbf{C} deben usar los colores c_0 y c_1 . Sea $j \in \mathbf{C}$ el único vértice en \mathbf{C} que no usa ni c_0 ni c_1 , y sea $l \in N_{\mathbf{C}}(j)$. Dado que \mathbf{C} es un ciclo par, entonces todos los vértices en $\mathbf{C}_j \setminus \{j\}$ usan el color c_0 y todos los vértices en \mathbf{C}_l usan el color c_1 , o viceversa. La hipótesis implica que el vértice i es adyacente a al menos dos vértices en \mathbf{C}_j y a dos vértices en \mathbf{C}_l . De hecho, si i es adyacente a un solo vértice $t \in \mathbf{C}_j$, entonces i no es adyacente a ningún

vértice en $\mathbf{C}_t \setminus \{t\}$, contradiciendo la hipótesis. Un argumento similar demuestra que el vértice i es también adyacente a al menos dos vértices en \mathbf{C}_l . Por lo tanto, concluimos que el vértice i no usa ni el color c_0 ni el c_1 , luego $x_{ic_0} = x_{ic_1} = 0$.

2. Si $w_{c_0} = 1$ y $w_{c_1} = 0$, entonces el lado derecho de (3.1) es igual a $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Dado que z satisface (3.1) por igualdad, entonces el lado izquierdo de (3.1) debe ser igual a $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Esto implica que exactamente $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$ vértices de \mathbf{C} deben usar color c_0 . Sea $j \in \mathbf{C}$ uno de esos vértices que utilizan el color c_0 . Entonces, todos los vértices en \mathbf{C}_j deben usar color c_0 . Al vértice i no se le puede asignar el color c_1 dado que $w_{c_1} = 0$. Además, por hipótesis, el vértice i es adyacente a algún vértice en \mathbf{C}_j , luego $x_{ic_0} = 0$. Un argumento simétrico resuelve el caso $w_{c_1} = 1$ y $w_{c_0} = 0$.
3. Si $w_{c_0} = w_{c_1} = 0$, entonces z no satisface (3.1) por igualdad, una contradicción.

En todos los casos obtuvimos $x_{ic_0} = x_{ic_1} = 0$. Entonces, $F \subseteq \{(x, w) \in \mathbb{R}^{|\mathbf{C}|(|V|+1)} : x_{ic_0} = x_{ic_1} = 0 \text{ y } (x, w) \text{ satisface la igualdad (1.1)}\}$. Dado que los puntos en F satisfacen dos igualdades adicionales además de las restricciones (1.1), tenemos que $\dim(F) \leq \dim(P_S(G, \mathcal{C})) - 2$. Por lo tanto, concluimos que la desigualdad (3.1) no define faceta para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Solo si. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathbf{C}|(|V|+1)}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^T y = \lambda_0$ para todo $y \in F$. Probaremos que λ es una combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (3.1) y de los vectores de coeficientes de las restricciones (1.1), demostrando de esta manera que (3.1) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$. Es decir, debemos encontrar escalares α y $\beta_i, i \in V$, tal que

$$\lambda = \alpha \pi + \sum_{i \in V} \beta_i \gamma^i, \quad (3.2)$$

donde γ^i es el vector de coeficientes de las restricciones (1.1) correspondientes al vértice i , para $i \in V$ (recordar que (1.1) define un sistema minimal de ecuaciones para $P_S(G, \mathcal{C})$).

Afirmación 1: $\lambda_{w_c} = 0 \quad \forall c \in \mathbf{C} \setminus \{c_0, c_1\}$

Sean $j \in \mathbf{C}$ e $i \in N_{\mathbf{C}}(j)$. Sea $c' \in \mathcal{C}$ con $c' \neq c, c_0, c_1$. Sea $z = (x, w)$ una solución factible como la representada en la Figura 3.2(b), tal que $w_c = 0$. En esta solución asignamos los colores c_0, c_1 y c' a los vértices de \mathbf{C} de forma tal que la desigualdad (3.1) se cumple por igualdad. Además, el grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede ser coloreado acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$. Debemos verificar que este coloreo es también acíclico para G . Si el coloreo no es acíclico, entonces existe un ciclo par \mathbf{C}' que utiliza solo dos colores. El ciclo \mathbf{C}' no puede ser ni el ciclo \mathbf{C} ni $\mathbf{C}' \subseteq G \setminus \mathbf{C}$, dado que

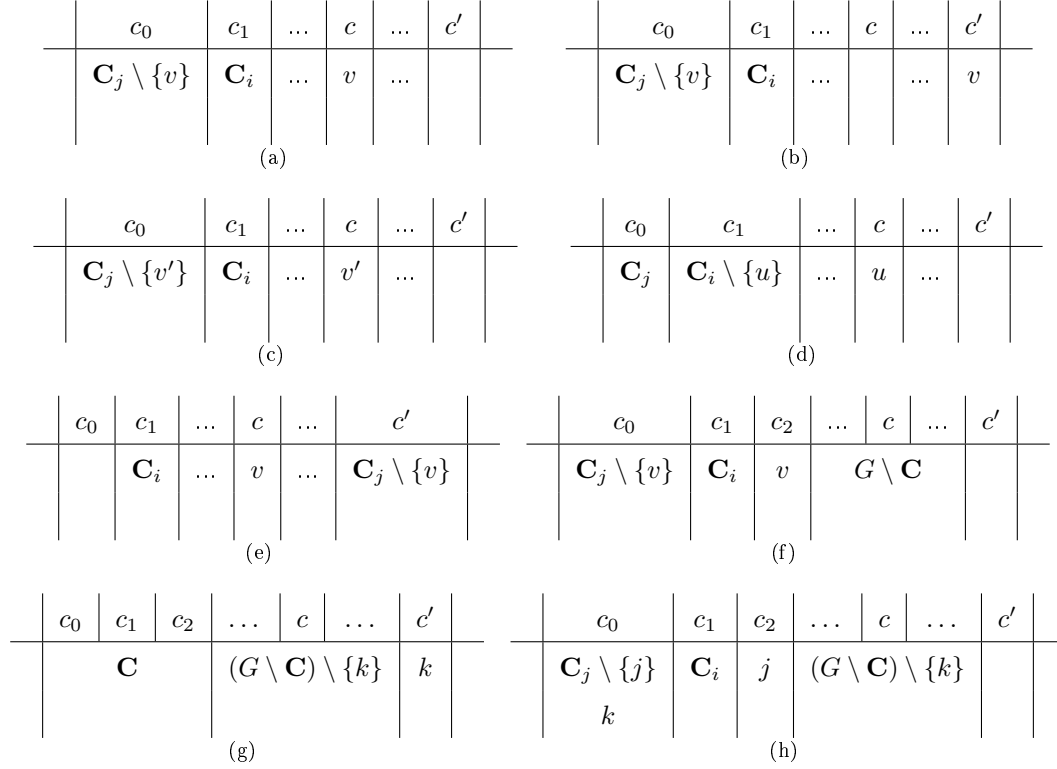


Figura 3.2: Construcciones para la demostración del Teorema 3.2

los dos están coloreados acíclicamente. Por lo tanto, \mathbf{C}' tiene vértices en \mathbf{C} y $G \setminus \mathbf{C}$. Si existen vértices adyacentes en \mathbf{C}' que pertenecen al mismo conjunto (\mathbf{C} o $G \setminus \mathbf{C}$) entonces el coloreo de \mathbf{C}' es acíclico porque vértices adyacentes reciben dos colores diferentes y los vértices en el otro conjunto reciben un tercer color. Si no existen vértices adyacentes en \mathbf{C}' que pertenezcan a un mismo conjunto, entonces $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}$ y $\mathbf{C}' \setminus (G \setminus \mathbf{C})$ son conjuntos independientes. Pero, por hipótesis, esto no es posible dado que \mathbf{C} es un ciclo binding. Luego, G está coloreado acíclicamente.

Sea $z' = (x, w')$, con $w' = w + e_c$, donde e_c es el vector unidad asociado a la variable w_c . La solución w' se obtiene a partir de w reemplazando $w_c = 0$ por $w'_c = 1$. Notar que tanto z como z' satisfacen (3.1) por igualdad, luego $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Dado que z y z' solo difieren en las coordenadas w_c , entonces $\lambda_{w_c} w_c = 0 = \lambda_{w_c} w'_c$. Por lo tanto, $\lambda_{w_c} = 0$.

◇

Afirmación 2: $\lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{vc'}} \quad \forall v \in \mathbf{C}, \quad \forall c, c' \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$

Sean $j \in \mathbf{C}$, $v \in \mathbf{C}_j$, e $i \in N_{\mathbf{C}}(j)$. Sea $z = (x, w)$ una solución factible como la representada en la Figura 3.2(a) y sea $z' = (x', w')$ una solución factible como la dada por la Figura 3.2(b). Por

lo demostrado en la Afirmación 1, el grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede ser coloreado acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$, y este coloreo es también acíclico para G . Notar que z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, por lo tanto $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Como z y z' solo difieren en las coordenadas x_{vc} , $x_{v'c}$, w_c y $w_{c'}$, entonces $\lambda_{x_{vc}} x_{vc} + \lambda_{w_c} w_c = \lambda_{x_{v'c}} x'_{v'c} + \lambda_{w_{c'}} w'_{c'}$. Por la Afirmación 1, $\lambda_{w_c} = \lambda_{w_{c'}} = 0$, y entonces $\lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{v'c}}$.

◇

Afirmación 3: $\lambda_{x_{vd}} - \lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{v'd}} - \lambda_{x_{v'c}} \quad \forall v, v' \in \mathbf{C}$ a distancia par en \mathbf{C} , $\forall c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$, $d \in \{c_0, c_1\}$

Sean $j \in \mathbf{C}$, $v, v' \in \mathbf{C}_j$, e $i \in N_{\mathbf{C}}(j)$. Sean $z = (x, w)$ la solución factible representada por la Figura 3.2(a) y $z' = (x', w')$ la solución factible dada por la Figura 3.2(c). El grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$, y este coloreo es también acíclico para G . Notar que z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, luego $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Entonces, $\lambda_{x_{v'c_0}} + \lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{v'c}} + \lambda_{x_{vc_0}}$, implicando que $\lambda_{x_{v'c_0}} - \lambda_{x_{v'c}} = \lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vc}}$. Dado que j es un vértice arbitrario, esta igualdad se cumple para todo par de vértices $v, v' \in \mathbf{C}$ que se encuentren a distancia par en \mathbf{C} . Un argumento similar puede darse para el caso $d = c_1$.

◇

Afirmación 4: $\lambda_{x_{vc_1}} - \lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{v'c_0}} - \lambda_{x_{v'c}} \quad \forall v, v' \in \mathbf{C}$ a distancia impar en \mathbf{C} , $\forall c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$

Sean $j \in \mathbf{C}$, $v \in \mathbf{C}_j$, $i \in N_{\mathbf{C}}(j)$ y $u \in \mathbf{C}_i$. Sea $z = (x, w)$ la solución factible representada por la Figura 3.2(a) y $z' = (x', w')$ la solución factible especificada en la Figura 3.2(d). El grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$, y este coloreo es también acíclico para G . Notar que z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, luego $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Entonces, $\lambda_{x_{uc_1}} + \lambda_{x_{vc}} = \lambda_{x_{uc}} + \lambda_{x_{vc_0}}$. Luego, $\lambda_{x_{uc_1}} - \lambda_{x_{uc}} = \lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vc}}$. Dado que esta igualdad es válida para cualquier vértice $u \in \mathbf{C}_i$ y j es un vértice arbitrario, la afirmación queda demostrada.

◇

Afirmación 5: $\lambda_{w_d} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vd}}) \quad \forall v \in \mathbf{C}, \quad d \in \{c_0, c_1\}$

Sean $j \in \mathbf{C}$, $v \in \mathbf{C}_j$, e $i \in N_{\mathbf{C}}(j)$. Sea $z = (x, w)$ la solución factible dada por la Figura 3.2(a) y $z' = (x', w')$ una solución factible como la representada por la Figura 3.2(e), donde $w_{c'} = w'_{c'} = 1$ y $w'_{c_0} = 0$. El grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$ y este coloreo es también acíclico para G . Dado que z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, entonces

$z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Entonces, $\lambda_{w_{c_0}} + \sum_{u \in \mathbf{C}_j \setminus \{v\}} \lambda_{x_{uc_0}} = \sum_{u \in \mathbf{C}_j \setminus \{v\}} \lambda_{x_{uc'}}$, implicando que $\lambda_{w_{c_0}} = \sum_{u \in \mathbf{C}_j \setminus \{v\}} (\lambda_{x_{uc'}} - \lambda_{x_{uc_0}})$. Por la Afirmación 3, sacamos $(\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_0}})$ como factor común y como j es un vértice arbitrario, obtenemos

$$\lambda_{w_{c_0}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_0}}).$$

Puede darse un argumento similar para el caso $d = c_1$.

◇

Afirmación 6: $\lambda_{w_{c_0}} = \lambda_{w_{c_1}}$

Por la Afirmación 5, $\lambda_{w_{c_0}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_0}})$ para algún vértice $v \in \mathbf{C}$ y algún color $c' \in \mathcal{C}$. Sea $v' \in \mathbf{C}$ ubicado a distancia impar de v en \mathbf{C} . La afirmación 4 implica que $\lambda_{x_{v'c_1}} - \lambda_{x_{v'c'}} = \lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vc'}}$, entonces, $\lambda_{w_{c_0}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{v'c'}} - \lambda_{x_{v'c_1}})$. Por la Afirmación 5, este último término es igual a $\lambda_{w_{c_1}}$, luego $\lambda_{w_{c_0}} = \lambda_{w_{c_1}}$.

◇

Afirmación 7: $\lambda_{x_{vc_0}} = \lambda_{x_{vc_1}} \quad \forall v \in \mathbf{C}$

Por la Afirmación 6, $\lambda_{w_{c_0}} = \lambda_{w_{c_1}}$. La Afirmación 5 implica que $\left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_0}}) = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_1}})$. Luego, $\lambda_{x_{vc_0}} = \lambda_{x_{vc_1}}$.

◇

Afirmación 8: $\lambda_{x_{kc}} = \lambda_{x_{kc'}} \quad \forall k \in V \setminus \mathbf{C} \quad \forall c, c' \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$

Sean $k \in V \setminus \mathbf{C}$, y $c_2 \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$. Sea $z = (x, w)$ una solución factible como la representada por la Figura 3.2(f) y $z' = (x', w')$ una solución factible como la dada por la Figura 3.2(g), en la cual a los vértices en \mathbf{C} se le asignan los colores $\{c_0, c_1, c_2\}$ como en la Figura 3.2(f). El conjunto $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente dado que quedan $\chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 1$ colores sin utilizar. Este coloreo de G es acíclico porque, por hipótesis, G no admite ningún ciclo $\mathbf{C}' \subseteq G$ tal que $\mathbf{C} \setminus \mathbf{C}'$ y $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}$ son conjuntos independientes. Supongamos que el vértice k usa el color c . Dado que z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, entonces $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Notar que z y z' solo difieren en las coordenadas x_{kc} y $x_{kc'}$. Luego, $\lambda_{x_{kc}} = \lambda_{x_{kc'}}$.

◇

Afirmación 9: $\lambda_{x_{kc_0}} = \lambda_{x_{kc_1}} = \lambda_{x_{kc}} \quad \forall k \in V \setminus \mathbf{C} \quad \forall c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$

Sea $k \in V \setminus \mathbf{C}$. Sea $z = (x, w)$ la solución factible dada por la Figura 3.2(f) y $z' = (x', w')$ la solución factible representada por la Figura 3.2(h). En la Figura 3.2(f), el conjunto $G \setminus \mathbf{C}$ es coloreado acíclicamente con $\chi_A(G \setminus \mathbf{C})$ colores. Este coloreo de G es acíclico dado que, por hipótesis, G no admite ningún ciclo $\mathbf{C}' \subseteq G$ tal que $\mathbf{C} \setminus \mathbf{C}'$ y $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}$ sean conjuntos independientes. Supongamos que el vértice k usa el color c . En la Figura 3.2(h), el vértice k usa color c_0 . Este coloreo es posible porque, por hipótesis, existe un vértice $j \in \mathbf{C}$ tal que k no es adyacente a ningún vértice $v \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}$. Como z y z' satisfacen (3.1) por igualdad, entonces $z, z' \in F$ y $\lambda^T z = \lambda_0 = \lambda^T z'$. Notar que z y z' solo difieren en las coordenadas x_{kc_0} y x_{kc} . Luego, $\lambda_{x_{kc_0}} = \lambda_{x_{kc}}$. Si repetimos este procedimiento con c_1 en lugar de c_0 , obtenemos $\lambda_{x_{kc_1}} = \lambda_{x_{kc}}$.

◇

Definimos $\alpha = \lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vc}}$, para todo $v \in \mathbf{C}$, $c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$. Notar que la elección de v y de c no afecta la definición de α , por la Afirmación 4 y la Afirmación 7. Además, definimos $\beta_v = \lambda_{x_{vc}}$, para todo $v \in \mathbf{C}$, $c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$. Por la Afirmación 2, la definición de β_v es independiente de la elección de c . De las definiciones de α y β obtenemos $\lambda_{x_{vc_0}} = \alpha + \beta_v$. Por la Afirmación 7, $\lambda_{x_{vc_1}} = \alpha + \beta_v$.

La Afirmación 5 implica que $\lambda_{w_{c_0}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) (\lambda_{x_{vc'}} - \lambda_{x_{vc_0}})$, y la definición de α implica que $\lambda_{w_{c_0}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) (-\alpha) = \left(1 - \frac{|\mathbf{C}|}{2}\right) \alpha$. Por la Afirmación 5, tenemos que $\lambda_{w_{c_1}} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) (-\alpha) = \left(1 - \frac{|\mathbf{C}|}{2}\right) \alpha$.

Definimos $\beta_i = \lambda_{x_{ic}}$, para todo $i \in G \setminus \mathbf{C}$, $c \in \mathcal{C}$. Notar que la definición de β_i no depende de la elección de c , por la Afirmación 8 y la Afirmación 9. Bajo estas definiciones concluimos que se satisface la igualdad (3.2). Por lo tanto, λ es realmente una combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (3.1) y de los vectores de coeficientes de las restricciones (1.1), luego (3.1) induce una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$.

□

Dado que las desigualdades basadas en cliques demostraron ser muy efectivas para el problema clásico de coloreo de vértices en el contexto de un algoritmo de planos de corte, estamos interesados en esta tesis en familias de desigualdades basadas en combinaciones de cliques y ciclos. La idea es capturar las propiedades de aciclicidad de las soluciones factibles en las desigualdades basadas en cliques. Con este objetivo, generalizamos las desigualdades two-color reemplazando un vértice por una clique.

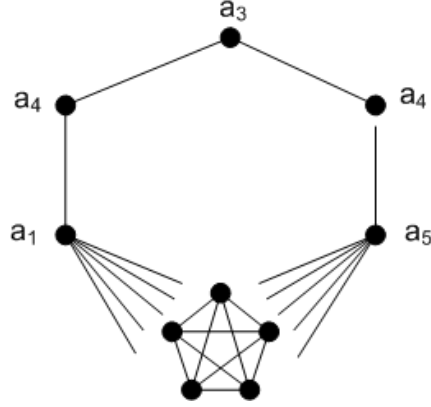


Figura 3.3: Estructura para las desigualdades 1-replicated two-color.

Definición 3.2. Sea $P \cup K \subseteq V$, donde K es una clique y $P = \{a_1, \dots, a_p\}$ es un camino con p impar, tal que $K \cup \{a_1\}$ y $K \cup \{a_p\}$ son cliques y $a_1 a_p \notin E$ (ver Figura 3.3). Sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$, con $c_0 \neq c_1$. Definimos

$$\sum_{v \in P \cup K} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq 1 + \frac{|P| - 1}{2} (w_{c_0} + w_{c_1}) \quad (3.3)$$

como la desigualdad 1-replicated two-color inequality asociada con el camino P , la clique K , y los colores c_0 y c_1 .

Teorema 3.3. Las desigualdades 1-replicated two-color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible, y consideremos los siguientes casos:

1. Si z usa los colores c_0 y c_1 , dividimos el análisis en los siguientes sub-casos:
 - a) si ningún vértice en la clique K utiliza los colores c_0 y c_1 , entonces todos los vértices del camino P pueden usar esos colores.
 - b) si exactamente un vértice en la clique K utiliza el color c_0 o c_1 , entonces a lo sumo $|P| - 1$ vértices en el camino P pueden utilizar los colores c_0 y c_1 , porque z representa un coloreo acíclico.
 - c) si dos vértices en la clique K utilizan los colores c_0 y c_1 , entonces los vértices a_1 y a_p no pueden utilizar esos colores.

En todos los casos el lado izquierdo de la desigualdad (3.3) es menor o igual que $|P|$. Notar que el lado derecho de la desigualdad, como los colores c_0 y c_1 son utilizados, es igual a $|P|$.

2. Si z usa el color c_0 y no utiliza el color c_1 , entonces el lado izquierdo de (3.3) es menor o igual que $\frac{|P|+1}{2}$. El lado derecho de la desigualdad es mayor o igual que este valor por ser $w_{c_0} = 1$. Se puede utilizar un argumento similar si z usa el color c_1 y no utiliza el color c_0 .
3. Si los colores c_0 y c_1 no son utilizados por z , entonces el lado izquierdo de (3.3) es nulo, y la desigualdad se satisface trivialmente por ser el lado derecho al menos 1.

Dado que en los tres casos se satisface la desigualdad 1-replicated two-color (3.3) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$.

□

Analizamos ahora las propiedades de facetitud de las desigualdades 1-replicated two-color. Dado que resulta particularmente complicado analizar condiciones necesarias y suficientes para que estas desigualdades definan facetas para grafos generales, a continuación nos limitamos a analizar sus propiedades de facetitud cuando el grafo consiste solamente de la estructura $P \cup K$. Llamamos $G_{P \cup K} = (P \cup K, E_{P \cup K})$ al grafo compuesto exclusivamente por la estructura descrita en la Figura 3.3. Probamos a continuación que (3.3) define una faceta de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$ bajo condiciones menos restrictivas que las hipótesis del Teorema 3.2 para grafos generales.

Teorema 3.4. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{P \cup K})$, y $|P| \leq 3$ o $|K| \geq 3$, entonces la desigualdad 1-replicated two-color (3.3) define una faceta de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea F la cara de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (3.3), i.e.,

$$F = \{(x, w) \in P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C}) : \sum_{v \in P \cup K} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) = 1 + \frac{|P|-1}{2}(w_{c_0} + w_{c_1})\}.$$

Esta cara es no vacía, ya que por ejemplo si todos los vértices en P utilizan los colores c_0 y c_1 se obtiene un coloreo acíclico que cumple (3.3) por igualdad. También es una cara propia, dado que por ejemplo un coloreo acíclico que no utilice los colores c_0 y c_1 no cumple la desigualdad por igualdad. Por lo tanto, $\dim(F) \leq \dim(P_S(G_{\mathcal{C}}, \mathcal{C})) - 1$. Para demostrar que F define faceta, debemos mostrar $|V|(|\mathcal{C}| - 1) + |\mathcal{C}|$ puntos afinmente independientes que pertenezcan a F , es decir, coloreos acíclicos que cumplan (3.3) por igualdad.

La demostración procede por inducción en la cantidad n de vértices en la clique K . El caso base, para $n = 1$, es consecuencia del Teorema 3.2, siendo $G \setminus (P \cup K) = \emptyset$. Para realizar el paso inductivo, vamos a utilizar el hecho que $\chi_A(G_{P \cup K} \setminus \{k\}) = \chi_A(G_{P \cup K}) - 1$ si $|P| \leq 3$ o $|K| \geq 3$. Sea G' el grafo obtenido a partir de $G_{P \cup K}$ quitándole un vértice, digamos v_0 , a la clique K y sea $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{c_2\}$. Definimos $V = P \cup K$ y $V' = V \setminus \{v_0\}$.

Por hipótesis inductiva, la desigualdad define faceta para $P_S(G', \mathcal{C}')$, dado que $\chi_A(G') = \chi_A(G_{P \cup K}) - 1$. Por lo tanto, existen $|V'|(|\mathcal{C}'| - 1) + |\mathcal{C}'|$ puntos afinmente independientes que cumplen (3.3) por igualdad. Es decir, existen $(|V| - 1)(|\mathcal{C}| - 2) + |\mathcal{C}| - 1$ puntos afinmente independientes en la cara de $P_S(G', \mathcal{C}')$ definida por la desigualdad (3.3). Para demostrar que (3.3) define una faceta de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$, construimos los siguientes $|V|(|\mathcal{C}| - 1) + |\mathcal{C}|$ puntos afinmente independientes que cumplen (3.3) por igualdad:

1. Tenemos $(|V| - 1)(|\mathcal{C}| - 2) + |\mathcal{C}| - 1$ puntos afinmente independientes que muestran que (3.3) define una faceta de $P_S(G', \mathcal{C})$, y los extendemos agregando $x_{v_0 c_2} = 1$ y $w_{c_2} = 1$.
2. Consideramos $|\mathcal{C}| - 1$ coloreos acíclicos en los cuales $x_{v_0 c_i} = 1$ para $i = 0, 1, 3, \dots, |\mathcal{C}| - 1$ y $w_{c_2} = 0$.
3. Consideramos un coloreo acíclico con $x_{v_0 c_1} = 1$, $w_{c_2} = 1$ y $x_{v c_2} = 0$ para todo $v \in V$.
4. Consideramos $|V| - 1$ coloreos adicionales, de modo tal que el i -ésimo coloreo i tiene $x_{v_i c_2} = 1$, para $i = 1, \dots, |V| - 1$.

Es fácil ver que todos estos puntos son coloreos acíclicos que cumplen (3.3) por igualdad, es decir, pertenecen a la cara F de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (3.3). Verificamos ahora que estos puntos son afinmente independientes.

- Los puntos del ítem 1 son extensiones de puntos afinmente independientes a los que se les agregó unos a las posiciones correspondientes a las variables $x_{v_0 c_2}$ y w_{c_2} . Por lo tanto, siguen siendo afinmente independientes.
- Los puntos del ítem 2, son afinmente independientes entre sí, dado que si un punto satisface la igualdad $x_{v_0 c_i} = 1$ para algún $i \in \{0, 1, 3, \dots, |\mathcal{C}| - 1\}$, el resto de los $|\mathcal{C}| - 2$ puntos no la cumple. Además, también son afinmente independientes respecto de los puntos del ítem 1, ya que éstos cumplen la igualdad $w_{c_2} = 1$.
- El punto del ítem 3 cumple la igualdad $w_{c_2} = 1$, que no la cumplen los puntos del ítem 2, y la igualdad $x_{v_0 c_2} = 0$, que no la cumplen los puntos del ítem 1. Por lo tanto es afinmente independiente respecto de los puntos anteriores.
- Los puntos del ítem 4, que son afinmente independientes entre sí, también lo son respecto de todos los anteriores, ya que éstos cumplen la igualdad $\sum_{i=1}^{|V|-1} x_{v_i c_2} = 0$.

Dado que encontramos $|V|(|\mathcal{C}| - 1) + |\mathcal{C}|$ puntos afinmente independientes en la cara de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (3.3), concluimos que $\dim(F) = \dim(P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})) - 1$. Entonces, (3.3) define una faceta de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$. \square

La demostración anterior se basa fuertemente en la propiedad $\chi_A(G_{P \cup K} \setminus \{k\}) = \chi_A(G_{P \cup K}) - 1$, que vale siempre que $|P| \leq 3$ o $|K| \geq 3$. Esta condición no se cumple si $|P| \geq 5$ y $|K| = 2$, dado que en este caso $\chi_A(G_{P \cup K} \setminus \{k\}) = \chi_A(G_{P \cup K}) = 3$. Se puede demostrar que también en este caso la desigualdad (3.3) define una faceta, realizando una demostración similar a la del Teorema 3.2. Por este motivo enunciamos el resultado sin dar la demostración, ya que utiliza argumentos similares a los utilizados en este teorema.

Teorema 3.5. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{P \cup K})$, entonces la desigualdad 1-replicated two-color (3.3) define una faceta de $P_S(G_{P \cup K}, \mathcal{C})$.*

Continuando con la idea de introducir familias de desigualdades basadas en combinaciones de ciclos y cliques, generalizamos las desigualdades 1-replicated two-color (3.3) considerando en este caso estructuras que involucran más de una clique. Previamente damos algunas definiciones preliminares.

Definición 3.3. *El grafo clique de un grafo G es el grafo intersección de las cliques maximales en G . Indicamos al grafo clique de G como $K(G)$.*

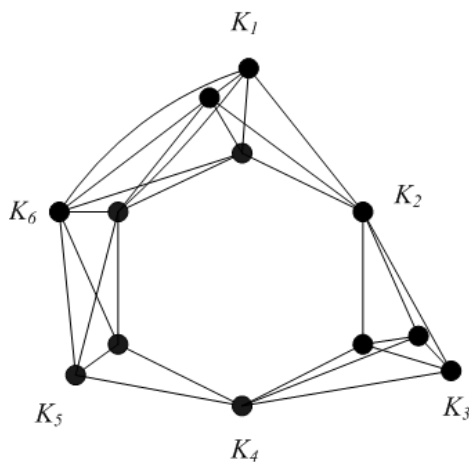


Figura 3.4: K -ciclo.

Definición 3.4. *Un K -ciclo es un conjunto $\mathbf{C} = \bigcup_{i=1}^n K_i$ donde K_1, \dots, K_n son n cliques y el subgrafo inducido por $K_i \cup K_{i+1}$ es una clique, para $i = 1, \dots, n$ (los índices son tomados módulo n). Si n es par, decimos que \mathbf{C} es un K -ciclo par.*

La Figura 3.4 muestra un K -ciclo, el cual puede ser considerado informalmente como un “ciclo de cliques”. Notar que un K -ciclo es un ciclo en el grafo clique $K(G)$, pero no todo ciclo en $K(G)$ es un K -ciclo en G . Esta definición nos permite generalizar la desigualdad (3.3) de la siguiente manera.

Definición 3.5. Sea $\mathbf{C} \subseteq G$ un K -ciclo par, que involucra n cliques K_1, \dots, K_n tales que $|K_i| = |K_p| = 1$ para ciertos $i, p \in \{1, \dots, n\}$ con i impar y p par. Sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$, con $c_0 \neq c_1$. Definimos

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq 1 + \left(\frac{|K(\mathbf{C})|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) \quad (3.4)$$

como la desigualdad replicated two-color asociada con el K -ciclo \mathbf{C} y los colores c_0 y c_1 .

Teorema 3.6. Las desigualdades replicated two-color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible, y consideremos los siguientes casos:

1. Si $w_{c_0} = 1$ y $w_{c_1} = 1$ en z , entonces el lado derecho de la desigualdad (3.4) es igual a $|K(\mathbf{C})| - 1$. Si exactamente $|K(\mathbf{C})| - 2$ vértices en $\mathbf{C} \setminus K_i \cup K_p$ utilizan los colores c_0 y c_1 , entonces, por adyacencia y z representar un coloreo acíclico, a lo sumo un solo vértice de $K_i \cup K_p$ puede utilizar esos colores. Por lo tanto, el lado izquierdo de la desigualdad (3.4) es menor o igual que $|K(\mathbf{C})| - 1$. Si menos de $|K(\mathbf{C})| - 2$ vértices en $\mathbf{C} \setminus K_i \cup K_p$ utilizan los colores c_0 y c_1 , entonces la desigualdad (3.4) se satisface.
2. Si $w_{c_0} = 1$ y $w_{c_1} = 0$, entonces el lado izquierdo de (3.4) es menor o igual que $\frac{|K(\mathbf{C})|}{2}$. El lado derecho de la desigualdad es mayor o igual que este valor por ser $w_{c_0} = 1$. Se puede utilizar un argumento similar si z usa el color c_1 y no utiliza el color c_0 .
3. Si $w_{c_0} = 0$ y $w_{c_1} = 0$ en z , entonces el lado izquierdo de (3.4) es nulo, y la desigualdad se satisface trivialmente por ser el lado derecho igual a 1.

Dado que en los tres casos se satisface la desigualdad replicated two-color (3.4) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. □

Teorema 3.7. Sea K_t la clique de mayor tamaño del K -ciclo \mathbf{C} . Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{\mathbf{C}}) + |K_t|$, entonces la desigualdad replicated two-color (3.4) induce una faceta de $P_S(G_{\mathbf{C}}, \mathcal{C})$.

Omitimos la demostración del Teorema 3.7 ya que involucra argumentos similares a los utilizados en demostraciones anteriores.

3.2. Desigualdades reinforced two-color

En esta sección presentamos una clase de desigualdades válidas sobre un ciclo par y dos colores c_0 y c_1 , de manera tal que los coeficientes correspondientes a las variables x asociadas a los vértices

pertenecientes al ciclo y el color c_0 resp. c_1 alternan entre los valores 1 y 2 resp. 0 y 1. Nuevamente demostramos que estas desigualdades son válidas y caracterizamos los casos en los cuales inducen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$.

Definición 3.6. Sea \mathbf{C} un ciclo par de G . Sea $j \in \mathbf{C}$ y sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}, c_0 \neq c_1$. Definimos la desigualdad reinforced two-color asociada a \mathbf{C}, j, c_0 y c_1 como

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_j} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_0}. \quad (3.5)$$

Primero, vamos a demostrar un lema que resume algunos resultados que se utilizan en varias demostraciones de esta tesis.

Lema 3.1. Sean $(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C})$ una solución entera, $\mathbf{C} \subseteq V$ un ciclo par, i, j dos vértices consecutivos en el ciclo y $c \in \mathcal{C}$.

- (i) El punto (x, w) satisface la desigualdad $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_c$.
- (ii) Si $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ entonces $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc} = 0$ o $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc} = 0$. En particular, si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ entonces $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc} = 0$.

Demostración. Para la parte (i), dado que $(x, w) \in P_S(G, \mathcal{C})$ entonces (1.2) implica que $x_{uc} + x_{vc} \leq w_c$ para toda arista uv en el ciclo (considerado como un conjunto de aristas). Sumando estas desigualdades sobre todas las aristas del ciclo, se concluye la parte (i).

Para la parte (ii), por contradicción, supongamos que existen vértices $u \in \mathbf{C}_i$ y $u' \in \mathbf{C}_j$ tales que $x_{uc} = x_{u'c} = 1$. Por lo tanto, los vértices adyacentes no pueden utilizar el color c . Sea S el conjunto formado por los vértices u, u' y sus respectivos vértices adyacentes. Entonces, $\mathbf{C} \setminus S$ está formado por la unión de a lo sumo dos caminos de longitud par. Luego, por las restricciones (1.2) del modelo, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus S} x_{vc} \leq \frac{|\mathbf{C}|-6}{2}$. Concluimos entonces que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} \leq \frac{|\mathbf{C}|-6}{2} + 2 = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$, contradiciendo nuestra suposición.

Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ entonces, por la parte (i), $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Por lo tanto, $x_{jc} = 0$. Además, por lo demostrado anteriormente, $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ o $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Luego, $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc} = 0$. \square

Teorema 3.8. Las desigualdades reinforced two-color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible, y consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_0}$, entonces, dado que $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, se cumple la desigualdad.

2. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ entonces, por Lema 3.1(ii), $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_0} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_0} = 0$. Además, como z representa un coloreo acíclico, $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$. Como el lado derecho de la desigualdad es igual a $|\mathbf{C}| - 1$, se cumple la desigualdad.

Dado que en los dos casos se satisface la desigualdad reinforced two-color (3.5) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathbf{C})$. \square

Teorema 3.9. *Asumimos que $|\mathbf{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$, y que \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad reinforced two-color (3.5) define una faceta de $P_S(G, \mathbf{C})$ si y solo si para cada vértice $s \in V \setminus C$ existe un conjunto $I \subset C$ con*

a) $I = \mathbf{C}_j$, o

b) $I = \mathbf{C}_i$, o

c) $I \subset \mathbf{C} \setminus \{j\}$ es un conjunto independiente con $|I| = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$

tal que $sv \notin E$ para todo $v \in I$.

Omitimos la demostración de este teorema dado que en la misma utilizamos argumentos similares a los de la demostración del Teorema 3.2.

Continuando con la idea de encontrar familias de desigualdades válidas que estén basadas en cliques, dado que las mismas demostraron ser efectivas para el coloreo clásico, generalizamos las desigualdades reinforced two-color (3.5) incorporando la estructura de K -ciclos. Primero introducimos las siguientes definiciones.

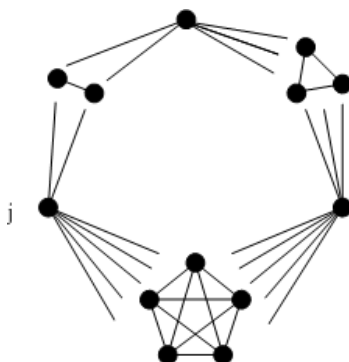
Definición 3.7. *Sea \mathbf{C} un K -ciclo de n cliques K_1, \dots, K_n . Definimos \mathbf{C}_{K_i} como la unión de todas las cliques K_t tales que i y t tienen la misma paridad.*

Definición 3.8. *Un K -ciclo alternado es un K -ciclo par que involucra n cliques K_1, \dots, K_n tales que $|K_i| = 1$ para todo i par (ver Figura 3.5). Sea $K_2 = \{j\}$, y definimos $\mathbf{C}_j = \cup_{i=1}^{n/2} K_{2i}$.*

Notar que la definición de \mathbf{C}_j dada en Definición 3.8 es una generalización (en el contexto de un K -ciclo alternado) del conjunto \mathbf{C}_j introducido al comienzo de esta sección para ciclos pares.

Definición 3.9. *Sea $\mathbf{C} \subseteq G$ un K -ciclo alternado que involucra n cliques K_1, \dots, K_n , y sea $K_2 = \{j\}$. Sean $c_0, c_1 \in C$, con $c_0 \neq c_1$. Definimos*

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_j} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq \frac{|K(\mathbf{C})|}{2} + \left(\frac{|K(\mathbf{C})|}{2} - 1 \right) w_{c_0} \quad (3.6)$$

Figura 3.5: K -ciclo alternado.

como la desigualdad replicated and reinforced two-color asociada al ciclo \mathbf{C} , el vértice j , y los colores c_0 y c_1 .

Teorema 3.10. *Las desigualdades replicated and reinforced two-color son válidas para $P_S(G, \mathbf{C})$.*

La demostración de validez de estas desigualdades utiliza argumentos similares a los de la demostración de validez de las reinforced two-color (3.5). El comportamiento del conjunto \mathbf{C}_j en un K -ciclo alternado, dado por la Definición 3.8, es similar al del conjunto \mathbf{C}_j en un ciclo.

Teorema 3.11. *Sea K_i la clique de mayor tamaño del K -ciclo alternado \mathbf{C} . Si $|\mathbf{C}| > \chi_A(G_{\mathbf{C}}) + |K_i|$, entonces las desigualdades replicated and reinforced two-color (3.6) inducen facetas de $P_S(G_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$.*

Omitimos la demostración del Teorema 3.11 ya que involucra argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 3.4.

3.3. Desigualdades semicycle weighted color

En esta sección introducimos una familia de desigualdades basadas en un ciclo par y dos colores c_1 y c_2 , de forma tal que los coeficientes asociados a las variables x correspondientes a los vértices del ciclo y al color c_1 alternan entre los valores 1 y 0 o 2. En cambio, los coeficientes correspondientes al color c_2 , toman valores 0 o 1. Por otro lado, el coeficiente correspondiente a la variable w asociado al color c_1 toma valor $\left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right)$, mientras que el correspondiente al color c_2 toma valor 1. Demostramos que estas desigualdades son válidas y definen facetas.

Definición 3.10. *Sea \mathbf{C} un ciclo par de G . Sean $i, j \in \mathbf{C}$ dos vértices adyacentes y sean $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$,*

con $c_1 \neq c_2$. Definimos

$$2 \sum_{v \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_1} + \sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_2} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} + x_{ic_2} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1} + w_{c_2} \quad (3.7)$$

como la desigualdad semicycle weighted color asociada al ciclo \mathbf{C} , los vértices i y j , y los colores c_1 y c_2 .

Teorema 3.12. *Las desigualdades semicycle weighted color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Podemos reescribir la desigualdad (3.7) de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_1} + \sum_{v \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}} (x_{vc_1} + x_{vc_2}) + x_{jc_2} + x_{ic_2} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1} + w_{c_2}. \quad (3.8)$$

Sea $z = (x, w)$ una solución factible, y consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_1} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1}$, entonces dado que $\sum_{v \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}} (x_{vc_1} + x_{vc_2}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$ y $x_{jc_2} + x_{ic_2} \leq w_{c_2}$ se cumple la desigualdad (3.8).
2. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces por Lema 3.1(ii), $\sum_{v \in \mathbf{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_1} + x_{ic_2} = 0$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Además, como z representa un coloreo acíclico, $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_2} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_2}$. Como $\frac{|\mathbf{C}|}{2} + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_2} \leq |\mathbf{C}| - 2 + w_{c_2}$, la desigualdad (3.8) se cumple.

Dado que en los dos casos se satisface la desigualdad semicycle weighted color (3.7) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Teorema 3.13. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{\mathbf{C}})$, entonces la desigualdad (3.7) inducen una faceta de $P_S(G_{\mathbf{C}}, \mathcal{C})$.*

Nuevamente en este caso omitimos la demostración del Teorema 3.13, ya que en ella utilizamos procedimientos similares a los realizados en el Teorema 3.2.

Con la intención de ampliar el dominio de las desigualdades semicycle weighted color (3.7) sobre estructuras que involucren cliques, las generalizamos sobre K -ciclos que satisfacen condiciones adicionales. Los vértices adyacentes i y j de la desigualdad (3.7) en este caso están representados por las cliques K_1 y K_2 , donde K_1 es una clique de un vértice. Este K -ciclo tiene una estructura similar a un K -ciclo alternado, donde las cliques con índice par, salvo K_2 , son cliques de un solo vértice.

Definición 3.11. *Sea \mathbf{C} un K -ciclo que involucra n cliques K_1, \dots, K_n tales que $|K_1| = |K_p| = 1$, para p par y $p \geq 4$, y $K_1 = \{i\}$. Sean $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, con $c_1 \neq c_2$. Definimos*

$$2 \sum_{v \in \mathbf{C}_{K_2} \setminus K_2} x_{vc_1} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{K_2}} x_{vc_2} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{K_1}} x_{vc_1} + x_{ic_2} \leq \left(\frac{K(|\mathbf{C}|)}{2} - 1 \right) + \left(\frac{|K(\mathbf{C})|}{2} - 1 \right) w_{c_1} + w_{c_2} \quad (3.9)$$

como la desigualdad generalized semicycle weighted color asociada al K -ciclo \mathbf{C} , las cliques K_1 y K_2 , y los colores c_1 y c_2 .

Teorema 3.14. *Las desigualdades generalized semicycle weighted color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 3.12. En este caso la desigualdad (3.9) se reescribe de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus K_2} x_{vc_1} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{K_2} \setminus K_2} (x_{vc_1} + x_{vc_2}) + \sum_{v \in K_2} x_{vc_2} + x_{ic_2} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1} + w_{c_2}. \quad (3.10)$$

Nuevamente se analizan los casos $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus K_2} x_{vc_1} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_1}$ y $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus K_2} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_1}$. Notar que para la demostración del primer caso utilizamos la desigualdad $\sum_{v \in K_2} x_{vc_2} + x_{ic_2} \leq w_{c_2}$, por ser $K_2 \cup \{i\}$ una clique.

Teorema 3.15. *Sea K_j la clique de mayor tamaño del K -ciclo \mathbf{C} . Si $|\mathbf{C}| > \chi_A(G_{\mathbf{C}}) + |K_j|$, entonces la desigualdad (3.9) induce una faceta de $P_S(G_{\mathbf{C}}, \mathcal{C})$.*

Omitimos la demostración de este teorema por utilizar argumentos similares a los utilizados en los teoremas previos.

3.4. Desigualdades three-color

En esta sección introducimos una familia de desigualdades válidas basadas en un ciclo par y tres colores, de forma tal que los coeficientes correspondientes a la variable x asociadas a los vértices del ciclo y al color c_1 tienen valor 2, mientras que los correspondientes a los colores c_2 y c_3 alternan entre los valores 0 y 1.

Definición 3.12. *Sea \mathbf{C} un ciclo par de G . Sean $i, j \in \mathbf{C}$ dos vértices adyacentes y sean $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{C}$ tres colores diferentes. Definimos*

$$2 \sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_1} + \sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_2} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_3} \leq (|\mathbf{C}| - 1) + \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_1} \quad (3.11)$$

como la desigualdad three-color asociada al ciclo \mathbf{C} , los vértices i y j , y los colores $c_1, c_2, y c_3$.

Teorema 3.16. *Las desigualdades three-color son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible. Consideremos los siguientes casos.

1. Si z usa el color c_1 , debemos tener en cuenta los siguientes casos:

- a) Si $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces por Lema 3.1(ii), todos los vértices del conjunto \mathbf{C}_j o \mathbf{C}_i utilizan el color c_1 . Supongamos que $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Por lo tanto, solo los vértices de \mathbf{C}_i pueden usar los colores c_2 y c_3 . Como z representa un coloreo acíclico, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_2} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_3} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$. Un argumento similar se utiliza para el caso $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$.

b) Si $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} (x_{vc_1} + x_{vc_2}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} (x_{vc_1} + x_{vc_3}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$.

Notar que en ambos casos el lado derecho de la desigualdad (3.11) es igual a $\frac{3}{2}|\mathbf{C}| - 1$.

2. Si z no utiliza el color c_1 , $\sum_{v \in \mathbf{C}_j} x_{vc_2} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_3} \leq |\mathbf{C}| - 1$, dado que z representa un coloreo acíclico. Notar que el lado derecho de (3.11) es mayor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$.

Dado que en los tres casos se cumple la desigualdad three-color (3.11) y z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Teorema 3.17. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{\mathcal{C}})$, entonces las desigualdades (3.11) inducen facetas de $P_S(G_{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$.*

La demostración del Teorema 3.17 la omitimos dado que en ella utilizamos argumentos similares a los de la demostración del Teorema 3.2.

3.5. Desigualdades four-consecutive vertices

Finalmente, cerramos este capítulo con otra familia de desigualdades válidas con una definición algo complicada, sin embargo induce faceta. Es interesante verificar que $P_S(G, \mathcal{C})$ admite facetas que surgen de desigualdades válidas con una estructura complicada.

Definición 3.13. *Sea \mathbf{C} un ciclo par de G . Sean $i, j, k, l \in \mathbf{C}$ cuatro vértices consecutivos y sean $c_0, c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Definimos la desigualdad four-consecutive vertices asociada a $\mathbf{C}, i, j, k, l, c_0, c_1$ y c_2 como*

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{k\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_1} + x_{ic_0} + x_{lc_1} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) + \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_2\}} x_{jc} + \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \{c_1, c_2\}} x_{kc} + 1. \quad (3.12)$$

Teorema 3.18. *Las desigualdades four-consecutive vertices son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible. La desigualdad (3.12) la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j, k\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) + x_{ic_0} + x_{lc_1} + 2x_{kc_1} + x_{kc_2} + 2x_{jc_0} + x_{jc_2} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) + 3. \quad (3.13)$$

Sabemos que $x_{kc_1} + x_{kc_2} \leq 1$ y $x_{jc_0} + x_{jc_2} \leq 1$ por las restricciones (1.1) del modelo, y $x_{kc_1} + x_{lc_1} \leq 1$ y $x_{jc_0} + x_{ic_0} \leq 1$ por (1.2). Si el lado izquierdo de al menos una de estas 4 desigualdades toma valor

0, entonces $x_{ic_0} + x_{lc_1} + 2x_{kc_1} + x_{kc_2} + 2x_{jc_0} + x_{jc_2} \leq 3$. Por otro lado, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j,k\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) (w_{c_0} + w_{c_1})$. Luego, se cumple la desigualdad (3.13).

Si por el contrario, el lado izquierdo de las 4 desigualdades toman valor 1, consideremos los siguientes casos:

1. Si $x_{kc_1} = 1$, entonces $x_{kc_2} = x_{lc_1} = 0$. Luego hay dos opciones:

a) si $x_{jc_0} = 1$ entonces, como z representa un coloreo acíclico, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j,k\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 3$.

b) si $x_{jc_2} = 1$ entonces $x_{ic_0} = 1$. Por ser $i, k \in \mathbf{C}_i$ y utilizan diferentes colores, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j,k\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 3$.

2. Si $x_{kc_2} = 1$, entonces $x_{jc_0} = x_{lc_1} = 1$. Como $j, l \in \mathbf{C}_j$ y utilizan diferentes colores, entonces

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j,k\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 3.$$

Notar que en los tres casos z usa los colores c_0 y c_1 , por lo tanto el lado derecho de la igualdad (3.13) toma valor $|\mathbf{C}| - 3$. Luego, se verifica la desigualdad.

Dado que en todos los casos se satisface la desigualdad four-consecutive vertices (3.12) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathbf{C})$.

□

Teorema 3.19. *Asumamos que $|\mathbf{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 4$, y \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad four-consecutive vertices (3.12) define faceta para $P_S(G, \mathbf{C})$ si y solo si para cada vértice $s \in V \setminus \mathbf{C}$ existe un conjunto I tal que $sv \notin E$ para todo $v \in I$ y*

a) $I = \mathbf{C}_j$ or $I = \mathbf{C}_j \setminus \{j\}$, o

b) $I = \mathbf{C}_i$ or $I = \mathbf{C}_i \setminus \{k\}$, o

c) $I = (\mathbf{C}_i \setminus \{k\}) \cup \{j\}$, o

d) $I = A \cup \{i, l\}$ es un conjunto independiente, $A \subset \mathbf{C} \setminus \{i, j, k, l\}$, $|A| = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 3$, o

e) $I = A \cup \{k, j\}$ con A un conjunto independiente, $A \subset \mathbf{C} \setminus \{i, j, k, l\}$, $|A| = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 2$.

Omitimos la demostración del Teorema (3.19) dado que la misma es similar a las demostraciones de los teoremas anteriores.

Capítulo 4

Desigualdades válidas que involucran conjuntos de colores

En este capítulo presentamos familias de desigualdades que están definidas sobre ciclos pares inducidos e involucran un conjunto de colores. Cada una de estas familias va a estar compuesta por un número mayor de desigualdades que las del capítulo anterior. Esto se debe a que además de estar definidas sobre un ciclo en el grafo, aparecen también subconjuntos del conjunto de colores, con diferentes características para cada familia. También presentamos una familia de desigualdades que están definidas sobre ciclos pares inducidos y cliques. Recordemos que consideramos una clique como un subgrafo completo de G (no necesariamente maximal).

4.1. Desigualdades distinguished colors

En esta sección introducimos una clase de desigualdades válidas definidas sobre un ciclo par y un subconjunto de tres o más colores. Cuando $|\mathcal{D}| = 2$, esta desigualdad es dominada por las desigualdades two-color (3.1).

Definición 4.1. *Sea \mathbf{C} un ciclo par de G , y sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}$. Definimos*

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} \leq |\mathbf{C}| - 3 + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c. \quad (4.1)$$

como la desigualdad distinguished colors asociada a \mathbf{C} y \mathcal{D} .

Teorema 4.1. *Las desigualdades distinguished colors son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $|\mathcal{D}| = 1$, digamos $\mathcal{D} = \{d\}$, entonces la desigualdad (4.1) establece que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd} \leq |\mathbf{C}| - 3 + w_d$. Si se usa el color d , el lado izquierdo de la desigualdad es menor o igual a $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$ y el lado derecho toma valor $|\mathbf{C}| - 2$. La desigualdad se cumple dado que $|\mathbf{C}| \geq 4$. Si no se utiliza el color d , la desigualdad se satisface trivialmente.
2. Si $|\mathcal{D}| = 2$, digamos $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$, entonces la desigualdad (4.1) establece que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd_1} + x_{vd_2} \leq |\mathbf{C}| - 3 + w_{d_1} + w_{d_2}$. Esta desigualdad está dominada por la desigualdad two-color (3.1), dado que $(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1)(w_{d_1} + w_{d_2}) \leq |\mathbf{C}| - 3 + w_{d_1} + w_{d_2}$, para todo ciclo \mathbf{C} par.
3. Si $|\mathcal{D}| \geq 3$ y se utilizan a lo sumo dos colores, los argumentos de los ítems anteriores muestran que la desigualdad se satisface. Por otra parte, si se utilizan al menos tres colores, la desigualdad se cumple trivialmente.

Dado que en todos los casos se cumple la desigualdad distinguished colors (4.1) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Teorema 4.2. *Asumamos que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + |\mathcal{D}| + 1$ y \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad distinguished colors (4.1) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$ si y sólo si $\mathcal{D} \geq 3$ y para todo vértice $i \in G \setminus \mathbf{C}$ existe $j \in \mathbf{C}$ tal que $ij \notin E$.*

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 3.2 y, por lo tanto, omitimos su presentación. Es interesante ver que las condiciones en el Teorema 4.2 proveen condiciones necesarias y suficientes para que (4.1) definan facetas, dando una cota adecuada para $|\mathcal{C}|$ y asumiendo que $|\mathbf{C}|$ es un ciclo binding.

4.2. Desigualdades three-consecutive vertices

En esta sección introducimos una clase de desigualdades válidas sobre ciclos pares, en las cuales se les asignan coeficientes especiales a las variables correspondientes a tres vértices consecutivos y a los colores pertenecientes a dos conjuntos disjuntos.

Definición 4.2. *Sea \mathbf{C} un ciclo par de G . Sean $i, j, k \in \mathbf{C}$ tres vértices consecutivos y sea $c_0 \in \mathcal{C}$.*

Sean $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{C} \setminus \{c_0\}$ tales que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. Definimos

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathcal{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{kc} + \sum_{c \in \mathcal{D}'} x_{ic} + \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} x_{jc} \leq \left(\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_0} + \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} w_c \\ + \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus (\{c_0\} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{D}')} x_{vc}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

como la desigualdad three-consecutive vertices asociada a \mathbf{C} , i , j , k , c_0 , \mathcal{D} , y \mathcal{D}' .

Teorema 4.3. *Las desigualdades three-consecutive vertices son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Podemos reescribir la desigualdad (4.2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} x_{vc} + \sum_{c \in \mathcal{D}} (x_{kc} + x_{jc}) + \sum_{c \in \mathcal{D}'} (x_{ic} + x_{jc}) \\ \leq \left(\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + 1) + \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} w_c. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sea z una solución factible. Definimos $\tau = 2 \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} x_{vc}$ a la suma de los primeros tres términos del lado izquierdo de (4.3), y consideremos los siguientes casos:

1. Si $w_{c_0} = 1$ y $\tau \leq |\mathcal{C}| - 2$, dado que $\sum_{c \in \mathcal{D}} (x_{kc} + x_{jc}) \leq \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c$ y $\sum_{c \in \mathcal{D}'} (x_{ic} + x_{jc}) \leq \sum_{c \in \mathcal{D}'} w_c$ por las restricciones (1.2) del modelo, entonces se cumple la desigualdad (4.3).
2. Si $w_{c_0} = 1$ y $\tau > |\mathcal{C}| - 2$, entonces afirmamos que $\sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} = 0$. Supongamos que esto no sucede, y que entonces $\sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} = a$ con $1 \leq a \leq \frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1$. Entonces a lo sumo $\frac{|\mathcal{C}|}{2} - (a + 1)$ vértices en \mathbf{C}_i pueden usar el color c_0 y a lo sumo $\frac{|\mathcal{C}|}{2} - (a + 1)$ vértices en $\mathcal{C}_j \setminus \{j\}$ pueden usar colores en $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$. Luego, $2 \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} x_{vc} \leq |\mathcal{C}| - 2$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, tenemos que $\sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} = 0$.

La afirmación anterior implica que todos los vértices en \mathbf{C}_i usan color c_0 y $\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1$ vértices en $\mathcal{C}_j \setminus \{j\}$ utilizan algún color en $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$. Si los vértices en $\mathcal{C}_j \setminus \{j\}$ utilizan al menos dos colores de $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, se verifica la desigualdad (4.3) dado que $\sum_{c \in \mathcal{D}} (x_{kc} + x_{jc}) + \sum_{c \in \mathcal{D}'} (x_{ic} + x_{jc}) \leq 1$ y el lado derecho de (4.3) es mayor o igual que $|\mathcal{C}|$ en este caso. Por el contrario, si los vértices en $\mathcal{C}_j \setminus \{j\}$ utilizan un solo color de $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, entonces $\sum_{c \in \mathcal{D}} (x_{kc} + x_{jc}) + \sum_{c \in \mathcal{D}'} (x_{ic} + x_{jc}) = 0$, por ser z un coloreo acíclico. Por lo tanto, se cumple (4.3) también en este caso.

3. Si $w_{c_0} = 0$, entonces $2 \sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_0} = 0$. Por otro lado, $\sum_{v \in \mathcal{C}_j \setminus \{j\}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} x_{vc} \leq \frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1$ y $\sum_{c \in \mathcal{D}} (x_{kc} + x_{jc}) + \sum_{c \in \mathcal{D}'} (x_{ic} + x_{jc}) \leq \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} w_c$. Combinando estas afirmaciones, vemos que se verifica la desigualdad (4.3) en este caso.

Dado que en los tres casos se verifica la desigualdad three-consecutive vertices (4.3) y que z es una solución arbitraria, concluimos que esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales las desigualdades three-consecutive vertices definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$. Omitimos la demostración completa dado que es similar a las demostraciones previas. No obstante incluimos un fragmento de la demostración que involucra un argumento particular sobre una cadena de soluciones factibles, dado que difiere de los argumentos previos.

Teorema 4.4. *Asumimos que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + |\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| + 2$, con $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| \geq 3$, y \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad three-consecutive vertices (4.2) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$ si y solo si para cada vértice $s \in V \setminus \mathbf{C}$ existe un conjunto $I \subset \mathbf{C}$ con:*

a) $I = \mathbf{C}_j$ o $I = \mathbf{C}_j \setminus \{j\}$, o

b) $I = \mathbf{C}_i$ o $I = \mathbf{C}_i \setminus \{u\}$ con $u \neq i, k$, o

c) $I = (\mathbf{C}_t \setminus \{t\}) \cup \{v\}$ con $v \in \mathbf{C}_j$ y $t \in \{i, k\}$, o

d) $I \subset \mathbf{C} \setminus \{j\}$ es un conjunto independiente con $|I| = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$, $I \cap \mathbf{C}_i \neq \emptyset$, $I \cap \mathbf{C}_j \neq \emptyset$

tal que $sv \notin E$ para todo $v \in I$.

Fragmento de la demostración. Sea F la cara de $P_S(G, \mathcal{C})$ definida por la desigualdad (4.2). Sea $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathbf{C}|(|V|+1)}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^T y = \lambda_0$ para todo $y \in F$. La demostración consiste en mostrar que λ es una combinación lineal del vector de coeficientes de la desigualdad (4.2) y los vectores de coeficientes de las restricciones (1.1). La demostración está organizada como una secuencia de afirmaciones sobre λ , y en este fragmento sólo probamos que $\lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vd}} = \lambda_{x_{v'c_0}} - \lambda_{x_{v'd}}$ para todo $v, v' \in \mathbf{C} \setminus \{i, j, k\}$ y $d \in \mathcal{D}$ (i.e., una afirmación similar a la Afirmación 3 y la Afirmación 4 en la demostración del Teorema 3.2). La demostración de este hecho es particularmente interesante dado que involucra la construcción de una secuencia de soluciones factibles –en lugar de un par de soluciones– a partir de la cual se obtiene información sobre λ .

Sea $\mathbf{C} = \{i, j, k, v^0, u^1, v^1, u^2, v^2, \dots, u^{\frac{|\mathbf{C}|}{2}-2}, v^{\frac{|\mathbf{C}|}{2}-2}\}$. Para $t = 0, \dots, \frac{|\mathbf{C}|}{2}-2$, sea $\mathbf{C}_j^t = \{j, v^0, v^1, \dots, v^t\}$, y sea $\mathbf{C}_{v^0}^t = \{v^0, v^1, \dots, v^t\}$. Asumimos que $\mathbf{C}_{v^0}^{-1} = \emptyset$. Para $t = 0, \dots, \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 2$, sea $\mathbf{C}_k^t = \{k, u^1, \dots, u^t\}$.

Afirmación 1: $\lambda_{x_{v^t c_0}} - \lambda_{x_{v^t d}} = \lambda_{x_{u^t c_0}} - \lambda_{x_{u^t d}} \quad \forall v^t \in \mathbf{C}_j, \quad \forall u^t \in \mathbf{C}_i, \quad 1 \leq t \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 2, \forall d \in \mathcal{D}$

c_0	d	\dots	d'	
$\mathbf{C}_j \setminus \mathbf{C}_j^{t-1}$	\mathbf{C}_j^{t-1}	\dots	$\mathbf{C}_i \setminus \mathbf{C}_k^{t-1}$	
\mathbf{C}_k^{t-1}		\dots		
(a)				
c_0	d	\dots	d'	
$\mathbf{C}_j \setminus \mathbf{C}_j^t$	\mathbf{C}_j^t	\dots	$\mathbf{C}_i \setminus \mathbf{C}_k^t$	
\mathbf{C}_k^t		\dots		
(b)				
c_0	d	\dots	d'	
$\mathbf{C}_i \setminus \mathbf{C}_k^{t-1}$	\mathbf{C}_k^{t-1}	\dots	$\mathbf{C}_j \setminus \mathbf{C}_{v_0}^{t-2}$	
$\mathbf{C}_{v_0}^{t-2}$		\dots		
(c)				
c_0	d	\dots	d'	
$\mathbf{C}_i \setminus \mathbf{C}_k^t$	\mathbf{C}_k^t	\dots	$\mathbf{C}_j \setminus \mathbf{C}_{v_0}^{t-1}$	
$\mathbf{C}_{v_0}^{t-1}$		\dots		
(d)				

Figura 4.1: Construcciones para la demostración del Teorema 4.4

Sean $z_t = (x, w)$ una solución factible como la presentada en la Figura 4.1(a) y sea $z'_t = (x', w')$ una solución factible como la dada en la Figura 4.1(b), donde $d \in \mathcal{D}$, $d' \in \mathcal{D}'$ y no se utiliza ningún otro color en $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, excepto aquellos especificados en las soluciones. El grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente con los colores restantes dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 5$, y este coloreo también es acíclico para G . Notar que las dos soluciones z_t y z'_t satisfacen (4.2) por igualdad, por lo tanto $z_t, z'_t \in F$ y $\lambda^T z_t = \lambda_0 = \lambda^T z'_t$. Dado que z_t y z'_t solo difieren en las coordenadas $x_{v^t c_0}$, $x_{v^t d}$, $x_{u^t c_0}$ y $x_{u^t d'}$, entonces, $\lambda_{x_{v^t c_0}} + \lambda_{x_{u^t d'}} = \lambda_{x_{v^t d}} + \lambda_{x_{u^t c_0}}$, que es lo que queríamos demostrar.

◇

Afirmación 2: $\lambda_{x_{v^{t-1} c_0}} - \lambda_{x_{v^{t-1} d}} = \lambda_{x_{u^t c_0}} - \lambda_{x_{u^t d}} \quad \forall v^{t-1} \in \mathbf{C}_j, \quad \forall u^t \in \mathbf{C}_i, \quad 1 \leq t \leq \frac{|\mathcal{C}|}{2} - 2$

Sea $z_t = (x, w)$ la solución factible representada por la Figura 4.1(c) y $z'_t = (x', w')$ la solución factible dada por la Figura 4.1(d), donde $d \in \mathcal{D}$, $d' \in \mathcal{D}'$ y ningún otro color en $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ es utilizado, excepto los especificados en las soluciones. El grafo $G \setminus \mathbf{C}$ puede colorearse acíclicamente con los colores restantes, dado que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + 5$, y este coloreo es también acíclico para G . Notar que z_t y z'_t satisfacen (4.2) por igualdad, luego $z_t, z'_t \in F$ y $\lambda^T z_t = \lambda_0 = \lambda^T z'_t$. Como z_t y z'_t solo difieren en las coordenadas $x_{v^{t-1} c_0}$, $x_{v^{t-1} d'}$, $x_{u^t c_0}$ y $x_{u^t d}$, entonces $\lambda_{x_{v^{t-1} c_0}} + \lambda_{x_{u^t d}} = \lambda_{x_{v^{t-1} d'}} + \lambda_{x_{u^t c_0}}$. Un argumento estándar prueba que $\lambda_{x_{v^{t-1} d'}} = \lambda_{x_{v^{t-1} d}}$ y, por combinación de estos dos hechos, queda demostrada la afirmación.

◇

Combinando la Afirmación 1 y la Afirmación 2, concluimos que $\lambda_{x_{vc_0}} - \lambda_{x_{vd}} = \lambda_{x_{v'c_0}} - \lambda_{x_{v'd}}$ para todo $v, v' \in \mathbf{C} \setminus \{i, j, k\}$. \square

4.3. Desigualdades prominent vertex

En esta sección introducimos una familia de desigualdades particularmente complicada sobre ciclos pares. Estas desigualdades no admiten una interpretación combinatoria directa dado que involucran un gran número de coeficientes correspondientes a las variables x asociadas a los vértices en el ciclo pero, sin embargo, inducen facetas para $P_S(G, \mathcal{C})$. Nuevamente, damos condiciones necesarias y suficientes para que estas desigualdades definan facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$.

Definición 4.3. Sea \mathbf{C} un ciclo par de G y consideremos dos vértices consecutivos i y j en \mathbf{C} . Sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}$. Definimos la desigualdad prominent vertex asociada a \mathbf{C} , j , i , c_0 , c_1 y \mathcal{D} como

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} + \sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_0} + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c + |\mathbf{C}| - 2. \quad (4.4)$$

Teorema 4.5. Las desigualdades prominent vertex son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea $z = (x, w)$ una solución factible y consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \geq 2$ entonces el lado derecho de la desigualdad es mayor o igual a $\frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_0} + |\mathbf{C}|$. Por otro lado, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_0}$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} + \sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} \leq |\mathbf{C}|$. Combinando estas afirmaciones, verificamos que se cumple (4.4) en este caso.
2. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \leq 1$ y $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} \leq (\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1) w_{c_0}$, entonces basta probar que

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} + \sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} \leq |\mathbf{C}| - 2 + w_{c_0} + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c. \quad (4.5)$$

Verificamos ahora que esto efectivamente sucede, y para esto consideremos los siguientes casos:

- a) Si $w_{c_0} = 1$ y $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 1$, entonces se verifica (4.5), dado que el lado izquierdo de esta desigualdad es a lo sumo $|\mathbf{C}|$.
- b) Si $w_{c_0} = 0$ y $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 0$, entonces el lado derecho de (4.5) es igual a $|\mathbf{C}| - 2$. Como en este caso tenemos que $\sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} = 0$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_0} = 0$, entonces el lado izquierdo de (4.5) se reduce a $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1}$. Como $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces (4.5) se cumple.

- c) Si exactamente uno de los dos términos, w_{c_0} o $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c$, es igual a 0, entonces, dado que z representa un coloreo acíclico, el lado izquierdo de (4.5) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$. Como el lado derecho es igual a ese valor, se cumple la desigualdad.

Por lo tanto, como en los tres casos se verifica (4.5), también se cumple (4.4).

3. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \leq 1$ y $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{j\}} x_{vc_0} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces por el Lema 3.1(ii), todos los vértices en \mathbf{C}_i utilizan el color c_0 . Por lo tanto, $\sum_{v \in \mathbf{C}_i} x_{vc_1} = 0$. Además, $\sum_{v \in \mathbf{C}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 2 + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c$. Luego, se verifica la desigualdad (4.4).

Dado que en todos los casos se cumple la desigualdad prominent vertex (4.4), y z es una solución arbitraria, entonces esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

En el siguiente teorema establecemos las condiciones necesarias y suficientes para las cuales las desigualdades prominent vertex definen facetas.

Teorema 4.6. *Asumimos que $|\mathcal{C}| \geq \chi_A(G \setminus \mathbf{C}) + \max\{|\mathcal{D}|, 2\} + 2$, y \mathbf{C} es un ciclo binding. La desigualdad prominent vertex (4.4) define una faceta de $P_S(G, \mathcal{C})$ si y solo si para cada vértice $s \in V \setminus \mathbf{C}$ existe un conjunto I tal que $sv \notin E$ para todo $v \in I$ y*

- a) $I = \mathbf{C}_i$, o
- b) $I = \mathbf{C}_j$, o
- c) $I \subset \mathbf{C} \setminus \{j\}$ es un conjunto independiente con $|I| = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$.

No incluimos la demostración del Teorema 4.6 dado que en el mismo utilizamos argumentos similares a los planteados en teoremas anteriores.

4.4. Desigualdades basket

En esta sección retomamos la idea de incorporar desigualdades válidas que estén definidas sobre ciclos y cliques, dado que las desigualdades basadas en cliques demostraron ser muy efectivas en el contexto de un algoritmo de planos de corte para el problema de coloreo de vértices clásico [88, 89]. Si $\mathbf{C} \subseteq V$, llamamos $G_{\mathbf{C}}$ al subgrafo de G inducido por \mathbf{C} .

Definición 4.4. *Sean \mathbf{C} un ciclo par de G y $K \subseteq V$ una clique tales que $\mathbf{C} \cap K = \{i, j\}$ (ver Figura 4.2). Sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$, con $c_0 \neq c_1$ y $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ tales que $|\mathcal{C}| - |K| \leq |\mathcal{D}| \leq |\mathcal{C}| - 2$ y $c_0, c_1 \notin \mathcal{D}$.*

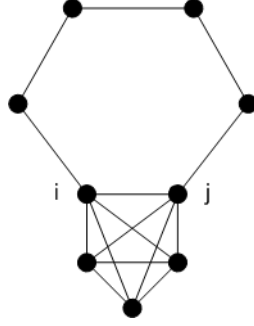


Figura 4.2: Estructura para las desigualdades basket.

Definimos

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{i, j\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) + \sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{i, j\}} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} - \sum_{v \in K \setminus \{i, j\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 3 + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \quad (4.6)$$

como la desigualdad basket asociada al ciclo \mathbf{C} , la clique K , los vértices i y j , el conjunto de colores \mathcal{D} , y los colores c_0 y c_1 .

Teorema 4.7. *Las desigualdades basket son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.*

Demostración. Sea z una solución factible. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \geq 1$, entonces el lado derecho de (4.6) es mayor o igual a $|\mathbf{C}| - 2$. Dado que los primeros dos términos del lado izquierdo de (4.6) involucran los vértices de $\mathbf{C} \setminus \{i, j\}$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{i, j\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1} + \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc})$ es menor o igual a $|\mathbf{C}| - 2$ y entonces se cumple la desigualdad. Por otra parte, si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 0$, entonces se tiene que cumplir que $|\mathcal{D}| = |\mathbf{C}| - |\mathbf{K}|$ (si $|\mathcal{D}| > |\mathbf{C}| - |\mathbf{K}|$ entonces al menos un vértice en la clique utilizaría un color en $|\mathcal{D}|$, contradiciendo la hipótesis). Consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{i, j\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1})$ es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 3$, entonces se verifica la desigualdad. Notar que el lado derecho de (4.6) es igual a $|\mathbf{C}| - 3$.
2. Si $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{i, j\}} (x_{vc_0} + x_{vc_1})$ es igual a $|\mathbf{C}| - 2$, entonces por ser z un coloreo acíclico, el vértice i o j utiliza un color en $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\})$. Como $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 0$, los vértices restantes de la clique tienen que utilizar los $|\mathbf{K}| - 1$ colores que no están en \mathcal{D} y entre los cuales están c_0 y c_1 . Entonces al menos un vértice en $K \setminus \{i, j\}$ utiliza el color c_0 o c_1 . Por lo tanto, el lado izquierdo de (4.6) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 3$ y se verifica la desigualdad.

Dado que en todos los casos se verifica la desigualdad basket (4.6) y que z es una solución arbitraria, entonces esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$. \square

Teorema 4.8. Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G_{\mathbf{C}})$ y $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| - |K|$, entonces las desigualdades basket definen facetas de $P_S(G_{\mathbf{C}}, \mathcal{C})$.

Dado que la demostración del Teorema 4.8 es similar a las realizadas en teoremas anteriores, omitimos la misma. Generalizamos a continuación las desigualdades basket (4.6) sobre una estructura que involucra un número mayor de cliques. Introducimos en primer lugar la definición de dicha estructura.

Definición 4.5. Sea \mathbf{C} un ciclo par de G , y sean $K_i \subseteq V$ con $i \in I = \{1, \dots, q\}$ q cliques de tamaño mayor que 2 tales que $|E(\mathbf{C}) \cap E(K_i)| = 1$ para todo $i \in I$ y $(K_i \cap K_j) \setminus \mathbf{C} = \emptyset$ para todo $i, j \in I$ (ver Figura (4.3)). Sean $Q = \bigcup_{i=1}^q K_i$ y $t = |\mathbf{C} \cap Q|$. Sean $c_0, c_1 \in \mathcal{C}$, con $c_0 \neq c_1$, y $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ tal que $|\mathcal{C}| - \min\{|K_i|\}_{i \in I} \leq |\mathcal{D}| \leq |\mathcal{C}| - 2$ y $c_0, c_1 \notin \mathcal{D}$. Definimos

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus Q} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) + \sum_{v \in \mathbf{C} \setminus Q} \sum_{c \in \mathcal{D}} x_{vc} - \sum_{i=1}^q \sum_{v \in K_i \setminus \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 1 - t + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \quad (4.7)$$

como la desigualdad basket cycle asociada al ciclo \mathbf{C} , las cliques K_i , con $i \in I$, el conjunto de colores \mathcal{D} , y los colores c_0 y c_1 .

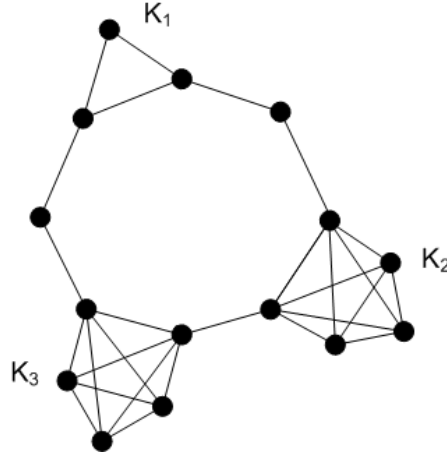


Figura 4.3: Ejemplo de la estructura que es el soporte de las desigualdades basket cycle.

Teorema 4.9. Las desigualdades basket cycle son válidas para $P_S(G, \mathcal{C})$.

Demostración. Sea z una solución factible. Si $|\mathcal{D}| > |\mathcal{C}| - \min\{|K_i|\}_{i \in I}$ o existe $j \in I$ tal que $|K_j| > \min\{|K_i|\}_{i \in I}$, entonces existe siempre algún vértice en una clique que utiliza un color en \mathcal{D} . Por lo tanto, como $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \geq 1$, el lado derecho de (4.7) es mayor o igual a $|\mathbf{C}| - t$. Dado que el lado izquierdo es menor o igual que este valor, la desigualdad (4.7) se satisface trivialmente. En caso contrario, es decir,

si $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| - \min\{|K_i|\}_{i \in I}$ y todas las cliques K_i , con $i \in I$, tienen el mismo tamaño, consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \geq 1$, la desigualdad (4.7) se satisface.
2. Si $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 0$ entonces, por ser z un coloreo acíclico, existe un vértice $v \in \mathbf{C}$ que usa un color $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}$. Si $v \in \mathbf{C} \setminus Q$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus Q} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 1 - t$ y la desigualdad (4.7) se cumple. En caso contrario, $v \in \mathbf{C} \cap K_i$, para algún $i \in I$. Dado que $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c = 0$ y $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| - |K_i|$, algún vértice en $K_i \setminus \mathbf{C}$ debe utilizar el color c_0 o c_1 . Por lo tanto, $\sum_{i=1}^q \sum_{v \in K_i \setminus \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \geq 1$ y se verifica la desigualdad.

Dado que en todos los casos se satisface la desigualdad basket cycle (4.7) y que z es una solución arbitraria, entonces esta desigualdad es válida para $P_S(G, \mathcal{C})$.

□

En el siguiente teorema determinamos condiciones bajo las cuales las desigualdades basket cycle (4.7) definen facetas del poliedro bajo estudio.

Teorema 4.10. *Si $|\mathcal{C}| > \chi_A(G)$, $\{K_i\}_{i \in I}$ es un conjunto de q cliques disjuntas dos a dos tales que $|K_i| = |K_j|$ para todo $i, j \in I$ y $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| - |K_i|$ entonces las desigualdades basket cycle definen facetas de $P_S(G, \mathcal{C})$.*

No incluimos la demostración del Teorema (4.10) dado que utiliza argumentos similares a los utilizados en las demostraciones anteriores.

Capítulo 5

Estudio de rangos disyuntivos

Los métodos *lift-and-project* proveen una forma sistemática de generar una secuencia de relajaciones convexas de un politopo, que convergen a la cápsula convexa de las soluciones factibles. Estos métodos usualmente comienzan con la relajación lineal, y construyen una secuencia de politopos –cada uno incluido en el anterior– que finaliza con la cápsula convexa. Estos métodos utilizan formulaciones con una mayor cantidad de variables durante la construcción de esta secuencia de politopos, porque estas formulaciones a veces admiten representaciones compactas de una cantidad exponencial de facetas. Muchos *operadores lift-and-project* han sido propuestos en los últimos años, siendo los más importantes el operador de Balas-Ceria-Cornuéjols [17], el operador de Sherali-Adams [103], el operador de Lovász-Schriber [78], y el operador de Lasserre [73]. Para un estudio más profundo de estos procedimientos, remitimos al lector a [16].

Un concepto que surge de la existencia de tales operadores es el de *rango* de una desigualdad válida, definida como el mínimo número de aplicaciones del operador necesario para obtener un politopo para el cual la desigualdad sea válida (este concepto está bien definido dado que el último politopo de la secuencia es la cápsula convexa de las soluciones factibles, y por lo tanto satisface la desigualdad válida). Este valor ha sido propuesto como una medida de interés teórico de una desigualdad válida, en contraste con otras medidas empíricas, como la contribución práctica de la desigualdad dentro de un algoritmo basado en planos de corte.

En este trabajo estudiamos el rango de algunas de las familias de desigualdades válidas presentadas en los Capítulos 3 y 4. En particular, estudiamos el rango asociado al operador de Balas-Ceria-Cornuéjols (BCC), comúnmente llamado *rango disyuntivo*. También proponemos estudiar un concepto dual, al que llamamos *anti-rango disyuntivo* de una desigualdad válida, definido como el número máximo de aplicaciones del operador BCC que asegure la obtención de un politopo que satisface la

desigualdad. En [31] se implementó una versión preliminar de un procedimiento branch-and-cut, mostrando experimentalmente que dos de las familias de desigualdades válidas consideradas en este trabajo permitieron obtener la mejor performance. Una motivación adicional para el presente estudio es verificar si estos resultados computacionales se correlacionan con la fuerza teórica de estas desigualdades, medida por el rango y anti-rango disyuntivo. Se pueden encontrar análisis previos del rango disyuntivo de desigualdades válidas para problemas particulares en [1, 77, 84], y otros estudios sobre aplicaciones de procedimientos lift-and-project a problemas particulares se llevaron a cabo en [15, 74, 75, 83, 102], entre otros.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En Sección 5.1 recordamos la definición del operador BCC y del rango disyuntivo de una desigualdad válida, e introducimos la definición de anti-rango de una desigualdad válida. En Sección 5.2 estudiamos el rango y anti-rango disyuntivo de seis familias de desigualdades válidas para el poliedro de coloreo acíclico.

5.1. El operador BCC

Definimos en esta sección el operador BCC introducido por Balas, Ceria, and Cornuéjols [17]. Sea $P = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^n : Ax \leq b\}$ la cápsula convexa de los puntos enteros del conjunto $L = \{x \in [0, 1]^n : Ax \leq b\}$. El operador BCC toma el politopo L y una variable x_i para $i \in \{1, \dots, n\}$ y genera un nuevo politopo $P_{x_i}(L) \subseteq L$ de la siguiente manera:

1. Multiplicamos el sistema $Ax \leq b$ por x_i y $1 - x_i$, obteniendo los sistemas $x_i(b - Ax) \geq 0$ y $(1 - x_i)(b - Ax) \geq 0$.
2. Identificamos a $x_i := x_i^2$ y $y_k := x_i x_k$ para $k \neq i$, obteniendo de esta manera un politopo $L^i \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ de dimensión mayor al original.
3. Proyectamos L^i al espacio original de las variables x , y llamamos $P_{x_i}(L)$ al politopo resultante.

Nos referimos al procedimiento aplicado a la variable x_i como BCC_{x_i} . Este procedimiento se puede repetir sobre otra variable x_j , para $j \neq i$, obteniendo luego el politopo $P_{x_j}(P_{x_i}(L))$. Puede verse que el orden de las variables procesadas no modifica el politopo resultante [17], i.e., $P_{x_j}(P_{x_i}(L)) = P_{x_i}(P_{x_j}(L))$, y entonces llamaremos a este politopo $P_{\mathbb{A}}(L)$, donde $\mathbb{A} = \{x_i, x_j\}$. Si $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}'$ entonces $P_{\mathbb{A}'}(L) \subseteq P_{\mathbb{A}}(L)$ y $P_{\mathbb{V}}(L) = P$ para $\mathbb{V} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

La Figura 5.1 muestra un ejemplo sobre la relajación lineal $L = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 + \varepsilon\}$, con $0 < \varepsilon < 1$. En este caso, la cápsula convexa de las soluciones enteras es $P = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$. Comenzando en L , cada camino en la figura genera una secuencia de politopos finalizando en P luego

de tres pasos. Consideremos la desigualdad $x_1 \leq 1$, que es válida para P (pero no para L). Los politopos marcados en la figura con (*) son aquellos que satisfacen $x_1 \leq 1$. Para todo camino desde L hasta P en la figura, en algún punto se satisface la desigualdad $x_1 \leq 1$, y el *rango disyuntivo* es la menor altura k tal que algún politopo satisface esta desigualdad.

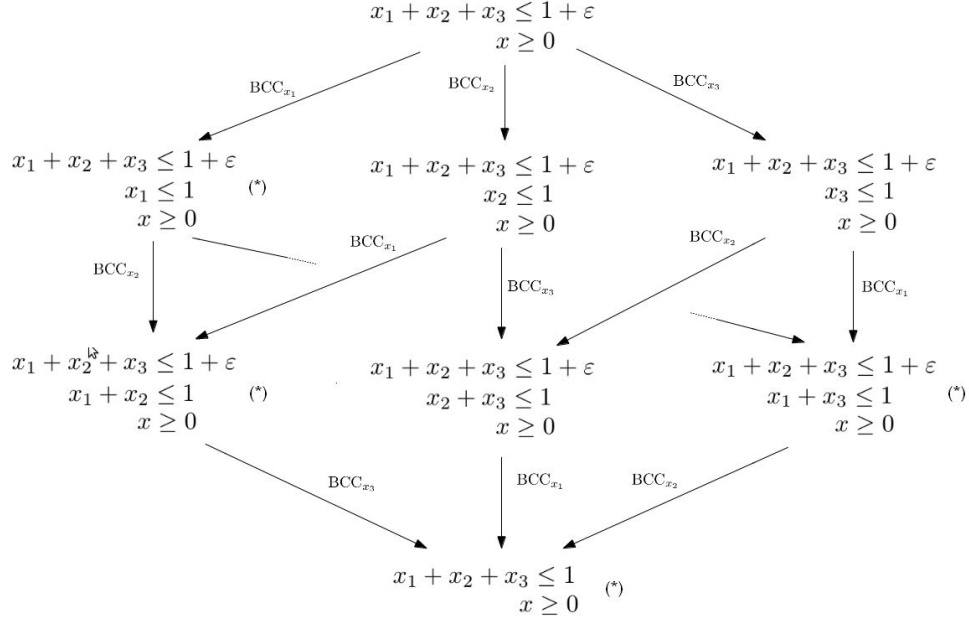


Figura 5.1: El gráfico muestra los politopos obtenidos luego de aplicar sucesivamente el operador BCC a partir de la relajación lineal $L = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 + \varepsilon\}$. los politopos marcados con (*) satisfacen la desigualdad $x_1 \leq 1$. Un politopo del primer nivel (i.e., obtenido al aplicar exactamente una vez el operador BCC) satisface la desigualdad $x_1 \leq 1$, luego la desigualdad tiene rango disyuntivo 1. Todos los politopos del tercer nivel satisfacen la desigualdad mientras que existe un politopo en el segundo nivel que no satisface la desigualdad, luego la desigualdad tiene anti-rango disyuntivo 2.

Definición 5.1. [17] Sea $\pi x \leq \pi_0$ una desigualdad válida para P . La desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ tiene rango disyuntivo k si y solo si existe un conjunto \mathbb{A} de variables tal que $|\mathbb{A}| = k$ y la desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$, y $\pi x \leq \pi_0$ no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$ donde \mathbb{B} es cualquier conjunto de variables con $|\mathbb{B}| = k - 1$.

El rango disyuntivo de una desigualdad válida es una medida teórica, dado por el menor número de aplicaciones del operador BCC [17] que son necesarias para obtener la desigualdad. Si el rango disyuntivo de una desigualdad válida para P es 0, entonces también es válida para la relajación lineal

L . En este trabajo proponemos también estudiar el *máximo* número de dichas aplicaciones, al cual llamamos el *anti-rango disyuntivo* de la desigualdad y es, en cierto sentido, el concepto dual del rango disyuntivo. En la Figura 5.1, el anti-rango disyuntivo corresponde al máximo nivel t tal que existe algún politopo en el nivel t que *no* satisface la desigualdad válida.

Definición 5.2. *Sea $\pi x \leq \pi_0$ una desigualdad válida para P con rango disyuntivo no nulo. La desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ tiene anti-rango disyuntivo t si y solo si existe un conjunto \mathbb{B} de variables con $|\mathbb{B}| = t$ tal que $\pi x \leq \pi_0$ no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$, y $\pi x \leq \pi_0$ es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$ para cualquier conjunto \mathbb{A} de variables con $|\mathbb{A}| = t + 1$.*

El rango disyuntivo de una desigualdad válida es menor o igual que su anti-rango. Por lo tanto, si el anti-rango disyuntivo de una desigualdad válida es 0 entonces el rango también es 0. Además, si el rango disyuntivo es 0, entonces la relajación lineal satisface la desigualdad y el anti-rango también es 0. El anti-rango disyuntivo en una medida natural asociada con una desigualdad válida, proveyendo en este caso una cota superior al número de iteraciones BCC necesarias para obtener un politopo $P_{\mathbb{A}}(L)$ que satisface la desigualdad válida sin importar la elección del conjunto \mathbb{A} de variables.

La siguiente propiedad del operador BCC resulta muy útil para estudiar el rango disyuntivo de una desigualdad válida.

Teorema 5.1 ([17]). *Si \mathbb{A} es un subconjunto de variables, entonces $P_{\mathbb{A}}(L) = \text{conv}\{x \in L : x_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } x_i \in \mathbb{A}\}$.*

Este teorema es la base para el análisis del rango disyuntivo de las desigualdades válidas, dado que proporciona una forma directa de chequear si una solución en L (posiblemente fraccionaria) pertenece o no a $P_{\mathbb{A}}(L)$, para un subconjunto dado \mathbb{A} de variables. Este análisis directo hace posible el abordaje realizado en las demostraciones de la Sección 5.2.

No estamos al tanto de resultados similares para los restantes operadores lift-and-project mencionados en la introducción, que caractericen las soluciones factibles del poliedro resultante de una secuencia de aplicaciones del operador en cuestión. Al carecer de esta caracterización, la estrategia utilizada en este trabajo para hallar cotas sobre el rango disyuntivo no podría aplicarse de manera directa para los demás operadores. En consecuencia, la exploración de los rangos disyuntivos asociados con otros operadores parece ser una tarea más complicada. Por este motivo, en esta tesis nos concentramos en el rango asociado al operador BCC.

5.2. Rango y anti-rango disyuntivo de desigualdades conocidas

En esta sección estudiamos el rango y anti-rango disyuntivo de algunas de las familias de desigualdades presentadas en los capítulos anteriores, cuando el grafo G es un ciclo. Asumimos a lo largo de esta sección que $G = (\mathbf{C}, E)$ es un ciclo par, y todas las desigualdades presentadas en esta sección involucran tal ciclo. Llamamos $\mathbf{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_{|\mathbf{C}|}\}$ al conjunto de los vértices de G , siendo $v_i v_{i+1} \in E$ para $1 \leq i \leq |\mathbf{C}| - 1$, y $v_{|\mathbf{C}|} v_1 \in E$. Sea $p = |V||\mathbf{C}| + |\mathbf{C}|$, es decir, la cantidad total de variables del problema.

En el siguiente lema recopilamos resultados que serán útiles en las demostraciones de esta sección.

Lema 5.1. Sean $(x, w) \in L(G, \mathcal{C})$, $\mathbf{C} \subseteq V$ un ciclo par, y $c \in \mathcal{C}$.

- (i) El punto (x, w) satisface la desigualdad $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_c$.
- (ii) Si a lo sumo $|\mathbf{C}| - 1$ variables en $\{x_{vd}\}_{v \in \mathbf{C}, d \in \mathcal{C}}$ tienen valores fraccionarios, entonces existen a lo sumo $|\mathbf{C}|/2 - 1$ variables en $\{x_{vc}\}_{v \in \mathbf{C}}$ con valores fraccionarios.

Demostración. Para la parte (i), dado que $(x, w) \in L(G, \mathcal{C})$ entonces (1.2) implica que $x_{uc} + x_{vc} \leq w_c$ para toda arista uv en el ciclo (considerado como un conjunto de aristas). Sumando estas desigualdades sobre todas las aristas del ciclo, se concluye la parte (i).

Verificamos ahora la parte (ii). Si existen más de $|\mathbf{C}|/2$ variables en $\{x_{vc}\}_{v \in \mathbf{C}}$ con valores fraccionarios, entonces (1.1) implica que existen al menos $|\mathbf{C}|/2$ variables en $\{x_{vd}\}_{v \in \mathbf{C}, d \in \mathcal{C} \setminus \{c\}}$ que son fraccionarias. Esto conduce a que el número de variables fraccionarias en $\{x_{vd}\}_{v \in \mathbf{C}, d \in \mathcal{C}}$ es al menos $|\mathbf{C}|$, contradiciendo la hipótesis. □

5.2.1. Desigualdades two-color

Comenzamos estudiando las desigualdades two-color (3.1), familia con la mejor performance en el procedimiento branch-and-cut reportado en [31].

Con el objetivo de describir eficientemente las construcciones de las soluciones factibles dadas en esta sección, introducimos la representación gráfica descrita en la Figura 5.2. La misma especifica el valor que cada variable toma en una solución. Por ejemplo, el valor 0 en la columna v_2 y la fila c_1 en la Figura 5.2 afirma que la variable $x_{v_2 c_1}$ toma valor 0. La última columna representa los valores de las variables w .

Teorema 5.2. El rango disyuntivo de la desigualdad two-color (3.1) es 2.

	v_1	v_2	v_3	v_4	...	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$	1
c_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	...	0	$\frac{1}{2}$
c_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$	1
c_3	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$c_{ \mathbf{C} }$	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.2: Construcción para la demostración del Teorema 5.2. Los valores en negrita corresponden a las variables en $\mathbb{V} \setminus \mathbb{B}$.

Demostración. Primero debemos demostrar que el rango disyuntivo de (3.1) es menor o igual que 2. Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ el conjunto $\{w_{c_0}, w_{c_1}\}$. Debemos probar que (3.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea $z = (x, w)$ una solución (posiblemente fraccionaria) tal que $w_{c_0}, w_{c_1} \in \{0, 1\}$ (el Teorema 5.1 implica que $z \in P_{\mathbb{A}}(L)$), y consideremos los siguientes casos:

1. Si las variables en \mathbb{A} toman valor 1 en z , i.e., $w_{c_0} = w_{c_1} = 1$, entonces el lado izquierdo de (3.1) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$, dado que z satisface (1.3), con $A = \mathbf{C}$, $c = c_0$ y $c' = c_1$. Notar que, en este caso, el lado derecho de la desigualdad (3.1) es igual a $|\mathbf{C}| - 1$.
2. Si exactamente una variable en \mathbb{A} toma valor 1, supongamos $w_{c_0} = 1$ y $w_{c_1} = 0$, entonces el lado izquierdo de (3.1) es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$ por el Lema 5.1(i). Dado que el lado derecho de la desigualdad (3.1) es igual a $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces z satisface (3.1).
3. Si las dos variables en \mathbb{A} toman valor 0 en z , i.e., $w_{c_0} = w_{c_1} = 0$, entonces por (1.2), el lado izquierdo de (3.1) toma valor 0. El lado derecho de la desigualdad (3.1) es igual al valor 1. Luego z satisface la desigualdad.

Dado que en los tres casos la desigualdad two-color se satisface y z es una solución arbitraria de $P_{\mathbb{A}}(L)$, concluimos que (3.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Entonces, el rango disyuntivo de (3.1) es menor o igual que 2.

Ahora demostraremos que el rango disyuntivo de (3.1) es mayor o igual que 2. Sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto arbitrario de variables con cardinalidad 1. Para demostrar que la desigualdad two-color no

es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$, debemos mostrar una solución $z \in P_{\mathbb{B}}(L)$ que viole (3.1). Con este propósito, consideramos la solución descrita en la Figura 5.2, la cual viola (3.1) pero satisface (1.1)-(1.3), y consideremos los siguientes casos:

- Si $\mathbb{B} = \{w_{c_i}\}$ para algún $i \neq 1$, entonces la solución en la Figura 5.2 pertenece a $P_{\mathbb{B}}(L)$ por el Teorema 5.1 y viola (3.1).
- Si $\mathbb{B} = \{w_{c_1}\}$, entonces la solución obtenida a partir de la Figura 5.2 intercambiando los colores c_0 y c_1 viola (3.1) y pertenece a $P_{\mathbb{B}}(L)$ por el Teorema 5.1.
- Si $\mathbb{B} = \{x_{vc_1}\}$, asumimos sin pérdida de generalidad que $v = v_2$. Nuevamente, la solución descrita por la Figura 5.2 viola (3.1).
- If $\mathbb{B} = \{x_{vc_0}\}$, asumimos sin pérdida de generalidad que $v = v_2$. La solución obtenida a partir de la Figura 5.2 intercambiando los colores c_0 y c_1 viola (3.1).
- Si $\mathbb{B} = \{x_{vc}\}$ con $c \notin \{c_0, c_1\}$, asumimos sin pérdida de generalidad que $v = v_1$. La solución obtenida de la Figura 5.2 intercambiando los colores c y c_2 viola (3.1).

Concluimos que para todo conjunto \mathbb{B} de un elemento la desigualdad (3.1) no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$, luego el rango disyuntivo de (3.1) es igual a 2. \square

Para establecer el anti-rango disyuntivo de (3.1) primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 5.2. *Si $z = (x, w) \in L$ viola la desigualdad two-color, entonces $1 < w_{c_0} + w_{c_1} < 2$.*

Demostración. Sea $z = (x, w) \in L$ una solución que viola (3.1). Entonces,

$$1 + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) < \sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}).$$

Por el Lema 5.1(i), tenemos que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_0}$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vc_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{c_1}$. Por lo tanto, $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} (w_{c_0} + w_{c_1})$ y

$$1 + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) < \frac{|\mathbf{C}|}{2} (w_{c_0} + w_{c_1}).$$

Concluimos entonces que $1 < w_{c_0} + w_{c_1}$. Por otro lado, la restricción (1.3) afirma que $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 1$. Entonces,

$$1 + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{c_0} + w_{c_1}) < |\mathbf{C}| - 1$$

Concluimos entonces que $w_{c_0} + w_{c_1} < 2$. \square

Estamos en condiciones ahora de caracterizar el anti-rango disyuntivo de las desigualdades two-color. Recordar que $p = |V||\mathcal{C}| + |\mathcal{C}|$.

Teorema 5.3. *El anti-rango disyuntivo de la desigualdad two-color (3.1) es $p - (|\mathcal{C}| + 1)$.*

Demostración. Primero vamos a demostrar que para todo conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ con $p - |\mathcal{C}|$ variables, la desigualdad (3.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea $(x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$. Si $w_{c_0} + w_{c_1} \leq 1$ o $w_{c_0} + w_{c_1} = 2$ entonces el Lema 5.2 implica que se satisface (3.1). Entonces asumimos que $1 < w_{c_0} + w_{c_1} < 2$ (luego $w_{c_0} > 0$ y $w_{c_1} > 0$) y consideremos los siguientes casos:

1. Si $w_{c_0} = 1$ entonces $0 < w_{c_1} < 1$, luego ninguna de las variables en $\{x_{vc_1}\}_{v \in \mathcal{C}}$ puede tomar valor 1. Dado que $|\mathbb{V} \setminus (\mathbb{A} \cup \{w_{c_1}\})| = |\mathcal{C}| - 1$, por el Lema 5.1(ii) a lo sumo $\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1$ variables de $\{x_{vc_1}\}_{v \in \mathbb{V}}$ pueden tomar valores fraccionarios y las restantes toman valor 0. La restricción (1.2) implica que $x_{vc_1} \leq w_{c_1}$, entonces $\sum_{v \in \mathcal{C}} x_{vc_1} \leq \left(\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1\right) w_{c_1}$. Como $\sum_{v \in \mathcal{C}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathcal{C}|}{2}$, el lado izquierdo de (3.1) es menor o igual que $\left(\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1\right) w_{c_1} + \frac{|\mathcal{C}|}{2}$. Notar que el lado derecho de la desigualdad (3.1) es igual a este valor, luego se satisface (3.1). Un argumento simétrico resuelve el caso $w_{c_1} = 1$.
2. Si $0 < w_{c_0} < 1$, esto nos deja con el caso $0 < w_{c_1} < 1$. Por lo tanto, a lo sumo $|\mathcal{C}| - 2$ variables distintas de w_{c_0} y w_{c_1} pueden tomar valores fraccionarios. Nuevamente, por el Lema 5.1(ii) a lo sumo $\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1$ variables de $\{x_{vc_0}\}_{v \in \mathcal{C}}$ (respectivamente $\{x_{vc_1}\}_{v \in \mathcal{C}}$) pueden tomar valores fraccionarios y las restantes toman valor 0, implicando que el lado izquierdo de (3.1) es menor o igual que $\left(\frac{|\mathcal{C}|}{2} - 1\right) (w_{c_0} + w_{c_1})$. Notar que el lado derecho es mayor que este valor, entonces se satisface (3.1).

Concluimos que el anti-rango disyuntivo de (3.1) es menor o igual que $p - (|\mathcal{C}| + 1)$.

Para demostrar la desigualdad opuesta, sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ el conjunto $\{x_{vc} : v \in \mathcal{C}, c \in \mathcal{C}, c \neq c_1, c_2\} \cup \{x_{vc} : v \in \mathcal{C}_{v_2}, c = c_1, c_2\} \cup \{w_c : c \in \mathcal{C}, c \neq c_1\}$. El cardinal de \mathbb{B} es $p - (|\mathcal{C}| + 1)$. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{B}}(L)$ la solución factible descrita en la Figura 5.3. Esta solución satisface las restricciones del modelo, viola la desigualdad (3.1), y las variables en \mathbb{B} toman valores 0-1. Entonces, el anti-rango de (3.1) es mayor o igual que $p - (|\mathcal{C}| + 1)$, y se prueba el teorema. \square

5.2.2. Desigualdades distinguished colors

En esta sección estudiamos el rango y anti-rango disyuntivo de las desigualdades distinguished colors (4.1), que incluyen en su definición un subconjunto arbitrario de colores. Notar que no necesitamos considerar el caso $\mathcal{D} = \emptyset$, dado que en ese caso (4.1) se convierte en $0 \leq 1$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	...	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	0	1	0	1	...	1	1
c_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	...	0	$\frac{1}{2}$
c_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	...	0	1
c_3	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$c_{ \mathbf{C} }$	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.3: Los valores en negrita corresponden a las variables en $\mathbb{V} \setminus \mathbb{B}$.

Teorema 5.4. *El rango disyuntivo de la desigualdad distinguished colors es*

1. $|\mathcal{D}|$ si $|\mathcal{D}| \geq 2$;
2. 0 si $|\mathcal{D}| \leq 1$.

Demostración. Caso I: $|\mathcal{D}| = 1$. Sea $\mathcal{D} = \{d\}$. El lado izquierdo de (4.1) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd}$ y el Lema 5.1(i) implica que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_d$. Dado que $|\mathbf{C}| \geq 4$, entonces $2 \frac{|\mathbf{C}| - 3}{|\mathbf{C}| - 2} \geq 1$, y luego $\frac{|\mathbf{C}|}{2} w_d \leq |\mathbf{C}| - 3 + w_d$. Por lo tanto, se satisface la desigualdad (4.1) y tiene rango disyuntivo 0.

Caso II: $|\mathcal{D}| \geq 2$. Primero demostramos que el rango disyuntivo de (4.1) es menor o igual que $|\mathcal{D}|$.

Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ el conjunto $\{w_c : c \in \mathcal{D}\}$. Debemos probar que (4.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$ una solución arbitraria, entonces por el Teorema 5.1 tenemos $w_c \in \{0, 1\}$, y consideremos los siguientes casos:

1. Si la cantidad de variables w en \mathbb{A} que toman valor 1 es mayor o igual que 3, entonces el lado derecho de la desigualdad (4.1) no es menor que $|\mathbf{C}|$, luego se satisface (4.1).
2. Si exactamente dos variables en \mathbb{A} toman valor 1, supongamos w_d y $w_{d'}$, entonces las restricciones del modelo (1.2) implican que el lado izquierdo de (4.1) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd} + x_{vd'})$, y el lado derecho de (4.1) es igual a $|\mathbf{C}| - 1$. Dado que z satisface (1.3), se satisface la desigualdad (4.1).
3. Si exactamente una variable en \mathbb{A} toma valor 1, entonces por el Lema 5.1(i) el lado izquierdo de (4.1) es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Como $\frac{|\mathbf{C}|}{2} \leq |\mathbf{C}| - 2$ si y solo si $|\mathbf{C}| \geq 4$, se satisface la desigualdad (4.1).

4. Si todas las variables en \mathbb{A} toman valor 0, entonces el lado izquierdo es igual a 0 y se satisface la desigualdad (4.1).

Dado que en los cuatro casos se satisface la desigualdad distinguished colors y z es una solución arbitraria de $P_{\mathbb{A}}(L)$, concluimos que (4.1) es una desigualdad válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Entonces, el rango disyuntivo de (4.1) es menor o igual que $|\mathcal{D}|$.

Ahora demostramos que el rango disyuntivo de (4.1) es mayor o igual que $|\mathcal{D}|$. Sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto arbitrario de $|\mathcal{D}| - 1$ variables. Tenemos que demostrar que la desigualdad distinguished colors no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$.

	v_i	v_{i+1}	v_{i+2}	v_{i+3}	v_{i+4}	...	v_j	v_{j+1}	v_{j+2}	v_{j+3}	v_{j+4}	...	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
d_1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
d_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	0	1
d_3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
d_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$c_{ \mathbf{C} \setminus \mathcal{D} }$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.4: Solución para la demostración del Teorema 5.4. Los valores en negrita especifican algunas de las variables que no pertenecen a \mathbb{B} .

Sean $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_{|\mathcal{D}|}\}$ y $\mathbf{C} \setminus \mathcal{D} = \{c_1, \dots, c_{|\mathbf{C} \setminus \mathcal{D}|}\}$. Dado que $|\mathbb{B}| = |\mathcal{D}| - 1$, existe algún color en \mathcal{D} , supongamos d_3 , tal que $w_{d_3} \notin \mathbb{B}$ y $x_{vd_3} \notin \mathbb{B}$ para todo $v \in \mathbf{C}$ (si para cada $d \in \mathcal{D}$ se tiene que $w_d \in \mathbb{B}$ o $x_{vd} \in \mathbb{B}$ para algún $v \in \mathbf{C}$, entonces tendríamos al menos una variable en \mathbb{B} para cada color en \mathcal{D} , implicando que $|\mathbb{B}| \geq |\mathcal{D}|$, una contradicción). El conjunto $\mathbb{D} = \{x_{vc}\}_{v \in \mathbf{C}, c \in \mathcal{D} \setminus \{d_3\}}$ contiene $|\mathbf{C}|(|\mathcal{D}| - 1)$ variables. Dado que \mathbb{B} contiene solamente $|\mathcal{D}| - 1$ variables, entonces existe un color en $\mathcal{D} \setminus \{d_3\}$, supongamos d_2 , y dos vértices en \mathbf{C} situados a distancia par en \mathbf{C} , por ejemplo v_i y v_j , tales que $x_{v_i d_2}, x_{v_j d_2} \notin \mathbb{B}$. La solución descrita en la Figura 5.4 satisface (1.1)-(1.3), pertenece a $P_{\mathbb{B}}(L)$ por el Teorema 5.1, pero viola la desigualdad (4.1).

Por lo tanto, concluimos que el rango disyuntivo de (4.1) es menor o igual que $|\mathcal{D}|$.

□

Teorema 5.5. *El anti-rango disyuntivo de la desigualdad distinguished colors es*

1. 0, si $|\mathcal{D}| \leq 1$;
2. $p - (|\mathbf{C}| + 1)$, si $|\mathcal{D}| = 2$;
3. $p - 5$, si $|\mathcal{D}| \geq 3$.

Demostración. Consideremos los siguientes casos.

Caso I: $|\mathcal{D}| \leq 1$. El rango disyuntivo es 0, lo cual implica que la relajación lineal satisface la desigualdad (4.1). Luego, el anti-rango disyuntivo de (4.1) es también 0.

Caso II: $|\mathcal{D}| = 2$. Primero verificamos que para todo conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ con $p - |\mathbf{C}|$ variables, la desigualdad (4.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea $(x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$ un punto arbitrario, y consideremos los siguientes casos:

1. Si $\mathbf{w}_{d_1}, \mathbf{w}_{d_2} \in \mathbb{Z}$ entonces dividimos el análisis en los siguientes casos:
 - a) Si $w_{d_1} = w_{d_2} = 1$, entonces la desigualdad (4.1) afirma que $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) \leq |\mathbf{C}| - 1$. Esta desigualdad se satisface al ser una de las restricciones del modelo (1.3).
 - b) Si $w_{d_1} \neq w_{d_2}$, por ejemplo $w_{d_1} = 1$ y $w_{d_2} = 0$, entonces la desigualdad (4.1) afirma que $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd_1} \leq |\mathbf{C}| - 2$. Esta desigualdad se satisface porque $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ por el Lema 5.1(i).
 - c) Si $w_{d_1} = w_{d_2} = 0$, entonces (4.1) se satisface trivialmente.
2. Si $\mathbf{w}_{d_1} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} < \mathbf{w}_{d_2} < \mathbf{1}$, entonces $x_{vd_1} = 0$ para $v \in \mathbf{C}$. Además, $\sum_{v \in \mathbf{C}} x_{vd_2} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{d_2}$ por el Lema 5.1(i). El lado derecho de la desigualdad (4.1) es igual a $|\mathbf{C}| + w_{d_2} - 3$ y, dado que $\frac{|\mathbf{C}|}{2} w_{d_2} \leq |\mathbf{C}| + w_{d_2} - 3$, la desigualdad (4.1) se satisface.
3. Si $\mathbf{w}_{d_1} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{0} < \mathbf{w}_{d_2} < \mathbf{1}$, entonces la desigualdad (4.1) afirma que $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) \leq |\mathbf{C}| - 2 + w_{d_2}$. Por contradicción, supongamos que $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) > |\mathbf{C}| - 2 + w_{d_2}$ para una solución $(x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$. Dado que $|\mathbb{V} \setminus (\mathbb{A} \cup \{w_{d_2}\})| = |\mathbf{C}| - 1$, el Lema 5.1(ii) implica que a lo sumo $\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$ variables de $\{x_{vd_2}\}_{v \in \mathbf{C}}$ toman valores fraccionarios y las restantes son 0. Como $w_{d_1} = 1$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) w_{d_2}$. Entonces,

$$\frac{|\mathbf{C}|}{2} + \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1\right) w_{d_2} > |\mathbf{C}| - 2 + w_{d_2}. \quad (5.1)$$

Por (5.1) obtenemos que $w_{d_2} > 1$ si $|\mathbf{C}| \neq 4$, y $0 > 0$ si $|\mathbf{C}| = 4$; una contradicción, luego se satisface (4.1).

4. Si $0 < \mathbf{w}_{d_1}, \mathbf{w}_{d_2} < 1$ (luego $w_{d_1}, w_{d_2} \notin \mathbb{A}$), el Lema 5.1(ii) asegura que a lo sumo $\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$ variables de $\{x_{vd_1}\}_{v \in \mathbf{C}}$ (respectivamente $\{x_{vd_2}\}_{v \in \mathbf{C}}$) pueden tomar valores fraccionarios. Por lo tanto,

$$\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{d_1} + w_{d_2}).$$

Ahora demostramos que

$$\left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) (w_{d_1} + w_{d_2}) \leq |\mathbf{C}| - 3 + w_{d_1} + w_{d_2}. \quad (5.2)$$

Si (5.2) no se cumple y $|\mathbf{C}| \neq 4$, entonces $w_{d_1} + w_{d_2} > 2 \frac{|\mathbf{C}| - 3}{|\mathbf{C}| - 4} \geq 2$, implicando que $w_{d_1} + w_{d_2} > 2$, una contradicción. Si (5.2) no se verifica y $|\mathbf{C}| = 4$, obtenemos $0 > 1$. Entonces, (5.2) se cumple y se satisface la desigualdad (4.1).

Concluimos que el anti-rango disyuntivo de (4.1) es menor o igual que $p - (|\mathbf{C}| + 1)$.

Para la dirección contraria, notar que $|\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}| \geq 1$, dado que, en caso contrario, el politopo es vacío. Sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ el conjunto $\{x_{vc} : v \in \mathbf{C}, c \in \mathcal{C}, c \neq c_1, d_2\} \cup \{x_{vc} : v \in \mathbf{C}_{v_2}, c = c_1, d_2\} \cup \{w_c : c \in \mathcal{C}, c \neq d_2\}$. El cardinal de \mathbb{B} es $p - (|\mathbf{C}| + 1)$. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{B}}(L)$ la solución descrita en la Figura 5.5, donde $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ y $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D} = \{c_1, \dots, c_{|\mathbf{C}|-2}\}$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	\dots	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
d_1	0	1	0	1	\dots	1	1
d_2	$1 - \frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	$1 - \frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	\dots	0	$1 - \frac{2}{ \mathbf{C} }$
c_1	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	\dots	0	1
c_2	0	0	0	0	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
$c_{ \mathbf{C} -2}$	0	0	0	0	\dots	0	0

Figura 5.5: Los valores en negrita corresponden a las variables que pertenecen a $\mathbb{V} \setminus \mathbb{B}$.

Esta solución satisface las restricciones del modelo, viola la desigualdad (4.1) y las variables en \mathbb{B} toman valores en $\{0, 1\}$. Por lo tanto, el anti-rango disyuntivo es mayor o igual que $p - (|\mathbf{C}| + 1)$.

Caso III: $|\mathcal{D}| \geq 3$. Para demostrar que el anti-rango disyuntivo es menor o igual que $p - 5$, debemos verificar que para todo conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ de $p - 4$ variables, la desigualdad (4.1) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{d \in \mathcal{D}} w_d \geq 3$, entonces la desigualdad (4.1) se satisface trivialmente.
2. Si $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}} \subseteq \mathbb{A}$ y a lo sumo dos variables de este conjunto toman valor 1, por ejemplo w_{d_1} y w_{d_2} , entonces la desigualdad (4.1) afirma que $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vd_1} + x_{vd_2}) \leq |\mathbf{C}| - 1$, lo cual es equivalente a la restricción (1.3) y, por lo tanto, se cumple la desigualdad.
3. Si al menos una variable de $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ no pertenece a \mathbb{A} , y teniendo en cuenta que a lo sumo cuatro variables toman valores fraccionarios, que $\sum_{d \in \mathcal{D}} w_d < 3$ y que se debe satisfacer la restricción (1.1), entonces a lo sumo un vértice tiene su correspondiente variable x_{vd} con valor fraccionario y los restantes toman valor 0. Sea v tal vértice. Además, a lo sumo dos variables w en \mathbb{A} toman valor 1. Consideremos los siguientes casos.
 - a) Dos variables de $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ en \mathbb{A} , por ejemplo w_{d_1} y w_{d_2} , toman valor 1. El lado izquierdo es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1 + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ d \neq d_1, d_2}} x_{vd}$. Como $\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ d \neq d_1, d_2}} x_{vd} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} w_d - 2$, la desigualdad (4.1) se cumple.
 - b) Exactamente una variable de $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ en \mathbb{A} , por ejemplo w_{d_1} , toma valor 1. El lado izquierdo es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2} + \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ d \neq d_1}} x_{vd}$. Como $\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ d \neq d_1}} x_{vd} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 3 + \sum_{d \in \mathcal{D}} w_d$, la desigualdad (4.1) se cumple.
 - c) Ninguna de las variables de $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ en \mathbb{A} toman valor 1. El lado izquierdo es igual a $\sum_{d \in \mathcal{D}} x_{vd}$ y este valor es menor o igual al lado derecho de (4.1). Entonces se cumple la desigualdad (4.1).

Para la dirección inversa, sea $\mathbb{B} = \mathbb{V} \setminus \{x_{v_1 d_2}, x_{v_1 d_3}, x_{v_3 d_2}, x_{v_3 d_3}, w_{c_3}\}$, un conjunto con $p - 5$ elementos. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{B}}(L)$ la solución factible descrita en la Figura 5.6. Esta solución satisface las restricciones del modelo, viola la desigualdad (4.1) y las variables en \mathbb{B} toman valores en $\{0, 1\}$. Por lo tanto, el anti-rango disyuntivo es mayor o igual que $p - 5$. Concluimos que el anti-rango disyuntivo de (4.1) es $p - 5$ cuando $|\mathcal{D}| \geq 3$. □

5.2.3. Desigualdades prominent vertex

En esta sección estudiamos las desigualdades prominent vertex (4.4), cuyo rango no quedará totalmente caracterizado por los resultados en esta tesis. Primero presentamos la caracterización parcial y luego discutimos el caso abierto.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	...	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
d_1	0	1	0	1	0	1	0	...	1	1
d_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	...	0	1
d_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	...	0	$\frac{1}{2}$
d_4	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
c_1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$c_{ \mathbf{C} \setminus \mathcal{D} }$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.6: Solución para la demostración del Teorema 5.5. Los valores en negrita corresponden a las variables que no pertenecen a \mathbb{B} .

Teorema 5.6. *El rango disyuntivo de (4.4) es $|\mathcal{D}| + 1 + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ si*

- (a) $\mathcal{D} \neq \emptyset$, y
- (b) $|\mathbf{C}| \geq 6$ o $|\mathcal{D}| > 1$.

Demostración. Reescribimos la desigualdad (4.4) de la siguiente manera:

$$\sum_{u \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{uc_0} + \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_2}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \{c_0\}} x_{uc} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}(w_{c_0} + 1) + \sum_{c \in \mathcal{D}} w_c + \sum_{c \in \mathbf{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{uc} - 2, \quad (5.3)$$

donde los vértices v_1 y v_2 representan a los vértices i, j de la desigualdad (4.4).

Primero tenemos que demostrar que el rango disyuntivo de (5.3) es menor o igual que $|\mathcal{D}| + 1 + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ si $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ el conjunto $\{w_{c_0}\} \cup \{w_d : d \in \mathcal{D}\} \cup \{x_{v_4k-1c_0} : k = 1, \dots, \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor\}$. Debemos demostrar que (5.3) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$ una solución (posiblemente fraccionaria) –el Teorema 5.1 implica que todas las variables en \mathbb{A} toman valores en $\{0, 1\}$ – y consideremos los siguientes casos:

1. Si el número de variables w en \mathbb{A} que toman valor 1 en z es mayor o igual que 2, entonces el Lema 5.1(i) y la restricción (1.1) implican que el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}w_{c_0} + \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Notar que el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}w_{c_0} + \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, dado que $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c \geq 2$.

2. Si el número de variables w en \mathbb{A} que toman valor 1 en z es menor o igual que 1, consideramos los siguientes casos:

a) Si todas las variables en \mathbb{A} asociadas con el color c_0 toman valor 1 en z , entonces $x_{vc_0} = 0$ para todo $v \in \mathbf{C}_{v_2}$, dado que z satisface (1.2) y $w_{c_0} = 1$.

1) Si existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $w_d = 1$, entonces la suposición del Caso 2 implica que $w_{d'} = 0$ para todo $d' \in D \setminus \{d\}$. Entonces, el lado izquierdo de (5.3) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd}$, implicando

$$\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd} \leq \sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vd}) \leq |\mathbf{C}| - 1,$$

dado que z representa un coloreo acíclico. Como el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$, se cumple la desigualdad.

2) Si $w_d = 0$ para todo $d \in \mathcal{D}$, entonces el lado izquierdo de (5.3) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{vc_0}$, el cual es menor o igual que $\frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Por otro lado, el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que $|\mathbf{C}| - 2$, entonces se cumple la desigualdad (5.3).

b) Si existen $x_{v_i c_0}, x_{v_j c_0} \in \mathbb{A}$ tales que $x_{v_i c_0} = 0$ y $x_{v_j c_0} = 1$, entonces $w_{c_0} = 1$. Sea $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \setminus \{v_2, v_j\}$. Como $x_{v_j c_0} = 0$, el Lema 5.1(i) implica que

$$\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} = \sum_{v \in \mathbf{C}'} x_{vc_0} \leq \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right) w_{c_0} = \left(\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 \right). \quad (5.4)$$

Consideremos los siguientes casos:

1) Si existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $w_d = 1$, entonces el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$. Combinando (5.4) y $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} (x_{vd_1} + v_{vc_0}) \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, obtenemos que el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$. Entonces, se cumple la desigualdad (5.3).

2) Si $w_d = 0$ para todo $d \in \mathcal{D}$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad (5.3) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} v_{vc_0}$. Como $x_{v_i c_0} = 1$, entonces $x_{v_{i-1} c_0} = x_{v_{i+1} c_0} = 0$, donde los subíndices son considerados módulo n . Esto implica que $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} v_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 2$. Entonces, el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 3$. Como el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que este valor, se satisface la desigualdad (5.3).

c) Si $x_{v_i c_0} = 0$ para todo $x_{v_i c_0} \in \mathbb{A}$, consideramos los siguientes casos:

1) Si $w_d = 1$ para algún $d \in \mathcal{D}$ y $w_{c_0} = 1$, entonces un argumento similar al dado para el Caso 2(b)i muestra que se cumple la desigualdad (5.3).

2) Si $w_d = 1$ para algún $d \in \mathcal{D}$ y $w_{c_0} = 0$, entonces $w_{d'} = 0$ para todo $d' \in \mathcal{D}$, $d' \neq d$.

Este hecho, junto con las restricciones (1.1), implica que $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} x_{vc} = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} (x_{vc_1} + x_{vd})$. Luego, podemos reescribir la desigualdad (5.3) de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_1}} (x_{vc_1} + v_{vd}) \leq |\mathbf{C}| - 1,$$

y esta desigualdad se cumple dado que z representa un coloreo acíclico.

3) Si $w_d = 0$ para todo $d \in \mathcal{D}$, entonces (5.3) se satisface trivialmente.

Dado que en todos los casos se cumple la desigualdad prominent vertex y z es una solución arbitraria de $P_{\mathbb{A}}(L)$, concluimos que (5.3) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Luego el rango disyuntivo de (5.3) es menor o igual que $|\mathcal{D}| + 1 + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$.

Ahora vamos a demostrar que que el rango disyuntivo de (5.3) es mayor o igual que $|\mathcal{D}| + 1 + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$. Sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto arbitrario de variables con cardinalidad $|\mathcal{D}| + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$. Para demostrar que la desigualdad prominent vertex no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$, mostramos una solución $z \in P_{\mathbb{B}}(L)$ que viola (5.3). Para ello, consideremos los siguientes casos:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	\dots	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	0	1	0	1	0	1	0	...	1	1
c_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	...	0	1
d_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	...	0	$\frac{1}{2}$
d_2	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
t_1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$t_{ \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} - 2}$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.7: Solución para la demostración del Teorema 5.6, para $i = 3$. Las variables en negrita no pertenecen a \mathbb{B} .

1. Si $w_d \notin \mathbb{B}$ para algún $d \in \mathcal{D}$, la hipótesis (b) y un argumento directo de conteo permiten ver que $|\mathbb{B}| = |\mathcal{D}| + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ implica que

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	\dots	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
c_1	1	0	1	0	1	0	1	...	0	1
d_1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	...	1	1
d_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	...	0	$\frac{1}{2}$
d_3	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
t_1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$t_{ \mathbf{C} \setminus \mathcal{D} - 2}$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.8: Solución para la demostración del Teorema 5.6, para $i = 2$. Las variables en negrita no pertenecen a \mathbb{B} .

- (a) existen $d_1 \in \mathcal{D}$ y $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $w_{d_1} \notin \mathbb{B}$ y $x_{v_i d_1}, x_{v_{i+2} d_1}, x_{v_i c_1}, x_{v_{i+2} c_1} \notin \mathbb{B}$ (ver Figura 5.7 para un ejemplo con $i = 3$), o
- (b) existen $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ y $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $w_{d_2} \notin \mathbb{B}$ y $x_{v_i d_1}, x_{v_{i+2} d_1}, x_{v_i d_2}, x_{v_{i+2} d_2} \notin \mathbb{B}$ (ver Figura 5.8 para un ejemplo con $i = 4$).

Si se cumple (a), entonces la solución descrita en la Figura 5.7 es la solución buscada y, si se cumple (b), entonces la solución descrita en la Figura 5.8 permite concluir el análisis de este caso.

2. Si $w_d \in \mathbb{B}$ para todo $d \in \mathcal{D}$, entonces tienen que existir $d_1 \in \mathcal{D}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $x_{v_i c_0}, x_{v_{i+1} c_0}, x_{v_{i+2} c_0}, x_{v_i c_1}, x_{v_{i+2} c_1}, x_{v_{i+1} d_1} \notin \mathbb{B}$, dado que si tal estructura no está presente, entonces \mathbb{B} contiene al menos $|\mathbf{C}|/3$ variables del conjunto $\{x_{v_c c_0}, x_{v_c c_1}\}_{v \in \mathbf{C}}$. La solución representada por la Figura 5.9 solamente tiene valores fraccionarios para estas variables y viola (5.3), concluyendo el análisis de este caso.

Por lo tanto, para cualquier conjunto \mathbb{B} podemos construir una solución que viole la desigualdad (5.3) y verifique (1.1)-(1.3). Entonces, concluimos que para todo conjunto \mathbb{B} la desigualdad (5.3) no es válida para $P_{\mathbb{B}}(L)$.

□

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	\dots	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	...	0	1
c_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	...	0	1
d_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	...	1	1
d_2	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
t_1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$t_{ \mathbf{C} \setminus \mathcal{D} - 2}$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.9: Solución para la demostración del Teorema 5.6. Las variables en negrita no pertenecen a \mathbb{B} .

Notar que el rango disyuntivo de (4.4) no está totalmente caracterizado por el Teorema 5.6. Si no se cumple la hipótesis (b), es decir, si $|\mathbf{C}| = 4$ y $|\mathcal{D}| = 1$, entonces el rango disyuntivo depende de la existencia de colores en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}$, como lo establece la siguiente proposición. Omitimos la demostración dado que está basada en argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 5.6.

Proposición 5.1. *Asumimos que $|\mathbf{C}| = 4$ y $|\mathcal{D}| = 1$. Si $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\} \neq \emptyset$ entonces el rango disyuntivo de (4.4) es 3. En caso contrario, el rango disyuntivo de (4.4) es 2.*

El Teorema 5.6 y la Proposición 5.1 dejan abierto el caso $\mathcal{D} = \emptyset$. Conjeturamos que el rango en este caso es 1. La solución representada por la Figura 5.10 viola la desigualdad (4.4) pero satisface (1.1)-(1.3), y entonces el rango es al menos 1. Para demostrar que el rango de (4.4) es a lo sumo 1, tenemos que encontrar un conjunto \mathbb{A} de un solo elemento y demostrar que (4.4) se cumple para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Lamentablemente no pudimos resolver este caso. Conjeturamos que $\mathbb{A} = \{x_{v_3 c_0}\}$ nos permitiría completar la demostración, pero mostrar que una solución $(x, w) \in P_{\mathbb{A}}(L)$ con $x_{v_3 c_0} = 0$ satisface la desigualdad no parece ser una tarea sencilla.

Teorema 5.7. *El anti-rango disyuntivo de (4.4) es $p - 5$ si $\mathcal{D} \neq \emptyset$.*

Demostración. Para la demostración del anti-rango disyuntivo también vamos a utilizar la expresión (5.3) de la desigualdad prominent vertex.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	\dots	$v_{ \mathbf{C} }$	w_c
c_0	0	$\frac{ \mathbf{C} -2}{ \mathbf{C} }$	0	$\frac{ \mathbf{C} -2}{ \mathbf{C} }$	0	$\frac{ \mathbf{C} -2}{ \mathbf{C} }$	0	\dots	$\frac{ \mathbf{C} -2}{ \mathbf{C} }$	$\frac{ \mathbf{C} -2}{ \mathbf{C} }$
c_1	1	0	1	0	1	0	1	\dots	0	1
t_1	0	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	0	\dots	$\frac{2}{ \mathbf{C} }$	1
t_2	0	0	0	0	0	0	0	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
$t_{ \mathbf{C} -2}$	0	0	0	0	0	0	0	\dots	0	0

Figura 5.10: Una solución que viola la desigualdad (4.4).

Comenzamos demostrando que para todo conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ con $p - 4$ variables, la desigualdad (5.3) es válida para $P_{\mathbb{A}}(L)$. Sea (x, w) un punto extremo arbitrario en $P_{\mathbb{A}}(L)$ que tiene, por el Teorema 5.1, a lo sumo cuatro variables con valores fraccionarios.

Si $\sum_{d \in \mathcal{D}} \mathbf{w}_d \geq \mathbf{2}$, entonces el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que $(1 + w_{c_0}) \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. La restricción (1.1) garantiza que $\sum_{u \in \mathbf{C}_{v_2}} \sum_{c \in \mathcal{D} \cup \{c_0\}} x_{uc} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$ que, junto con el Lema 5.1(i), implica que se cumple (5.3). Por lo tanto, restringimos el análisis al caso $\sum_{d \in \mathcal{D}} \mathbf{w}_d \leq \mathbf{1}$. Asumamos que esto se cumple y consideremos los siguientes casos:

1. Si $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} \mathbf{x}_{vc_0} = \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} = \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$. Además, el segundo término en el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $|\mathbf{C}|/2$. Como (x, w) satisface la restricción (1.3), entonces $\sum_{c \in \mathcal{D}} w_c + \sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{uc} \geq 1$. Luego, se cumple la desigualdad (5.3).
2. Si $\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 < \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} \mathbf{x}_{vc_0} < \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces $w_{c_0} = 1$, al menos una variable de $\{x_{vc_0}\}_{v \in \mathbf{C}_{v_2}}$ toma un valor fraccionario, y $x_{vc_0} \neq 0$ para todo $v \in \mathbf{C}_{v_2}$. Dado que a lo sumo cuatro variables pueden tomar valores fraccionarios, entonces a lo sumo dos variables de $\{x_{vc_0}\}_{v \in \mathbf{C}_{v_2}}$ pueden tomar valores fraccionarios, y esto implica que $x_{vc_0} = 0$ para todo $v \in \mathbf{C}_{v_1}$. Por lo tanto, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$ y el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$. Como $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_0} + x_{vc_1}) \leq |\mathbf{C}| - 1$ por la restricción (1.3), entonces $\sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{uc} \geq 1$. Si $w_{d_1} < 1$ para algún $d_1 \in \mathcal{D}$, entonces $x_{vd_1} = 0$ para todo $v \in \mathbf{C}_{v_1}$. Luego, $\sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{uc} \geq 1$ y la desigualdad (5.3) se cumple. Si $w_{d_1} = 1$ para algún $d_1 \in \mathcal{D}$ (luego $w_d = 0$ para todo $d \in \mathcal{D}, d \neq d_1$ dado que $\sum_{d \in \mathcal{D}} \mathbf{w}_d \leq \mathbf{1}$), entonces se cumple trivialmente la desigualdad (5.3).
3. Si $\mathbf{0} < \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} \mathbf{x}_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$ y $w_{c_0} = \mathbf{1}$, afirmamos que $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$. Para comprobarlo, consideremos los siguientes casos:

- a) Si $x_{vc_0} \in \mathbb{Z}$ para todo $v \in \mathbf{C}_{v_1}$ o para todo $v \in \mathbf{C}_{v_2}$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$.
- b) Si existen $x_{v_t c_0} \in \mathbf{C}_{v_2}$ y $x_{v_{t'} c_0} \in \mathbf{C}_{v_1}$ con $0 < x_{v_t c_0}, x_{v_{t'} c_0} < 1$ y tales que $v_t v_{t'} \notin E$, entonces existen colores $c_2, c_3 \in \mathcal{C} \setminus \{c_0\}$ tales que $x_{v_t c_2}$ y $x_{v_{t'} c_3}$ toman valores fraccionarios. Como (x, w) tiene a lo sumo cuatro variables con valores fraccionarios, entonces $x_{v_{t-1} c_0} = x_{v_{t+1} c_0} = x_{v_{t'-1} c_0} = x_{v_{t'+1} c_0} = 0$, donde los índices se toman módulo n . Esto implica que al menos tres variables de $\{x_{vc_0}\}_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}}$ toman valores nulos, luego $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$.
- c) Si existen $x_{v_t c_0} \in \mathbf{C}_{v_2}$ y $x_{v_{t'} c_0} \in \mathbf{C}_{v_1}$ con $0 < x_{v_t c_0}, x_{v_{t'} c_0} < 1$ y tales que $v_t v_{t'} \in E$, entonces un argumento similar demuestra que $x_{v_{t-1} c_0} = x_{v_{t'+1} c_0} = 0$. Por lo tanto, $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$.

En los tres casos se cumple la afirmación, luego el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 2$. Como el lado derecho de (5.3) es mayor o igual que este valor, se cumple la desigualdad (5.3).

4. Si $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vc_0} = \mathbf{0}$ y $w_{c_0} = \mathbf{1}$, entonces $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$. Por un lado, si $w_{d_1} = 1$ para algún $d_1 \in \mathcal{D}$, el supuesto $\sum_{d \in \mathcal{D}} w_d \leq 1$ implica que $w_d = 0$ para todo $d \in \mathcal{D}, d \neq d_1$. Entonces, el lado izquierdo de (5.3) es igual a $\sum_{v \in \mathbf{C} \setminus \{v_2\}} x_{vc_0} + \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd_1}$, el cual, por la restricción (1.3), es menor o igual que $|\mathbf{C}| - 1$. Concluimos que se cumple la desigualdad (5.3). Por otro lado, si $\sum_{d \in \mathcal{D}} w_d < 1$, entonces a lo sumo una variable de $\{x_{vd}\}_{v \in \mathbf{C}_{v_2}, d \in \mathcal{D}}$ puede tomar un valor fraccionario, dado que en (x, w) a lo sumo cuatro variables pueden tomar valores fraccionarios. Esto implica que $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{vd} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} w_d$, y se cumple la desigualdad (5.3).
5. Si $\mathbf{0} < w_{c_0} < \mathbf{1}$, entonces a lo sumo tres variables de $\{x_{vc}\}_{v \in \mathbf{C}, c \in \mathcal{C}}$ pueden tomar valores fraccionarios. Por lo tanto, a lo sumo una variable de $\{x_{vc_0}\}_{v \in \mathbf{C}}$ puede tomar un valor fraccionario. Además, si $x_{v_t c_0}$ toma un valor fraccionario, entonces a lo sumo una variable de $\{w_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ puede tomar un valor diferente de 0 (de lo contrario tendríamos más de cuatro variables con valores fraccionarios). Sea w_{d_1} esta variable, y consideremos los siguientes casos:
- a) Si $w_{d_1} = 1$ y $\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1 < \sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2}$, entonces, como $\sum_{v \in \mathbf{C}} (x_{vc_1} + x_{vd_1}) \leq |\mathbf{C}| - 1$, la suma $\sum_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in \mathbf{C}_{v_1}} x_{uc}$ es mayor o igual que 1. Entonces se cumple la desigualdad (5.3).
- b) Si $w_{d_1} = 1$ y $\sum_{v \in \mathbf{C}_{v_2}} x_{vd_1} \leq \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$, entonces el lado izquierdo de (5.3) es menor o igual que $2w_{c_0} + \frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$. Por lo tanto, se cumple la desigualdad (5.3).
- c) Si $w_{d_1} < 1$, entonces $x_{v_t d_1}$ es la única variable en $\{x_{vd_1}\}_{v \in \mathbf{C}}$ que puede tomar un valor no nulo (si $x_{u d_1} > 0$ para algún $u \neq v_t$, entonces $x_{u d_1} \leq w_{d_1} < 1$, generando de este

modo al menos cinco variables con valores fraccionarios). Entonces, el lado izquierdo de la desigualdad es menor o igual que $2x_{v_t c_0} + x_{v_t d_1}$. Como este valor es menor o igual que $2w_{c_0} + w_{d_1}$, se cumple la desigualdad (5.3).

6. Si $w_{c_0} = 0$, entonces el lado izquierdo de (5.3) es igual a $\sum_{v \in C_{v_2}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{vd}$. Consideremos los siguientes casos:

- a) Si $\sum_{d \in \mathcal{D}} w_d < 1$, entonces un argumento similar al utilizado en el Caso 4 demuestra que se cumple (5.3).
- b) Si $w_{d_1} = 1$ para algún $d_1 \in \mathcal{D}$, entonces el lado izquierdo de (5.3) es igual a $\sum_{v \in C_{v_2}} x_{vd_1}$. Si $\sum_{v \in C_{v_2}} x_{vd_1} \leq \frac{|C|}{2} - 1$, entonces se cumple la desigualdad (5.3). Si $\frac{|C|}{2} - 1 < \sum_{v \in C_{v_2}} x_{vd_1} \leq \frac{|C|}{2}$, entonces $\sum_{v \in C_{v_1}} x_{vd_1} = 0$. Por lo tanto, $\sum_{c \in C \setminus \mathcal{D} \cup \{c_0, c_1\}} \sum_{u \in C_{v_1}} x_{uc} \geq 1$ y nuevamente se cumple la desigualdad (5.3).

Concluimos que el anti-rango disyuntivo de (5.3) es menor o igual que $p - 5$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	\dots	$v_{ C }$	w_c
c_0	0	1	0	1	0	1	0	...	1	1
c_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	...	0	1
d_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	...	0	$\frac{1}{2}$
d_2	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$d_{ \mathcal{D} }$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
t_1	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$t_{ C \setminus \mathcal{D} - 2}$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0

Figura 5.11: Solución para la demostración del Teorema 5.7. Los valores en negrita corresponden a las variables en $\mathbb{V} \setminus \mathbb{B}$

Ahora demostramos que el anti-rango disyuntivo es mayor o igual que $p - 5$. Sea $d_1 \in \mathcal{D}$ y definamos $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$ como el conjunto $\mathbb{V} \setminus \{x_{v_1 c_1}, x_{v_1 d_1}, x_{v_3 c_1}, x_{v_3 d_1}, w_{d_1}\}$, el cual tiene cardinalidad $|\mathbb{B}| = p - 5$. Sea $z = (x, w) \in P_{\mathbb{B}}(L)$ la solución factible descrita en la Figura 5.11. Esta solución satisface las restricciones del modelo, viola la desigualdad (5.3) y las variables en \mathbb{B} toman valores 0-1. Por lo tanto, el anti-rango disyuntivo es mayor o igual que $p - 5$ y queda demostrado el teorema.

□

5.2.4. Otras familias de desigualdades válidas

En esta sección estudiamos el rango y el anti-rango disyuntivos de algunas de las familias de desigualdades presentadas en los Capítulos 3 y 4. No incluimos las demostraciones de los siguientes teoremas ya que involucran argumentos similares a los anteriores.

El siguiente teorema establece el rango y anti-rango disyuntivo de las desigualdades reinforced two-color (3.5). Esta familia de desigualdades están asociadas a un ciclo, a un vértice y a dos colores. En este caso, el rango y el anti-rango dependen del tamaño del ciclo.

Teorema 5.8. *El rango disyuntivo de la desigualdad reinforced two-color (3.5) es $\lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ y el anti-rango disyuntivo de (3.5) es $p - (|\mathbf{C}| + 1)$.*

Los siguientes teoremas establecen el rango y anti-rango disyuntivo de las desigualdades three-consecutive vertices (4.2). Estas desigualdades están asociadas a un ciclo par, a tres vértices consecutivos, dos conjuntos disjuntos de colores y un color que no pertenece a ellos. La estructura de estas desigualdades es bastante complicada, al igual que los valores de sus rangos y anti-rangos.

Teorema 5.9. *Si $\mathbf{C} \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' \cup \{c_0\}) = \emptyset$, entonces el rango disyuntivo de la desigualdad three-consecutive vertices (4.2) es*

1. $|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| + 1$, si $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\mathcal{D}' \neq \emptyset$ y $|\mathbf{C}| \geq \frac{|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| + 2}{|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| - 1} 2$;
2. $\frac{|\mathbf{C}|}{2} - 1$, si $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\mathcal{D}' \neq \emptyset$, $|\mathbf{C}| \leq 6$ y $|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| = 2$;
3. 2, si $|\mathbf{C}| = 4$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\mathcal{D}' \neq \emptyset$ y $|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| = 3$;
4. $|\mathcal{D}'|$, si $\mathcal{D} = \emptyset$;
5. $|\mathcal{D}|$, si $\mathcal{D}' = \emptyset$.

Si $|\mathbf{C} \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' \cup \{c_0\})| \geq 1$, entonces el rango disyuntivo de (4.2) es

1. $|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| + \lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ si $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| \geq 2$;
2. $\lfloor \frac{|\mathbf{C}|}{4} \rfloor$ si $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| = 1$;
3. 0, si $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| = 0$.

El anti-rango disyuntivo de (4.2) es

1. $p - 5$, si $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| \geq 2$;
2. $p - 6$, si $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'| = 1$;
3. 0 , si $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' = \emptyset$.

El próximo teorema está relacionado con las desigualdades four-consecutive vertices (3.12), que están asociadas con un ciclo par, cuatro vértices consecutivos y tres colores. Los valores de su rango y anti-rango disyuntivo son similares al de las desigualdades two-color.

Teorema 5.10. *El rango disyuntivo de la desigualdad four-consecutive vertices (3.12) es 4. El anti-rango disyuntivo de (3.12) es $p - (|\mathbf{C}| + 1)$.*

Capítulo 6

Experimentos computacionales

El objetivo práctico más importante de la búsqueda de familias de desigualdades válidas para un problema de optimización combinatoria formulado por medio de un modelo de programación lineal entera está dado por la necesidad de resolver instancias reales del problema en cuestión. A pesar de que no es el objetivo de esta tesis explorar en la práctica la resolución computacional del problema de coloreo acíclico, incluimos en este capítulo los resultados de algunos experimentos computacionales sobre un algoritmo de tipo branch & cut (B&C). El objetivo de este capítulo es analizar posibles estrategias para la implementación de un algoritmo de este tipo, y tener una evaluación preliminar de la contribución a la performance final de algunas de las desigualdades válidas presentadas en este trabajo.

Para esto, implementamos un algoritmo branch & cut sencillo como marco empírico para explorar la efectividad de las familias de desigualdades válidas halladas. Nuestro objetivo no es resolver instancias reales en la práctica ni ajustar todos los aspectos de un algoritmo de este tipo, sino que estamos interesados en explorar el comportamiento empírico de las desigualdades válidas, como un punto de partida para futuras implementaciones.

6.1. Marco empírico

El algoritmo comienza con un modelo inicial dado por la formulación (1.1)-(1.2) y las restricciones de rompimiento de simetrías presentadas en [46] para el problema de coloreo clásico.

Se denominan *soluciones simétricas* a dos representaciones distintas (en términos de las variables del modelo) de una misma solución y, en general, la existencia de muchas soluciones simétricas tiende a degradar la performance de los algoritmos de resolución de problemas de programación entera. Las

restricciones incorporadas se denominan *desigualdades block color* y se definen, para $c_0 \in \mathcal{C}$, como

$$\sum_{c=c_0}^{|C|} x_{vc} \leq w_{c_0}. \quad (6.1)$$

Esta desigualdad establece que si una solución factible no utiliza el color c_0 , entonces tampoco usa los colores c con $c \geq c_0$. De acuerdo con los resultados reportados en [87], eliminar soluciones simétricas es particularmente importante para el problema clásico de coloreo y por este motivo se incluyen estas restricciones adicionales en nuestros experimentos.

Dado que existe un número exponencial de restricciones de aciclicidad (1.3), estas restricciones no se agregan desde el comienzo, sino que se agregan en forma dinámica durante la ejecución con el objetivo de eliminar soluciones enteras que no son factibles para el problema original. Cada vez que el algoritmo encuentra una solución entera para el modelo disponible en ese momento, una rutina de separación busca en tiempo polinomial ciclos coloreados con dos colores en el grafo. Esto se logra por medio del algoritmo BFS aplicado a cada *componente bicolor* de la solución hallada (dados dos colores c_1 y c_2 , la *componente bicolor* definida por c_1 y c_2 es el subgrafo inducido por los vértices coloreados con estos dos colores). Si existe un ciclo en esta componente, entonces la solución corresponde a un coloreo que no es acíclico, y se agrega a la formulación la restricción de aciclicidad correspondiente.

Durante la ejecución del algoritmo, agregamos dinámicamente cortes generados a partir de algunas de las familias de desigualdades presentadas en este trabajo, junto con las *desigualdades clique* introducidas en [46]. A lo largo de esta sección, utilizamos la siguiente notación para estas familias de desigualdades:

2C	Two-color inequalities
DC	Distinguished colors inequalities
R2C	Reinforced two-color inequalities
3CV	Three-consecutive vertices inequalities
PV	Prominent vertex inequalities
4CV	Four-consecutive vertices inequalities
K	Clique inequalities

Dado que todas estas familias, salvo las desigualdades clique, requieren de un ciclo en el grafo, hemos implementado las siguientes estrategias para hallar ciclos apropiados en G :

Heurística basada en backtracking. Este procedimiento busca ciclos por medio de un algoritmo de *backtracking*, recorriendo todos los caminos posibles en el grafo hasta encontrar un camino que repite uno de sus vértices. Dado que este algoritmo tiene un tiempo de ejecución exponencial, limitamos la búsqueda a un número de nodos prefijado en el árbol de enumeración del backtracking, con el objetivo de mantener los tiempos de ejecución bajo control. Dado que necesitamos asegurar que los ciclos más prometedores sean encontrados en primer término, en cada nivel del árbol del backtracking seleccionamos los vértices, de manera golosa, tratando de maximizar la contribución total al lado izquierdo de la desigualdad considerada. Es importante notar que para algunas de las familias presentadas en este trabajo, la contribución de un vértice depende también de su posición en el ciclo, pero esto es fácilmente manejable en la implementación.

Separación por medio del problema de ciclo de costo promedio mínimo. Para las desigualdades 2C y las DC desarrollamos un procedimiento de separación exacto, reduciendo el problema de separación a una instancia del problema de *ciclo de costo promedio mínimo* (*minimum mean cycle*). Dado un digrafo $D = (N, A)$ y una función de costo $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia costos a los arcos, el problema de ciclo de costo promedio mínimo consiste en encontrar un ciclo C en A (considerado como un conjunto de arcos) que minimice $\frac{1}{|C|} \sum_{ij \in C} w_{ij}$. que puede ser resuelto en tiempo polinomial por el algoritmo introducido en [67]. Este problema es un caso especial del problema de minimum cost-to-time ratio [2] y puede resolverse por un algoritmo con complejidad computacional $O(nm)$ [67, 68]. La estrategia de separación propuesta en este párrafo consiste en una adaptación directa del procedimiento aplicado en [82] para separar de manera exacta una familia de desigualdades válidas basadas en ciclos.

Heurística basada en el problema de árbol generador máximo. Si $T = (V, E_T)$ es un árbol generador de G , entonces toda arista $vw \in E \setminus E_T$ crea un ciclo de G cuando es agregada a T . A partir de esta observación, se puede implementar una heurística de separación sencilla chequeando las desigualdades asociadas a los ciclos creados de esta manera para cada arista en $E \setminus E_T$, para algún árbol generador T . Con el objetivo de mejorar las chances de hallar desigualdades violadas, partimos de un árbol generador de costo máximo, donde el peso de una arista está relacionado con la contribución de sus vértices extremos a la desigualdad.

Las familias de desigualdades válidas consideradas en el algoritmo requieren fijar algunos colores de \mathcal{C} para su definición. Sin embargo, centramos nuestros procedimientos de separación en la búsqueda de ciclos con el objetivo de mantener el tiempo de ejecución bajo control. Basado en algunas experimentaciones preliminares, conjeturamos que los mejores colores tienden a ser aquellos con los valores

configuración	# instancias			gap dual promedio	cota dual promedio	# nodos promedio	cota dual promedio en la raíz
	opt	tiempo	mem				
CPLEX	—	10	20	26.25 %	6.20	1210	2
B&B	—	29	1	43.10 %	6.37	10215	2
K	11	9	10	19.48 %	8.17	4527	7.14
K+2C (btk)	11	14	5	19.29 %	8.17	4442	7.14
K+2C (cpm)	4	26	—	23.49 %	7.70	744	7.14
K+2C (agm)	7	23	—	21.32 %	7.80	2128	7.14
K+DC (btk)	10	14	6	18.57 %	8.17	4504	7.14
K+DC (cpm)	10	15	5	19.86 %	8.13	3366	7.14
K+DC (agm)	11	9	10	18.96 %	8.17	4466	7.14
K+3CV	9	21	—	18.44 %	8.07	3221	7.14
K+4CV	8	22	—	21.33 %	8.03	3261	7.14
K+PV	6	23	1	21.91 %	8.00	3258	7.14
K+R2C	7	22	1	20.85 %	7.97	3046	7.14
K+ALL	7	23	—	20.99 %	7.80	1587	7.14

(btk) = backtracking; (cpm) = ciclo de costo promedio mínimo; (agm) = árbol generador máximo.

Tabla 6.1: Resultados computacionales sobre instancias de alta densidad generadas aleatoriamente.

mayores en las variables de color correspondientes, i.e., aquellos que imponen límites menores en las variables de asignación correspondiente.

6.2. Resultados sobre instancias de alta densidad

Testeamos el algoritmo B&C sobre 30 instancias generadas de manera aleatoria con densidades de 70 %, 80 % y 90 %. Experimentos preliminares demostraron que el límite entre las instancias aleatorias fácil y difícilmente resolubles se encuentra entre los 12 y 14 vértices. Luego, generamos instancias de estos tamaños.

Ejecutamos el algoritmo B&C (a) para cada familia de desigualdades válidas combinadas con las desigualdades clique, (b) utilizando solo las desigualdades clique, y (c) con todas las desigualdades consideradas en este trabajo (K+ALL). Para las desigualdades 2C y las DC también probamos con los tres procedimientos de separación propuestos. Durante la fase de separación en cada nodo del árbol de enumeración, aplicamos solamente una ronda de planos de corte. También testeamos un algoritmo branch & bound (B&B) puro comenzando con (1.1)-(1.2) como formulación inicial, y en el que se agregan dinámicamente las restricciones de aciclicidad (1.3) violadas en cada nodo. Finalmente, ejecutamos CPLEX con la formulación completa (1.1)-(1.5).

En las instancias de alta densidad el número de ciclos puede ser muy elevado, y esto puede traer

aparejados problemas de memoria dado que la cantidad de restricciones de aciclicidad es exponencial. En la Tabla 6.1 presentamos la cantidad de instancias resueltas a optimalidad, el número de instancias que alcanzaron el tiempo límite de 30 minutos y el número de instancias para las cuales el procedimiento abortó por agotar la memoria disponible, para cada combinación de las clases de desigualdades válidas. También informamos el gap dual promedio para las instancias no resueltas, la cota dual promedio en todas las instancias y la cantidad promedio de nodos abiertos en el árbol de enumeración. Por gap dual nos referimos a la razón entre la mejor solución entera encontrada y la cota dual alcanzada. Notar que podemos calcular sin problemas el promedio de la cota dual dado que todas las instancias son generadas por el mismo procedimiento aleatorio y tienen tamaños y densidades similares. Además, en la última columna de la tabla informamos la cota dual promedio obtenida utilizando un algoritmo de planos de cortes puro (i.e., sin procedimiento de *branching*). Todos los experimentos se llevaron a cabo en una computadora con procesador AMD Athlon[®] 64 PC corriendo a 1.5 GHz, y con una memoria RAM de 2 GB.

Los resultados muestran que los problemas de memoria son cruciales para la performance de CPLEX. Además, las cotas duales obtenidas están lejos de los valores óptimos aportando, por lo tanto, cotas inferiores pobres. En consecuencia, CPLEX no puede resolver ninguna instancia en forma óptima. El B&B supera estos problemas de memoria generando dinámicamente las restricciones de aciclicidad, sin embargo las cotas duales obtenidas no son útiles durante el procedimiento, y ninguna instancia se resuelve en forma óptima. La inclusión dinámica de las desigualdades clique mejora las cotas duales y ayuda a resolver algunas instancias al óptimo, sin embargo los problemas de memoria reaparecen.

Algunas de las familias de desigualdades introducidas en este trabajo ayudan a resolver estos problemas; dependiendo de la combinación de familias de desigualdades utilizada durante el proceso, el algoritmo B&C resultante todavía puede tener problemas de memoria, pero aún así para algunas combinaciones ninguna instancia aborta el procedimiento. En particular, las desigualdades 2C y DC parecen ser las más efectivas dado que unas pocas instancias provocaron problemas de memoria y para la mayoría de los casos el número de instancias resueltas en forma óptima permanece similar. Es interesante notar que las familias de desigualdades presentadas en este trabajo no parecen mejorar el valor de la función objetivo en la relajación lineal, como muestra la última columna de la Tabla 6.1. Sin embargo, estos experimentos sugieren que las desigualdades 2C y las DC contribuyen a evitar problemas de memoria y a encontrar soluciones primales algo mejores durante el proceso de B&C.

La Tabla 6.2 muestra la cantidad promedio de cortes durante la etapa de separación del algoritmo

Familia	Vértices / densidad						Promedio
	12			14			
	70 %	80 %	90 %	70 %	80 %	90 %	
K	409	559	545	921	1602	1328	894
2C (btk)	150	280	110	372	542	267	287
2C (cpm)	1458	234	42	1056	896	113	633
2C (agm)	< 1	< 1	2	2	2	3	2
DC (btk)	107	47	1	185	49	3	65
DC (cpm)	820	478	474	859	886	432	658
DC (agm)	0	0	< 1	0	< 1	< 1	< 1
3CV	383	156	88	587	500	137	309
4CV	164	291	48	587	703	115	318
PV	343	190	63	504	258	198	260
R2C	333	564	46	949	809	135	473

(btk) = backtracking; (cpm) = ciclo de costo promedio mínimo; (agm) = árbol generador máximo.

Tabla 6.2: Cantidad promedio de cortes en una ejecución (instancias de alta densidad).

B&C dentro de una ejecución. La separación basada en árboles generadores mínimos no es efectiva, dado que la cantidad de cortes hallados es casi nula. Como conclusión general, la cantidad promedio de cortes hallados parece ser considerable y algunas de estas familias contribuyen a mantener bajo control los problemas de memoria.

6.3. Resultados sobre instancias de mediana densidad

Para instancias de baja y mediana densidad, las limitaciones de memoria no son generalmente un problema, por lo tanto para este tipo de instancias nuestro objetivo es hallar una combinación de desigualdades válidas y un juego adecuado de parámetros del algoritmo que permitan resolver la mayor cantidad de instancias posible en tiempos de ejecución razonables. Con este objetivo, llevamos a cabo un proceso de ajuste de algunos de los parámetros del B&C, en particular el *skip factor* (i.e., la cantidad de nodos del branch & cut omitidos entre dos rondas de cortes consecutivas), el número de *rondas de corte* utilizadas en la fase de planos de cortes de cada nodo, y el *número máximo de cortes por ronda*.

Para instancias seleccionadas aleatoriamente, ejecutamos el algoritmo B&C para las combinaciones K, K+2C y K+DC con valores diferentes para los tres parámetros anteriormente mencionados, es decir, $\text{skip factor} \in \{1, 3, 5, 10, 20\}$, $\text{rondas de corte} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y máxima cantidad de cortes por ronda $\in \{5, 10, 20, 30\}$. La Figura 6.3 muestra el promedio de los tiempos de ejecución obtenidos y la cantidad promedio de nodos en el árbol de enumeración. En ambos casos, los mejores resultados se obtuvieron utilizando un skip factor de 1, con una sola ronda de cortes por nodo y un límite de 10 cortes por ronda.

A pesar que nuestra implementación es bastante directa y, por lo tanto, estos experimentos son preliminares, los resultados computacionales sugieren que el agregado dinámico de algunas de las desigualdades presentadas en este trabajo serían útiles en el marco de un algoritmo de planos de corte. En nuestra opinión, alienta a buscar más familias de desigualdades y a ajustar los procedimientos de separación. Algunas familias de desigualdades parecen no contribuir a nuestra implementación, por lo tanto, se deben llevar a cabo más experimentos con el objetivo de determinar los mejores elementos a incorporar en un procedimiento práctico basado en la técnica de B&C para este problema.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis realizamos un estudio teórico del problema de coloreo acíclico desde el punto de vista de la programación lineal entera. Presentamos una formulación natural del problema, basada en una formulación conocida para el problema clásico de coloreo, en términos de variables de asignación y de uso de colores. Demostramos que, a diferencia del problema de coloreo clásico, el problema de coloreo acíclico no puede ser formulado en términos de las variables de asignación y de orden.

Comenzamos con el estudio de la estructura del poliedro asociado con esta formulación. Primero estudiamos propiedades generales de este poliedro. Demostramos su dimensión para el caso en que la cantidad de colores es mayor que el número cromático acíclico, mostrando un sistema minimal de ecuaciones. Luego, evaluamos cuáles de las restricciones del modelo definen facetas. Otro resultado interesante es el hecho de que si optimizamos sobre la relajación lineal del poliedro el óptimo es siempre 2. Por lo tanto, la cotas que se obtienen para el óptimo del problema entero son muy débiles al optimizar sobre la relajación lineal.

Para este poliedro presentamos dos tipos de familias de desigualdades que están definidas sobre ciclos pares inducidos del grafo. Por un lado, introducimos familias de desigualdades que involucran una cantidad fija de colores y, por otro lado, familias que involucran conjuntos de colores. Para estas familias de desigualdades válidas caracterizamos las condiciones necesarias y suficientes para las cuales definen facetas. Todas estas desigualdades surgen de argumentos combinatorios sobre ciclos en el grafo, y demuestran que el politopo asociado a esta formulación tiene una estructura bastante complicada.

Dado que las desigualdades basadas en cliques demostraron ser muy efectivas para el problema clásico de coloreo dentro de un contexto de planos de cortes, presentamos familias de desigualdades válidas, que inducen facetas, basadas en combinaciones de ciclos pares y cliques. Varias de estas familias se obtuvieron generalizando las definidas sobre ciclos pares inducidos. Estas familias generalizadas están

definidas sobre una estructura llamada K -ciclo, definido informalmente como un “ciclo de cliques”.

Con el objetivo de tener una medida teórica de la calidad de algunas de las familias de las desigualdades válidas, estudiamos su rango disyuntivo, que está relacionado con el operador BCC introducido por Balas, Ceria, and Cornuéjols. Aplicando iterativamente este operador, partiendo de la relajación lineal, se obtiene una sucesión de poliedros, cada uno incluido en el anterior, hasta llegar, luego de un número finito de pasos, a la cápsula convexa. Dada una desigualdad válida para la cápsula convexa, su rango disyuntivo determina el mínimo número de aplicaciones de este operador necesarios para obtener un poliedro que satisface la desigualdad válida. Además, introducimos un concepto dual, el anti-rango disyuntivo de una desigualdad válida, que nos dice, en este caso, el número necesario de iteraciones BCC para siempre obtener un politopo que satisface la desigualdad.

Es interesante notar que el rango disyuntivo de algunas desigualdades válidas no pareciera tener un correlato con la contribución práctica de las mismas a una implementación de un procedimiento branch-and-cut para el coloreo acíclico. En el procedimiento implementado las desigualdades two-color (3.1) y las distinguished colors (4.1) permitieron alcanzar el mejor desempeño. Esta observación no pareciera correlacionarse con los rangos disyuntivos presentados en el Capítulo 5.

Presentamos, de manera preliminar, los resultados de algunos experimentos computacionales sobre un algoritmo branch & cut con el objetivo de explorar la efectividad práctica de las familias de algunas de las desigualdades encontradas. Testeamos el algoritmo sobre instancias generadas aleatoriamente y con diferentes densidades. En las instancias de alta densidad los problemas de memoria son cruciales. Algunas de las familias de desigualdades ayudaron a resolver problemas de memoria pero no mejoran el valor de la función objetivo en la relajación lineal. Sólo las desigualdades two-color y las distinguished colors contribuyeron a encontrar cotas primales mejores. Para las instancias de mediana y baja densidad el objetivo fue hallar un conjunto de parámetros adecuados y una combinación de desigualdades válidas que permitieran resolver el mayor número de instancias en el menor tiempo posible. Las desigualdades distinguished colors contribuyeron a mejorar los tiempos de ejecución y la cantidad de nodos en el árbol de enumeración.

7.1. Trabajos futuros

Esta tesis deja abiertas muchas líneas de desarrollo futuro relacionadas con el estudio poliedral del problema de coloreo acíclico. Mencionamos en esta sección algunas de ellas.

Sería interesante encontrar nuevas familias de desigualdades válidas, especialmente sobre estructuras no contempladas en esta tesis. La estrategia más natural para buscar desigualdades válidas propias

de esta formulación es analizar desigualdades cuyo soporte sea un ciclo par, y esta tarea se realizó parcialmente a lo largo de esta tesis. Se combinaron algunas de las desigualdades halladas con cliques adyacentes pero sería interesante considerar otras estructuras, para analizar el tipo de desigualdades que aparecen en estos casos.

Es importante estudiar la complejidad computacional de los problemas de separación asociados con las desigualdades válidas presentadas en este trabajo, tarea que no fue acometida en esta tesis. Es posible que muchos de estos problemas sean NP-completos y, en estos casos, se deberá contemplar el diseño de procedimientos de separación heurísticos. Sería útil continuar el estudio preliminar computacional realizado en esta tesis, con el objetivo de refinar el conocimiento práctico en cuanto a las mejores estrategias para la implementación de un algoritmo basado en técnicas de programación entera para este problema.

Una propiedad interesante en el contexto del estudio poliedral de un problema es caracterizar en forma completa el poliedro para casos en los que el problema sea resoluble en tiempo polinomial (o bien mostrar la polinomialidad de ese caso por medio de una caracterización que permita separar las facetas en tiempo polinomial). Para el problema de coloreo acíclico, la familia de grafos más sencilla sobre la cual se podría realizar este estudio son los ciclos. Sin embargo, el poliedro asociado a la formulación equivalente del problema de coloreo clásico no se encuentra completamente caracterizado para ciclos, con lo cual estimamos que esta tarea puede ser muy difícil para el problema de coloreo acíclico.

No se logró caracterizar el rango y anti-rango disyuntivos de todas las desigualdades presentadas en esta tesis. Sería interesante continuar con este análisis, para completar las caracterizaciones parciales aquí obtenidas. Además, en este trabajo nos limitamos a explorar el rango asociado con el operador BCC, dado que este operador presenta propiedades útiles para su estudio. Sin embargo, se podrían considerar los rangos asociados con otros operadores lift-and-project para las desigualdades presentadas en esta tesis, en particular para comparar si los rangos de distintos operadores son similares para estas desigualdades. Finalmente, estudiar el rango de Chvátal de estas desigualdades puede ser interesante, aunque es posible que se trate de una tarea que presente cierta dificultad.

Apéndice A

Conceptos básicos

A.1. Teoría de grafos

Un *grafo* $G = (V, E)$ consiste en un conjunto V de *vértices*, finito y no vacío, y un conjunto E finito de pares no ordenados de vértices distintos de V , llamados *aristas*. Si $e = \{i, j\} \in E$ es una arista, decimos que e une los vértices i y j , y lo escribimos en forma resumida $e = ij$. Dos vértices que están unidos por una arista se llaman *adyacentes* o *vecinos*. La *vecindad* de un vértice $i \in V$ es el conjunto $N_G(i) = \{j \in V : ij \in E\}$. Si no hay riesgo de confusión, simplemente llamamos $N(i)$ a este conjunto.

Si $A \subseteq V$, definimos a la *vecindad de A* como $N(A) = \{j \in V : ij \in E \text{ para algún } i \in A\}$. También definimos el conjunto de aristas $E(A) = \{ij \in E : i \in A \text{ y } j \in A\}$. Un grafo $G' = (V', E')$ es un *subgrafo de G* $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. El subgrafo de G *inducido* por el conjunto de vértices $A \subseteq V$ es $G_A(A, E')$, con $E' = E(A)$. Este grafo se denomina un *subgrafo inducido* de G .

Una secuencia de vértices distintos v_1, \dots, v_k es un *camino* en G si $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \dots, k-1$. El número k es la *longitud* del camino. Una secuencia de vértices distintos v_1, \dots, v_k es un *ciclo* en G si $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $v_1 v_k \in E$. El número k es la *longitud* del ciclo. Un ciclo de longitud 3 se llama *triángulo*. Un ciclo es *impar* resp. *par* si su longitud es impar resp. par. Toda arista $v_i v_j$ en el subgrafo de G inducido por los vértices v_1, \dots, v_k con $j \neq i+1$ es una *cuerda* del ciclo. Un ciclo sin cuerdas se llama *ciclo inducido* o *hole*, si su longitud es al menos 4. Para $n \geq 1$, denotamos $\mathbf{C}_n = (V, E)$ al grafo de n vértices tal que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{v_i, v_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$. Cuando el valor de n está fijo por el contexto, denotamos directamente \mathbf{C} a este ciclo.

Un grafo se dice *completo* si todo par de vértices está unido por una arista. Una *clique* en un grafo G es un conjunto de vértices que inducen un subgrafo completo de G (notar que no pedimos que este conjunto sea maximal). Un *conjunto estable* es un conjunto de vértices que no son adyacentes dos a

dos. Un *coloreo* de G es una partición de V en conjuntos estables disjuntos. Llamamos *k-coloreo* a un coloreo que utiliza k conjuntos estables, y denotamos $\chi(G)$ al *mínimo número* de conjuntos estables necesarios para esa partición de V . Este parámetro se denomina el *número cromático* de G .

A.2. Teoría poliedral

Un conjunto de vectores K es *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in K$ también contiene el segmento $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ que los une. Para cualquier conjunto de vectores K , la *cápsula convexa* de K , denotada por $\text{conv}(K)$, es el menor (en el sentido de la inclusión de conjuntos) conjunto convexo que contiene a K , i.e., $\text{conv}(K) = \cap\{K' \subseteq \mathbb{R}^n : K \subseteq K' \text{ y } K' \text{ es convexo}\}$. Si $K = \{x_1, \dots, x_k\}$ es finito, podemos escribir $\text{conv}(K)$ como el conjunto de todas las combinaciones convexas de sus elementos:

$$\text{conv}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Un *cono* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío de vectores tal que para cualquier conjunto finito de vectores de C , el conjunto C también contiene todas sus combinaciones lineales con coeficientes no negativos. Para un subconjunto arbitrario $K \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos su *cápsula cónica* $\text{cone}(K)$ a la intersección de todos los conos en \mathbb{R}^n que contienen a K . Si $K = \{x_1, \dots, x_k\}$ es finito, podemos escribir:

$$\text{cone}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

La *suma de Minkowski* de dos conjuntos $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como $P + Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\}$. Un *poliedro* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la intersección de un número finito de semiespacios, i.e., $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$. Equivalentemente, los poliedros se pueden describir por la suma de Minkowski de una cápsula convexa y una cápsula cónica generadas finitamente, i.e., $P = \text{conv}(K) + \text{conv}(W)$ para dos conjuntos de vectores finitos $K, W \in \mathbb{R}^n$. Un *politopo* es un poliedro acotado. Un politopo P puede sólo describirse por la cápsula convexa de un conjunto finito de vectores, i.e., $P = \text{conv}(K)$ para aun conjunto finito $K \in \mathbb{R}^n$.

Los vectores $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son *afínmente independientes* si $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ implica que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$. Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro y $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto maximal de vectores afínmente independientes de P , entonces decimos que P tiene *dimensión k*, y lo denotamos $\dim(P) = k$. Si $\dim(P) = n$, decimos que P tiene *dimensión completa*. El politopo P tiene dimensión k si y solo si un sistema maximal de ecuaciones lineales para P tiene exactamente $n - k$ ecuaciones linealmente independientes.

Una desigualdad lineal $cx \leq c_0$ es *válida* para un poliedro P si la satisfacen todos los vectores $x \in P$. Una *cara* de P es cualquier conjunto de la forma $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = c_0\}$, donde $cx \leq c_0$ es una desigualdad válida para P . Una cara F se llama *propia* si $F \neq \emptyset$ y $F \neq P$. Las caras de dimensión 0, 1 y $\dim(P) - 1$ se llaman *puntos extremos*, *aristas* y *facetas*, respectivamente. En particular, los vértices son las caras minimales no vacías y las facetas son las caras propias maximales. El conjunto de los puntos extremos de P se denota $\text{vert}(P)$. Todo politopo es la cápsula convexa de sus vértices, y si $P = \text{conv}(K)$ entonces $\text{vert}(P) \subseteq K$.

A.3. Complejidad computacional

Un *problema de decisión* Π consiste en un conjunto D_Π de *instancias* y un subconjunto $Y_\Pi \subseteq D_\Pi$ de *instancias afirmativas*. El conjunto de instancias es generalmente descripto por una definición general de todos sus parámetros, y las instancias afirmativas son definidas por una pregunta, cuya respuesta es “sí” o “no”, en función de los parámetros del problema. En este marco, una instancia del problema se obtiene especificando valores particulares para todos los parámetros del problema. Asumimos que cada problema tiene un *esquema de codificación*, que mapea instancias del problema en cadenas finitas de un alfabeto dado. La *longitud de la entrada* de una instancia $I \in D_\Pi$ está definida por la cantidad de símbolos en la descripción obtenida a partir del esquema de codificación para el problema, y se denota $\text{Length}(I)$. La función de longitud $\text{Length}: D_\Pi \rightarrow \mathbb{Z}_+$ es utilizada como la medida formal del tamaño de la instancia.

La *función de complejidad computacional* $T_A: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ de un algoritmo A expresa sus requerimientos de tiempo dando, para cada posible longitud de la entrada, la mayor cantidad de operaciones elementales del algoritmo para resolver un problema de ese tamaño. Un algoritmo A se llama *algoritmo de tiempo polinomial* si existe una función polinómica $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T_A(n) \leq p(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. La clase \mathcal{P} está formada por los problemas que pueden resolverse por un algoritmo de tiempo polinomial.

Un *algoritmo no determinístico* es un algoritmo formado por una *etapa de predicción* y una *etapa de verificación*. Dada una instancia del problema, la etapa de predicción genera una estructura de manera no determinística. Luego se ingresa esta estructura a la etapa de verificación, que computa de manera determinística normal y termina con una respuesta de “sí” o “no”. Un algoritmo no determinístico *resuelve* un problema de decisión si existe alguna estructura predicha tal que en la etapa de verificación responde “sí” si y solo si la instancia es afirmativa. Un algoritmo no determinístico se dice que *opera en tiempo polinomial* si para toda instancia afirmativa hay alguna estructura predicha que conduce a

la etapa de verificación a una respuesta afirmativa en un tiempo acotado por una función polinómica en el tamaño de entrada. La clase \mathcal{NP} se define como todos los problemas de decisión que se resuelven por un algoritmo no determinístico en tiempo polinomial. Claramente $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$, pero no se conoce si esta inclusión es estricta o no.

Una *transformación polinomial* de un problema de decisión Π a un problema de decisión Π' es una función $f : D_{\Pi} \rightarrow D_{\Pi'}$ tal que f es calculada por un algoritmo determinístico en tiempo polinomial y, para todo $I \in D_{\Pi}$, $I \in Y_{\Pi}$ si y solo si $f(I) \in Y_{\Pi'}$. Si hay una transformación polinomial de Π a Π' , escribimos $\Pi \propto \Pi'$. Es fácil verificar que la relación inducida por \propto es transitiva y reflexiva. Un problema de decisión Π se define como *\mathcal{NP} -completo* si $\Pi \in \mathcal{NP}$ y $\Pi \propto \Pi'$ para todo $\Pi' \in \mathcal{NP}$. Para demostrar que un determinado problema de decisión Π es \mathcal{NP} -completo, es suficiente demostrar que $\Pi \in \mathcal{NP}$ y que $\Pi' \propto \Pi$ para algún problema \mathcal{NP} -completo Π' . Si Π es \mathcal{NP} -completo, entonces existe un algoritmo de tiempo polinomial que resuelve Π si y solo si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Un *problema de búsqueda* Π consiste en un conjunto D_{Π} de instancias y, para cada instancia $I \in D_{\Pi}$, un conjunto $S_{\Pi}(I)$ de soluciones. Decimos que un algoritmo *resuelve* un problema de búsqueda Π si, dada cualquier instancia $I \in D_{\Pi}$ como entrada, devuelve alguna solución perteneciente a $S_{\Pi}(I)$ siempre que este conjunto no sea vacío. Una *reducción de tiempo polinomial* de un problema de búsqueda Π a un problema de búsqueda Π' es un algoritmo A que resuelve Π utilizando una subrutina hipotética S para resolver Π' tal que, si S es un algoritmo de tiempo polinomial para Π' entonces A es un algoritmo de tiempo polinomial para Π . Si existe una reducción de tiempo polinomial de Π a Π' , escribimos $\Pi \propto_R \Pi'$. Un problema de búsqueda Π es *\mathcal{NP} -hard* si existe algún problema \mathcal{NP} -completo Π' tal que $\Pi' \propto_R \Pi$. Un problema de búsqueda *\mathcal{NP} -hard* no puede ser resuelto en tiempo polinomial a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Apéndice B

Herramientas computacionales

El estudio poliedral realizado en esta tesis se vio apoyado por herramientas computacionales que permitieron analizar el poliedro de coloreo acíclico para instancias pequeñas. Esto es habitual en la disciplina, dado que existen herramientas que permiten caracterizar en forma completa las facetas de instancias pequeñas, y estos resultados habitualmente son la base sobre la cual se obtienen desigualdades válidas generales. En este anexo describimos brevemente las herramientas computacionales que se utilizaron a lo largo de la tesis.

B.1. PORTA

PORTA es un conjunto de rutinas para analizar politopos y poliedros. *PORTA* es la abreviatura de **P**OLYhedron **R**epresentation **T**ransformation **A**lgorithm y hace referencia a una de sus funciones básicas. Los poliedros se pueden representar como la cápsula convexa de un conjunto de puntos más el cono convexo de un conjunto de vectores o como un sistema de ecuaciones y desigualdades lineales. *PORTA* realiza la transformación de una representación hacia la otra. En nuestro caso tenemos la representación de nuestro poliedro como la cápsula convexa de los puntos que cumplen un sistema de ecuaciones y desigualdades lineales. Se especifica este sistema en un archivo con formato *.ieq*. Además de esta información, el archivo debe contener la cantidad de variables, cotas superiores e inferiores de cada variable y una solución factible. Una vez obtenido el archivo con todas las soluciones factibles, *PORTA* realiza la transformación obteniendo un archivo con la representación del poliedro a través de todas sus facetas.

En el caso de nuestro problema, *PORTA* resolvió muy pocas instancias, todas con un número muy pequeño de variables. En la mayoría de los casos ni siquiera obtuvimos el conjunto de soluciones

factibles. Por esto implementamos un programa en **java** para generar todas las soluciones factibles de algunas instancias.

B.2. Problema de programación lineal

En un intento por obtener facetas de las instancias que no pudieron ser caracterizadas por PORTA, decidimos trabajar con el polar del poliedro para algunas instancias cuyas soluciones factibles podían ser enumeradas en forma completa con nuestra implementación en **java**.

Definición B.1. *El polar del poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es el conjunto $\Pi = \{(\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \pi x - \pi_0 \leq 0, \forall x \in P\}$ de todas las desigualdades válidas de P .*

Las soluciones factibles del problema especifican los coeficientes de las desigualdades que definen el polar del poliedro. El polar es un cono poliedral cuyos rayos extremos permiten caracterizar las facetas de P .

Teorema B.1. [97] *Si $\dim(P) = n$, $rg(A) = n$, y $\pi^* \neq 0$, entonces (π^*, π_0^*) es un rayo extremo de Π si y solo si (π^*, π_0^*) define una faceta de P .*

Por lo tanto, con el objetivo de encontrar facetas del poliedro, decidimos cortar el cono con alguna igualdad, por ejemplo $\sum_i \pi_i = 1$ y luego optimizamos diferentes funciones objetivo sobre este nuevo poliedro. Dado que éste es un problema de programación lineal, utilizamos el solver SCIP. Utilizando este método solo encontramos desigualdades válidas triviales y algunas facetas que eran combinaciones lineales de las ya encontradas.

B.3. lrs

El algoritmo *lrs* de enumeración de vértices está basado en el algoritmo de búsqueda reversa de Avis y Fukuda (1992). La principal función de este programa es hallar vértices y rayos extremos de un poliedro que está descrito por un sistema de desigualdades lineales.

Al trabajar con el algoritmo *lrs* sobre el cono del polar truncado, obtuvimos los vértices del poliedro resultante, que corresponden a facetas del poliedro P . Este procedimiento nos permitió encontrar algunas desigualdades que luego fueron generalizadas y resultaron en la familia de las desigualdades basket (4.6).

Bibliografía

- [1] N. Aguilera, S. Bianchi, y G. Nasini, *Relaciones entre los rangos de las facetas de problemas asociados a matching*, Proceedings of the XVIII JAIIO (1999) 10–21.
- [2] R. Ahuja, T. Magnanti, y J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, 1993.
- [3] M. O. Albertson y D. M. Berman, *The acyclic chromatic number*, Proceedings of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium, XVII (1976), 51–69.
- [4] M. O. Albertson y D. M. Berman, *Every planar graph has an acyclic 7-coloring*, Israel Journal of Mathematics **28** (1977) 169–174.
- [5] M. O. Albertson y D. M. Berman, *An acyclic analogue to Heawood's theorem*, Glasgow Mathematical Journal **19** (1978) 163–166.
- [6] M. O. Albertson, G. G. Chappell, H. A. Kierstead, A. Kündgen, y R. Ramamurthi, *Coloring with no 2-colored P_4 's*, Electronic Journal of Combinatorics **11** #R26 (2004).
- [7] N. Alon, C. McDiarmid, y B. Reed, *Acyclic colouring of graphs*, Random Structures and Algorithms **2** (1991) 277–288.
- [8] N. Alon, B. Mohar, y D.P. Sanders, *On acyclic colorings of graphs on surfaces*, Israel Journal of Mathematics **94** (1996) 273–283.
- [9] P. Angelini y F. Frati, *Acyclically 3-colorable planar graphs*, Journal of Combinatorial Optimization **24-2** (2012) 116–130.
- [10] R. Arundhadhi y R. Sattanathan, *Acyclic Coloring on Double Star Graph Families*, International Journal of Computer Applications **42-18** (2012) 32–35.

-
- [11] R. Arundhadhi y R. Sattanathan, *Acyclic and star Coloring Bistar Graph Families*, International Journal of Scientific and Research Publications **2-3** (2012).
- [12] R. Arundhadhi y R. Sattanathan, *Acyclic Coloring of Central Graphs*, International journal of computer applications **38** (2012).
- [13] Arundhadhi R. y K.Thirusangu, *Acyclic coloring of central graph of Gear graph families*, International Journal of Computing Algorithm **02** (2013) 235–238.
- [14] R. Arundhadhi y K. Thirusangu, *Acyclic Coloring of Helm Graph Families*, Indian Journal of Applied Research **3-3** (2013) 271–275.
- [15] Y. Au y L. Tunçel, *On the polyhedral lift-and-project methods and the fractional stable set polytope*, Discrete Optimization **6-2** (2009) 206–213.
- [16] Y. Au y L. Tunçel, *A comprehensive analysis of polyhedral lift-and-project methods*. Manuscript (2013).
- [17] E. Balas, S. Ceria, y G. Cornuéjols, *Lift-and-Project Cutting Plane Algorithm for Mixed 0 - 1 Programs*, Mathematical Programming **58** (1993) 295–324.
- [18] R. Borndörfer, A. Eisenblätter, M. Grötschel, y A. Martin. *The orientation model for frequency assignment problems*. Technical Report TR 98-01, ZIB Berlin, 1998.
- [19] O.V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Mathematics **25** (1979), 211–236.
- [20] O.V. Borodin, *Acyclic 3-choosability of planar graphs without cycles of length from 4 to 12*, Diskretn. Anal. Issled. Oper. **16-5** (2009) 26–33 (in Russian).
- [21] O.V. Borodin, M. Chen, A.O. Ivanova, y A. Raspaud, *Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7*, Discrete Mathematics **310 (17-18)** (2010) 2426–2434.
- [22] O.V. Borodin, D. G. Fon-Der Flaass, A. V. Kostochka, A. Raspaud y E. Sopena, *Acyclic list 7-coloring of planar graphs*, Journal of Graph Theory **40-2** (2002), 83–90.
- [23] O.V. Borodin y A.O. Ivanova, *Acyclic 3-choosability of planar graphs with no cycles of length from 4 to 11*, Sib. Élektron. Mat. Izv., **7** (2010) 275–283.
- [24] O.V. Borodin y A. O. Ivanova, *Acyclic 5-choosability of planar graphs without adjacent short cycles*, Journal of Graph Theory **68-2** (2011), 169–176.

- [25] O.V. Borodin y A. O. Ivanova, *Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles*, Siberian Mathematical Journal **52** (2011), 411–425.
- [26] O.V. Borodin y A. O. Ivanova, *Acyclic 4-choosability of planar graphs without adjacent short cycles*, Discrete Mathematics **312** (2012) 3335–3341.
- [27] O.V. Borodin y A. O. Ivanova, *Acyclic 4-choosability of planar graphs with no 4- and 5-cycles*, Journal of Graph Theory **4** (2013), 374–397.
- [28] O.V. Borodin, A. V. Kostochka, y A. Raspaud, *Acyclic 4-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor triangular 6-cycles*, Discrete Mathematics **310** (2010) 2946–2950.
- [29] O.V. Borodin, A. V. Kostochka, A. Raspaud, y E. Sopena, *Acyclic colouring of 1-planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **114-1** (2001) 29–41.
- [30] O.V. Borodin, A. V. Kostochka y D. R. Woodall, *Acyclic colourings of planar graphs with large girth*, Journal of London Mathematical Society **2-60** (1999) 344–352.
- [31] M. Braga, D. Delle Donne, y J. Marenco, *A polyhedral study of the acyclic coloring problem*, Discrete Applied Mathematics **160** (2012) 2606–2617.
- [32] M. Braga y J. Marenco, *Disjunctive ranks and anti-ranks of some facet-inducing inequalities of the acyclic coloring polytope*. Electronic Notes in Discrete Mathematics **37** (2011) 213–218.
- [33] M. Braga y J. Marenco, *Exploring the disjunctive rank of some facet-inducing inequalities of the acyclic coloring polytope*. Enviado a RAIRO, en 3ra ronda de revisión.
- [34] M. I. Burnstein, *Every 4-valent graph has an acyclic 5-coloring*, Soobsc Akad. Nauk Gruzin SSR **93** (1979) 21–24.
- [35] J. Cai, B.Feng, y G. Yan, *Acyclic coloring of graphs with some girth restriction*, Journal of Combinatorial Optimization (2015) 1–6.
- [36] M. Campêlo, R. Corrêa, y Y. Frota, *Cliques, holes and the vertex coloring polytope*, Information Processing Letters **89** (2004) 159–164.
- [37] V. Campos, C. Linhares Sales, K. Maia, N. Martins, y R. Sampaio, *Restricted coloring problems on graphs with few P_4 's*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **37-1** (2011) 57–62.
- [38] V. Campos, C.L. Sales, A.K. Maia, N. Martins, y R.M. Sampaio, *Fixed parameter algorithms for restricted coloring problems: acyclic, star, nonrepetitive, harmonious and clique colorings*, Proceedings of CoRR, (2011).

-
- [39] M. Chen y A. Raspaud, *On acyclic 4-choosability of planar graphs without short cycles*, Discrete Mathematics **310** (2010) 2113–2118.
- [40] M. Chen y A. Raspaud, *A sufficient condition for planar graphs to be acyclically 5-choosable*, Journal of Graph Theory **70** (2012) 135–151.
- [41] M. Chen y A. Raspaud, *Planar graphs without 4- and 5-cycles are acyclically 4-choosable*, Discrete Applied Mathematics **161**-(7-8) (2013) 921–931.
- [42] Chen M., Raspaud A., Roussel N., Zhu X., *Acyclic 4-choosability of planar graphs*, Discrete Mathematics **311** (2011) 92–101.
- [43] M. Chen y W. Wang, *Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles*, Discrete Mathematics **308** (2008) 6216–6225.
- [44] T. F. Coleman y J. Cai, *The cyclic coloring problem and estimation of sparse Hessian matrices*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **7-2** (1986) 221–235.
- [45] T. F. Coleman y J. J. More, *Estimation of sparse Hessian matrices and graph coloring problems*, Mathematical Programming **28** (1984) 243–270.
- [46] P. Coll, J. Marenco, I. Méndez-Díaz y P. Zabala, *Facets of the graph coloring problem*, Annals of Operations Research, **116** (2002) 79–90.
- [47] E. R. Costa, R. F. Dantas, y R. M. SAMPAIO, *Nonrepetitive, acyclic and clique colorings of graphs with few P_4 's*, Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa, (2012).
- [48] D.D. Donne y J. Marenco, *A branch and cut algorithm for the minimum-adjacency vertex coloring problem*, Discrete Optimization, **8** (2011) 540–554.
- [49] G. Fertin, E. Godard, y A. Raspaud, *Minimum Feedback Vertex Set and Acyclic Coloring*, Information Processing Letters **84-3** (2002) 131–139.
- [50] G. Fertin, E. Godard, y A. Raspaud, *Acyclic and k -distance Coloring of the Grid*, Information Processing Letters **87 -1** (2003) 51–58.
- [51] G. Fertin y A. Raspaud, *Acyclic colorings of graphs of maximum degree Δ* , European Conference on Combinatorics Graph Theory, and Applications (2005) 389–396.
- [52] G. Fertin y A. Raspaud, *Acyclic Coloring of Graphs of Maximum Degree Five: Nine Colors are Enough*, Information Processing Letters **105-2** (2008) 65–72.

- [53] G. Fertin, A. Raspaud, y B. Reed, *On star coloring of graphs*, In A. Branstadt and V. B. Lee, eds., Proc. 27th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'01), Lecture Notes in Computer Science **2204** (2001) 140–153.
- [54] R. Figueiredo, V. Barbosa, N. Maculan y C. Souza, *New 0-1 integer formulations of the graph coloring problem*, in: Proceedings of XI CLAIO, 2002.
- [55] A. H. Gebremedhin, F. Manne, y A. Pothen, *Graph coloring in optimization revisited*, Technical Report 226, University of Bergen, Norway, 2002.
- [56] A. H. Gebremedhin, F. Manne, y A. Pothen, *What color is your Jacobian? Graph coloring for computing derivatives*, SIAM Rev. **47-4** (2005) 629–705.
- [57] A. H. Gebremedhin, D. Nguyen, M.M.A. Patwary, y A. Pothen, *ColPack: Software for graph coloring and related problems in scientific computing*, ACM Transactions on Mathematical Software **40-1** (2013) 1–31.
- [58] A. H. Gebremedhin, A. Tarafdar, F. Manne, y A. Pothen, *New Acyclic and Star Coloring Algorithms with Application to Computing Hessians*, SIAM Journal on Scientific Computing **29-3** (2007) 1042–1072.
- [59] A. H. Gebremedhin, A. Tarafdar, A. Pothen, y A. Walther. *Efficient Computation of Sparse Hessians Using Coloring and Automatic Differentiation*, INFORMS Journal on Computing **21-2** (2009) 209–223.
- [60] B. Grünbaum, *Acyclic colorings of planar graphs*, Israel Journal of Mathematics **14** (1973) 390–408.
- [61] H. Hocquard, *Graphs with maximum degree 6 are acyclically 11-colorable*, Information Processing Letters **111** (2011) 748–753.
- [62] H. Hocquard y M. Montassier, *Every planar graph without cycles of lengths 4 to 12 is acyclically 3-choosable*, Information Processing Letters **109** (21-22) (2009) 1193–1196.
- [63] H. Hervé, M. Montassier, y A. Raspaud, *A note on the acyclic 3-choosability of some planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **158-10** (2010) 1104–1110.
- [64] R. E. Jamison y G. L. Matthews, *Acyclic colorings of products of cycles*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications **54** (2008) 59–76.
- [65] R. E. Jamison y G. L. Matthews, *On the acyclic chromatic number of hamming graphs*, Graphs and Combinatorics **24-4** (2008) 349–360.

- [66] R. E. Jamison, G. L. Matthews, y J. Villalpando, *Acyclic colorings of products of trees*, Information Processing Letters **99-1** (2006) 7–12.
- [67] R. Karp, *A characterization of the minimum cycle mean in a digraph*, Discrete Mathematics **23** (1978) 309–311.
- [68] R. Karp y J. Orlin, *Parametric shortest path algorithms with an application to cyclic staffing*, Discrete Applied Mathematics **3** (1981) 37–45.
- [69] A.V. Kostochka, *Acyclic 6-coloring of planar graphs*. Metody Diskret Anal **28** (1976) 40–56.
- [70] A.V. Kostochka, *Upper bounds of chromatic functions of graphs* (in Russian), Doctoral thesis, University of Novosibirsk, 1978.
- [71] A.V. Kostochka, E. Sopena y X. Zhu, *Acyclic and Oriented Chromatic Numbers of Graphs*, Journal of Graph Theory **24** (1997) 331–340.
- [72] A.V. Kostochka y C. Stocker, *Graphs with maximum degree 5 are acyclically 7-colorable*, Ars Mathematica Contemporanea **4** (2011) 153–164.
- [73] J. Lasserre, *An explicit exact SDP relaxation for nonlinear 0-1 programs*, LNCS 2081 (2001) 293–303.
- [74] M. Laurent, *A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver, and Lasserre relaxations for 0-1 programming*, Mathematics of Operations Research **28-3** (2003) 470–496.
- [75] V. Leoni y G. Nasini, *On the relationship between disjunctive relaxations and minors in packing and covering problems*, Revista de la Unión Matemática Argentina **46-1** (2005) 11–22.
- [76] C. Linhares Sales, K. Maia, N. Martins, y R. Sampaio, *Restricted coloring problems on graphs with few P_4 's*, Annals of Operations Research **217-1** (2014) 385–397.
- [77] I. Loiseau, I. Méndez Díaz, y G. Nasini, *Determinación del rango disyuntivo de facetas del problema de ordenación lineal*, Proceedings of the XXII JAIIO (1993) 124–130.
- [78] L. Lovász y A. Schrijver, *Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization*, SIAM Journal on Optimization **1-2** (1991) 166–190.
- [79] A. Lyons, *Acyclic and star colorings of joins of graphs and an algorithm for cographs*, Preprint ANL/MCS-P1610-0409, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, April 2009.

- [80] A. Lyons, *Restricted coloring problems and forbidden induced subgraphs*, Preprint ANL/MCS-P1611-0409, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, April 2009.
- [81] A. Lyons, *Acyclic and star colorings of cographs*, *Discrete Applied Mathematics*, **159-16** (2011) 1842–1850.
- [82] J. Marenco y A. Wagler, *Cycle-based facets of chromatic scheduling polytopes*, *Discrete Optimization* **6** (2009) 51–63.
- [83] C. Mathieu y A. Sinclair, *Sherali-Adams relaxations of the matching polytope*, *Proceedings of STOC'09* (2009) 293–302.
- [84] I. Méndez Díaz y G. Nasini, *El problema del ordenamiento lineal y el operador BCC*, *Proceedings of the XVIII JAIHO* (1999) 22–32.
- [85] I. Méndez-Díaz, G. Nasini, y D. Severín, *Polyhedral results for the Equitable Coloring Problem*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **37** (2011) 159–164.
- [86] I. Méndez Díaz y P. Zabala, *A Polyhedral Approach for Graph Coloring*, *Electronics Notes in Discrete Mathematics* **7** (2001) 178–181.
- [87] I. Méndez-Díaz y P. Zabala, *A branch-and-cut algorithm for graph coloring*, *Discrete Applied Mathematics* **154-5** (2006) 826–847.
- [88] I. Méndez-Díaz y P. Zabala, *A cutting plane algorithm for graph coloring*, *Discrete Applied Mathematics* **156-2** (2008) 159–179.
- [89] I. Méndez-Díaz y P. Zabala, *Solving a multicoloring problem with overlaps using integer programming*, *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010) 349–354.
- [90] J. Mitchem, *Every planar graph has an acyclic 8-coloring*. *Duke Mathematical Journal* **41-1** (1974) 177–181.
- [91] D. Mondal, R.I. Nishat, S. Whitesides, y M.S. Rahman, *Acyclic colorings of graph subdivisions*, *Combinatorial Algorithms*, *Lecture Notes in Computer Science* **7056** (2011) 247–260.
- [92] D. Mondal, R.I. Nishat, S. Whitesides, y M.S. Rahman, *Acyclic colorings of graph subdivisions revisited*, *Journal of Discrete Algorithms* **16** (2012) 90–103.

-
- [93] D. Mondal, R.I. Nishat, M.S. Rahman, y S. Whitesides, *Acyclic colorings with few divisions vertices*, Combinatorial Algorithms ,Lecture Notes in Computer Science **7643** (2012) 86–99.
- [94] M. Montassier, P. Ochem, y A. Raspaud, *On the acyclic choosability of graphs*, Journal of Graph Theory **51-4** (2006) 281–300.
- [95] M. Montassier, A. Raspaud, y W. A. Wang, *cyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths*. Topics in Discrete Mathematics. Algorithms Combinatorics, **26** (2006) 473–491.
- [96] M. Montassier, A. Raspaud, y W. A. Wang, *Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles*, Journal of Graph Theory **54** (2007) 245–260.
- [97] G. Nemhauser y L. Wolsey, *Integer programming and combinatorial optimization*. John Wiley and Sons, 1988.
- [98] J. Nešetřil y P. Ossona de Mendez, *Colorings and homomorphisms of minor closed classes*, Discrete and Computational Geometry - series Algorithms and Combinatorics **25** (2003) 651–664.
- [99] J. Nešetřil y A. Raspaud, *Colored Homomorphisms of Colored Mixed Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **80-1** (2000) 147–155.
- [100] N. Ramya, *On Coloring of Corona Graphs*, Indian Journal of Science and Technology, **7-3S** (2014) 9–11.
- [101] A. Raspaud y E. Sopena, *Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs*, Information Processing Letters **51** (1994) 171–174.
- [102] T. Rothvoß, *The Lasserre hierarchy in approximation algorithms*, MAPSP 2013 tutorial (2013).
- [103] H. Sherali y W. Adams, *A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zero-one programming problems*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **3-3** (1990) 411–430.
- [104] K. Thilagavathi y P. Shanas Babu, *A Note on Acyclic Colouring of Central Graphs*, International Journal of Computer Applications **7-2** (2010) 28–30.
- [105] K. Thilagavathi y P. Shanas Babu, *Acyclic Colouring of Star Graph Families*, International Journal of Computer Applications **7-2** (2010) 31–33.
- [106] S. Varagani, V. Ch. Venkaiah, K. Yadav, y K. Kothapalli, *Acyclic Vertex Coloring of Graphs of Maximum Degree Six*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **35** (2009) 177–182.

-
- [107] W. Wang y M. Chen M, *Planar graphs without 4-cycles are acyclically 6-choosable*, Journal of Graph Theory **61** (2009) 307–323.
- [108] W. Wang, G. Zhang, y M. Chen, *Acyclic 6-choosability of planar graphs without adjacent short cycles*, Science China Mathematics **57-1** (2014) 197–209.
- [109] D. R. Wood, *Acyclic, star and oriented colourings of graph subdivisions*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science **7-1** (2005) 37–50.
- [110] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, y V. C. Venkaiah, *Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 5*, Discrete Mathematics **311** (2011) 342–348.
- [111] H. Zhang y B. Xu, *Acyclic 5-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor chordal 6-cycles*, Discrete Mathematics **309-20** (2009) 6087–6091.