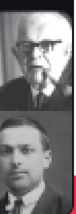
Colección Educación

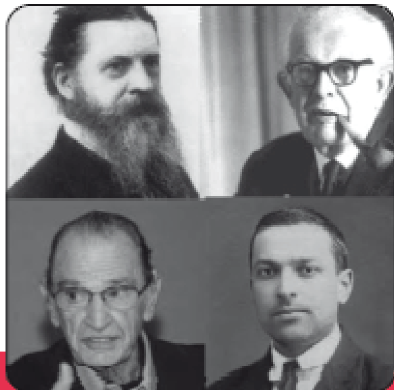


# Problemáticas del Ingreso Universitario

## (Matemática y Taller de Ciencia)

### Enfoque semiótico-cognitivo
### (Piaget, García, Vygotski, Peirce)

Rafael González



Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

# Problemáticas del Ingreso Universitario

Rafael González

# Problemáticas del Ingreso Universitario

(Matemática y Taller de Ciencia)
Enfoque semiótico-cognitivo
(Piaget-García, Vygotski, Peirce)

Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

González, Rafael
Problemáticas del ingreso universitario : matemática y taller de ciencia : enfoque semiótico-cognitivo : Piaget-García, Vygotski, Peirce . - 1a ed. - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2012.
112 p. ; 21x15 cm. - (Educación; 8)

ISBN 978-987-630-124-4

1. Enseñanza Universitaria. I. Título.
CDD 378.007


J.M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7578
publicaciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/publicaciones

Corrección: Fanny Seldes
Diseño gráfico de colección:
Andrés Espinosa / Departamento de Publicaciones - UNGS

# Índice

# Agradecimientos y dedicatorias

*Agradezco a la UNGS y a todos los que de alguna forma cooperaron con este trabajo.*

*Agradezco a los cuatro teóricos que posibilitaron esta reflexión: Jean Piaget, Rolando García, Lev Vygotski y Charles Peirce.*

*Lo dedico a la memoria por siempre viva de mis padres: Gladys Rodas y Bernardino González, y a mi tía: Nelly Rodas.*

*A la memoria luminosa de mi maestro Aníbal Carlos Sicardi Schifino.*

*También, lo dedico al maestro Rolando García.*

*Como una cópula eterna entre flores de luz y obscuridad,*

*las abejas del pensamiento polinizan el conocimiento,*

*en un juego infinito de partidas y regresos,*

*que se sintetizan en el devenir.*

R. G.

# Prólogo

*Problemáticas del Ingreso Universitario (Matemática y Taller de Ciencia). Enfoque semiótico-cognitivo (Piaget-García, Vygotski, Peirce)* surge a partir de la práctica docente en las materias Matemática y Taller de Ciencia del Curso de Aprestamiento Universitario de la UNGS. Especialmente en Matemática, los estudiantes muestran serias dificultades para desarrollar los conceptos aún preliminares de la misma. Frente a la experiencia acumulada en una década de trabajo ininterrumpido en el CAU, se presentan indicios de que, además de las dificultades de origen socioeconómico y de otra índole, existe una suerte de *barrera semiótica* que separa a muchos estudiantes del acceso cognitivo en relación con los contenidos de las materias. Ésta parece superarse con mayor facilidad en Lectoescritura, la tercera materia del CAU, y no hay dificultades en el Taller de Ciencia, que comienza a cursarse al promediar las otras dos. Sin embargo, presenta una importante resistencia en Matemática.

Hay diversos factores que pueden considerarse como variables relevantes para explicar esta resistencia, de los cuales no son menores una valoración social negativa sobre la dificultad intrínseca de la Matemática, así como una autoinhibición emocional estrechamente vinculada con lo anterior y que debería ser estudiada. Con la misma relevancia, se encuentran la lectura y el manejo simbólico propios de la materia.

El objetivo de este libro es exponer las dificultades de carácter semiótico que se presentan y, al mismo tiempo, relacionarlas con los mecanismos cognitivos.

Para investigar esta cuestión, en 2007 se realizó un diagnóstico con ejercicios muy sencillos, durante el primer día de clase, en un curso de Matemática del CAU, que apuntaba a saber cómo desarrollan algunas operaciones básicas y su dependencia, tanto del manejo de los *signos* como del lenguaje oral, pero centrando la atención en los primeros. La idea es, también, poder caracterizar los esquemas conceptuales con los cuales llegan los estudiantes y dilucidar si las dificultades provienen de tales esquemas, o si, como los indicios sugieren, provienen del desconocimiento e incomprensión del significado de los signos.

La interpretación de los resultados del diagnóstico resultaría incompleta sin el abordaje del nexo entre las formas de conceptualización y el soporte semiótico en el que se sustentan. Esto conduce a una elaboración teórica que permite compatibilizar distintos aspectos de las teorías de los principales autores tomados como referencia en este trabajo: Jean Piaget y Rolando García, Lev Vygotski y Charles Peirce.

La elaboración teórica, a su vez, da lugar a una reinterpretación de las formas de conceptualización. Reinterpretación que permite elaborar una dinámica de conceptualización que se juzga adecuada, en el sentido de tomar en cuenta tanto los aspectos cognitivos como semióticos del aprendizaje. Para lo cual, se ejemplifica con la conceptualización de las llamadas ternas pitagóricas, así como del abordaje del concepto de Teorema de Pitágoras, siguiendo los lineamientos de la materia, pero reformulándolos en base a dicho enfoque.

También se incluye, aunque sintéticamente –ya que al Taller de Ciencia se lo considera complementario de las otras dos materias–, la forma de conceptualización correspondiente a las ciencias empíricas. Se introduce aquí un método particular de conceptualización que se deriva de las elaboraciones previas, al que se denomina *pedagogía fractal*.

Por último, se resumen las conclusiones, discutiendo la razón de lo que se considera como un sistema solidario inseparable de inferencias (abductiva, inductiva y deductiva), a la vez que se señala la indiferenciación, por parte de Piaget-García, de las dos primeras. La necesidad de constatar mediante un trabajo de campo las novedades teóricas aquí desarrolladas es finalmente planteada.

Con la meta de avizorar, aun tenuemente, un destello que nos guíe por el complejo universo de la conceptualización, se despliegan, con esperanza, estas ideas.

Rafael González, marzo de 2011.

# 1-Introducción

## 1.1 Planteo de la problemática en contexto

Es un hecho conocido y constatado en los ingresantes universitarios la insuficiencia de formación y de instrumentos conceptuales-cognitivos con los que llegan a las Universidades en relación con el nivel requerido para comenzar los estudios universitarios. En *Problemáticas del Ingreso Universitario ( Matemática y Taller de Ciencia). Enfoque semiótico-cognitivo (Piaget-García, Vygotski, Peirce),* intentamos abordar estas dificultades a partir del desarrollo específico de dos de las tres materias que integran el curso de ingreso de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS): Matemática y Taller de Ciencia. La primera es de carácter formal, mientras que la última se basa centralmente en su carácter fáctico. No obstante la diferencia señalada, intentamos desarrollar una visión unificada basada en el *carácter semiótico* de toda *conceptualización*, tomando en cada caso un contenido específico de tipo formal o empírico.

Para dar un tratamiento unificado y exponer las preguntas que intentamos responder es necesario, en primer lugar, sentar previamente un enfoque teórico básico desde el cual hacerlo. Puesto que, aun en el caso empírico, el objeto para ser comprendido significativamente debe ser *conceptualizado* y esta conceptualización solo es posible en base a un *soporte semiótico* –sea éste lingüístico o de otro tipo–, vamos a definir al *objeto conceptual* como *un tema* dado dentro de una disciplina, sea de carácter formal o empírico. Por ejemplo, un objeto conceptual *puede ser el álgebra dentro de matemáticas*, o *ecuaciones dentro de álgebra*; o *la caída de los cuerpos en el Taller de Ciencia*.

En segundo lugar, coincidiendo con Vygotski (1995), Piaget-García (1984) y la teoría semiótica actual (Marafioti, 2004), consideramos a *un concepto* como *una generalización* dentro de un *sistema de conceptos*. Así, el concepto de número entero en matemáticas surge a partir de una generalización de los naturales, al introducir los negativos que permiten resolver restas como 5-9 y coordinarlos con el 0 y los naturales en un sistema más amplio que contiene ambas clases de números. Aquí consideraremos con Piaget-García (1984) los dos diferentes tipos de generalización: *inductiva* (de pocos casos al caso general), o *completiva* como en el ejemplo de los números enteros, de los que los naturales y los negativos se *deducen*. También, vamos a introducir el concepto de *generalización abductiva* basada en el *razonamiento abductivo* (Peirce, 1974).

Otro punto es el siguiente: consideramos que el conocimiento parte de la *interacción sujeto-objeto* (en un marco de interrelación social), en un proceso constructivo en forma *dialéctica* tal como la definida por Piaget-García (Piaget, 2002). En este caso vamos a considerar que el sujeto actúa con *formas organizadas* sobre el objeto, mediante *operaciones* que constituyen *las acciones del sujeto interiorizadas* (Castorina *et al*., 1982; García, 2000); que el objeto es *contenido* de estas formas organizadas, e interactúa con ellas en un proceso de *asimilación-acomodación* que tiende a equilibrarse en una *fase estabilizada*, que es justamente aquella en la cual el concepto se consolida. Estas formas organizadas constituyen *esquemas conceptuales* que pueden *coordinarse* entre sí, a la vez que modificarse y modificar al objeto en la interacción descrita. Estos esquemas conceptuales son aquellos con los cuales el sujeto *conceptualiza* y, por lo tanto, con los cuales *interpreta* los *objetos conceptuales* que intenta incorporar mediante su acción sobre ellos. Dado que, como venimos señalando, dichos esquemas forman un *sistema conceptual*, vamos a denominarlo *sistema interpretativo*. Naturalmente, dado que este sistema interpretativo tiene un soporte semiótico, lo vamos a considerar como equivalente al *interpretante* definido por Peirce (1974).

En esta formulación unificada, la definición de *objeto conceptual* nos permitirá generalizar la idea de lo que ocurre con un niño que se encuentra en la etapa de “operaciones concretas” definida por Piaget, en el sentido de que la adquisición del concepto es dependiente de la manipulación del objeto, sin el cual no le es posible conceptualizar. En nuestro caso, trabajamos con los ingresantes, que son personas con una edad mínima de 17 años. Esto presupone que se encuentran en la etapa más alta del pensamiento, que es la hipotético-deductiva (Piaget) o la fase de estructura de generalización de conceptos (Vygotski, 1995). Descartando una eventual patología que degrade su pensamiento, ello es lo que ocurre en la inmensa mayoría de los casos; esto hay que referirlo necesariamente a los *objetos conceptuales* considerados, en particular a los que lograron construir en el curso de su *trayectoria cognitiva* y, centralmente, los que manejan en su vida cotidiana. La hipótesis es que si nuestro sujeto de estudio no domina un *objeto conceptual* de un *grado de generalidad* dado (ver más adelante), tenderá a conceptualizar solo a partir de la acción sobre los objetos conceptuales que logró construir en un grado de generalidad menor. Esto nos lleva a la cuestión de cuáles son los *objetos conceptuales* construidos por los ingresantes y cuál es su Sistema Interpretativo de Partida (SIP). Es que cualquier concepto que el sujeto pueda incorporar, lo hará, necesariamente, a partir de su SIP.

Antes de formular las preguntas de nuestra investigación, vamos a resumir nuestra concepción de la enseñanza-aprendizaje y algunos conceptos relativos a las consideraciones teóricas previas.

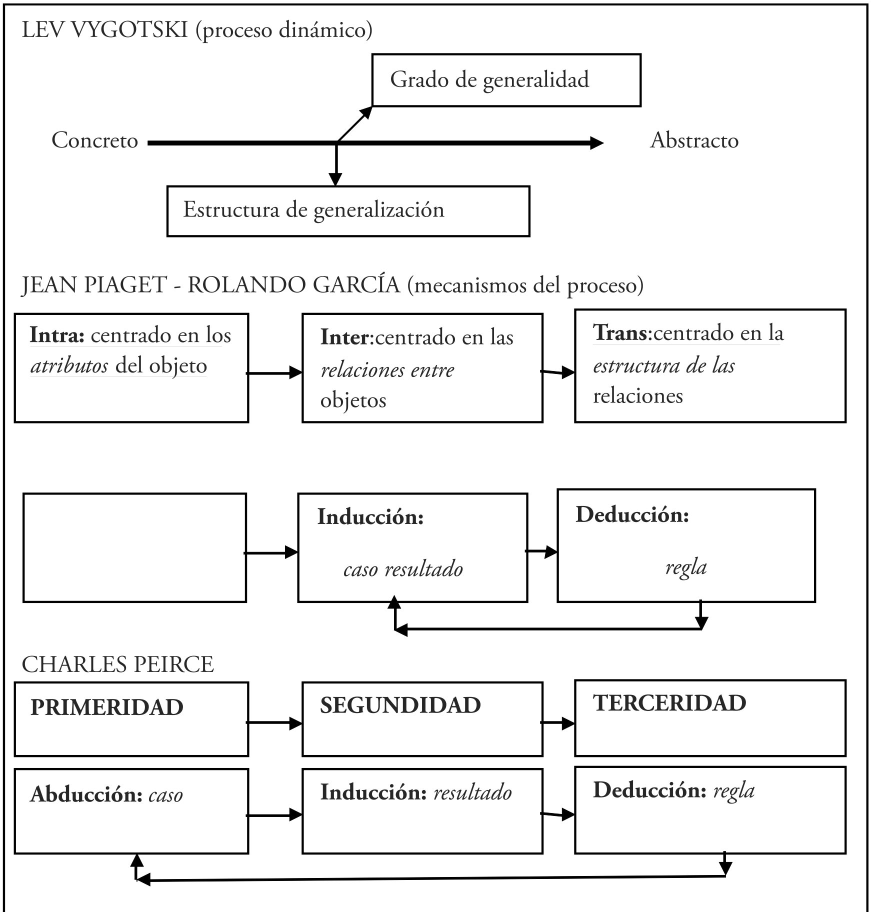
## 1.2 Concepción de la enseñanza-aprendizaje

Consideramos a la enseñanza-aprendizaje como un proceso con las siguientes características:

- El proceso de enseñanza-aprendizaje[1] (PEA) es una *relación social concreta y situada*, en el seno de la cual se desarrolla un *proceso interactivo y constructivo de conceptos.*
- Es básico conocer al *sujeto social* involucrado.
- Se concibe al PEA como un *proceso en contexto*, tanto desde la perspectiva social como cognitiva.
- Se concibe al PEA como un *proceso horizontal, dialógico y libre* en el que no hay posiciones privilegiadas, sino distintos roles en su seno (Freire, 1970).

[1] En este trabajo consideramos a la enseñanza y al aprendizaje en interrelación, por lo cual hablamos de proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Se concibe a la *construcción de conocimientos* como un *proceso de generalización* con las siguientes características en relación con un *concepto*:




**Cuadro 1.1 - Proceso de conceptualización**

- Si representamos el nivel de *abstracción* de un concepto dado en la llamada *recta de* generalidad definida por Vygotski (1995), un concepto tendrá un *grado de generalidad* representado por su posición en la recta de generalidad.

- En cada *posición* del *grado de generalidad*, hay *estructuras de generalización* vinculadas al concepto, cada vez más ricas, que contienen a las previas y son contenidas por las siguientes.
- En cada *posición* del *grado de generalidad*, el concepto está vinculado por un *sistema de relaciones* con otros conceptos, que serán las *relaciones de generalidad*. Por ejemplo, el concepto de ecuaciones se vincula al de números, variable, incógnita, igualdad, grado, etc., que aparecen en distintas ubicaciones del grado de generalidad y se relacionan entre sí a través de las relaciones de generalidad.
- Se concibe al proceso de construcción de conocimiento como un *proceso dialéctico particular ↔ general* en un *contexto o sistema* que se da en *tres fases*: a partir de la desestabilización del sistema interpretativo por un objeto conceptual a ser incorporado, el sistema se *reorganiza* mediante un *proceso interrelacionado* de *abducción, inducción y deducción*, mediante la interacción entre el *sistema interpretativo* (SI) y el *objeto conceptual*, por la cual el SI *asimila* al objeto (que por lo tanto se modifica), a la vez se *acomoda* al mismo, hasta lograr una *equilibración* en una fase estabilizada en la que un nuevo sistema interpretativo ampliado lo contiene como objeto incorporado. Estas tres fases se corresponden con las etapas *intra operacional (Ia)* centrada en los atributos del objeto*, inter operacional (Ir)* centrada en la relaciones entre objetos y *trans operacional (T)*, centrada en la estructura de dichas relaciones (García, 2000).

La interrelación de los ítems señalados de construcción de conocimientos es la siguiente: la incorporación de objetos conceptuales al sistema cognitivo se da en un proceso que va en la dirección *concreto→abstracto*, en el que los extremos son la captación sensorial y el máximo grado de generalidad alcanzable. El avance por la *línea de generalidad* se concibe como un *proceso de generalización*. La ubicación en un punto determinado de la línea indica el *grado de generalidad*. Vygotski determinó *fases* en el desarrollo del *pensamiento* sobre esta línea que van de lo *pre sincrético* sin pensamiento verbal a los *conceptos* donde se puede dar el mayor grado de generalidad posible, a las que llamó *estructuras de generalización*. Dentro de estas estructuras, los conceptos se vinculan entre sí a través de relaciones llamadas *relaciones de generalidad*. Piaget también dividió la evolución del pensamiento en *estadios*. Y sus características están dadas por el *tipo de operaciones* que es posible desarrollar en ellos. Una forma de caracterizar a los mismos es asociándoles un *tipo de lógica*. Lo mismo es posible con las fases de Vygotski. En relación con el interés centrado en un estudiante típico del CAU, aquí interesan las dos últimas fases del desarrollo o estadios, respectivamente: las fases de *pre concepto y concepto* en Vygotski, o de *operaciones concretas* e *hipotético-deductiva* en Piaget. Ambas series se caracterizan porque sus operaciones responden a la *lógica de clases y relaciones* (primera componente de cada serie) y a la *lógica formal* (segunda componente de la serie), respectivamente.

Por otro lado, dado un objeto conceptual, Piaget-García postulan tres mecanismos presentes a lo largo de la adquisición de conocimientos, tanto en la *psicogénesis* como en la *historia de la ciencia*: los que integran la tríada *IaIrT*.

Un aporte significativo de Vygotski es la idea de que el *grado de generalidad* es una variable psicológica central para el proceso cognitivo. Dado un *concepto*, por ejemplo, el número racional, éste está ubicado en un punto de la recta de generalidad (y de la superficie, en el caso de considerar objetos extra matemáticos que estarán en una línea paralela sobre una superficie) conectado mediante las *relaciones de generalidad* con otros conceptos, por ejemplo, números enteros (menor grado de generalidad) y números reales (mayor grado de generalidad). El tipo de relaciones que emergerán en la mente estará vinculado a la dirección que esté tomando el pensamiento. Por otro lado, vamos a considerar a una generalización como *abductiva* o *inductiva* cuando ésta se produzca en la dirección positiva de la línea de generalidad y, en cambio, será *completiva* cuando el proceso que la determina permite ir de un nivel abstracto a otro más concreto como caso singular de dicho nivel. En este caso, las conexiones entre ellas se vuelven *necesarias*, lo cual implica esta reversibilidad. *La relación dialéctica, singular←→general, es central para la adquisición de conceptos que no se da solo en la dirección concreto→abstracto*.

En este punto adquiere relevancia una característica central de las operaciones estrechamente vinculada con lo anterior: *la reversibilidad operatoria*, es decir, la posibilidad de operar en un sentido y en el opuesto. En el caso que nos convoca aquí, adquiere importancia la operación recíproca de la implicación $p \rightarrow q$ que es $q \rightarrow p$. Esta operación recíproca resulta tener un alto grado de dificultad para muchos ingresantes. Su manejo adecuado es una buena medida de la adquisición de la reversibilidad operatoria.

Vamos a extender el concepto de estructura de generalización: dado un *objeto conceptual*, su *estructura de generalización asociada* estará formada por dicho concepto y las *relaciones de generalidad necesarias* para su *asimilación*. Si bien la estructura de generalización así definida pertenece a alguna de las fases o estructuras de generalización definidas por Vygotski, toma aquí un carácter más específico asociado a un concepto dado. Su objetivo es determinar *estructuras mínimas de conceptualización*, siempre que esto sea factible.

## 1.3-Las preguntas

En base a estos conceptos mínimos, deseamos averiguar no solo con qué caudal formativo llegan los ingresantes a la Universidad sino qué clase de *esquemas conceptuales* dominan, principalmente en relación con Matemática, que es donde se presentan las mayores dificultades. Cuál es su sistema interpretativo de partida (SIP). Cómo intentan adquirir los conocimientos que se les brinda en el Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) en base a dicho SIP. Qué dificultades aparecen a medida que se avanza en el *grado de generalidad* de un concepto o, dicho de otra forma, cuando el concepto les exige un grado mayor de *abstracción*. Si, dado un concepto u objeto conceptual, tomamos el sistema necesario de conceptos con el que puede incorporarse a lo que llamamos *estructura de generalización* del concepto u objeto conceptual, cuáles son las estructuras de generalización que dominan y qué insuficiencias tienen en relación con las que no dominan. Un adelanto de esto como ejemplo lo constituye el hecho de que la mayoría de los ingresantes no completaron la estructura de generalización de la aritmética (es decir, los conceptos necesarios para dominarla) y, en esas condiciones, el salto al álgebra se torna abismal para su SIP. Cuál es el grado de dominio de la reversibilidad operatoria.

Por otro lado, queremos saber cuál es la base *semiótica* sobre la cual la adquisición de los conceptos involucrados es posible. Cómo interviene este soporte semiótico en la adquisición de los conceptos. Y, puesto que esta adquisición se dificulta en la medida en que avanzamos en el nivel de abstracción, qué relación tiene el soporte semiótico con el grado de generalidad. Este grado depende del soporte semiótico utilizado. Si, en base a las consideraciones anteriores, hay restricciones en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje que es necesario tomar en cuenta en cualquier planteo pedagógico para optimizar el proceso y en qué consisten aquéllas, tanto en el caso de Matemática (formal) como del Taller de Ciencia (empírico).

## 1.4 Las respuestas

En los siguientes capítulos intentaremos realizar una *aproximación* a las respuestas que nos permita la posibilidad de formular estrategias que ayuden a superar las dificultades cognitivas de los ingresantes.

Por último, una vinculación e integración entre algunos conceptos centrales de Vygotski, Piaget-García y Peirce, es teorizada en relación con Matemáticas y el Taller de Ciencia con el objeto de lograr la aproximación a dichas respuestas.

# 2-Caracterización de algunas estructuras cognitivas de los ingresantes en relación con Matemática. Vinculaciones esenciales entre Piaget-García, Vygotski y Peirce

.

Como ya señalamos previamente, los ingresantes son personas con una edad mínima de 17 años. Esto presupone que se encuentran en la etapa más alta del pensamiento, que es la hipotético-deductiva (Piaget) o la fase de estructura de generalización de conceptos (Vygotski). Descartando una eventual patología que degrade su pensamiento, ello es lo que ocurre en la inmensa mayoría de los casos; esto hay que referirlo necesariamente a los *objetos conceptuales* considerados, en particular, a los que lograron construir en el curso de su *trayectoria cognitiva* y, centralmente, los que manejan en su vida cotidiana.

## 2.1 Breve caracterización social

Para contextualizar socialmente la problemática cognitiva tomamos una caracterización del *sujeto social* involucrado en el Apéndice 1 (Gaspar Tolón, 2009). Esta caracterización revela los límites que adolecen muchos estudiantes para lograr concentrarse, concurrir a la mayor cantidad de clases, lograr las condiciones necesarias para superar las insuficiencias cognitivas, superar las frustraciones en los aprendizajes y el fuerte impacto que en estas condiciones representa adaptarse a la vida universitaria y terminar –ya no la carrera– sino el CAU.

Vamos a referirnos a este conjunto de situaciones como *condiciones de entorno* que constituyen las condiciones contextuales en las que se *desarrolla* el *sistema cognitivo* del estudiante que participa del *proceso de enseñanza-aprendizaje*, en interrelación con los docentes y con sus pares, estos últimos su entorno más inmediato al que llamaremos *contexto de interacción cognitivo (CIC)* . No siendo ésta una visión resignada, un objetivo es abordar las dificultades propiamente cognitivas que deben superar en dicho contexto bajo sus condiciones de entorno.

## 2.2 Conceptualización y soporte semiótico. Definición de dificultades cognitivas

Retomando el punto semiótico-cognitivo, la idea es, entonces, que estos estudiantes pueden desenvolverse, en la etapa cognitiva superior, con relación a los *objetos conceptuales cotidianos*. Que su práctica habría llevado a la construcción de *un soporte semiótico* (que incluye al lenguaje natural y a las diversas simbolizaciones de dicha práctica) y, con él, a una relativa *sistematización conceptual* y, así, a una *reversibilidad operatoria* relativa a dichos objetos. Hay que destacar que sin la reversibilidad operatoria no es posible alcanzar esta etapa cognitiva; no obstante, según los desafíos cognitivos planteados, si éstos implican solo un manejo de *lógica de clases* y *relaciones* propia de la manipulación de *objetos concretos*, la reversibilidad operatoria se alcanza en la etapa previa que Piaget llama de las *operaciones concretas*.

¿Qué caracteriza, entonces, a los procesos cognitivos que desarrollan los ingresantes al iniciar el CAU y qué dificultades experimentan? Y, ¿qué se entiende por tales dificultades?

En términos generales las concebiremos como las dificultades que presenta el sujeto para *incorporar* o *asimilar* los contenidos impartidos en el curso de ingreso. Pero enfocados de una forma más específica, a la insuficiencia de *esquemas conceptuales de asimilación necesarios (Estructuras de Generalización Asociadas) para la incorporación de los conceptos involucrados en dichos contenidos, en el marco de las condiciones de entorno en el cual se realiza el proceso de enseñanza-aprendizaje*. Para lo cual interesa conocer cuál es el punto de partida, en los ingresantes, de dichos esquemas conceptuales, al que hemos denominado *sistema interpretativo de partida (SIP)*.

No indagamos acerca de por qué, ni cómo llegan a dicho punto de partida. Pero sí qué elementos lo constituyen en relación con el objeto conceptual dado y qué respuestas pueden explorarse para acompañar la construcción de las estructuras de generalización asociadas a dichos conceptos.

Parte de esta indagatoria se refiere al *soporte semiótico* entendido como *sistemas de signos* con el cual se construye el objeto conceptual, incluyendo en él al lenguaje natural.

## 2.3 Diagnóstico sobre su sistema de conceptualización en Matemática en el momento de ingresar, en relación con los contenidos iniciales del curso

Para analizar esta cuestión, así como la vinculada al sistema de signos propio de la Matemática, realizamos un diagnóstico con los estudiantes de un curso del CAU en 2007, que, cualitativamente, se mantiene en el tiempo (como veremos más adelante al aplicarlo a un curso del año 2010) y es representativo de los diversos cursos de acuerdo a la experiencia docente general. El diagnóstico presentado en el recuadro consta de 20 ítems que intentan indagar sobre aspectos básicos del conocimiento de Matemática con el que llegan los estudiantes (SIP) y su relación con las representaciones semióticas, sean éstas simbólicas o gráficas. Formalmente, el sistema educativo institucional *espera* que los estudiantes lleguen al ingreso universitario con estos aspectos conceptuales incorporados en dos sentidos: por un lado, con un *dominio* de los conceptos involucrados y, por otro, con una comprensión de los *signos matemáticos*. Esta "esperanza" queda en evidencia por el mismo material introductorio en el cual estos aspectos, a lo sumo, se revisan como forma de repaso, a la vez que se va incorporando una *nueva modalidad* de abordar los conceptos previstos como conocidos. Esto, como veremos mediante los resultados del diagnóstico, no se verifica en la *forma esperada*, y es, precisamente, lo que intentamos medir.

Metodológicamente, el diagnóstico se plantea de la siguiente forma: es esencial conocer las características del sujeto social. Especialmente, se toma en cuenta la experiencia previa con los cursos de ingreso de la UNGS, y se realiza un relevamiento de las dificultades observadas en el momento de ingresar y a lo largo del curso. De allí, se obtiene una tipificación de los ejercicios que se quiere ver si son respondidos en la *forma esperada* por los docentes, de acuerdo a las reglas y pautas que, se *asume*, los estudiantes deberían dominar, tanto en cuanto a *esquemas de asimilación* como en relación con la *lectura simbólica*.

De acuerdo a dicha tipificación, los ejercicios van desplegando operaciones básicas que incluyen números enteros, racionales e irracionales en forma progresiva; y la consigna que se les da es resolver cada ítem o poner a qué es igual la expresión dada, con aclaraciones específicas en algunos casos. La idea de este despliegue es ir aumentando el orden de dificultad que se presenta por la combinación de operaciones o de la clase de números utilizadas. En especial, se introduce en el ítem v el número irracional, cuya expresión simbólica se *espera*, en el sentido ya explicado, que el estudiante conozca. Esta progresión –y lo que se pide– está pensada para que el estudiante muestre tanto su *forma de operar* como la *significación* que les atribuye a los diferentes signos.

Los ítems i a xi contienen operaciones elementales de la aritmética en orden creciente de dificultad, que nos permiten ver si los alumnos manejan ciertas definiciones de operaciones básicas y de algunas propiedades de las mismas. En el ítem v indagamos qué ocurre cuando introducimos un número irracional, como en la suma $1+\sqrt{5}$ , cuál es la respuesta del alumno al presentarle esta operación. Este ítem merece una consideración especial. Hasta aquí no aparecen mayores dificultades para que el estudiante entienda y opere de alguna forma con la consigna dada. Y, de hecho, la resolución de los ítems anteriores lo impulsa a resolver este punto de una forma análoga. Pero, en esta expresión, dado que $\sqrt{5}$ representa simbólicamente a un irracional, lo *esperado* es que conozca esta representación y responda colocando la misma expresión a la derecha del igual, al responder la consigna. Sin embargo, en el caso en que no domine esta representación en la forma esperada, asumimos la idea de que la consigna le parezca no tener sentido y que eso lo impulse a encontrarlo, desplegando alguna operatoria mediante la asignación de una significación a los signos $\sqrt{5}$ o $\sqrt{\ }$ , y que, al hacerlo, muestre, a su vez, un esquema de asimilación.

Es importante aclarar en este punto que aquí importa mucho más la interpretación cualitativa que la cuantitativa. Qué información se puede extraer de sus operaciones. Por otro lado, para la interpretación de los resultados del diagnóstico, no basta con sus respuestas escritas, sino que es necesario tomar en cuenta, además, su trabajo posterior en el aula, lo cual permite un contexto más amplio de interpretación. Tanto la formulación del diagnóstico, como la evaluación de sus resultados, son *dependientes del contexto*; por ello, no tiene sentido repetirlo en otros contextos sin una construcción del tipo de la señalada pues, en otro contexto y con otro sujeto social, los resultados pueden ser diferentes. En el caso que tratamos aquí, la tipificación responde a una suerte de límite entre lo que pueden y no pueden resolver o interpretar. Ese límite también se considera dependiente de las *situaciones*. Solo de esta forma podemos aspirar a tener respuestas adecuadas y que

i) $1+5=$ ii) $1-5=$ iii) $1+0.5=$

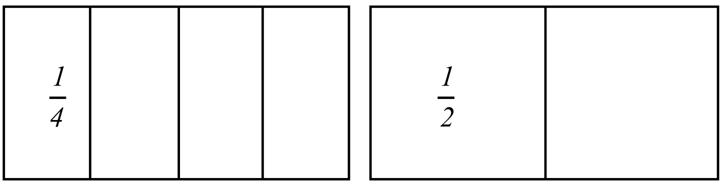
iv) $0.1+5=$ v) $1+\sqrt{5}=$ vi) $1+\sqrt{4}=$

vii) $1+5^2=$ viii) $1^2+5^2=$ ix) $(1+5)^2=$

x) $\sqrt{5+4}=$ xi) $\sqrt{5}+\sqrt{4}=$ xii) $a+a=$

xiii) $a^2=$ xiv) $a^2+a^2=$ xv) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=$

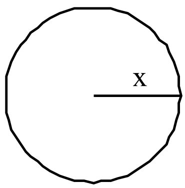
xvi) $1+5.3-6:2=$ xvii) $1+\sqrt{9}:3-\frac{1}{2}\cdot 4$ xviii) hallar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$ en base al dibujo y sin hacer cuentas.




xix) Indicar qué representa x en cada situación

$x$ Sit. 1

$x^2$ Sit. 2



Sit. 3

$x^2-1=5$ Sit. 4

$y=x^2+1$ Sit. 5

xx) Problema oral: tomar nota como puedas y resolver usando los medios que se te ocurran y explicando la forma en que lo hiciste. En una fila de 10 personas debo repartir 5 caramelos. No le puedo dar ni a la primera ni a la última de la fila y si le doy a una persona, no le doy a la que se encuentre al lado ¿Cuántos caramelos reparto?

**Diagnóstico**

signifiquen una *medición cualitativa* plausible de los esquemas conceptuales del estudiante y del contexto semiótico que reconoce.

Los ítems xii a xiv introducen el concepto de *variable* en el contexto de la definición de operaciones aritméticas, lo que implica una *algebrización*. El objetivo es ver si hay una continuidad de conceptualización desde la aritmética al álgebra en una base elemental y, al mismo tiempo, un cierto manejo del *lenguaje simbólico* concomitante. Si puede operar con expresiones algebraicas básicas en la forma esperada y, en otro caso, cómo las resignifica.

El ítem xv introduce una operación elemental con racionales. Deseamos saber si el estudiante tiene incorporado el número racional como objeto conceptual.

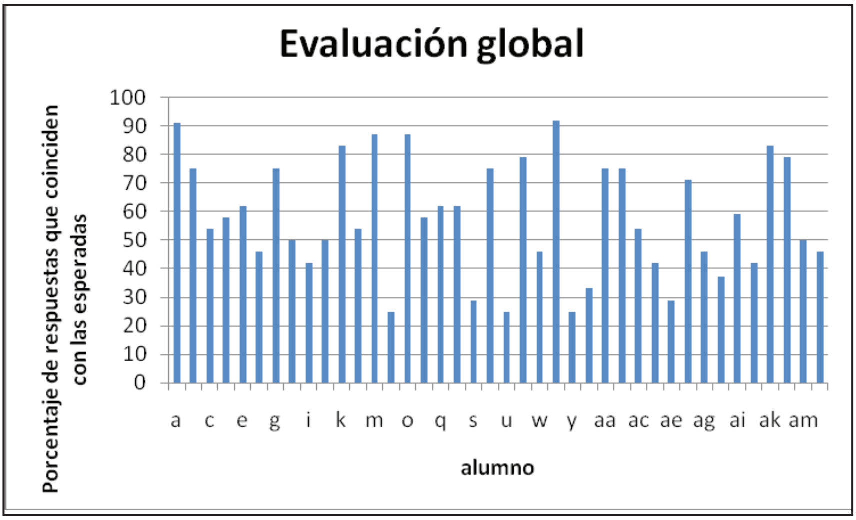
El ítem xviii intenta ver si con la forma de representación gráfica el estudiante resuelve la suma de racionales con los mismos denominadores que en el ítem xv. Como veremos más adelante, esto responde a una *forma icónica* de representación que tiene un grado de generalidad menor; por lo tanto, se presume que, por su carácter cualitativo, sea una forma de representación del número racional más sencilla de manipular de acuerdo a la hipótesis señalada en la Introducción. Debe insistirse al estudiante que la forma de resolución debe basarse en el dibujo y no en el procedimiento habitual de sumar fracciones; es decir, señalando de alguna manera con marcas o sombreados los términos de la suma y deduciendo de allí el resultado.

En el ítem xix se vuelve a la idea de variable, pero esta vez asociada con representaciones en *contextos semióticos* diferentes. Para ello, debe ponerse énfasis, con una aclaración necesaria cuando los estudiantes la demanden, en que deben centrarse en el rol de la $x$ en la *situación* planteada. ¿Qué es la x colocada allí?, pregunta que alude a su rol en el contexto semiótico dado por cada situación. En la situación 1 aparece solo una $x$, de forma que debe ser el estudiante quien *asigne* el contexto, que es lo esperado. En la segunda situación, la $x$ es la base de una potencia. Aquí la operación potenciación es el contexto semiótico de la variable. En la tercera situación se introduce el radio de un círculo y, en la cuarta, la incógnita en el contexto de una ecuación cuadrática. En la quinta, se presenta la variable independiente en el contexto de una función cuadrática. Los mencionados son los contextos y los vínculos esperados. La idea es ver qué *contexto semiótico* reconoce el estudiante y cómo vincula con *él* a la variable.

El ítem xx plantea un problema sencillo desde la expresión oral, con el doble propósito de evaluar esta forma de recepción del estudiante y, al mismo tiempo, ver la *forma* en que *representa* y *razona* el problema y, a la vez, cómo argumenta una solución.

El diagnóstico lo responden 40 estudiantes sin discriminación de edad o sexo.

**Fig. 2.1-Curso de Ingreso 2007**




En el gráfico de la Fig. 2.1 se muestra el porcentaje de respuestas de los estudiantes al diagnóstico que coinciden con las esperadas. También, en la Fig. 2.2 podemos observar la cantidad de alumnos que responden en la forma esperada a cada ítem:

**Fig. 2.2-Curso de Ingreso 2007**


En primer lugar, vamos a tomar como referencia para la evaluación de cada ítem al conjunto de *respuestas esperadas*, tal como lo hemos definido, esperadas por el sistema educativo institucional y, en particular, por los docentes que los recibirán, lo que queda evidenciado en la formulación de las actividades iniciales que *presuponen* conocimientos y habilidades que, en el punto de partida, los estudiantes deberían poseer. Lo cual se espera aunque la experiencia de más de una década en el contexto social considerado demuestra que no ocurre.

En forma general, serán las respuestas que se considerarían correctas en relación con las *definiciones* y la *operatoria sistematizada* que *presupone* su formación previa. Por ejemplo, al operar con números enteros, decimales, racionales o irracionales. Presupone el conocimiento de las operaciones y del contexto semiótico de las expresiones simbólicas o gráficas en las que éstas se presentan. En forma específica, para los ítems i-iv y vi-x se espera la obtención de un resultado numérico; para los ítems v y xi, como ya se señaló, las igualdades $1+\sqrt{5} = 1+\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}+\sqrt{4} = \sqrt{5}+2$ respectivamente; para el xii, a + a =2a; en el xiii se espera que apliquen la definición: $a^2$ = a.a; en el xiv, $a^2 + a^2 = 2\ a^2$; en el xv se espera que obtengan un resultado numérico a partir del procedimiento de suma de racionales obteniendo un común denominador; en los ítems xvi-xvii se espera que obtengan un resultado numérico haciendo las operaciones indicadas y respetando sus jerarquías; en el ítem xviii se espera que marquen de alguna forma, sombreando, usando llaves etc., dos rectángulos de ¼ representando ½ , y otro de ¼, de tal forma que quede claro que saben cómo sumar gráficamente, aunque el resultado lo obtengan con el procedimiento usual de suma; en el ítem xix se esperan las siguientes respuestas para los subítems : (i) que respondan el rol que cumple x mediante la asignación de un contexto, (ii) x es la base de una potencia, (iii) x es el radio de un círculo, (iv) x es la incógnita de una ecuación, (v) x es la variable independiente de la función cuadrática; en el ítem xx se espera que puedan copiar y comprender el problema y lo resuelvan ayudados por un esquema gráfico o un razonamiento aritmético.

Estas *respuestas esperadas* se toman al solo efecto de tomar una referencia con la cual comparar las respuestas de los estudiantes. Pero el objetivo central es poder dilucidar en qué forma operan específicamente frente a cada ítem y verificar las estructuras de generalización adquiridas, así como verificar que actúan en función de los *esquemas conceptuales ya adquiridos*. Diremos, entonces, que los que no responden en la forma esperada (EFE), lo hacen en forma *diferente* (EFD), puesto que lo hacen en función de un esquema conceptual que es necesario identificar. Por ello, la principal información la obtendremos de las respuestas tipo EFD.

Como se observa en el gráfico de resultados, la evaluación global muestra que solo 17 alumnos responden en la forma esperada un porcentaje mayor o igual al 60% de las peguntas. Podemos obtener información más detallada del gráfico de la cantidad de alumnos que responden en la forma esperada cada ítem.

Tomemos primero el grupo de ítems i-iv. Naturalmente todos responden en la forma esperada el ítem i. En el ítem ii aparece la primera dificultad visible, puesto que deben operar con números enteros y es necesaria la reversibilidad operatoria. No obstante, el porcentaje de respuestas esperadas es de casi el 75% lo que está en línea con nuestra caracterización inicial. Los que responden en forma diferente los ítems iii y iv adolecen de lo que denomino *insuficiencia global de estructuras de generalización* (IGEG) en relación con los objetos conceptuales considerados, es decir, no dominan las definiciones de las operaciones básicas, ni el léxico simbólico elemental y, por lo tanto, las propiedades de las operaciones. No lograron resolver el problema oral (xx) y quien, en las condiciones mencionadas, lo resolvió, lo hizo en base a una forma de representación gráfica (FRG). Su nivel de respuestas EFE está entre el 20% y el 30%, y un seguimiento posterior de los mismos muestra que no logran progresar durante el resto del curso; por el contrario, su nivel de resultados disminuye quedando estancados básicamente en el nivel del diagnóstico. En este caso, 6 de los 40 alumnos se encuentran dentro de esta categoría.

En el ítem v se observa una disminución abrupta de la cantidad de respuestas esperadas. Esto estaba previsto porque la dificultad que aparece aquí está en la confusión generada entre el símbolo $\sqrt{5}$ como número irracional y el símbolo $\sqrt{\ }$ como operación. La mayoría conoce la definición y el símbolo de la operación radicación, pero en relación con los enteros que son cuadrados perfectos. Los números que lograron incorporar hasta ahora son los enteros, y éstos están sometidos a las operaciones básicas que incluyen la potenciación y la radicación. Es decir, sus objetos conceptuales son los enteros, y ellos operan con estos objetos intentando obtener un resultado que sea un objeto de la misma clase. Veamos, entonces, el detalle de los resultados. En las respuestas tipo EFD, los estudiantes no responden (21 estudiantes). O calculan mal la raíz: aproximan por un entero menor (2), dividen por 2 o elevan al cuadrado (8 y 1 respectivamente). O aplican distributiva de la radicación con respecto a la suma (1). O convierten la suma en producto (1). O resuelven usando calculadora (1), lo cual se les indicó que no hicieran. ¿Qué es lo que ocurre? No tienen incorporado el concepto de número irracional y su representación simbólica, lo cual se encuentra en un nivel superior de abstracción (en su sistema semiótico $\sqrt{5}$ significa la operación sacar la raíz cuadrada de 5, pero no la simbolización del número irracional $\sqrt{5}$ ).

Esto es un ejemplo claro de que al aparecer un objeto conceptual de mayor abstracción que no tienen incorporado, tienden a manejarse con los objetos conceptuales de nivel inferior. Y no podrán operar con los nuevos objetos conceptuales si no incorporan el *léxico simbólico* junto a la *estructura de generalización asociada* a los nuevos objetos. En este caso, la correspondiente a la de los números irracionales, ya que $\sqrt{5}$ es un número irracional. Veremos más en detalle esto al hacer la interpretación teórica.

El bloque de ítems vi-x no plantea mayor dificultad para quienes dominan las operaciones básicas porque, como ya dijimos, se trata de operaciones con números enteros y los resultados muestran que la mayoría tiene incorporado el concepto de números enteros junto a la definición de sus operaciones. Las respuestas tipo EFD se deben a que no dominan alguna operación (7), o alguna de sus propiedades (asociativa o distributiva mal aplicadas) (11), o no resuelven algún ítem (3). Lo cual implica que, en este caso, no completaron elementos esenciales de la *estructura de generalización aritmética*, esto es, no conocen las operaciones básicas con números enteros y sus correspondientes propiedades.

El ítem xi presenta las mismas características que el ítem v, de cuyas conclusiones podríamos haber inferido el resultado que se grafica. Solo tres estudiantes lo respondieron en la forma esperada.

Los ítems xii a xiv involucran un *salto de abstracción* al introducir el concepto de variable, con lo cual era predecible una disminución clara en el número de respuestas tipo EFE con respecto al bloque vi-x. No obstante, los estudiantes intentan aplicar los esquemas conceptuales previos a los nuevos objetos conceptuales, y con ellos, en el ítem xii, obtienen el mejor resultado, pues es una operación relativamente sencilla con una variable no complejizada por una operación nueva. Ésta es la razón por la que 24 estudiantes escriben en la forma esperada el resultado como $a+a=2a$ . Los que responden en forma diferente confunden a la suma con (o la fuerzan a ser) un producto: $a+a=a^2$ (7). O interpretan la variable como una identidad con respecto a la suma $a+a=a$ (3). O definen una nueva variable: $a+a=b$ (4).

Con respecto al ítem xiii, responden en la forma esperada 23 estudiantes (en este caso, responder en la forma esperada significa escribir simbólicamente la definición de la potenciación, es decir $a^2 = a.a$). Los que responden en forma diferente no manejan la definición de potenciación (11). O toman a la variable *a* como una identidad con respecto al producto $a^2 = a$ (11). O reemplazan la variable *a* por un número entero y operan (por ejemplo, $a=1$ o $a=5$); es decir, muestran un ejemplo a través del contenido en un nivel de generalización previo. En realidad, los estudiantes no manejan aquí el concepto de identidad con respecto al producto, sino que están intentando operar en función de una lógica de clases. Estos resultados tienen dos aspectos: si tomamos el conjunto unitario A={*a*}, el primer resultado se puede interpretar por el hecho de que representa a la operación como AUA=A en la cual el único elemento existente es *a*. Por otro lado, la posible interpretación de *a* como una unidad que puede ser *seriada* y, por lo tanto, *numerada* abre paso a las operaciones algebraicas, de la misma forma en que se desarrollaron las operaciones aritméticas en una etapa previa. Por ello, en el segundo caso, el reemplazo de *a* por un entero. En este caso, además, no pudieron resolver ninguno de los subítems del ítem xix que implican la conceptualización de la variable (que está un escalón por encima de su nivel de conceptualización), lo cual indica que no les es posible operar más allá de la generalización aritmética con números concretos. Estos dos casos constituyen ejemplos de ejecución de *operaciones concretas*, manipulando elementos *concretos*, ya que no pueden hacerlo aún con elementos *genéricos* a los que, a pesar de jugar el rol de variable, les es aplicable el mismo tipo de operaciones que a los números que representan. Con respecto a los *objetos algebraicos*, los elementos concretos son, en estos casos, *objetos aritméticos*.

En relación con el ítem xiv, responden que $a^2 + a^2 = 2\ a^2$ 11 alumnos. Los restantes alumnos no responden (4). O aplican la definición de potencia sin sumar: $a^2 + a^2 = a.a + a.a$ (4). O responden que $a^2 + a^2 = a^4$ sumando los exponentes y abstrayendo la variable (13). O que $a^2 + a^2 = 2a$ abstrayendo los exponentes (1). O que $a^2 + a^2 = 4a$ porque definió previamente $a^2 = 2a$ (1). O que $a^2 + a^2 = (a+a)^2$ aplicando mal distributiva de la potenciación con respecto a la suma (1). O reemplazando la variable por números enteros y operando (2). O que $a^2 + a^2 = (a.a)^2$ aplicando la definición y "absorbiendo" un término por ser de la "misma clase" (1). O redefiniendo a la suma como una nueva variable $a^2 + a^2 = b$ (2).

El ítem xv sobre una suma sencilla de fracciones con diferentes denominadores e igual numerador, lo responden en la forma esperada 18 estudiantes y 22 lo hacen en forma diferente. Entre los cuales no responden (5). O suman numeradores y denominadores (7). O aplican mal la regla del denominador común (3). O la aplican mal pero, a la vez, suman o numeradores o denominadores (7). Estas respuestas se deben a que tampoco tienen incorporado como objeto conceptual el número racional y, menos aún, sus operaciones básicas. *Los casos en que intentan sumar numeradores y/o denominadores, aun combinados con el procedimiento "mecánico" de la regla del común denominador, son ejemplos de la aplicación a los fraccionarios de los mecanismos operacionales conocidos de los números enteros. Es decir, la aplicación de los esquemas conceptuales previos.*

En el ítem xvi tenemos una operación combinada entre números enteros. Responden en la forma esperada 26 estudiantes y 14 lo hacen de forma diferente. No responden (1). Los 13 restantes desconocen *las jerarquías* de las operaciones básicas de la aritmética [Por ejemplo, resuelven 1+5.3-6:2 = (1+5.3-6):2=5 ] (9). U operan incorrectamente con los números negativos [1+15-3=1+15+3=19] (4). Si por esta jerarquía significamos las reglas de la coordinación entre signos, es claro que se trata de una insuficiencia en la incorporación de la *gramática del lenguaje simbólico de la Matemática*.

Algo similar ocurre con el ítem xvii, pero ahora complejizado por el hecho de introducir racionales además de la raíz cuadrada, lo cual aumenta considerablemente la cantidad de estudiantes que no responden en la forma esperada, de los cuales 12 no responden; 5 estudiantes desconocen la jerarquía de las operaciones aritméticas

(por ejemplo, resuelven $1+\sqrt{9} : 3-\frac{1}{2}\cdot 4 \quad =(1+\sqrt{9}):(3-2)=4:1=4$);

5 estudiantes las desconocen y, además, no saben operar con fracciones

(por ejemplo, resuelven $1+\sqrt{9} : 3-\frac{1}{2}\cdot 4 =(1+\sqrt{9}:3-1)\cdot\frac{4}{2} \quad =(1+1-1)\cdot\frac{4}{2}=\frac{4}{2}=2$ );

1 opera mal con fracciones

($1+\sqrt{9} : 3-\frac{1}{2}\cdot 4 =1+1-\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{(1+1-4)}{2}=\frac{-2}{2}$);

y 2 no dejan indicios claros sobre la causa de sus respuestas tipo EFD. Mientras que solo 15 estudiantes responden en la forma esperada.

Un aspecto de interés especial del ejercicio xviii es observar cómo influye la forma de representación gráfica, es decir *icónica*, en la resolución de la suma de racionales. Para facilitar la resolución se tomó una suma con los mismos denominadores que en el ejercicio xv, pero con numeradores unitarios con la idea de que el estudiante utilice un esquema previo supuestamente muy incorporado que es la división del "entero" y que, además, podría manipular en forma empírica con objetos físicos cotidianos. No obstante, el resultado fue más bien inesperado: solo 4 estudiantes procedieron en la forma esperada. Por otro lado, una de las fracciones es justo la mitad de la otra; de manera que la menor pueda ser tomada como "unidad" y su gráfico fácilmente superpuesto al de la otra para que quede en evidencia esta relación. De los 36 estudiantes que respondieron en forma diferente, 4 no respondieron; 2 tomaron correctamente 3 "porciones" de ¼ pero la refirieron al denominador 2; 8 no resolvieron gráficamente sino analítica e incorrectamente; 14 calcularon bien pero no usaron la representación gráfica (obsérvese que la suma de los que calcularon bien gráfica o analíticamente es 18, igual a la cantidad que responde en la forma esperada el ítem xv); un estudiante invirtió el numerador y el denominador en el resultado; 7 no dejaron traslucir con claridad qué hicieron. Observamos aquí que las coordinaciones necesarias de las representaciones gráficas de las fracciones, de forma tal de llegar a una unidad común (el común denominador) en la que expresar a las dos fracciones para poder sumarlas, resulta más “dificultosa” para la mayoría de los estudiantes que el mecanismo ya adquirido de sumar fracciones, aun en este caso en el que dicha unidad está dada por la representación de la fracción menor.

El ítem xix, que se divide en 5 subítems, introduce la variable de una forma contextual, referida al *contexto semiótico* con los objetivos ya señalados.

El subítem 1 lo responden en la forma esperada 35 estudiantes. Los restantes no responden. De los que responden en la forma esperada, 16 responden que es un número; 3 que es una letra; 14 que es una incógnita; 1 que representa una multiplicación (es decir que la toma como un signo operatorio); y 1 responde que es “un radio”.

El subítem 2 lo responden en la forma esperada 18 estudiantes. Entre los 22 estudiantes que responden en forma diferente, 9 no responden; 3 no reconocen la operación como potencia; 6 no la reconocen como base de la potencia aunque reconocen la operación; 3 la identifican con una incógnita; 1 la reemplaza por un número concreto.

El subítem 3 también lo responden en la forma esperada 18 estudiantes. De los 22 que responden en forma diferente, 10 no responden; 7 no lo identifican con el radio del círculo; 2 lo consideran como punto del círculo; 3 lo consideran como una incógnita (de una ecuación del perímetro, etc.)

El subítem 4 lo respondieron en la forma esperada 12 estudiantes. De los 28 que respondieron en forma diferente, 13 no respondieron; 6 respondieron que es una ecuación en lugar de la incógnita de la ecuación; 1 no completó la respuesta y 8 reconocieron la ecuación pero no lograron identificarla como incógnita.

En el subítem 5, solo un estudiante respondió en la forma esperada. De los 39 que respondieron en forma diferente, 20 no respondieron; 3 reconocieron la función pero no identificaron a la $x$ como una variable de la misma; 4 solo describieron la expresión; 9 la consideraron como una incógnita; 2 como un número y 1 como una ecuación.

Lo que puede verse con claridad sobre los resultados del ítem xix, dejando una interpretación más minuciosa para la próxima sección, es que a medida que se avanza en la *línea de generalidad* con una abstracción cada vez mayor y que implica una mayor necesidad de *lenguaje simbólico*, el estudiante encuentra una dificultad creciente, pasando de 30 respuestas tipo EFE para el primer subítem reconociéndola como variable (número o incógnita), a 18 para el segundo y tercero, a 12 para el cuarto y a 1 para el quinto. Definitivamente, no tienen asimilada a la *variable* como *objeto conceptual*, a lo sumo el concepto de *incógnita* como el de una letra que, luego de un proceso mecánico de despeje realizado al resolver una ecuación, tomará un valor específico, pero –y por eso mismo– como operando con *objetos concretos*. Pues no asumen que dicha letra pueda tomar valores en un conjunto numérico dado, sino que tomará solo un valor concreto en virtud de un procedimiento dado.

En relación con el ítem xx, respondieron en la forma esperada 27 alumnos. Entre ellos, 17 recurrieron a un método gráfico para hacerlo; 5 sin gráfico y sin aclarar el método usado; y otros 5 los resolvieron analíticamente restando al primero y al último de la fila de 10 y dividiendo a los 8 restantes por dos. De los 13 que respondieron en forma diferente, 9 no respondieron; uno grafica once personas en lugar de diez; 2 no dejan traslucir lo hecho y 1 realiza un razonamiento falso: “siempre tendré a un primero y a un último en la fila por lo que no entrego ningún caramelo” (el razonamiento sería que al “quitar” al primero y al último, entre los restantes seguirá habiendo un primero y un último, pero sin tomar en cuenta que la referencia al primero y al último es solo respecto a la situación inicial). Por otro lado, 9 estudiantes tuvieron dificultades de registro del enunciado oral.

También, debe señalarse que de los13 alumnos que alcanzaron un porcentaje de respuestas tipo EFE superior al 70%, 12 respondieron en forma diferente el subítem xix 5 correspondiente al concepto de *variable*; 6 el subítem xix 4 correspondiente al concepto de *incógnita*; 3 escribieron que $a^2 + a^2 = a^4$; el único alumno que respondió en la forma esperada el ítem xix 5 escribió que $a^2 + a^2 = (a.a)^2$ y 9 alumnos no tienen incorporado como objeto conceptual el número irracional.

Por último, el mismo diagnóstico efectuado en un curso de 45 estudiantes en el 2010, arrojó los resultados de la Fig. 2.3, que es cualitativamente similar a la Fig. 2.2, con lo cual se muestra que es esta problemática sigue vigente.

**Fig. 2.3-Curso de Ingreso 2010**


## 2.4 Interpretación teórica del diagnóstico. Contexto semiótico y niveles contextuales

De acuerdo al enfoque teórico planteado en la concepción de la enseñanza-aprendizaje y que se pretende extender aquí, el diagnóstico demuestra que la mayoría de los estudiantes no llegó a completar *la estructura de generalización aritmética de los números enteros*, entendiendo por ésta el haber incorporado el número entero como *objeto conceptual* y dominar las operaciones matemáticas correspondientes (cuyo resultado sea otro entero) junto con sus propiedades básicas. Las dificultades que presentaron respectivamente 14 y 25 alumnos en resolver los ejercicios combinados de los ítem xvi y xvii son un indicativo claro de esta no completitud. En efecto, dichos estudiantes demuestran no conocer total o parcialmente la *jerarquía* de las operaciones involucradas. Esta jerarquía –por ser la forma en que se combinan estas operaciones– constituye parte *gramatical* dentro del *léxico simbólico* que debe necesariamente manejarse para *asimilar significativamente* toda la estructura. Dicho de otra forma, cada signo adquiere *valor significativo* dentro del sistema de signos, valor establecido para cada uno de ellos a partir de *las relaciones* existentes entre ellos dentro del sistema, lo que incluye a las jerarquías mencionadas de las operaciones. En el caso especial de la Matemática, cobra relevancia el *símbolo* en el sentido definido por Peirce (Peirce, 1974; Marafioti, 2004). Ello nos permitirá establecer relaciones con la concepción vygotskiana, aspecto que trataremos en breve. Si tomamos en cuenta que aquí se utilizó la simbología más básica sin, por ejemplo, intercalado de paréntesis, corchetes y llaves o combinaciones más complejas de estas operaciones, es sencillo prever que las dificultades aumentarán con la complejidad sistémica.

Como se observa con claridad a partir del resultado del ítem v, la mayoría no tiene incorporado el *número irracional* como objeto conceptual. Al no poder diferenciar al símbolo del número irracional de la operación de radicación, lo dejan sin responder, sin asumir como sí lo hacen los que responden en la forma esperada, que deben simplemente repetir la expresión, dado que el número resultante de la suma de un entero y un irracional se expresa, semióticamente, de esa forma. Hay un conjunto que, frente al aparente sinsentido que se presenta, intenta aplicar alguna operación conceptualizando siempre con números enteros, para lo cual redefinen la raíz cuadrada como una división por 2, o usan calculadora, elevan al cuadrado, o aplican mal propiedad distributiva. Estos alumnos aplican los *esquemas conceptuales* ya adquiridos en relación con los enteros para resolver lo planteado, porque para ellos esta raíz es una operación que debe ser resuelta en el conjunto de los enteros y no el símbolo de un número irracional (objeto en Peirce). Es decir, *reinterpretan el signo*. Aquí hay un punto central de las ideas planteadas en este trabajo y por el cual se definió la de *objeto conceptual*: cuando el estudiante no es capaz de trabajar con un objeto conceptual perteneciente a un *nivel de abstracción dado*, intenta trabajar con el objeto conceptual que domina en un nivel anterior. Ésta es una extensión de la idea de que los niños que no alcanzaron la etapa *formal* de pensamiento recurren a *objetos concretos* que manipulan mediante *operaciones concretas* (como usar garbanzos para sumar). No obstante, esta idea no es totalmente aplicable a los adultos de este estudio, puesto que ya alcanzaron un nivel formal de pensamiento en relación con otros objetos conceptuales. Así, los enteros son equiparables a los garbanzos del ejemplo previo, en relación con los irracionales.

Con relación a los racionales, los ejercicios xv y xviii muestran que el importante porcentaje de estudiantes con respuestas del tipo EFD no tiene, tampoco, incorporado el número racional como objeto conceptual. Los que resuelven la suma en xv solo muestran conocer el mecanismo de la suma, pero la gran dificultad evidenciada en operar con la representación gráfica confirma su no asimilación (en la próxima sección referiremos a la representación icónica). Otra vez, quienes resuelven sumando numeradores y/o denominadores no hacen más que aplicar los esquemas ya adquiridos con enteros, de la forma en que les parece natural hacerlo: al operar con numeradores y denominadores entre sí, lo que hacen es operar con números enteros que están en la misma categoría o clase (la determinada por su ubicación en la fracción). Es decir, una vez más, redefinen la operación de tal forma que responda a las operaciones que conocen.

La introducción de la *representación algebraica* mediante una *variable* que tome valores en un conjunto numérico dado es el *gran salto de abstracción* que debe dar la mayoría de los estudiantes. Los ejercicios xii y xiii son resueltos en la forma esperada por más de la mitad de los estudiantes; en el primer caso, porque se asume su carácter de objeto concreto y, en el segundo, porque resulta la definición de potenciación que conocen. Pero la cosa cambia radicalmente con el ejercicio xiv, en el que la variable es complejizada mediante una operación de potenciación. Es la introducción de una operación con expresiones algebraicas. Como se observa en los resultados del diagnóstico, varios vuelven a reinterpretar las operaciones, es decir, los signos.

Para profundizar la cuestión del concepto de variable, planteamos el ejercicio xix con sus cinco subítems. Como ya se vio, el número de respuestas tipo EFE decrece a medida que avanzamos con los subítems, llegándose a una sola respuesta positiva cuando se introduce la variable de la función cuadrática. Solo tres estudiantes la reconocen como función aunque por la evocación de su nombre (cuadrática), por identificar la idea de pendiente (la confunden con la $x$) o erróneamente con una recta (el gráfico de la función lineal) pero sin explicitar el rol de las variables. No obstante, este punto es importante porque cada ítem se evalúa en función de un *contexto dado* ¿Cuál contexto? Justamente el *contexto semiótico* (CS) establecido por los símbolos y las disposiciones de los mismos que indican determinadas *relaciones significativas*. Así, la $x$ del subítem 1 solo puede significar una letra de abecedario, pero en el contexto más amplio que llamamos *contexto por default* (equivalente al paradigma de Saussurre, Marafioti 2004) y que, a falta de otra indicación, consideramos aquí que es el de la Matemática, lleva a la vinculación con el número. Para la mayoría de estos estudiantes, a una vinculación con los números enteros ya que, de hecho, algunos responden que son números naturales. Por supuesto, muchos estudiantes llaman mecánicamente incógnita a la $x$ aunque no haya ninguna ecuación presente (aquí el contexto por default es el concepto de ecuación y el uso frecuente de la $x$ como incógnita en ella). O le asignan el sentido de multiplicación. En el subítem 2 el cuadrado de la variable introduce el CS reconocido por varios estudiantes que los lleva a contestar que la $x$ es la base de la potencia. El subítem 3 constituye un CS gráfico que le da sentido a la variable como radio de un círculo. La ecuación del subítem 4 es el CS de la definición de la incógnita y, finamente, en el subítem 5 la función es el CS de la *variable independiente*.

El *contexto semiótico* es el establecido por todas las relaciones involucradas entre los diferentes signos (símbolos, gráficos, etc.) que aparecen en la presentación de los conceptos que dichas relaciones implican. Cada signo *cobra significación* solo en relación con los restantes signos del sistema que constituye el CS. Si dicho sistema constituye un *sintagma* en el cual todas las relaciones involucradas entre los signos *definen* el concepto, un mayor número de relaciones que las implicadas, pero que contengan a las del sintagma, podría constituir el *paradigma* en el cual se defina el concepto. En el caso de no reconocer los signos dados en el sintagma, el paradigma se constituye en el contexto por default y el estudiante se apoyará en él para interpretar el sistema de signos. Esto coincide con la interpretación dada por Vygotski desde el punto de vista psicológico (1995):

> Cada concepto aislado que aparece en nuestra conciencia trae consigo todo un sistema de predisposiciones. Así, el concepto aislado aparece como una figura en el trasfondo de las relaciones de generalidad que le corresponden. Y elegimos, entre todas las formas posibles que existen en dicho trasfondo, la que se convertirá en camino para nuestro pensamiento.

¿Por qué estudiantes que resuelven en la forma esperada la mayoría de los ítems no resuelven el subítem 5? Sencillamente porque no pueden reconocer el contexto semiótico. Y no lo pueden reconocer porque, en realidad, no dominan los significados de los distintos *signos* que expresan diferentes relaciones. O directamente los desconocen. Desconocen los símbolos (*léxico*) y sus diferentes *combinaciones significativas* (*gramática*). La expresión sintagmática se produce en un *determinado grado de generalidad*. Pero como cada *grado de generalidad* representa un *nivel de abstracción* diferente, por lo tanto, esto se traslada a la idea del CS definiendo, entonces, diferentes *niveles contextuales*. Esto significa que el *soporte semiótico* del concepto se da con diferentes *grados de generalidad* o de *abstracción* en diferentes *niveles contextuales*.

*La forma de asimilar significativamente los conceptos es solo posible a través de un soporte semiótico; esta significación deviene, a su vez, de las relaciones establecidas entre los signos en el sistema de signos del sintagma (que son relaciones entre conceptos en un sistema de conceptos representados por los distintos signos del sistema), que dan sentido a cada uno de ellos. Es decir, la significación deviene del contexto semiótico que se establece en un nivel contextual dado, correspondiente a un determinado grado de generalidad o nivel de abstracción. Por lo tanto no es posible la asimilación del concepto sin la comprensión del contexto semiótico. Y ésta es una hipótesis central del presente trabajo.*

Por ejemplo, para comprender el concepto de función es necesario contar con, y solo posible en, un CS. En este último caso, suele ser más sencillo comprender el concepto de función mediante un gráfico en el que figuren elementos vinculados por flechas; y es más difícil hacerlo por medio de una expresión con variables. Ambas representaciones se encuentran en niveles contextuales diferentes. Pero no es posible plantear operaciones entre polinomios fuera del nivel contextual en el que aparecen sus expresiones semióticas. A lo sumo, intentar aproximarse con un objeto conceptual previo, tal como en este diagnóstico los estudiantes intentan dilucidar a los racionales e irracionales con operaciones con enteros que, naturalmente, conducirán al error en relación con lo esperado. En la resolución del ítem xx, la mayoría de quienes lo resuelven apelan al método gráfico. Esto es en un todo coherente con la utilización de una representación semiótica al nivel de los objetos conceptuales que dominan, en un nivel contextual más sencillo.

Una conclusión central de este trabajo es que la mayoría de los estudiantes no completaron la *estructura de generalización aritmética* y no es posible para la mayoría de ellos saltar en forma inmediata a una abstracción mayor que los lleve a adquirir la *estructura de generalización algebraica* y, centralmente, el concepto de *variable*.

Por otro lado, estos *instrumentos semióticos* necesarios (centralmente símbolos) no pueden ser adquiridos fuera del *sistema conceptual* en el cual son necesarios, es decir que deben adquirirse simultáneamente con los diferentes objetos conceptuales. Sin embargo, una clave podría ser que esta adquisición se fuera dando en *niveles contextuales* diferentes, de menor a mayor grado de complejidad (de menor a mayor *grado de generalidad*). Es *condición necesaria* que los estudiantes adquieran el *léxico simbólico* y la *gramática* involucrada en los diferentes conceptos matemáticos.

Una recomendación importante vinculada con este trabajo es la de elaborar las definiciones de las diferentes operaciones básicas, el uso de intercaladores (paréntesis, corchetes, etc.), las jerarquías de las operaciones y sus propiedades centrales (conmutativa, asociativa, etc.) con números enteros que son los objetos conceptuales que maneja la mayoría. Desarrollar una actividad intensa con estos elementos, tal vez con un *espacio complementario de nivelación previo incluso al trabajo con números racionales e irracionales y, desde ya, previo al trabajo algebraico*. Y, luego, repetir, ya como ejercicio, estas mismas cuestiones con los nuevos objetos numéricos (racionales e irracionales) y con las expresiones algebraicas. La *sistematización,* esto es, el trabajo siempre referido a un *sistema conceptual*, es central para la comprensión de los conceptos, justamente por la fijación del contexto semiótico que no es posible fuera de tal sistema.

## 2.5 Vinculaciones esenciales entre Piaget-García, Vygotski y Peirce

En primer lugar, debemos decir que la elaboración de conceptos solo es posible a partir de una *semiotización* que establezca *signos* y *relaciones* entre éstos. Estos signos en sí mismos constituyen *conceptos* previamente construidos, y las relaciones entre ellos son, de esa forma, *relaciones entre conceptos*. Luego, los *niveles crecientes de conceptualización* constituyen *signos más complejos,* cuya vinculación en *nuevas estructuras globales* que incluyen y enriquecen a las previas significa nuevas conceptualizaciones en una *espiral dialéctica*. Esto se aplica a cualquier sistema de signos, sea el lenguaje natural o simbólico, así como a la manipulación de objetos concretos, los cuales, en tanto *conceptos* previamente elaborados, son, a su vez, *signos*.

Ésta es la idea previa que constituye, en nuestra óptica, el nexo central de convergencia entre los cuatro teóricos, y no tanto el papel o la teoría de signos que cada uno pudiera tener, partiendo de la base de que las teorías específicas desarrolladas por ellos eran diferentes aunque, naturalmente, contienen interrelaciones que nos permiten vincularlas.

El gran eje vinculante, entonces, consiste en la existencia de *conceptos (o signos) dinámicamente estabilizados* pero que, en su interacción social, van *evolucionando* en forma de *espiral dialéctica*, incorporando los nuevos conceptos (que lo son a partir de su estabilización relativa) a los previos, pero adquiriendo una mayor riqueza por medio de su *diferenciación e integración* en una *totalidad* *mayor e inacabada* que da lugar, así, a un proceso infinito de conceptualización (o significación). En este marco postularemos algunos *nexos teóricos* que relacionan sus diversas teorías, sin pretensión de agotarlos ni de borrar sus diferencias, tanto a un nivel general como específico.

I) En primer lugar, considerando el concepto como una generalización en un sistema de conceptos, hay una dirección determinada de la misma que va en el sentido *concreto→abstracto*, sobre la *recta de generalidad*, en la que adquiere un *grado de generalidad*. Sin embargo, el *proceso de construcción conceptual es dialéctico* y en él se desarrolla el ciclo *concreto←→ abstracto*, en las dos direcciones, pero en forma ascendente, de manera que un concepto previo quede incorporado a uno más general en un plano superior. En dicho plano, cabe aclarar, se da la relación con un concepto de menor grado de generalidad, pero como concepto ya incorporado a una estructura o nivel de organización mayor. Dado que los conceptos se expresan *semióticamente*, los signos involucrados deben poseer el mismo grado de generalidad que ellos.

II) Como ya vimos en la introducción, Piaget-García (1984) postulan que la construcción de conocimiento se realiza mediante los mecanismos *intra, inter y trans* que se corresponden con el orden de *los atributos o cualidades, de las relaciones y de las estructuras*. Por su parte Peirce (1974, Marafioti 2004) introduce su sistema de signos bajo las categorías de *primeridad, segundidad y terceridad*, que se pueden asociar al mismo orden indicado. Cada signo pertenece a alguna de estas categorías y, a su vez, se distinguen en *representamen, objeto e interpretante*. Y a cada categoría le asocia una forma de razonamiento: *abducción, inducción y deducción*. Es decir, se establecen relaciones *triádicas* entre conceptos o signos que, al darse en distintos niveles de generalidad, asumen las mismas categorías pero en un plano superior que es, justamente, lo que permite una dialéctica de lo inacabado. Piaget-García sostienen que en cada nivel de generalidad se dan los tres mecanismos; y, a su vez, al interior de cada uno de ellos en un nivel determinado, se repiten los tres mecanismos indicados adquiriendo, así, una *estructura fractal*, lo que dará una base natural a una metodología que se propondrá más adelante. Por lo tanto, se postula en este trabajo la siguiente asociación entre categorías piagetianas-garcianas y peircianas:

*intra←→ primeridad*, *inter←→ segundidad*, *trans←→ terceridad.*

Cabe destacar que esta asociación implica que las categorías peircianas están dotadas, a su vez, de la estructura fractal referida, lo que deriva justamente en la estructura dialéctica infinita de su sistema de signos.

A su vez, dentro de estas categorías, Peirce (1974) ubica los diferentes signos (que definimos muy sintéticamente en el Apéndice 2)

**Tabla I- Signos del sistema peirciano**

| | PRIMERIDAD | SEGUNDIDAD | TERCERIDAD |
|---|---|---|---|
| REPRESENTAMEN | Cuasisigno | Sinsigno | Legisigno |
| OBJETO | Ícono | Índice | Símbolo |
| INTERPRETANTE | Rhema | Dicisigno | Argumento |

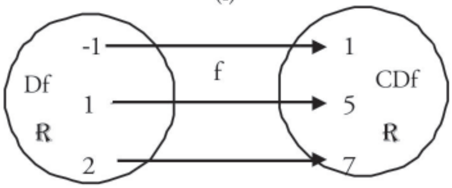
Aquí las flechas indican, en cada dirección, el sentido de crecimiento del grado de generalidad.

III) La tercera cuestión teórica planteada aquí se refiere a la relación entre el *grado de generalidad* en el sentido ya explicitado por Vygotski (1995) y el sistema semiótico utilizado. Este autor nos señala que a cada concepto le corresponde una determinada ubicación, *un punto*, en la *recta de generalidad* (ver Introducción)[2]. Pero dado que el concepto se expresa mediante un sistema de signos, y éstos, como podemos ver en el esquema anterior, poseen distintos grados de generalidad, esto implica que a un concepto dado le corresponde en realidad *un segmento*, cuya ubicación en la recta de generalidad dependerá de los signos o de la combinación de signos utilizados para expresarlo. Por ejemplo, un orden creciente de grado de generalidad sería expresar un concepto de manera *icónica, simbólica* o *argumental*. Es decir, el *mismo* concepto. Otro ejemplo: el concepto de función lineal en un caso específico dado puede expresarse en las formas (i) icónica, mediante diagrama; (ii) en forma icónica por el diagrama, de legisigno en tanto las operaciones cobran significado en el sistema de las operaciones aritméticas, de dicisigno en tanto constituyen proposiciones (notar que la forma (ii)

[2] Cabe aclarar que Vygotski explicita que esta analogía es solo una simplificación y que es necesaria la introducción de otra línea que corte a la anterior para abarcar áreas más amplias de contenidos, pero no vincula esta línea con el grado de generalidad del soporte semiótico como se hace aquí.

tiene un nivel de significación superior a (i), o dicho de otra forma, su CS posee un nivel contextual superior); (iii) o en forma simbólica.

(i)




(ii)

$1 = -1 \,.\, 2 + 3$

$5 = 1 \,.\, 2 + 3$

$7 = 2 \,.\, 2 + 3$

(iii)

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x+3$

En la situación icónica (i) existe una información parcial de algunos *casos* en los que se *sugiere* una vinculación a través de la función lineal (iii) y las flechas son *índices* que los vinculan, pero no está explicitada dicha *regla*. La representación (ii), en cambio, expresa que la vinculación entre los elementos dados en (i) constituyen el *resultado* de la aplicación de la regla (iii) y el índice de la vinculación está dado por el signo igual que destaca la vinculación de los elementos y la forma de la vinculación, en tanto que haciendo abstracción de los elementos variables se tiene ()= ().2+3 que *induce* (iii). En ambos casos, sin embargo, la información es incompleta ya que se trata de la vinculación entre algunos elementos. Pero el hecho de señalar la vinculación y la forma de la vinculación da la base para las inferencias *abductiva* e *inductiva*, respectivamente, como veremos en un punto posterior. Además, podemos enriquecer los esquemas colocando más información e, incluso, combinándolos. Pero la incompletitud es la característica de estas dos formas de representación. Si recordamos que una *expresión semiótica* constituye un *sintagma* cuando todas las relaciones involucradas entre los signos definen el concepto, mientras que un *paradigma* está dado por un conjunto de relaciones más amplio pero indefinido del que podría formar parte la *representación semiótica* considerada, es evidente que en (i) se produce en un *contexto paradigmático*, mientras que (ii), a pesar de su incompletitud, constituye un *sintagma* y, por lo tanto, se presenta en un *contexto sintagmático*.

En cambio la forma (iii) de tipo *simbólica* constituye un *sintagma*[3] en el cual las relaciones están ya establecidas, e implica la información completa acerca de los conjuntos numéricos involucrados, así

[3] Podemos convenir en llamarlos *sintagma parcial* y *sintagma completo*, respectivamente, siempre en relación con el concepto que es la función lineal específica considerada.

como el tipo de vinculación entre elementos de ambos conjuntos a través de la fórmula. El nivel de abstracción es creciente en el sentido (i) → (ii) → (iii), dirección en la que se va agregando información hasta llegar al sintagma completo. Por lo tanto, en este ejemplo, (i) y (iii) serán los puntos extremos del *segmento de generalidad* en el que se ubicarán los signos del soporte semiótico utilizado para representar al mismo concepto básico.

IV) En base a los puntos anteriores, surge la pregunta de cómo se ubicarán la distintas combinaciones de signos del sistema peirciano sobre la recta de generalidad. La respuesta se obtiene a través de la clasificación que Peirce realiza con estas combinaciones (Peirce 1974, Vitale 2002) y que mostramos en la siguiente tabla que puede deducirse tomando la tabla del punto II y siguiendo el grado de generalidad a través de las flechas.

**Tabla II- combinación de signos según Peirce**

| Combinación | representamen | objeto | ley |
|---|---|---|---|
| 1-Cualisigno remático icónico | cualisigno | ícono | rhema |
| 2-Sinsigno remático icónico | sinsigno | ícono | rhema |
| 3-Sinsigno indicial remático | sinsigno | índice | rhema |
| 4-Sinsigno indicial dicente | sinsigno | índice | dicisigno |
| 5-Legisigno icónico remático | legisigno | ícono | rhema |
| 6-Legisigno indicial remático | legisigno | índice | rhema |
| 7- Legisigno dicente indicial | legisigno | índice | dicente |
| 8- Símbolo remático legisigno | legisigno | símbolo | rhema |
| 9- Símbolo dicente legisigno | legisigno | símbolo | dicente |
| 10- Argumento Símbólico legisigno | legisigno | símbolo | argumento |

De 27 combinaciones posibles, Peirce da como factibles solo 10. De esta forma, de acuerdo a las combinaciones implicadas en la expresión semiótica de un concepto, será su ubicación en la recta de generalidad. Podríamos obtener un orden relativo numerando de 1 a 9 los signos de la tabla del ítem II y, luego, sumando sus valores en una expresión combinada, como si fuera el grado de un monomio. Por ejemplo, a la combinación 10 le correspondería: 7+8+9=24. Este procedimiento sería especialmente útil si consideramos que, en general, un concepto se expresa por una *multiplicación* de combinaciones de tipo 1-10, pues asumimos que el pensamiento procede de manera *no lineal* y no mediante una sola combinación ni superposición lineal de combinaciones.

V) Finalmente, vamos a referirnos a las *formas de inferencias* que podrían considerarse en la construcción de conocimientos y teorizar acerca de cómo se vinculan con los conceptos anteriores.

En primer lugar, vamos a diferenciar el tipo de *inferencia* en función del contexto del soporte semiótico utilizado para expresar un concepto. Si consideramos una expresión de tipo sintagmática en la que las relaciones estén claramente definidas para el sujeto, entonces, será posible la *inferencia por inducción o deducción*. Éstas corresponden a la *generalización inductiva* y *completiva* definidas por Piaget-García (1984; García, 2000) en sistemas asociados a cada inferencia, respectivamente ya estabilizados, o al movimiento del pensamiento a través de las *relaciones de generalidad* definidas por Vygotski (1995) con el principio de equivalencia como criterio de estabilización. Este principio establece que *un concepto puede ser formulado con ayuda de otros conceptos en un número ilimitado de formas*. Esto requiere un dominio cabal de las relaciones de generalidad dadas en una expresión semiótica y, de allí, su carácter sintagmático.

Con relación a la vinculación con Peirce podemos ejemplificar a través de los diagramas del ítem III si consideramos las siguientes definiciones:

Consideramos a la forma semiótica (i) como la expresión del siguiente *caso*: los elementos considerados provienen (*hipótesis*) de Df y CDf donde f cumple la *regla* (iii).

A la expresión semiótica (ii) como un *resultado*: los elementos resultan (*hecho verificable*) estar relacionados en (ii) por la *regla* (iii).

Y a la expresión (iii) como la *regla*: todos los elementos (x,y) se vinculan a través de esta función lineal específica (*definición*).

La *deducción* consiste en aplicar la *regla* al *caso* e *inferir* el *resultado.*

La *inducción* se produce cuando dado un *caso* y un *resultado* es posible *inferir* la *regla*.

En la *abducción* dada una *regla* y un *resultado*, *inferimos* un *caso*.

En la *expresión sintagmática* tenemos relaciones precisas dadas por su contexto semiótico en un sistema, en el cual se produce generalización inductiva o completiva, y, a partir del sistema estabilizado, es posible inferir nuevos resultados pero que, de alguna manera, están entonces en el sistema.

En cambio, vamos a asociar la *abducción* con una situación *paradigmática* que da lugar a un *contexto por default*. Aquí es donde aparece con toda su fuerza la idea de Vygotski (1995) ya señalada en torno a que el concepto se presenta en un *trasfondo* dado por la relaciones de generalidad, de las cuales el individuo accede a aquellas que dan una *dirección* a su pensamiento. Las relaciones que se presentan ante el individuo no son las de una relación sintagmática precisa y definida, sino que hay lugar para relaciones nuevas no consideradas, lo cual permite introducir *hipótesis* en el marco de un sistema dado y de determinados resultados: es justamente la *abducción*.

Para compatibilizar la idea de estas asociaciones con el punto de vista de Piaget-García, a este proceso de pensamiento habría que considerarlo como un proceso de *reorganización conceptual*, que correspondería a *la dialéctica* mediante los mecanismos de *asimilación* y *acomodación* que lo lleven a la *equilibración* en una estructura ya estabilizada en la que sea válida la *lógica formal* (García, 2000). El proceso que lleva de la acción sobre un objeto conceptual (OC) a su incorporación a un sistema deductivo tiene tres momentos que corresponden a tres tipos de generalizaciones a partir de equilibrios relativos que responden a la asimilación-acomodación (asimilación del objeto y acomodación de los esquemas conceptuales en interacción recíproca).

En el primero que corresponde a la *generalización abductiva* (denominación que se introduce aquí), el *objeto conceptual* desestabiliza al sistema de esquemas conceptuales con que se lo aborda. En el ejemplo de la función, la abducción sería sentenciar que los elementos tomados de dos conjuntos se relacionan funcionalmente por la regla (iii) porque algunos elementos de ese conjunto prueban estar relacionados (ii) por tal regla, pero como hipótesis. Esta inferencia no se produciría a partir de un sistema deductivo ya estabilizado, puesto que esto requeriría un sistema ya formado en el cual el objeto puede ser obtenido como caso particular. Pero es este sistema el que está justamente en construcción. En cambio postulo que esta inferencia se guía por la *lógica de las significaciones* (Piaget-García, 1997): la inferencia aquí se produce cuando un concepto se puede *inferir* de otro que pertenece a un mismo *campo de significación*. Por ejemplo se podría observar que las diferencias de los elementos del CDf resultan ser proporcionales a las diferencias de los elementos correspondientes en Df. Es decir, se presenta la idea de proporcionalidad que significativamente pertenece al mismo campo que el de la función lineal. Otras asociaciones serían posibles: dado que tenemos solo tres elementos, bien podríamos intentar ajustar con una función cuadrática, o con una función polinómica, pero que no cumple con esta relación de proporcionalidad observada. La *coherencia* del sistema estabilizado, señalada por Piaget-García (1997) como una *necesidad* de este tipo de inferencias, sería la guía de *última instancia* para adoptar la hipótesis. Y es importante señalar que la *exploración* es una característica central de esta inferencia. El equilibrio del que parte esta inferencia tiene que ver con el enfoque en los atributos del OC, enfoque realizado con los esquemas adquiridos, ahora desestabilizados, por lo que se corresponde con la etapa *intra*. Además, es de señalar que este tipo de inferencia es lo que habitualmente se suele asociar con la idea de intuición, concepto que desechamos por tratarse justamente de una forma de inferencia.

El siguiente momento sería el de la *generalización inductiva*. Aquí, con los esquemas previos *desestabilizados* se intenta incorporar la (o las) *hipótesis* al sistema. Naturalmente, no es posible sin la creación de una *forma*. Por lo tanto, la *interacción* de los esquemas con el objeto mediante un proceso inductivo produce la *génesis de la forma del nuevo objeto conceptual*, que alcanzará su estado final en la siguiente etapa. Nótese que el equilibrio de la etapa previa se convierte en condición necesaria de la inferencia, por la cual los resultados serán casos particulares de estas formas. Este estadio de génesis es lo que le da a la inducción su carácter de *sintagma parcial*, en el sentido de que no están generalizadas aún todas las relaciones, hasta aquí solo sugeridas o inducidas. La inducción parte de considerar algunos casos *relacionados* por una forma a partir de los atributos establecidos previamente. Por ello, corresponde a la etapa *inter.* El OC pasa de su forma de *caso* a su forma de *relación* por medio de la aplicación de una *forma* a los casos, y esta relación es la primera incorporación al sistema de esquemas conceptuales que entonces se modifica.

En el tercer momento, o de *generalización completiva*, el *objeto conceptual* se encuentra incorporado a un *sistema deductivo estabilizado*. El sistema previo se transformó en otro sistema, más rico y que lo contiene, pero que es diferente y posee atributos nuevos. Alcanzamos aquí un *sintagma completo*. Asimismo, el OC se transformó en *forma*, esto es, aplicable a cualquier elemento genérico del conjunto en el que está definida (*caso genérico)*. Por otro lado, la situación de inducción se transforma en *condición necesaria*, por lo cual se alcanza el sistema deductivo. Pero, además, y lo que es muy importante, se coordina con el resto de las formas del SI adquiriendo, así, un carácter estructural, por lo que este estadio corresponde a la etapa *trans*.

Luego, la hipótesis puede incorporarse a un sistema mediante un sintagma (el sintagma en este caso es la teoría formal) y así sucesivamente hasta que un *nuevo objeto* lo *desestabilice* y el ciclo se reinicie en forma infinita ya que el conocimiento se *aproxima* pero nunca se completa (Piaget-García, 2002).

Estas identificaciones y los postulado en (II) asocian la abducción con la primeridad, y la inducción y la deducción con la segundidad y la terceridad, respectivamente.

Está claro, entonces, el carácter *abierto* y, por lo tanto, *incompleto* que debe tener el sistema para poder incorporar nuevos conceptos que no sean derivables del sistema ya estabilizado, sistema éste sometido a *fluctuaciones* que al alcanzar determinado grado lo desestabilizan. En efecto, si el sintagma es un sistema en interacción con una totalidad que lo contiene, las situaciones nuevas, *no incluidas* en el sintagma con el cual se las interpreta, lo desestabilizan, desorganizándolo, para permitirle introducir la *hipótesis* (que dé cuenta de la novedad) mediante una *generalización abductiva*. El sistema se reorganizará, en un estadio superior, cuando este proceso concluya con la incorporación de las nuevas hipótesis, bajo la forma de un *nuevo sintagma estabilizado*.

Finalmente, podemos vincular cualitativa y globalmente las ideas expresadas en los ítems previos mediante la siguiente tabla en la que hay cierta correspondencia por columna, recordando que ésta es solo relativa, en tanto se postula una relación fractal para las tríadas.

**Tabla III- Nexos conceptuales**

| Algunos nexos conceptuales entre Piaget-García, Vygotski y Peirce | | | |
|---|---|---|---|
| Mecanismos-categorías | Atributos | Relaciones | Estructuras |
| | Intra | Inter | Trans |
| | Primeridad | Segundidad | Terceridad |
| Soporte semiótico | Paradigma | Sintagma | |
| | Contexto por default | Contexto sintagmático | |
| Tipos de inferencia | Caso | Resultado | Regla |
| | Abducción | Inducción | Deducción |
| Tipos de generalizacón | Abductiva | Inductiva | Completiva o deductiva |

# 3-Una dinámica constructivista de enseñanza-aprendizaje para Matemática del ingreso

La dinámica de enseñanza-aprendizaje, tal como se planteó en la Introducción, tomará en cuenta los aspectos centrales del PEA. En primer lugar, consideraremos una metodología en relación con los *mecanismos cognitivos* que tienen lugar en este proceso; esto es, para nosotros, los que han sido denominados *intra*, *inter* y *trans*. Pero tomados aquí en su relación con el tipo de inferencias asociadas, es decir, *abductiva*, *inductiva* y *deductiva*. Por otro lado, también tomaremos en cuenta en este proceso la metodología según la *semiótica*, en los aspectos desarrollados en la unidad 2, y en estrecha conexión con los mecanismos cognitivos.

## 3.1 La metodología según los mecanismos cognitivos

Se desarrolla un *planteo problemático* que incluya diversos *interrogantes* referidos a un *objeto conceptual* dado que es el que se desea incorporar al *sistema cognitivo*. Luego, la dinámica de elaboración conceptual o de generalización seguirá tres etapas:

1- Etapa *intra* o de *generalización abductiva*, o de *exploración* y *planteo de hipótesis*.

2- Etapa *inter* o de *generalización inductiva* o de *génesis de la forma*.

3- Etapa *trans* o de generalización *completiva*, en la cual se establece *la forma* que adquiere un carácter *necesario* y se articula con el sistema interpretativo (SI), lo que le confiere un lugar dentro de una estructura de las diversas formas.

4- Y luego se repite el ciclo por sobre un plano superior (Fig. 3.1). O sea 1-2-3 → 1'-2'-3'. Cada ciclo se desarrolla a partir de un sistema interpretativo ya estabilizado como se indicó en las unidades previas.

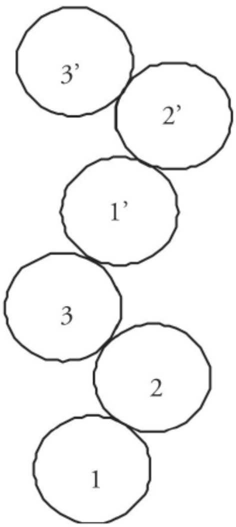



Fig. 3.1

Para ejemplificar vamos a plantear un problema y desarrollar un posible camino de resolución que contemple el paso por las distintas etapas. El ejemplo y el camino seguido son arbitrarios, aunque se parte de un concepto que se trabaja en el curso de ingreso, como el teorema de Pitágoras, pues el propósito es principalmente ilustrativo. En tal sentido, supongamos que les planteamos a los estudiantes el problema de las ternas pitagóricas. Se propone encontrar *todos* los naturales $a, b, c$ que cumplan con la condición $a^2 + b^2 = c^2$. Vamos a denotarla como condición Π (pitagórica).Naturalmente se plantean aquí las preguntas pertinentes como, por ejemplo, si tengo o no un número finito de ternas, en cualquiera de los casos, si hay un modo de encontrarlas, si ese modo responde a una fórmula general, etc. Y a partir de aquí, se deja a los estudiantes *explorar*. Vamos a formular las etapas que podría seguir un estudiante hipotético a través de un camino posible.

Etapa 1

Es una etapa exploratoria en la que el *atributo* o propiedad que deben cumplir los naturales de la terna es la condición Π, lo cual fija un *contexto y delimitación* del sistema (notar que Π es a su vez una regla, pero que en este contexto constituye un atributo y que ya estamos partiendo de una estructura de generalización algebraica). Vamos a suponer con buena probabilidad que el estudiante encuentre en su exploración los casos (*3, 4, 5*) y (*6, 8, 10*) que son dos ternas pitagóricas. El estudiante intenta encontrar una *regla* o *forma* de la que se pudieran derivar todas las ternas que cumplan Π. Y con la que, por ejemplo, los *casos* anteriores (las ternas que encontró) constituyan un *resultado* de aplicar la *regla* al *caso* (en este ejemplo, aplicar la regla o forma encontrada a las dos ternas).
No sabemos aquí si hay una fórmula general o no, pero al relacionar las dos ternas encontradas, el estudiante puede ver que son proporcionales. Lo cual lo llevaría a la siguiente etapa. Obsérvese que esta particularidad de la proporcionalidad surge de efectuar *comparaciones* entre los casos, lo que permite pasar a la etapa siguiente.

Etapa 2

Aquí el estudiante escribe en forma de resultado la proporcionalidad mencionada: (*6, 8, 10*) = 2.(*3, 4, 5*) y puede probar con otras: 3.(*3, 4, 5*), 4.(*3, 4, 5*), etc.; estamos en la etapa inductiva en la cual verificará, además, que las ternas así obtenidas cumplan con la condición pitagórica. Esta verificación de *casos* es necesaria más allá de cuan rápido lo descubra o le permita llegar a la forma en la etapa siguiente. A la siguiente etapa pasamos por *inducción*: del *algunos* al *todos*.

Etapa 3

La forma inducida en la etapa previa se escribirá finalmente como *n.(a,b,c)*, con $n \in N$, siendo $(a, b, c)$ una terna pitagórica, y es claramente una forma sintagmática. La característica central que permite concluir el alcance de esta etapa es que la etapa previa se constituye en su *condición necesaria* en el marco de la cual una *forma general* la tiene como caso particular. Es en este punto donde se alcanza un estadio deductivo.

Ahora el estudiante puede contestar alguna de las preguntas planteadas. Por ejemplo, la adquisición de la forma *ternas proporcionales* demuestra que hay infinitas ternas. Habiendo partido de los casos (*3, 4, 5*) y (*6, 8, 10*), él ahora puede obtenerlas como casos particulares. Es más, puede obtener todas las demás ternas proporcionales a (*3, 4, 5*) a partir de la forma encontrada, lo cual, cuando ocurra, mostrará que este esquema se ha incorporado a su sistema interpretativo y se ha estabilizado. Es un esquema con el que seguirá el análisis. Pues sospechará que es muy probable que siendo infinitos los naturales, es difícil que solo las ternas proporcionales a (*3, 4, 5*) constituyan todas las ternas posibles. Pero con las herramientas conceptuales con que cuenta hasta aquí, no encuentra la manera de resolver esta cuestión salvo que siga explorando. También, cabe la posibilidad de que piense que éstas sean todas las ternas posibles. En cualquier caso, por exploración voluntaria o descubrimiento accidental, podría llegar por ejemplo a la terna (*5, 12, 13*). Esto *desestablilizaría* su esquema previo, ya que esta terna no es proporcional a (*3, 4, 5*). Especialmente si pensó que ya había encontrado todas las ternas posibles. Lo que sí podría asegurar con firmeza a esta altura de su conceptualización es que todas las ternas proporcionales a (*5, 12, 13*)[4] son también pitagóricas, puesto que ese esquema ya está incorporado a su sistema conceptual. Pero este descubrimiento por *exploración* o por *accidente* podría iniciar un nuevo ciclo que comenzará por una generalización abductiva, ahora sobre un plano superior con respecto al esquema ya adquirido que será sistemáticamente utilizado con los nuevos resultados.

Etapa 1’

*Observando* cuidadosamente las dos ternas primitivas, el estudiante podría inferir *abductivamente* dos características relacionadas con las ternas (*3, 4, 5*) y (*5, 12, 13*), las que podría plantear como *hipótesis* acerca de las ternas primitivas no proporcionales. Una es que las dos últimas componentes de cada terna difieren

[4] Una cosa que ya podría observar nuestro estudiante es que parece haber una primera terna a partir de la cual se obtienen las proporcionales –como en estos dos casos–, lo que es lógico porque tratamos con el conjunto de los naturales. Entre nosotros, queda claro que son ternas en las que sus componentes son naturales coprimos, o sea, que su máximo común divisor es 1, y se las suele llamar primitivas.

en 1. La otra es que la primera y tercera componente son naturales impares, mientras que la segunda componente de cada terna es par. Habiendo trabajado ya el teorema de Pitágoras, puede considerar las dos primeras componentes como catetos y la tercera como la hipotenusa. Esto es, también, una ayuda desde el punto de vista semiótico porque la podemos asumir como otra representación semiótica de tipo icónica, sobre lo que volveremos más adelante.

Etapa 2'

Esta corresponde a poner en forma de resultados las hipótesis formuladas en la etapa previa de manera explícita y de forma que se constituyan en las génesis de las formas sintagmáticas finales que tomarán las mismas. Las formas en génesis de las hipótesis son, en relación con los casos (las ternas (*3, 4, 5*) y (*5, 12, 13*)): *5=4+1, 13=12+1* (diferencia de 1 entre la hipotenusa y el cateto par); *4=2.2, 12=2.6* (catetos pares); *3=2.1+1, 5=2.2+1* (catetos impares); 5=2.2+1, *13=2.6+1* (hipotenusas impares). Es probable que a esta altura el estudiante haya adquirido ya la fórmula de los naturales pares e impares. En cualquier caso, deberá, por un lado, escribir estas fórmulas y, por otro, aplicar la condición pitagórica a las generalizaciones así obtenidas, lo que concreta recién en la siguiente etapa. Se pueden observar en este ejemplo los sucesivos *saltos de abstracción* que ocurren.

Etapa 3'

En esta etapa, por un lado, se formaliza la inferencia inductiva escribiendo las ternas mediante el sintagma $(a, 2k, 2k+1)$ con $k \in N$ y *a* impar. Por otro lado, se aplica la condición pitagórica a esta terna, es decir: $a^2 + (2k)^2 = (2k+1)^2$, relación que conduce a $a^2 = 4k+1$, lo que coincide con que *a* deba ser impar (por lo tanto, su cuadrado también lo es). Fórmula de la que puede despejarse *k* como $k = \dfrac{a^2 - 1}{4}$ y, entonces, tomando los distintos impares *a=3, 5, 7, 9, 11*, obtener los diferentes *k* (verificando que son enteros) y, con ellos, las componentes *b* y *c* de las ternas.
Completada la tercera etapa se pueden obtener las distintas ternas (*3, 4, 5*), (*5, 12, 13*), (*7, 24, 25*), (*9, 40, 41*)... que contienen las ternas que dieron lugar al planteo.

Llamemos ahora *nivel* 1 al ciclo 1-2-3 y *nivel* 2 al ciclo 1'-2'-3'. Notemos aquí algunos aspectos de esta evolución:

i- Para cada una de las ternas obtenidas, que son primitivas, es posible aplicar el *esquema adquirido en el nivel* 1 y obtener las infinitas ternas proporcionales. Las ternas primitivas y sus proporcionales forman conjuntos de ternas disjuntos.

ii- Cada nivel de conceptualización ( 1 y 2 en este caso) delimita un sistema dado por los conjuntos que se derivan de ellos y sus propiedades, cosa que es muy importante remarcar pues no debe perderse el *punto de vista sistémico o de conjunto* que corresponde a cada nivel de conceptualización. Puede observarse que, en este caso, el sistema correspondiente al nivel 2 contiene al correspondiente al nivel 1.

iii- La estructura de generalización asociada a cada nivel implica a los conceptos *necesarios* para la elaboración de las *formas* del nivel correspondiente. En particular, en este caso, las operaciones aritméticas básicas, los conceptos de número par e impar con sus correspondientes formas algebraicas, las operaciones con monomios y un nivel básico de generalización algebraica.

iv- Cada forma utilizada en un nivel dado corresponde a un esquema ya adquirido en un nivel previo, siendo una forma que se aplicará a determinados contenidos. Por ejemplo, las formas par e impar $2k$ y $2k+1$ aplicadas a los naturales. En nuestro ejemplo de dos niveles, el esquema del nivel 1 se aplica en el nivel 2. No es posible avanzar en un determinado nivel sin los esquemas necesarios de los niveles previos. Observamos en especial que no se ha utilizado sino en forma mínima el concepto de divisibilidad y sus propiedades con las que podríamos llegar a una forma general para las ternas pitagóricas, tal como veremos más adelante.

En este punto sigue en pie la pregunta acerca de si esto agota las ternas posibles. Pero la posible respuesta a esto, si bien comenzará con una inferencia abductiva, puede bifurcar en dos niveles diferentes: por un lado, seguir la exploración o encontrar "accidentalmente" una nueva terna no contenida entre las obtenidas como, por ejemplo, la terna (*15, 8, 17*) que, respetando el esquema (*cateto impar, cateto par, hipotenusa impar*), no es derivable de los esquemas anteriores. Por otro lado, y dado que las ternas generalizadas en el nivel 2 son del tipo $(a, 2k, 2k+1)$ , ahora podría inferirse abductivamente pero en otro nivel, que una nueva forma de ternas, no contenidas en las anteriores, podría ser $(a,2k,2k+3)$ , dado que, por un lado, no hay razón para pensar que la diferencia entre las segundas y terceras componentes de la terna deba ser solo 1 y, por otro, esta diferencia debe ser necesariamente impar de acuerdo a los esquemas previos. Y de aquí, generalizando, llegar a la forma: $(a,2k,2k+i)$ $i=1,3,5,7,9...$ , a la cual pertenece justamente la terna (*15, 8, 17*) con *i=9*.

En el primer caso, de la terna (*15, 8, 17*) se observa que la diferencia entre la hipotenusa impar y el cateto par es de 9. Repitiendo el procedimiento utilizado cuando esta diferencia era de 1 y que es un esquema ya adquirido, llegaríamos a la forma general $k=\frac{a^2-81}{36}$ . Y recordando que *a* debe ser impar se podría poner $a=9+6l$ con $l \in N$ y, entonces, $k=l^2+3l$ (aclaramos que lo más probable es que el estudiante pruebe con la fórmula general en función de *a* para obtener los diferentes *k*) y con esta forma se obtengan las ternas (*15,8,17*), (*21,20,29*), (*27,36,45*), (*33,56,65*)…y, a partir de ellas, todas las ternas proporcionales.

Siguiendo con el esquema de ir incrementando en una unidad la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par y repitiendo el procedimiento para obtener las respectivas ternas, se vería que todas las ternas obtenidas pertenecen a la clase de ternas proporcionales a la obtenida en el nivel 2, es decir las ternas primitivas cuya diferencia entre hipotenusa y cateto par es igual a 1. Y que esto ocurriría hasta que la diferencia, que nosotros denominamos *i* fuera igual a 9. Una nueva inferencia abductiva, que parte de observar que tanto 1 como 9 son cuadrados perfectos, permitiría plantear a través de los esquemas ya incorporados una nueva generalización completiva (notar que a medida que se avanza hacia planos superiores, el paso inductivo se automatiza, o directamente no se aplica, porque en realidad se va adquiriendo un esquema general que es básicamente deductivo). Esta nueva inferencia conduciría a suponer que solo cuando la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par fuese un cuadrado perfecto se podrían obtener ternas primitivas nuevas, no derivables de las anteriores, mientras que, en caso de no serlo, entonces, las ternas serían derivables del caso en que la diferencia fuese el cuadrado perfecto inmediatamente anterior a la diferencia considerada. En el hipotético caso en que todos los esquemas conceptuales mencionados estén incorporados, se podría plantear casi de inmediato una solución general: $(a,2k,2k+n^2)$ $n=1,3,5,7,9...$ y de la condición pitagórica llegar a $k=\frac{a^2-n^4}{4n^2}$ . Sabiendo que *a* debe ser impar y que $n^2$ es impar, entonces se podría reescribir $a=n^2+2l$ , $l \in N$ , porque de esa forma simplificaríamos: $k=l+\left(\frac{l}{n}\right)^2$. Si ahora tomamos $l=nm$, $m \in N$, entonces resulta $k = n(n+m)$. De esta forma, las sucesivas generalizaciones nos llevaron al siguiente resultado:

*$(n(n + 2m), 2m(n + m), (n + m)^2 + m^2), n = 1,3,5,7,9...,m \in N$ (1)* obteniendo así el sintagma final.

Notemos cómo este proceso constructivo nos fue llevando mediante sucesivas generalizaciones hasta el sintagma final. ¿Será ésta la fórmula correspondiente a todas las ternas pitagóricas posibles? El mismo proceso constructivo no nos permite asegurarlo. Lo que sabemos es que las ternas de este tipo son necesariamente pitagóricas. Pero no que toda terna pitagórica se escribe necesariamente de esta forma, lo que *debería ser demostrado*. Es que algunas inferencias abductivas no fueron demostradas. Como que, por ejemplo, las ternas cuyo *i* no fuera cuadrado perfecto (es decir que no sea $i=n^2$) pudiesen derivarse de ternas primitivas previas. Pero lo que queremos enfatizar aquí es que el proceso constructivo sigue *necesariamente* estas etapas. Como vimos, hay un punto en este desarrollo en el que se dan procesos directamente deductivos, puesto que se alcanzan esquemas conceptuales que lo permiten y que, por lo tanto, serán utilizados. De hecho, estas generalizaciones están basadas en la siguiente *estructura de generalización*:

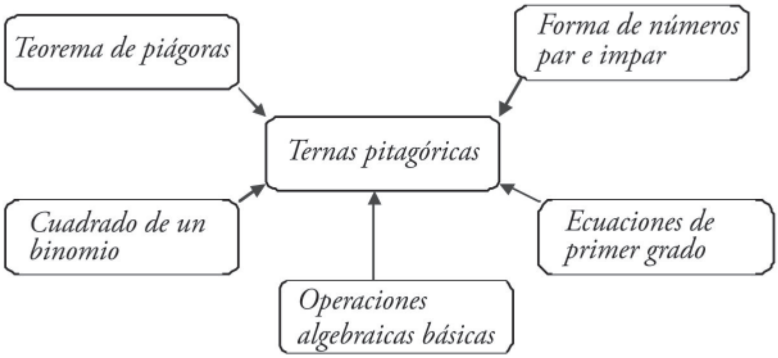



Fig. 3.2

Y, naturalmente, las necesarias para alcanzar los conceptos recuadrados. Si, en cambio, se manejaran con fluidez los conceptos de divisibilidad y sus propiedades, se podrían obtener *deductivamente* las ternas y no serían necesarias inferencias abductivas ni procesos de construcción como los señalados, puesto que surgirían de esquemas conceptuales ya estabilizados. En efecto, es posible ver (Becker *et al.*, 2001), en base al teorema fundamental de la aritmética y a las propiedades de la divisibilidad, que cualquier terna pitagórica puede obtenerse de la forma:

$(v^2 - u^2, 2uv, v^2 + u^2),\ v>u,\ u,v \in N\ (2)$

Entonces, sabiendo cuál es la forma de la que se derivan todas las ternas pitagóricas, podemos compararla con nuestro resultado. Si en la fórmula (1) hacemos el cambio de variables $m=u,\ v=m+n$ y levantamos la restricción de que $n$ sea impar, entonces se produce la transformación (1) → (2). Pero la diferencia que se mantiene es que, mientras de la forma (2) se deducen todas las ternas, incluyendo a las proporcionales, de la (1) en la que $n$ es impar, se obtienen todas las primitivas y el resto debe obtenerse por proporcionalidad. Por ejemplo, si tomamos $n=3,\ m=1$, las dos formas generan la terna $(15,8,\ 17)$; y si tomamos $n=2,\ m=1$, las dos formas, permitiendo que $n$ sea par, generan la terna $(8,6,10)=2(4,3,5)$; mientras que, teniendo en cuenta que en (1) restringimos $n$ a los impares, deberíamos tomar $n=1$ y luego multiplicar a la terna resultante por 2 para llegar a la misma terna.

Es decir, (1) con $n$ impar genera todas las primitivas, mientras que con $n$ par genera las proporcionales a la terna correspondiente a reemplazar en (1) $n$ por $n-1$ con el mismo $m$. O sea, que nuestro proceso constructivo nos llevó a obtener todas las ternas primitivas y, luego, las restantes por proporcionalidad.

El punto importante aquí es que el proceso constructivo de conceptos *real* se da a través de los mecanismos descriptos, que implican ya un determinado nivel de esquemas conceptuales estabilizados. Aun en el caso de trabajar con *formas sintagmáticas completas*, siempre habrá un estadio de inferencia abductiva a partir del cual se construirán nuevas formas sintagmáticas completas de orden superior. Por ejemplo, teorías que contienen como casos particulares a otras teorías. Finalmente, tanto el ejemplo, el nivel de abstracción de partida y el camino utilizado en construir una respuesta al problema, son arbitrarios y se podría haber tomadocualesquiera otro problema, nivel de abstracción y camino de resolución. La idea es ilustrar sobre la permanencia de los *mecanismos cognitivos* en la construcción cognitiva y la necesidad de basar la metodología en ellos.

## 3.2 La metodología según el soporte semiótico

Ya explicitamos que, para un concepto dado, podemos utilizar un soporte semiótico cuya ubicación en la *recta de generalidad* vaya desde un *grado de generalidad* cualitativo (ícono) a un sintagma completo (símbolo). Si consideramos las etapas de los mecanismos cognitivos desde una perspectiva semiótica, esto es precisamente lo que ocurre cuando recorremos el ciclo 1 → 3. Por ello, lo más potente para optimizar la asimilación conceptual, sería construir una "escalera semiótica" sobre la recta de generalidad, a través de *diagramas*[5] que contengan cada vez más información sobre el concepto en el trayecto que va de su *forma paradigmática icónica* a su *forma sintagmática simbólica completa*. Esta última presupone no solo la información completa del concepto, sino la comprensión de las *relaciones de generalidad* (o relaciones significativas) involucradas de manera simbólica entre los diferentes signos o conceptos, en la etapa completiva.

Para ilustrar, retornemos al ejemplo de la función lineal introducido en (2.5-III) y refiramos a los cuadros de la Fig. 3.3.

En el cuadro (i) se presenta el diagrama más simple, en el que aparecen algunos elementos de dos conjuntos diferentes unidos por líneas con flechas que indican un sentido de la relación.

[5] Al diagrama lo concebimos como una *forma icónica generalizada* que incluye desde figuras geométricas, hasta, por ejemplo, sistemas de ecuaciones con determinadas regularidades y sobre el que se van detallando los datos y las relaciones de generalidad en relación con un sistema dado. Debe recordarse que estos conceptos son *relativos* y lo que podría tomarse como una forma sintagmática simbólica en un determinado nivel de generalidad, podría constituir una forma paradigmática icónica en un nivel superior. Por otro lado, el despliegue del contexto semiótico (paradigmático o sintagmático) es el aspecto más relevante de estas formas y aquel en el cual reside su potencia y utilidad.

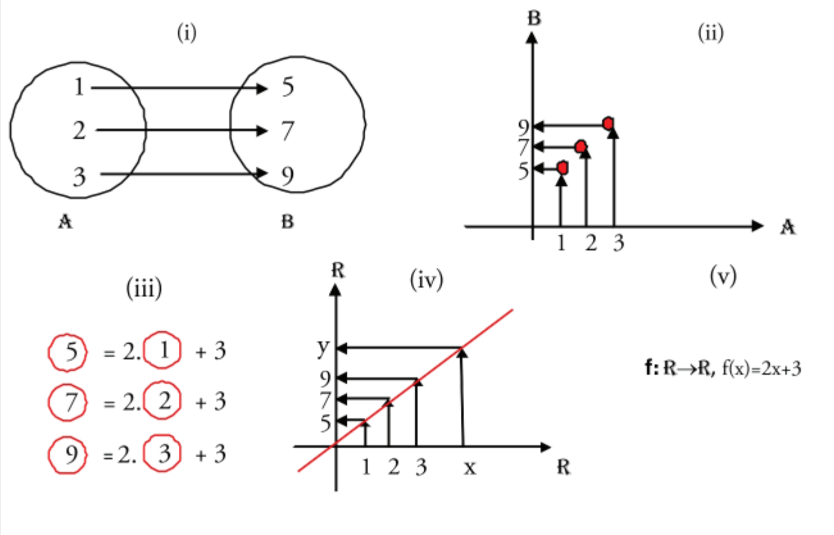



Fig. 3.3

Un diagrama típico (no importa lo típico o lo original del diagrama sino qué proceso representa) que por ahora no explicita la relación y, por lo tanto, corresponde a la etapa abductiva. Este diagrama se complejiza en el cuadro (ii) en el que se introducen coordenadas. Es decir, aparecen elementos nuevos que son los puntos, lo que comienza a sugerir la *forma* de la relación en su aspecto geométrico. Por ello, este cuadro corresponde a una etapa inductiva. Al igual que el cuadro (iii), en el que se anticipa la *forma* en su aspecto algebraico. Si el cuadro (ii) es una forma original de encontrar cierta regularidad con relación a (i), ¿cuál sería el proceso que lleva a (iii)? Y ésta sería justamente una inferencia abductiva buscando regularidades a partir de los datos por *comparación de casos*. La más conocida e inmediata sería notar que las diferencias entre los valores de $\mathbb{B}$ son proporcionales a las diferencias de los correspondientes valores de $\mathbb{A}$, y que esta proporcionalidad corresponde a una variación incremental de 2 en los valores de $\mathbb{B}$ cada vez que se incrementan en una unidad la de los valores de $\mathbb{A}$ correspondientes, lo cual surge inmediatamente a la vista al observar el cuadro (i). Esto permitiría inferir que a 0 en $\mathbb{A}$ le corresponde 3 en $\mathbb{B}$ y a 4 en $\mathbb{A}$, 11 en $\mathbb{B}$. El segundo paso sería tomar una referencia, por ejemplo, 0 en $\mathbb{A}$ y 3 en $\mathbb{B}$ para, desde allí, tomar los incrementos en cada conjunto y así llegar al cuadro (iii). Otra forma similar sería tomar las diferencias entre los valores de $\mathbb{B}$ y los valores correspondientes en $\mathbb{A}$ y observar que estas diferencias, también, se incrementan consecutivamente en 1 (5-1=4, 7-2=5, 9-3=6), lo cual permite extender la inferencia a otros valores naturales de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$. Luego, un procedimiento similar al anterior llevaría al cuadro (iii). Este tipo de inferencias tiene que ver con las posibilidades creativas de quien conceptualiza. Sin embargo, sea que los propios estudiantes la realicen, o que la sugiera el docente que trabaja con los diagramas, esta reconstrucción debe ser hecha porque, de lo contrario, no se interiorizaría como proceso de generalización (parecería simplemente la intuición mágica de quien la propone). Tanto el cuadro (ii) como el (iii) constituyen *génesis de la forma* que adoptará esta relación. En (ii) los puntos *inducen* la recta. Y, en (iii), la forma algebraica, en este caso enfatizada por el contraste entre los valores de las variables, encerrados en los circulitos rojos, y el resto de la forma que permanece invariable. Justamente, en la generalización completiva, no solo se tendrán las formas sino la extensión a todos los reales de la relación hasta aquí restringida a los naturales en los diagramas. Y aparecerán, también, las variables *x, y* que tomarán valores en el conjunto de los reales. En efecto, desde el punto de vista de los diagramas, es inmediato unir los puntos con una recta en (ii), o dejar los circulitos vacíos indicando que se pueden reemplazar por valores reales en (iii), o –lo que es lo mismo– por las variables *x, y* estableciendo, además, un orden para hacerlo en ambos casos. Es inmediato a partir de los esquemas que adjudicando un valor a *x*, tengo un procedimiento para obtener el de *y*, lo que tiene que ver con el sentido asignado desde el principio a la relación. Como puede verse claramente: *Cada tipo de generalización tiene asociado un soporte semiótico correspondiente a su grado de generalidad. Es decir, la representación semiótica del concepto realiza las generalizaciones abductiva, inductiva y completiva correspondientes a los mecanismos cognitivos (intra, inter y trans) y el ciclo se completa cuando deductivamente es posible realizar el camino inverso.*

Para continuar, es conveniente establecer algunas precisiones:

1- La evolución del concepto a través de los mecanismos por medio de diagramas va explicitando las relaciones de generalidad que intervienen. En su forma final completa, está convencionalmente contenida toda la información, pero no explicitada. Quien la lee debe conocer la convención. Si se quisieran dar más detalles y realizar una progresión más extensa, se podrían agregar más diagramas enfocando en un tipo de relación de generalidad. Por ejemplo, de diagramas con naturales, podemos pasar a uno con enteros, otro con racionales y, finalmente, uno con irracionales. Por lo tanto, los diagramas son útiles para enfocar las relaciones de generalidad.

2- La forma (iv), si bien puede considerarse un diagrama, es, a su vez, un *objeto geométrico* del cual (v) podría considerarse su forma algebraica. Ambas formas representarán al mismo concepto para quien las incorpora, en el momento en que, cumpliendo con el principio de equivalencia de Vygotski, el estudiante puede realizar transformaciones de una a la otra, en especial cuando comprenda los conceptos de pendiente y ordenada al origen.

3- De las formas se deducen sus propiedades. Por ejemplo, la unicidad de la función. Como queda claro, la forma (iv) resulta más cómoda para mostrar esta propiedad, con el clásico expediente de trazar una recta vertical que corte a la recta graficada.

4- En el camino de retorno, de la forma (v) pueden obtenerse las anteriores y es necesario hacer este camino para una incorporación conceptual adecuada.

5- Una verdadera dificultad aparece con el concepto de *variable.* El estudiante no tiene inicialmente incorporado que el concepto de variable implica una *operación* que consiste en sustituir a un símbolo por un valor tomado en un conjunto numérico dado. Entonces, es común que escriba, por ejemplo, f(x)=2.1+3 puesto que, por un lado, piensa que f(x) es simplemente la manera de denotar la función y, por otro lado, no relaciona a x con la variable a ser sustituida en este caso por 1. Esto tiene que ver con que la variable es ya la *forma sintagmática final* que representa a dicha operación. Es conveniente, entonces, trabajar desde el principio este concepto en forma icónica; por ejemplo, con una representación como la siguiente.

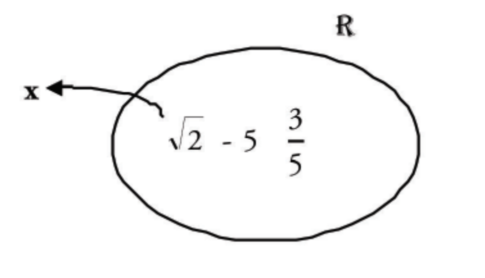



Fig. 3.4

## 3.3 Siguiendo con la metodología y con Pitágoras

En los parágrafos previos tuvimos en cuenta los aspectos dinámicos de la conceptualización desde el punto de vista de los mecanismos y del soporte semiótico. Pero en un curso de ingreso existe un determinado currículo, con un programa específico, una metodología, etc. El propósito de estos artículos no es introducir una didáctica determinada, sino presentar una metodología general que tome en cuenta los mecanismos cognitivos y la semiótica, así como algunos elementos *socio-críticos* que se derivan de la concepción aquí desarrollada y a la que –creemos– debería ajustarse el currículo. En cuanto a la didáctica, cada docente puede plantear la propia considerando diferentes aspectos; y, en especial, en la etapa abductiva, se da el espacio en el que se podría plantear una *heurística* creativa. Sin embargo, como parte de esta concepción, vamos a fijar algunos principios generales y la exposición de un tema particular en un contexto concreto dado. El tema elegido es el teorema de Pitágoras y, el contexto, un curso del CAU en el que se trabajó este tema.

### *3.3.1 Metodología*

Siguiendo con la caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) dado en la introducción:

- Basar el PEA en la caracterización del *sujeto social*. El programa y la metodología deben ser un producto histórico concreto y situado del proceso de adecuación docente-alumno y, por lo tanto, cualquier tema debe insertarse en dicho marco.
- Trabajo colectivo e individual basado en *las actividades del sujeto*, a partir de *situaciones problemáticas* planteadas por los docentes o que surjan en la interacción dentro del PEA.
- Ubicar el tema sobre la línea del *grado de generalidad* y tomar en cuenta el *sistema de relaciones* vinculado al *concepto* que se trabaje (estructura de generalización).
- En esa ubicación que da un *nivel contextual*, realizar un *planteo problemático* que se resuma en una o más preguntas yendo de lo particular a lo general, para luego invertir yendo de lo general a lo particular en forma deductiva. Ello implicará recorrer los tres tipos de generalización

(*abductiva*, *inductiva* y *completiva*) y que trabajen con la implicación directa y, luego, con la recíproca (esta última asegura la reversibilidad operatoria y, por lo tanto, la incorporación plena del concepto). Trabajar con diagramas que constituyan soportes semióticos del concepto en cada nivel de generalización.

En relación con la ubicación del tema en la estructura del curso, grado de generalidad y sistema de relaciones vinculadas al concepto (teorema de Pitágoras), nos basamos en el siguiente diagrama:

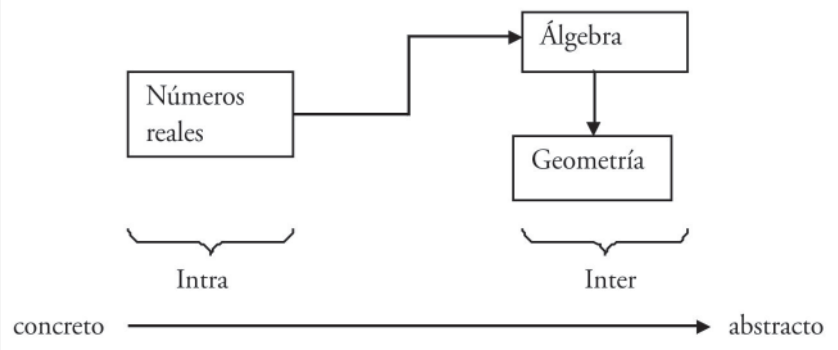


Fig. 3.5

En el curso que se dio hasta el año 2009, en el primer módulo, luego de una unidad dedicada a trabajar con los números reales y la recta numérica, así como con atributos básicos de figuras geométricas, se continuaba con álgebra y, luego, con geometría. En esta última, se enfocaba el estudio de las relaciones entre segmentos de distintas configuraciones geométricas a través del teorema de Thales, la semejanza de triángulos y, luego, el teorema de Pitágoras en ese orden. Desde este punto de vista, la primera parte podemos considerarla como atributos (intra) a utilizar en la segunda y, por tratarse esta última de relaciones entre segmentos, los temas necesarios de álgebra y geometría corresponden a la etapa inter. En esta etapa se obtendrán las formas finales de estas relaciones –incluyendo a Pitágoras– que corresponderán a la etapa completiva, dentro del estadio inter, lo que muestra la fractalidad de esta tríada que Rolando García (2000) abrevia como *IaIrT.*

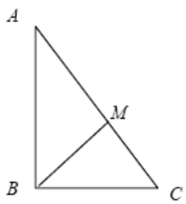
Con respecto a la estructura de generalización, los conceptos necesarios serían: medida de segmentos, se asumen conocidas las figuras geométricas básicas y sus atributos, perímetro y área, proporcionalidad, la algebrización de la medida mediante la introducción de variables, ecuaciones de primer y segundo grado básicas.

Y, por último, las relaciones de generalidad (por relaciones de generalidad, entendemos todas las relaciones posibles entre los diversos conceptos implicados). Sin embargo, aquí vamos a considerar la forma en que se trabajó en el curso, en forma deductiva según el siguiente orden de implicaciones: Thales→semejanza de triángulos→teorema de Pitágoras.

### *3.3.2 Desarrollo del tema*

Luego de haber incorporado los conceptos de teorema de Thales y semejanza de triángulos, los siguientes tres problemas se contemplan para conceptualizar el teorema de Pitágoras.

**108** El triángulo $ABC$ es rectángulo en $B$, y el segmento $BM$ es la altura correspondiente a su hipotenusa.




a) Justificar la validez de las siguientes proporciones

i) $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AM}$ ii) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{MC}$

b) Explicar cómo surge la expresión:

$AB^2 + BC^2 = AC(AM + MC)$

c) Inferir que $AB^2 + BC^2 = AC^2$

**109** Se quiere poner un cable tensado desde la punta de una torre de alta tensión de 50 m hasta una estaca en el piso, pasando por un poste ubicado entre la estaca y la torre. La estaca está a 55 m de la base de la torre y el poste está ubicado a 15 m de la estaca. La altura del poste es de 20 m. ¿Cuántos metros de cable serán necesarios? (Aclaración: el poste y la torre están ubicados perpendiculares al suelo)

**110** a) Construir un triángulo cuyos lados midan:

i) 10 cm; 8 cm; 6cm.
ii) 12 cm; 11 cm; 5 cm.
iii) $3\sqrt{2}$ cm; 3 cm; 3 cm.

b) Decidir si alguno/s de los triángulos construidos en a) es rectángulo. Justificar la respuesta.

El problema108 es el procedimiento guiado de la demostración del teorema de Pitágoras, el 109, la aplicación de la implicación directa y, el 110, la aplicación de la implicación inversa. Tal como están planteados estos problemas, se parte de la hipótesis subyacente de que los esquemas de teorema de Thales y semejanza de triángulos fueron ya incorporados y estabilizados por los alumnos para proceder, luego, con un proceso deductivo. Pero, si bien es cierto que la incorporación final de la fórmula del teorema es bastante inmediata, justamente porque corresponde a una figura geométrica que actúa claramente como soporte icónico de la relación algebraica (conexión no necesaria para las ternas pitagóricas), ello no implica la asimilación del procedimiento. Y la razón es que la mayoría de los estudiantes, a esa altura, no tiene realmente incorporados y estabilizados estos esquemas, como se podría inferir de sus puntos de partida mediante el diagnóstico y, también, del hecho de que este tema se trabaja en la clase número 11 o 12, tiempo insuficiente para incorporarlos, motivo por el que posteriormente se cambió este orden de temas. Pero, además, porque así se verificó empíricamente en el aula.

Introduciremos una variación de este procedimiento que articule con una construcción más afín a los mecanismos cognitivos y a la semiótica correspondiente.

En primer lugar, siempre que planteemos una situación que vaya de lo particular a lo general, tendremos: lo que se entiende por el *caso* y que corresponde a la hipótesis, el *resultado* que corresponde a la aplicación de la forma general al caso y la *forma general* (en las conclusiones nos referiremos a esta cuasi simultaneidad). Por lo que no identificaremos cada etapa sino que quedará implícita, salvo en alguna situación en la que convenga hacerlo. Solo señalaremos la dirección de la generalización, de lo particular a lo general o a la inversa. La variación procedimental es la siguiente:

- Se plantea una *problematización* concreta en relación con el concepto, que, dentro de su ubicación en la recta de generalidad (Fig. 3.5), vaya *de lo particular a lo general* conservando un marco de referencia (en este caso una figura rectangular) y sea adecuada para la aplicación del teorema de Pitágoras en dos etapas: i- el *reconocimiento* de las figuras involucradas y sus atributos (que introduzcan los elementos de la hipótesis del teorema), así como los conceptos en los que se basará su resolución y que serán una base para la deducción del teorema; ii-la generalización del problema anterior que cree la *necesidad* de recurrir a Pitágoras y permita plantear la demostración del teorema. El trabajo activo de los estudiantes debe ser guiado por el docente con el objeto de *sistematizar* los conceptos elaborados.

Etapa i- Problema: dos estudiantes de CAU- MATE se preguntan cuántos metros menos recorrerán en una plaza cuadrada de 100m si van por la diagonal en vez de hacerlo por las cuadras laterales. Sugerencia: trabajar con “algunos” de los triángulos formados al trazar las diagonales.

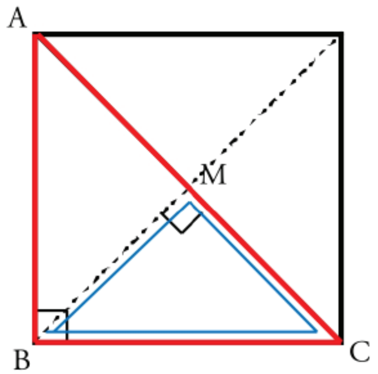


Fig. 3.6

Análisis: (organización de datos): un camino factible es realizar un gráfico identificando los datos $AB=BC=100m$ y denominar $x$ a la medida de AC que es la incógnita (esquema de identificación ya incorporado).

Al identificar los datos, se facilita tomar conciencia de que el cuadrado se compone de 2 triángulos rectángulos isósceles (conceptos trabajados previamente), cada uno de los cuales se compone de otros dos triángulos rectángulos isósceles y que $AM=MC=MB=\frac{x}{2}$ . Esto completa el análisis de los *atributos* de las figuras. Ahora se encara la

Resolución: en el contexto del trabajo de semejanza de triángulos, esto constituye un ejercicio más en el que se observa la semejanza de estos seis triángulos debido a la igualdad de sus ángulos. Y que *eligiendo dos de ellos* que contengan a la *incógnita*, pueden escribir la relación algebraica de semejanza. Si eligen *ABC* porque es el triángulo de partida del problema y por ejemplo *BMC*, en este punto surge la *necesidad de identificar catetos e hipotenusa de cada triángulo* para aplicar semejanza, lo que refuerza el reconocimiento del triángulo rectángulo y sus atributos. Habiendo identificado los lados no tendrán mayor inconveniente en plantear una proporción de semejanza, por ejemplo, $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{MC}$ o reemplazando por los datos del análisis: $\frac{x}{100} = \frac{100}{x/2}$. Ahora resuelven la ecuación $x^2 = 2 \cdot 100^2$ (esquema trabajado previamente en álgebra) y, de aquí, x =141m, deduciendo que caminan 200m – 141m = 59m menos.

<u>Etapa ii</u>- Se plantea la pregunta sobre cómo se resolvería el problema si una de las cuadras fuera de 100m y la otra de 60m. Esto produce una variación del problema previo que, aunque altera la simetría de igualdad de lados, mantiene la contigüidad con el punto de partida, lo que da lugar a una abducción en un plano superior: es la abducción de esquemas o, dicho de otra forma, una inferencia significativa entre el esquema del problema previo y el esquema de su variación (recuérdese que la abducción surge de una comparación de casos). Esto se puede visualizar con claridad a partir del diagrama de la Fig. 3.7 y compararlo con el de la Fig. 3.6. En efecto, en el primer diagrama las diagonales son perpendiculares, mientras que dejan de serlo en el segundo. Esta perpendicularidad era justamente la atribuida a los segmentos *BM* y *MC*. Por lo tanto, se puede pensar en una transformación que lleve de la Fig. 3.6 a la Fig. 3.7, de forma que *BM* y *MC* continúen siendo perpendiculares. Como es natural, los triángulos formados *ABM* y *BMC* ya no son iguales, pero sí son rectángulos y semejantes ambos al triángulo *ABC* (y por lo tanto entre sí) por ser este último recto y tener un ángulo común con cada uno de ellos. Por lo tanto, se puede utilizar el esquema previo de semejanza, pero ahora aplicado a los tres triángulos del segundo diagrama. En efecto, ahora *AB=100 m, BC=60 m*, *AM=x*, *MC=y*, con la condición adicional *x+y=AC*. Al igual que en el primer caso: $\frac{x}{100} = \frac{100}{AC}$ por la semejanza entre los triángulos *ABM y ABC* y $\frac{y}{60} = \frac{60}{AC}$ por la semejanza entre los triángulos *BMC* y *ABC*, de donde surgen inmediatamente las ecuaciones $x \cdot AC = 100^2$ y $y \cdot AC = 60^2$ que, sumadas miembro a miembro, conducen a $x \cdot AC + y \cdot AC = 100^2 + 60^2$, o sacando factor común

$AC \cdot, AC \cdot (x + y) = 100^2 + 60^2$ y usando la condición adicional resulta en $AC^2 = 100^2 + 60^2 = 13600$, de donde, finalmente: $AC = \sqrt{13600} \cong 116.62$

y, por lo tanto, la respuesta al problema sería que caminan 160 *m*-*116.62 m* =*43.38 m* menos.

De esta forma, entramos de lleno en las condiciones del problema 108, pues éste no es sino una generalización del problema previo en el que los lados ahora son variables. En efecto, la aplicación del esquema se vuelve inmediata a partir de tener en cuenta lo siguiente para cada ítem del ejercicio:

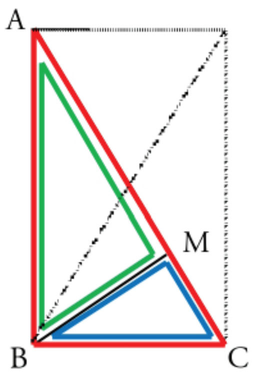


Fig. 3.7

a) Tomamos la semejanza de $\Delta(ABC)$ y $\Delta(ABM)$ ; $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM}$

y de $\Delta(ABC)$ y $\Delta(BCM)$ $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$

b) $AB^2 = AC\,AM$ ; $BC^2 = AC\,MC$

c) $AC = AM + MC$

Como antes, la parte (a) los obliga a reconocer los triángulos involucrados y sus semejanzas. La parte (b) a colocar estas fracciones en forma de productos y a operar algebraicamente. Y la parte (c) vuelve a conectarlos con el triángulo rectángulo y reconocer el resultado. *Se los deja resolver el ejercicio* y, luego, se lo *sintetiza* en el pizarrón, *enfatizando cuáles son las hipótesis* bajo las cuales este teorema es válido. Este aspecto no es menor puesto que es una de las principales dificultades de los estudiantes.

¿Por qué proceder de esta forma y no aplicar un procedimiento propiamente deductivo al caso general a partir de los conceptos ya incorporados, que es lo que presupone el planteo del problema? La razón es que, justamente, los conceptos están en *vías de ser incorporados* y no incorporados plenamente; y, por lo tanto, lo óptimo es aplicar un procedimiento que acompañe a los mecanismos cognitivos de construcción conceptual. Naturalmente, esto demandará más tiempo, pero es preferible una elaboración con pocos ejercicios, que una gran variedad de éstos tratados con el supuesto de que, al hacerlos, los estudiantes estarán incorporando en plenitud los conceptos tratados.

- Ahora, ir de lo general a lo particular consiste en la *aplicación del teorema* al ejercicio 109, así como obtener ciertos casos particulares que a su vez mantengan un resultado general; por ejemplo, preguntar cuál sería la fórmula general del teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos isósceles
- Ahora, se aborda el ejercicio 110 –el recíproco del teorema de Pitágoras– que es *fundamental en dos aspectos*: trabajar la *implicación inversa* (*reversibilidad operatoria*), y aclarar que la hipótesis de que un triángulo sea rectángulo es una *condición necesaria* para aplicar el teorema. En *la práctica*, si esto no se afirma, los estudiantes suelen tomar como catetos a los lados menores de cualquier triángulo. Pero dada la *dificultad planteada en este nivel para formalizar la implicación inversa*, se la trabaja bajo la *forma de "verificación"*. Esto es, si se cumple el teorema de Pitágoras para un triángulo dado, verifico que es rectángulo y, si no la cumple, que no lo es. La *hipótesis subyacente es que se cumple la implicación inversa*.

A partir de aquí, el concepto se incorpora plenamente por medio de su utilización en problemas de cálculo de perímetros y áreas de figuras compuestas, mediante la algebrización de problemas geométricos que se resuelven mediante ecuaciones y al utilizarlo dentro de la unidad de geometría en trigonometría.

Por último, en una versión anterior de la guía, se llegaba a la fórmula del teorema construyendo cuadrados sobre los catetos y la hipotenusa y pidiéndoles a los estudiantes que calcularan el área del cuadrado sobre la hipotenusa utilizando una cuadriculación de fondo que les permitía calcular el área en unidades del área del cuadrado de dicha grilla. Éste es un procedimiento *diagramático* muy conocido, representado en la Fig. 3.8, que aprovecha una *inferencia significativa* a partir del significado del área de un cuadrado que tiene cada término del teorema de Pitágoras. Y sería válido si fuese el resultado del principio de equivalencia de Vygotski, por el cual se puede arribar al mismo resultado de infinitas formas, lo que presupone al concepto ya incorporado, cosa que aquí no ocurre.

Pero esta técnica tiene un inconveniente: en la parte inicial de la cursada, un número significativo de estudiantes “no diferencia” los conceptos de área y perímetro, por lo que este procedimiento les refuerza la confusión. Ésta se debe a que ambos conceptos (área y perímetro) están estrechamente relacionados y medidos a partir de parámetros comunes como los lados de un rectángulo o el radio de un círculo. Pero, además, mientras el área toma aquí carácter de *atributo* típico de la etapa intra, el teorema de Pitágoras plantea una relación entre los lados de un triángulo rectángulo (etapa inter), con lo cual se confunden ambos aspectos, lo que es natural puesto que tratamos dos conceptos diferentes.

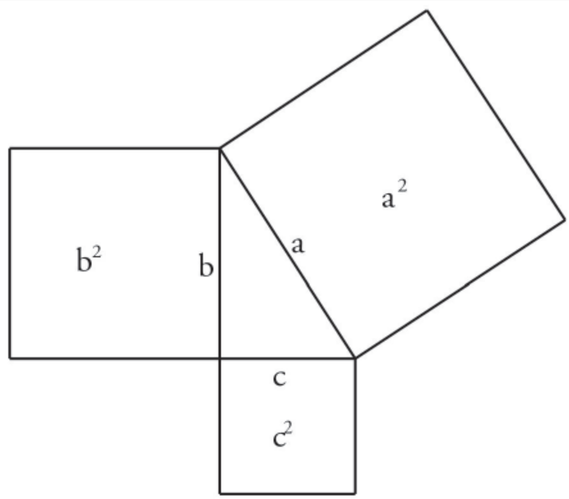



Fig. 3.8

## 3.4 Generalización metodológica

Una síntesis de la metodología que tome en cuenta los mecanismos cognitivos y la semiótica es la siguiente:

1- Se trata de incorporar un *objeto conceptual* (OC) a un *sistema de esquemas conceptuales* que es lo que hemos denominado *sistema interpretativo de partida* (SI, de aquí en adelante). Deben tomarse en cuenta dos cosas: la *estructura de generalización* correspondiente al OC, que está dado por las relaciones de generalidad del OC *necesarias* para su asimilación. Y el SI del sujeto que actúa para incorporarlo. Esto lleva a una posición sobre la recta de generalidad y a un nivel contextual determinado.

2- Introducir una *problematización* que, a partir de la presentación de un *caso* asociado al OC (por ejemplo, una terna pitagórica, el cálculo de la diagonal de una plaza rectangular), genere *preguntas*.

3- Las preguntas que se hagan los mismos estudiantes (sería lo óptimo) o sean guiadas/introducidas por el docente, deben dar lugar a un espacio de *exploración*. Esto dará lugar a la búsqueda de relaciones de generalidad que existan dentro del SI y que estén asociadas con el OC, presentado implícitamente en forma de *caso*. Es decir, a la búsqueda de hipótesis mediante *inferencia abductiva* o *significativa* (*generalización abductiva*). El contexto semiótico en esta instancia es paradigmático y, el soporte semiótico, un diagrama de presentación del *caso*.

4- Dada una hipótesis producida en la etapa previa, esto implica cierto *descubrimiento* de determinadas relaciones de generalidad que *implican una forma* a través de un *resultado* que es la aplicación de esta *forma implícita* o *en génesis* al *caso* (por ejemplo, la vinculación por una relación lineal entre algunos elementos de dos conjuntos, (i) y (iii) Fig. 3.3). Esto se expresa en un contexto sintagmático, y el soporte semiótico se da a través de un sintagma incompleto o un diagrama incompleto (pues aún no están explicitadas todas las relaciones de generalidad del concepto). Esto constituye un proceso de *generalización inductivo*.

5- En cada una de las etapas anteriores, se alcanza un equilibrio relativo, luego de una interacción entre el OC y el SI en un proceso de *asimilación* del OC por parte del SI y de *acomodación* del SI al OC. Lo mismo ocurre en la última etapa, en la que la *equilibración* se sintetiza en la elaboración plena de la *forma*. Ésta no es sino una *expresión semiótica* que contiene todas las relaciones de generalidad del OC (por ejemplo, la forma final de la que se obtienen las ternas pitagóricas o la forma algebraica del teorema de Pitágoras). Por lo tanto, el contexto semiótico es sintagmático y, el soporte semiótico, un sintagma completo o diagrama completo. En el proceso completo, se produce tanto una transformación en el SI, como en el OC: SI→SI' (un sistema interpretativo ampliado con el nuevo concepto) y OC→OC' (el objeto conceptual en su expresión de *caso* se transforma en su explicitación como *forma*[6] que es justamente lo que le permite ser parte del sistema interpretativo). La FC (u OC') determina un subsistema que podemos llamar $S_{FC}$ , dentro del sistema en que tiene lugar, que lo delimita. Por ejemplo, el conjunto de todas las ternas pitagóricas. Dentro del cual serán válidas sus propiedades. Con ello se realiza la *generalización completiva*.

6- El ciclo se completa cuando, mediante un proceso deductivo, obtenemos como casos particulares los planteados en la primera etapa y podemos deducir *consecuencias* a partir del nuevo SI'. Y se reinicia cuando, con el SI', se actúa sobre un nuevo OC" para incorporarlo repitiendo los procesos anteriores.

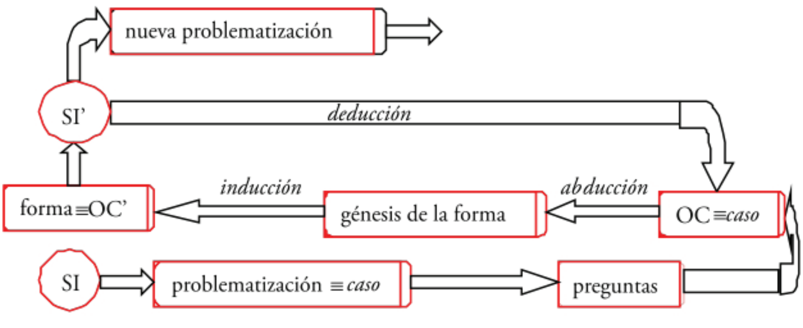



Fig. 3.9

Este proceso se puede resumir en el diagrama de la Fig. 3.9. A partir de aquí, ¿qué tipo de problemas nuevos pueden plantearse? En primer lugar, aquellos que pueden responderse en base al SI' (sistema interpretativo ampliado), que cobran sentido solo a partir de las nuevas incorporaciones conceptuales y que son consecuencias derivables de dicho SI'. El otro tipo de problemas corresponde a la incorporación de un OC no incluido en SI' y que, por lo tanto, reinicia el ciclo de asimilación conceptual.

El primer caso se puede ejemplificar con las ternas pitagóricas y el teorema de Pitágoras, dos esquemas conceptuales incorporados:

[6] También podríamos denominar a OC' como FC, es decir *forma conceptual*, de la cual el *contenido* sería el OC.

- Así como algunas de las ternas pitagóricas cumplen con la condición de que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par es 1, ahora quisiéramos encontrar las ternas para las cuales la diferencia entre los dos catetos sea 1. Éste es un problema que aparentemente no tendría sentido plantear antes de obtener la forma general de las ternas. Con esta forma, dada por la fórmula (1) para la terna *(a,b,c)*, es sencillo plantear la respuesta pidiendo que $a=b+1$ o $b=a+1$, condiciones que, luego de escasa manipulación algebraica, conducen a las fórmulas $m^2=\frac{n^2-1}{2}$ y $m^2=\frac{n^2+1}{2}$, $n$ impar, respectivamente, de las cuales se obtienen, por ejemplo, las ternas *(21,20,29), (697,696,985)…y (3,4,5),(4059,4060, 5741)…*, es decir, constituyen una consecuencia de los esquemas adquiridos.
- Se pregunta qué interpretación geométrica tiene la propiedad de las ternas pitagóricas proporcionales. Es casi inmediata la respuesta de que son los triángulos rectángulos semejantes, cuya razón entre sus lados y los lados del triángulo primitivo considerado (aquel que corresponde a la terna primitiva considerada) es igual a un natural.

De esta forma, queda planteado un esquema metodológico general para la construcción de conceptos.

# 4-Fundamento de la introducción de la asignatura Taller de Ciencia en el contexto del Curso de Apestamiento Universitario

El Curso de Apestamiento Universitario (CAU) tiene como objetivo central lograr el desarrollo de capacidades que permitan a los estudiantes una adecuada inserción en la vida académica y universitaria en general.

La transición desde el nivel medio al universitario requiere, por un lado, superar las insuficiencias formativas y cognitivas con las que llegan y, por otro lado y a partir de esta superación, la construcción de competencias conceptuales, actitudinales y procedimentales necesarias para una incorporación plena a la actividad universitaria. Para lo cual, la UNGS implementó, en una primera instancia, los Talleres de Matemática y Lectoescritura como asignaturas necesarias para tal fin. Sin embargo, su carácter formal no resulta suficiente para alcanzar plenamente los objetivos mencionados. La dimensión no formal, elaborada sobre una base fáctica-empírica (no empirista) que requiere la actividad de los estudiantes sobre contenidos específicos de las Ciencias Naturales o de las Ciencias Sociales, se torna necesaria para completar la preparación previa a su ingreso al Primer Ciclo Universitario (PCU).

Por lo tanto, el Taller de Ciencia se propone ampliar las competencias mencionadas enfatizando su carácter no formal y fáctico, pero sobre la base del trabajo ya realizado en Matemática y Lectoescritura. En efecto, a partir de las elaboraciones conceptuales previas, que posibilitan una lectura interpretativa propia de la lógica formal y de la argumentación deductiva, se realizan actividades que abordan la experiencia o la experimentación relativa a objetos de estudio inherentes a las Ciencias Sociales o a las Ciencias Naturales. Esto determina, entonces, la conveniencia de realizar el Taller al promediar o terminar con Matemática y Lectoescritura.

Naturalmente, la idea es abordar el conocimiento científico y sus métodos, tomando en cuenta la condición de inicial del curso; es decir, de forma preliminar y a partir de una concepción contextual, socio-histórica, socio-crítica e interdisciplinaria. Esta última condición, además de formar parte de una concepción, es apropiada puesto que muchos ingresantes aún no eligieron una carrera específica o podrán decidirla a partir de una visión más amplia. Por último, y dado que el Taller es desarrollado por un docente de Ciencias Naturales y otro de Ciencias Sociales que pertenecen a disciplinas específicas, la enseñanza parte de una modalidad concreta de "hacer ciencia" transmitida por ellos, así como desde una puesta en diálogo de metodologías y perspectivas epistemológicas que incluye a los estudiantes y produce un enriquecimiento colectivo en interacción.

## 4.1 Conceptualización del Taller de Ciencia

Para desarrollar una concepción del Taller de Ciencia, partimos de la idea de que la ciencia, siendo una actividad específicamente humana, es parte del conjunto de las *relaciones sociales*. No es posible ni tiene sentido una ciencia de carácter individual, aislada y estereotipada. Como tal, la ciencia tiene una génesis y un desarrollo socio-histórico y, por lo tanto, una dinámica. Es necesario, entonces, en primer lugar, dar cuenta de este desarrollo como parte del desarrollo general del *conocimiento*, como un *conocimiento específico*, que se diferencia históricamente de otras formas de conocer.

A partir de este punto, concebimos a la ciencia como *una actividad de conocimiento sistematizado*. Como tal, está dotada de una *organización* y un *procedimiento* que adquieren un carácter específico para cada ciencia particular. Por ello, la siguiente parte del Taller requiere realizar actividades que introduzcan los elementos *procedimentales* comunes de la actividad científica, es decir, de una forma general. Ello nos enfrenta, en primer término, con la necesidad de compatibilizar entre las dos áreas temáticas que lo integran: la de Ciencias Sociales y la de Ciencias Naturales.

El Taller consiste, entonces, en un *conjunto de actividades* a desarrollar por los alumnos en forma colectiva junto a los docentes que, partiendo de una *situación problemática* (tal como se da con el conocimiento en general), estimule la formulación de *preguntas*. Que vean que estas problemáticas están relacionadas con una situación de *observación* y que, a la vez, esta observación solo es posible a partir de una *teoría* como instrumento de interpretación. Que descubran que las preguntas conducen a plantear *hipótesis* y que éstas, a su vez, llevan a la necesidad de *corroboración* por la experiencia o el experimento. Que es necesario realizar *mediciones cualitativas y/o cuantitativas* para hacerlo y que esto último nos lleva al *análisis y la interpretación de datos*. Todo lo cual debe darse en el marco de un *contexto dado* y de la *formulación de un sistema coherente*, condición que le da su carácter al conocimiento científico.

Por último, y regresando al punto de partida pero en una etapa superior, el Taller debe proponer una reflexión sobre la *actividad científica* en relación con el contexto socio-histórico en forma *crítica*, por lo que se ha de plantear la relación indisoluble entre la ciencia y la sociedad.

En base a estas consideraciones, los contenidos y objetivos del Taller se pueden resumir en el siguiente cuadro de acuerdo a la formulación en su quinto año de vigencia (2009):

| **Contenidos** | **Objetivos** |
|---|---|
| **1-Ciencia y Magia** | |
| Necesidad humana de conocimiento. Explicaciones científicas y no científicas. Evolución, interrelación y diferenciación de Ciencia y Magia. Revolución científica del siglo XVII. La Ciencia y sus metodologías específicas. | Comprender las diferencias entre el conocimiento mágico y el conocimiento científico, siguiendo su génesis, su evolución común y su diferenciación con la revolución científica. |
| **2-Observación y teoría** | |
| La observación como examen de relaciones entre hechos dentro de un contexto. La teoría como instrumento de interpretación. Relación entre observación y teoría. Relación sujeto-objeto: idealismo, empirismo y dialéctica. La Ciencia de Aristóteles a Newton. Condicionamientos socio-histórico-políticos. | Reconocer y diferenciar los conceptos de observación y teoría. Comprender que la observación depende de la teoría. Lograr escribir el resultado de una observación en un enunciado. Dilucidar la interacción sujeto-objeto. Reflexionar acerca de la evolución socio-histórica de la Ciencia y los condicionamientos sociopolíticos de la misma en diferentes épocas. |

| | |
|---|---|
| **3-La hipótesis** | |
| Variables relevantes y no relevantes. Concepto de hipótesis. La pregunta como fuente de hipótesis. Hipótesis subyacentes. Clasificación de hipótesis. Validación o refutación de hipótesis. | Reconocer una hipótesis y reflexionar sobre su relación con los conceptos de observación y teoría. Ejercitarse en la formulación de preguntas que nos lleven a las variables relevantes y, de allí, a la hipótesis. Enunciar hipótesis en forma oral y escrita. Lograr identificar hipótesis subyacentes. Aprender a validar o refutar hipótesis en base a la experiencia o el experimento. |
| **4-La medición** | |
| Concepto de medición. Formas de medición. Medición cualitativa y cuantitativa. Concepto de patrón de medición. Errores de medición. Instrumentos de medición. Evolución socio-histórica de la medición. | Introducir al estudiante en el concepto de la medición y las formas que adopta en función de la ciencia considerada. Elaboración de un patrón de medición. Elaboración de una encuesta y de una entrevista. |
| **5-Análisis e interpretación de datos** | |
| El análisis como la organización de los datos ya interpretados. La interpretación como enunciado que vincula los datos analizados a partir de la teoría. Relación dialéctica entre el análisis y la interpretación de datos. Concepto de fuente de información. Tipos de fuentes. Trabajo de interpretación en Ciencias Sociales y de modelización en CienciasNaturales. | Lograr organizar datos utilizando cuadros, tablas u otros esquemas (análisis). Lograr interpretar los datos organizados en un análisis mediante la escritura de un enunciado que exprese una conclusión (este punto incluye la habilidad para escribir en un enunciado el resultado de una experiencia o un experimento). Aprender a realizar análisis e interpretación de datos a partir de fuentes en Ciencias Sociales, diferenciando los análisis cuantitativos de los cualitativos. Aprender a modelar en base al análisis y la interpretación de datos de experimentos en Ciencias Naturales. |

| 6-Ciencia y Sociedad | |
|---|---|
| Relación entre la actividad científica y las prácticas sociales. Usos tecnológicos y prácticas sociales. Demandas sociales de innovación tecnológica y transformaciones de las prácticas sociales por vía del desarrollo tecnológico. Ética y producción científica. Neutralidad del avance científico y límites éticos a su desarrollo. Saber científico y crítica social. Objetividad y manipulaciones del discurso científico. | Introducir en el estudiante la idea de relación constitutiva de la producción científica y sus condicionantes sociales. Promover una perspectiva dialógica para comprender dicha relación en cada uno de sus ítems: innovación tecnológica y prácticas sociales; producción científica y límites éticos; discurso científico y manipulaciones retóricas. **Recuadro 1** |

Algunas de estas actividades, así como la presentación del proyecto de investigación, son presentadas en el Apéndice 3.

## 4.2 Semiótica y mecanismos cognitivos

Aquí serán aplicables mecanismos del mismo tipo que los tratados hasta ahora. Pero la naturaleza de su contenido será diferente. En primer lugar, ¿de qué hablamos cuando hablamos de *objetos* en ciencias fácticas? Evidentemente nos referimos a elementos del mundo en el que estamos insertos y con el que interactuamos, incluyéndonos. Cualquiera de los elementos que podamos tomar de la naturaleza o de la sociedad se expresa en forma de *conceptos*. Los objetos que provienen de la *experiencia*, en nuestra interacción con el mundo, no se pueden aprehender en forma directa (empirismo), sino que son *conceptualizados* mediante *signos*. Es decir, los objetos son *semiotizados*. Y cuando nosotros interactuamos con ellos, lo hacemos a partir de esta semiosis; nuestro sistema interpretativo (SI) solo los puede asumir como objetos conceptuales (OC). Y su naturaleza es diferente porque los mismos tienen una base *empírica* y no puramente formal. Podemos, entonces, hacer una diferenciación denominándolos objetos conceptuales empíricos (OCE), es decir, con base empírica. El OCE surge de una interacción nuestra con el objeto a partir de una elaboración de nuestro SI, a la que llamaremos *observación*. Por eso es que, también, podemos llamar a los objetos de base empírica como *observables*. Un observable es un OCE. Es decir, aunque el objeto tenga una base empírica, su *conceptualización* o *semiotización* es una construcción del SI a partir de nuestra interacción con él mediante la observación, y no hay, en la concepción constructivista, otra posibilidad. A partir de aquí se repite el bloque de inferencias: Bloq. Inf. : *abducción→inducción→deducción*, del cual resultará el objeto conceptual modificado y el sistema interpretativo modificado OCE' y SI' respectivamente, luego de un proceso de asimilación-acomodación a través del bloque. A diferencia de lo que ocurría con Matemática, donde el OC y la forma se confundían dado el carácter formal de dichos objetos, aquí la separación de *forma* y *contenido* resulta esencial; y su *equilibración* (del sistema de relaciones formales y el sistema de relaciones causales que implica cada concepto) en el proceso de desarrollo es una de sus características (García, 2000). En el bloque de inferencias, la inducción corresponderá a lo que Piaget-García (2000) denominan *abstracción empírica*, en tanto que la generalización completiva o deducción corresponde a la *abstracción reflexiva*. Las *formas* están asociadas a las *acciones del sujeto*, es decir, las consideramos *endógenas*. Mientras que los *contenidos* se corresponden con el objeto conceptual empírico y, por lo tanto, tienen un carácter *exógeno*. Desde el punto de vista semiótico, no cambian los contextos asociados a cada tipo de inferencia de acuerdo a la tabla III de la sección 2.5. Y el tipo de expresión sintagmática dependerá de la ciencia fáctica particular de que se trate y del grado de generalidad alcanzado (en las que pueden predominar los enunciados, los símbolos, los argumentos o una *multiplicación* de signos de la tabla I de 2.5) de modo que el proceso interactivo pueda ser representado por el diagrama de la Fig. 4.1

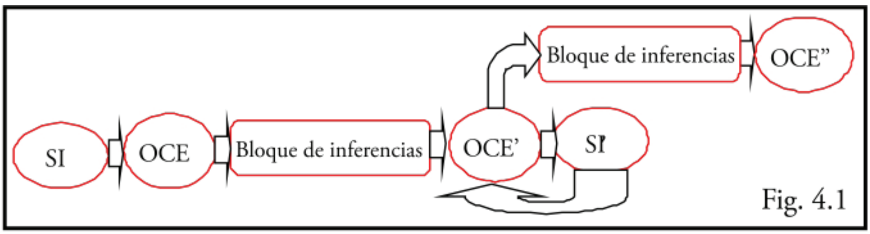



Fig. 4.1

El sujeto a través del SI actúa sobre el OCE y luego de los procesos inferenciales del bloque de inferencias, resulta el OCE' asimilado por el SI', el que a su vez se ha acomodado al OCE'. Dicho proceso se reinicia, dando lugar a un nuevo ciclo que produce un nuevo OCE".

De acuerdo a la clasificación que hacen Piaget-García (García, 2000), podríamos tener la siguiente caracterización del SI y el OCE, cuya interacción ellos señalan (p. 138):

OCE { Observación del objeto: Constataciones sobre el objeto
Coordinación del objeto: asignación de relaciones causales

SI { Observación de las acciones del sujeto o de sus conceptualizaciones: toma de conciencia
Coordinación de las acciones del sujeto o de sus esquemas

Una aclaración importante que no está explicitada en el diagrama, es que el proceso de constatación y observación del OCE, en cualquiera de sus niveles, toma en cuenta "las novedades" que se presenten, a través de la abducción, que es el estadio de las hipótesis. Estrictamente, tal como señalamos en el diagrama representativo de la conceptualización de la Fig. 3.9 para los conceptos formales, en relación con los objetos empíricos, durante la observación se da la secuencia *SI → Observación≡caso → preguntas → bloque de inferencias* , o la secuencia *SI → Observación≡caso → preguntas → abducción → constatación → bloque de inferencias*. Porque las hipótesis podrían ser incorporadas a la teoría, previamente a la constatación, o luego de la constatación, pero, necesariamente, deben subordinarse a ella. Los instrumentos de constatación son propios de cada ciencia específica.

Estas características señalan una diferencia fundamental con los objetos conceptuales formales como, por ejemplo, los matemáticos: las *constataciones* sobre los objetos realizadas en base a la *teoría* (SI) son requeridas para la *validación de las hipótesis* o, eventualmente, para su *reformulación*, que puede ser parcial o total y, naturalmente, reformula la teoría. Por lo tanto, la *generalización abductiva* que surge en el momento de la *observación*, será la vía de reintroducción de hipótesis y, por lo tanto, de adquisición de nuevo conocimiento que no sea derivable del sistema completivo ya estabilizado.

## 4.3-Metodología

Se plantea una concepción genérica (en parte aplicada ya en la UNGS) que tome en cuenta algunos de los aspectos discutidos previamente.

A) Imbricación significativa de conceptos. Pedagogía fractal

El aprendizaje se basará, pues, en una reflexión dialógica interactiva y colectiva que tome en cuenta los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje caracterizados previamente. En primer lugar, se tomará el cuadro de contenidos y objetivos como un *sistema conceptual* que irá desplegándose, trabajando primero con objetos específicos, por ejemplo, la descripción del aula en Observación y Teoría (OyT) que comience con sus atribuciones (intra), siga con las relaciones generadas en su seno (por ejemplo, docente-alumno, inter) y finalice con el aula como concepto (trans) y, a su vez, permita distinguir las distintas visiones que muestren que la observación depende de la teoría. En situación de aula, se puede verificar esta secuencia cuando los alumnos desarrollan las consignas. En efecto, cuando los diferentes grupos realizan la caracterización del aula, éstas pueden clasificarse según la secuencia IaIrT. Las unidades 1 y 6 constituyen el contexto socio-histórico del desarrollo que va desde la unidad 2 hasta la 5 inclusive. Mencionemos, entonces, una característica a la vez interesante e importante de los conceptos involucrados en estas unidades: cada uno de ellos está *imbricado significativamente* por *inferencias significativas* que los convierten en *mutuamente necesarios*. En efecto, la *observación y la teoría* presuponen *hipótesis*, y todas ellas requieren *mediciones* sin las cuales no sería posible el *análisis e interpretación de datos*. De manera que forman un sistema complejo, es decir, *interdefinido* (García, 2006). Esto implica que la consideración de un concepto está tomando de alguna forma en cuenta a los otros y, por lo tanto, aparecen como solidarios o inseparables; es el *conjunto de conceptos* que definimos como sistema lo que cobrará toda su significación. Pero, a su vez, cuando considere alguno de ellos, no lo podré hacer sin la vinculación significativa con los otros que, por lo tanto, estarán también presentes implícita o explícitamente. Esta imbricación da lugar a la siguiente idea: se realizará el proceso 2→5 (p25) partiendo siempre de lo empírico mediante la experiencia o el experimento, para ir desarrollando el *concepto*. Cada unidad del p25 constituye el concepto a desarrollar. Pero, a su vez, se aplica el p25 en cada una de las unidades. Cada uno de los conceptos involucrados en el p25 se dará, entonces, como *concepto anticipado* o *concepto elaborado* en relación con la unidad en la que nos encontremos trabajando. Por ejemplo, en OyT se realizan actividades que piden identificar hipótesis y, en este caso, se lo hace como concepto anticipado pues se abordará plenamente en la siguiente unidad; mientras que en la unidad de Hipótesis se proponen actividades de observación, que es un concepto ya elaborado en la unidad anterior. Es lo que podríamos denominar una *pedagogía fractal*, la cual es perfectamente aplicable en este *esquema cíclico* (es cíclico pues, llegado al punto 5, debe reiniciarse en 2 en cada concepto nuevo que se esté adquiriendo, pero en el punto de reinicio se está ya en un nivel conceptual superior en relación con el punto de partida). El SI con el que los estudiantes abordan las actividades se verá conducido, entonces, a recorrer el camino planteado, y su sistematicidad lo llevará a "acomodarse" a los nuevos objetos conceptuales que, a su vez, son asimilados en un proceso de equilibración como los que venimos describiendo.

B) Implementación metodológica

En primer lugar, y dada la modalidad de Taller, éste estará centrado en las *actividades de los alumnos*, quienes formarán grupos de trabajo. Estos grupos, a su vez, sostendrán una discusión colectiva con los docentes de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales que están al frente de cada curso. Las actividades de cada unidad estarán centradas en el concepto correspondiente; y se tratará de que haya al menos una actividad en cada unidad en la que pueda aplicarse el esquema cíclico enunciado en el punto anterior. Las actividades tendrán una base empírica mediante la experiencia o el experimento, en situaciones sencillas –e incluso cotidianas– que no requieran sofisticación intelectual ni instrumental. Paralelamente, se propondrá a cada grupo desarrollar un *proyecto de investigación* en base a una serie de temas del área de Sociales y Naturales (que ellos elegirán libremente, ver Apéndice 3), los cuales se les presentarán antes de comenzar la unidad 2. La idea es, otra vez, aplicar el esquema cíclico, convergiendo el final de la elaboración del proyecto con la unidad 5. Naturalmente, los docentes guiarán la tarea. Tanto las actividades, como los temas de los proyectos de investigación, partirán de *situaciones problemáticas* que serán introducidas conjuntamente con *preguntas* y siempre sobre una *base empírica*. Cada grupo expondrá el proyecto en la última clase, el cual será puesto en discusión colectiva. Se estima que cada unidad insumirá 4 horas y que debe quedar el tiempo suficiente para que además, de las actividades propias de cada unidad, los grupos puedan trabajar con su proyecto de investigación.

Siguiendo la misma línea, en la unidad 3 de Hipótesis, se presentará a los alumnos una actividad sobre la *caída de los cuerpos* que debe ser realizada por los alumnos, parte en la clase y parte fuera de ella, con el esquema cíclico. Esta actividad debe conducir a los alumnos al planteo del problema de la caída de los cuerpos, su precisión a partir de observaciones sencillas y en base a su SI, la introducción de preguntas y variables relevantes, la enunciación de hipótesis y la realización de experimentos sencillos para su validación o refutación, que incluyan mediciones y análisis e interpretación de datos. Hay varias razones para impulsar esta actividad: en primer lugar, por su decidido peso histórico en el desarrollo de la ciencia, aspecto histórico que debe jugar un rol central en el Taller. Luego, porque los alumnos que no elijan un tema en el área de Naturales tendrán la oportunidad de incursionar en el área aquí. Por último, porque al utilizar el esquema cíclico, les sirve como soporte para su trabajo con el proyecto de investigación. Con este objeto, es necesario que entreguen un informe al comenzar la unidad 5 para que, a partir de allí, el docente pueda hacer una devolución. Hay que destacar que en esta metodología, en la cual se anticipan algunos conceptos, éstos son completados posteriormente.

En la actividad anterior, tanto como en los proyectos y en diversas actividades del Taller, hay dos puntos centrales: a los estudiantes les cuesta mucho elaborar una hipótesis en *forma de enunciado*, lo mismo puede decirse en cuanto a la transcripción en forma de enunciado de los resultados de una experiencia o de un experimento. La razón es que, como fue señalado en A, para ello es necesaria una abstracción reflexiva. Es por esto mismo que debe solicitárseles escribir una hipótesis o un resultado en forma de enunciado. Aquí, el tema del lenguaje según Vygotski (1995) juega un rol central. Justamente, y sobre la base de la experiencia en análisis de textos ya adquirida en Lectoescritura, varios de los objetivos se realizarán mediante el trabajo sobre textos en los que se desarrollen los conceptos básicos del Taller y que hayan sido introducidos a tal efecto, o que constituyan fuentes de información del proyecto de investigación o de las distintas actividades.

Por último, la escritura en enunciados de los resultados de la observación implica el *análisis y la interpretación de datos*. Si bien ambos se desarrollan de manera simultánea y entrelazada, podemos convenir en llamar *análisis* a *la organización de los datos*, según diferentes categorías en tablas (como en el caso de una encuesta o de un experimento en el que se hacen mediciones), y reservar la palabra *interpretación* para la *conclusión* o *enunciado* (observable) que resulta de la observación y que podrá luego contrastarse con la hipótesis. Al respecto, *la teoría* de la cual siempre depende la observación (tal como se trabajará en el taller) constituye *el instrumento de interpretación*.

## 4.4-Un ejemplo: la caída de los cuerpos

Un ejemplo ilustrativo que mencionamos antes es el de la caída de los cuerpos. Se plantean preguntas motivadoras acerca del hecho cotidiano de que los cuerpos caen y planteando qué factores influyen en su caída. Luego de una discusión colectiva de ejemplos sobre cuerpos que caen y factores que influyen, se sistematiza la actividad pidiéndoles que respondan a las consignas del recuadro 2. La dificultad mayor de elaborar este concepto es que está tan naturalizado que se presenta como extraña la pregunta sobre qué es la caída de los cuerpos. Los estudiantes en algún momento logran definir operativamente la caída, a partir de colocar un cuerpo a determinada altura y soltarlo. Posteriormente, llegan al concepto de velocidad, trayectoria y tiempo de caída (hasta chocar con el piso) como aspectos de la caída. Solo después introducen factores que podrían influir en la caída. Los que aparecen como más habituales en las respuestas son el peso del cuerpo, la forma, el aire o “el viento”. Obsérvese que estamos en la etapa que se centra en los atributos (Ia) y a partir de la cual realizará la abducción. Ésta consistirá en relacionar algún aspecto de la caída con algún factor. El postulado clásico que, además, sigue a la historia misma del concepto, es afirmar que los “cuerpos más pesados caen más rápido”. Esto se reformula como: “si un cuerpo es más pesado, su tiempo de caída es menor”, lo cual, en el momento de la observación, se traducirá en tomar dos cuerpos de diferentes pesos y decir que el más pesado tardará menos en tocar el piso que el más liviano. Esta afirmación, para muchos, más que una hipótesis a ser verificada, es casi una preconcepción. Es decir, forma parte de sus estructuras de pensamiento (T). Los estudiantes utilizan elementos que tienen a mano, como cartucheras y reglas, gomas, cuadernos, etc. Aquí, se plantean varios temas: dado que habían seleccionado la *forma* del cuerpo como una variable, están tomando dos factores que cambian a la vez en lugar de uno con los demás invariantes. Al intentar resolver esta cuestión, es común que tomen una hoja A4 y la abollen mientras la otra queda intacta y comparen la caída de las dos. Pero, aquí aparece otro de los factores que tomaron en cuenta como, por ejemplo, el aire. Deben resolver, entonces, esta superposición de factores a la hora de comparar. Otra

| |
|---|
| 1-Fijar un contexto asociado al tema. Esto implica la elección de un ámbito en el que el fenómeno pueda visualizarse o representarse, y del que puedan detallarse sus aspectos relevantes. ¿Qué elementos están presentes en ese ámbito y qué objetos caen? |
| 2-Plantearse preguntas conductoras que permitan precisar el concepto de caída en un contexto dado. Esta necesidad de precisión será cada vez mayor cuando comiencen a plantearse hipótesis y experimentos para verificarlas o refutarlas. *¿Qué es la caída de los cuerpos, qué aspectos la definen? ¿La Luna, está cayendo a la Tierra?* |
| 3-Plantearse preguntas conductoras que permitan establecer una hipótesis acerca del fenómeno, para lo cual es necesario establecer una variable de la que pueda depender la caída de los cuerpos en función de la definición anterior. *¿De qué factores o variables depende la caída de los cuerpos? Introducir un factor.* |
| 4-Introducir una hipótesis acerca de cómo influye el factor anterior en la caída de los cuerpos. *Vincular o relacionar un aspecto del movimiento encontrado en 2 con el factor introducido.* |
| 5-Escribir la hipótesis en un enunciado. |
| 6-Plantear un experimento para verificar o refutar la hipótesis. Al hacerlo, se deberán seguir aproximadamente los siguientes pasos: *1- precisión de la definición de caída (¿se deja caer el cuerpo, cómo, desde qué altura, bajo qué condiciones ambientales?); 2-definición de los cuerpos (y sus características, las cuales se utilizarán en el experimento en función de la hipótesis); 3-aspectos a tomar en cuenta de la caída, en particular aquellos que entren en la hipótesis (por ejemplo, la velocidad, el tiempo de caída, la trayectoria, etc.); 4-elaboración de un procedimiento para el experimento que tome en cuenta las etapas (por ejemplo, colocar dos cuerpos a tal altura, dejarlos caer simultáneamente, observar cuándo un cuerpo llega al piso); 5-evaluar los instrumentos de medición a usarse (observación visual, reloj, cinta métrica, etc.); 6-evaluación de los posibles errores del experimento, tanto por el procedimiento utilizado como por los instrumentos de medición; 7-ejecución del experimento de acuerdo a los pasos previos.* |
| 7- Escribir con precisión el resultado del experimento mediante un enunciado. *Este enunciado contendrá los mismos elementos vinculados en la hipótesis en el punto 2.* |
| 8-Comparando el enunciado del resultado del experimento con la hipótesis, *concluir la validación o la refutación de la hipótesis.* |
| 9-Introducir una nueva variable y recomenzar el paso 4. |
| 10- Luego de haber repetido el procedimiento con al menos dos variables, escribir un informe que contenga los distintos pasos. |
| 11- Plantear un cuestionario con las preguntas que puedan surgir en cada una de las etapas y en especial las siguientes: *1- ¿Es posible explicar cómo caen los cuerpos? 2- ¿Es posible explicar porqué caen los cuerpos?* |

de las cuestiones tiene que ver con la necesidad de medir tiempos y alturas. Aquí lo resuelven evaluando estas medidas en forma cualitativa a través de los sentidos, o utilizan, por ejemplo, un cronómetro y una forma de asegurar que sueltan los cuerpos desde la misma altura. Como parte de la actividad se hace fuera del aula, algunos grupos buscan lugares con mayor altura y con otros elementos de medición, como el metro, etc.

Vemos que se realiza el p25 cuando, en situación de observación, realizan el experimento, habiendo establecido la hipótesis, y toman los datos de la medición, cuyos resultados serán interpretados para validar o refutar la hipótesis. Logran, finalmente, separar los factores o variables relevantes y concluir, por ejemplo, que, a menos que la resistencia del aire influya, los cuerpos tocarán el piso al mismo tiempo, independientemente de su peso (¡todo un descubrimiento para muchos!). Esta conclusión es un resultado del bloque de inferencias: planteo de la hipótesis para dos cuerpos específicos → confirmación del resultado para los dos cuerpos específicos que por inducción empírica se trasladará a todos los cuerpos →incorporación de la conclusión en forma genérica (ocurre para todos los cuerpos) al SI que se transforma, así, en SI'. La situación intermedia será la fase Ir y, la última, T.

De esta forma, con elementos sencillos y que plantean muchas variantes, esta actividad termina siendo una de las más ricas para conceptualizar el ciclo y el método en el caso de Ciencias Naturales. Con elementos más sofisticados se pueden hacer experimentos más precisos y trabajar otros conceptos como, por ejemplo, los errores de medición.

# 5-Conclusiones

## 5.1 En relación con el diagnóstico en Matemática

En primer lugar nos referimos al diagnóstico realizado en el segundo capítulo.

Los resultados muestran que las estructuras cognitivas de la mayoría de los estudiantes, entendidas como esquemas conceptuales de asimilación en relación con los conceptos de Matemática del ingreso, se caracterizan por una insuficiencia de estructuras de generalización, tal como las definimos. En particular, no completaron la estructura de generalización aritmética. Tampoco, tienen incorporado el número irracional ni el racional como objetos conceptuales. La suma de fracciones se plantea básicamente como una regla mecánica.

Sin embargo, la mayor dificultad, para quienes se caracterizan por estas insuficiencias, reside en no tener un dominio de lo semiótico, en el sentido de conocer las representaciones simbólicas y las relaciones de generalidad entre los distintos signos involucrados en una expresión matemática sintagmática (la que –se supone– les fue definida convencionalmente). Y, por lo tanto, no reconocen el *contexto semiótico*, imprescindible para la asimilación significativa. Por ejemplo, no haber incorporado la definición de radicación y/o potenciación. No conocer las jerarquías de las operaciones, ni la forma correcta de funcionamiento de los intercaladores. Una prueba de ello es que, frente a esta situación, varios *redefinen* las operaciones que no conocen, por ejemplo, dividiendo a un número por dos en la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, o multiplicando por dos si se trata del cuadrado de un número. Y, luego, son consistentes con estas definiciones. Esto es, intentan aplicar los esquemas previos más elementales referidos a los números enteros (por ejemplo, las operaciones de suma, resta, producto y cociente) a objetos conceptuales más complejos como los racionales o los irracionales. Lo cual puede verse como una *abducción* por la cual, a partir de un caso, asumen una regla que, aplicada al caso, produce un resultado. Esta misma consistencia la ponen de manifiesto al resolver el problema xx, el cual 27 estudiantes resuelven en la forma esperada, aunque 17 de ellos recurren a un método gráfico que es, justamente, el soporte semiótico de menor grado de generalidad en relación con el planteo y la solución del problema.

Para los estudiantes, significa un fuerte salto de abstracción la introducción del concepto de *variable*, que se presenta mediante operaciones con expresiones algebraicas. Aun las más elementales. Nuevamente, algunos recurrirán a una lógica de clases propia de la etapa de operaciones concretas en el sentido piagetiano para resolver los ejercicios, por ejemplo, al sumar dos variables idénticas como en el ítem xvii. Pero si la operación se complejiza como en el caso de la suma de los cuadrados de una misma variable, algunos vuelven a redefinir operaciones, ya sea porque lo hicieron previamente, o porque el aumento de complejidad los lleva a esa interpretación a pesar de haber aplicado la operación correcta con números enteros concretos. Es que operar algebraicamente implica ya un grado de generalidad superior a operar con números concretos. Y la variable en sí misma es un sintagma que establece una relación con un conjunto numérico dado por medio de la operación de reemplazo, lo cual, sin embargo, está implícito. Cuando de alguna forma el estudiante "concretiza" la variable, lo que implica descender en el grado de generalidad, logra operar como lo hace con las cosas: es decir, si son de la misma especie podrá sumarlas. Pero ya no se ve la analogía con una potencia de la misma.

Para ver con mayor claridad la vinculación de la asimilación conceptual con la semiótica, sugerimos la idea de variable a partir de su introducción en un *contexto semiótico* dado. Ello se hace a través del ejercicio xix con cinco subítems. Cuando el estudiante reconoce el *sintagma*, puede identificar el rol que juega la variable en el mismo. Tal como ocurre, por ejemplo, con la base de la potencia en la situación 2 (subítem ii). Nos encontramos frente a un *contexto sintagmático*. Pero cuando no se identifica la expresión a través de relaciones de generalidad precisas dadas en un sintagma, sea porque no están establecidas con claridad, como en el subítem i, en el que solo aparece una $x$, o porque no se las reconoce, como en el subítem iii, en el que la $x$ convencionalmente representa el radio de un círculo, entonces, el estudiante puede seleccionar, entre un conjunto de *relaciones de generalidad* que conoce, aquellas que *para él* sean las representadas por los signos. Por ejemplo, en el caso del subítem iii, algunos estudiantes identificaron la $x$ con un punto del círculo. Estas relaciones son, entonces, de tipo *paradigmáticas* y estamos frente a un *contexto paradigmático.* Cuando los estudiantes redefinen las operaciones conocidas, actúan en dicho contexto.

Los resultados del diagnóstico demuestran, sin embargo, que no tienen incorporado el concepto de *variable*. En general, o no pueden generalizar las operaciones con *indeterminadas*, o no asumen la operación implícita de reemplazo en un conjunto numérico, o asocian la variable a un procedimiento, por ejemplo, despejar la $x$ en una ecuación, pero no reconocen su rol de variable en la igualdad.

Interpretados en conjunto, con los elementos que disponemos en los mismos, los resultados nos inclinan a pensar que la principal traba es de *tipo semiótica* y *no de tipo cognitiva*. En efecto, la mayoría de los estudiantes son capaces de aplicar los esquemas ya adquiridos al problema presentado, pero al no conocer las relaciones de generalidad de un sintagma dado, *las redefinen*, en un contexto paradigmático, para resolverlo. Esto es apoyado también por el problema xx, que la mayoría de estudiantes resuelve bien aunque, para ello, se apoyen en una representación diagramática de menor grado de generalidad. Es decir, se trata de una imposibilidad de lectura simbólica que tiene como consecuencia no completar las estructuras de generalización correspondientes, lo que se convierte en una imposibilidad de tipo cognitiva. Esto no constituye una sorpresa, dado que *ambos aspectos son indisolubles*. Aunque *intrínsecamente* tengan la posibilidad de conceptualizar. Pero estaría indicando una falencia que debe ser abordada para *destrabar* el aprendizaje. *Es tan necesario lograr que comprendan las relaciones de generalidad de los conceptos matemáticos, como los signos que los representan en un sintagma*. Justamente porque cuando trabajamos con sintagmas, estamos asumiendo que ellos interpretan dichas relaciones. Pero la famosa frase de "esto es chino" se aplica a muchos de estos estudiantes, y tiene el significado que se acaba de precisar. Y, por lo tanto, sería necesaria una *alfabetización simbólica*. Lo que no obsta para que hayan podido, aunque no necesariamente, adquirir en parte el concepto dado por esquemas diagramáticos. Solo en forma incompleta, de acuerdo a la teoría que esbozamos acerca de la asimilación conceptual. Justamente, para poder dar un camino conducente a la alfabetización simbólica ligada a los mecanismos de conceptualización, hacemos de éstos la continuidad de nuestras reflexiones.

## 5.2 En relación con los mecanismos de conceptualización y la semiótica

¿Por qué se postula la *indisociabilidad* de los tres tipos de generalización presentados en este texto, la primera de las cuales, la *abductiva*, se introduce? ¿ Por qué el orden es abducción, inducción, deducción? ¿Si son indisociables, no debería haber simultaneidad? ¿Por qué Piaget-García no consideran la abducción entre las generalizaciones planteadas?

En primer lugar, digamos que si *conceptualizar* es *generalizar*, necesariamente esto debe darse a través de *formas de generalización*. Pero éstas están asociadas a las *inferencias*. Los tres tipos de inferencias señalados por Peirce pueden ser caracterizados, como lo hicimos en el capítulo 2, a través de la terna (*caso, resultado, regla*). Estos tres elementos están presentes en cada una de ellas. Por lo tanto, necesariamente son indisolubles y, por ello, cuasi simultáneas. Entonces, las tres forman un *sistema interdefinido* (García, 2006). Sin embargo, y aceptando los mecanismos cognitivos que Piaget-García (1984) postularon para la conceptualización, tanto en la psicogénesis como en la historia de la ciencia, ésta avanza según el orden Ia→Ir→T. Para poder abducir nos *centramos* en los *casos* mediante los *atributos* del OC. Luego, lo hacemos en los *resultados* mediante las *relaciones* y, por último, en la *regla* mediante la coordinación de todas las relaciones. Es decir que, si bien los tres elementos están presentes en cada forma de inferencia, el equilibrio y la consolidación de cada una *sí tiene una vección*, dada por el orden de los mecanismos citados. Lo cual rompe con la simple *causalidad* positivista. Es *el sistema el que configura al concepto*. Y hay razonamiento *proactivo* (hacia adelante) y *retroductivo* (hacia atrás). Sin regla, que en este caso tomará el carácter de hipótesis, no puedo abducir frente al caso en una observación. Pero esta regla no está consolidada ni *coordinada* al interior del sistema interpretativo (SI). El ejemplo de las ternas pitagóricas en el capítulo 2, clarifica esta cuestión. Cuando se buscan y encuentran casos de cumplimiento de la relación pitagórica, un proceso de *comparación* entre casos da lugar a las distintas hipótesis, como la de una componente par y las otras impares, entre ellas, la hipotenusa. O la diferencia constante entre la hipotenusa y el cateto par, etc. La segunda etapa sería el establecimiento de las relaciones, primero, con ejemplos usando los casos y, luego, con la abstracción de la forma. Pero la forma final no solo tendrá una representación más elaborada, sino que se coordinará con todas las formas ya adquiridas en la tercera etapa. Solo en este caso quedará estabilizado el concepto. En esta situación, las etapas previas adquieren un carácter de *necesarias* y, por ello, se convierten en casos particulares en un sistema deductivo. Son justamente estas interdefiniciones conceptuales las que dan fundamento al método de la pedagogía fractal esbozada en el capítulo 4. También, hay que señalar que esto sigue, aproximadamente, las ideas de Piaget-García y Vygotski acerca de *comprensión significativa* por relaciones de generalidad en un sistema, a la vez que *explicativas*, en tanto *mecanismos de asimilación* por un sistema en un contexto (social, cultural, etc.), construyen estos significados, que alcanzan una estabilidad relativa mediante el proceso de *equilibración*.

En relación con la no inclusión por parte de Piaget-García de lo que denominamos *generalización abductiva*. Tanto la abducción como la inducción están centradas en los *datos*, esto es, en los casos y/o las observaciones según la ciencia considerada. En tanto que la deducción se refiere ya a un aspecto formal, del cual los datos son casos particulares. Por ejemplo, en el caso de las ciencias fácticas, los datos u *observables* deben ser constatados por la experiencia. Por ello, creemos que, en una primera instancia, Piaget-García consideraron a estas dos inferencias como una única, que es la inducción. Sin embargo, en una de sus últimas obras antes de la muerte de Piaget (Piaget-García, 1997, p. 114), éste señala la necesidad de un razonamiento "retroactivo", justamente mencionando a Peirce, debido a la imposibilidad de explicar las diversas conexiones significativas solo por la lógica deductiva. Esto está claramente señalado por Hernández Ulloa (2008), tratando de presentar la equilibración piagetiana como un razonamiento abductivo. Aunque, este autor, no explica como entran los otros dos razonamientos de la obra piagetiana –la inducción y la deducción– en este proceso. Diferenciarlos es, pues, un análisis más fino del mismo proceso cognitivo. Esto permite dilucidar con toda claridad cómo se conjuga la introducción de hipótesis con los demás mecanismos. De la misma forma, hay detalles de la obra piagetiana-garciana sobre la equilibración no considerados explícitamente en este trabajo, aunque, naturalmente, están presentes en ella. Finalmente, es importante repetir que este bloque de generalizaciones se da cuando se incorpora una *novedad* al sistema interpretativo, en el sentido de que no es producto de un sistema deductivo estabilizado sino, justamente, cuando éste se desestabiliza por la novedad.

Con respecto a la semiótica, ya vimos en los capítulos 2 y 3 que el grado de generalidad del soporte semiótico tiene relación con estas formas de generalización, existiendo un escalamiento que va de lo icónico a lo simbólico. Y que, por esta razón, las *formas diagramáticas* constituyen instrumentos efectivos para ello. Cuando hablamos de *alfabetización simbólica*, nos estamos refiriendo a un proceso por el cual las relaciones entre signos se van desplegando progresivamente, pero van adquiriendo *significación* en un sistema en construcción. Esto es así en cualquier sistema de alfabetización como, por ejemplo, en el *Método de lectura gradual* de Sarmiento (2011) de 1882. Desde la pura representación icónica, nos dirigimos al sintagma simbólico, pero de tal forma que nos permita ir enfocando cada signo que queramos incorporar. La alfabetización misma sigue las etapas cognitivas señaladas.

Por último, si bien esta elaboración teórica en relación con los mecanismos se basa, en parte, en el mismo diagnóstico del capítulo 2 y en la experiencia docente general, así como en la base empírica de los autores mencionados, debería ser constatada y profundizada a través de trabajos de campo específicos, lo que hace a la continuidad de este trabajo.

# Apéndice 1
# El Curso de Aprestamiento Universitario y el perfil de sus estudiantes

El Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) consta de tres materias destinadas a proyectar a los futuros estudiantes de grado para su ingreso a la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS); siendo su aprobación un requisito para el acceso a cualquier Mención del Primer Ciclo Universitario (PCU), primera etapa de todas las carreras de grado que componen la oferta académica de la Universidad. De acuerdo a su Plan de Estudios, los objetivos del CAU consisten en[7]:

*a) la formación de competencias básicas asociadas a ciertas áreas de conocimiento, consideradas indispensables para introducirse en los estudios universitarios;*

*b) el tratamiento de contenidos básicos propios de esas áreas;*

*c) la socialización de los estudiantes respecto de la Universidad y su proyecto, así como el desarrollo de una cultura del trabajo universitario.*

En este marco, el **Taller de Ciencia** se inserta "orientado al desarrollo de las capacidades de observación, comparación, descripción, análisis y experimentación"[8]; complementando la formación en **Matemática** (destinada a desarrollar la capacidades lógico-analíticas y de abstracción) y en **Lectoesctritura** (destinada al desarrollo de capacidades lectoras y de producción textual).

El diseño del CAU pretende responder a algunas de las dificultades formativas más difundidas entre los ingresantes a la Universidad, según caracterizaciones obtenidas en estudios, entrevistas y encuestas realizadas por Investigadores-Docentes de la UNGS y su Secretaría Académica, algunas de las cuales se toman como referencia para esta *Propuesta pedagógica*.

De dichas caracterizaciones, algunos elementos destacables son los siguientes:

---

[7] UNGS (s/f), p. 1. Junto a la bibliografía citada en estas páginas, se cuenta para la realización de esta caracterización con la experiencia provista por el ejercicio de la docencia en diez comisiones del Taller de Ciencia, tanto en el *campus* de Los Polvorines como en las subsedes San Fernando y Moreno, desde octubre de 2007 hasta la fecha.

[8] UNGS (s/f), p. 1.

- *Estudiantes provenientes, en un alto porcentaje, de hogares de bajos ingresos.* Alrededor de un 80% de los estudiantes de la Universidad provienen del ex partido de General Sarmiento, compuesto por los actuales partidos de San Miguel, Malvinas Argentinas y José C. Paz que integran el segundo cordón del conurbano bonaerense, en donde se registran niveles de pobreza e indigencia entre los más altos del Gran Buenos Aires y del país. Testimonios de las dificultades concretas que un bajo nivel de ingresos implica para afrontar una carrera universitaria –costeo de viáticos, apuntes y otros gastos sumado a múltiples percances atribuibles a la misma causa– abundan en los estudios realizados por la Universidad[9]. (Cabe señalar que la Universidad cuenta con un sistema de becas de estudio a efectos de paliar esta dificultad.)
- *Estudiantes provenientes de instituciones de nivel medio con fuertes déficit materiales, docentes y pedagógicos*. Los relatos en este sentido por parte de los estudiantes abundan, tanto en lo referente a la baja calidad de la educación formal recibida, como a la fuerte distancia cualitativa entre técnicas y lógicas de estudio propias de la formación media y de grado[10]. (Cabe destacar que los Profesorados que integran la oferta académica de la Universidad –así como diversas actividades de articulación con escuelas medias– fueron concebidos, entre otras consideraciones, en función de dichos déficit.)
- *Estudiantes provenientes de hogares de bajo o muy bajo "clima educativo"*. En 2003, los estudiantes de la UNGS pertenecientes a estos hogares representaban un 55% del total (frente a una cifra en torno al 20% para el total del país y al 22% para la Universidad de Buenos Aires)[11]. Dicha pertenencia implica para el estudiante no solo un importante déficit en cuanto a la adquisición de capacidades y contenidos formativos, sino, también –en numerosos casos, según las entrevistas observadas–, la in-

[9] UNGS (s/f); Ezcurra (2003).

[10] La degradación de la educación pública primaria y media en la Provincia de Buenos Aires a lo largo de las últimas décadas ha sido extensamente tratada en la literatura. Sus motivos se atribuyen, por lo general, a aspectos socioeconómicos (bajo presupuesto en todas las áreas significativas; impacto de la pobreza en el rendimiento escolar; ejercicio de la docencia por parte de personal sobreempleado; etc.) y a falencias institucionales (como la mala *performance* de la Reforma Educativa instrumentada en el país a partir de 1991). Para un estudio más detallado, véanse por ejemplo DINIECE (2004); Feijóo (2002); Sautu *et al.* (1999).

[11] Este índice se determina a partir del máximo nivel educativo alcanzado por el jefe de hogar y su cónyuge. Puede accederse a información más detallada en UNGS (2005).

comprensión por parte del grupo familiar en cuanto al compromiso, la dificultad, los sacrificios e, incluso, el sentido implicados en el esfuerzo para desarrollar una carrera universitaria[12].

- *Estudiantes fuertemente implicados en la Población Económicamente Activa*. La proporción de estudiantes de la UNGS que no trabaja ni pretende hacerlo es sensiblemente inferior a los promedios nacionales observables[13]. Consecuentemente, un amplio porcentaje de los mismos debe compatibilizar sus estudios con sus exigencias laborales (con frecuencia asociadas al hecho de proveer el principal ingreso al hogar, cumplir turnos rotativos, encontrarse empleados por salarios bajos o *en negro* con la consecuente imposibilidad de solicitar licencias por estudio y otras condiciones obviamente dificultosas para la consecución de cualquier carrera); así como otro amplio subconjunto debe lidiar con las consecuencias del desempleo.
- *Transición académica traumática*. Los aspectos mencionados coadyuvan, en numerosos casos, a una dificultosa asimilación de las nuevas condiciones representadas por el inicio de una carrera universitaria. El carácter traumático de esta transición se observa en factores como[14]:

    a) Fuerte impacto de la distancia entre formación media y de grado, tanto en lo referente al compromiso implicado (tiempo de estudio, concentración, disciplina) como a la profundidad de los contenidos impartidos.

    b) Incomprensión de las metodologías de enseñanza (con fuerte presencia, por ejemplo, de técnicas asociadas al aprendizaje memorístico) y de la lógica apropiada para afrontar la elección de materias: “lo que pasa es que venís del secundario con una carga de materias y acá son tres, cuatro o cinco y decís; ‘si pude con diez, once, cómo no voy a poder con cuatro o cinco’, pero es distinto”[15].

    c) Sensación de pérdida imprevista ante los espacios relegados por el estudio (especialmente en cuanto a ámbitos de sociabilización

[12] Ezcurra (2003).
[13] Un 14,5% de los ingresantes al PCU afirma no trabajar ni desear hacerlo, frente a un 53,2% registrado en el Módulo de Educación de la Encuesta Permanente de Hogares (Espinosa, 2006).
[14] Esta enumeración cuenta con los desarrollos previos de Ezcurra (2003); Gentile y Merlinsky (2003); y Espinosa (2006).
[15] Citado en Ezcurra (2003), p. 12.

externos a la Universidad, pero, también, en cuanto al ejercicio de la maternidad u otros roles familiares).

d) Falta de espacios de estudio adecuados en el hogar. (En este aspecto, el *campus* de la Universidad y, especialmente, ámbitos como su biblioteca son muy valorados por los estudiantes.)

e) En algunos casos, fuerte sensación de culpa ante la imposibilidad de desempeñar determinados roles en la estructura familiar (proveer un ingreso, "no representar un gasto", auxiliar en las tareas domésticas, etc.); máxime en ciertos hogares de bajos ingresos y/o de *bajo o muy bajo clima educativo* en los que esa sensación se refuerza con reclamos concretos por parte de la familia.

f) Fuerte frustración ante la reprobación en exámenes o materias, profundizada en los casos en los que no se comprenden sus motivos. Este último fenómeno se encuentra fuertemente asociado al mencionado en b).

Como queda dicho arriba, al CAU le corresponde la atenuación de los aspectos formativos derivados de los puntos enunciados a los efectos de estimular el buen desempeño académico a lo largo del PCU, minimizando la sensación de *fracaso* por parte de los estudiantes y, con ello, la probabilidad de su deserción de la UNGS.

Los resultados de las entrevistas y encuestas realizadas muestran, en este sentido, un éxito relativo. Numerosos estudiantes del PCU ponderan el hecho de haber realizado una primera aproximación a la vida universitaria incorporando (o recordando, especialmente en el caso de aquellos que ingresan años después de haber terminado su educación media) conocimientos y prácticas fundamentales. Sin embargo, otros tantos destacan las similitudes entre las prácticas pedagógicas propias de la escuela media y las del CAU, de tal modo que éste no contribuiría a *amortiguar* el impacto de la transición a la hora de iniciar los estudios de grado[16].

En este marco se procurará establecer la relevancia del TC y su pertinencia en cuanto a favorecer el ingreso de los estudiantes al PCU.

[16] Ezcurra (2003).

# Apéndice 2
# definición del sistema de signos de Peirce

Se dan aquí las definiciones de los signos de Peirce, desde la perspectiva cognitiva planteada en relación con las analogías con las categorías de Piaget-García, acompañadas de las definiciones establecidas por el propio Peirce, cuya distancia temporal requiere una actualización de enfoque.

**Cualisigno:** es una *cualidad* o *atributo* que tiene la posibilidad de manifestarse en un signo *soporte* existente (color, forma, etc.)

> Un *Cualisigno* es una cualidad que es un signo. No puede actuar como un signo hasta tanto no esté formulado; pero la formulación no tiene relación alguna con su carácter en tanto signo (Peirce, 1974, p. 29).

**Sinsigno:** es una *cosa* realmente existente que actúa como *portador* del cualisigno a través de una *relación* que estará definida por una ley determinada. Por ejemplo, las luces de un semáforo que, a través de los colores (cualisignos), indicarán relaciones de prioridad de cruce entre los peatones y los vehículos en una esquina dada.

> La sílaba *sin* se toma para significar "que es una única vez" (como en las palabras inglesas *single*, *simple*, o en la latina *semel*, etc.) es una cosa o evento real y verdaderamente existente que es un signo. Puede serlo únicamente a través de sus cualidades; de modo tal que involucra a un cualisigno o, en realidad, varios cualisignos. Pero esos cualisignos son de una naturaleza peculiar y solo forman un signo cuando están efectivamente formulados o encarnados (Peirce, 1974, p. 29).

**Legisigno:** es una ley que es un signo y en relación con la que el sinsigno cobra significado. Expresa la articulación significativa dentro de un *sistema de signos*. En el ejemplo anterior, los colores rojo, amarillo y verde expresan una convención de prohibición, alerta de cambio o permiso de paso del peatón o el vehículo, de acuerdo a un sistema articulado de estos signos.

> Es una ley que es un signo. Esta ley es generalmente establecida por los hombres. Todo signo convencional es un legisigno (pero no recíprocamente). No es un objeto único, sino un tipo general que, como se ha acordado, será significante. Cada legisigno significa mediante una instancia de su aplicación, que puede ser llamada una *Réplica* de él. Así la palabra "el" (artículo) puede aparecer de quince a veinticinco veces en una página. En todas esas ocurrencias puede ser una única y misma palabra, el mismo

> legisigno. Cada una de esas instancias es una Réplica. La Réplica es un Sinsigno. En consecuencia todo Legisigno requiere Sinsignos. Pero estos no son Sinsignos ordinarios, como lo son los sucesos que son considerados significantes. Tampoco la Réplica sería significante, si no fuera por la ley que la convierte en tal (Peirce, 1974, p. 29).

**Ícono:** es un signo que expresa una analogía con un objeto (otro signo) por medio de determinados atributos o cualidades. Según el *nivel de generalidad* en que se considere, un ícono puede constituirse como una simple imagen (por ejemplo, los jeroglíficos, Peirce, 1974); como diagramas que expresen relaciones análogas entre diferentes objetos (por ejemplo, el concepto de función mediante diagramas).

> Un *Ícono* es un signo que se refiere al Objeto al que denota meramente en virtud de caracteres que les son propios, y que posee igualmente exista o no exista tal Objeto. Es verdad que, al menos que haya realmente un Objeto tal, el ícono no actúa como signo; pero esto no guarda relación alguna con su carácter como signo. Cualquier cosa, sea lo que fuere, cualidad, individuo existente o ley, es un ícono de alguna otra cosa, en la medida en que es como esa cosa y en que es usada como signo de ella (Peirce, 1974, p. 30).

**Índice:** es un signo que establece una relación solidaria con el objeto al que se refiere de manera existencial (por ejemplo, un hito indicando un punto al que se le asocia un kilometraje sobre una ruta).

> Un *Índice* es un signo que se refiere al Objeto que denota en virtud de ser realmente afectado por aquel Objeto. No puede, entonces, ser un Cualisigno, dado que las cualidades son lo que son independientemente de ninguna otra cosa. En la medida en que el Índice es afectado por el Objeto, tiene, necesariamente, alguna cualidad en común con el Objeto, y es en relación con ella como se refiere al Objeto. En consecuencia, un Índice implica una suerte de Ícono, aunque un Ícono muy especial; y no es el mero parecido con su Objeto, aun en aquellos aspectos que lo convierten en signo, sino que se trata de la efectiva modificación del signo por el Objeto (Peirce, 1974, p. 30).

**Símbolo:** es un signo que toma del objeto un *nivel de generalidad* y le da valor en un sistema de signos (simbólico), (por ejemplo, los símbolos matemáticos, una bandera como representación simbólica de un conjunto de valores, etc.).

> Un *Símbolo* es un signo que se refiere al Objeto que denota en virtud de una ley, usualmente una asociación de ideas generales que operan de modo tal que son la causa de que el Símbolo se interprete como referido a dicho Objeto. En consecuencia, el Símbolo es, en sí mismo, un tipo

> general o ley, esto es, un Legisigno. En carácter de tal, actúa a través de una Réplica. No solo es general en sí mismo; también el Objeto al que se refiere es de naturaleza general. Ahora bien, aquello que es general tiene su ser en las instancias que habrá de determinar. En consecuencia, debe necesariamente haber instancias de existentes de lo que el Símbolo denota, aunque acá habremos de entender por “existente”, existente en el universo posiblemente imaginario al cual el Símbolo se refiere. A través de la asociación o de otra ley, el Símbolo estará indirectamente afectado por aquellas instancias y, por consiguiente, involucrará una suerte de Índice de clase muy peculiar. No será, sin embargo, de ninguna manera cierto que el menor efecto de aquellas instancias sobre el Símbolo pueda dar razón del carácter significante del Símbolo (Peirce, 1974, p. 30).

**Rema:** es un signo que denota una *clase dada* de objetos y que tomará un valor en un sistema lógico o teórico determinado (por ejemplo, ceibo es una clase particular de árbol en relación con la clasificación general de los árboles, etc.).

> Un *Rema* es un Signo que, para su interpretante, es un signo de posibilidad cualitativa, vale decir, representa tal o cual clase de Objeto posible. Un Rema puede, quizás, proporcionar alguna información, pero no se interpreta que la proporciona (Peirce, 1974, p. 31).

**Dicisigno (Signo Dicente):** Es una *proposición* que toma valor en un contexto sémico dado (por ejemplo, los seres humanos se comunican mediante sistemas de signos). Como tal implica una relación.

> Un *Signo Dicente* es un Signo que, para su interpretante, es un Signo de existencia real. Por lo tanto, no puede ser un Ícono, el cual no puede ser interpretado como una referencia a existencias reales. Un Dicisigno necesariamente involucra, como parte de él, a un Rema, para describir el hecho que se interpreta que él indica. Pero es una peculiar clase de *Rema; y aun cuando es esencial para el Dicisigno, de ninguna manera lo constituye* (Peirce, 1974, p. 31).

**Argumento:** es un signo que expresa la *necesidad lógica* de un *concepto* en el *Sistema Interpretativo* y que convalida la *no contradicción* o *coherencia* del *sistema lógico* en el que cobra significado. Como tal, es una *forma de razonamiento*. Da *una razón* relativa al concepto (por ejemplo, deductivo, A=B y B=C, entonces, A=C).

> Un *Argumento* es un Signo que, para su Interpretante, es un Signo de ley. O también podemos decir que un Rema es un signo que se entiende como representación de su Objeto solamente en sus caracteres; que un Dicisigno es un signo que se entiende representa a su Objeto con respecto a la exis-

tencia real; y que un Argumento es un Signo que se entiende representa a su Objeto en su carácter de Signo (Peirce, 1974, p. 31).

El Interpretante del Argumento lo representa como una instancia de una clase general de Argumentos, la cual, en conjunto, siempre tenderá a la verdad. Es esta ley, en alguna forma, la que el argumento insta; y es este "instar" el modo de representación propio de los Argumentos. El Argumento debe ser, por consiguiente, un Símbolo, o un Signo cuyo Objeto es una Ley o Tipo Generales. Debe involucrar a un Símbolo Dicente, o Proposición, que se llama su *Premisa*; pues el Argumento puede solamente instar a la ley instándola en una instancia. Esta Premisa es, sin embargo, muy diferente en fuerza (esto es, en relación con su Interpretante) de una proposición similar simplemente aseverada; y, por otra parte, esto está lejos de ser todo el Argumento. En lo que concierne a otra proposición, llamada Conclusión, a menudo declarada y tal vez requerida para completar el Argumento, ella representa simplemente al interpretante y, del mismo modo, tiene una fuerza, o relación con el Interpretante, peculiar. Hay diferencias de opinión entre los lógicos con referencia a si el interpretante forma o no parte del Argumento; y a pesar de que tales opiniones no han resultado del análisis exacto de la esencia del Argumento, tienen derecho a gravitar. Quien escribe esto, aun sin tener absoluta confianza, se inclina fuertemente a pensar que la Conclusión, aunque represente al Interpretante, es esencial para la completa expresión del Argumento (Peirce, 1974, p. 31).

# Apéndice 3
# Evaluación grupal del Taller de Ciencia

El trabajo final trata de la realización de "una propuesta de investigación". Se trata de un trabajo cuyo objetivo es poder observar de manera puntual la utilización de los conceptos vertidos durante el curso. A continuación, una definición de las etapas de dicha propuesta.

**Tema o problema: sobre qué se va a investigar** (ejemplo, la economía del Virreinato del Río de la Plata).
**Estado de la cuestión**: qué se sabe sobre dicho tema (ejemplo, ¿qué se sabe hasta ahora sobre la economía del Virreinato del Río de la Plata?, ¿dónde buscaríamos?, ¿qué se publicó sobre el tema?, ¿textos de historia?, ¿de economía?, ¿hay diferentes interpretaciones, o todos los autores están de acuerdo?).
**Pregunta**: cuál es la pregunta general que organiza el estudio (ejemplo, ¿cuáles eran las principales actividades productivas del Virreinato?).
**Objetivos**: qué aspectos específicos de la cuestión me interesan indagar (ejemplo, determinar cómo se organizaba la producción en el Virreinato del Río de la Plata: qué se producía, cómo se producía y cómo se distribuía lo producido).
**Métodos de recolección de datos**: cómo voy a conseguir información (ejemplo, ¿existen archivos contables del Virreinato que podamos confrontar con los autores que ya leímos al hacer el Estado de la Cuestión?, ¿y registros privados?, ¿archivos?, ¿información periodística de la época?)

## A. CIENCIAS SOCIALES

Se sugieren algunas líneas problemáticas (a elección de cada grupo) para trabajar como investigación:
a) Los Medios de Comunicación en la Argentina contemporánea
• Los MC y los partidos políticos
• Los periodistas dentro de los MC
• Los MC como empresas
• Los MC y las protestas callejeras
b) El desempleo en la Argentina contemporánea
• El desempleo y la familia
• El desempleo y los trastornos psíquicos personales
• El desempleo y la reinserción en el mercado laboral
• El desempleo y las estadísticas oficiales
c) Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la sociedad
• Las redes sociales y las formas de socialización (ejemplo twitter, facebook, purevolume, my space, etc.)

• Blog y Fotolog como maneras de intervención social y de construcción de redes de amistad
• Las TIC´s y el lenguaje, chats, msn, sms y el lenguaje: ¿nuevos lenguajes para un viejo idioma? Celulares y mp5 en la circulación de la información, la construcción de video-imagen y los bienes culturales
• Relación entre artistas y obras a partir de emule, ares y otros sistemas de descarga
d) La Ciencia y la Tecnología (CyT) y la sociedad argentina
• Valoración social de la CyT
• Relación personal con la CyT
• Valoración de los científicos y técnicos locales
• El papel de la CyT en la Argentina
Durante toda la cursada, se les pide a los alumnos cumplir con las siguientes etapas de preparación del trabajo:
1- Definición del tema-problema:
a) definición del tema de interés;
b) problematización de dicha temática. Por ejemplo, no es lo mismo estudiar el desempleo (a secas) que su influencia sobre el círculo familiar. En el segundo caso hay un problema que se desprende del cruce de variables.
2- Estado de la cuestión: Se realiza un informe resumido sobre lo que se dice del tema. Se puede organizar por temas, por tipos de fuentes, etc. Se recomienda acceder a diarios o revistas (vía Google es lo más sencillo) sobre la temática elegida.
3- Pregunta o hipótesis: a) pregunta que guía la investigación o b) hipótesis que se pretende comprobar. En el primer caso, el trabajo es más exploratorio. En el segundo, hay un conocimiento mayor sobre el tema estudiado.
4- Definición de objetivos: qué aspectos concretos de la problemática se van a indagar. Es fundamental aquí explicar un mínimo de lo que es la operacionalización de una variable (dimensiones e indicadores). Organización lógica de la propuesta de investigación.
5- Métodos de medición y/o de interpretación de la problemática: explicitar qué métodos (cualitativos, cuantitativos) son útiles para la investigación propuesta. Explicitar cómo se los utilizaría en una secuencia de etapas de la investigación para llegar a alguna conclusión.

## B. CIENCIAS NATURALES

Observables (O) y preguntas conductoras (PC)
Se propone realizar la propuesta delineada más abajo con algunas de las siguientes líneas problemáticas (a elección de cada grupo):
1- Estabilidad de los cuerpos- O1: “Un niño inclina levemente una silla hacia atrás apoyada sobre sus dos patas traseras y al soltarla ésta regresa a su posición original de equilibrio.

Simultáneamente, un hombre intenta correr una biblioteca vacía de 1.8m de alto, por 1m de ancho y 0.2m de espesor, también desde su parte trasera y apoyando sus manos a 1m de altura.
La biblioteca se inclina y cae pesadamente al piso".
PC1: ¿Por qué la silla vuelve a su posición original en el primer caso y la biblioteca no en el segundo? ¿De qué características del cuerpo o del medio depende?
2- Caída de los cuerpos- O2: "Al dejar caer una piedra desde 2m de altura en el aire, ésta cae en forma rectilínea y acelerada hasta golpear el piso. En cambio, si se deja caer la misma piedra en un tanque con agua, se registra un movimiento cada vez menos acelerado hasta alcanzar una velocidad uniforme".
PC2: ¿Por qué se da esta diferencia en la caída de los cuerpos? ¿Qué influencia tienen las características del cuerpo? ¿Y las del líquido?
3- Mezcla de líquidos- O3: "Al verter alcohol en agua, ambos líquidos se mezclan. Al verter aceite en agua, el aceite flota en el agua".
PC3: ¿Por qué en el primer caso se mezclan y en el segundo no? ¿De qué características de los líquidos depende?
4- Oscilaciones de un péndulo- O4: "Se separan dos masas de 1kg y 2kg, colgando de dos hilos distintos de 1m de longitud fijos al techo, de sus posiciones de equilibrio vertical y se las deja oscilar desde la misma altura. Las dos masas tardan el mismo tiempo en tomar la posición opuesta y regresar. En cambio, una masa de 1kg que cuelga de un hilo de 4m de longitud tarda exactamente el doble de tiempo en hacer el mismo recorrido angular que las anteriores".
PC4: ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué tiene que ver la longitud del hilo? ¿Y el valor de la masa?
5- Plantas de interiores- O5: "Alejandra y Elena son vecinas y ambas tienen una planta de interior, que riegan con la misma frecuencia. A las dos semanas la planta de Alejandra continúa creciendo y la de Elena se marchita".
PC5: ¿Por qué pudo ocurrir esto? ¿Qué factores influyen en el crecimiento y la conservación de las plantas de interiores?
6- Espuma de cerveza- O6: "Andrés, Sergio y Rodolfo están tomando cerveza. Andrés le sirve cerveza a Rodolfo suavemente en un vaso y éste, ante el temor de que la espuma desborde, apoya el dedo sobre el borde del vaso logrando que la espuma no desborde".
PC6: Sergio pregunta: ¿A qué se debe esto ? ¿A las temperaturas del vaso, la cerveza y el dedo? ¿A la forma del dedo? ¿Se cumple para cualquier situación de volcado de la cerveza?
7- Germinación- O7: "Eduardo y Matías, aunque traviesos, son alumnos correctos. En la escuela les dan una semilla similar a cada uno y les piden que las hagan germinar en un frasco con tierra. Ambos responden a la consigna pero, a pesar de hacer lo mismo, Eduardo tiene éxito y Matías no".
PC7: ¿Cuáles son los factores necesarios para que germine una semilla? ¿La luz? ¿La ausencia de luz? ¿La tierra? ¿El agua?

8- Mitos- O8: "Juan Cuervo estaba preocupado porque Matías Bostero le cuestionaba que él asumiera como hechos de la realidad los siguientes enunciados: la cucharita en la gaseosa impide que escape el gas, es posible poner las pilas comunes gastadas al sol o en el freezer para que se recarguen, los vasos de metal conservan mejor una bebida fría y los de tergopol una caliente, las frazadas calientan, los ventiladores enfrían, etc.".
PC8: Formulen las preguntas correspondientes. ¿Que harían para confirmar o refutar alguno de estos enunciados como "mitos"?
A partir de la elección de algún tema, se pide:
1- Desarrollar un "proyecto de investigación" orientado a responder la pregunta conductora (plantearse nuevas preguntas si lo consideran útil o necesario) que contenga los distintos aspectos trabajados en el Taller.
i) Establecimiento de hipótesis y variables relevantes a tomar en cuenta en las observaciones.
ii) Diseño de una experiencia o experimento destinado a realizar las observaciones estableciendo claramente sus objetivos.
iii) Breve explicación de cómo se relaciona este diseño con las hipótesis preestablecidas y, si fuera posible, cuál es la teoría de la que dependen estas observaciones.
iv) "Instrumentos" a utilizarse para "medir" las variables relevantes.
v) Resumen de los resultados "esperables".
Hasta aquí, la adecuada presentación por parte de los alumnos cumpliría el objetivo de evaluación. Sin embargo, los alumnos que deseen y tengan la posibilidad de realizar el proyecto deben seguir los siguientes puntos:
vi) Análisis e interpretación de los datos de la experiencia o el experimento.
vii) Elaboración de los observables que resultan de las observaciones.
viii) Explicación teórica que dé cuenta de los observables.
ix) Contraste de los resultados con las hipótesis previas y respuesta a la pregunta conductora y otras preguntas que pudieran surgir durante el desarrollo de la actividad. Señalar cuáles de ellas no están respondidas y merecen nuevas investigaciones.

## Algunas actividades del Taller

### *Observación y Teoría*

Actividad 2.1
1-. La observación: un caso concreto
Para presentar un ejemplo de observación, comenzaremos con algo muy sencillo: traten de describir el aula en la que se dicta el Taller de Ciencia. Para eso, es conveniente que formen grupos de tres a cinco compañeros para discutir cada una de las observaciones realizadas y las anoten en un papel. Luego, con la ayuda de los docentes, comparen los resultados con los otros grupos y, si existen diferencias, determinen a qué se deben.

2-. Siguiendo con la observación
En la siguiente actividad se construirá una serie de preguntas que nos permita describir una mano.

Consignas para la primera parte de la actividad
a) Para comenzar, escriba la descripción de su mano[17].
b) A partir de la descripción, elabore una lista de preguntas relevantes que permitan diferenciar una mano de otros objetos.

Consignas para la segunda parte de la actividad
Consideren las preguntas elaboradas por todos los integrantes del grupo.
Sobre la base de las preguntas de cada integrante del grupo, reformulen el cuestionario de modo de presentar todos los aspectos considerados sin caer en repeticiones.

Consignas para la tercera parte de la actividad
Con la ayuda de los docentes, se construirá una lista general teniendo en cuenta los resultados de todos los grupos y se verificará la utilidad de la lista de preguntas obtenida. Se utilizará esa lista de preguntas para establecer, a partir de ella, si un objeto es una mano o no.
3-. ¿Depende la observación del instrumento de medición?
Con una lupa provista por los docentes, intenten encontrar nuevas características de las manos observadas.
¿Todas las observaciones del punto anterior se pueden realizar usando la lupa o algunas quedan fuera de las posibilidades de esa herramienta?

### ***Análisis e interpretación de datos***

Actividad 5.3
La construcción de un modelo
Se realizará la siguiente experiencia:
Se toman dos volúmenes iguales (100cc) de alcohol y agua y se los mezcla ¿Qué piensan que va a suceder?
Escriban en la tabla siguiente algunas de las características que esperan del proceso. Háganlo en forma de *Hipótesis*. Para ello, conviene discutir con los compañeros de grupo las distintas posibilidades.

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |

[17] Como ya vio en el Taller de Lectoescritura que acaba de cursar, toda descripción tiene ciertas características que ayudan a organizar su información. Tenga en cuenta esta particularidad al planificar su escritura.

| | |
|---|---|
| **4** | |
| **5** | |
| **6** | |
| 7 | |

Una vez logrado lo anterior, discutan colectivamente con las suposiciones hechas. Luego de terminada la discusión, el docente realizará la experiencia y el *análisis e interpretación de datos* correspondiente, con la colaboración de los alumnos.
Ahora que el docente realizó la experiencia, podrán determinar, por un lado, si las *hipótesis* que han planteado son correctas o no, y por otro, si aparecieron resultados no esperados.
¿Pueden *explicar* los resultados obtenidos?

**Realicemos una nueva experiencia:**

Esta vez, en lugar de mezclar dos volúmenes iguales de agua y alcohol, el docente mezclará (100cc) de garbanzos y otro tanto de arroz.
¿Pueden anticipar en esta experiencia lo que sucederá con el volumen resultante?

**Preguntas**

a) ¿Se puede aplicar este resultado para explicar lo sucedido con la experiencia del alcohol y el agua? ¿Qué hipótesis debe hacerse sobre las características de los líquidos para poder aplicarlo? Discutan con sus compañeros.
b) A través de la discusión de la pregunta anterior, tal vez descubran características diferenciadas para cada líquido, pero sin saber cuál de los líquidos –el agua o el alcohol debe cumplirlas–. En base a las características determinadas, ¿pueden diseñar un experimento que determine a qué líquido corresponde cada característica? Para ello, sigan el siguiente procedimiento: enuncien claramente la hipótesis planteada. En base a ella, planteen el experimento detallando el procedimiento y los elementos necesarios.
c) Una vez discutido y diseñado por cada grupo, propongan al docente los experimentos pensados por cada grupo para que puedan acordar entre todos la mejor forma de llevar a cabo la determinación.
d) El docente realizará la experiencia acordada por todos.
e) ¿Se puede llegar a la conclusión de cuál característica corresponde a cada líquido?
f) Discutan con sus compañeros de grupo los límites de validez del modelo propuesto y, luego, coméntenlo al resto de la clase con la ayuda del docente.

# Bibliografía

Becker, M. L.; Pietrocola, N. y Sánchez, C. *Aritmética*, Buenos Aires: Red Olímpica, 2001.

Castorina, J. A. y Palau, G. D. *Introducción a la lógica operatoria de Piaget*, Barcelona: Paidos, 1981.

Freire, P. *Pedagogía del oprimido*, Buenos Aires: Siglo XXI, 1970.

García, R. *El Conocimiento en construcción*, Barcelona: Gedisa, 2000.

García, R. *Sistemas complejos*, Barcelona: Gedisa, 2006.

Hernández Ulloa, A. R. *La equilibración como razonamiento abductivo*, Guanajuato: Universidad de Guanajuato, EDUCATIO 5, Invierno 2008.

http://www.educatio.ugto.mx/pdfs/educatio5/la_equilibracion_como_razonam.pdf

Marafioti, R. (compilador). *Recorridos semiológicos*, Buenos Aires: Eudeba, 2002.

Peirce, C. S. *La ciencia de la semiótica*, Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974.

Piaget, J. *Las formas elementales de la dialéctica*, Barcelona: Gedisa, 2002.

Piaget, J. y García, R. *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México: Siglo XXI, 1984.

Piaget, J. y García, R. *Hacia una lógica de las significaciones*, Barcelona: Gedisa, 1997.

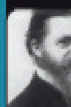
Sarmiento, D. F. *Método de lectura gradual*, Buenos Aires: Clarín, 2011.

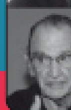
Vitale, A. *El estudio de los signos. Peirce y Saussure*, Buenos Aires: Eudeba, 2002.

Vygotsky, L. *Pensamiento y Lenguaje*, Barcelona: Paidos, 1995.

**La Colección Educación** de la Universidad Nacional de General Sarmiento reúne la producción editorial que resulta de las investigaciones, actividades y desarrollos en las áreas temáticas de educación, pedagogía, programación de la educación, política educativa, historia de la educación y didáctica. Estas líneas de investigación y docencia son fundamentales en el proyecto académico de la UNGS y tienen un desarrollo constante y permanente.

Este texto surge a partir de la práctica docente en el curso de ingreso de la Universidad Nacional de General Sarmiento. Los estudiantes muestran serias dificultades para desarrollar conceptos preliminares, especialmente en Matemática. Se constata que existe una suerte de *barrera semiótica* al acceso cognitivo. Para investigar esta cuestión, se realiza un diagnóstico, que apunta a saber cómo desarrollan algunas operaciones básicas y su dependencia del manejo de los *signos*, intentando también caracterizar los esquemas conceptuales con los que llegan los estudiantes. La interpretación de los resultados del diagnóstico habilita y se funda en el abordaje del nexo entre las formas de conceptualización y el soporte semiótico, lo que conduce a una elaboración teórica que permite compatibilizar distintos aspectos de las teorías de Jean Piaget y Rolando García, Lev Vygotski y Charles Peirce, y que, simultáneamente, da lugar a una reinterpretación de las formas de conceptualización, lo que permite tomar en cuenta tanto los aspectos cognitivos como semióticos del aprendizaje, iluminando y redescubriendo el rol de las inferencias abductiva, inductiva y deductiva y su carácter solidario.





Colección Educación
Universidad Nacional de General Sarmiento

www.ungs.edu.ar/ediciones

9 789876 301244